

94  
21



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**ANALISIS NUMERICO DEL FLUJO EN  
VERTEDORES DE EXCEDENCIA PROVISTOS  
DE CODO VERTICAL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA  
P R E S E N T A :  
GABRIEL HERNANDEZ PEREZ**

**DIRECTOR DE TESIS:  
ALEJANDRO RODRIGUEZ VALDES**



**MEXICO, D. F.**

**JULIO DE 1988**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A mis padres, por todo su apoyo,  
cariño y comprensión.**

**A mi hermana. Su lucha ha sido el  
mejor ejemplo que he recibido.**

**A Dios.**

## **AGRADECIMIENTOS**

**A la Universidad Nacional Autónoma de México,**

**A la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.**

**Al Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M.**

**En especial al Dr. Alejandro Rodríguez V. y al Dr. Arturo Palacio P., por el apoyo y paciencia que me brindaron durante la realización de esta tesis.**

**RESUMEN**

A fin de entender las causas del fenómeno de cavitación que se produce en los vertedores de excedencia provistos de codo vertical, se realizó un análisis numérico del flujo en los mismos utilizando el código de fenómenos de transporte PHOENICS. Se hace especial énfasis en el papel que pudiera tener la turbulencia en el mismo. El cálculo de la superficie libre se realizó a través del Método de la Ecuación Escalar y se utilizó el Modelo Algebraico de Esfuerzos de Reynolds propuesto por *Shih, Zhu y Lumley (1994)*. Se comparan satisfactoriamente los resultados obtenidos con datos experimentales. Con el modelo obtenido se realiza un análisis del flujo en dos vertedores con distinto radio de curvatura. Se observa que en la sección terminal del codo se presenta una brusca caída de la presión, junto con un fuerte cambio en la magnitud y dirección de la componente normal de la velocidad y una ligera reducción en la intensidad de la turbulencia, los cuales se acentúan en el codo de menor radio. Estos fenómenos hacen del tramo aguas abajo del codo una zona sumamente propensa al daño por cavitación.

## **CONTENIDO**

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Descripción del problema .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2. Objetivo .....</b>	<b>3</b>
<b>1.3. Procedimiento.....</b>	<b>4</b>
<b>2. FLUJO EN CANALES .....</b>	<b>5</b>
<b>2.1. Flujo en canales y su clasificación .....</b>	<b>5</b>
<b>2.2. Estado del flujo .....</b>	<b>6</b>
<b>2.3. Distribución de la presión en la sección de un canal.....</b>	<b>8</b>
<b>2.4. El principio de energía .....</b>	<b>10</b>
<b>3. TURBULENCIA EN CANALES .....</b>	<b>12</b>
<b>3.1. Naturaleza de la turbulencia .....</b>	<b>12</b>
<b>3.2. Ecuaciones de Reynolds .....</b>	<b>13</b>
<b>3.3. Concepto de viscosidad turbulenta .....</b>	<b>16</b>
<b>3.4. Capa límite y rugosidad de la superficie .....</b>	<b>18</b>
<b>3.4.1. Concepto de capa límite .....</b>	<b>18</b>
<b>3.4.2. Rugosidad de superficie .....</b>	<b>20</b>
<b>3.4.3. Cálculo de la capa límite .....</b>	<b>21</b>
<b>3.4.4. Distribución de la velocidad en flujo turbulento .....</b>	<b>21</b>
<b>3.5. Ecuaciones para la energía turbulenta .....</b>	<b>26</b>
<b>3.6. Regiones del flujo en canales .....</b>	<b>28</b>
<b>3.7. Funciones universales para la intensidad de la turbulencia .....</b>	<b>29</b>
<b>3.8. Efecto de la curvatura en la turbulencia en canales .....</b>	<b>29</b>
<b>3.9. Efecto de la superficie libre en la turbulencia .....</b>	<b>31</b>
<b>4. MODELO NUMÉRICO .....</b>	<b>34</b>
<b>4.1. Clasificación de los esquemas de solución .....</b>	<b>34</b>

4.2. Solución de las ecuaciones de transporte mediante el método de volumen finito .....	34
4.3. Métodos para el cálculo de flujos con superficie libre .....	37
4.3.1. El método GALA .....	37
4.3.2. Determinación de la superficie libre mediante el método de la ecuación escalar .....	38
4.4. Algoritmo de solución .....	40
4.4.1. Ecuación de corrección de la presión .....	40
4.4.2. Proceso de cálculo .....	42
4.5. Modelo de turbulencia .....	43
4.5.1. Visión general de los modelos de turbulencia .....	43
4.5.2. El modelo $k-\epsilon$ .....	45
4.5.3. Modelo Algebraico de Esfuerzos de Reynolds .....	47
5. VERIFICACIÓN DEL MODELO .....	50
5.1. Procedimiento .....	50
5.2. Dominio de solución .....	51
5.3. Condiciones de frontera .....	52
5.4. Condiciones iniciales .....	53
5.5. Resultados .....	55
5.5.1. Vertedor con codo de radio 2 m. y ángulo de $45^\circ$ .....	55
5.5.2. Vertedor con codo de radio 1.172 m. y ángulo de $60^\circ$ .....	59
6. ANÁLISIS DEL FLUJO EN VERTEDORES DE CODO VERTICAL .....	65
6.1. Dominio, condiciones iniciales y de frontera .....	65
6.2. Resultados .....	66
6.3. Observaciones complementarias .....	75
7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	77
7.1. Modelo numérico .....	77
7.2. Vertedores de excedencia provistos de codo vertical .....	78

<b>8. REFERENCIAS .....</b>	<b>80</b>
<b>9. APENDICE A: Ecuaciones de transporte en coordenadas curvilíneas generales ....</b>	<b>84</b>
<b>10. APÉNDICE C: Obtención de la relación entre <math>k</math>, <math>\varepsilon</math> y <math>\nu_t</math> a través del análisis dimensional .....</b>	<b>86</b>
<b>11 APÉNDICE C Archivos auxiliares para vertedor con radio de 41 m. ....</b>	<b>87</b>
<b>C1. Archivo de datos de entrada Q1 .....</b>	<b>87</b>
<b>C.2. Modificaciones a la subrutina GROUND.F .....</b>	<b>90</b>

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

En los vertedores de presas provistos de codo vertical, como el de la central hidroeléctrica de Infiernillo en México, se han presentado severos daños por cavitación, los cuales son más intensos en la sección terminal del tramo curvo. Es necesaria una mayor comprensión de los fenómenos involucrados en el flujo en dichas estructuras a fin de poder obtener diseños efectivos que prevengan este problema.

La cavitación se define como la formación de burbujas, i.e. "cavidades", dentro de un líquido debido a un cambio en la presión local del flujo por debajo de la presión de vaporización. El daño asociado a este fenómeno no está ligado a la formación de las burbujas, sino a la dinámica de su colapso: el diámetro de la burbuja decrece hasta alcanzar un valor mínimo para luego crecer -generando durante el crecimiento una onda de choque- hasta alcanzar un máximo y volver a decrecer. Este ciclo se repite varias veces, y en cada ciclo el diámetro alcanza un valor menor al anterior, hasta que la burbuja se vuelve microscópica. *Hickling & Plesset (1964)* señalan que a una distancia de dos veces el radio de la burbuja inicial, la presión puede llegar a ser hasta de 200 veces la presión ambiente en el sitio del colapso. Estas ondas ocasionan que otras burbujas también se colapsen, hasta que el fenómeno es simultáneo, produciendo intensidades de presión mucho más elevadas. Cuando la burbuja se colapsa bajo un gradiente de presión o cerca de una frontera, el mecanismo se vuelve asimétrico, y se crean fuertes "microcorrientes" como se ilustra en la fig 1.1b y c. El impacto de las ondas de choque y las "microcorrientes" sobre la superficie son la causa del daño a las estructuras.

La principal causa de este fenómeno en estructuras hidráulicas es, según la Agencia de Reclamación de los E.E.U.U., la turbulencia generada por las irregularidades aisladas de la superficie y el flujo cortante (*Falvey, 1990*). Cuando el agua fluye en canales

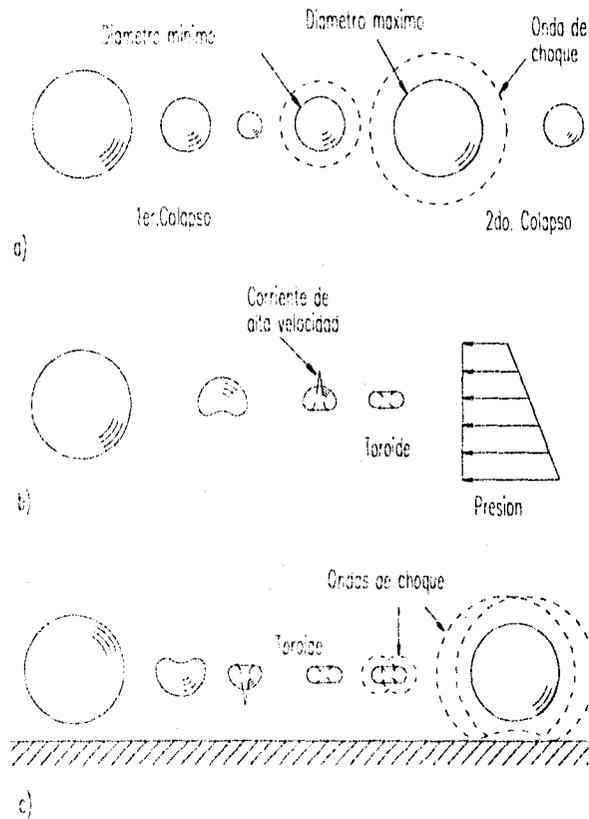


Fig.1.1. a) Dinámica del colapso de una burbuja. b) Colapso bajo un gradiente hidráulico. c) Colapso cercano a una frontera.

de fuerte pendiente, su velocidad se incrementa y la profundidad del flujo disminuye. Este efecto combinado causa un incremento en el potencial de cavitación, requiriéndose sólo algunas irregularidades en la superficie para que inicie el fenómeno. Dicho estudio señala la presencia de vórtices en el flujo como un importante factor que influye en el colapso de las burbujas. Los flujos cortantes generan vórtices que atrapan a las burbujas en su eje. El daño causado por un grupo de burbujas atrapado en el interior de un vórtice puede ser mucho mayor que el causado por el colapso de las burbujas individuales.

En el caso particular de vertedores provistos de codo vertical, la fuerza centrífuga que se genera en el tramo curvo provoca un incremento considerable de la presión sobre el fondo, la cual decrece rápidamente cuando la vena ingresa a la rama horizontal aguas

abajo. *Bribiesca et al. (1986, 1987, 1988)* señalan que la cavitación en la sección terminal de los codos verticales puede explicarse en términos del rápido descenso de la presión de fondo en ese sitio, que se ve favorecida por la presencia de "crestas" y "valles" en el valor de la presión, ligados probablemente a la inclusión de aire y al sistema de ondas cruzadas que se inician desde la entrada de la rama inclinada. Este último fenómeno se acentúa al terminar el codo, cuando cesa la acción de la fuerza centrífuga, y ocasiona, junto con la turbulencia característica del flujo, caídas de presión, la cual puede tomar valores instantáneos lo suficientemente bajos como para ocasionar la formación de las burbujas de vapor asociadas a la cavitación.

En el presente trabajo se hace notar que la presencia de dichas "crestas" y "valles" pueden deberse también a la formación de vórtices característicos de los flujos en canales curvos. En este caso, la presencia de dichos vórtices significaría un incremento en el potencial de cavitación.

Hasta el momento, el principal medio para prevenir el daño por cavitación ha consistido en la construcción de superficies más lisas o con mejores materiales, y en algunos casos el uso de aireadores. Sin embargo, *Frizell & Metford (1993)* señalan, en un estudio realizado para la Agencia de Reclamación de los E.E.U.U., que los esfuerzos deben dirigirse a la mejora en la geometría de los diseños.

## 1.2. OBJETIVO

Debido a la complejidad de las ecuaciones que gobiernan un flujo como el que se presenta en los vertedores de excedencia, ha sido necesario recurrir al uso de modelos numéricos para tratar de predecir el comportamiento hidráulico. Dichos modelos han sido unidimensionales (*Falvey, 1990; Bribiesca et al., 1986 y 1987*) y bidimensionales (*Bribiesca et al., 1987; Bribiesca, 1994*). Estos modelos han permitido entender algunas de las causas del fenómeno, lo que ha conducido a recomendaciones específicas para la solución del problema (*Falvey, 1990*): cambios en la curvatura y sección del canal para

aumentar la presión en el fondo e incremento de la rugosidad de las paredes<sup>1</sup>, i.e. de la fricción, a fin de reducir la velocidad del flujo.

Con base en un modelo numérico bidimensional donde se calcula la superficie libre junto con las variables de presión, velocidad y aquellas asociadas a la turbulencia, el presente trabajo pretende contribuir a la comprensión de los fenómenos observados hasta ahora experimentalmente o a través de otros modelos numéricos en el flujo en vertedores de excedencia.

### 1.3. PROCEDIMIENTO

Los pasos seguidos en el presente estudio fueron:

1. Análisis y selección del Método de la Ecuación Escalar para el cálculo de la superficie libre.
2. Incorporación del Modelo Algebraico de Esfuerzos de Reynolds desarrollado por *Shi, Zhu & Lumley (1994)* al código de fenómenos de transporte PHOENICS.
4. Validación del modelo obtenido con datos experimentales obtenidos en el Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M.
5. Descripción y análisis del comportamiento hidráulico de vertedores con codo vertical utilizando el modelo obtenido.

El presente trabajo presenta una síntesis de los pasos mencionados, así como de la teoría requerida (capítulos 2, 3 y 4) para el desarrollo del modelo y la interpretación de los resultados obtenidos.

---

<sup>1</sup> Esto puede parecer contrario a las recomendaciones usuales de construir superficies más lisas. Sin embargo, la causa real de la cavitación se halla en la presencia de irregularidades aisladas, y no en una rugosidad uniforme de la superficie, por lo que un incremento de esta última puede ayudar a prevenir el fenómeno de cavitación.

## 2. FLUJO EN CANALES

### 2.1 FLUJO EN CANALES<sup>1</sup> Y SU CLASIFICACIÓN.

Por definición un canal es un conducto para flujo el cual tiene una superficie libre, i.e., una de las fronteras está expuesta a la atmósfera. La superficie libre es esencialmente una interfase entre dos fluidos de diferente densidad; e.g. en el sistema agua-aire, la densidad del aire es mil veces menor que la del agua. El movimiento del fluido es causado generalmente por efectos gravitacionales y la distribución de la presión en dirección normal al flujo es hidrostática cuando las líneas de corriente son rectas y paralelas. Los flujos en canales son casi siempre turbulentos y no son afectados por las fuerzas de tensión superficial.

Es posible clasificar el tipo de flujo que ocurre en un canal con base en diversos criterios. Uno de estos criterios se basa en la variación de la profundidad<sup>2</sup> del flujo  $d$  en el tiempo y en el espacio. Si se toma el tiempo como criterio, entonces un flujo puede ser clasificado como *permanente* si la profundidad del flujo no cambia con el tiempo; o bien, como *no permanente* cuando la profundidad cambia con el tiempo.

Si el espacio es utilizado como criterio de clasificación, entonces un flujo puede ser clasificado como *uniforme*, si el tirante del flujo varía con la distancia o como *no uniforme* en caso contrario. En la práctica la terminología *uniforme* o *no uniforme* por lo general implica que el flujo también es permanente. El flujo *no uniforme*, también llamado *variado*, es clasificado como *rápidamente variado* si la profundidad del flujo cambia significativamente en una distancia relativamente corta o *gradualmente variado* si así no fuera.

---

<sup>1</sup> El término usual en la literatura es "canal abierto".

<sup>2</sup> El término "profundidad" se utilizará como definición de la distancia vertical desde el punto más bajo de la sección del canal a la superficie del agua. A fin de no confundirlo con la "profundidad de la sección"  $h$  o profundidad medida perpendicularmente desde el fondo del canal, a esta última se le denominará tirante en el resto del presente trabajo.

## 2.2 ESTADO DE FLUJO.

El estado o comportamiento del flujo en un canal es gobernado básicamente por las fuerzas viscosas, de gravedad y la magnitud de éstas respecto a las fuerza inercial generada. En el caso de la relación entre las fuerzas de viscosidad y de inercia, un flujo puede ser clasificado como laminar, transicional o turbulento. Un flujo *laminar* es aquel en que las fuerzas de viscosidad son relativamente grandes y amortiguan rápidamente las perturbaciones ocasionales del flujo. En el flujo *turbulento* las fuerzas inerciales predominan sobre las fuerzas viscosas, presentándose fluctuaciones rápidas y aparentemente aleatorias. Entre los estados laminar y turbulento hay uno mixto o estado de *transición*. La base para esta clasificación es el parámetro adimensional conocido como número de Reynolds, definido como:

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu} \quad (2.2.1)$$

donde  $U$  es una velocidad característica del flujo,  $L$  es una longitud característica y  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido. En el flujo en canales la longitud característica comúnmente utilizada es el radio hidráulico  $R$  que se define como la razón del área de flujo  $A$  al perímetro mojado  $P$ :

$$R \equiv \frac{A}{P} \quad (2.2.2)$$

Utilizando dicha longitud característica se considera:

$Re \leq 500$	Flujo laminar
$500 \leq Re \leq 12\ 500$	Flujo de transición
$12\ 500 \leq Re$	Flujo turbulento

Considerando la relación entre las fuerzas de gravedad y las de inercia un flujo puede ser considerado como subcrítico, crítico supercrítico. El parámetro sobre el cual se basa esta clasificación es conocido como el número de Froude:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (2.2.3)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $U$  es una velocidad característica del flujo y  $Z$  es una longitud característica. En este caso se utiliza como longitud la profundidad hidráulica, definida como el área de la sección transversal del agua, normal a la dirección del flujo en el canal, dividida por el ancho de la superficie libre. En el caso de canales rectangulares, ésta es igual a la profundidad de la sección del flujo  $h$ , al que denominaremos tirante.

Si  $Fr = 1$ , las fuerzas inerciales y gravitacionales están en equilibrio, y el régimen se conoce como *crítico*. Si las fuerzas gravitacionales predominan,  $Fr < 1$  y el flujo se denomina *subcrítico*. Si  $Fr > 1$ , las fuerzas de inercia predominan y el flujo se denomina *supercrítico*. En la mecánica de ondas de agua, la velocidad crítica,  $U = \sqrt{gd}$ , se identifica como la velocidad de una onda elemental de gravedad en aguas someras. Con base en esta observación puede aplicarse la siguiente interpretación a los flujos de régimen subcrítico y supercrítico:

a) Cuando el flujo es subcrítico, la velocidad del flujo es menor que la velocidad de una onda infinitesimal de gravedad. Por lo tanto, una onda puede propagarse aguas arriba contra el flujo, por lo que las áreas aguas arriba están en comunicación hidráulica con las áreas aguas abajo.

b) Cuando el flujo es supercrítico, la velocidad del flujo es mayor que la velocidad de una onda infinitesimal de gravedad. Por lo tanto, como una onda no puede propagarse aguas arriba contra el flujo, las áreas del canal que se encuentran aguas arriba no están en comunicación hidráulica con las que se encuentran aguas abajo.

Un efecto combinado de viscosidad y gravedad puede producir cualquiera de cuatro regímenes de flujo en un canal: *laminar-subcrítico*, *laminar-supercrítico*, *turbulento-supercrítico* y *subcrítico-turbulento*. Los primeros dos regímenes no se encuentran en la hidráulica de canales pues el flujo es casi siempre turbulento, aunque ocurren con frecuencia donde hay profundidades muy pequeñas. Se cree que la acción de la gravedad puede tener un efecto definitivo sobre la resistencia del flujo en canales en el

rango turbulento: en el flujo de régimen supercrítico-turbulento (como el que se presenta en los vertedores de excedencia de las presas), el factor de fricción tiende a aumentar con el incremento del número de Froude. Generalmente este efecto es despreciable para números de Froude menores que 3 (Chow, 1982).

### 2.3. DISTRIBUCIÓN DE LA PRESIÓN EN LA SECCIÓN DE UN CANAL.

La distribución de la presión sobre la sección transversal de un canal en un flujo paralelo es hidrostática; es decir, la distribución es lineal ( $p = \gamma h$ , donde  $\gamma$  es el peso específico del agua y  $h$  es el tirante) y puede ser representada por una línea recta (Fig. 2.3a). Esto se conoce como la *ley hidrostática de la distribución de la presión*. Un flujo se considera paralelo cuando las líneas de corriente no tienen curvatura sustancial ni divergencia. Consecuentemente, no hay componentes apreciables de aceleración normales a la dirección del flujo que deformen la distribución hidrostática de la presión. En la práctica, el flujo uniforme y el flujo gradualmente variado son considerados flujos paralelos pues el cambio en la profundidad del flujo es tan suave que las líneas de corriente no tienen curvatura o divergencia apreciable, por lo que su efecto en la distribución de la presión es despreciable. Si la curvatura de las líneas de corriente es importante, el flujo se conoce como *flujo curvilíneo*. El efecto de la curvatura consiste en producir componentes apreciables de aceleración o fuerza centrífuga normales a la dirección del flujo y la presión ya no presenta una distribución hidrostática en la sección. El flujo curvilíneo puede ser convexo (Fig. 2.3b) o cóncavo (Fig. 2.3c). En el flujo cóncavo, las fuerzas centrífugas refuerzan a las de gravedad; así, la presión resultante es más grande que la presión hidrostática. En el caso de flujo convexo, las fuerzas resultantes de la curvatura de las líneas de corriente actúan contra las de gravedad, por lo que la presión resultante es menor que la hidrostática.

Si un canal tiene perfil curvo, entonces la desviación  $p_c$  de la distribución hidrostática de la presión puede calcularse a partir de la aplicación de la segunda ley de Newton como:

$$\frac{p_c}{\gamma} = \frac{h \bar{u}^2}{g r} \quad (2.3.1)$$

donde  $\bar{u}$  es la velocidad media del flujo y  $r$  es el radio de curvatura del fondo del canal. La verdadera distribución de la presión en una sección es entonces:

$$\frac{p}{\gamma} = h \pm \frac{h \bar{u}^2}{g r} \quad (2.3.2)$$

Los signos más y menos corresponden a flujos cóncavos o convexos respectivamente.

En canales de gran pendiente la velocidad del flujo es normalmente elevada. Cuando esta velocidad alcanza cierta magnitud, el agua que fluye arrastra aire<sup>3</sup> produciendo un aumento en su volumen y profundidad. Si la densidad media de la mezcla aire-agua es conocida, ésta debe ser utilizada en lugar de la densidad de agua pura en el cálculo del flujo.

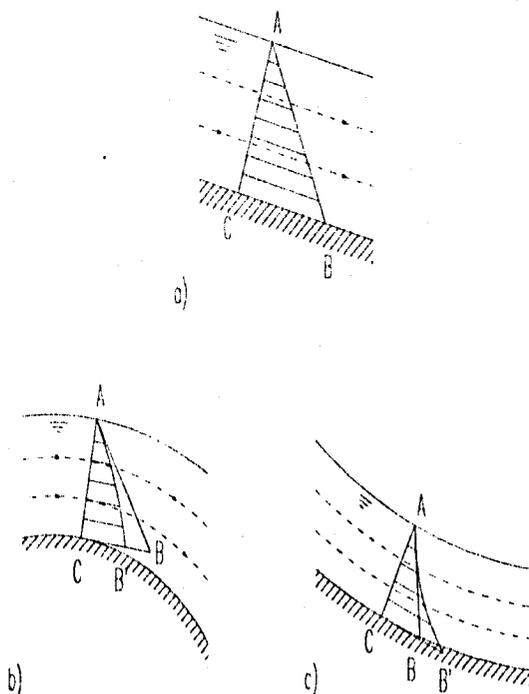


Fig 2.1. (a) Distribución de la presión en un flujo paralelo. (b) Distribución de la presión en un flujo convexo. (c) Distribución de presión en flujo cóncavo.

<sup>3</sup> El aire es arrastrado en el agua, generalmente a velocidades de 6 m/s. Además de la velocidad hay otros factores tales como la condición de entrada, rugosidad, distancia recorrida, sección del canal, volumen de descarga, etc., que tienen influencia sobre el aire arrastrado.

## 2.4. EL PRINCIPIO DE ENERGIA

De la mecánica de fluidos elemental se conoce que la energía total del agua sobre una línea de corriente está dada por la ecuación de Bernoulli:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

donde  $H$  es la energía total,  $z$  es la elevación de la línea de corriente sobre un plano de referencia,  $u$  es la velocidad de la línea de corriente. La suma  $z + p/\gamma$  define la elevación de la línea de gradiente hidráulico sobre el plano de referencia; en general, este valor varía de punto a punto a lo largo de la línea de corriente.

La energía específica de un flujo en canal es, considerando al flujo como unidimensional y utilizando la ec. (2.3.2):

$$E = z + h + \frac{\bar{u}^2}{2g} \pm \frac{h \bar{u}^2}{g r} \quad (2.4.1)$$

Cuando no se consideran pérdidas en el flujo debidas a la fricción en la pared y la disipación de energía cinética turbulenta, se puede suponer que el valor de energía específica en el flujo es constante. Un examen de la ecuación anterior demuestra que si la elevación, sección, gasto y radio de curvatura son especificados, entonces la energía específica es función del tirante del flujo. Si  $h$  es graficado contra  $E$  (Fig 2.2) resultará una curva con dos ramas. La rama AC se aproxima asintóticamente al eje  $E$ , y la rama AB se aproxima asintóticamente a la línea  $E = h$ . Para todos los puntos sobre el eje  $E$  mayores que el punto A, hay dos posibles tirantes, conocidos como tirantes alternos del flujo.

Se puede demostrar (Chow, 1982; French, 1988) que el punto A, correspondiente al valor mínimo de energía específica, está dado por:

$$\bar{u} = \sqrt{gh}$$

que corresponde al valor de velocidad crítica. Con este conocimiento, la rama AC puede interpretarse como representativa de flujos supercríticos, mientras que la rama AB representa flujos subcríticos.

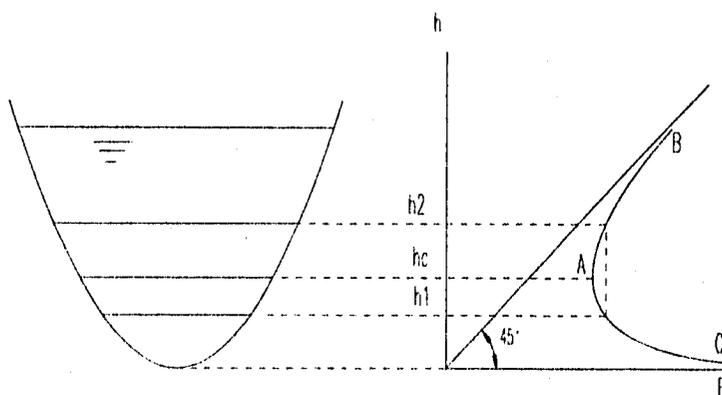


Fig. 2.2. Curva de energía específica.

En el caso de canales rectangulares de ancho  $b$  y con un gasto  $Q$ , la velocidad promedio es:

$$\bar{u} = \frac{Q}{hb} = \frac{q}{h} \tag{2.4.2}$$

donde  $q$  es el gasto por unidad de ancho. Sustituyendo la ecuación anterior para la velocidad crítica, y despejando el tirante se tiene:

$$h_c = \left[ \frac{q^2}{g} \right]^{\frac{1}{3}} \tag{2.4.3}$$

Un cambio abrupto en la pendiente de un canal o en su sección transversal, tal como ocurre en la cresta de un vertedero de desborde, origina que el flujo pase de subcrítico a supercrítico (French, 1988).

### 3. TURBULENCIA EN CANALES

#### 3.1. NATURALEZA DE LA TURBULENCIA

El flujo en vertedores de desborde, y en general el flujo en canales, es turbulento. Las características más importantes de los flujos turbulentos son:

*Irregularidad.* Una característica de dichos flujos es que las variables que los describen varían en forma muy irregular o aleatoria, tanto en el espacio como en el tiempo.

*Difusividad.* El movimiento irregular asociado a la turbulencia transporta cantidad de movimiento, induciendo una difusión mucho mayor que la difusión molecular.

*Altos números de Reynolds.* Los flujos turbulentos siempre ocurren a elevados números de Reynolds. La turbulencia se origina como una inestabilidad de los flujos laminares cuando el efecto de las fuerzas viscosas son poco importantes comparadas con el de las fuerzas de inercia. La interacción entre los términos viscosos y los términos no lineales que representan a dichos efectos en las ecuaciones de movimiento es muy compleja.

*Vorticidad fluctuante.* La turbulencia se caracteriza por altos niveles de vorticidad fluctuante. Dichas fluctuaciones son necesariamente tridimensionales.

*Disipación.* Los flujos turbulentos son siempre disipativos. Los esfuerzos cortantes viscosos realizan un trabajo de deformación que incrementa la energía interna del fluido a expensas de la energía cinética de la turbulencia, la cual requiere un suministro continuo de energía para compensar las pérdidas viscosas.

*Continuidad.* La turbulencia es un fenómeno continuo, pues aún en las escalas más pequeñas las fluctuaciones turbulentas son mucho mayores que cualquier escala de

longitud molecular, por lo que los flujos turbulentos están gobernados por las ecuaciones de la mecánica de fluidos.

Cuando todas las propiedades estadísticas del flujo son independientes de la posición en el espacio se dice que la turbulencia es *homogénea*. Cuando es independiente de la orientación, traslación y rotación del sistema de ejes escogido se le denomina como *isotrópica*. En el caso de que la turbulencia sea homogénea, la energía se transfiere de los remolinos grandes de baja frecuencia a vórtices más pequeños de alta frecuencia, hasta que finalmente se disipa como calor por fricción viscosa.

En algunos casos, la turbulencia no es homogénea ni isotrópica; como en la turbulencia por cortante, donde la intensidad de las fluctuaciones de velocidad en dirección de la corriente es mayor que la intensidad de las fluctuaciones en otras direcciones.

### 3.2. ECUACIONES DE REYNOLDS.

En esta sección se establecen las ecuaciones de transporte que describen el movimiento de un flujo turbulento incompresible. Como se mencionó anteriormente, aun cuando las ecuaciones fundamentales escritas para las variables instantáneas describen al flujo de manera exacta, debido a limitaciones matemáticas no es posible obtener una solución general a dichas ecuaciones. Además, los remolinos más pequeños asociados al flujo turbulento son del orden de  $10^{-3}$  veces menores que el dominio, por lo que con la tecnología de cómputo disponible no es práctico resolver dichas ecuaciones numéricamente, pues para poder calcular los remolinos con precisión suficiente, se requieren varios puntos de malla por remolino, lo que implica que son necesarias mallas de miles de elementos en cada dirección coordenada<sup>1</sup>.

Afortunadamente, no se requiere conocer en detalle las fluctuaciones de movimiento, por lo que han surgido diversos acercamientos al problema, algunos bastante

---

<sup>1</sup> La simulación numérica directa, sin utilizar modelos de turbulencia, de las ecuaciones de Navier Stokes ya se ha realizado a través del uso de supercomputadoras (Nezu & Nakawaga, 1993).

satisfactorios. Tal es el caso, por ejemplo, del empleo de coeficientes de fricción en canales establecido desde el siglo pasado: con una selección adecuada del coeficiente de fricción, ya sea el de Manning o el de Chézy, se puede describir un flujo permanente unidimensional turbulento con precisión suficiente; aun para el caso de flujo no permanente o transitorio, la precisión obtenida en la práctica normalmente resulta satisfactoria para el cálculo de gastos, tirantes, etc.

Otro enfoque surgió a partir del trabajo de Reynolds (1895), quien sugirió abordar al problema con base en el análisis estadístico, de tal forma que las ecuaciones fundamentales son descritas en términos promedios de las variables relevantes. Para un sistema de referencia cartesiano las ecuaciones de transporte para las variables instantáneas son:

ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2.1)$$

y ecuación de conservación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i \quad (3.2.2)$$

donde  $u_i$  es el vector de velocidad instantánea,  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $f_i$  son las fuerzas de cuerpo, tales como la fuerza de gravedad, y  $t$  es el tiempo, utilizando notación tensorial: índices repetidos indican una suma sobre los tres valores del índice. En caso de que el fluido sea newtoniano, el tensor de esfuerzos está dado por (Tennekes & Lumley, 1972):

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \quad (3.2.3)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta Kronecker,  $p$  es la presión hidrostática,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido y  $s_{ij}$  es el tensor de rapidez de deformación definido como:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.4)$$

Por lo tanto, para fluidos newtonianos, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento es:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j x_j} + f_i \quad (3.2.5)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática. La ecuación (3.2.5) se conoce como ecuación de Navier-Stokes.

La hipótesis de Reynolds establece que las variables instantáneas de velocidad, presión y esfuerzo pueden descomponerse en términos de una parte media y una fluctuación turbulenta. Así, para la velocidad:

$$u_i = U_i + u_i' \quad (3.2.6)$$

donde  $U_i$  es la velocidad media y  $u_i'$  representa la velocidad fluctuante. Similarmente, para la presión y el tensor de esfuerzos:

$$p = P + p' \quad (3.2.7)$$

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \sigma_{ij}' \quad (3.2.8)$$

Al sustituir las ecuaciones (3.2.6, 3.2.7 y 3.2.8) en (3.2.1) y (3.2.5) se obtienen las ecuaciones para el flujo medio. Su derivación se puede ver con detalle en *Tennekes & Lumley (1972)*. Dichas ecuaciones son:

conservación de masa:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2.9)$$

conservación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \Sigma_{ij} + f_i \quad (3.2.10)$$

El término  $\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'}$  representa el intercambio de cantidad de movimiento entre el flujo

medio y las fluctuaciones turbulentas.

Como el transporte de cantidad de movimiento se relaciona con una fuerza por medio de la segunda ley de Newton, el término de transporte turbulento puede interpretarse como la "divergencia" de un esfuerzo. Debido a la descomposición de Reynolds el movimiento turbulento se puede considerar como un agente que produce esfuerzos en el flujo medio. Así, a los términos del tensor  $-\rho \overline{u_i' u_j'}$  se les conoce como esfuerzos de

Reynolds. La ecuación (3.2.10) puede reordenarse a fin de integrar los esfuerzos en un mismo término:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\Sigma_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}) + f_i \quad (3.2.11)$$

Las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.11) se conocen como *ecuaciones de Reynolds*. La ecuación de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano, si la única fuerza de cuerpo que actuara fuera la de gravedad resulta:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \right) + g_i \quad (3.2.12)$$

Las ecuaciones fundamentales, sean las de Navier-Stokes o las de Reynolds, pueden escribirse también empleando otros sistemas coordenados; tal es el caso de un sistema curvilíneo generalizado. En este caso, surgen términos adicionales debidos a la transformación de coordenadas. En el apéndice A se presentan las ecuaciones de transporte utilizadas en el presente trabajo en un sistema generalizado. El tema de transformación de coordenadas puede consultarse en *Mejia (1991)* y *Hindman (1982)*.

### 3.3 EL CONCEPTO DE VISCOSIDAD TURBULENTA

Debido a la descomposición del flujo en variables medias y fluctuaciones de velocidad, las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds han aparecido como incógnitas adicionales a la presión y a las tres componentes de la velocidad media. Se requieren entonces ecuaciones adicionales para resolver el problema. De aquí que se haya buscado establecer una relación entre los esfuerzos turbulentos y las variables medias.

A Boussinesq se debe la segunda hipótesis decisiva en el modelado de turbulencia. Este investigador supuso que, de la misma manera que en flujo laminar los esfuerzos viscosos son proporcionales al gradiente de la velocidad, en un flujo turbulento los esfuerzos causados por las fluctuaciones turbulentas son proporcionales al gradiente de la velocidad media. Esta relación entre los esfuerzos turbulentos y las variables medias, válida en un flujo tridimensional es:

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.3.1)$$

donde a la constante de proporcionalidad  $\nu_t$  se le conoce como viscosidad turbulenta, y a diferencia de la viscosidad molecular  $\nu$  no es una propiedad del fluido, sino una característica del estado del flujo, por lo que puede variar significativamente dentro de un punto a otro del mismo fluido.  $k$  es la energía cinética media de las fluctuaciones turbulentas por unidad de masa, y se define como la mitad de la suma de los cuadrados de las intensidades turbulentas, esto es:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \quad (3.3.2)$$

Cuando  $i = j$  en la ecuación (3.3.1) se obtiene:

$$-\overline{u_i' u_i'} = 2\nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ii} \quad (3.3.3)$$

El primer término del lado derecho se anula por la ecuación de conservación de continuidad (3.2.9), y como  $\delta_{ii} = 3$ , la suma de los esfuerzos normales resulta igual a dos veces la energía cinética, i.e.  $2k$ . Los esfuerzos normales actúan como presión, y siendo la energía cinética  $k$  un escalar -tal y como lo es la presión- puede absorberse por el término del gradiente de presión de (3.2.12). Es decir, se redefine la presión sumándole el término  $2/3 k$ , con lo que  $k$  no queda como una nueva incógnita. El esfuerzo cortante total sería la suma de las dos contribuciones.

$$\tau_{ij} = \nu \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \nu_t \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \nu_e \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (3.3.4)$$

donde la suma de la viscosidad molecular y la turbulenta se denomina viscosidad efectiva  $\nu_e$ . Con base en las consideraciones anteriores, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para las variables medias se puede escribir:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_e}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu_e \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + g_i \quad (3.3.5)$$

donde

$$P_e = P + \frac{2}{3} k$$

En la ecuación (3.3.4) ya no se presentan los esfuerzos de Reynolds como incógnitas, pero se tiene ahora el problema de determinar la viscosidad turbulenta. El objetivo de los modelos de turbulencia es la determinación de la distribución de  $v_x$  en el campo del flujo.

### 3.4. CAPA LIMITE Y RUGOSIDAD DE LA SUPERFICIE.

#### 3.4.1. Concepto de capa límite

Un principio de la mecánica de fluidos señala que sobre una frontera sólida impermeable no hay deslizamiento del fluido. Considérese una superficie plana en un flujo, si la viscosidad del fluido es pequeña, entonces el efecto de la superficie es confinado a una capa del fluido en la inmediata vecindad de la frontera. Fuera de esta capa, denominada *capa límite*, el efecto de la viscosidad es despreciable. Además, la diferencia de presión entre el flujo externo y el interno a dicha capa es despreciable. El espesor  $\delta$  de la capa límite suele definirse como la magnitud de la distancia normal desde la frontera sólida hasta el punto donde la velocidad es igual a 0.99 del valor límite  $U_m$  al cual la distribución de velocidad se acerca asintóticamente (Fig.3.1a).

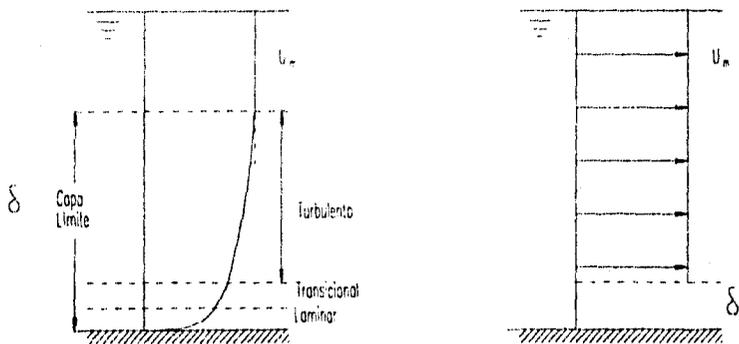


Fig. 3.1.

a) espesor de la capa límite  
(sin escala)

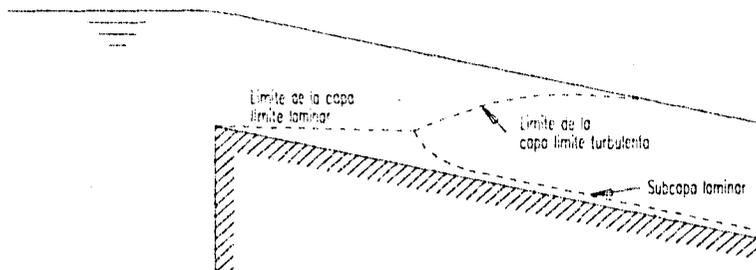
b) espesor del desplazamiento.  
(sin escala)

El efecto de la capa límite sobre el flujo es equivalente a un desplazamiento ficticio desde el fondo del canal hasta una posición virtual en una cantidad igual al llamado *espesor del desplazamiento*  $\delta^*$  (fig 3.1b). En términos matemáticos:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_m}\right) dy \quad (3.4.1)$$

El espesor del desplazamiento varía generalmente desde un octavo hasta un décimo del espesor de la capa límite, dependiendo de la magnitud del número de Reynolds.

Cuando el agua entra en un canal, la distribución de velocidad a través de la sección varía con la distancia sobre la cual el agua viaja en el canal. Considérese la figura (3.2), en la cual la entrada al canal es laminar. Una capa límite laminar se desarrolla a lo largo de la superficie del canal. Cuando el espesor  $\delta$  se incrementa, la capa se vuelve inestable y se transforma en una capa límite turbulenta. Dentro de la capa turbulenta existe una región muy delgada cerca de la frontera que permanece laminar y es conocida como *subcapa laminar*. La zona que existe entre ésta y la capa turbulenta corresponde a la transición de flujo laminar a turbulento.



### 3.2. Desarrollo de la capa límite en canales abiertos.

### 3.4.2. Rugosidad de superficie.

La superficie de un canal está compuesta de picos y valles irregulares. La altura efectiva de las irregularidades que forman los elementos de rugosidad se conoce como *altura de rugosidad*<sup>1</sup>  $k_s$ . La relación  $k_s/R$ , donde  $R$  es el radio hidráulico, se conoce como *rugosidad relativa*.

Las superficies de frontera son clasificadas como hidráulicamente lisas o rugosas con base en una comparación del espesor de la subcapa laminar y la altura de rugosidad. Si la frontera es tal que los elementos de rugosidad son cubiertos por la subcapa laminar, la rugosidad no tiene efecto sobre el flujo fuera de la subcapa y la frontera se define como hidráulicamente lisa. Si los elementos rugosos de la frontera se proyectan a través de la subcapa, entonces la frontera se define como hidráulicamente rugosa y el flujo fuera de la subcapa es afectado por la rugosidad. *Schlichting (1968)* determinó experimentalmente los siguientes criterios para superficies planas:

$$\text{Frontera hidráulicamente lisa:} \quad 0 \leq \frac{k_s u_*}{\nu} \leq 5 \quad (3.4.1a)$$

$$\text{Frontera de transición:} \quad 5 \leq \frac{k_s u_*}{\nu} \leq 70 \quad (3.4.1b)$$

$$\text{Frontera hidráulicamente rugosa:} \quad 70 \leq \frac{k_s u_*}{\nu} \quad (3.4.1c)$$

donde  $u_*$  es la llamada velocidad de fricción. Llamando  $\tau_w$  al esfuerzo cortante en la superficie sólida, dicha velocidad se define como

$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{gRS} \quad (3.4.2)$$

donde  $R$  es el radio hidráulico ya definido y  $S$  es la pendiente de la línea de energía.

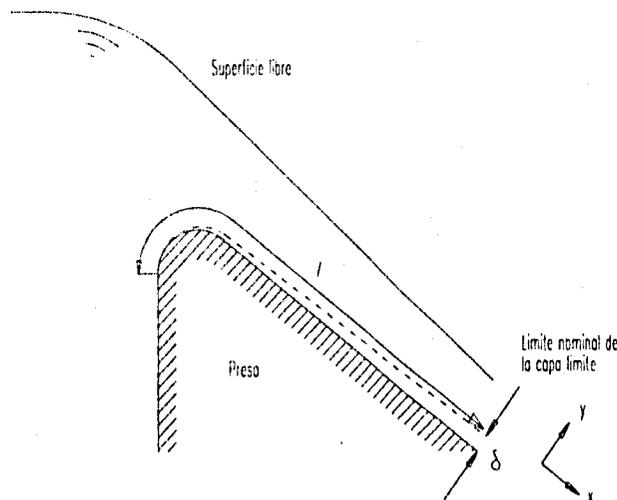
<sup>1</sup> Debe recalarse  $k_s$  es un parámetro que caracteriza no sólo el tamaño vertical de los elementos rugosos, sino también su orientación, arreglo geométrico y el espacio. Por esta razón, no es necesariamente igual a la altura promedio. Así, dos elementos de rugosidad pueden tener dimensiones lineales diferentes y producir efectos de rugosidad idénticos, por lo que se les asignará la misma rugosidad.

### 3.4.3. Cálculo de la capa límite

Para el cálculo del espesor de capa límite turbulenta en canales anchos, un método aproximado pero práctico ha sido propuesto por Bauer (*Campbell et al., 1965*). Este método fue desarrollado para flujo en canales de gran pendiente, tales como vertederos de desborde, pero se ha encontrado aplicable también para canales de pendiente pequeña. Como la longitud en que se desarrolla la capa límite laminar es relativamente pequeña comparada con la longitud de desarrollo de la capa límite turbulenta, aquella es despreciada. De los resultados de Bauer se propone la siguiente relación empírica:

$$\frac{\delta}{l} = 0.080 \left( \frac{l}{k_s} \right)^{-0.233} \quad (3.4.3)$$

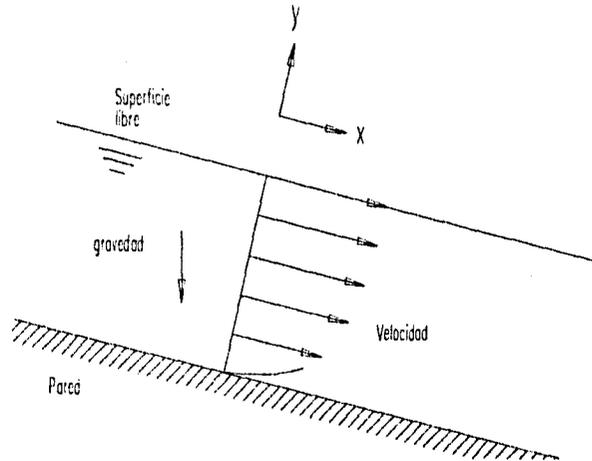
donde  $l$  es la distancia del inicio del vertedero al punto de interés, tal y como lo muestra la figura 3.3:



### 3.3. Desarrollo de la capa límite en un vertedero de desborde.

### 3.4.4. Distribución de la velocidad en flujo turbulento

A fin de simplificar la presentación, se asumirá el flujo en canal como un flujo en el plano  $xy$ , donde  $y$  es la dirección normal a la pared, tal como lo muestra la figura:



3.4. Sistema coordenado para un flujo plano.

Las ecuaciones de Reynolds para un flujo permanente como el mostrado son:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{3.4.4.a}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\overline{u'v'} \right) + \nu \nabla^2 U + g \operatorname{sen} \theta \tag{3.4.4.b y c}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\overline{v'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\overline{u'v'} \right) + \nu \nabla^2 V - g \operatorname{cos} \theta$$

Prandtl (1925) relacionó los esfuerzos de Reynolds cortantes con las características medias del flujo a través de una longitud característica denominada *longitud de mezclado*  $l$ :

$$-\overline{u'v'} = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \tag{3.4.5}$$

Si  $V$  es la velocidad promedio en la dirección  $y$ , se puede considerar que en el flujo en canales  $V \ll U$ , y por lo tanto es despreciable. Además, si se considera un flujo gradualmente variado, los gradientes de velocidad y presión en dirección  $x$  son despreciables, comparados con los gradientes en dirección perpendicular, i.e.  $\partial/\partial x \approx 0$ , y la pendiente de la línea de energía es prácticamente la misma que la del canal; es decir,  $S \approx \sin \theta$ . Con estas consideraciones, las ecuaciones (3.4.4a y b) pueden simplificarse de la siguiente manera:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) + v \nabla^2 U + g \sin \theta \quad (3.4.6 \text{ a y b})$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{v'^2}) + v \nabla^2 V - g \cos \theta$$

Integrando la ecuación (3.4.6a) en la dirección  $y$ :

$$0 = -\overline{u'v'} + v \frac{\partial U}{\partial y} + g(h-y) \sin \theta = -\overline{u'v'} + v \frac{\partial U}{\partial y} + u_*^2 \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \quad (3.4.7)$$

donde se ha utilizado la ec. (3.4.2):  $u_*^2 = g h S \approx g h \sin \theta$

Sustituyendo (3.4.5) en (3.4.7) se tiene:

$$l^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial U}{\partial y} + u_*^2 \left( 1 - \frac{y}{h} \right) = 0 \quad (3.4.8)$$

Despejando  $\frac{\partial U}{\partial y}$  y reordenando la ecuación se obtiene la siguiente expresión para el gradiente de velocidad adimensional:

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{2(1-\xi)}{1 + \sqrt{1 + 4l^{*2}(1-\xi)}} \quad (3.4.9)$$

donde  $\xi \equiv y/h$ ;  $U^+ \equiv U/u_*$ ;  $y^+ \equiv yu_*/v$ ;  $l^+ \equiv lu_*/v$ .

Si la longitud de mezclado adimensional  $l^+$  es prescrita, la ec. (3.4.9) determina el gradiente de velocidad en todo el canal, por lo que puede ser integrada para obtener la distribución de velocidad. En la región de pared ( $y/h < 0.2$ ) la distribución de longitud de mezclado puede asumirse como lineal. La función de disipación de van Driest modifica el

flujo muy cercano a la pared, donde los efectos viscosos son importantes (Nezu & Nakawaga, 1993). En el caso de canales esta distribución es estándar y puede ser escrita como:

$$l^+ = ky^+ \Gamma(y^+) \quad (3.4.10)$$

$$\Gamma(y^+) \equiv 1 - \exp(-y^+/B)$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad (denominada *constante de von Karman*),  $\Gamma(y^+)$  es la función de disipación de van Driest y  $B$  es un factor de disipación. Van Driest obtuvo empíricamente un valor de  $B = 26$ . Considerando que la ec.(3.4.10) es válida sólo para la región de la pared en que  $\xi \ll 1$  la ec. (3.4.9) se aproxima a través de:

$$\frac{dU^+}{dy^+} \approx \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4(ky^+ \Gamma(y^+))^2}} \quad (3.4.11)$$

Para la zona muy cercana a la pared  $y^+ \ll B$ , y por lo tanto  $\Gamma(y^+) \approx 0$ , con lo que ecuación anterior puede reescribirse como:

$$\frac{dU^+}{dy^+} \approx 1 \quad (3.4.12)$$

la integración de la ecuación (3.4.12) resulta en:

$$U^+ = y^+ \quad \text{para } y^+ \ll B \quad (3.4.13)$$

La ec.(3.4.12) se conoce como *ecuación para la subcapa viscosa*, y es válida para  $y^+ < 5$ .

En la zona para la cual  $y^+ \gg 1$ , i.e.  $\Gamma(y^+) \approx 1$ , la relación entre  $l^+$  y  $y^+$  es lineal y la ec.(3.4.11) se puede aproximar como:

$$\frac{dU^+}{dy^+} \approx \frac{1}{ky^+} \quad (3.4.14)$$

e integrando (3.4.14) se tiene:

$$U^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + A \quad \text{para } B < y^+ \quad (3.4.15)$$

donde  $A$  es una constante de integración. A la ecuación (3.4.15) se le denomina *ley de la pared o fórmula logarítmica de la pared*. Una consideración importante es que las constantes  $k$  y  $A$  deben determinarse experimentalmente para datos obtenidos en la región de la pared, por lo que la ley logarítmica es válida sólo para dicha región

( $y/h < 0.2$ ). Una generalización de dicha ley a todo el flujo, no debe realizarse a través de la modificación de dichas constantes, sino añadiendo una función de ajuste. La ecuación que parece ajustarse mejor es (Nezu & Nakawaga, 1993):

$$U^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + A + \frac{2\Pi}{k} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi y}{2h}\right) \quad (3.4.16)$$

donde  $\Pi$  es el llamado parámetro de Coles. Mediciones realizadas por Nezu & Rodi (1986) determinaron un valor de  $k = 0.41$  y  $A = 5.29$ . El parámetro  $\Pi$  es dependiente del número de Reynolds  $Re_h \equiv h u_* / \nu$ . Varios estudios (Nezu & Nakawaga, 1993) demostraron que para valores de  $Re_h > 2000$ ,  $\Pi$  es prácticamente constante,  $\Pi \approx 0.2$ ; y para valores de  $Re_h < 2000$ ,  $\Pi$  decrece rápidamente hasta ser prácticamente cero para  $Re_h < 500$ :

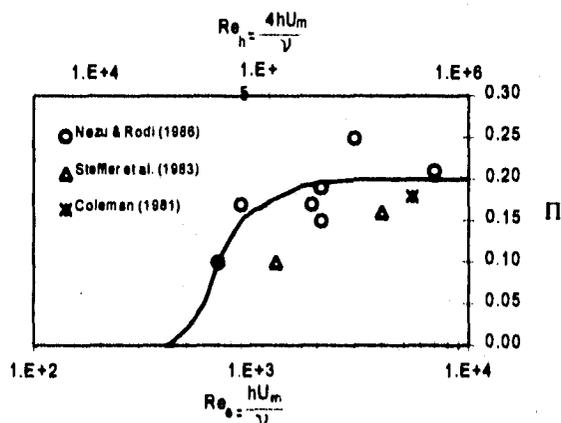


Fig.3.5. Parámetro de Coles como función de los números de Reynolds  $Re_h$  y  $Re_\tau$

La integración de la ec. (3.4.16) a lo largo del tirante resulta en:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{hu_*}{\nu}\right) + A + \frac{1}{k} (\Pi - 1) \quad (3.4.17)$$

donde  $\bar{u}$  es la velocidad media del flujo a lo largo del tirante. En el caso de que la frontera sea hidráulicamente rugosa, la distribución de velocidad depende de la altura de rugosidad. Una extensión de la ec. (3.4.11) para tomar en cuenta la rugosidad es:

$$U^+ = \frac{1}{k} \ln(y/k_s) + A_R + \frac{2\Pi}{k} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi y}{2h}\right) \quad (3.4.18)$$

donde  $A_R$  es función de la rugosidad. Definiendo  $k_s^+ \equiv k_s u_* / \nu$ , para una frontera hidráulicamente lisa se tiene:

$$A_R = \frac{1}{k} \ln(k_s^+) + A \quad (3.4.19)$$

Al ir aumentando la rugosidad,  $A_R$  se desvía de (3.4.19) hasta tomar un valor constante de 8.5 para una frontera completamente rugosa,  $k_s^+ > 60$  (Nezu & Nakawaga, 1993).

### 3.5. ECUACIONES PARA LA ENERGÍA TURBULENTA

La ecuación de transporte de energía cinética media para un fluido incompresible es (Tennekes & Lumley, 1972):

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right) + \rho U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right) = U_i g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} U_i) + T_{ij} S_{ij} \quad (3.5.1)$$

donde  $T_{ij}$  es el tensor total de esfuerzos, i.e.  $T_{ij} = -P\delta_{ij} - 2\mu S_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}$ , y  $S_{ij}$  es el tensor de rapidez de deformación media:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

El primer término del lado derecho representa el trabajo realizado por la gravedad sobre el fluido; el segundo, el transporte de energía cinética del flujo medio por el esfuerzo  $T_{ij}$ ; y el tercero, el denominado trabajo de deformación que representa la pérdida de energía por disipación viscosa  $E$  y producción de turbulencia  $G$ :

$$T_{ij} S_{ij} = 2\mu S_{ij} S_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'} S_{ij} = E + G \quad (3.5.2)$$

Para un flujo plano uniforme estos dos términos resultan:

$$G = -\overline{u'v'} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (3.5.3)$$

$$E = \nu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (3.5.4)$$

La generación turbulenta  $G$  produce fluctuaciones turbulentas asociadas principalmente a los vórtices de mayor escala. Entre mayor sea el número de Reynolds, la disipación directa  $E$  es significativa sólo cerca de las paredes.

Las ecuaciones básicas de los esfuerzos turbulentos en flujos bidimensionales en canales se reducen a:

ecuación para  $u'$ :

$$-\overline{u'v} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\overline{p' \partial u'}}{\rho \partial y} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{u'^2 v'} - \nu \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial y} \right) \quad (3.5.5a)$$

ecuación para  $v'$ :

$$\frac{\overline{p' \partial v'}}{\rho \partial y} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{v'^2 v'} + 2 \frac{\overline{p' v'}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \right) \quad (3.5.5b)$$

ecuación para  $w'$ :

$$\frac{\overline{p' \partial w'}}{\rho \partial y} = \varepsilon_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{w'^2 v'} - \nu \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial y} \right) \quad (3.5.5c)$$

donde  $p'$  es la fluctuación de presión y  $\varepsilon_i$  es la razón de disipación turbulenta asociada con cada componente de velocidad y se define como:

$$\varepsilon_i \equiv \nu \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 > 0 \quad (3.5.6)$$

En flujos cortantes bidimensionales, como el flujo en canales, la producción  $G$  aparece sólo para la componente  $u'$ . Este es el motivo por el cual en el flujo cortante la magnitud de  $u'$  es mayor que las de  $v'$  y  $w'$ . Las fluctuaciones de presión son el medio por el cual la energía es redistribuida de  $u'$  a  $v'$  y  $w'$ ; es decir, la función de las fluctuaciones de presión es inducir una tendencia a un comportamiento isotrópico. De la suma de (3.5.5a), (3.5.5b) y (3.5.5c) resulta la ecuación de energía turbulenta:

$$G = \varepsilon + (T_D + P_D) + V_D \quad (3.5.7)$$

donde,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (3.5.8)$$

$$T_D \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \overline{(u'^2 + v'^2 + w'^2)} \cdot \nu \right) \quad (3.5.9)$$

$$P_D \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p'}{\rho} \nu \right) \quad (3.5.10)$$

$$V_D \equiv -\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \quad (3.5.11)$$

El término  $V_D$  es la difusión viscosa. Los términos entre paréntesis de la ec. (3.5.7) representan la difusión turbulenta, formada por la difusión de energía turbulenta y la difusión por energía de presión  $P_D$ . El término  $\varepsilon$  es la disipación turbulenta total.

### 3.6. REGIONES DEL FLUJO EN CANALES.

Los conceptos vistos anteriormente sirven para describir el flujo en canales a través de ciertas características fenoménicas. El flujo puede considerarse dividido en tres regiones:

1. *Región de la pared* [ $y/h < (0.15 - 0.2)$ ]. La estructura del flujo es controlada por la ley de la pared. La generación de energía turbulenta  $G$  excede a la razón de disipación  $\varepsilon$  en la región  $y^+ < 50$ . Se le denomina también región interna.

2. *Región de superficie libre* [ $0.6 < y/h < 1.0$ ]. En esta región la estructura turbulenta es controlada por las variables externas, y se aplica la ley extendida de la pared (3.4.12). La razón de disipación  $\varepsilon$  excede a la generación  $G$ ; consecuentemente, la energía turbulenta debe ser suministrada de la región de la pared a la región de superficie libre por difusión turbulenta. Características tales como la intensidad de la turbulencia se ven fuertemente afectadas por la superficie libre<sup>1</sup>.

3. *Región intermedia* [ $(0.15 - 0.2) < y/h < 0.6$ ]. En esta región se mantiene un cierto equilibrio entre la producción y disipación, i.e.  $G \approx \varepsilon$ . En esta región se incluye la porción de la región de la pared para la cual  $y^+ > 50$ . La región intermedia y la de superficie libre forman lo que se denomina la región externa, donde los efectos viscosos son despreciables.

### 3.7. FUNCIONES UNIVERSALES PARA LA INTENSIDAD DE LA TURBULENCIA.

Unas funciones adecuadas para describir la intensidad de la turbulencia son (Nezu & Nakawaga, 1993):

$$k^2 / u_*^2 = D_k \exp(-2C_k \xi) \quad (3.7.1)$$

<sup>1</sup> El efecto de la superficie libre en la turbulencia se trata con más detalle en la sección 3.9

$$u'^2 / u_*^2 = D_u \exp(-C_k \xi) \quad (3.7.2a)$$

$$v'^2 / u_*^2 = D_v \exp(-C_k \xi) \quad (3.7.2b)$$

$$w'^2 / u_*^2 = D_w \exp(-C_k \xi) \quad (3.7.2c)$$

donde  $D_k$ ,  $D_u$ ,  $D_v$ ,  $D_w$  y  $C_k$  son constantes empíricas que son independientes de los números de Reynolds y de Froude:

$$D_k = 4.78, \quad D_u = 2.30, \quad D_v = 1.27, \quad D_w = 1.63 \quad \text{y} \quad C_k = 1.0$$

En la región de la pared la viscosidad turbulenta  $\nu_t$  puede describirse adecuadamente por:

$$\nu_t = k h u_*^2 \xi (1 - \xi) \quad (3.7.3)$$

donde  $k$  es la constante de von Karman. Las ecuaciones (3.7.2 a-c y 3.7.3) proporcionan relaciones simples, aunque aproximadas, para evaluar la intensidad de la turbulencia en el flujo en canales. Sin embargo, no son válidas en la región para la cual los efectos viscosos son dominantes,  $y^+ < 10$ .

### 3.8 EFECTO DE LA CURVATURA EN LA TURBULENCIA EN CANALES.

En diversos estudios (refs.3,13,18,23,24) se ha encontrado que la curvatura tiene gran influencia en el flujo en canales, particularmente en la estructura de la turbulencia. Estas diferencias pueden ser más importantes en magnitud que los gradientes normales de la presión, variaciones en las propiedades del fluido u otros efectos explícitos del movimiento medio. Aún con curvaturas suaves, se tiene una considerable desviación de la ley logarítmica de la pared obtenida para flujos rectos. *Ellis & Joubert (1973)* señalaron que el efecto de una curvatura cóncava resulta en un incremento en la turbulencia en el flujo, y una reducción de la misma para las paredes convexas. *Ramaprian & Shivaprasad (1977)* concluyeron, en cambio, que la curvatura cóncava suave, no afecta en gran medida la producción de energía turbulenta -lo contrario de una curvatura convexa- pero sí su difusión en el flujo, la cual se incrementa significativamente. Las mediciones hechas por estos investigadores en canales curvos horizontales indican que la curvatura tiene una influencia mucho mayor en las fluctuaciones verticales que en las longitudinales, particularmente las fluctuaciones positivas se ven favorecidas, mientras las negativas se ven inhibidas. Señalan, además, que la estructura de los vórtices de gran escala es la más sensible a la curvatura.

En un estudio realizado para canales horizontales con curvatura suave *Hunt & Joubert (1978)* observaron que éste exhibe grandes diferencias en relación al flujo con curvatura pronunciada. Señalan que en el primer caso el flujo está dominado por efectos cortantes, mientras que en los flujos con curvatura pronunciada predominan los efectos inerciales. Dichos investigadores indican que el principal efecto de la curvatura consiste en un cambio en los esfuerzos cortantes turbulentos a través de una reorientación de la intensidad de las componentes turbulentas, particularmente las verticales. Observaron además la presencia de vórtices en la región central del flujo en conductos curvos, similares a los vórtices de Taylor-Görtler que se presentan en capas límites (*Tani, 1962; Meroney & Bradshaw, 1975*).

*Bradshaw (1975)* hizo notar que la pared cóncava tenía como efecto el desarrollo de variaciones en la presión a lo ancho de un conducto con curvatura longitudinal, similares a los gradientes en "V" de la presión observados en el codo vertical por *Bribiesca et. al. (1986, 1987 y 1988)*. En el caso del codo vertical, se pensó que dichas variaciones podían deberse al sistema de ondas cruzadas que se forman en el tramo curvo del canal. *Bradshaw* encontró una explicación a sus observaciones con base en la presencia de un sistema de vórtices característico de los flujos en canales curvos, de manera que los picos en la presión de fondo corresponderían a posiciones entre dos vórtices con dirección de flujo hacia la pared; y los valles, a vórtices con flujo en dirección contraria (fig. 3.6):

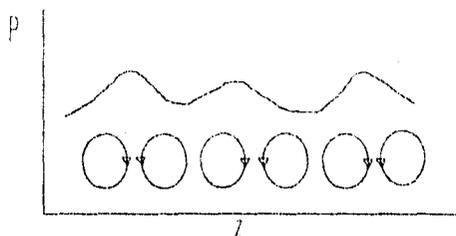


Fig. 3.6. Esquema de variación transversal de la presión en un ducto curvo debido a corrientes secundarias

Dichos vórtices son conocidos como "corrientes secundarias de Prandtl de primer orden" (*Nezu & Nakawaga, 1993*). Su origen puede observarse en la ecuación de transporte de vorticidad en dirección de la corriente, que para un flujo

uniforme en un canal recto, i.e.  $\partial / \partial x \approx 0$  (con  $x$  en dirección de la corriente,  $y$  en dirección vertical y  $z$  en la transversal) es:

$$V \frac{\partial \Omega}{\partial y} + W \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \overline{v'w'} + v \nabla^2 \Omega \quad (3.8.1)$$

donde

$$\Omega \equiv \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.8.2)$$

Como puede observarse en (3.8.1), en el flujo uniforme sólo los términos  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})$  y  $\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \overline{v'w'}$ , generados por la anisotropía e inhomogeneidad de la turbulencia, son responsables del transporte de vorticidad en dirección de la corriente (*corrientes secundarias de Prandtl de segundo orden*). Cuando el flujo ocurre en un canal curvo, los términos con gradiente en dirección de la corriente ya no son cero ( $\partial / \partial x \neq 0$ ) y se producen corrientes secundarias<sup>1</sup> (*corrientes secundarias de Prandtl de segundo orden*) cuya velocidad varía entre 20 y 30% de la velocidad del flujo principal, en contraste con las corrientes secundarias generadas por la anisotropía de la turbulencia, de mucho menor magnitud. Como el origen de las corrientes de primer orden se halla en el efecto de la fuerza centrífuga (y no en la turbulencia) pueden aparecer tanto en flujo laminar como turbulento. Bradshaw (1987) proporciona una revisión detallada del tema de corrientes secundarias en ductos y canales.

### 3.9 EFECTO DE LA SUPERFICIE LIBRE EN LA TURBULENCIA

El efecto de la superficie libre en la turbulencia es particularmente importante para el cálculo de flujos en canales, pues la superficie libre suprime el movimiento vertical de los remolinos. De acuerdo con el concepto de "movimientos activos-inactivos" propuesto por Bradshaw (1967), la parte activa es responsable de los esfuerzos cortantes de Reynolds, mientras que la inactiva no contribuye significativamente a dichos esfuerzos. La primera demuestra una característica universal o similitud local de la turbulencia, mientras que la parte inactiva contribuye a la transferencia de la energía turbulenta y consiste de movimientos de baja frecuencia o vórtices de mayor escala, influenciados por la historia del flujo.

<sup>1</sup> Este mecanismo es denominado "deformación del vórtice" (*vortex stretching*, en inglés).

Para flujos que se aproximan a la condición crítica, i.e.  $Fr \rightarrow 1$ , Nezu (1977) encontró que la intensidad de la turbulencia cerca de la superficie libre es mayor a la predicha por las relaciones universales dadas anteriormente (ecs.3.7.1 y 3.7.2). Esto sugiere que el efecto de las ondas superficiales en la turbulencia es inactiva, y se vuelve significativa para flujos cercanos al crítico.

El efecto más notable de la superficie libre se presenta en las fluctuaciones verticales y la energía cinética turbulenta  $k$ , las cuales decrecen rápidamente al acercarse a la superficie libre. La caída de  $k$  se refleja en el perfil de la viscosidad turbulenta, el cual es parabólico, acercándose su valor a cero en la superficie libre (Nezu & Nakawaga, 1993).

La caída de las fluctuaciones verticales genera una mayor diferencia entre las diversas componentes fluctuantes, incrementándose la anisotropía cerca de la superficie libre, lo que origina la aparición de un par de vórtices denominados "vórtice de la superficie libre" y "vórtice del fondo", respectivamente (fig. 3.7a). Un efecto importante de la formación de estos vórtices es que la velocidad máxima en el flujo no se presenta en la superficie libre, sino un poco más abajo de la misma: el fluido con una baja cantidad de movimiento es transportado por dichas corrientes del fondo a la zona central del canal, mientras que el fluido con elevada cantidad de movimiento es llevado de la superficie libre hacia el fondo. Aparentemente, la velocidad máxima se presenta en  $y/h \approx 0.6$  (fig.3.7b), tanto en flujo subcrítico como supercrítico (Nezu & Nakawaga, 1993).

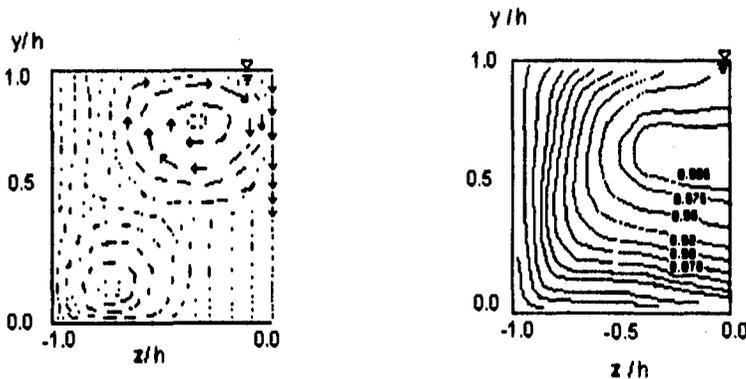


Fig 3.7. a) Corrientes secundarias en canales

b) Perfil de velocidad en canales

## TURBULENCIA EN CANALES

Se ha presentado una síntesis de los conceptos requeridos para la comprensión de los siguientes capítulos. Sin embargo, el tema de turbulencia en canales es mucho más extenso y profundo. *Nezu & Nakawaga (1993)* presentan una excelente revisión del estado del arte en dicho tema, que incluye teoría básica, mediciones y cálculos numéricos.

## 4. MODELO NUMÉRICO

### 4.1 CLASIFICACIÓN DE LOS ESQUEMAS DE SOLUCIÓN.

La solución numérica de flujos con fronteras consideradas como superficies libres presenta tres problemas: 1) su representación discreta, 2) su evolución en el tiempo y 3) la manera en que se imponen las condiciones de frontera. Los diversos métodos de solución pueden considerarse dentro de alguna de las tres categorías siguientes: eulerianos, lagrangianos o lagrangianos-eulerianos. En el método euleriano, una malla de elementos permanece fija respecto al observador, y el fluido se mueve a través de la misma en el tiempo; esta descripción presenta el problema de ser incapaz de identificar adecuadamente la interfase entre los fluidos. En la descripción lagrangiana, los elementos discretos que forman la malla se mueven con el fluido; y los cambios pueden expresarse como función del tiempo. Este método presenta varias ventajas: la identificación de la interfase entre los materiales es sencilla y la aplicación de la condición de frontera es, por lo mismo, simple; sin embargo, suele ser sumamente inestable. La formulación lagrangiana-euleriana se ha propuesto como un medio de evitar los problemas anteriores: consiste en una malla de tipo euleriano, pero cuyos nodos son capaces de modificar su posición durante la solución del flujo. Este método, requiere mayores esfuerzos de cómputo debido a la necesidad de recalcular todos los parámetros geométricos en cada iteración; además, la distorsión de la malla suele producir cálculos inestables.

### 4.2. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE MEDIANTE EL MÉTODO DE VOLUMEN FINITO.

En general los diversos fenómenos de transporte obedecen a una ecuación genérica de conservación. Si  $\phi$  representa la variable dependiente, se puede expresar dicho principio mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{v}\phi = \nabla \cdot \Gamma\nabla\rho\phi + S \quad (4.2.1)$$

donde  $\Gamma$  es un coeficiente de difusión y  $S$  es el término fuente. Los otros tres términos de la ecuación son el término transitorio, advectivo y de difusión. El significado de las cantidades  $\Gamma$  y  $S$  depende del valor particular de  $\phi$ , el cual corresponde en la ecuación de continuidad a la unidad, y a  $v$  en la de cantidad de movimiento. La solución numérica de la ecuación anterior se basa en encontrar una serie de valores a partir de los cuales se puede construir la distribución de la variable  $\phi$  en el dominio de solución. Los métodos numéricos tratan como variables desconocidas los valores de dicha variable en un número finito de puntos a los que se les denomina nodos. En dicho dominio discretizado se resuelven ecuaciones algebraicas para cada nodo, derivadas a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernan a  $\phi$ .

En el método de volumen finito, se utiliza una formulación euleriana o lagrangiana-euleriana<sup>1</sup> en que se divide el dominio en un número de celdas o volúmenes de control tales que existe una celda alrededor de cada punto de la malla. La ecuación diferencial es integrada para cada volumen de control. El resultado es la ecuación discretizada conteniendo los valores de  $\phi$  para el conjunto de nodos. La ecuación algebraica así obtenida expresa el principio de conservación de  $\phi$  en el volumen finito, de la misma manera en que la ecuación diferencial lo expresa para un volumen de control infinitesimal. La ecuación algebraica para un nodo  $P$  puede expresarse en forma general como:

$$a_P \phi_P = \sum a_{NB} \phi_{NB} + a_T \phi_T + B \quad (4.2.2)$$

donde el subíndice NB se refiere a los valores de las celdas vecinas; T, al valor en el tiempo anterior; y B, al término fuente. La derivación de dicha ecuación y detalles respecto al método pueden consultarse en *Patankar (1980)* y *Spalding & Rosten (1987)*.

A fin de hacer más compacta la notación, se definen los símbolos  $F$  y  $D$ :

$$F \equiv \rho u \quad D \equiv \frac{\Gamma}{\delta x}$$

<sup>1</sup> En el caso de mallas eulerianas-lagrangianas es necesario añadir la velocidad de la malla a la velocidad del flujo en el término de convección. Consideraciones sobre su uso pueden consultarse con más detalle en *Trépanier et al. (1991)* y *Zhang et al. (1992)*. *Palanisamy & Kawahara (1993)* presentan un esquema para flujos con superficie libre en elemento finito.

En el caso bidimensional, puede considerarse un volumen de control como el de la figura:

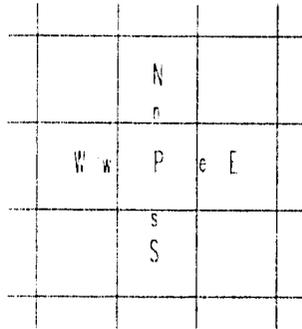


Fig 4.1. Volumen de control para un caso bidimensional.

El código PHOENICS, utilizado en el presente análisis utiliza el esquema denominado *híbrido*, en el cual los valores de los coeficientes  $a_i$  están dados en términos de la celda arriba descrita por:

$$a_E = \max \left\| -F_e, D_e - \alpha F_e, 0 \right\| \quad (4.2.3a)$$

$$a_W = \max \left\| F_w, D_w + \alpha F_w, 0 \right\| \quad (4.2.3b)$$

$$a_N = \max \left\| -F_n, D_n - \alpha F_n, 0 \right\| \quad (4.2.3c)$$

$$a_S = \max \left\| F_s, D_s + \alpha F_s, 0 \right\| \quad (4.2.3d)$$

donde el parámetro  $\alpha$  gobierna la contribución respectiva de los términos de advección y difusión, y su valor es normalmente tomado como 0.5. El coeficiente para el término transitorio es:

$$a_T = \frac{\rho_T \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (4.2.4)$$

Para el término fuente  $S$  de la ec. (4.2.1) se utiliza la siguiente relación lineal en la ecuación discretizada:

$$S = S_c + S_p \phi_p \quad (4.2.5)$$

donde el término  $S_p$  se elige de acuerdo con la relación existente entre  $S$  y  $\phi$ , en caso de depender el primero del segundo, y  $S_c$  es un valor constante. Con esta suposición, el resto de los términos de la ec. (4.2.1) quedan:

$$B = S_c \Delta x \Delta y + a_T \phi_T \quad (4.2.6)$$

$$y \quad a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T - S_p \Delta x \Delta y \quad (4.2.7)$$

Los valores de F en la caras de la celda son:

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \quad (4.2.8a)$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \quad (4.2.8b)$$

$$F_n = (\rho u)_n \Delta x \quad (4.2.8c)$$

$$F_s = (\rho u)_s \Delta y \quad (4.2.8d)$$

Similarmente para D:

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (4.2.9a)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (4.2.9b)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (4.2.9c)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (4.2.9d)$$

El algoritmo de solución para resolver el sistema representado por la ecuación (4.2.2) se describe en la sección 4.4.2

### 4.3. CÁLCULO DE LA SUPERFICIE LIBRE

#### 4.3.1. El método GALA

El método GALA (*Gas and Liquid Algorithm*) simula el movimiento tanto del agua como del aire bajo el esquema de flujo de una fase. Esto se logra reformulando la ecuación de continuidad de la siguiente forma:

El caso más general de la ecuación de continuidad es:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.3.1)$$

donde  $\frac{D}{Dt}(\ )$  representa la derivada total o material.

dividiendo (4.3.1) entre  $\rho$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.3.2)$$

Se utiliza la siguiente identidad:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{D}{Dt} (\ln \rho) \quad (4.3.3)$$

Sustituyendo (4.3.3) en (4.3.2) se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} (\ln \rho) + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.3.4)$$

En esta ecuación la densidad desaparece del término  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , con lo cual la ecuación de continuidad queda escrita en términos de conservación volumétrica, en vez de másica. Dicha condición es válida excepto cuando la densidad cambia de punto a punto en la interfase. La ventaja de utilizar esta ecuación radica en que no se necesita conocer el promedio de la densidad en cada frontera de la malla para la evaluación del flujo. Este método permite el manejo implícito de las condiciones de frontera en la superficie libre, por lo que el movimiento de ambos fluidos se calcula en el contexto de este método. Los dos fluidos poseen un solo valor de velocidad, presión, etc., en cada celda computacional. Las ecuaciones relevantes son resueltas mediante el procedimiento usual de una sola fase, y los dos fluidos se distinguen a través de la especificación de las propiedades físicas de densidad y viscosidad.

#### 4.3.2. Determinación de la superficie libre con el Método de la Ecuación Escalar

El Método de la Ecuación Escalar ó SEM (*Scalar Equation Model*), emplea el valor de una propiedad escalar  $c$  como marcador del fluido. Se define a  $c$  como una variable con valores entre cero y uno, de tal forma que los valores extremos implican la existencia de un solo fluido:

$$\begin{aligned} c = 1.0 & \quad \text{Agua} \\ c = 0.0 & \quad \text{Aire} \end{aligned}$$

Un valor de  $c$  entre cero y uno indica que la celda contiene tanto aire como agua, y por lo tanto, la presencia de la superficie libre. La dependencia del tiempo de  $c$  es gobernada por una ecuación convencional de transporte sin términos fuentes ni de difusión:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot c \mathbf{v} = 0 \quad (4.3.5)$$

Con la solución de la ecuación anterior, se obtiene la distribución de  $c$  en el dominio. Ya que  $c$  es una función discreta, se requiere un algoritmo que preserve su naturaleza discontinua. Para este fin se utiliza el esquema convectivo de Van Leer, cuyo propósito es reducir la difusión numérica que ocasiona pérdida en la definición de la superficie libre, y asegurar que el valor de  $c$  permanezca entre cero y uno. La formulación de Van Leer es un esquema de 2do. orden basado en la teoría de las características:

$$c_e = c_p + \left. \frac{dc}{dx} \right|_p \left[ \frac{1}{2} (dx - u_e \cdot dt) \right] \quad \text{para } u_e > 0 \quad (4.3.6a)$$

$$c_e = c_E - \left. \frac{dc}{dx} \right|_E \left[ \frac{1}{2} (dx + u_e \cdot dt) \right] \quad \text{para } u_e < 0 \quad (4.3.6b)$$

donde el gradiente  $\left[ \frac{dc}{dx} \right]_p$  es aproximado utilizando:

$$\left[ \frac{dc}{dx} \right]_p = \frac{1}{2} \left[ \frac{c_E - c_W}{\delta x} \right] \quad (4.3.7)$$

El gradiente de  $c$  depende de los valores al inicio del paso de tiempo, lo que implica que este esquema es de naturaleza explícita.

Tal como está planteada la ecuación (4.3.7) pueden generarse en la solución oscilaciones ficticias en la vecindad de la región del gradiente. Para evitar esto, el valor de  $\left[ \frac{dc}{dx} \right]_p$  se debe limitar como sigue:

$$\left[ \frac{dc}{dx} \right]_p = \frac{2 \operatorname{sgn}(\delta_e)}{\delta x} \min \left( |\delta_e|, 0.5 (|\delta_e| + |\delta_w|), |\delta_w| \right) \quad (4.3.8)$$

donde

$$\delta_e = c_E - c_p$$

$$\delta_w = c_p - c_W$$

$$\operatorname{sgn}(\delta_e) = 1 \quad \text{si } \delta_e \geq 0$$

$$\operatorname{sgn}(\delta_e) = -1 \quad \text{si } \delta_e < 0$$

Si un extremo llega a ocurrir, esto es, si  $\delta_e$  y  $\delta_w \leq 0$ , entonces el gradiente se reduce a cero:

$$\left[ \frac{dc}{dx} \right]_p = 0 \quad \text{si } \delta_e, \delta_w \leq 0$$

Dicha formulación es igual al esquema "corriente-arriba" ("upwind scheme") en presencia de gradientes despreciables.

Esta formulación ofrece las ventajas de un esquema de orden superior al mismo tiempo que mantiene una difusión numérica mínima, asegurando que los valores de  $c$  permanecerán en el intervalo  $[ 0, 1 ]$  y limitando al gradiente de  $c$  por condiciones de monotonicidad. El inconveniente de dicho esquema es su naturaleza explícita, por la que se restringe el incremento posible de tiempo para el cálculo numérico de acuerdo con la condición de Courant:

$$\delta t < \min \left| \frac{\delta x}{|u|}, \frac{\delta y}{|v|} \right| \quad (4.3.9)$$

donde el mínimo es con respecto a cada celda de la malla. Dicha restricción puede ocasionar un tiempo de cómputo considerable, sobre todo en flujos supercríticos. Por ejemplo, si se tiene una velocidad longitudinal de 6 m/s y una  $\delta x$  de 6 cm., entonces el incremento de tiempo  $\delta t$  tendría que ser menor a 0.01 segundos.

La solución de la ecuación (4.3.5) sirve para determinar el campo de propiedades del fluido. Se establece una ecuación lineal simple que relaciona  $c$  con la densidad y viscosidad del fluido:

$$\rho_M = \rho_A + (\rho_W - \rho_A)c \quad (4.4.6)$$

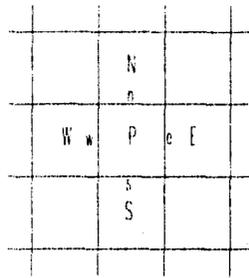
$$\mu_M = \mu_A + (\mu_W - \mu_A)c \quad (4.4.7)$$

donde el subíndice M indica el valor de la propiedad en la celda, W es el subíndice para el agua y A para el aire. Una vez determinados los valores de la densidad y la viscosidad se calculan el resto de las variables como presión, velocidad, etc. mediante el procedimiento usual.

## 4.4. ALGORITMO DE SOLUCIÓN

### 4.4.1. Ecuación de corrección de la presión

Considérese nuevamente el volumen de control mostrado en la fig 4.1:



Las ecuaciones discretizadas de cantidad de movimiento escritas en la forma genérica dada por (4.2.2) son:

$$a_p U_p = \sum a_{nb} U_{nb} + B + (P_p - P_E) A_e \quad (4.4.1a)$$

$$a_p V_p = \sum a_{nb} V_{nb} + B + (P_p - P_N) A_n \quad (4.4.1b)$$

Si se comparan estas ecuaciones con (4.2.2) se ve que el término de presión no se ha incluido en el término fuente B, pues la distribución de la presión debe ser resuelta, a diferencia de los otros términos fuente (como la gravedad) que son conocidos de antemano. A menos que la distribución de la presión sea la correcta, la ecuación de conservación de masa no se satisface. Este problema se aborda a través de un algoritmo denominado "de corrección de la presión", en que las ecuaciones son aproximadas con un campo de presión supuesto que es continuamente renovado utilizando una ecuación auxiliar para dicha variable, llamada *ecuación de corrección de la presión*. Hay diversas ecuaciones de corrección de la presión. Patankar (1980) en su algoritmo denominado SIMPLER propuso la siguiente formulación:

La ecuación de cantidad de movimiento se escribe como:

$$U_e = \frac{\sum a_{nb} U_{nb} + B}{a_e} + d_e (P_p - P_E) \quad (4.4.2)$$

donde  $d_e = A_e / a_e$ . Se define una pseudovelocidad  $u'_e$  dada por:

$$u'_e = \frac{\sum a_{nb} U_{nb} + B}{a_e} \quad (4.4.3)$$

De manera que la velocidad está dada por:

$$U_e = u'_e + d_e (P_p - P_E) \quad (4.4.4)$$

Similarmente para V:

$$V_n = v'_n + d_n (P_p - P_N) \quad (4.4.5)$$

Se considera que la presión está dada por:

$$P = P^* + P' \quad (4.4.6)$$

donde  $P$  es la presión real,  $P^*$  es la presión supuesta y  $P'$  es la llamada *corrección de la presión*.

La ecuación de conservación de masa es (por simplicidad se considera un flujo incompresible en estado permanente):

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (4.4.7)$$

La ecuación (4.4.7) puede discretizarse para el volumen de control mostrado como:

$$(U_e - U_w)\Delta y + (V_n - V_s)\Delta x = 0 \quad (4.4.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.4.4 y 4.4.5) en la ecuación (4.4.8) y reordenando se obtiene una ecuación para la presión de la forma dada por (4.2.2):

$$a_p P_p = \sum a_{nb} P_{nb} + B \quad (4.4.9)$$

donde 
$$a_p = \sum a_{nb} = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (4.4.10)$$

$$a_E = d_e \Delta y \quad (4.4.11a)$$

$$a_W = d_w \Delta y \quad (4.4.11b)$$

$$a_N = d_n \Delta x \quad (4.4.11c)$$

$$a_S = d_s \Delta y \quad (4.4.11d)$$

y  $B$  está dado por:

$$B = (u'_w - u'_e) \Delta y + (v'_s - v'_n) \Delta x \quad (4.4.12)$$

Esta formulación presenta la ventaja de no introducir aproximaciones en la derivación de la ecuación de la presión, por lo que si un campo de velocidades exacto se utilizara para calcular las pseudovelocidades, la ecuación de la presión (4.4.9) daría el valor correcto de dicha variable, y por lo tanto se cumpliría con la ecuación de continuidad (4.4.7).

#### 4.4.2. PROCESO DE CÁLCULO

PHOENICS utiliza el algoritmo denominado SIMPLEST, desarrollado por *Spalding (1980)*. Este es una mejora del método SIMPLER, el cual en síntesis consiste de los pasos:

1. Suponer un campo inicial de velocidad.
2. A partir de las velocidades supuestas se obtienen las pseudovelocidades  $u'$  y  $v'$  (en el caso bidimensional).
3. Si se utiliza el método SEM, se calcula la distribución del marcador del fluido  $c$  a fin de determinar los campos de las propiedades de viscosidad y densidad.
4. Calcular los coeficientes de la ecuación de presión y obtener el valor de la presión en el dominio.
5. Obtener un nuevo campo de velocidad utilizando el valor de la presión recién calculado.
6. Resolver las ecuaciones discretizadas de las demás variables escalares: la energía cinética turbulenta  $k$  y la tasa de disipación  $\epsilon$ , etc.
7. Utilizando los nuevos valores de todas las variables se retorna al paso 2, y este ciclo se repite hasta que la solución converja.
8. En caso de estado no permanente se avanza un nuevo paso en el tiempo y se reinicia el ciclo de 2 a 5.

Dicho método puede estudiarse con más detalle en *Patankar (1980)*. La modificación del algoritmo SIMPLEST al procedimiento anterior consiste en darle un tratamiento explícito al término de convección e implícito al de difusión.

## **4.5. MODELO DE TURBULENCIA.**

### **4.5.1. Visión general de los modelos de turbulencia.**

Existen distintos modelos de turbulencia. En la mayoría se trata de determinar la distribución de la viscosidad turbulenta  $\nu_t$  en el flujo. Según más detalles se desean tomar en cuenta, se emplean funciones más complejas y los modelos son más elaborados. Debe tenerse en cuenta que conforme se introducen funciones más complejas, aparecen nuevas constantes que hay que obtener con trabajo experimental.

Los modelos más simples se basan en suponer que  $\nu_t$  es constante en todo el campo de flujo. Un enfoque un poco más elaborado busca obtener la distribución de  $\nu_t$  con base en una función de la distribución de la velocidad media. Entre este tipo de modelos se

destaca el de longitud de mezclado que se basa en las ideas de Prandtl. Dado que en estos dos casos no se introduce ninguna ecuación diferencial de transporte adicional a las ecuaciones fundamentales, a estos enfoques se les denomina modelos de orden cero, y son los que se emplean comúnmente en la mecánica de fluidos clásica. En este tipo de modelos se supone que la turbulencia se disipa en el punto donde se genera, por lo que no hay transporte de turbulencia en el flujo. En el caso del modelo de viscosidad turbulenta constante, se obtiene precisión suficiente en estudios de gran escala (de centenas a miles de kilómetros cuadrados), pero deja de ser válido en cuanto los efectos de capa límite se vuelven importantes. En el modelo de longitud de mezclado, el desprecio del transporte difusivo y advectivo tiene como consecuencia que el modelo no sea de aplicación general, por lo que su uso se recomienda para flujos en zonas grandes con velocidades reducidas (Berezowsky, 1994).

A fin de superar las limitaciones mencionadas se formularon modelos más complejos con la idea de obtener un modelo de aplicación más general. El efecto de la historia del fenómeno y del transporte de turbulencia puede ser tomado en cuenta por medio de una ecuación de transporte para un parámetro característico de la turbulencia. La energía cinética turbulenta  $k$  es un buen parámetro debido a que ésta caracteriza la intensidad del movimiento fluctuante y representa la escala de velocidad de las fluctuaciones. Se han desarrollado diversos modelos que emplean ecuaciones de transporte semiempíricas para  $k$ , pero se requiere la determinación de la distribución de una escala de longitud turbulenta  $L$  que aparece en las relaciones del modelo. Para flujo en canales, puede utilizarse una distribución similar a la utilizada con la longitud de mezclado.

Para flujos más complejos que simples canales rectos, se han desarrollado modelos de turbulencia que determinan la longitud de escala turbulenta a partir de una segunda ecuación de transporte. Si el algoritmo numérico es eficiente, el aumento en trabajo de cómputo al agregar una ecuación diferencial de transporte no es demasiado grande. El modelo  $k$ - $\epsilon$  es el más utilizado actualmente, debido a su relativa sencillez.

Todos los modelos descritos parten del concepto de viscosidad turbulenta, el cual es válido sólo si la turbulencia es isotrópica. Para flujos donde la suposición anterior no es

válida, se emplean ecuaciones de transporte para los nueve componentes individuales de los esfuerzos de Reynolds. Estos modelos han sido aplicados escasamente para el flujo en canales debido al excesivo costo computacional que significa resolver ecuaciones diferenciales adicionales para cada componente del esfuerzo. Una aproximación a los modelos anteriores parte de simplificar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas de los esfuerzos individuales a través de la introducción de suposiciones sobre los términos de advección y difusión. A estos modelos se le conoce como *Modelos Algebraicos de Esfuerzos de Reynolds*. Una combinación del Modelo Algebraico de Esfuerzos con el modelo  $k$ - $\epsilon$  parece ofrecer las mejores perspectivas de desarrollo, pues se considera el carácter anisotrópico de la turbulencia sin requerir excesivos recursos de cómputo. Dado que la turbulencia en canales es anisotrópica debido al cortante, a la superficie libre y, en su caso, a efectos por curvatura, este último modelo representa la mejor alternativa para modelar el flujo en vertedores de excedencia, y es el utilizado en el presente estudio.

En estudios recientes (Nezu & Nakawaga, 1993) se ha encontrado que en la turbulencia se presentan estructuras "ordenadas". Todos los modelos anteriormente descritos parten de modelar los esfuerzos de Reynolds, los cuales surgen de considerar al movimiento fluctuante como "caótico" o aleatorio, por lo que no son válidos para modelar estos movimientos ordenados. Para modelar estas estructuras se ha recurrido a la Simulación Numérica Directa de las ecuaciones de Navier-Stokes, pero se requiere una enorme capacidad de memoria y largos tiempos de cómputo, incluso con el uso de supercomputadoras. Una aproximación a dicha simulación se conoce como "*Simulación de vórtices de gran escala*" (LES, "*Large-eddy simulation*"), que simula la turbulencia de mayor escala (de la que forman parte las estructuras ordenadas) directamente de las ecuaciones de Navier-Stokes, mientras utiliza un modelo de turbulencia isotrópico para la turbulencia de menor escala que las celdas computacionales ("*subgrid scale modelling*").

#### 4.5.2. El modelo $k$ - $\epsilon$ .

Este modelo emplea para la determinación de la longitud de escala la rapidez de disipación turbulenta a través de  $\epsilon \approx k^{3/2} / L$ . La ecuación semiempírica para  $k$  es:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + G - \varepsilon \quad (4.5.1)$$

donde el primer término del lado derecho representa la difusión; el segundo, la generación; y el tercero, la disipación de energía cinética turbulenta (cf. ec.3.5.3), donde:

$$G = -\overline{u'v'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = v_i \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (4.5.2)$$

Para la disipación  $\varepsilon$  se resuelve una ecuación similar de transporte:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} G - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (4.5.3)$$

Comparando (4.5.1) con la ecuación exacta dada por (3.5.7) se observa que los términos de difusión turbulenta son aproximadamente descritos por un gradiente local de las cantidades. En contraste, la ecuación para  $\varepsilon$  se introduce empíricamente de tal forma que sea similar a la ecuación para  $k$ . Una vez conocida la distribución de ambas variables en el flujo, se puede conocer el campo de viscosidad turbulenta. Una relación entre  $v_i$ ,  $k$  y  $\varepsilon$  se puede obtener a través del análisis dimensional (el cual se describe en el Apéndice B):

$$v_i = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.5.4)$$

El modelo  $k$ - $\varepsilon$  involucra el uso de cuatro constantes empíricas  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  y del parámetro  $c_\mu$ , el cual es constante en el modelo usual. Los términos  $\sigma_k$  y  $\sigma_\varepsilon$  aparecen al escribir las ecuaciones que gobiernan a  $k$  y  $\varepsilon$  (ecs. 4.5.1 y 4.5.3) en la forma general de la ecuación de transporte (ec.4.2.1) y relacionar el coeficiente de difusión  $\Gamma$  con la viscosidad turbulenta, es decir:

$$\Gamma_k = \frac{v_i}{\sigma_k} \quad \Gamma_\varepsilon = \frac{v_i}{\sigma_\varepsilon}$$

Los valores estándar de las constantes son  $c_\mu = 0.09$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$  y  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ . Estas constantes han sido seleccionadas de tal manera que el modelo sea compatible con una distribución de velocidad logarítmica cerca de una frontera sólida con una constante de Von-Karman  $k = 0.435$ . Si se utiliza  $k = 0.41$ , entonces se debe adoptar  $\sigma_k = \sigma_\varepsilon = 1.2$ .

El uso de  $c_\mu$  como constante implica suponer que la relación entre las fluctuaciones de velocidad verticales y la energía cinética turbulenta es a su vez constante. Sin embargo, como se mencionó en el capítulo anterior, esta relación varía significativamente cerca de la superficie libre. Este efecto puede ser tomado en cuenta en el modelo disminuyendo  $c_\mu$  cerca de la superficie. Celik & Rodi determinaron que dicho efecto puede modelarse fijando en la superficie libre la siguiente condición de frontera:

$$\varepsilon_s = \frac{k_s^{3/2}}{\alpha \cdot h} \quad (4.5.5)$$

donde el subíndice S indica el valor de la variable en la superficie libre. El término  $\alpha$  es una constante empírica del orden de  $\alpha \approx 0.18$  y  $h$  es el tirante.

El modelo  $k$ - $\varepsilon$  predice adecuadamente las propiedades medias de la turbulencia. Sin embargo, dicho modelo parte de la suposición de que la turbulencia es isotrópica, i.e.  $u' \approx v' \approx w'$ , por lo que el modelo no es adecuado para predecir flujos cortantes, con superficie libre o con curvatura apreciable pues, como se mencionó en la capítulo 3, estos fenómenos tienen como consecuencia una redistribución de la energía entre las fluctuaciones turbulentas, por lo que la intensidad de las mismas es distinta en cada dirección.

#### 4.5.2. Modelo Algebraico de Esfuerzos de Reynolds

Se han realizado diversos intentos para modificar el modelo  $k$ - $\varepsilon$  para tomar en cuenta la curvatura a través de una solución conjunta con un Modelo Algebraico de Esfuerzos, ARSM (*Algebraic Reynolds Stress Model*). El presente trabajo se basa en el modelo ARSM desarrollado por Shih, Zhu & Lumley (1994). Este modelo presenta la ventaja de que no produce esfuerzos ficticios para el flujo medio, es estable y computacionalmente económico.

En este modelo los esfuerzos de Reynolds se modelan a través de la siguiente ecuación:

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} 2S_{ij}^* + 2c_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} (-S_{ik}^* \Omega_{kj}^* + \Omega_{ik}^* S_{kj}^*) \quad (4.5.6)$$

donde  $S_{ij}^*$  es el tensor de razón de deformación menos su traza:

$$S_{ij}^* = s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \quad (4.5.7)$$

y  $\Omega_{ij}^*$  es el tensor de rotación:

$$\Omega_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.5.8)$$

$c_\mu$  y  $c_2$  dados por:

$$c_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s^* \frac{U^* k}{\epsilon}} \quad (4.5.9)$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{1 - 9c_\mu^2 \left( \frac{S^* k}{\epsilon} \right)^2}}{C_0 + 6 \frac{S^* k}{\epsilon} \frac{\Omega^* k}{\epsilon}} \quad (4.5.10)$$

con

$$U^* = \sqrt{S_{ij}^* S_{ij}^* + \Omega_{ij}^* \Omega_{ij}^*} \quad (4.5.11)$$

$$S^* = \sqrt{S_{ij}^* S_{ij}^*} \quad \Omega^* = \sqrt{\Omega_{ij}^* \Omega_{ij}^*} \quad (4.5.12 \text{ y } 13)$$

$$A_s^* = \sqrt{6} \cos \psi \quad \psi = \frac{1}{3} \text{arc cos}(\sqrt{6} W^*) \quad (4.5.14)$$

donde

$$W^* = \frac{S_{ij}^* S_{jk}^* S_{ki}^*}{(S^*)^3} \quad (4.5.15)$$

El resto de los valores son  $A_0 = 6.5$  y  $C_0 = 1.0$ .

Los valores de  $k$  y  $\epsilon$  se determinan a través de sus respectivas ecuaciones de transporte (ecs. 4.5.1 y 4.5.3) con el resto de las constantes utilizando sus valores estándar.

Desarrollando las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes expresiones para un caso en dos dimensiones:

$$\overline{u'v'} = -c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} 2S_{12}^* \quad (4.5.16)$$

$$\overline{u'u'} = \frac{2}{3}k + 4c_2 \frac{k^3}{\epsilon^2} S_{12}^* \Omega_{12}^* \quad (4.5.17)$$

$$\overline{v'v'} = \frac{2}{3}k - 4c_2 \frac{k^3}{\epsilon^2} S_{12}^* \Omega_{12}^* \quad (4.5.18)$$

y sustituyendo (4.5.4) en (4.5.16):

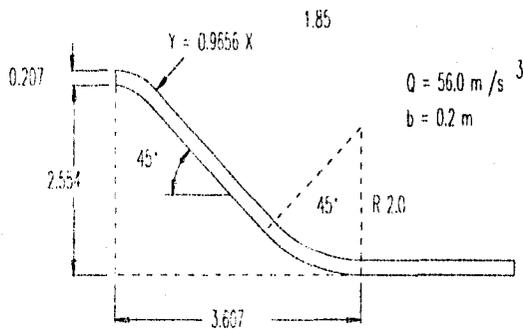
$$\overline{u'v'} = -v_1 2S_{12}^* \quad (4.5.21)$$

Hay que hacer notar que en un flujo bidimensional  $W^* = 0$ , por lo que  $A_s^*$  adquiere un valor constante,  $A_s^* \approx 2.12132$

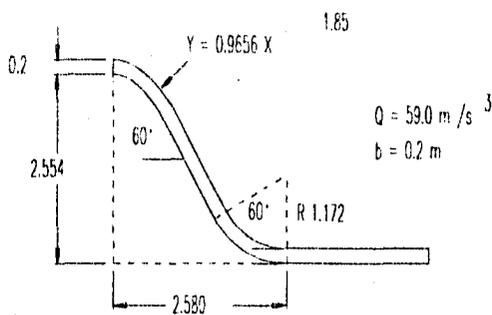
## 6. VERIFICACIÓN DEL MODELO

### 6.1. PROCEDIMIENTO

La verificación del modelo se llevó a cabo comparando los resultados predichos por el mismo con mediciones de velocidad y presión de fondo realizadas en dos modelos de vertedor de codo vertical del Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M. con diferentes geometrías:



c)



b)

Fig. 5.1. Geometría de los modelos donde se realizaron las mediciones (Bribiesca et al. 1987).

Las mediciones fueron reportadas por Bribiesca et al. (1986 y 1987). El procedimiento utilizado para ambas geometrías fue el siguiente:

Para el vertedor con codo de radio igual a 2 m. y ángulo de 45°:

1. Cálculo de las condiciones iniciales de tirante, velocidad, energía cinética turbulenta y razón de disipación de energía turbulenta a través de una subrutina incorporada a PHOENICS. Se consideró un gasto de 0.058 m<sup>3</sup>/s.
2. Cálculo mediante el código PHOENICS de la frontera libre y de las variables antes mencionadas utilizando el método SEM y dos modelos alternos de turbulencia: el modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$  en su versión estándar y el modelo  $k-\varepsilon$  / ARSM descrito en el capítulo anterior.
3. Comparación de los resultados obtenidos en ambos cálculos con datos experimentales.
4. Análisis y discusión de dichos resultados.

En el caso del codo de radio 1.172 m. y ángulo de 60° se realizaron los mismos pasos, pero con un gasto de 0.056 m<sup>3</sup>/s.

## 5.2. DOMINIO DE SOLUCION.

Se utilizó en ambos casos un dominio computacional bidimensional con una malla curvilínea ajustada a las fronteras. Dichos dominios se construyeron utilizando como frontera sur las plantillas ilustradas en la fig 5.1 y como límite norte una frontera paralela a dicha plantilla. La distancia entre ambas se calculó en base al tirante crítico en la cresta del vertedor, el cual se calcula mediante la expresión (2.4.3):

$$h_c = \left[ \frac{q^2}{g} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Considerando un ancho de canal de 0.2 m., el valor de  $h_c$  es igual a 0.207 m. para el codo de 45°; y de 0.2 m. para el de 60°.

En ambos dominios se utilizaron 90 celdas en dirección longitudinal y 80 en la dirección normal espaciadas uniformemente.

### 5.3. CONDICIONES DE FRONTERA.

Considerando que la región de interés se encuentra en la zona del codo vertical, y que la entrada al dominio no está cercana a dicha zona, se utilizaron las siguientes condiciones en la entrada: como velocidad tangencial se utilizó la velocidad media en la cresta, dada por el gasto por unidad de ancho dividido por el tirante crítico en la sección,

$$u = \bar{u} = \frac{q}{h_c} \quad (5.3.1)$$

Se utilizó un valor nulo para la velocidad normal, así como para las variables  $k$  y  $\varepsilon$ , considerando que el flujo en la cresta es laminar.

En la frontera sur (la plantilla) el efecto de la fricción se calcula a partir del esfuerzo cortante de pared. Dicho esfuerzo se obtiene a través de las funciones de pared típicas para flujos con rozamiento y consiste básicamente en especificar las condiciones de frontera en un punto externo a la subcapa viscosa donde la ley logarítmica es válida y la turbulencia puede considerarse en equilibrio local. Para tal punto, a una distancia  $y$  de la superficie sólida, la velocidad resultante paralela a dicha superficie se determina como:

$$U = \frac{u^*}{0.435} \ln(Ey^+) \quad (5.3.2)$$

donde  $E$  es un factor de rugosidad y  $u^*$  es la velocidad de fricción. En el presente caso se consideró una superficie hidráulicamente lisa, para la cual  $E$  tiene un valor igual a 9.0. La distancia adimensional  $y^+$  se define como:

$$y^+ \equiv u^* y / \nu \quad (5.3.3)$$

Las condiciones para  $k$  y  $\varepsilon$  se especifican para el mismo punto a través de:

$$k = 3.33 u^{*2} \quad (5.3.4)$$

$$\varepsilon = u^{*3} / (0.435 y) \quad (5.3.5)$$

En la frontera norte y en la salida del dominio se especifica una presión de referencia igual a cero, a fin de que PHOENICS calcule el flujo a través de las mismas para satisfacer las ecuaciones de conservación en el dominio.

#### 5.4. CONDICIONES INICIALES.

Debido a la restricción de Courant requerida por el método SEM, y ante la necesidad de utilizar un gran número de celdas, los cálculos en el presente caso resultan sumamente largos. A fin de reducir en lo posible el tiempo de cómputo se incorporó en PHOENICS una subrutina que, con base en un algoritmo rápido y sencillo permita iniciar el cálculo con valores iniciales próximos a los finales. Dicha subrutina, escrita en lenguaje de programación FORTRAN, se anexa en el apéndice C.

El cálculo de las condiciones es como sigue:

1. Se calcula el tirante a lo largo de la plantilla considerando flujo unidimensional potencial. Es decir, se considera la energía específica (ec. 2.4.1) como constante a lo largo del dominio:

$$E_1 = E_2 = \text{cte.} \quad (5.4.1)$$

$$\left[ z + h + \frac{\bar{u}^2}{2g} \pm \frac{h \bar{u}^2}{g r} \right]_1 = \left[ z + h + \frac{\bar{u}^2}{2g} \pm \frac{h \bar{u}^2}{g r} \right]_2 \quad (5.4.2)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican dos secciones distintas del vertedor. Siendo que la geometría es conocida y que la sección 1 es la sección a la entrada, con tirante y velocidad media conocidas, entonces las únicas incógnitas de la ec.(5.4.2) son el tirante y la velocidad media en la sección 2. Estas se pueden calcular a través de un proceso iterativo. Repitiendo dicho proceso a lo largo del número de secciones en que se haya dividido el dominio en dirección tangente la plantilla, podemos conocer el valor del tirante y la velocidad media potencial a lo largo del dominio.

2. Una vez conocido los dos valores anteriores se puede calcular el espesor de la vena líquida en cada sección, el cual es igual al espesor potencial  $h_p$  y el espesor de desplazamiento  $\delta^*$ . Considerando a este último como un décimo del espesor de la capa límite (Chow, 1982) se tiene:

$$h = h_p + 0.1\delta \quad (5.4.3)$$

donde  $h_p$  es el tirante calculado en el punto anterior y  $\delta$  es el espesor de la capa límite turbulenta, la cual se calcula a través de la expresión (3.4.3):

$$\frac{\delta}{l} = 0.080 \left( \frac{l}{k_s} \right)^{-0.233}$$

donde  $l$  es la longitud de la plantilla desde la cresta hasta el punto de interés. A las celdas que se encuentran por debajo de la altura calculada se les asigna un valor del marcador  $c = 1.0$ , junto con la densidad del agua. Para las celdas cuya altura coincide con  $h$  se les asigna el marcador correspondiente al porcentaje del volumen de la celda ocupada por agua y, a partir de este marcador, la densidad. Por último, para las celdas ubicadas arriba de la celda con la superficie libre  $c$  es igual a cero y se les asigna la densidad del aire.

3. Se calcula la velocidad media  $\bar{u}$  dividiendo el gasto por unidad de ancho entre el tirante  $h$ .

4. Se calcula a través de un proceso iterativo la velocidad de fricción en la sección a través de la relación (3.4.17) con  $\Pi \approx 0.2$ :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{hu_*}{v} \right) + A + \frac{1}{k} (0.2 - 1) \quad (5.4.4)$$

5. Conocida la velocidad de fricción se puede determinar la velocidad para el agua a diferentes alturas de cada sección utilizando la ec.(3.4.16):

$$U^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + A + \frac{2 \Pi}{k} \text{sen}^2 \left( \frac{\pi y}{2h} \right) \dots \text{ para } y \leq \delta \quad (5.4.5a)$$

$$u = u(\delta) \dots \text{ para } y > \delta \quad (5.4.5b)$$

donde  $U^+ = u/u_*$  y  $y^+ = y u_* / v$ . Dicha velocidad se consideró válida para las celdas que contengan líquido, incluyendo aquellas en que se encuentre presente la superficie libre. Para las celdas con aire, se les asigna el valor de la velocidad en la celda que contiene a la superficie libre.

6. Se asigna un valor nulo de velocidad normal  $V$  en todo el dominio.

7. Se asigna el valor de la energía cinética turbulenta a través de la distribución dada por la ec.(3.7.1):

$$k^2 / u_*^2 = 4.78 \exp(-2\xi) \quad \text{para } y \leq \delta \quad (5.4.6a)$$

$$k = 0 \quad \text{para } y > \delta \quad (5.4.6b)$$

donde  $\xi = y/d$ .

8. Se calcula el valor de la viscosidad turbulenta en cada celda a través de la ec. (3.7.3):

$$v_t = k h u_* \xi (1-\xi)$$

9. Conocidas  $k$  y  $v_t$  se calcula la razón de disipación  $\varepsilon$  despejando dicha variable de la ec.(4.5.4) con  $c_\mu = 0.09$ :

$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

10. En el caso de las celdas adyacentes a la pared (la frontera sur), se calcula  $k$  y  $\varepsilon$  utilizando las expresiones (Nezu & Nakagawa, 1993):

$$k = 3.33 u_*^2 \quad (5.4.7)$$

$$\varepsilon = u_*^3 / (0.41 y) \quad (5.4.8)$$

Con el paso anterior se finaliza la asignación de condiciones iniciales. Con el campo de valores iniciales obtenido se arranca el proceso de cálculo utilizando los dos modelos de turbulencia propuestos. La codificación en Fortran de la rutina de asignación de condiciones iniciales y del modelo ARSM se anexa en el apéndice C.

## 5.5. RESULTADOS

Las secciones que siguen presentan los resultados obtenidos con ambos modelos de turbulencia, comparándolos con los datos experimentales disponibles.

### 5.5.1. Vertedor con codo radio de 2 m. y ángulo de 45°

*Símbolos:*

L = distancia de la plantilla desde el origen del codo.

LC = longitud total del codo

h = tirante

y = altura

ARSM = Modelo de turbulencia  $k$ - $\varepsilon$  / ARSM

k- $\varepsilon$  std = Modelo de turbulencia  $k$ - $\varepsilon$  estándar

1. Tirante y presión de fondo

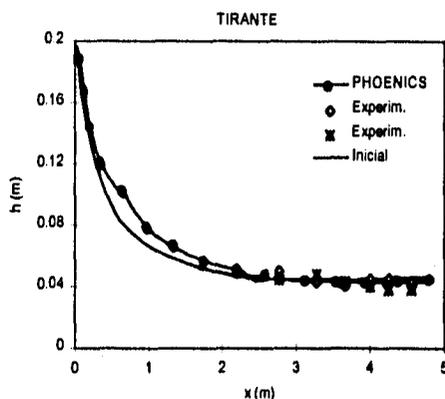


Fig. 5.2

Se puede observar que se calculó adecuadamente la superficie libre. El tirante calculado como valor inicial (graficado como Inicial) es razonablemente cercano al predicho con el método SEM.

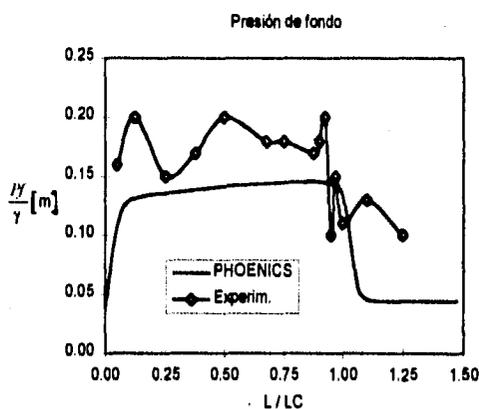


Fig. 5.3

El modelo calcula adecuadamente la localización del cambio abrupto en la presión de fondo a la salida del codo, pero subestima su valor tanto en el codo como en el tramo recto a la salida. Además, es incapaz de modelar los "picos" de la presión de fondo medidos en el laboratorio. Es probable que estos últimos sean consecuencia de fenómenos tridimensionales: corrientes secundarias, el sistema de ondas cruzadas que se forma en la superficie o la entrada de aire; de ahí que el presente modelo (bidimensional) sea incapaz de predecir dichos gradientes.

**2. Velocidad tangencial**

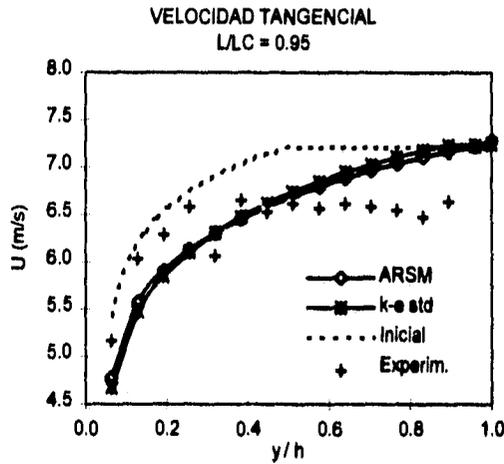


Fig. 5.4

Como puede observarse en la gráfica, no existe una diferencia significativa entre los perfiles de velocidad obtenidos con los dos modelos de turbulencia: con ambos se obtiene una buena aproximación al valor experimental, aun cuando tienden a sobrevalorar la velocidad en la zona superior de la vena ( $y/h > 0.5$ ).

**3. Velocidad normal**

Debido a que el valor experimental de la velocidad normal es dos ordenes de magnitud superior al obtenido con el modelo numérico, las mediciones experimentales no se incluyen en la siguiente gráfica:

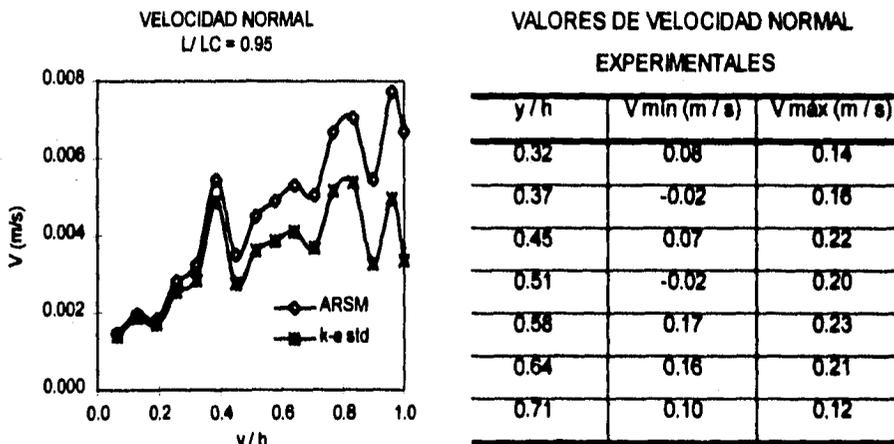


Fig. 5.5

Se puede apreciar que el perfil de velocidad normal calculado al utilizar el modelo ARSM es similar al del modelo  $k-\epsilon$ , pero las magnitudes son ligeramente diferentes. En ambos casos los valores obtenidos son muy inferiores a los experimentales. Es probable que la causa de esta discrepancia se encuentre en las corrientes secundarias que se forman en el flujo, y que el presente modelo no considera. Las medidas experimentales parecen mostrar que las mayores magnitudes de la velocidad media y de las fluctuaciones turbulentas se presentan en la zona media del flujo ( $y/h \approx 0.5$ ) para descender gradualmente al acercarse a la superficie libre, a diferencia de las velocidades medias calculadas con el modelo numérico, que muestran un incremento continuo desde el fondo hasta la superficie libre. Desgraciadamente no se dispone de mediciones cercanas al fondo para los modelos de vertedor, pues en canales rectos las fluctuaciones más fuertes se presentan para  $y/h \approx 0.2$ . Esto sugiere que la curvatura vertical podría ocasionar un incremento de la altura para la cual se presentan las fluctuaciones más intensas de la velocidad normal.

**4. Energía cinética, rapidez de disipación y viscosidad turbulentas**

Las siguientes gráficas muestran los resultados obtenidos para las diversas variables turbulentas comparando ambos modelos de turbulencia. Desafortunadamente no se dispone de mediciones para dichas variables.

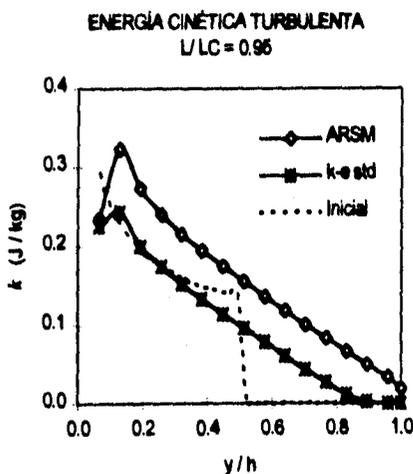


Fig.5.6

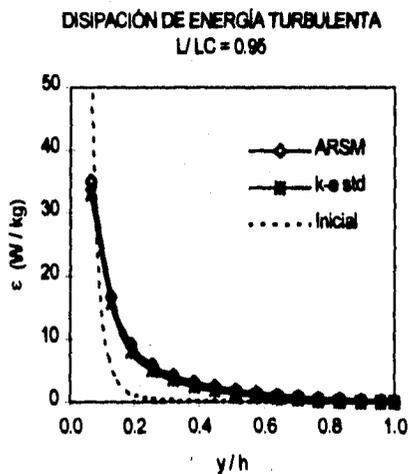


Fig. 5.7

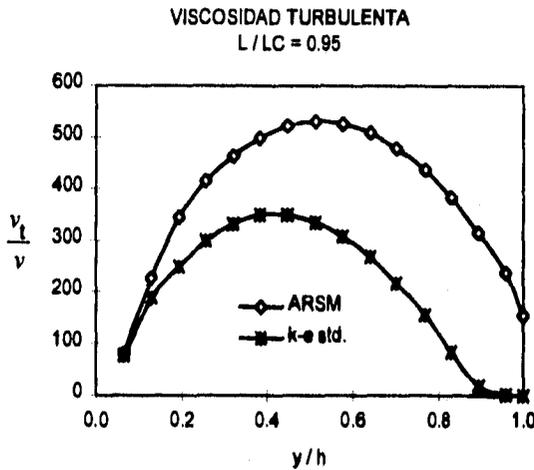


Fig. 5.8

Se puede observar que con el modelo ARSM se obtiene una magnitud mayor que el modelo  $k-\epsilon$  para las variables de energía cinética y viscosidad turbulenta, no así para la disipación. Este resultado es alentador puesto que la curvatura del canal influye principalmente en la magnitud de las fluctuaciones de velocidad y presión, por lo que debe notarse en un incremento de la energía cinética y la viscosidad turbulenta (que depende del esfuerzo turbulento cortante). Dado que el modelo  $k-\epsilon$  es incapaz de modelar el efecto de la curvatura, es de esperar que prediga un valor menor al del ARSM.

Cabe hacer notar el perfil parabólico de viscosidad turbulenta calculado es característico del flujo en canales, con valores máximos en la zona media ( $0.4 < y/h < 0.6$ ) y tendientes a cero cerca de la superficie libre. Aparentemente, el método SEM no requiere de condiciones particulares de frontera en la superficie libre para modelar el efecto disipativo de ésta en la turbulencia.

### 5.5.2. Vertedor con codo de radio 1.172 m. y ángulo de 60°

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el segundo modelo de vertedor:

1. Presión de fondo

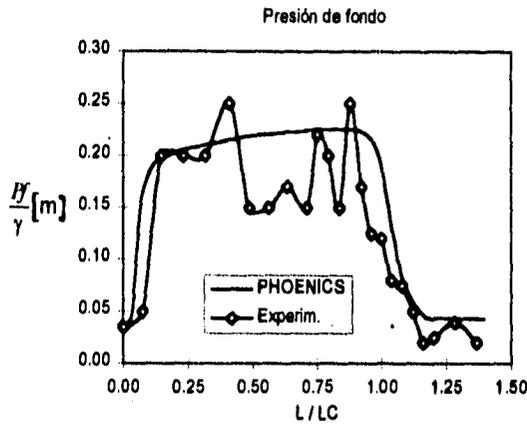


Fig. 5.9

Se aprecia en la gráfica que el cálculo de la presión de fondo es más preciso para esta geometría que para el modelo anterior, sobre todo en la entrada del codo ( $L/LC < 0.3$ ) donde la curva obtenida se ajusta notablemente bien a los valores medidos. Para el tramo medio del codo ( $0.3 < L/LC < 0.8$ ) se acentúan los "picos" en la presión de fondo, que el modelo numérico no puede calcular. En la zona final de la curva ( $0.8 < L/LC < 1.0$ ) nuevamente los valores calculados se acercan a los datos experimentales; sin embargo, en el tramo recto que le sigue, el valor medido es menor al obtenido con el modelo.

2. Velocidad tangencial

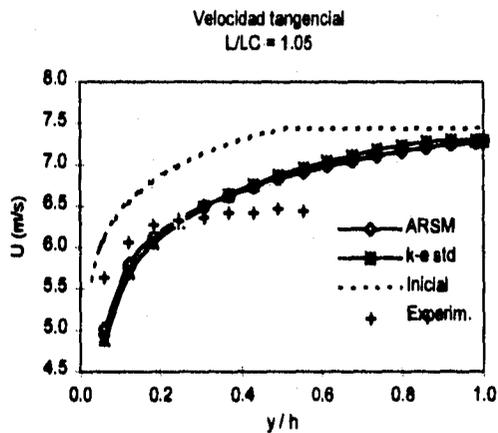


Fig. 5.10

Como se ve en la gráfica de velocidad tangencial, los resultados del presente caso, particularmente para la región de la pared ( $y/h < 0.2$ ), son mejores que para el modelo con codo de  $45^\circ$ , sin embargo fuera de esta zona el valor calculado tiende a desviarse de las medidas experimentales. Se nota una ligera mejoría del modelo ARSM sobre el k-e estándar. La diferencia de los valores calculados y los experimentales pudiera explicarse como consecuencia de la presencia de corrientes secundarias que el presente modelo no considera: dichas corrientes, sobre todo las provocadas por la fuerza centrífuga en el codo (corrientes de Prandtl de 1er. orden), pueden ser lo suficientemente fuertes como para provocar un elevado transporte de cantidad de movimiento entre la región superior del flujo y la zona cercana a la pared, acelerando al fluido en la primera y frenándolo en la segunda, resultando los perfiles observados, prácticamente planos para  $y/h > 0.2$  (cf. fig.3.6 y 3.7) Otra explicación es que el valor de la viscosidad turbulenta sea mayor al calculado, lo que resultaría en curvas más próximas a la experimental.

### 3. Velocidad normal

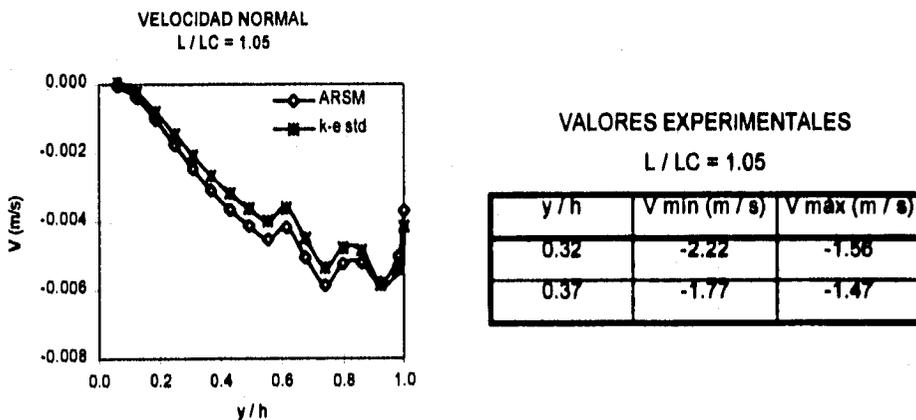


Fig. 5.11

Nuevamente los valores calculados del componente normal de la velocidad son menores que los valores experimentales, aun cuando el signo sigue siendo congruente. Llamo la atención el hecho de que la magnitud de la velocidad normal medida llega a ser hasta 1/3 de la velocidad tangencial ( $y/h=0.32$ ), lo que refuerza la hipótesis de que son las corrientes secundarias debidas a la fuerza centrífuga las responsables de tal magnitud.

4. Energía cinética, rapidez de disipación y viscosidad turbulenta

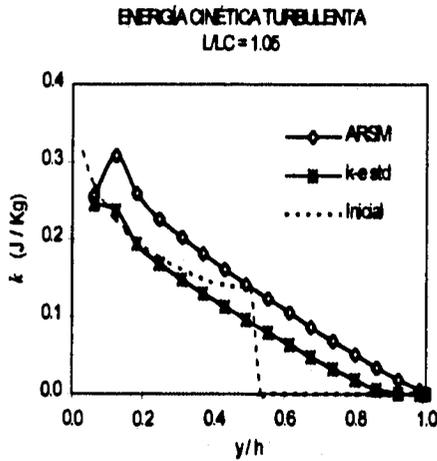


Fig. 5.12

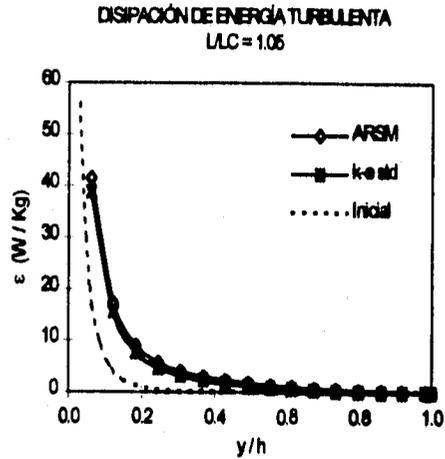


Fig. 5.13

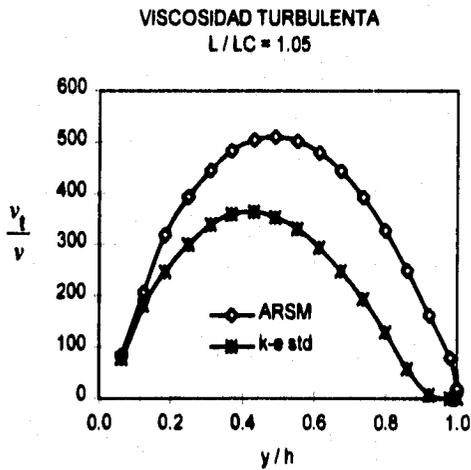


Fig. 5.14

Tal y como en el caso anterior, los perfiles de la energía cinética, disipación y viscosidad turbulenta son similares a los reportados en la literatura (Nezu & Nakawaga, 1993).

Las observaciones realizadas a partir de las gráficas se sintetizan en los siguientes puntos:

1. El método SEM para el cálculo de la superficie libre resulta adecuado para el cálculo del tirante, y como se puede ver de los perfiles de viscosidad turbulenta, que resultan similares a los reportados en la literatura, no se requieren condiciones particulares de

frontera para tomar en cuenta el efecto disipativo de la superficie libre sobre las variables turbulentas. Hay que considerar sin embargo, que el presente modelo no toma en cuenta la posible entrada de aire en el flujo, que influye en la generación y disipación de la turbulencia.

2. El modelo predice valores menores a los medidos en la presión de fondo para el vertedor con codo de  $60^\circ$ , pero obtiene valores menores a los experimentales para el vertedor con codo de  $45^\circ$ . Cabe hacer notar que el valor de la presión de fondo a lo largo del codo es similar en ambos casos ( $P_f/\gamma \approx 0.2$  m.), contrario a lo que podría esperarse, pues aparentemente el efecto de la fuerza centrífuga es aproximadamente el mismo para ambos radios de curvatura.

3. El uso del modelo  $k-\epsilon$  / ARSM no mejora en forma apreciable el perfil de velocidad tangencial con respecto al modelo  $k-\epsilon$  estándar. Sin embargo, las demás variables (con excepción de la presión) sí sufren cambios notables. Como es de esperarse, el Modelo Algebraico de Esfuerzos predice un incremento en la magnitud de las variables turbulentas:  $k$  y  $v_t$  como consecuencia de la curvatura del canal. Desafortunadamente no se dispone de mediciones en los modelos para estas variables, pero al menos cualitativamente los resultados parecen ajustarse a las observaciones reportadas en canales curvos (Ellis & Joubert, 1973; Hunt & Joubert, 1979; Ramaprian & Shivaprasad, 1978).

4. El valor calculado de la velocidad normal está dos órdenes de magnitud por debajo de los valores reportados por Bribiesca et al (1987).

Una posible explicación a la incapacidad para modelar los la serie de "crestas" y "valles" de la presión pudiera hallarse en las limitaciones inherentes a un modelo de dos dimensiones. Estos "picos" del valor de la presión pueden deberse a efectos tridimensionales como corrientes secundarias o el sistema de ondas cruzadas que se forma en la superficie libre al entrar el flujo a la curva. Es de particular interés la posibilidad de que la causa sean corrientes secundarias, puesto que éstas podrían

justificar la mayor magnitud de la velocidad normal medida con respecto a la calculada con el modelo numérico.

En general, los resultados obtenidos son satisfactorios, considerando que no se ha requerido realizar ningún ajuste a los coeficientes y constantes que involucra el modelo de turbulencia, por lo que el modelo numérico obtenido se utilizó para realizar el análisis propuesto al principio del presente trabajo, y que se describe en el siguiente capítulo.

## 6. ANÁLISIS DEL FLUJO EN VERTEDORES DE CODO VERTICAL

### 6.1. DOMINIO, CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA.

A fin de realizar el análisis del comportamiento hidráulico de vertedores de excedencia provistos de codo vertical se realizó una simulación bidimensional (utilizando el modelo descrito en los capítulos anteriores) en dos prototipos con diferentes radio de curvatura y ángulo del codo.

Los prototipos utilizan geometrías similares a las presentadas en la verificación del modelo con una escala geométrica de 35:1. El primer prototipo tiene, entonces, un codo de radio de 70 m. y ángulo de 45° ; y el segundo, un radio de 41.02 m. y ángulo de 60°. En ambos casos la altura de la cresta y de inicio del codo es la misma: 89.39 y 20.51 m. respectivamente. Se utilizó un gasto de 79 m<sup>3</sup>/s por unidad de ancho del canal. La altura del dominio (correspondiente al tirante crítico en la cresta de los vertedores) es de 8.31 m.

Se utilizó para ambas geometrías un sistema coordenado curvilíneo adaptado a las fronteras, con 90 celdas en dirección longitudinal y 80 en dirección normal de tamaño uniforme.

Se utiliza el procedimiento descrito en el capítulo 5 para fijar las condiciones iniciales. Las condiciones de frontera también son las mismas con excepción de la velocidad de entrada, que ahora es de 9.025 m / s.

Para el cálculo del coeficiente de cavitación se considera la definición (*Frizell y Metford, 1991*):

$$\sigma \equiv \frac{P - P_v}{\frac{1}{2} \rho u^2} \quad (6.1)$$

donde  $P$  es presión local,  $P_v$  es la presión de vaporización del agua,  $\rho$  es la densidad y  $u$  es la velocidad media en la sección. En el presente trabajo se utiliza  $P$  dado por la presión de fondo,  $P_b = 2335 \text{ Pa}$  y  $u$  igual a la velocidad media del flujo en la sección. Entre más pequeño sea este índice mayor es el riesgo de cavitación. Se considera que para valores de  $\sigma$  mayores de 0.2, el riesgo de cavitación es mínimo y el fenómeno puede ser controlado con las especificaciones adecuadas para el material de construcción de la estructura (Frizell & Metford, 1991; Falvey, 1993).

## 6.2. RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos para los dos prototipos, a fin de buscar establecer una relación cualitativa entre el radio del codo y el comportamiento del flujo en la estructura.

### 1. PRESIÓN DE FONDO.

Como puede observarse, la presión de fondo es notoriamente más elevada a lo largo del codo con menor radio, para ser similar en el segundo tramo recto. Esto contradice las observaciones realizadas por Bribiesca et al. (1987) que señalan que la magnitud de la presión de fondo aguas abajo del codo de menor radio es considerablemente más pequeña que en el de mayor radio a igualdad de gasto.

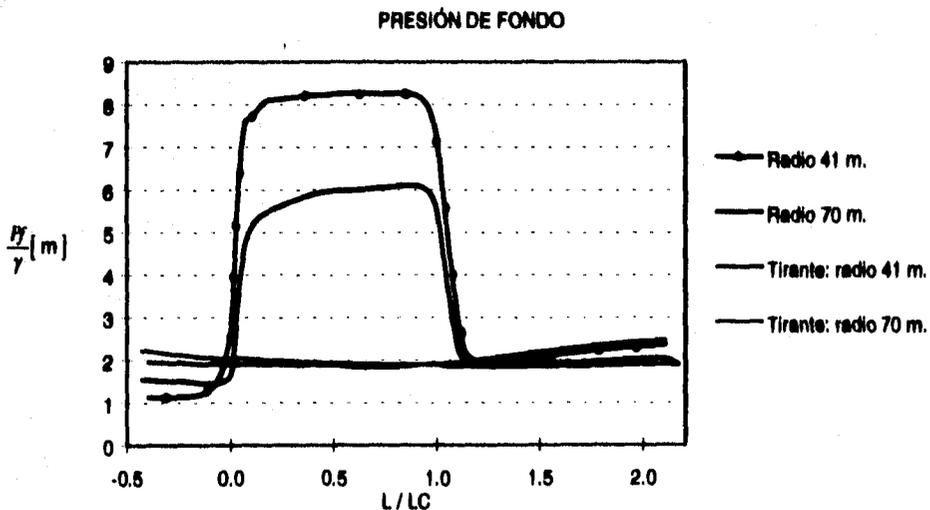
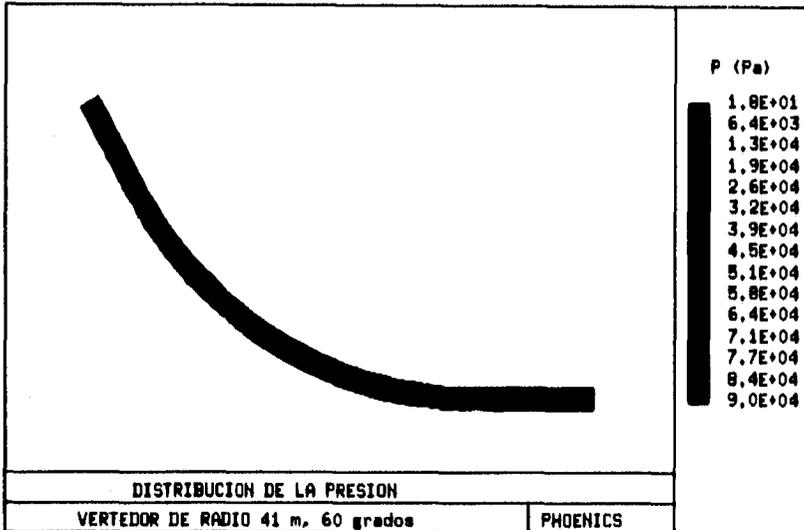


Fig. 6.1

## ANALISIS DEL FLUJO EN VERTEDORES DE CODO VERTICAL



Estos investigadores proponen la siguiente hipótesis para explicar dicho comportamiento: "en el caso del codo mayor radio, la derivada  $\partial V / \partial x$  siempre sería positiva y las velocidades verticales crearían una fuerza que siempre debería sumarse a la producida por la fuerza centrífuga (de acuerdo con la intensidad del fenómeno) y la velocidad de fondo se iría incrementando aguas abajo. En cambio en el codo de menor radio la derivada  $\partial V / \partial x$  sería, alternativamente, positiva o negativa, las velocidades de fondo crearían una fuerza que, también de manera alternada, se sumaría o restaría a la producida por la fuerza centrífuga y las velocidades tangenciales en el fondo permanecerían constantes."

El presente modelo es bidimensional y resuelve las ecuaciones de Reynolds con todos sus términos. Como se verá más adelante, el comportamiento de la velocidad normal calculado en ambos prototipos sería similar, a diferencia de lo acotado en el párrafo anterior, por lo que dicha hipótesis es insuficiente para explicar el fenómeno. Sin embargo, hay que recordar que el presente modelo calcula una magnitud de la velocidad normal muy inferior al valor que se ha medido experimentalmente, y es muy probable que esta falla se deba a la presencia en el flujo real de corrientes secundarias muy intensas,

que el presente modelo no considera, y que podrían resultar en un comportamiento como el descrito en la hipótesis mencionada.

## 2. VELOCIDAD TANGENCIAL

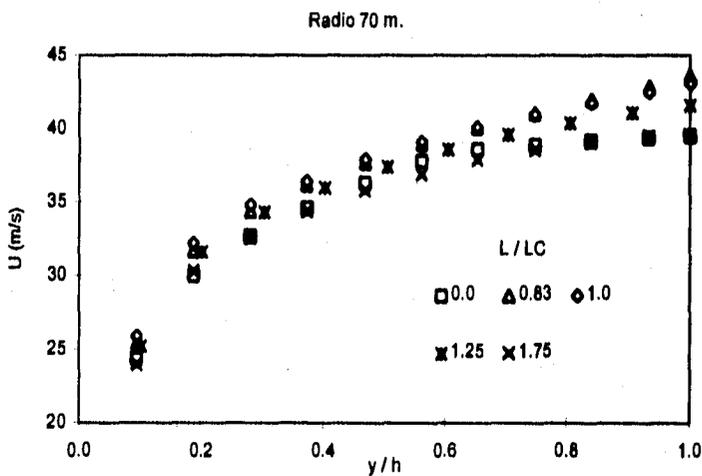


Fig.6.2a

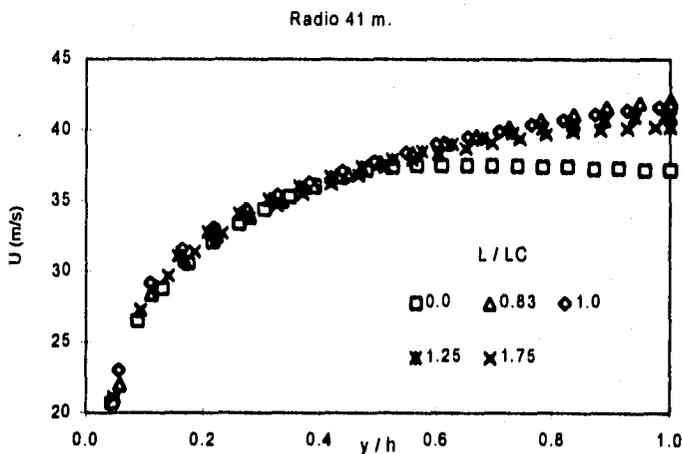


Fig. 6.2b

Se puede observar de las figuras (6.2.a y b) que el perfil de velocidad en la entrada del codo es un poco distinto, con una región donde el perfil es prácticamente plano, pues la capa límite aún no se ha desarrollado en todo el tirante. En el tramo final del codo y al inicio del tramo recto que le sigue el perfil es prácticamente el mismo. La desaparición del efecto centrífugo no afecta en forma notable a esta variable.

3. Velocidad normal

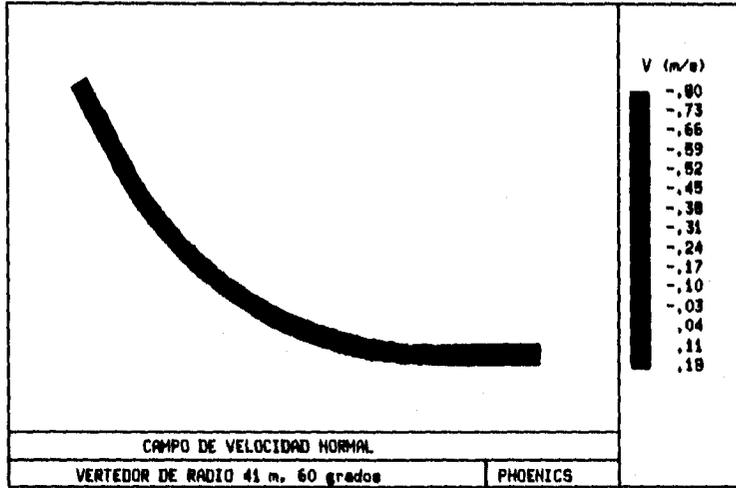


Fig. 6.3a

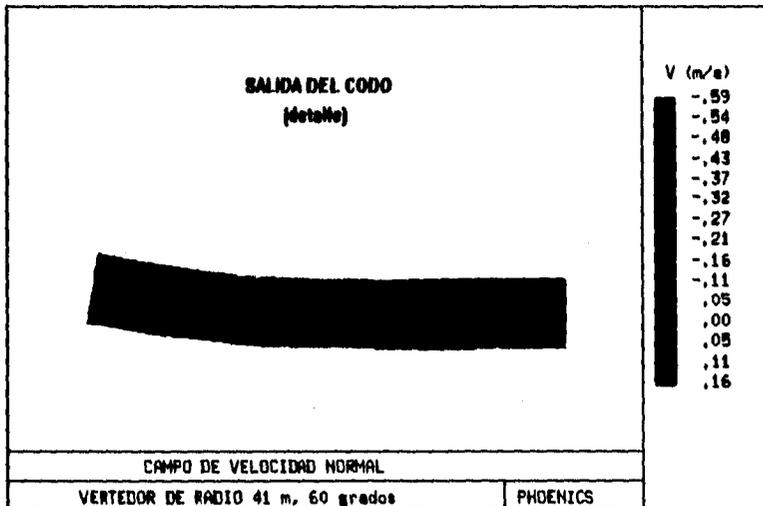


Fig. 6.3b

Se aprecia un fuerte cambio en la magnitud y dirección del componente de la velocidad normal en la salida del codo. Este cambio es mucho más acentuado en el codo de menor radio. Este fenómeno puede ser explicado como resultado de la distribución de la presión: durante el tramo curvo, el valor de la presión de fondo es muy elevado, con la consecuente velocidad normal positiva, pero en la zona donde se experimenta una caída drástica de la presión (en la salida del codo) se pierde súbitamente el mecanismo anterior y las velocidades normales se vuelven negativas y de mayor magnitud. El flujo aguas abajo de esta zona se estabiliza, y las velocidades tienden a valores positivos debido a la gradual reducción de la velocidad por la fricción.

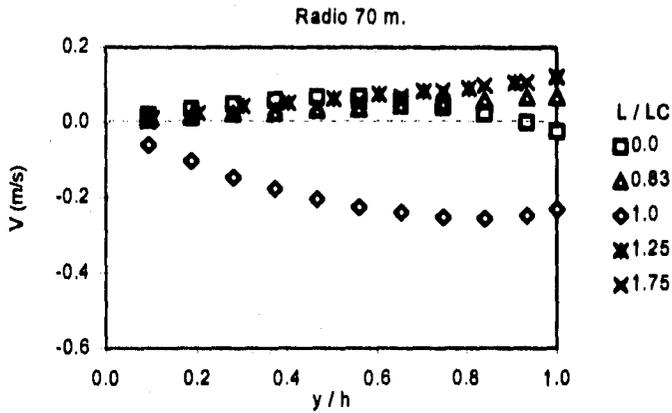


Fig. 6.4a

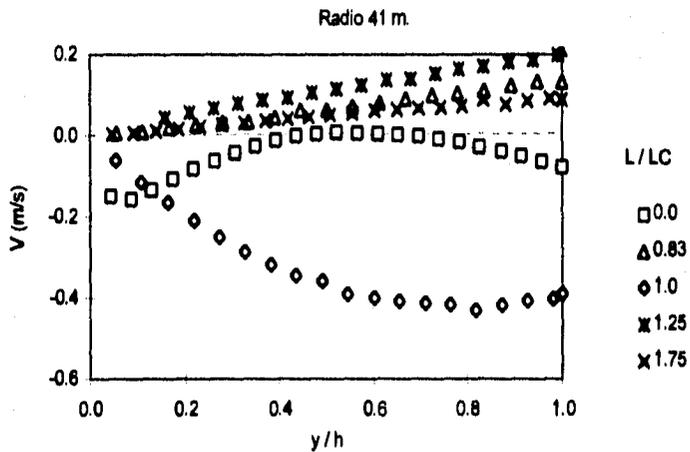


Fig. 6.3b

Se aprecia una tendencia opuesta en la entrada del codo donde, al incrementarse súbitamente la presión de fondo, la velocidad se vuelve positiva, aunque de magnitud mucho menor a la observada en la salida. En la primer parte del tramo curvo la velocidad cerca del fondo es positiva y cerca de la superficie libre es negativa, por lo que aparentemente las líneas de corriente convergen ligeramente hacia la zona media de la vena. Aguas abajo del codo la velocidad normal se vuelve positiva en todo el tirante. Así, en el flujo se presentan sucesivamente zonas con velocidad normal negativa, positiva, negativa y nuevamente positiva. Dicho comportamiento, poco estable, puede favorecer la cavitación.

Este fenómeno se presenta en ambos prototipos, pero es menos intenso en el codo con mayor radio. *Bribiesca (1994)* con un modelo numérico bidimensional, en el cual el codo se conecta a un tramo recto con una inclinación de  $5^\circ$ , obtiene que la velocidad normal en el segundo tramo recto permanece negativa, por lo que el uso de un codo de mayor radio que se conecte a un tramo recto inclinado pudiera "estabilizar" el flujo al final de la curva. Cabe recordar, sin embargo, que la magnitud de la velocidad normal pudiera estar dominada sobre todo por corrientes secundarias, que pudieran alterar notoriamente el comportamiento del flujo.

### 3. Turbulencia

#### ENERGÍA CINÉTICA TURBULENTA

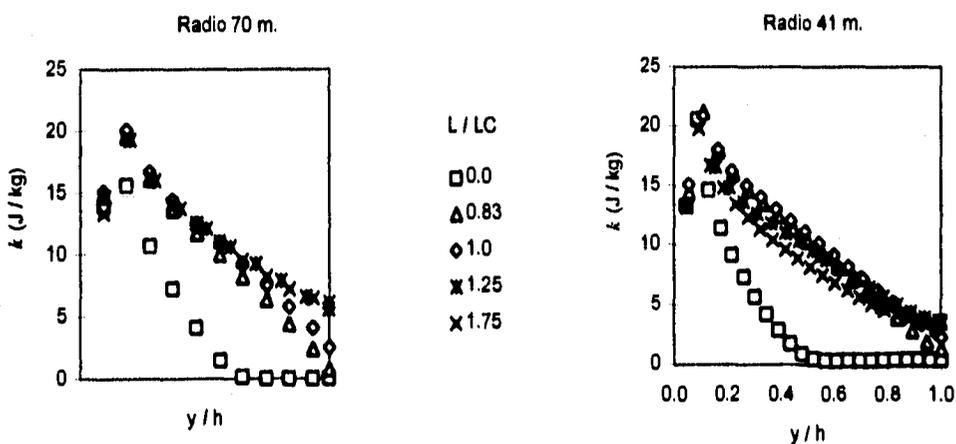


Fig.6.5

Se puede observar (figs. 6.5 y 6.6) un ligero incremento en la magnitud de  $k$  y del esfuerzo de Reynolds cortante por efecto de la curvatura y la caída que sufren dichas variables en la zona inferior de la vena ( $0.0 < y/h < 0.5$ ) al pasar del codo al tramo recto. Esta caída es más notable en el codo de menor radio. En la zona superior de la vena ( $0.5 < y/h < 1.0$ ) sucede lo contrario: el valor de  $k$  y  $-\rho \overline{u'v'}$  es un poco mayor aguas abajo de la salida del codo.

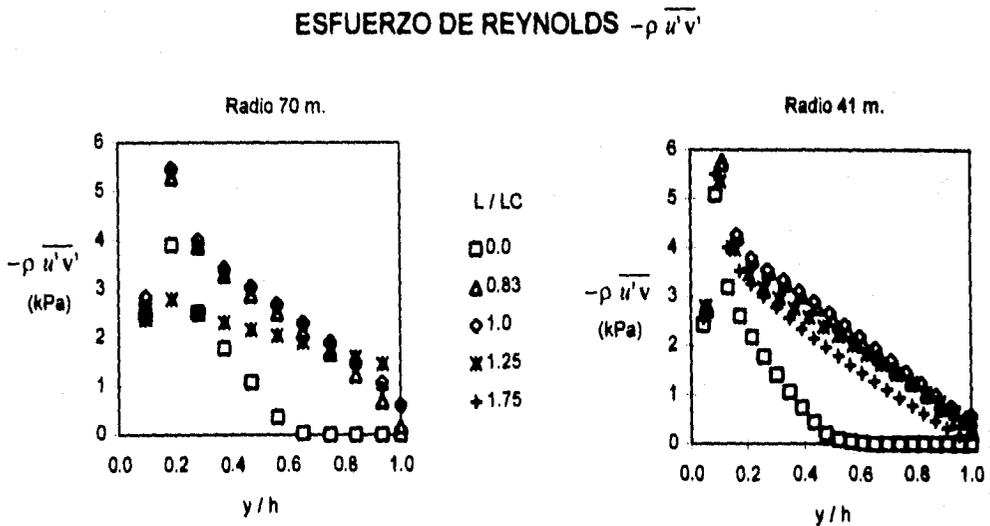


Fig. 6.6

**FLUCTUACIONES DE VELOCIDAD**

Las figs. 6.7 y 6.8 muestran el valor medio de la magnitud de las fluctuaciones de velocidad, calculados a través de:

$$u' \text{ RMS} = \sqrt{\overline{u'^2}}$$

$$v' \text{ RMS} = \sqrt{\overline{v'^2}}$$

donde  $\overline{u'^2}$  y  $\overline{v'^2}$  se calcularon con las ecs.(4.5.17) y (4.5.18) respectivamente.

## ANALISIS DEL FLUJO EN VERTEDORES DE CODO VERTICAL

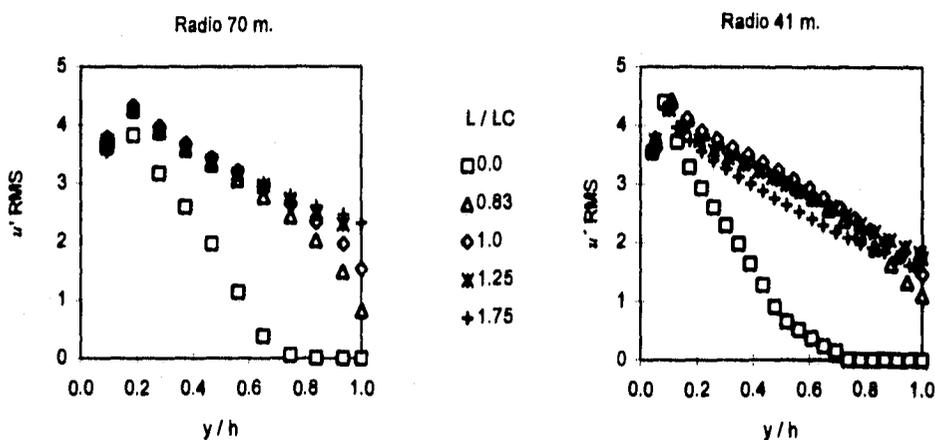


Fig.6.7

En el codo de mayor radio el valor de la fluctuación longitudinal es prácticamente el mismo en la región inferior del tirante ( $0.0 < y/h < 0.5$ ), y hay un incremento gradual de su magnitud en la región superior ( $0.5 < y/h < 1.0$ ) aguas abajo del codo. En el codo de menor radio el comportamiento es similar en la zona cercana a la pared ( $0.0 < y/h < 0.2$ ), pero el perfil de esta variable fuera de esta región ( $0.2 < y/h < 1.0$ ) es distinto: hay una brusca caída al final de la curva ( $L / LC = 1.0$ ), y aguas abajo de la misma se presenta un fuerte incremento ( $L / LC = 1.25$ ) y una nueva caída ( $L / LC = 1.75$ ).

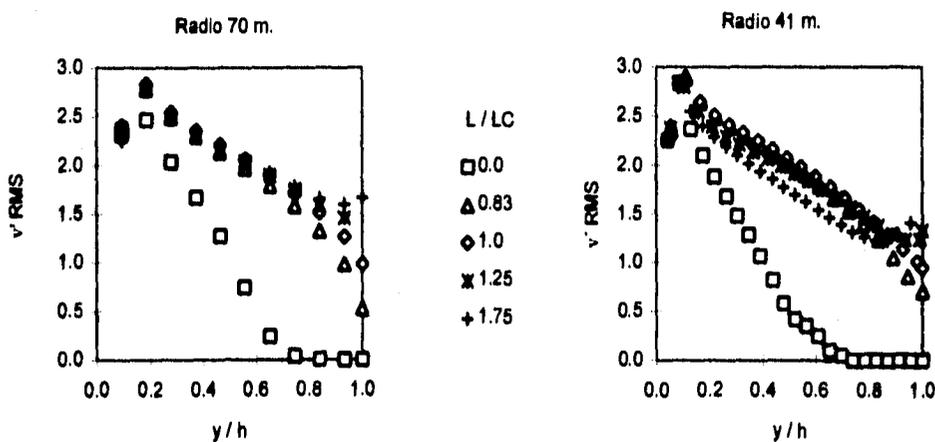


Fig. 6.8

## ANÁLISIS DEL FLUJO EN VERTEDORES DE CODO VERTICAL

El valor medio de la fluctuación de la velocidad normal presenta un perfil similar al de la fluctuación longitudinal. Estos resultados muestran que al parecer el efecto de la curvatura en la intensidad de las fluctuaciones de velocidad es importante en la región intermedia y de la superficie libre ( $0.2 < y/h < 1.0$ ). Cabe hacer notar que el valor medio máximo de  $v'$  ocurre para un valor  $y/h \approx 0.2$  tal y como se ha reportado en la literatura.

El valor medio de la magnitud de  $v'$  es muy superior al valor de la velocidad normal media en todas las secciones. En el caso de la fluctuación longitudinal, su valor medio alcanza hasta un décimo del valor de la velocidad media. Siendo además que los valores máximos se alcanzan en una zona cercana a la pared, se puede observar el aumento en el potencial de cavitación que ocurre en los instantes en que dichas fluctuaciones alcanzan sus valores máximos.

### 4. COEFICIENTE DE CAVITACIÓN

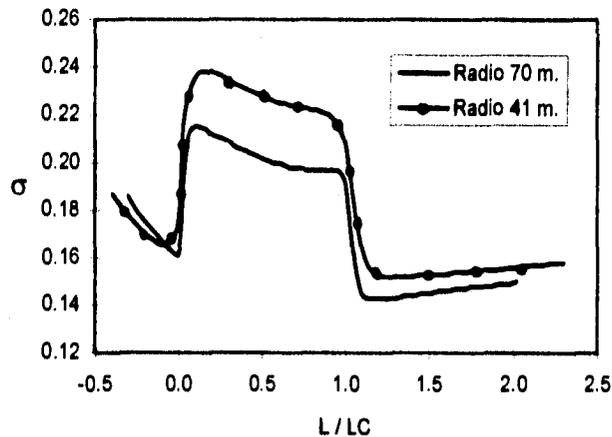


Fig. 6.10

Se puede observar que aguas arriba del codo, los valores del coeficiente de cavitación son muy parecidos en ambos prototipos, y muestran que esta zona presenta un alto riesgo de sufrir daño por cavitación. Sin embargo, el riesgo es notablemente más alto a la salida del tramo curvo en que  $\sigma$  alcanza su valor mínimo. Aguas abajo de este punto el riesgo se reduce gradualmente. El riesgo de cavitación parece ser mucho más acentuado

para el vertedor con mayor radio.

### 6.3. OBSERVACIONES COMPLEMENTARIAS

Se han hecho las siguientes observaciones como complemento a los resultados presentados en la sección anterior:

1. En la salida del tramo curvo se presentan simultáneamente una fuerte caída en la presión, un cambio notable en el sentido y magnitud de la velocidad normal y una ligera reducción de la intensidad de la turbulencia. Esta serie de fenómenos se conjugan para hacer de esta zona un tramo con alto riesgo de cavitación.

2. El descenso en la intensidad de la turbulencia a la salida del codo ya fue hecho notar por *Bribiesca et al. (1986)*, en mediciones de presión de fondo con celdas de presión de baja frecuencia: el área bajo el espectro de la medición (presión vs. frecuencia) se incrementaba a lo largo del codo, para reducirse en las secciones aguas abajo del mismo. A fin de entender esta observación debe recordarse que el papel de las fluctuaciones de presión es inducir una tendencia a la isotropía; y al entrar el flujo en el codo, se incrementa la anisotropía de la turbulencia por efecto de la fuerza centrífuga, por lo que a su vez debe incrementarse la intensidad de la presión fluctuante. Al salir del tramo curvo, desaparece el mecanismo que promovía el incremento en la anisotropía con la consecuente reducción en las fluctuaciones de presión y del área bajo el espectro medido.

3. Aun cuando el uso de un menor radio en el codo parece reducir el riesgo de cavitación, hay que recordar que la turbulencia es mayor, así como la aparente "inestabilidad" mostrada en la velocidad normal a la plantilla. Además, es probable que la intensidad de las corrientes secundarias generadas por la curvatura sea mayor en el codo de menor radio. Estos vórtices representan un incremento notable en el potencial de cavitación, tal y como se señaló en la introducción; además, aun no hay certeza sobre el mecanismo de su desaparición al entrar el flujo al tramo recto; por lo que sería necesario un estudio más completo de los fenómenos anteriores antes de recomendar menores radios en el codo.

## ANALISIS DEL FLUJO EN VERTEDORES DE CODO VERTICAL

4. El valor de las fluctuaciones de velocidad puede llegar a ser muy elevado, lo suficiente como para representar un factor a considerar en el potencial de cavitación en los diseños.
5. El presente modelo no considera la entrada de aire al flujo ni el sistema de ondas cruzadas que se forma en la superficie del agua, fenómenos que pueden afectar notablemente el comportamiento del flujo. Es probable que la entrada de aire afecte significativamente la estructura de la turbulencia, sobre todo en la zona cercana a la superficie libre.

## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A partir de los resultados presentados se hacen las siguientes conclusiones y recomendaciones respecto al modelo numérico desarrollado y su aplicación en el análisis del flujo en vertedores provistos de codo vertical:

### 7.1 MODELO NUMÉRICO:

- a) El método de la ecuación escalar para el cálculo de la superficie libre obtiene buenos resultados en el valor del tirante; además, evita el uso de condiciones explícitas de frontera en la interfase agua-aire. Sin embargo, debido a la relación entre velocidad y tamaño de la celda utilizado, la condición de estabilidad de Courante ocasiona largos tiempos de cómputo, por lo que se recomienda el estudio de métodos alternos, como podría ser el uso de mallas lagrangianas-eulerianas.
  
- b) El modelo  $k-\varepsilon$  / ARSM implantado en PHOENICS presenta resultados cualitativamente correctos, aunque se carece de datos experimentales de las variables turbulentas en un flujo con curvatura longitudinal y superficie libre que pudiera validar su uso. Sin embargo, sus resultados son mejores a los obtenidos con el modelo  $k-\varepsilon$  estándar, pues captura adecuadamente la anisotropía debida al cortante y la curvatura. Su uso no representó un mayor esfuerzo computacional en relación al modelo estándar.
  
- c) Las limitaciones del presente modelo como son su incapacidad para modelar los "picos" de la presión de fondo, y los valores menores en la magnitud de la velocidad normal pueden deberse a efectos tridimensionales: el sistema de ondas cruzadas que se forman en el canal, las corrientes secundarias y la entrada de aire al flujo. Un modelo tridimensional pudiera aportar mayor información en relación a las características del flujo, sobre todo en relación a la importancia de las corrientes secundarias.

**7.2 VERTEDORES DE EXCEDENCIA PROVISTOS DE CODO VERTICAL:**

a) El flujo presenta dos zonas donde la velocidad normal sufre cambios notables en la magnitud: la entrada y salida del codo, debida a la repentina aparición o desaparición del efecto centrífugo. La salida del codo es una zona particularmente inestable, pues el efecto mencionado es muy intenso y se concentra en un pequeño tramo. El uso de una ligera pendiente en el tramo recto que sigue al codo pudiera aminorar este efecto.

b) La turbulencia se incrementa en el tramo del codo como consecuencia de la curvatura, induciendo una anisotropía entre las fluctuaciones turbulentas. Esto trae como consecuencia un incremento en la frecuencia de la presión fluctuante. Ambos efectos parecen reducirse en la entrada de la rama recta aguas abajo del codo.

c) La disminución en la intensidad de la turbulencia en el tramo inmediato al fin de la curva aparentemente ocasiona un ligero incremento de la velocidad en esta zona, con el consecuente aumento en el riesgo de cavitación.

d) Al parecer, un menor radio en el codo puede disminuir el riesgo de cavitación, sin embargo, la mayor curvatura ocasionaría un aumento en la turbulencia y en las corrientes secundarias.

e) Es probable que las corrientes secundarias, particularmente las generadas como consecuencia de la curvatura del canal, afecten al flujo de manera importante pues, si su magnitud es suficientemente intensa, restarían cantidad de movimiento al flujo principal. Sin embargo, estos vórtices pudieran aumentar el riesgo de cavitación al "atrapar" a las burbujas de vapor en su eje. Es indispensable entender como influyen dichas corrientes en el riesgo de cavitación, sobre todo al final del codo, donde desaparece el mecanismo que las sustenta.

f) En relación al diseño de estas estructuras, es probable que el uso de vertedores cuya curva no tiene pudiera reducir el riesgo de daño por cavitación: un paso gradual de la curva a la recta evitaría la brusca caída de la presión y la turbulencia, estabilizando al flujo en esta sección, sobre todo si el segundo tramo recto cuenta con una ligera pendiente.

La anterior idea no es nueva, pues el uso de curvas que no utilizan un radio constante ya ha sido sugerida anteriormente (Falvey, 1993) como un medio de reducir el riesgo.

g) Otras recomendaciones presentadas en la literatura (Falvey, 1993) son: utilizar estructuras con mayor rugosidad de la superficie a fin de aumentar la fricción y frenar el flujo, así como el uso de secciones de área variable para incrementar la presión de fondo a la salida del tramo curvo.

h) Es importante señalar que los diseños alternos que parecen presentar las mejores características son los llamados vertedores escalonados. Estos ofrecen pérdidas de energía mucho más elevadas que los vertedores de superficie plana y un sustancial incremento en la entrada de aire al flujo. Estos factores pueden reducir notablemente el riesgo de cavitación en estas estructuras; además, tienen menores costos de construcción. Sin embargo, el flujo es demasiado complejo y no permite una evaluación sencilla del potencial de cavitación, por lo que en este tipo de estructuras no existen criterios de diseño establecidos para presas grandes.

## 8. REFERENCIAS

1. AYALA, M. (1994),  
Flujos con superficie libre,  
Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., México, D.F.
2. BEREZOWSKY, M. (1994),  
Análisis de flujos turbulentos a superficie libre,  
Series del Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M., México, D.F.
3. BRADSHAW, P. & MERONEY, R.N. (1975)  
Turbulent Boundary-Layer Growth over a Longitudinally Curved Surface,  
AIAA Journal, Vol.13, No.11, pp.1448 -1453.
4. BRADSHAW, P. (1987 )  
Turbulent secondary flows,  
Ann. Rev. Fluid. Mech., Vol. 19, pp.53-74
5. BRIBIESCA, J.L. ET. AL. (1986),  
Funcionamiento hidráulico de codos verticales en obras de excedencias, 2do.  
Informe parcial.  
Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M., México, D.F.
6. BRIBIESCA, J.L. ET. AL. (1987),  
Funcionamiento hidráulico de codos verticales en obras de excedencias, 3er.  
Informe parcial  
Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M., México, D.F.
7. BRIBIESCA, J.L. ET. AL. (1987),  
Modelo numérico para estudiar el funcionamiento hidráulico de codos verticales.  
Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M., México, D.F.
8. BRIBIESCA, J.L. ET. AL. (1988),  
Funcionamiento hidráulico de codos verticales en obras de excedencias, Informe  
final  
Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M.,  
México, D.F.
9. BRIBIESCA, J.L. (1994),  
Modelo matemático simplificado para estudiar el funcionamiento hidráulico de  
codos verticales y cubetas deflectoras.

10. CAMPBELL, F.B. ET. AL. (1965),  
Boundary Layer Development and spillway energy losses,  
J. of the Hydraulics Division, Proceedings of the A.S.C.E., May. 1965, No.HY3,  
pp.149 -163.
11. CHOW, V.T. (1982),  
Hidráulica de los canales abiertos,  
Editorial Diana,México, D.F.
12. ELLIS, L.B. & JOUBERT, P.N. (1973),  
Turbulent shear flow in a curved duct,  
J. of Fluid Mechanics, Vol.62, Part 1, pp.65-84.
13. FALVEY, H.T. (1990),  
Cavitation in chutes and spillways. Engineering Monograph No.42, A Water  
Resources  
Technical Publication, U.S. Bureau of Reclamation. Department of the Interior,  
Denver,  
Colorado, U.S.A.
14. FRENCH, R.H. (1988),  
Hidráulica de los canales abiertos,  
Editorial Diana, México D.F.
15. FRIZELL, K.H. & MEFFORD, B.W. (1991),  
Designing spillways to prevent cavitation damage,  
Concrete International, May 1991, pp.58 - 64.
16. HICKLING, R. & PLESSET, M.S. (1964),  
Collapse and Rebound of a Spherical Bubble in Water,  
Physics of Fluids, Vol.7, pp.7-14.
17. HINDMAN, R.G. (1982)  
Generalized coordinate forms of governing fluid equations and associated  
geometrically induced errors.  
AIAA Journal, Vol.20, No.10, pp.1359 - 1365.
18. HUNT, I.A. & JOUBERT, P.N. (1979),  
Effect of small streamline curvature on turbulent duct flow,  
J. of Fluid Mechanics, Vol.91, Part 4, pp.633-659.
19. MEJIA, M.A. (1991),  
Generación numérica de mallas y su aplicación en hidráulica.  
Tesis de maestría, DEPFI, UNAM, México, D.F.
20. NEZU, Y. & NAKAWAGA, H. (1993),  
Turbulence in open-channels flows,  
I.A.H.R. Monograph Series, A.A. Balkema, Netherlands.

## REFERENCIAS

21. PALANISAMY, V. & KAWAHARA, M. (1993),  
A fractional step arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for free surface density flows.  
Computational Fluid Dynamics, Vol.1, pp.57 -77.
22. PATANKAR, S.V. (1980),  
Numerical heat transfer and fluid flow,  
Hemisphere Publishing Co., U.S.A.
23. POUHRAMADI, F. & HUMPHREY, J.A.C. (1983),  
Prediction of curved channel flow with an extended k- $\epsilon$  model of turbulence,  
AIAA Journal, Vol. 21, No.10, pp.1365 - 1373.
24. RAMAPRIAN, B.R. & SHIVAPRASAD, B.G. (1978),  
The structure of turbulent boundary layers along mildly curved surfaces,  
J. of Fluid Mechanics, Vol.85, Part 2, pp.273-303.
25. RODI, W. (1980),  
Turbulence models and their applications in hydraulics, A state of the art review.  
IAHR, Delft, Netherlands.
26. SHIH, T.H., ZHU, J. & LUMLEY, J.L. (1994),  
A new reynolds stress algebraic equation model  
Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 125, pp. 287-302.
27. SCHLICHTING, H. (1960),  
Boundary layer theory,  
McGraw-Hill Book Co., Nueva York, E.E.U.U.
28. SPALDING, D.B. (1980),  
A mathematical modelling of fluid dynamics, heat transfer and mass transfer processes,  
Imperial College of London, Repor HTS/8011.
29. SPEZIALE, C.G., THANGAM, S. & HUR, N. (1990),  
Numerical Study of Turbulent Secondary Flows in Curved Ducts,  
J. of Fluids Engineering, Vol.112, pp.205 - 211.
30. TENNEKES, H. & LUMLEY, J.L. (1972),  
A first course in turbulence.  
The M.I.T. Press, Boston, Mass., E.E.U.U.
31. THOMPSON, ET.AL.(1982),  
Boundary-fitted coordinate system for numerical solution of partial differential equation.  
J. Computational Physics, Vol.47, pp.1-108.

32. TRÉPANIÉ, J.Y. ET. AL. (1991),  
A finite volume method for the Euler equations on arbitrary lagrangian-eulerian grids,  
Computers Fluids, Vol. 20, No.4, pp.399-409.
33. WARFIELD, M.J. & LAKSHMINARAYANA, B. (1987),  
Computation of rotating turbulent flow with an Algebraic Reynolds Stress Model,  
AIAA Journal, Vol. 25, No.7, pp.957 - 964.
34. ZHANG, H. ET. AL. (1993),  
Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD  
schemes,  
Computers Fluids, Vol.22, No.1, pp.9-23.

## APÉNDICE A

### ECUACIONES DE TRANSPORTE EN COORDENADAS CURVILINEAS GENERALES.

Las ecuaciones de flujos transitorios, incompresibles y turbulentos están gobernadas por las ecuaciones de Reynolds para las variables medias, derivadas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Utilizando el concepto de viscosidad de remolino, junto con el modelo  $k$ - $\epsilon$  de turbulencia, estas ecuaciones pueden escribirse en las coordenadas generalizadas,  $\xi$  y  $\eta$ , en la siguiente forma conservativa. A fin de hacer más sencilla la notación, se utilizará la siguiente nomenclatura:

$c_1, c_2$	constantes del modelo de turbulencia
$E, F$	vectores de flujo en las direcciones coordenadas $\xi$ y $\eta$
$g^{ij}$	componentes del tensor métrico
$G$	razón de producción de energía cinética turbulenta
$J$	jacobiano de la matriz de transformación
$k$	energía cinética turbulenta
$P$	presión
$q$	vector de variables de conservación
$r$	distancia radial
$Re$	Número de Reynolds
$R, S$	términos de flujo viscoso en las direcciones $\xi$ y $\eta$
$t$	tiempo
$T$	término fuente en las ecuaciones de transporte
$u, v$	velocidades promedio en las direcciones coordenadas $x$ e $y$
$U, V$	velocidades promedio en las direcciones coordenadas $\xi$ y $\eta$
$x, y$	direcciones coordenadas cartesianas
$\xi, \eta$	direcciones coordenadas curvilíneas
$\alpha$	índice geométrico ( $\alpha = 0$ , dos dimensiones; $\alpha = 1$ , axisimétrico).
$\epsilon$	disipación de energía turbulenta
$\nu_e$	viscosidad efectiva ( $\nu_e = \nu + \nu_t$ )
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	números de Prandtl de turbulencia

# ECUACIONES DE TRANSPORTE EN COORDENADAS CURVILINEAS GENERALES

Subíndices

$x, y, \xi, \eta$  primera derivada parcial

## ECUACIÓN DE TRANSPORTE

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta} + T \quad (\text{A.1})$$

donde:

$$q = Jr^\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \\ k \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad E = Jr^\alpha \begin{bmatrix} U \\ uU + P\xi_x \\ vU + P\xi_y \\ kU \\ \varepsilon U \end{bmatrix} \quad F = Jr^\alpha \begin{bmatrix} V \\ uV + P\eta_x \\ vV + P\eta_y \\ kV \\ \varepsilon V \end{bmatrix}$$

$$R = Jr^\alpha v_c \begin{bmatrix} 0 \\ g^{11}u_\xi + g^{12}u_\eta + \xi_x u_\xi + \xi_x \eta_x u_\eta + \xi_x \xi_y v_\xi + \xi_y \eta_x v_\eta \\ g^{11}v_\xi + g^{12}v_\eta + \xi_y v_\xi + \xi_y \eta_y v_\eta + \xi_x \xi_y u_\xi + \xi_x \eta_y u_\eta \\ (g^{11}k_\xi + g^{12}k_\eta) / \sigma_k \\ (g^{11}\varepsilon_\xi + g^{12}\varepsilon_\eta) / \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$S = Jr^\alpha v_c \begin{bmatrix} 0 \\ g^{21}u_\xi + g^{22}u_\eta + \eta_x \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \eta_y \xi_x v_\xi + \eta_y \eta_x v_\eta \\ g^{21}v_\xi + g^{22}v_\eta + \eta_y \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \eta_x \xi_y u_\xi + \eta_y \eta_x u_\eta \\ (g^{12}k_\xi + g^{22}k_\eta) / \sigma_k \\ (g^{12}\varepsilon_\xi + g^{22}\varepsilon_\eta) / \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$T = Jr^\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (P - v_c 2v / \text{Re})\alpha \\ v_c G_c - \varepsilon \\ v_c c_1 G_c \varepsilon / k - c_2 \varepsilon^2 / k \end{bmatrix}$$

## APÉNDICE B

### OBTENCIÓN DE LA RELACIÓN ENTRE $k$ , $\varepsilon$ y $v_t$ A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL:

Una relación entre  $v_t$ ,  $k$  y  $\varepsilon$  puede obtenerse a través del análisis dimensional:

1. Se considera, como ya se explicó, que  $v_t = f(k, \varepsilon)$ .
2. Las dimensiones de cada variable son:

$v_t$	$k$	$\varepsilon$	$k$
$\{L^2 T^{-1}\}$	$\{L^2 T^{-2}\}$	$\{L^2 T^{-3}\}$	

3. Se aplica el teorema  $\Pi$  de Buckingham, el cual señala que si el proceso físico relaciona  $n$  variables dimensionales y se puede describir a través de  $m$  variables adimensionales, la reducción  $j = n - m$  es igual al máximo número de variables que no pueden formar un grupo adimensional entre ellas. En el presente caso existen tres variables relevantes y dos dimensiones involucradas (L y T), por lo que sólo dos variables no pueden formar un grupo adimensional, seleccionándose  $k$  y  $\varepsilon$ . De donde el número de parámetros adimensionales relevantes es:

$$m = n - j = 3 - 2 = 1$$

Dicho parámetro estará formado por el producto de potencias:

$$\Pi = v_t k^a \varepsilon^b = (L^2 T^{-1})(L^2 T^{-2})^a (L^2 T^{-3})^b = M^0 L^0 T^0$$

agrupando exponentes:

Longitud:  $2 + 2a + 2b = 0$

Tiempo:  $-1 - 2a - 3b = 0$

Masa:  $0 = 0$

Resolviendo el sistema:

$$a = -2 \qquad b = 1$$

Por lo tanto:

$$\Pi = v_t k^{-2} \varepsilon$$

Llamando al parámetro adimensional  $\Pi$  como  $c_\mu$  y reordenando se obtiene:

$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

## APÉNDICE C: RUTINAS AUXILIARES

### C.1. ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA Q1

```

TALK=F;RUN(1,1);VDU=0
*****
TEXT ( VERTEDOR DE RADIO 41 m)
*****
** Tiempo **
LSG60=F
steady=f
grdpwr(t,400,0.4,1.0)
*****
** dominio **
NY=80
NX=90
*****
REAL(teta)
BOOLEAN(CONDINI,LHEIGHT,HIDLIS, ARSM,LRESULT)
CONDINI=t; LHEIGHT=T; ARSM=T; LRESULT=T
*****

** Elaboracion del dominio **
BFC=T;nonort=t
* Plantilla *
REAL(SX,SY)
SX=0.0;SY=89.39
teta=0.0
DO II=1,6
GSET(P,P,II:,SX,SY,0.0)
GSET(P,P1:II:,SX+8.31*SIN(teta),SY+8.31*COS(teta),0.0)
teta=12*II*3.14159/180
SX=17.6845*tan(teta)**(1/0.85)
SY=89.39-0.9656*SX**1.85
ENDDO
GSET(P,P7,54.775,20.51,0.0); GSET(P,P8,90.3,0.0,0.0)
GSET(P,PA1,90.3-41.02*COS(teta),41.02*(1-SIN(teta)),0.0)
GSET(P,P9,160.3,0.0,0.0)
GSET(V,VI,P1,P2,P3,P4,P5,P6)
GSET(L,LV1,P1,P6,10,1.0,CRV,V1)
GSET(L,L67,P6,P7,25,1.0)
GSET(L,L78,P7,P8,30,1.0,ARC,PA1)
GSET(L,L89,P8,P9,25,1.0)

GSET(P,P17,54.775+8.31*SIN(teta),20.51+8.31*COS(teta),0.0)
GSET(P,P18,90.3,8.31,0.0); GSET(P,P19,160.3,8.31,0.0)
GSET(P,PAS,90.3-(41.02-8.31)*COS(teta),(41.02-8.31)*(1-SIN(teta)),0.0)
GSET(V,C1,P11,P12,P13,P14,P15,P16)
GSET(L,LC1,P11,P16,10,1.0,CRV,C1)
GSET(L,L167,P16,P17,25,1.0)
GSET(L,L178,P17,P18,30,1.0,ARC,PAS)
GSET(L,L189,P18,P19,25,1.0)

GSET(L,LL1,P1,P11,NY);GSET(L,LL2,P9,P19,NY)

GSET(F,F1,P1,P6,P7,P8,P9,-,P19,P18,P17,P16,P11,-)
GSET(M,FI,+I+J,1,1,1,TRANS)

```

```

GSET(C,K2,F,K1,1,NX,1,NY,+,0,0,0,7)
** Fin de elaboracion del dominio **
*****
** Variables a resolver **
SOLVE(P1,U1,V1)

** Variables para almacenar los esfuerzos turbulentos ***
** C1= u'v'
** C2= u'u'
** C3= v'v'
STORE(C1,C2,C3)

* para implementar el SEM *
STORE(DEN1,PRPS);SOLVE(VFOL,SURN)
GALA=T
TERMS(VFOL,N,N,N,N,P,P)
TERMS(SURN,N,N,N,N,P,P)

* la densidad es calculada con el metodo HOL *
RHO1=GRND10;ENUL=GRND10
*****

** Variables comunicadas al GROUND **
* Radio, ancho, gasto, altura inic.,tirante inicial,
rsg1=41.02; rsg2=7.0 ; rsg3=525.0; rsg5=89.39; rsg6=8.31
* angulo del codo y pendiente del 1er. tramo recto
rsg7=1.047
* altura de cada celda *
rsg9=rsg6/ny
* Celdas en el dominio (por tramo) *
isg1=10
isg2=isg1+25
isg3=isg2+30
isg4=isg3+25
* Variables logicas *
lsg1=condini; lsg2=lheight; lsg6=lresult; lsg7= ARSM
*****
REAL(VELIN); VELIN= rsg3/(rsg2*rsg6)
* Condiciones iniciales no calculadas en el GROUND *
FIINIT(P1)=0.0
FIINIT(VFOL)=0.0
FIINIT(DEN1)=1.161
FIINIT(prps)=0.000
FIINIT(SURN)=0.0
INIFLD=F
IF(.NOT.CONDINI) THEN
+ RESTRT(ALL)
ENDIF
*****

** CONDICIONES DE FRONTERA **
* Entrada (cresta del vertedor) *
PATCH(BFCIN, WEST, 1,1, 1,NY,1,1,1,LSTEP)
COVAL(BFCIN, P1, FIXFLU, 1000*VELIN)
COVAL(BFCIN, U1, ONLYMS, VELIN)
COVAL(BFCIN, V1, ONLYMS, 0.0)
COVAL(BFCIN, SURN, FIXFLU, VELIN*1.0)
COVAL(BFCIN, VFOL, ONLYMS, 1.0/1000.0)
* Salida *
PATCH(OUTLET,EAST, NX, NX, 1, NY, 1,1,1, LSTEP)
COVAL(OUTLET,SURN, FIXFLU, GRND1)
COVAL(OUTLET, P1, GRND1, 0.0)
COVAL(OUTLET, U1, ONLYMS, SAME)
COVAL(OUTLET, V1, ONLYMS, SAME)

```

```

GSET(C,K2,F,K1,1,NX,1,NY,+,0,0,0,0,7)
** Fin de elaboracion del dominio **
*****
** Variables a resolver **
SOLVE(P1,U1,V1)

** Variables para almacenar los esfuerzos turbulentos ***
** C1= u'v'
** C2= u'u'
** C3= v'v'
STORE(C1,C2,C3)

* para implementar el SEM *
STORE(DEN1,PRPS);SOLVE(VFOL,SURN)
GALA=T
TERMS(VFOL,N,N,N,N,P,P)
TERMS(SURN,N,N,N,N,P,P)

* la densidad es calculada con el metodo HOL *
RHO1=GRND10;ENUL=GRND10
*****

** Variables comunicadas al GROUND **
* Radio, ancho, gasto, altura inic.,tirante inicial,
rsg1=41.02; rsg2=7.0 ; rsg3=525.0; rsg5=89.39; rsg6=8.31
* angulo del codo y pendiente del 1er. tramo recto
rsg7=1.047
* altura de cada celda *
rsg9=rsg6/ny
* Celdas en el dominio (por tramo) *
isg1=10
isg2=isg1+25
isg3=isg2+30
isg4=isg3+25
* Variables logicas *
lsg1=condini; lsg2=lheight; lsg6=lresult; lsg7= ARSM
*****
REAL(VELIN); VELIN= rsg3/(rsg2*rsg6)
* Condiciones iniciales no calculadas en el GROUND *
FIINIT(P1)=0.0
FIINIT(VFOL)=0.0
FIINIT(DEN1)=1.161
FIINIT(prps)=0.000
FIINIT(SURN)=0.0
INIFLD=F
IF(.NOT.CONDINI) THEN
+ RESTRT(ALL)
ENDIF
*****

** CONDICIONES DE FRONTERA **
* Entrada (cresta del vertedor) *
PATCH(BFCIN, WEST, 1,1, 1,NY,1,1,1,LSTEP)
COVAL(BFCIN, P1, FIXFLU, 1000*VELIN)
COVAL(BFCIN, U1, ONLYMS, VELIN)
COVAL(BFCIN, V1, ONLYMS, 0.0)
COVAL(BFCIN, SURN, FIXFLU, VELIN*1.0)
COVAL(BFCIN, VFOL, ONLYMS, 1.0/1000.0)
* Salida *
PATCH(OUTLET,EAST, NX, NX, 1, NY, 1,1,1, LSTEP)
COVAL(OUTLET,SURN, FIXFLU, GRND1)
COVAL(OUTLET, P1, GRND1, 0.0)
COVAL(OUTLET, U1, ONLYMS, SAME)
COVAL(OUTLET, V1, ONLYMS, SAME)

```

```

* Pared inferior (plantilla) *
PATCH(WALL1, SWALL, 1, NX, 1, 1, 1, 1, 1, LSTEP)
COVAL(WALL1, U1, GRND2, 0.0E+00)
* Frontera superior *
PATCH(BFCSUP,NORTH, 1, NX, NY, NY, 1, 1, 1, LSTEP)
COVAL(BFCSUP, P1, FIXP, 0.0)
COVAL(BFCSUP, VFOL, ONLYMS, 1.0/1.161)
COVAL(BFCSUP, SURN, FIXFLU, 0.0)
* Gravedad *
PATCH(BUOY01, PHASEM, 1, NX, 1, NY, 1, 1, 1, LSTEP)
COVAL(BUOY01, V1, FIXFLU, grnd1)
COVAL(BUOY01, U1, FIXFLU, grnd1)
BUOYB=-9.81

* PARA TURBULENCIA *
TURMOD(KEMODL)
* Modelo Algebraico de Esfuerzos
IF(ARSM) THEN
+ ENUT=GRND
END IF
COVAL(BFCIN, KE, FIXVAL, 0.0)
COVAL(BFCIN, EP, FIXVAL, 0.0)
COVAL(WALL1, KE, GRND2, GRND2)
COVAL(WALL1, EP, GRND2, GRND2)
COVAL(OUTLET, KE, FIXVAL, SAME)
COVAL(OUTLET, EP, FIXVAL, SAME)

* Requerido para el termino temporal en el SEM *
PATCH(TCON,CELL, 1, NX, 1, NY, 1, 1, 1, LSTEP)
COVAL(TCON, SURN, GRND, GRND)
*****

* Relajacion *
RELAX(P1, LINRLX, 0.8)

SURF=T
RLOLIM=0.4; RUPLIM=0.6
VARMIN(SURN)=0.0; VARMAX(SURN)=1.0
IPRPSA=67; IPRPSB=0
IDISPB=1; IDISPC=LSTEP; IDISPA=100; CSG1=C
LSWEEP=10
LITER(SURN)=1
*****

ECHO=T
OUTPUT(P1, N, N, N, Y, Y, Y)
OUTPUT(U1, N, N, N, Y, Y, Y)
OUTPUT(V1, n, N, N, Y, Y, Y)
OUTPUT(KE, N, N, N, Y, Y, Y)
OUTPUT(EP, N, N, N, Y, Y, Y)
IXMON=62; IYMON=9
*****

NPLT=1
ITABL=1
*****
SAVE=T; NSAVE=CHAM
*****
STOP

```



```

c *** Calculo de las correlaciones turbulentas uv,uu y vv **
call fndudy(grsp1,u1)
call fndvdx(grsp2,v1)
call fn0(grsp3,KE)
call fn0(grsp4,EP)
call getyx(grsp1,GDUDY,NYDIM,NXDIM)
call getyx(grsp2,GDVDX,NYDIM,NXDIM)
call getyx(grsp3,GKE,NYDIM,NXDIM)
call getyx(grsp4,GEP,NYDIM,NXDIM)
ga0=6.5
gas=2.12132
gc0=1.0
do jx=1,nx
do jy=1,ny
gus=sqrt(GDUDY(jy,jx)**2+GDVDX(jy,jx)**2)
gss=abs(GDUDY(jy,jx)+GDVDX(jy,jx))/1.4142
gos=abs(GDUDY(jy,jx)-GDVDX(jy,jx))/1.4142
gres=GKE(jy,jx)/GEP(jy,jx)
gcmu=1/(ga0+gas*gus*gres)
gc2=1-9*(gcmu*gss*gres)**2
if(gc2.lt.0.0) gc2=0.0
gc2=sqrt(gc2)/(gc0+6*gss*gos*gres**2)
c *** La viscosidad turbulenta es enut=gcmu*ke**2/ep:
F(L0F(VIST)+JY+NY*(JX-1))=gcmu*gres*GKE(jy,jx)
c *** las correlaciones turbulentas son:
GUV(jy,jx)=-gcmu*gres*GKE(jy,jx)*
& (GDUDY(jy,jx)+GDVDX(jy,jx))
GUU(jy,jx)=2*GKE(jy,jx)/3+gc2*gres**2*GKE(jy,jx)*
& (GDUDY(jy,jx)**2-GDVDX(jy,jx)**2)
& GVV(jy,jx)=2*GKE(jy,jx)/3-gc2*gres**2*GKE(jy,jx)*
& (GDUDY(jy,jx)**2-GDVDX(jy,jx)**2)
end do
end do
call setyx(C1,GUV,nydim,nxdim)
call setyx(C2,GUU,nydim,nxdim)
call setyx(C3,GVV,nydim,nxdim)
end if
RETURN
96 CONTINUE
C*****
C--- GROUP 19. Special calls to GROUND from EARTH
C
19 GO TO (191,192,193,194,195,196,197,198,199,1910,1911),ISC
191 CONTINUE
C *----- SECTION 1 ---- Start of time step.
c ** SUBROUTINA PARA CALCULO DE CONDICIONES INICIALES **
c Variables a utilizar
if(istep.eq.1) then
LOVOL=L0F(VOL)
LOSURN=L0F(44)
LOVFOL=L0F(45)
LODEN=L0F(47)
LOPRPS=L0F(46)
LOU1=L0F(3)
LOKE=L0F(12)
LOEP=L0F(13)
CALL SUB4R(gr,rsg1,gb,rsg2,gq,rsg3,gn,0.0)
CALL SUB4R(gv0,rsg5,gh0,rsg6,garc,rsg7,gteta,0.0)
CALL SUB4R(gdtr1,1.828/25,gdtr2,2.0/25,gx,0.0,gkfric,0.0003)
gq=gq/gb
gv0=gq/gh0
ge0=gv0+gh0*cos(gteta)+gv0**2/19.62
gdte=gr*garc/(isg3-isg2)

```

```

c ***** CALCULO DEL FLUJO EN UN VERTEDOR DE CODO VERTICAL
c El siguiente calculo se basa en el metodo directo en etapas
  do jx=1,nx+isgl
c * Calculo de la plantilla*
  if (jx.le.isgl) then
c *** La cresta tiene una forma  $x=c*\tan(\text{teta})**1/0.85$ 
c
  y=a-bx**1.85
  gteta=(1.0472/isgl)*jx
  gc=0.50532
  gm=0.9656
  gx(jx)=gc*(tan(gteta))**(1/0.85)
  gy(jx)=2.554-gm*(gx(jx))**1.85
c * Calculo del radio de curvatura *
  gdy1=(-1.85*gm)*(gx(jx))**0.85
  gd2y=(-0.85*1.85*gm)*(gx(jx))**(-0.15)
  grc=1/(gd2y/(1+gdy1**2)**1.5)
c * Calculo de la longitud de la plantilla
  if(jx.eq.1) then
    gap=gx(jx)/18
  else
    gap=(gx(jx)-gx(jx-1))/18
  end if
  if(jx.eq.1) then
    gp0=1
  else
    gp0=(1+(1.85*gm*(gx(jx-1))**0.85)**2)**0.5
  end if
  do g=1,18
    if(jx.eq.1) then
      gp(g)=(1+(1.85*gm*(gap*g)**0.85)**2)**0.5
    else
      gp(g)=(1+(1.85*gm*(gap*g+gx(jx-1))**0.85)**2)**0.5
    end if
  end do
c * Integracion por Simpson 1/3 *
  gs1=0
  gs2=0
  do g=1,17,2
    gs1=gp(g)+gs1
  end do
  do g=2,16,2
    gs2=gp(g)+gs2
  end do
  gdt=gap/3*(gp0+gp(18)+4*gs1+2*gs2)
  gdc(jx)=gdt
  else if (jx.le.isg2) then
c * La ecuacion de la recta es  $y=a-x$ 
  gteta=garc
  gx(jx)=gx0+gdtr1*cos(gteta)
  gy(jx)=115.4-1.732*gx(jx)
  gdt=gdtr1
  else if (jx.le.isg3) then
c * Arco con radio gr y arco garc *
  tetaux=gteta-(garc/30)
  gy(jx)=gy0-gr*(cos(tetaux)-cos(gteta))
  gx(jx)=gx0+gr*(sin(gteta)-sin(tetaux))
  gteta=tetaux
  gdt=gdtc
  else
c * tramo recto final *
  gy(jx)=0.0
  gx(jx)=gx0+gdtr2
  gdt=gdtr2
  end if
c * Fin del calculo de la plantilla *

```

```

c *** CALCULO DEL FLUJO ***
  ghs=2*gh0
  ghi=0
  do g=1,100
    gh(jx)=(ghs+ghi)/2
    ga=(gq/gh(jx))**2/19.62
c   if (jx.le.isg1) ga=ga-gq**2/(9.81*grc*gh(jx))
    if ((jx.gt.isg2).and.(jx.le.isg3))
&   ga=ga+gq**2/(9.81*gr*gh(jx))
    gvm=(gv0+gq/gh(jx))/2
    grm=(gh0*gb/(gb+2*gh0)+gh(jx)*gb/(gb+2*gh(jx)))/2
    gf=gdt*(gvm*gn)**2/(2.22*grm**(4/3))
    ge(jx)=gh(jx)*cos(gteta)+gy(jx)+ga
    if((ge(jx)+gf).gt.ge0) ghi=gh(jx)
    if((ge(jx)+gf).lt.ge0) ghs=gh(jx)
    if(abs(ge(jx)+gf-ge0).lt.(0.0001)) go to 602
  end do
602  gy0=gy(jx)
     gh0=gh(jx)
     gv0=gq/gh0
     ge0=ge(jx)
     gx0=gx(jx)
    if(jx.eq.1) then
      gdist(jx)=gdt
    else
      gdist(jx)=gdist(jx-1)+gdt
    end if
  end do
c *** FIN DEL CALCULO DEL FLUJO ***
c *** ASIGNACION DE LAS CONDICIONES INICIALES ***
  do jx=1,nx
c   Capa limite
    gdelta=0.08*gdist(jx)/((gdist(jx)/gkfric)**0.233)
c   Tirante real
    gh(jx)=gh(jx)+0.1*gdelta
    g=int(gh(jx)/rsg9)
    DO JY=1,NY
      if(jy.le.g) then
        if(lsg1) then
          F(LÖVFOL+JY+NY*(JX-1))=1.0
          F(LOSURN+JY+NY*(JX-1))=1.0
          F(LOPRPS+JY+NY*(JX-1))=67.0
          F(LODEN+JY+NY*(JX-1))=1000.0
          F(LOU1+JY+NY*(JX-1))=gq/gh(jx)
        end if
c     Calculo de la velocidad de friccion
        if(jy.eq.1) then
          grh=gb*gh(jx)/(gb+2*gh(jx))
          gvs=10.0
          gvi=0.0
          gv=1.01e-06
          do jj=1,30
            guf(jx)=(gvs+gvi)/2
            if(gq/gh(jx).gt.guf(jx)*(log(guf(jx)*gh(jx)/gv)
&             /0.41+
&             5.29-1/0.41+0.2/0.41)) then
              gvi=guf(jx)
            else
              gvs=guf(jx)
            endif
          end do
        end if
        if(lsg1) then
          if(jy*rsg9.le.gdelta) then
            F(LOU1+JY+NY*(JX-1))=guf(jx)*(1/0.41*log(jy*

```

```

&      rsg9*guf(jx)/gv)+5.29)
F(LOKE+JY+NY*(JX-1))=4.78*guf(jx)**2*exp(-2*
&      rsg9*jy/gh(jx))
c      * Calculo de la viscosidad de remolino *
genut=0.41*guf(jx)*(rsg9*jy/gh(jx))*(
&      (1-rsg9*jy/gh(jx)))
F(LOEP+JY+NY*(JX-1))=F(LOKE+JY+NY*(JX-1))**2*
&      0.09/genut
      else
&      if(jy.gt.1)
F(LOU1+JY+NY*(JX-1))=F(LOU1+JY-1+NY*(JX-1))
      end if
      end if
      else if(jy.eq.(g+1)) then
gc1=gh(jx)-g*rsg9
if(lsg1) then
F(LOVFOL+JY+NY*(JX-1))=gc1
F(LOSURN+JY+NY*(JX-1))=gc1
F(LOPRPS+JY+NY*(JX-1))=67.0
F(LODEN+JY+NY*(JX-1))=1000.0*gc1+1.161*(1-gc1)
F(LOU1+JY+NY*(JX-1))=F(LOU1+G+NY*(JX-1))
      end if
      else
&      if(lsg1) then
F(LOU1+JY+NY*(JX-1))=F(LOU1+G+NY*(JX-1))
      end if
      end if
      END do
if(lsg1) then
F(LOEP+1+NY*(JX-1))=guf(jx)**3/(0.412*rsg9)
F(LOKE+1+NY*(JX-1))=3.33*guf(jx)**2
      end if
      end do
      end if
607 format (1x,i3,3(2x,f9.4))
RETURN
192 CONTINUE
C * ----- SECTION 3 ---- Start of iz slab.
if(istep.eq.1) then
call GETYX(vol,gvol,nydim,nxdim)
end if
RETURN
194 CONTINUE
C * ----- SECTION 8 ---- Finish of time step.
C
c *** Salida de resultado al final del calculo en forma
c *** de tablas ***
if(istep.eq.lstep) then
if(lsg2) then
open(unit=7, file='h60p.dat', status='new')
c ** Para salida del tirante **
PI=3.1416
LOVOL=LOF(VOL)
DO JX=1,NX-2
GH(JX)=0.0
DO JY=1,NY
ggvol=F(LOVOL+JY+NY*(JX-1))
gsum=F(LOSURN+JY+NY*(JX-1))
IF(JX.LE.ISG1) then
GH(JX)=GH(JX)+rsg9*gsum
ELSE
GH(JX)=GH(JX)+gsum*ggvol
END IF
END do
END IF
IF(JX.LE.ISG1) THEN

```

```

    GH(JX)=GH(JX)
    ELSE IF(JX.LE.isg2) THEN
        gh(jx)=gh(jx)/(gdr1*gb)
    ELSE IF (JX.LE.isg3) THEN
        GH(JX)=sqrt(gr**2-(GH(JX)*6*(isg3-isg2))/(gb*PI))
        GH(JX)=gr-GH(JX)
    ELSE
        GH(JX)=GH(JX)/(gb*gdr2)
    END IF
    write(7,707) jx,gx(jx),GH(JX)
    END DO
    CLOSE(unit=7)
end if
c   *** Indice de cavitacion ***
do jx=1,nx-1
    F(LOF(C4)+I+NY*(JX-1))=(101325+F(LOF(PI)+I+NY*(JX-1))-
    & 2337)/(0.5*1000*(gq/gh(jx))**2)
end do
c   ** Salida de las diversas variables en varias secciones
c   ** del canal **
IF(LSG6) THEN
    OPEN(unit=4,file='indcav60.dat',status='new')
    DO JX=1,NX-1
        IF(jx.eq.35) then
            OPEN(unit=1,file='r60px35.dat',status='new')
            do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
                if(jy.eq.1) then
                    write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
                    & gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
                    end if
                    write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
                    & F(LOF(U1)+JY+NY*(JX-1)),
                    & F(LOF(V1)+JY+NY*(JX-1)),
                    & F(LOF(KE)+JY+NY*(JX-1)),
                    & F(LOF(EP)+JY+NY*(JX-1)),
                    & F(LOF(VIST)+JY+NY*(JX-1))
                    & /F(LOF(VISL)+JY+NY*(JX-1))
                end do
                CLOSE(unit=1)
            OPEN(unit=1,file='r60p2x35.dat',status='new')
            do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
                if(jy.eq.1) then
                    write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
                    & gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
                    end if
                    write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
                    & F(LOF(C1)+JY+NY*(JX-1)),
                    & F(LOF(C2)+JY+NY*(JX-1)),
                    & F(LOF(C3)+JY+NY*(JX-1))
                end do
                CLOSE(unit=1)
            else if(jx.eq.60) then
                OPEN(unit=1,file='r60px60.dat',status='new')
                do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
                    if(jy.eq.1) then
                        write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
                        & gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
                        end if
                        write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
                        & F(LOF(U1)+JY+NY*(JX-1)),
                        & F(LOF(V1)+JY+NY*(JX-1)),
                        & F(LOF(KE)+JY+NY*(JX-1)),
                        & F(LOF(EP)+JY+NY*(JX-1)),
                        & F(LOF(VIST)+JY+NY*(JX-1))
                        & /F(LOF(VISL)+JY+NY*(JX-1))
                    end do
                end if
            end if
        end do
    end do

```

```

end do
CLOSE(unit=1)
OPEN(unit=1,file='r60p2x60.dat',status='new')
do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
  if(jy.eq.1) then
    write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
    &      gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
    end if
    write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
    &      F(LOF(C1)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(C2)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(C3)+JY+NY*(JX-1))
  end do
CLOSE(unit=1)
else if(jx.eq.65) then
OPEN(unit=1,file='r60px65.dat',status='new')
do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
  if(jy.eq.1) then
    write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
    &      gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
    end if
    write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
    &      F(LOF(U1)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(V1)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(KE)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(EP)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(VIST)+JY+NY*(JX-1))
    &      /F(LOF(VISL)+JY+NY*(JX-1))
  end do
CLOSE(unit=1)
OPEN(unit=1,file='r60p2x65.dat',status='new')
do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
  if(jy.eq.1) then
    write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
    &      gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
    end if
    write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
    &      F(LOF(C1)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(C2)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(C3)+JY+NY*(JX-1))
  end do
CLOSE(unit=1)
else if(jx.eq.70) then
OPEN(unit=1,file='r60px70.dat',status='new')
do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
  if(jy.eq.1) then
    write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
    &      gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
    end if
    write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
    &      F(LOF(U1)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(V1)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(KE)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(EP)+JY+NY*(JX-1)),
    &      F(LOF(VIST)+JY+NY*(JX-1))
    &      /F(LOF(VISL)+JY+NY*(JX-1))
  end do
CLOSE(unit=1)
OPEN(unit=1,file='r60p2x70.dat',status='new')
do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
  if(jy.eq.1) then
    write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
    &      gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
    end if
    write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),

```

```

&      F(LOF(C1)+JY+NY*(JX-1)),
&      F(LOF(C2)+JY+NY*(JX-1)),
&      F(LOF(C3)+JY+NY*(JX-1))
      end do
      CLOSE(unit=1)
      else if(jx.eq.80) then
      OPEN(unit=1,file='r60px80.dat',status='new')
      do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
      if(jy.eq.1) then
&      write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
&      gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
      end if
      write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
&      F(LOF(U1)+JY+NY*(JX-1)),
&      F(LOF(V1)+JY+NY*(JX-1)),
&      F(LOF(KE)+JY+NY*(JX-1)),
&      F(LOF(EP)+JY+NY*(JX-1)),
&      F(LOF(VIST)+JY+NY*(JX-1))
&      /F(LOF(VISL)+JY+NY*(JX-1))
      end do
      CLOSE(unit=1)
      OPEN(unit=1,file='r60p2x80.dat',status='new')
      do jy=1,int(gh(jx)/rsg9+1)
      if(jy.eq.1) then
&      write(1,*) 'Seccion L/LC =',(gdist(jx)-
&      gdist(35))/(gdist(65)-gdist(35))
      end if
      write(1,708) jy*rsg9/gh(jx),
&      F(LOF(C1)+JY+NY*(JX-1)),
&      F(LOF(C2)+JY+NY*(JX-1)),
&      F(LOF(C3)+JY+NY*(JX-1))
      end do
      CLOSE(unit=1)
      end if
      if(jx.ge.25.and.jx.le.85) then
&      write(4,709) (gdist(jx)-gdist(isg2))/
&      (gdist(isg3)-gdist(isg2)),
&      F(LOF(P1)+1+ny*(jx-1))/10000,
c      Numero de cavitacion
&      F(LOF(C4)+1+NY*(JX-1))
      end if
      end do
      CLOSE(unit=4)
      end if
      END IF
707 FORMAT(2x,i3,2(2x,F9.4))
708 FORMAT(7(E10.3,1x))
709 FORMAT(3(E9.4,1x))
      RETURN
      *****
      END

```