003659

2ej

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

## LINEALIZACION DIFERENCIABLE DE DEFORMACIONES DE UN GERMEN DE CAMPO VECTORIAL EN EL ORIGEN CON RESONANCIAS DE ORDEN ALTO.

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

( MATEMATICAS )

P R E S E N T A :

ADRIANA ORTIZ RODRIGUEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA

MEXICO, D. F. 1996



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Con todo mi amor dedico este trabajo a :

Mis queridos padres, por todo su amor, su apoyo, sus enseñanzas y su entrega.

Mi amado Juan Carlos por darme lo mejor de sí, por su amor, su espíritu de lucha, su nobleza y su persistencia. Por creer en mí.

La Chely por su confianza, su compañía, su inagotable ayuda y su aguante.

Daniel por su cariño y ayuda.

Verónica por los bellos momentos que hemos compartido.

# TESIS

# COMPLETA

Quiero agradecer muy especialmente a :

Laura por sus consejos, su ayuda, su ánimo, su enseñanza, su inagotable apoyo, por ayudarme a crecer y por ser mi amiga.

Ernesto por su paciencia, su apoyo, su confianza, su tiempo y sus consejos.

Xavier Gómez-Mont por su atención, su tiempo, sus observaciones y su entusiasmo.

Héctor Méndez por sus críticas, su sinceridad y su dedicación.

José Antonio de la Peña por sus observaciones y su tiempo.

Santiago por su apoyo y su amistad.

Javier Páez por su amistad, su alegría y su apoyo.

José Martínez por su amistad y su ánimo.

# Contenido

# Introducción

Muchos sistemas de ecuaciones diferenciales no admiten una solución analítica exacta ni una descripción cualitativa completa.

Una forma a la cual se puede recurrir para analizar un sistema de ecuaciones diferenciales es estudiar la *forma normal* de dicho sistema, esto es, conjugarlo o hacerlo equivalente a otro sistema del cual se conozca su comportamiento. Cuando la conjugación entre los dos sistemas es de clase $C^k$, le llamamos forma normal $k$ diferenciable.

En este trabajo se expone un problema cuyo resultado fue obtenido recientemente y cuyo enunciado fue propuesto por el Dr. Yu. S. Ilyashenko en julio de 1995.

El problema consiste en saber bajo qué condiciones la forma normal $k$ diferenciable de una familia hiperbólica de campos vectoriales es la familia lineal. La importancia de este resultado radica en su aplicación a familias obtenidas de perturbar un germen de un campo vectorial diferenciable cuya colección de valores propios satisface relaciones de resonancia de orden mayor o igual que $N+1$. En el resultado principal de este trabajo consideramos un germen de un campo vectorial hiperbólico $v(x)$ cuya parte lineal en el origen tiene valores propios distintos y se demuestra que si esta colección de valores propios satisface resonancias de un orden suficientemente alto, entonces la forma normal $k$ diferenciable de cualquier perturbación de este campo $v(x)$ suficientemente cercana, es la parte lineal de la familia.

La diferenciabilidad del cambio de coordenadas que hace la conjugación de la perturbación del campo con la forma normal depende en gran medida de la parte lineal del campo vectorial que se perturba y de $N+1$, el grado más pequeño de las resonancias que satisface la colección de valores propios de este campo.

Para demostrar dicho resultado realizamos los siguientes pasos: el primero consiste en llevar la familia dada a una forma normal preliminar. Esta forma normal preliminar difiere de la forma normal por una función $N$-plana en el origen que contiene términos resonantes. Como sabemos, las resonancias siempre han sido un obstáculo en los cambios formales, analíticos y diferenciables (ver [AR1]) y es claro que al hacer una perturbación del campo pueden aparecer monomios resonantes de grado menor que $N+1$. Para llevar a cabo la forma normal preliminar, primeramente tenemos que deshacernos de los monomios resonantes de grado menor que $N+1$ y este problema lo resolvemos demostrando la existencia de una vecindad del punto singular en la cual todos los monomios resonantes que aparecen, al hacer la perturbación, tienen grado mayor o igual que $N+1$. Así obtenemos una familia que consta de su parte lineal, de una familia polinomial cuyas componentes tienen monomios de grado mayor o igual que 2 y son no resonantes, y de una familia compuesta por términos resonantes y no resonantes de grado mayor o igual que $N+1$. Ya con esta propiedad podemos eliminar los monomios de grado mayor o igual que 2 y menor que $N+1$ por medio del método de Poincaré-Dulac a parámetros (ver apéndice). Con esto hemos obtenido un cambio diferenciable de coordenadas que conjuga la familia inicial con la familia de la forma normal preliminar.

Ahora el problema se reduce a conjugar la familia de la forma normal preliminar con su parte lineal, eliminando la parte no lineal. Para hacer esta conjugación, seguiremos algunos pasos que repiten esencialmente los argumentos expuestos en el artículo "Finitely-smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields"(ver[IL-YA]).

El segundo paso llamado *globalización* extiende el campo que tenemos definido en una vecindad del origen a todo el espacio, definiéndolo como un campo lineal fuera de esta vecindad. El pegado de ambos campos (el del interior de la vecindad y el del exterior), lo hacemos por medio de una función diferenciable. Globalizamos la familia de la forma normal preliminar para demostrar la diferenciabilidad del campo que conjuga esta familia con un campo lineal. Después separamos la función $w$, que contiene los términos resonantes en dos funciones ajenas, $w_1$ y $w_2$, de tal forma que su suma sea $w$. Estas funciones tendrán la propiedad de ser $[\frac{N}{2}]$ planas en la variedad estable e inestable de la familia, respectivamente. $[\frac{N}{2}]$ denota el mayor entero menor o igual que $\frac{N}{2}$. Finalmente por medio del Método Homotópico, el cual consiste en encontrar un campo vectorial que satisfaga una ecuación homológica, haremos una equivalencia finito diferenciable entre las familias $A(\epsilon)x$, $A(\epsilon)x + w_1(\epsilon, x)$ y $A(\epsilon)x + w_1(\epsilon, x) + w_2(\epsilon, x)$, demostrando así el teorema.

Mis aportaciones para resolver dicho problema son la idea de encontrar una vecindad en la cual sólo haya hiperplanos resonantes (ver [AR1]) con norma mayor o igual que $N+1$ y la desigualdad $[\frac{N}{2}] - c > k$ que nos dice que el grado de diferenciabilidad del cambio de coordenas que conjuga la familia dada de campos vectoriales con la familia de la forma normal es $k$. $c$ es una constante que depende de la parte lineal del campo vectorial que se deformó y $N$ es el orden mínimo de las resonancias que satisface la colección de valores propios de la parte lineal del campo que se deformó.

# I. Teorema.

Las familias para las cuales los resultados están enunciados son familias diferenciables que representan una deformación del germen de un campo vectorial. En esta tesis, a menos que se especifique otra cosa, diferenciable significará de clase $C^\infty$.

El objetivo de esta sección es introducir al lector al lenguaje que se utilizará a lo largo de este trabajo, así como enunciar el resultado principal y dar algunos lemas para la demostración de éste.

**Definición 1**
*Una familia local diferenciable de campos vectoriales es un germen en el origen del campo vectorial definido por un sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = v(x,\epsilon)\ , \quad \dot{\epsilon} = 0, \qquad x \in (\mathbb{R}^n, 0),\ \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0).^1$$

**Definición 2**
*Decimos que dos familias locales diferenciables $(v_1(x,\epsilon),0)$, $(v_2(x,\epsilon),0)$ de campos vectoriales son $C^k$-equivalentes si existe un difeomorfismo de clase $C^k$, $\tilde{H} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0,0)) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0,0))$ de la forma*

$$\tilde{H} : (x,\epsilon) \longrightarrow (H(x,\epsilon),\epsilon)\ , \qquad H(0,0) = 0$$

*tal que*

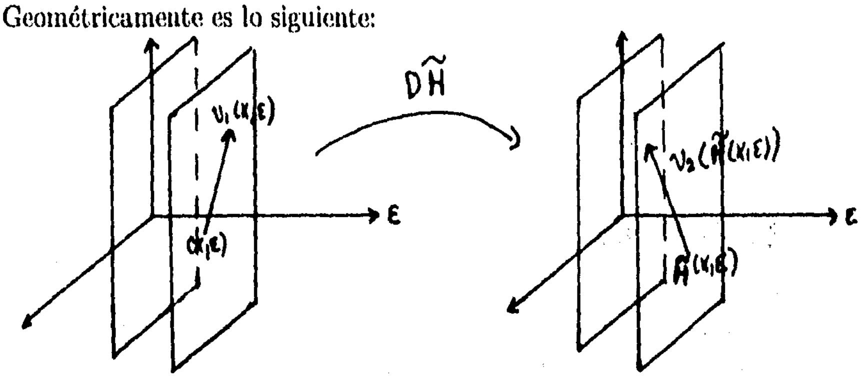
$$(D\tilde{H})(v_1(x,\epsilon),0) = (v_2(\tilde{H}(x,\epsilon)),0),$$

*es decir,*

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) v_1(x,\epsilon) = v_2(H(x,\epsilon),\epsilon).$$

[1] La expresión $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$ significa que epsilon es un parámetro $\epsilon = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p)$ en $\mathbb{R}^p$ que toma valores en una vecindad del origen.

Geométricamente es lo siguiente:




**Definición 3**
*Sea $(\dot{x},\dot{\epsilon}) = (v(x,\epsilon),0)$ una familia local diferenciable de campos vectoriales. Definimos la parte lineal de $(v(x,\epsilon),0)$ en el origen como la familia $(\dot{x},\dot{\epsilon}) = (D_x v(x,\epsilon)\mid_{(0,0)},0)$.*

**Definición 4**
*Decimos que $(\dot{x},\dot{\epsilon}) = (v_1(x,\epsilon),0)$ es una forma normal $k$ diferenciable de una familia local diferenciable de campos vectoriales $(\dot{x},\dot{\epsilon}) = (v_2(x,\epsilon),0)$ si tiene una expresión matemática más sencilla respecto a $(\dot{x},\dot{\epsilon}) = (v_2(x,\epsilon),0)$, si el comportamiento de sus soluciones es más fácil de entender que el de $(\dot{x},\dot{\epsilon}) = (v_2(x,\epsilon),0)$ y si éstas dos familias son $C^k$ equivalentes.*

Los valores propios correspondientes a la matriz representante de la parte lineal $D_x v(x)$ en el origen de un campo vectorial $v(x)$ juegan un papel crucial en la teoría de formas normales. A continuación daremos algunas definiciones concernientes a dichos valores que nos serán de gran utilidad.

**Definición 5**
*i) Una colección de valores propios complejos $\Lambda = \{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ es hiperbólico si todos ellos tienen parte real distinta de cero.*
*ii) La colección $\Lambda$ es resonante si existe al menos una relación de la forma $(m,\lambda) = \lambda_j$ tal que $\sum m_i \geq 2$, $m$ es un vector en $\mathbb{Z}^n$ con entradas enteras no negativas y $(m,\lambda) := m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n$.*
*iii) A una relación $(m,\lambda) = m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n$ le llamamos resonancia.*
*iv) El orden de una resonancia como en (iii) es $\sum m_i$.*
*v) El monomio resonante asociado a la resonancia $m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n = \lambda_j$ es $x^m \frac{\partial}{\partial x_j} = {x_1}^{m_1}\cdots {x_n}^{m_n}\frac{\partial}{\partial x_j}$.* [2]

[2] Esta notación significa que el monomio $x^m$ está en la j-ésima componente.

El problema que vamos a tratar en esta tesis es el siguiente:
dada una familia local diferenciable $v(x, \epsilon)$, donde $v(x, 0) = Ax + \cdots$ y $\Lambda$ es una colección hiperbólica de valores propios distintos en el origen, queremos ver bajo qué condiciones se puede linealizar, esto es, conjugarla con una familia lineal bajo un cambio de coordenadas diferenciable.

Las observaciones precedentes nos permiten enunciar el resultado principal de este trabajo.

**TEOREMA.**
*Consideremos una familia local diferenciable de campos vectoriales*

$$\dot{x} = v(x, \epsilon) \quad \dot{\epsilon} = 0, \qquad x \in (\mathbb{R}^n, 0), \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0) \tag{1}$$

*tal que $v(x, 0) = Ax + \cdots$ y $v(0, \epsilon) = 0$. Supongamos que la colección $\Lambda$ de valores propios de la parte lineal $A$ de $v(x, 0)$ en el origen es una colección hiperbólica de valores propios distintos. Sea $(N+1)$ el orden más pequeño de las resonancias que satisface la colección $\Lambda$. Existe una constante $c > 0$ que depende de la colección $\Lambda$ tal que si $[\frac{N}{2}] - c > 1$, donde $[\frac{N}{2}]$ denota el mayor entero menor o igual que $\frac{N}{2}$, entonces existe una vecindad del origen en $\mathbb{R}^{n+p}$ en la cual la familia (1) es $C^1$-equivalente a la familia lineal*

$$\dot{x} = A(\epsilon)x \quad \dot{\epsilon} = 0 \, , x \in (\mathbb{R}^n, 0) \, , \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0).$$

*Más aún, si $[\frac{N}{2}] - c > k$, entonces la familia (1) es $C^k$-equivalente a la familia lineal anterior. La constante c está dada como $c = \frac{r+s}{\beta}$, donde $r > \max_{m \in \{1,\ldots,n\}} \{\sum_{j=1, j\neq m}^{n} Re\lambda_j\}$ , $s > \max\{| \sum_{Re\lambda_j < 0} \lambda_j |, | \sum_{Re\lambda_j > 0} \lambda_j |\}$ y $\beta < \min\{| Re\lambda_j |\}$.*

**Observación:** Los puntos suspensivos del campo $v(x, 0)$ denotan los términos de orden mayor o igual que 2.

Con las mismas hipótesis del teorema sobre los valores propios mas no sobre el orden de resonancias, Ilyashenko y Yakovenko demostraron en 1991 (ver [IL-YA]) un resultado en el que se obtiene una equivalencia finito diferenciable de una familia de campos vectoriales con una familia de tipo polinomial. Dicho resultado fue crucial en la demostración del teorema en el que se afirma que
"*todo policiclo que aparece en una familia genérica finito parámetrica de campos vectoriales diferenciables en el plano real puede generar no más de un*

*número finito de ciclos límite dentro de la familia, siempre y cuando los vértices del policiclo sean elemen tales, es decir, con a lo menos un valor propio distinto de cero*" (ver[IL-YA2]).

Observemos que aún en el caso en que $\Lambda$ sea una colección no resonante, puede haber términos resonantes para $\epsilon \neq 0$.

Si $\Lambda$ es no resonante y está en el Dominio de Poincaré (ver [AR1]), entonces existe una vecindad del origen en $\mathbb{R}^{n+p}$ en la cual no hay resonancias, lo cual implica que la familia (1) se puede linealizar por medio de un cambio de coordenadas difrenciable ($C^\infty$) utilizando el Teorema de Borel y el Teorema de Poincaré a parámetros. La demostración es análoga a la demostración del teorema de Chen (ver [IL-YA]).

Supongamos ahora que $\Lambda$ está en el dominio de Poincaré y que es resonante, o bien, que no está en éste dominio (ver [AR1]) y que $N+1$ es como la del teorema. Entonces, uno pensaría en las siguientes formas de demostración: una demosración parecida a la del teorema de Poincaré (caso analítico) (ver [AR1]), sin embargo esto no es posible para el caso que estamos tratando ya que se necesita que la familia no tenga resonancias. Otra opción sería linealizar la familia por medio de un cambio formal y luego extender este cambio a una función diferenciable por medio del Teorema de Borel (ver [NAR]) pero tampoco es posible esto ya que para linealizar necesitamos que la familia no tenga resonancias.

Finalmente, uno quisiera eliminar todos los términos de grado menor que $N+1$ (los de grado mayor o igual que $N+1$ no se pueden eliminar debido a que son los monomios resonantes asociados a $\Lambda$ ), lo cual nos conduce a encontrar una vecindad adecuada del origen en $\mathbb{R}^{n+p}$ en la cual sólo haya resonancias de orden mayor o igual que $N+1$.

Como se verá más adelante, la diferenciabilidad de la conjugación se encuentra en estrecha relación con la parte lineal del campo vectorial $v(x,0) = Ax + \cdots$

Ahora demostraremos un lema que garantiza la existencia de una vecindad del origen en $\mathbb{R}^p$ tal que para $\epsilon$ en esta vecindad, sólo hay resonancias de orden mayor o igual que $N+1$.

**Lema 1**
*Consideremos una familia local diferenciable de campos vectoriales*

$$\dot{x} = v(x,\epsilon) \quad \dot{\epsilon} = 0\,, \qquad x \in (\mathbb{R}^n, 0), \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$$

*tal que* $v(x,0) = Ax + \cdots$ *y* $v(0,\epsilon) = 0$. *Sea* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ *el vector formado por los valores propios de* $A$ *y sea* $(N+1)$ *el orden menor de las relaciones de resonancia que satisface* $\lambda$. *Entonces existe una vecindad del origen en* $\mathbb{R}^p$ *tal que para* $\epsilon$ *en esta vecindad, los monomios resonantes de la familia tienen grado mayor o igual que* $(N+1)$.

Para demostrar este lema no nos interesa saber de qué forma son los $\lambda_j(\epsilon)$, para $\epsilon \neq 0$, $j = 1, \cdots, n$, sino el hiperplano resonante en el que éstos valores están; por ejemplo, si $\lambda(\epsilon) = (\lambda_1(\epsilon), \cdots, \lambda_n(\epsilon))$ satisface la resonancia

$$m_1\lambda_1(\epsilon) + \cdots + m_n\lambda_n(\epsilon) = \lambda_j(\epsilon),$$

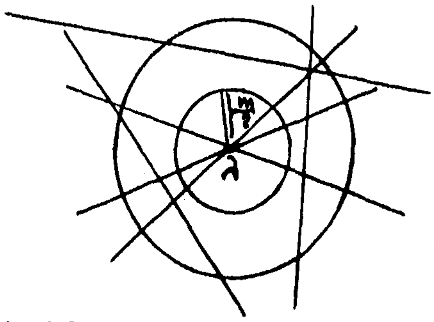
entonces $\lambda(\epsilon)$ está en el hiperplano resonante $m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n = z_j$ y *la norma de este hiperplano* es $\sum m_j$ ya que los coeficientes de éste son los que nos dan el grado de los monomios resonantes.

**Demostración.**
Sea $(N+1)$ el orden mínimo de las resonancias que satisface $\Lambda$ y sea $\delta$ un número positivo arbitrario. Consideremos el conjunto

$$\mathfrak{A}_\delta = \{\pi \mid \lambda \notin \pi\,,\ d(\lambda, \pi) < \delta \ \text{ y } \ \| \pi \| \leq N\},$$

donde $\| \pi \|$ denota la norma del hiperplano $\pi$ con la distancia usual de un punto a un hiperplano en $\mathbb{C}^n$. El conjunto $\mathfrak{A}_\delta$ tiene un número finito de elementos. Esto se sigue de observar que la cardinalidad del conjunto $\{\pi / \| \pi \| \leq N\}$ es finita. Definimos el siguiente número $\mathbf{m} = min\{d(\lambda, \pi) \mid \pi \in \mathfrak{A}_\delta\}$. Este número $\mathbf{m}$ es positivo debido a que $\mathfrak{A}_\delta$ es un conjunto discreto. Entonces, $\delta_1 = \mathbf{m}/2$ es el radio de la vecindad que satisface el lema, ya que en esta vecindad están únicamente los hiperplanos resonantes que pasan por $\lambda$ y los que tienen norma mayor $N$ (para calcular el radio explícitamente, véase el apéndice).

Geométricamente es lo siguiente:




**Demostración del Teorema**
Definamos a la familia (1) por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = A(\epsilon)x + u(x,\epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0, \qquad x \in (\mathbb{R}^n, 0), \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0) \tag{2}$$

$$u(0,\epsilon) = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,\epsilon) = 0.$$

Vamos a suponer que la colección $\Lambda$ de valores propios de la matriz $A(0) = A$ está etiquetado de tal forma que los primeros $n_-$ valores propios tienen parte real negativa (Re $\lambda_i < 0$) y los $n_+$ restantes tienen parte real positiva (Re $\lambda_i > 0$) y $n_- + n_+ = n$.

Sea $\mathbb{R}^{n_-} \oplus \mathbb{R}^{n_+}$ la descomposición correspondiente del espacio $\mathbb{R}^n$ en suma directa de subespacios lineales invariantes bajo el operador $A$.

La demostración del teorema consiste en llevar a cabo los siguientes pasos:

**1.** Llevar a la familia (2) por medio de un cambio de coordenadas diferenciable a una forma normal preliminar que está dada por la parte lineal $A(\epsilon)x$ más una discrepancia $w(x,\epsilon)$ que contiene términos de orden mayor o igual que $N$. Para llevar a cabo esta forma normal preliminar, entre otras cosas, recurriremos al lema 1 que se demostró anteriormente. Este paso se demostrará en esta sección.

Los siguientes dos pasos, que básicamente son técnicos, facilitarán los cálculos para la demostración del teorema.

**2.** Globalizar la familia de la forma normal preliminar, es decir, extender la familia a todo $\mathbb{R}^n$ por medio de una función diferenciable. Aquí el cambio de coordenadas sigue siendo diferenciable. Este paso se demostrará en la parte II.

**3.** Descomponer la discrepancia $w(x,\epsilon)$ como suma de dos funciones diferenciables ajenas y tal que cada una de ellas es $[\frac{N}{2}]$-plana en la variedad estable e inestable, respectivamente. Esto se demostrará en la parte III.

**4.** En este paso haremos uso del método homotópico que consiste esencialmente en hacer una homotopía entre las dos familias que se quiere hacer equivalentes y resolver una ecuación homológica. Resolver esta ecuación significa encontrar un campo $h$ que la satisfaga y que este campo sea de clase $C^k$. Hasta aquí, le cambio de coordenadas es diferenciable. Este inciso se demostrará en la parte IV.

**5.** Por último demostraremos que el campo $h$ es de clase $C^k$, donde $k$ satisface la desigualdad $[\frac{N}{2}] - c > k$. Esto se prueba en la parte V.

**Definición 6**
*La forma normal preliminar de orden $N < \infty$ para una familia del tipo (2) cuya parte lineal $A(0) = A$ tiene un conjunto de valores propios hiperbólicos, es una familia local diferenciable de campos vectoriales determinada por el sistema de ecuaciones*

$$\dot{x} = A(\epsilon)x + w(x,\epsilon)\,, \quad \dot{\epsilon} = 0\,, \quad A(0) = A \tag{3}$$

$$x \in (\mathbb{R}^n, 0)\,, \qquad \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$$

*con las siguientes propiedades :*
1) *Los planos coordenados de la suma $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-} \oplus \mathbb{R}^{n+}$ son invariantes bajo las soluciones de los campos de la familia (2) para $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$.*
2) *La discrepancia $w(x,\epsilon)$ es una función diferenciable $N$-plana respecto a $x$ en $x = 0$ para $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$.*

**Lema 2**
*La familia (2) es $C^\infty$-equivalente a una familia de la forma normal preliminar de la definición 6.*

**Demostración.**
Para demostrar el inciso (1) vamos a usar un resultado para gérmenes de campos vectoriales hiperbólicos (ver [HPS] y [PER]), el cual dice que para todo germen de un campo vectorial hiperbólico existen, en una vecindad suficientemente pequeña del punto singular, variedades invariantes diferenciables

de dimensiones $n_-$ y $n_+$ que son tangentes respectivamente a los subespacios invariantes que contraen y que expanden de la parte lineal del campo en dicho punto.

Estas variedades dependen suavemente del parámetro $\epsilon$ en el sentido en que son intersecciones (ver [PAL]) de los planos $\epsilon = cte$ con subvariedades suaves de dimensiones $n_- + p$ y $n_+ + p$ en $(\mathbb{R}^{n+p}, 0)$.

Para poder usar este resultado necesitamos probar que el origen $\{x = 0\}$ es el único punto singular para $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$. Esto se sigue de lo siguiente: denotemos por $v$ a la familia (2), esto es, $v(x,\epsilon) = A(\epsilon)x + u(x,\epsilon)$. Como el origen es punto singular del campo $v(x,0)$, tenemos que $v(0,0) = 0$. La matriz $A = A(0)$ es no degenerada debido a que el campo $v(x,0)$ es hiperbólico en el origen. En consecuencia,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,0) = A + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)|_{(0,0)} = A.$$

Por el teorema de la Función Implícita, existe una única función $g(\epsilon)$ y una vecindad del origen en $\mathbb{R}^{n+p}$ en la que se satisface

$$x = g(\epsilon), \quad g(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(g(\epsilon),\epsilon) = 0.$$

En consecuencia, el campo $v(x,\epsilon)$ se anula únicamente en el punto $x = g(\epsilon)$. Y usando el hecho de que $v(0,\epsilon) = 0$ para $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0)$, concluimos que $g(\epsilon) = 0$.

Por lo tanto el origen $x = 0$ es el único punto singular en una vecindad del origen en $\mathbb{R}^{n+p}$.

Después de un cambio de coordenadas diferenciable que transforma las variedades invariantes en los planos coordenados, podemos observar que la condición 2 de la definición 8 se satisface en una vecindad del origen.

Para probar el inciso (2) necesitamos probar que $w(x,\epsilon)$ se anula en el origen, lo cual ya tenemos por el inciso anterior. Ahora sabemos que por el lema 1, existe una vecindad del origen en $\mathbb{R}^p$ tal que la familia $v(x,\epsilon) = A(\epsilon)x + u(x,\epsilon)$ tiene monomios resonantes de grado mayor o igual que $N$ para $\epsilon$ dentro de esta vecindad.

Ahora aplicamos el método de Poincaré-Dulac a parámetros (ver proposición 1) a la familia (2) considerando $\epsilon$ dentro de la vecindad del lema 1 y cada vez que lo apliquemos, eliminamos todos los términos de un mismo grado. Entonces, repitiendo este proceso a lo más $N$-2 veces, podemos eliminar todos los monomios de grado menor que $N$. Este método se explica en la proposición 1.

**Definición 7**
*Sea $\Upsilon$ el anillo multiplicativo de gérmenes en el origen de funciones diferenciables con parámetro $\epsilon$. Una serie semiformal con parámetro $\epsilon$ es una serie de potencias en la variable $x$ con coeficientes en $\Upsilon$ y un campo vectorial semiformal es un objeto determinado por un sistema de ecuaciones diferenciales cuya parte derecha son series semiformales.*

A cada familia local diferenciable le corresponde un campo semiformal, a saber, su serie de Taylor.

**Definición 8**
*Una combinación de la forma $\lambda_j(\epsilon) - (r, \lambda(\epsilon))$, donde $r \in \mathbf{Z}_+^n$, $\mid r \mid \geq 2$ y $(r, \lambda(\epsilon)) := r_1\lambda_1(\epsilon) + \cdots + \lambda_n(\epsilon)$, es una resonancia entre gérmenes si es un elemento del ideal maximal $\Im$ del anillo local $\Upsilon$. El ideal maximal $\Im$ está formado por todos los gérmenes diferenciables que se anulan en el origen. Un monomio $a(\epsilon)x^r\frac{\partial}{\partial x_j}$ en la expansión de un campo vectorial es resonante si $\lambda_j(\epsilon) - (r, \lambda(\epsilon)) \in \Im$.*

**Proposición 1** *Teorema de Poincaré a parámetros.*
*Sea $v(x,\epsilon)$ un campo vectorial semiformal cuya parte lineal en el origen tiene valores propios distintos y sea $N+1$ el grado más pequeño de sus monomios resonantes. Entonces, el campo $v(x,\epsilon)$ es transformado bajo un cambio diferenciable de variables a una familia cuya parte derecha contiene la parte lineal de $v(x,\epsilon)$ más una función diferenciable $N$-plana, respecto a $x$, en el origen.*

La demostración de esta proposición se dará en el apéndice. Observemos que el cambio de coordenadas es analítico en la variable $x$ y es diferenciable en $\epsilon$. En consecuencia obtenemos un cambio diferenciable.

La siguiente afirmación nos dice que los valores propios de la parte lineal de la familia (2), son funciones diferenciables respecto al parámetro $\epsilon$.

**Afirmación.**
*Sea $A(\epsilon)$ una familia local diferenciable de operadores lineales con un parámetro $\epsilon$ en $\mathbb{R}^p$ donde $A(0)$ tiene valores propios distintos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Entonces dichos valores pueden ser extendidos, respecto al parámetro $\epsilon$, como gérmenes de funciones diferenciables.*

Para probar esta afirmación, consideremos $Q(x,\epsilon)$ el polinomio característico en la variable $x$ de la matriz $A(\epsilon)$ y $Q(x,0) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$ el polinomio de $A(0)$.

Debido a que los valores propios de $A(0)$ son distintos, tenemos que

$$\frac{\partial Q(x,\epsilon)}{\partial x}(\lambda_i,0) \neq 0,\ i=1,\ldots,n.$$

Usando también que $Q(\lambda_i,0) = 0$, el Teorema de la Función Implícita nos afirma que existe una única función diferenciable $\lambda_i(\epsilon)$ tal que $\lambda_i = \lambda_i(0)$ y $Q(\lambda_i(\epsilon),\epsilon) = 0$, para $i = 1,\ldots,n$. Con esto queda probada la afirmación.

Hay que notar que los pasos de este método dejan invariantes los planos coordenados $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-} \oplus \mathbb{R}^{n+}$ y así las condiciones 1 y 2 de la definición 6 se siguen cumpliendo.

Con este cambio de coordenadas diferenciable tenemos una familia en la forma normal preliminar (3) la cual difiere de la familia lineal sólo por una discrepancia $N$-plana, respecto a $x$, en el origen. Nuestro objetivo es ahora eliminar tal discrepancia conjugando la familia (3) con su parte lineal por medio del método homotópico.

Este método nos conduce a una forma explícita del cambio diferenciable de coordenadas que hace la conjugación entre la familia (3) y la forma normal. Esta forma está dada por una integral sobre trayectorias del campo (3). Sin embargo, notemos que este campo sólo está definido en una vecindad del origen. En consecuencia, si permanecemos dentro de la teoría local, tenemos problemas con los límites de integración, pero esta dificultad la podemos evitar por medio de la globalización.

# II.Globalización

Este procedimiento consiste en extender la familia (3) a una familia definida en todo el espacio $\mathbb{R}^n$ de la variable $x$ de tal forma que todas las trayectorias de los campos de la familia pueden ser extendidas para todo tiempo $t$. Así podemos trabajar con integrales impropias sobre soluciones del nuevo campo. El procedimiento de globalizar consiste en lo siguiente:

Consideremos $\phi : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable no negativa con soporte compacto tal que $\phi(x) \leq 1$ y $\phi(x) = 1$ para $x$ en una vecindad del origen $\{x = 0\}$ de radio $\delta$. Elegimos el radio $\delta$ de la vecindad de tal forma que el campo (4), que se define a continuación, se anule sólo en el origen (ver apéndice) y que satisfaga que $\| div\ v(g_v^t(x,\epsilon)^3) \| \leq s$, cuando $t \to \infty$, donde $v = F + \tilde{w}$ y $s > \max\{| \sum_{Re\lambda_j<0} \lambda_j |, | \sum_{Re\lambda_j>0} \lambda_j |\}$.

Una globalización de la forma normal preliminar (3) es una familia de campos vectoriales definida como sigue:

$$\dot{x} = [1 - \phi(x)]Ax + \phi(x)[A(\epsilon)x + w(x,\epsilon)], \quad \dot{\epsilon} = 0 \tag{4}$$

$$x \in \mathbf{R}^n \quad \epsilon \in (\mathbf{R}^p, 0).$$

Los términos de la expresión (4) los podemos reagrupar como sigue

$$\dot{x} = F(x,\epsilon) + \tilde{w}(x,\epsilon), \tag{5}$$

donde $F = [1 - \phi(x)]Ax + \phi(x)[A(\epsilon)x]$ es un campo vectorial diferenciable en $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^p, 0)$ cuyo germen en el origen es lineal y coincide con la forma normal del teorema. Además, el campo $F$ es lineal fuera de una vecindad compacta. La discrepancia $\tilde{w} = \phi w$ tiene soporte compacto y es una función $N$-plana, respecto a $x$, en el origen.

De las propiedades de la forma normal preliminar (3) y de la fórmula de la familia globalizada (4) tenemos las siguientes afirmaciones:

- $F(0,\epsilon) = 0$ y los planos coordenados de la suma directa $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-} \oplus \mathbf{R}^{n+}$ son invariantes bajo el flujo de la familia (5).

- Todas las trayectorias de los campos $F$ y $F + \tilde{w}$ están definidas para todo tiempo $t$.

- La discrepancia $\tilde{w}$ tiene soporte compacto.

- La divergencia de los campos $F$ y $F + \tilde{w}$ está acotada uniformemente respecto a $(x,\epsilon)$, cuando $t \to \infty$.

- Como $\tilde{w}$ es una función $N$-plana, respecto a $x$, en el origen, dado cualquier número natural $k \leq N$, se satisface la siguiente desigualdad uniformemente respecto a $\epsilon$, (ver apéndice para la demostración de este inciso)
$$\| D_x^k \tilde{w}(x,\epsilon) \| \leq D(k) \| x \|^{N-k},$$

[3]La expresión $g_v^t(x,\epsilon)$ denota la solución del campo $v$ que pasa por el punto $(x,\epsilon)$ al tiempo $t$.

donde $D(k)$ es una constante que depende del grado de derivación de $\tilde{w}$.

# III. Descomposición de la discrepancia

El procedimiento que a continuación vamos a describir es un procedimiento de carácter meramente técnico que habrá de facilitarnos la demostración y que sólo tiene sentido aplicarlo en el caso en el que la familia de campos vectoriales presenta variedades estable e inestable.

Debido a que una discrepancia $\tilde{w}$ que es $N$-plana en el origen, no es fácil de eliminar por el método homotópico cuando hay ambas variedades, vamos a descomponerla en suma de dos funciones vectoriales $\tilde{w}_+$ y $\tilde{w}_-$. Estas funciones las construiremos de tal forma que cada una será $[\frac{N}{2}]$−plana, respecto a $x$, en alguna variedad, es decir, en algún plano coordenado de la suma $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_-} \oplus \mathbb{R}^{n_+}$.

**Lema 3**
*Supongamos que una función diferenciable* $u : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0) \to \mathbb{R}^n$ *con soporte compacto es* $M$*-plana, respecto a* $x$*, en el origen* $\{x = 0\}$ *y sea* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_-} \oplus \mathbb{R}^{n_+}$ *una descomposición arbitraria de* $\mathbb{R}^n$ *en suma directa de planos coordenados. Entonces existe una descomposición*

$$u = u_- + u_+$$

*tal que ambas funciones* $u_-, u_+$ *tienen soporte compacto;* $u_-$ *es* $[\frac{M}{2}]$*-plana en* $\mathbb{R}^{n_-}$ *y* $u_+$ *es* $[\frac{M}{2}]$*-plana en* $\mathbb{R}^{n_+}$.

**Demostración.**
Es suficiente probar el lema para funciones escalares. Como $M < \infty$, por el Lema de Hadamard (ver [ARN2]), todo germen diferenciable $f$ que es $M$-plano en el origen se puede escribir de la siguiente forma :

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=M+1} x^\alpha f_\alpha(x, \epsilon) \tag{6}$$

donde $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ es un multiíndice y $f_\alpha$ es un germen diferenciable. Cualquier monomio $x^\alpha$ lo podemos escribir como $x^{\alpha_-} x^{\alpha_+} = x^\alpha$ ; $\alpha_-, \alpha_+ \in \mathbb{Z}_+^n$, donde el monomio $x^{\alpha_-}$ sólo contiene productos de funciones coordenadas que se anulan en $\mathbb{R}^{n_+}$, esto es, $x^{\alpha_-} = x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n_-}^{\alpha_{n_-}}$ e inversamente $x^{\alpha_+} = x_{n_-+1}^{\alpha_{n_-+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}$. Y se satisface $\alpha_- + \alpha_+ = \alpha$.

La expresión (6) la podemos reescribir como sigue :

$$f = \sum_{|\alpha_+|>\frac{M}{2}} x^\alpha f_\alpha + \sum_{|\alpha_-|\geq\frac{M}{2}+1} x^\alpha f_\alpha = f_- + f_+.$$

Los gérmenes $f_-, f_+$ satisfacen ser $[\frac{M}{2}]$-planos en $\mathbb{R}^{n_-}, \mathbb{R}^{n_+}$, respectivamente. Para que los gérmenes tengan soporte compacto, recurrimos a un método basado en la partición de la unidad (ver [NAR]).

Del Lema 3 se sigue que la ecuación (5) puede ser escrita como

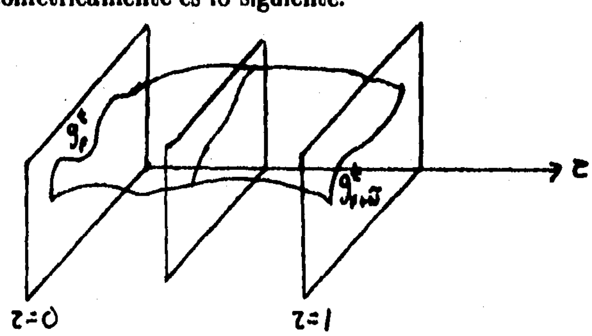
$$\dot{x} = F(x,\epsilon) + \tilde{w}_+(x,\epsilon) + \tilde{w}_-(x,\epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0. \tag{7}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \qquad \epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0).$$

# IV. Método Homotópico

Este método consiste en hacer una homotopía entre las familias que se quieren conjugar (en nuestro caso es la familia (5) y la forma normal) y en encontrar un campo finito diferenciable que satisfaga un bracket de Poisson con la familia (7) para demostrar a partir de esto, que existe una superficie integral asociada a estas familias.

Geométricamente es lo siguiente:



Recordemos que queremos encontrar un difeomorfismo $H(x,\epsilon)$ que satisfaga la siguiente igualdad

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)[A(\epsilon)x+\tilde{w}(x,\epsilon)] = A(\epsilon)H(x,\epsilon).$$

Para demostrar que las familias $F$ y $F+\tilde{w}$ son $C^k$-equivalentes, demostraremos las siguientes equivalencias:

$$F \overset{C^k}{\sim} F+\tilde{w}_+ \overset{C^k}{\sim} F+\tilde{w}_+ + \tilde{w}_-.$$

En esta secuencia, cualesquiera dos familias sucesivas difieren por una discrepancia $[\frac{N}{2}]$-plana en alguno de los planos coordenados y por transitividad obtenemos la equivalencia deseada.

Basta con demostrar que $F$ y $F+\tilde{w}_+$ son $C^k$-equivalentes. La otra equivalencia es análoga.

**Definición 9**
*Sean $v(x)$ y $w(x)$ dos campos vectoriales definidos en $\mathbb{R}^n$. Definimos el Corchete de Poisson (ver [AR1] y [NAR]) de los campos $v$ y $w$ como el vector*

$$[v,w] := \frac{\partial w}{\partial x}v - \frac{\partial v}{\partial x}w.$$

**Proposición 2**
*Sean $(\dot{x},\dot{\epsilon}) = (F(x,\epsilon),0)$ y $(\dot{x},\dot{\epsilon}) = (F(x,\epsilon)+u(x,\epsilon),0)$ dos familias de campos vectoriales diferenciables definidas en $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p,0)$ tales que $u(0,\epsilon)=0, F(0,\epsilon)=0$. Supongamos que existe un campo vectorial de clase $C^k$ $(\dot{x},\dot{\epsilon},\dot{\tau}) = (h(x,\epsilon,\tau),0,0)$ en $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^p,0)\times[0,1]$ que satisface la ecuación*

$$[(F+\tau u)\tfrac{\partial}{\partial x}, h\tfrac{\partial}{\partial x}+1\tfrac{\partial}{\partial \tau}] = 0, \tag{8}$$

*donde $h(0,\epsilon,\tau)=0$. Entonces las familias $F$ y $F+u$ son $C^k$-equivalentes.*

Este lema reduce nuestro problema a encontrar un campo $h$ de clase $C^k$ que satisfaga la ecuación (8).

**Demostración.**
Consideremos el espacio extendido $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p,0)\times[0,1]$ con coordenadas $(x,\epsilon,\tau)$. Por medio de una homotopía, introducimos las familias $F$ y $F+u$

en una sola familia definida en el espacio extendido y determinada por la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = F(x,\epsilon) + \tau u(x,\epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad \dot{\tau} = 0.$$

Por hipótesis sabemos que existe un campo vectorial $(h(x,\epsilon,\tau)$ que satisface, junto con el campo anterior, la ecuación (8).

La equivalencia entre las familias se sigue del siguiente resultado:

**Proposición 3**
*Sean $v$ y $w$ dos campos en $\mathbb{R}^n$. Si $[v,w] = 0$, entonces existe una superficie integral (ver [WIL]) asociada a la pareja $(v,w)$.*

**Demostración.**
Denotemos por $g_v^t(x,\epsilon)$ a la solución del campo $v$ con condición inicial $(x,\epsilon)$ al tiempo $t$. Primero demostraremos que si $[v,w] = 0$ entonces $(\frac{\partial g_v^t}{\partial x})w \circ g_v^{-t} = w$ y $(\frac{\partial g_w^s}{\partial x})v \circ g_w^{-s} = v$. Para esto definimos $w^t = (\frac{\partial g_v^t}{\partial x})w \circ g_v^{-t}$. Es fácil verificar que $\frac{d}{dt}w^t \mid_{t=0} = [v,w]$.

Desarrollando $w^t$ en serie de Taylor, $w^t = w + t[v,w] + O(t^2)$, se demuestra que $\frac{d}{dt}w^t \mid_{t=\tau} = 0$. De ésta última afirmación tenemos que $w^t = w$. Esto es, $w(g_v^t(x)) = (\frac{\partial g_v^t}{\partial x})w(x)$.

Por otra parte tenemos que $\frac{d}{ds}g_v^t \circ g_w^s(x) = (\frac{\partial g_v^t}{\partial x})w(x)$ y usando que $w^t = w$, concluimos que

$$w(g_v^t(x)) = \frac{d}{ds}g_v^t \circ g_w^s(x).$$

Notemos que $\frac{d}{ds}g_w^s \circ g_v^t(x) = w(g_v^t(x))$ y usando la igualdad anterior, obtenemos

$$\frac{d}{ds}g_w^s \circ g_v^t(x) = \frac{d}{ds}g_v^t \circ g_w^s.$$

Similarmente tenemos que $\frac{d}{dt}g_w^s \circ g_v^t(x) = (\frac{\partial g_w^s}{\partial x})v(x)$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}g_w^s \circ g_v^t(x) = \frac{d}{dt}g_v^t \circ g_w^s.$$

Esto significa que los flujos de $v$ y de $w$ conmutan (ver [libro]). De ésto concluimos que existe una superficie integral asociada a los campos $u$ y $w$.

# V. Diferenciabilidad del cambio de coordenadas

Sólo falta saber cuándo podemos encontrar el campo $h$ de clase $C^k$ y que satisfaga la ecuación (8). Esta pregunta queda resuelta con la siguiente proposición:

**Proposición 4**
*Consideremos la familia de campos vectoriales*

$$\dot{x} = F(x,\epsilon) + \tau\tilde{w}_+ \,,\ \dot{\epsilon} = 0\,,\ \dot{\tau} = 0 \tag{9}$$

*definida en* $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0) \times [0,1]$, *donde* $F$ *y* $\tilde{w}_+$ *están definidas como en (7). Entonces la ecuación*

$$[(F + \tau\tilde{w}_+)\tfrac{\partial}{\partial x}, h\tfrac{\partial}{\partial x} + 1\tfrac{\partial}{\partial \tau}] = 0 \tag{10}$$

*tiene una solución* $\dot{x} = h(x,\epsilon,\tau)$ *de clase* $C^k$ *en* $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^p, 0) \times [0,1]$.

**Demostración.**
Primero observemos que la familia (9) satisface las siguientes propiedades:
1) El plano coordenado $\mathbb{R}^{n+} = M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad invariante bajo el flujo de dicha familia.
2) La función vectorial $\tilde{w}_+$ es $[\frac{N}{2}]$-plana, respecto a $x$, en $M$.
3) $M$ es globalmente exponencialmente inestable, es decir, existe un número $\beta > 0$ tal que para $\epsilon \in (\mathbb{R}^p, 0), \tau \in [0,1]$

$$dist(g_v^t(x,\epsilon,\tau), M) \leq B e^{-\beta t} \cdot dist((x,\epsilon,\tau), M)\,, \qquad \forall t > 0.$$

Esta propiedad se demuestra en el apéndice.
4) Las soluciones de la familia están definidas para todo tiempo.
5) La divergencia de la familia $(F+\tau\tilde{w}_+)$, aplicada a soluciones de ella misma, está uniformemente acotada respecto a $x, \epsilon, \tau$, cuando $t \to \infty$. Esto es, $\|$ $div\ (F+\tau\tilde{w}_+)(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) \| \leq s$, donde $s > \max\{| \sum_{Re\lambda_j<0} \lambda_j |, | \sum_{Re\lambda_j>0} \lambda_j | \}$.
6) Existe $c = \frac{r+s}{\beta}$, la del teorema, tal que $[\frac{N}{2}] - c > k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

Cuando en el espacio fase sólo hay una variedad, la propiedad (3) es equivalente a que las soluciones de la familia $(F+\tau\tilde{w}_+)$ tiendan exponencialmente al origen. Esto se satisface por el teorema de la variedad estable.

Ahora demostraremos que la ecuación (10) es equivalente a la ecuación

$$[(F+\tau\tilde{w}_+)\tfrac{\partial}{\partial x}, h\tfrac{\partial}{\partial x}] = \tilde{w}_+\tfrac{\partial}{\partial x}. \tag{11}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
[(F+\tau\tilde{w}_+)\tfrac{\partial}{\partial x}, h\tfrac{\partial}{\partial x} + 1\tfrac{\partial}{\partial \tau}] &= [(F+\tau\tilde{w}_+)\tfrac{\partial}{\partial x}, h\tfrac{\partial}{\partial x}] + [(F+\tau\tilde{w}_+)\tfrac{\partial}{\partial x}, 1\tfrac{\partial}{\partial \tau}] \\
&= [(F+\tau\tilde{w}_+)\tfrac{\partial}{\partial x}, h\tfrac{\partial}{\partial x}] + [F\tfrac{\partial}{\partial x}, 1\tfrac{\partial}{\partial \tau}] \\
&+ [(\tau\tilde{w}_+)\tfrac{\partial}{\partial x}, 1\tfrac{\partial}{\partial \tau}].
\end{aligned}$$

Si desarrollamos el término $[F\frac{\partial}{\partial x}, 1\frac{\partial}{\partial \tau}]$ podemos observar que

$$[F\tfrac{\partial}{\partial x}, 1\tfrac{\partial}{\partial \tau}] = \frac{\partial(0,\ldots,0,1)}{\partial(x,\epsilon,\tau)}(F\tfrac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial(F,0,0)}{\partial(x,\epsilon,\tau)}(1\tfrac{\partial}{\partial \tau}) = 0.$$

Haciendo lo mismo con $[\tau\tilde{w}_+\frac{\partial}{\partial x}, 1\frac{\partial}{\partial \tau}]$, obtenemos

$$[\tau\tilde{w}_+\tfrac{\partial}{\partial x}, 1\tfrac{\partial}{\partial \tau}] = \frac{\partial(0,\ldots,0,1)}{\partial(x,\epsilon,\tau)}(\tau\tilde{w}_+\tfrac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial(\tau\tilde{w}_+,0,0)}{\partial(x,\epsilon,\tau)}(1\tfrac{\partial}{\partial \tau}) = -\tilde{w}_+\tfrac{\partial}{\partial x}.$$

Por lo tanto, la ecuación (10) se reduce a la ecuación (11).

Denotemos por $v$ a la familia $F+\tau\tilde{w}_+$. Ahora demostraremos que la ecuación (11) es equivalente al siguiente Corchete de Poisson

$$\frac{\partial h}{\partial x}v - \frac{\partial v}{\partial x}h = \tilde{w}_+.$$

Esto es,

$$\begin{aligned}
[v\tfrac{\partial}{\partial x}, h\tfrac{\partial}{\partial x}] &= \frac{\partial(h,0,0)}{\partial(x,\epsilon,\tau)}(v,0,0) - \frac{\partial(v,0,0)}{\partial(x,\epsilon,\tau)}(h,0,0) \\
&= \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial \epsilon}, \frac{\partial h}{\partial \tau}\right)(v,0,0) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial \epsilon}, \frac{\partial v}{\partial \tau}\right)(h,0,0) \\
&= \frac{\partial h}{\partial x}v - \frac{\partial v}{\partial x}h.
\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación $[v\frac{\partial}{\partial x}, h\frac{\partial}{\partial x}] = \tilde{w}_+\frac{\partial}{\partial x}$ es igual a la ecuación

$$\frac{\partial h}{\partial x}v - \frac{\partial v}{\partial x}h = \tilde{w}_+.$$

El término $\frac{\partial h}{\partial x}v(x,\epsilon,\tau)$ es igual a $\frac{d}{dt}h(g_v^t(x,\epsilon,\tau))\mid_{t=0}$.
La ecuación anterior la reescribimos como sigue :

$$\frac{d}{dt}h(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) - \frac{\partial v}{\partial x}h(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) = \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau)). \tag{12}$$

Esta ecuación es una ecuación no homogénea, por tanto, su solución se obtiene calculando las soluciones de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación no homogénea. Así , la solución de la ecuación (12) está dada por

$$h(x,\epsilon,\tau,t) = X(x,\epsilon,\tau,t)\cdot C(x,\epsilon,\tau,t)$$

donde $X(x,\epsilon,\tau,t) = \frac{\partial}{\partial x}g_v^t(x,\epsilon,\tau)$ es solución de la ecuación homogénea :

$$\frac{d}{dt}X(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) - \frac{\partial v}{\partial x}X(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) = 0$$

con condición inicial $X(x,\epsilon,\tau,0) = Id \in \mathbb{R}^n$ (ver [AR2]). A esta ecuación se le llama *ecuación de primera variación.*

Si derivamos $h = XC$ respecto a $t$ y la sustituimos en la ecuación no homogénea (12), obtenemos

$$X\frac{dC}{dt} = \tilde{w}_+.$$

Como $X$ es una matriz fundamental, es invertible en una vecindad del origen. Entonces $\frac{d}{dt}C(x,\epsilon,\tau,t) = X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))$. Así ,

$$C(x,\epsilon,\tau,t) = C(x,\epsilon,\tau,t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt.$$

Sustitutyendo esta expresión de $C$ en la definición del campo $h$ tenemos que

$$\begin{aligned} h(x,\epsilon,\tau,t) &= X(x,\epsilon,\tau,t)C(x,\epsilon,\tau,t_0) + \\ &+ X(x,\epsilon,\tau,t)\int_{t_0}^{0} X^{-1}(x,\epsilon,\tau)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt. \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$, tenemos

$$h(x,\epsilon,\tau,0) = Id \cdot C(x,\epsilon,\tau,t_0) + Id \int_{t_0}^{0} X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt.$$

Usando la propiedad (4) y haciendo tender $t_0 \to \infty$, tenemos que la constante $C(x,\epsilon,\tau,t_0) \to 0$. Esto se debe a que fuera de la vecindad compacta, la familia es lineal y no tiene más puntos singulares que el infinito. En consecuencia,

$$h(x,\epsilon,\tau) = \int_{\infty}^{0} X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt.$$

Finalmente,

$$h(x,\epsilon,\tau) = -\int_{0}^{\infty} X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt.$$

Haciendo uso de las propiedades (1) y (2), tenemos que $h$ está dado como sigue:

$$h(x,\epsilon,\tau) = \begin{cases} -\int_0^\infty X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt & x \notin M \\ 0 & x \in M \end{cases} \tag{13}$$

Hasta aquí lo que hemos hecho ha sido mostrar un campo $h$ que satisface la ecuación (10). Ahora demostraremos que este campo es de clase $C^k$, para lo cual demostraremos primero que $h$ es de clase $C^k$ en todo punto distinto del origen y que esté dentro de la vecindad compacta donde están contenidos los soportes de $\phi, \tilde{w}$. Después, usando un teorema de extensión, demostraremos que $h$ es de clase $C^k$ en el origen.

Antes de demostrar que el campo de la ecuación (13) es de clase $C^k$ en todo punto distinto del origen, expondremos algunas afirmaciones.

**1.** Afirmamos que la función $\tilde{w}_+(x,\epsilon,\tau)$ decae con una tasa exponencial cuando $x$ tiende a la variedad invariante $M$, es decir,

$$\| D_x^k\tilde{w}_+(x,\epsilon,\tau) \| \leq D(k) \cdot dist((x,\epsilon,\tau),M)^{[\frac{N}{2}]-k}, \quad k \leq [\tfrac{N}{2}].$$

Ver apéndice para la demostración de esta desigualdad. Usando esta desigualdad aplicada al flujo $g_v^t$ tenemos que,

$$\| D_x^k\tilde{w}_+ \circ g_v^t(x,\epsilon,\tau) \| \leq D(k) \cdot dist(g_v^t(x,\epsilon,\tau),M)^{[\frac{N}{2}]-k} \quad \text{si } t \to \infty,$$

y como $M = \mathbb{R}^{n+}$ es globalmente exponencialmente inestable, ocurre que cuando $t \to \infty$,

$$\| D_x^k \tilde{w}_+ \circ g_v^t(x,\epsilon,\tau) \| \leq D(k) B^{[\frac{N}{2}]-k} e^{-\beta([\frac{N}{2}]-k)t} \cdot dist((x,\epsilon,\tau),M)^{[\frac{N}{2}]-k}.$$

Denotemos por $\tilde{B}$ a la constante $B^{[\frac{N}{2}]-k}$. Como la equivalencia de las familias la queremos en una vecindad del origen, podemos suponer que

$$dist((x,\epsilon,\tau),M)^{[\frac{N}{2}]-k} < 1.$$

Por lo tanto,

$$\| D_x^k \tilde{w}_- \circ g_v^t(x,\epsilon,\tau) \| \leq D(K)\tilde{B} e^{-\beta([\frac{N}{2}]-k)t}. \tag{14}$$

**2.** El determinante $detX(x,\epsilon,\tau,t)$ decrece no más rápido que una función exponencial cuando $t \to \infty$, es decir,

$$\det X(x,\epsilon,\tau,t) \geq e^{-st}. \tag{15}$$

Por la propiedad (5) sabemos que existe un número real positivo $s$ tal que $\| div\ (F + \tau\tilde{w}_+)(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) \| \leq s$. Usando la fórmula $\frac{dVol}{dt} = \int_{D(t)} div\, v\, dx$ (ver [ARN2]) obtenemos

$$\frac{dVol}{dt} \geq \int_{D(t)} (-s)dx = (-s)Vol(D(t)).$$

Esto es,

$$\int_0^t \frac{dVol}{dt}\frac{1}{Vol(t)}dt \geq (-s)t.$$

Haciendo algunos cálculos concluimos que

$$Vol(D(t)) \geq Vol(D(0))e^{-st}.$$

Por otra parte tenemos la fórmula

$$Vol(D(t)) = \int_{D(0)} det\frac{\partial}{\partial x}g_v^t = \int_{D(0)} detX(x,\epsilon,\tau,t)dx.$$

Usando la última desigualdad del volumen y tomando a $D(0)$ como la bola de radio $\gamma$ centrado en $x_0$, tenemos

$$\int_{B_\gamma(x_0)} detX(x,\epsilon,\tau,t)dx \geq Vol(B_\gamma(x_0))e^{-st}.$$

Por el teorema del valor medio para integrales concluimos

$$\begin{aligned}\int_{B_\gamma(x_0)} detX(x,\epsilon,\tau,t)dx &= detX(\xi,\epsilon,\tau,t)\int_{B_\gamma(x_0)} dx\\ &= detX(\xi,\epsilon,\tau,t)Vol(B_\gamma(x_0))\,, \quad \xi \in B_\gamma(x_0)\end{aligned}$$

Esto implica que

$$detX(\xi,\epsilon,\tau,t)Vol(B_\gamma(x_0)) \geq Vol(B_\gamma(x_0))e^{-st}.$$

Es decir, $detX(\xi,\epsilon,\tau,t) \geq e^{-st}$ y $\xi \to x_0$ cuando $\gamma \to 0$. Así ,

$$\lim_{\gamma\to 0} detX(\xi,\epsilon,\tau,t) = detX(x_0,\epsilon,\tau,t) \geq e^{-st}.$$

En conclusión, $detX(x,\epsilon,\tau,t) \geq e^{-st}$.

**3.** La norma del operador inversa $X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)$ está acotada por una función exponencial cuando $t \to \infty$, es decir, existen constantes positivas $R, r$ tales que

$$\| X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t) \| \leq Re^{(s+r)t}. \tag{16}$$

En efecto, la desigualdad (15) implica que $\frac{1}{detX(x,\epsilon,\tau,t)} \leq e^{st}$. Por otra parte sabemos que

$$X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t) = \frac{adjX(x,\epsilon,\tau,t)^4}{detX(x,\epsilon,\tau,t)}.$$

Recordemos que cada elemento de la matriz adjunta está dado como sigue $(adjx_{ij}) = cofactor\ de\ x_{ij} = (-1)^{i+j}det\ \widetilde{x_{ij}}$.

**Observación.** Si estamos en el caso en que $n_+ = n$, la matriz fundamental $X$ es, para $t$ positiva y grande, la solución del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad \dot{\tau} = 0$$

Entonces $X(x,\epsilon,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}g^t_{Ax}(x,\epsilon,\tau)$. Observemos que la matriz $X$ no depende de $x$, lo cual implica que los elementos de la matriz adjunta de $X$ tampoco dependen de $x$. Por lo tanto, existen constantes positivas $R_0, r$ tales que

$$\| adjX(x,\epsilon,\tau,t) \| \leq R_0e^{rt},$$

[4] La expresión $adj\,X(x,\epsilon,\tau,t)$ denota la matriz adjunta a la matriz $X(x,\epsilon,\tau,t)$.

donde $r > \max\{\sum_{j=1,j\neq m}^{n} Re\lambda_j \mid m = 1, \ldots n\}$. Los mismos argumentos valen cuando $n_- = n$ y cuando $t \to -\infty$.

Para el caso en que existen ambas variedades, $\mathbb{R}^{n_+}, \mathbb{R}^{n_-}$, la matriz fundamental es, para $t$ grande positiva y para los puntos que no están en la variedad estable, la solución del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad \dot{\tau} = 0$$

Esto se debe a que las soluciones de la familia $F + \tilde{w}_+$, con condición inicial fuera de la variedad estable, tienden a la variedad inestable y esto hace que entren en algún momento a la vecindad donde el campo es lineal. En conclusión, para $t$ suficientemente grande,

$$X(x, \epsilon, \tau, t) = \frac{\partial}{\partial x} g^t_{Ax}(x, \epsilon, \tau).$$

Y como la matriz $X$ no depende de $x$, entonces los elementos de la matriz adjunta de $X$ tampoco dependen de $x$. Por lo tanto, existen constantes positivas $R_0, r$ tales que

$$\| \, adjX(x, \epsilon, \tau, t) \, \| \leq R_0 e^{rt},$$

donde $r > \max\{\sum_{j=1,j\neq m}^{n} Re\lambda_j \mid m = 1, \ldots n\}$.

Para el caso en que la condición inicial está en la variedad estable, la variación de las soluciones de la variedad estable respecto a otra solución de esta variedad, es exponencial (ver [PER] pág.110), a saber,

$$\| \, X(x, \epsilon, \tau, t) \, \| \leq K e^{-\alpha t},$$

donde $K$ es una constante positiva y $Re\lambda_j < -\alpha < 0$. Esto implica que sus menores (cofactores de $x_{ij}$) también satisfacen la misma cota. Por lo tanto,

$$\| \, adj \, X(x, \epsilon, \tau, t) \, \| \leq K e^{-\alpha t} \leq K e^{rt}.$$

Donde $r$ es como arriba. La matriz derivada de $D_x X$ satisface la misma cota, $\| \, D_x X(x, \epsilon, \tau, t) \, \| \leq K e^{rt}$. Usando el teorema de la Función Inversa tenemos que

$$\| \, D_x X^{-1}(x, \epsilon, \tau, t) \, \| \leq K e^{(r+s)t}.$$

Sea $R = \max\{R_0, K\}$, entonces

$$\| \, X^{-1}(x, \epsilon, \tau, t) \, \| = \frac{\| \, adjX(x, \epsilon, \tau, t) \, \|}{| \, detX(x, \epsilon, \tau, t) \, |} \leq R e^{(s+r)t}.$$

Por lo tanto $\| X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t) \| \leq Re^{(r+s)t}$.

**4.** Como la matriz inversa de la matriz fundamental no depende de $x$ para los puntos que no están en la variedad estable y para $t$ suficientemente grande, sus primeras $k$ derivadas parciales respecto a $x$ son cero para $k \leq [\frac{N}{2}]$. En consecuencia,

$$D_x^k[X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\cdot \tilde{w}_+(x,\epsilon,\tau)] = X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\cdot D_x^k\tilde{w}_+(x,\epsilon,\tau) \qquad (17)$$

Denotemos por $\tilde{x}$ al punto $(x,\epsilon,\tau)$. Para los puntos que están en la variedad estable tenemos que

$$D_x^k[X^{-1}(\tilde{x},t)\tilde{w}_+(\tilde{x})] = \sum_{\mu+\nu=k} \binom{k}{\nu}^5 (D_x^\nu X^{-1})(\tilde{x},t)(D_x^\mu \tilde{w}_+)(\tilde{x}) \qquad (18)$$

La demostración de estas igualdades se siguen de cálculos elementales.

Para demostrar que el campo $\dot{x} = h(x,\epsilon,\tau)$ es de clase $C^k$ en el punto $(x_0,\epsilon_0,\tau_0) \neq (0,\epsilon_0,\tau_0)$, definimos las siguientes funciones en una vecindad $V_{(x_0,\epsilon_0,\tau_0)}$ que no contenga al origen

$$h_m(x,\epsilon,\tau) = -\int_0^m X^{-1}(x,\epsilon,\tau)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt. \qquad (19)$$

Ahora demostraremos que la sucesión $\{h_m\}$ converge uniformemente respecto a $x,\epsilon,\tau$ en la vecindad $V_{(x_0,\epsilon_0,\tau_0)}$ a la función continua $h(x,\epsilon,\tau)$ de la ecuación (13). Después demostraremos que la sucesión de sus derivadas converge uniformemente a una función $\tilde{h}$ continua. Así concluiremos que $h$ es diferenciable y $dh = \tilde{h}$.

**Caso 1.** La vecindad $V_{(x_0,\epsilon_0,\tau_0)}$ no intersecta la variedad estable.

Sea $\delta > 0$, afirmamos que existe $M > 0$ tal que para todo $m > M$ se satisface

$$\begin{aligned} \| h_m - h \| &= \| \int_m^\infty X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt \| \\ &\leq \int_M^\infty \| X^{-1}(x,\epsilon,\tau) \| \cdot \| \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) \| dt. \end{aligned}$$

[5] $\binom{k}{\nu}$ denota las combinaciones de $k$ en $\nu$.

Como $\tilde{w}_+$ tiene soporte compacto, las soluciones con condición inicial en la vecindad $V_{(x_0,\epsilon_0,\tau_0)}$ entran a la vecindad del campo lineal a partir de un tiempo finito $\mu$. Usando esta propiedad y las desigualdades (14) y (16) tenemos que

$$\| h_m - h \| \leq R\tilde{B} \cdot D(0) \int_M^\mu e^{(r+s-\beta[\frac{N}{2}])t} dt.$$

En consecuencia,

$$\| h_m - h \| < \delta.$$

Definimos las funciones $\frac{dh_m}{dx}$ como sigue:

$$\frac{dh_m}{dx} = -\frac{d}{dx} \int_0^m X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt. \tag{20}$$

Ahora vamos a demostrar que la sucesión de funciones $\{\frac{dh_m}{dx}\}$ converge uniformemente a la función

$$\tilde{h}(x,\epsilon,\tau) = -\frac{d}{dx} \int_0^\infty X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt.$$

Sea $\delta > 0$, afirmamos que existe un natural $M$ tal que para $m > M$ se satisface,

$$\| \frac{dh_m}{dx} - \tilde{h} \| = \| \frac{d}{dx} \int_m^\infty X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt \|$$

Usando (14), (16) y (17) se tiene que $X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))$ está acotada por una función integrable. Con esta propiedad y usando que $\tilde{w}_+$ tiene soporte compacto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\| \frac{dh_m}{dx} - \tilde{h} \| &= \| \int_m^\infty \frac{d}{dx}\Big[X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))\Big]dt \| \\
&\leq \| \int_M^\mu X^{-1}(x,\epsilon,\tau) D_x\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt \| \\
&\leq \int_M^\mu \| X^{-1}(x,\epsilon,\tau) \| \cdot \| D_x\tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) \| \, dt \\
&\leq R\tilde{B} \cdot D(1) \int_M^\mu e^{(r+s-\beta[\frac{N}{2}]+\beta)t} dt.
\end{aligned}$$

Tomando $\mu$ tan cercano a $M$ concluimos que

$$\| \frac{dh_m}{dx} - \tilde{h} \| \leq \delta$$

Análogamente se definen las $k$-ésimas derivadas $\frac{d^k h_m}{dx^k}$ y se demuestra que convergen uniformemente a la función

$$\tilde{h_k}(x,\epsilon,\tau) = -\frac{d^k}{dx^k}\int_0^\infty X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt. \tag{21}$$

**Caso 2.** La vecindad $V_{(x_0,\epsilon_0,\tau_0)}$ está contenida en la variedad estable.

Sea $\delta > 0$, afirmamos que existe $M > 0$ tal que para todo $m > M$ se satisface

$$\begin{aligned}
\| h_m - h \| &= \| \int_m^\infty X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt \| \\
&\leq \int_M^\infty \| X^{-1}(x,\epsilon,\tau) \| \cdot \| \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) \| \, dt \\
&\leq R\tilde{B}\cdot D(0)\int_M^\infty e^{(r+s-\beta[\frac{N}{2}])t}dt.
\end{aligned}$$

Usando la hipótesis $[\frac{N}{2}] - \frac{r+s}{\beta} > 1$, se satisface que $r+s-\beta[\frac{N}{2}] < 0$. Esto implica que

$$\| h_m - h \| < \delta.$$

Ahora demostraremos que la sucesión de funciones $\{\frac{dh_m}{dx}\}$ definidas como en (20), converge uniformemente a la función

$$\tilde{h}(x,\epsilon,\tau) = -\frac{d}{dx}\int_0^\infty X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt.$$

Sea $\delta > 0$ y $\tilde{x} = (x,\epsilon,\tau)$, afirmamos que existe un natural $M$ tal que para

$m > M$ se satisface,

$$
\begin{aligned}
& \| \frac{dh_m}{dx} - \tilde{h} \| \\
= & \| \frac{d}{dx} \int_m^\infty X^{-1}(\tilde{x}, t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(\tilde{x}))dt \| \\
= & \| \int_m^\infty \frac{d}{dx} \Big[ X^{-1}(\tilde{x}, t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(\tilde{x})) \Big] \; dt \| \\
= & \| \int_m^\infty \Big[ (D_x X^{-1})(\tilde{x}, t)\tilde{w}_+(g_v^t(\tilde{x})) + X^{-1}(\tilde{x}, t)(D_x \tilde{w}_+)(g_v^t(\tilde{x})) \Big] dt \| \\
\leq & \int_M^\infty \Big[ \| (D_x X^{-1})(\tilde{x}, t)\tilde{w}_+(g_v^t(\tilde{x})) \| + \| X^{-1}(\tilde{x}, t)(D_x \tilde{w}_+)(g_v^t(\tilde{x})) \| \Big] dt \\
\leq & RD(1)\tilde{B} \Big[ \int_M^\infty e^{(r+s-\beta[\frac{N}{2}])t} dt + \int_M^\infty e^{(r+s-\beta[\frac{N}{2}]+\beta)t} dt \Big]
\end{aligned}
$$

De nuevo usando la hipótesis del teorema $[\frac{N}{2}] - \frac{r+s}{\beta} > 1$, tenemos que $r + s - \beta[\frac{N}{2}] + \beta < 0$. Esto implica que

$$\| \frac{dh_m}{dx} - \tilde{h} \| < \delta$$

Por lo tanto $h$ es diferenciable en todo punto distinto del origen y su derivada es $\tilde{h}$. Si $[\frac{N}{2}] - c > k$, las derivadas $k$-ésimas de las $h_m$ se definen como sigue

$$h_m^{(k)}(x, \epsilon, \tau) = -\frac{d^k}{dx^k} \int_0^m X^{-1}(x, \epsilon, \tau, t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x, \epsilon, \tau))dt \tag{22}$$

y la demostración de que la sucesión de éstas converge uniformemente a $\tilde{h}_k$ se sigue de observar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
& \| \frac{d^k h_m}{dx^k} - \tilde{h}_k \| \\
= & \| \frac{d^k}{dx^k} \int_m^\infty X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))dt \| \\
= & \| \int_m^\infty \frac{d^k}{dx^k}\Big[X^{-1}(x,\epsilon,\tau,t)\, \tilde{w}_+(g_v^t(x,\epsilon,\tau))\Big]\ dt \| \\
= & \| \int_m^\infty \Big[ \sum_{\mu+\nu=k} \tbinom{k}{\nu}(D_x^\nu X^{-1})(x,\epsilon,\tau,t)(D_x^\mu \tilde{w}_+)(g_v^t(x,\epsilon,\tau))\Big]\ dt \| \\
\leq & \sum_{\mu+\nu=k} \tbinom{k}{\nu} \int_M^\infty \Big[ \| (D_x^\nu X^{-1})(x,\epsilon,\tau,t)(D_x^\mu \tilde{w}_+)(g_v^t(x,\epsilon,\tau)) \| \Big] dt \\
\leq & \sum_{\mu+\nu=k} RD(\mu)\tilde{B}\tbinom{k}{\nu} \int_M^\infty e^{(r+s-\beta[\frac{N}{2}]+\beta\mu)t} dt
\end{aligned}
$$

Por la hipótesis del teorema tenemos que $r + s - \beta[\frac{N}{2}] + \beta\mu < 0$.
Por lo tanto,

$$
\| \frac{d^k h_m}{dx^k} - \tilde{h}_k \| < \delta
$$

Para demostrar que $h$ es diferenciable en el origen recurrimos a la siguiente proposición cuya demostración no se dará (Ver [COU]).

**Proposición 5**
*Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua en una vecindad del punto $x = a$ y supongamos que $D_x f$ existe para todo punto $x \neq a$ que está en la vecindad y si además $\lim_{x\to a} D_x f(x) = B$, entonces la derivada $D_x f$ existe también en $x = a$ y $D_x f(a) = B$. Esto es, la derivada es una función continua.*

Finalmente, el campo $h$ es de clase $C^1$ en una vecindad del origen de $\mathbb{R}^{n+p} \times [0,1]$. Este proceso se repite $k$ veces. Así , el campo $h$ es de clase $C^k$.
Observemos que esto se hizo para eliminar la función $\tilde{w}_+$, y para eliminar $\tilde{w}_-$ valen las mismas constantes $s, r, \beta$.

# Apéndice

Ahora vamos a introducir una métrica que mida la distancia de un punto $\lambda$ a un hiperplano.

**Definición 10**
*Sean $z = (z_1, \cdots, z_n)$ y $w = (w_1, \cdots, w_n)$ dos puntos en $\mathbb{C}^n$. Definimos el produnto hermitiano de $z$ y $w$ como $< z, w >= \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j$ y definimos la norma al cuadrado de $z$ como $\| z \|^2 = < z, z >$.*

Es inmediato verificar que se satisfacen las siguientes propiedades para todo $z, w, \lambda \in \mathbb{C}^n$:
1) $< z + w, u > = < z, u > + < w, u >$
2) $< z, w + u > = < z, w > + < z, u >$
3) $< \lambda z, w > = \lambda < z, w >$
4) $< z, \lambda w > = \bar{\lambda} < z, w >$
5) $< z, w > = \overline{< w, z >}$
6) $< \lambda z, \lambda z > = \| \lambda \|^2 < z, z >$
7) $\| \lambda z \| = \| \lambda \| \, \| z \|$
8) $\| < z, w > \| \leq \| z \| \, \| w \|$

**Definición 11**
*Sea $\tilde{z} \in \pi$, esto es, $< \tilde{z}, m > = 0$ donde $m = (m_1, \cdots, m_n)$. Definimos la proyección del vector $(z - \tilde{z})$ sobre $m$ como*

$$Proy_m(z - \tilde{z}) = \frac{< z - \tilde{z}, m >}{\| m \|^2} m$$

*y la distancia del punto $z$ al hiperplano $\pi$ como la norma de la proyección del vector $(z - \tilde{z})$ sobre $m$, esto es,*

$$\begin{aligned} d(z, \pi) &= \| Proy_m(z - \tilde{z}) \| &= \| \frac{< z - \tilde{z}, m >}{\| m \|^2} m \| \\ &= \frac{\| < z, m > \|}{\| m \|} &= \frac{\| z_1 m_1 + \cdots + z_n m_n \|}{\sqrt{m_1^2 + \cdots + m_n^2}} \end{aligned}$$

Observamos que $\| Proy_m(z - \tilde{z}) \| = \| Proy_m(z - \tilde{w}) \|$, para cualquier otro punto $\tilde{w} \in \pi$. Ahora vamos a demostrar que la distancia siempre es la mínima para cualquier punto que tomemos en el hiperplano.

$$\| Proy_m(z-\tilde{z}) \| = \frac{\| < z-\tilde{z}, m > \|}{\| m \|} \leq \frac{\| z-\tilde{z} \| \cdot \| m \|}{\| m \|} = \| z-\tilde{z} \| .$$

**Proposición 6**
*Sea*

$$\dot{x} = Ax + f(x), f(x) = O(| x |) \tag{23}$$

*un campo vectorial diferenciable en la vecindad* $\| x \| < a$. *Supongamos que la colección* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *de valores propiode la matriz* $A$ *es hiperbólica y que todos los valores propios son distintos y satisfacen tener la parte real distinta de cero, es decir,* $Re\lambda_j < 0, j = 1, \ldots m$ *y la parte real de los restantes es mayor que cero, esto es,* $Re\lambda_j > 0, j = m+1, \ldots n$. *Sea* $M = \{(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)\} \cap \{x \in \mathbf{R}^n / \| x \| < a\}$. *Entonces existe una constante* $\nu$ *tal que la acción del flujo de fase* $g_v^t$ *satisface la siguiente cota*

$$dist(g_v^t(x), M) \leq K e^{-\nu t} \cdot dist(x, M)$$

**Demostración.**

Primero demostraremos la proposición en el caso en que $m = n$. Es decir, cuando todos los valores propios de la matriz $A$ tienen parte real negativa.

**Lema 4** *Sea*

$$\dot{x} = Ax + f(x), \; x \in \mathbf{R}^n \tag{24}$$

$$\| x \| < a, \quad a > 0, \quad f(x) = O(| x |).$$

*Sea* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *la colección de valores propios de la matriz* $A$. *Suponemos que la parte real de* $\lambda_j < 0, j = 1, \ldots, n$. *Existen constantes* $K \geq 1, \nu > 0$, *tales que, si* $\varphi(t)$ *es solución de (2), concondición inicial* $x$ *se satisface la desigualdad*

$$| \varphi(t) | \leq K e^{\nu t} | x |, t \geq 0.$$

**Demostración.**

La demostración del lema (1) está basada en la desigualdad de Gronwall y en los dos lemas sencillos que a continuación se presentan sin demostración.

**Lema 5**
*Existen constantes* $\mu > 0, K \geq 1$, *tales que* $| e^{At} | \leq K e^{-\mu t}, t \geq 0$.

**Lema 6**
*Sea* $c > 0$. *Existe* $\delta_1 > 0$ *tal que si* $| x | < \delta_1, | f(x) | \leq c | x |$.

Sea $| x | < \delta$ donde $\delta = \delta_1/k$. Sea $\varphi(t)$ solución de (2) con condición inicial $\varphi(0) = x$ y tal que $| \varphi(t) | < \delta_1$ en el intervalo maximal $(\alpha, \beta)$ (después veremos que esta última desigualdad se satisface para todo $t \geq 0$.

La solución $\varphi(t)$ puede ser expresada como(ver [PER])

$$\varphi(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds,$$

para todo $t$ en el intervalo de definición.

Como $| \varphi(t) | < \delta_1$, para todo $t$ en el intervalo maximal de definición, entonces

$$| \varphi(t) | \leq | e^{tA} | + | \int_0^t e^{(t-s)A} f(\varphi(s)) ds.$$

Por el lema 1,

$$| \varphi(t) | \leq K e^{-\mu t} | x | + K \int_0^t e^{-\mu(t-s)} | f(\varphi(s)) | ds.$$

A su vez, por el lema 2,

$$| \varphi(t) | \leq K e^{-\mu t} | x | + K \int_0^t e^{-(t-s)\mu} C | \varphi(s) | ds.$$

Es decir,

$$| \varphi(t) | \leq e^{-\mu t}(K | x | + KC \int_0^t e^{s\mu} | \varphi(s) | ds).$$

Multiplicando la desigualdad obtenida por el factor $e^{\mu t}$ se tiene

$$e^{\mu t} | \varphi(t) | \leq K | x | + KC \int_0^t e^{s\mu} | \varphi(s) | ds.$$

Ahora haremos uso de la siguiente desigualdad de Gronwall:

**Lema 7** *(Gronwall)*
*Sean $u, v$ funciones continuas no negativas en $[a,b]$ tales que, para $\alpha \geq 0$,*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

*entonces*

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Haciendo uso del lema 3 ($u(s) = e^{s\mu} \mid \varphi(s) \mid$) se tiene que

$$e^{\mu t} \mid \varphi(t) \mid \leq K \mid x \mid e^{\int_0^t KCds}.$$

Así, $\mid \varphi(t) \mid \leq K \mid x \mid e^{(KC-\mu)t}$.

Sea $-\nu = KC - \mu$. Observamos que para que $KC - \mu < 0$ basta con escoger apropiadamente la constante $C$ en el lema 3. Por ejemplo, haciendo $C = \mu/2K$, obtenemos $-\nu = -\mu/2$.

Para terminar sólo nos resta ver que el intervalo maximal de $\varphi$ es $(\alpha, \infty)$. Para ello basta recordar que si $\varphi(t)$ está definida en $(\alpha, \beta)$ y es la solución máxima (única) en la vecindad $u = \{y \in \mathbb{R}^n / \mid y \mid < \delta_1\}$, entonces $\varphi(t)$ tiende a la frontera de $u$ cuando $t$ tiende a $\beta$. Así, si $\beta < \infty$,

$$\delta_1 = \lim_{t \to \beta} \mid \varphi(t) \mid \leq K\delta_1 e^{\beta} < \delta_1$$

lo cual es una contradicción. Así, $\beta = \infty$ y el lema 1 queda demostrado.

Para la demostración en el caso general, basta con observar que la distancia de una solución $\varphi(t), \varphi(0) = x$, de la ecuación (1) a la variedad $M$ está dad por

$$dist(\varphi(t), M) = \max_{k=1,\dots,m} \{\mid \pi_k(\varphi) \mid\}$$

donde $\pi_k$ representa la proyección a la $k$-ésima coordenada.

Así, como

$$\mid \pi_k(\varphi) \mid = \mid \pi_k(e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(\varphi(s))ds) \mid .$$

Sin pérdida de generalidad (dado que los valores propios de la ecuación son distintos) podemos suponer que la matriz $A$ está en su forma diagonal y por consiguiente,

$$\mid \pi_k(\varphi) \mid \leq \mid e^{\lambda_k t} x_k \mid + \mid \int_0^t e^{(t-s)\lambda_k} f_k(\varphi(s))ds) \mid .$$

Donde $f_k$ es la $k$-ésima coordenada del vector $f(\varphi(s))$. Así, existen $K, \mu$ como en los lemas (2) y (3) tales que

$$| \pi_k(\varphi) | \leq K e^{-\mu t} | x_k | + K \int_0^t e^{-\mu(t-s)} | f_k(\varphi(s)) | ds.$$

El resto de la demostración es una repetición con escasas variaciones de la demostración dada por el lema (1).

**Proposición 7**
***Sea $\phi$ una función diferenciable con soporte compacto, acotada por la constante 1 y vale uno en una vecindad del origen. Entonces el campo***

$$\dot{x} = [1 - \phi(x)]A(0)x + \phi(x)[A(\epsilon)x + w(x,\epsilon)], \ \dot{\epsilon} = 0$$

$$x \in \mathbf{R}^n \quad \epsilon \in (\mathbf{R}^p, 0)$$

***se anula únicamente en el origen.***

**Demostración.**
Ya sabemos que en una vecindad del origen en $\mathbf{R}^{n+p}$ éste es el único punto singular, entonces tenemos lo siguiente para $(x, \epsilon)$ dentro de esta vecindad:

Sea $m = \inf\{\frac{|Ax|}{|x|}, x \neq 0\} > 0$. Esto implica que

$$m \mid x \mid \leq \mid Ax \mid.$$

Por otra parte tenemos que

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{| w(x,\epsilon) |}{| x |} = 0.$$

Esto es, para $\epsilon = m/2$ existe $\delta > 0$ tal que para $| x | < \delta$ se tiene que $| w(x,\epsilon) \leq m/2 | x |$. De estas dos desigualdades tenemos que para $x$ tal que $| x | < \delta$,

$$| w(x,\epsilon) | \leq m/2 \, | x | < m \, | x | \leq | Ax |.$$

Por lo tanto, para $x$ dentro de la vecindad de radio $\delta$ y para $\epsilon$ suficientemente pequeña, $| w(x,\epsilon) | < | Ax |$.

Ahora elegimos la función $\phi$ de tal forma que su soporte esté contenido en esta vecindad de radio $\delta$. Entonces demostraremos que el producto punto de los vectores

$$u = \phi(x)[A(\epsilon)x + w(x,\epsilon)] \ \text{ y } \ v = [1 - \phi(x)]Ax$$

es positivo. Con esto estaremos probando que el ángulo entre estos dos vectores es menor que $\pi/2$. Esto es suficiente para probar que el campo no se anula, ya que estamos en la vecindad en la que el único punto singular es el origen y entonces para que existiera otro punto singular, el ángulo entre $u$ y $v$ tendría que ser mayor o igual que $\pi$.

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \phi(x)[1-\phi(x)][(A(\epsilon)x + w)\cdot(Ax)] \\ &= \phi(x)[1-\phi(x)][(A(\epsilon)x)\cdot(Ax) + w\cdot(Ax)] \\ &= \phi(x)[1-\phi(x)][\| A(\epsilon)x \| \cdot \| Ax \| cos\xi + \| w(x,\epsilon) \| \cdot \| Ax \| cos\theta] \\ &= \phi(x)[1-\phi(x)] \| Ax \| [\| A(\epsilon)x \| cos\xi + \| w(x,\epsilon) \| cos\theta] \end{aligned}$$

La perturbación la hacemos lo suficientemente pequeña de tal forma que el ángulo formado entre los vectores $Ax$ y $A(\epsilon)x$ sea menor que $\pi/2$, esto es, que $cos\,\xi > 0$. Usando que $| Ax | - | w(x,\epsilon) | > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \phi(x)[1-\phi(x)] \| Ax \| [\| A(\epsilon)x \| cos\xi + \| w(x,\epsilon) \| cos\theta] \\ &\geq \phi(x)[1-\phi(x)] \| Ax \| [\| A(\epsilon)x \| cos\xi - \| w(x,\epsilon) \|] \\ &> 0 \end{aligned}$$

**Proposición 8**
*Sea $w$ una función diferenciable $N$-plana en el plano coordenado*

$$M = \{(0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_n) \mid x_j \in \mathbf{R}\}$$

*y que tiene soporte compacto. Entonces*

$$\| D_x^k w(x) \| \leq D(k) dist(x,M)^{N-k}.$$

**Demostración.**
Primero observemos que

$$dist(x,M) = \| (x_1,\ldots,x,\epsilon,\tau_j,0,\ldots,0) \| = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq j\}.$$

Como $w$ es $N$-plana en $M$, entonces la podemos expresar como sigue

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha_R'=N-1} x^\alpha f_\alpha^j(x) e_j.$$

Donde $x^\alpha = x^{\alpha_R} \cdot x^{\alpha_M}$ tal que $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ es un multiíndice y $f_\alpha$ es un germen diferenciable. Cualquier monomio $x^\alpha$ lo podemos escribir como $x^{\alpha_R} x^{\alpha_M} = x^\alpha$ ; $\alpha_R, \alpha_M \in \mathbb{Z}_+^n$, donde el monomio $x^{\alpha_R}$ sólo contiene productos de funciones coordenadas que se anulan en $\mathbb{R}^{n+}$, esto es, $x^{\alpha_R} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$ y similarmente $x^{\alpha_M} = x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Y se satisface $\alpha_R + \alpha_M = \alpha$.

Sea $w_j = \sum_{|\alpha_R|=N+1} x^\alpha f_\alpha(x)$ la $j$-ésima componente de $w$. Observemos que

$$\begin{aligned} \| D_x w(x) \| &= \max\{| \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x) | \,/\, i,j = 1,\ldots,n\} \\ &= \| \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x) \|, \text{ para algún } i,j \in \{1,\ldots,n\}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\| \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x) \| \leq \sum_{\alpha_1 - \cdots - \alpha_m = N+1} D \,| x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} |$$

de lo cual tenemos que

$$\| D_x^k \tilde{w}_+(x,\epsilon,\tau) \| \leq D(k) \cdot dist((x,\epsilon,\tau), M)^{N-k}, \quad k \leq N.$$

# Bibliografía



[AR1] - V.I.Arnold.
Geometrical methods in the theory of Ordinary Differential Equations.
Springer Verlag. 177-191.

[AR2] - V.I.Arnold.
Ordinary Differential Equations.

[AGV] - V.I.Arnold, S. M. Gusein-zade, A. N. Varchenko.
Vol.1.1985. Birkhauser.

[BRO] - Th.Bröcker.
Diffrentiable germs and catastrophes. London Math. Soc. Lecture Note Series, No.17, Cambridge Univ. Press,1975.

[CON] - Lawrence Conlon
Differentiable Manifolds a first course.

[COU] - R. Courant
Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, vol. II.

[CHEN] - K.T.Chen.
Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point. Amer.J.Math.85(1963), 693-722.

[HPS] - M.W.Hirsh, C.C.Pugh and M.Shub.
Invariant manifolds, Lecture Notes in Math.583(1977).

[IL-YA] - Yu.S.Ilyashenko and S.Yu.Yakovenko
Finitely-smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields, Russian math. Surveys (1991), 1-25.

[IL-YA2] Yu.S.Ilyashenko and S.Yu.Yakovenko
Finite cyclicity of elementary polycycles in Generic Families. Advances in the Mathematical Sciences, "Concerning the Hilbert 16th problem", vol. 23, 1995, pp.21-95, AMS Publ.

[LAS] - G.Lassalle.
Le théoreme de preparation différentiable en classe p, Ann.Institute Fourier 23:2 (1973), 97-108.

[MAL] - B.Malgrange.
Ideals of differentiable functions, Tata Inst. of Fundamental Research Studies in Math,No.3, Oxford Univ.Press, London 1967.

[NAR] - Raghavan Narasimhan.
Analysis on real and complex manifolds. Vol.1.

[HAR] - P.Hartman.
Ordinary differential equations, Wiley, New York, London, Sidney 1964.

[PAL] - Jacob Palis, Welington de Melo
Geometric theory of Dynamical Systems.

[PER] - Lawrence Perko
Differential Equations and Dynamical Systems.

[TES] - Adriana Ortiz R.
Tesis Formas Normales en Ecuaciones Diferenciales

[WIL] - William M. Boothby
An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry (segunda edición).