34
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA NOCION DE NUDO EN EL BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

ANDRES GOMEZ VALLE

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. GUILLERMO GOMEZ ALCARAZ

JUNIO 1996

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

LA NOCION DE NUDO EN EL BACHILLERATO

realizado por ANDRES GOMEZ VALLE

con número de cuenta 8415434-5 , pasante de la carrera de ACTUARIO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C.	GUILLERMO GOMEZ ALCARAZ
Propietario	Dra.	MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER
Propietario	M. en C.	FRANCISCO STRUCK CHAVEZ
Suplente	Dr.	JAVIER PAEZ CARDENAS
Suplente	Fis.Mat.	VICTOR PEREZ TORRES

Consejo Departamental de Matemáticas
ACT. CLAUDIA CARRILLO QUIROZ

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, todo el agradecimiento, carino y respeto:
Guillermo Gómez Roman
Lucia Valle Aguilar
Todo el agradecimiento, carino y respeto: Por sus cuidados y consejos que tuvieron para conmigo desde siempre y por infundirme siempre a seguir el camino del estudio que por supuesto es el mejor.

A mis hermanos:
Salvador, Jorge y Norma:
Por todo el apoyo incondicional que siempre me brindan.

A la familia Sanchez Arroyo (Tios y primos):
A mis tios por ser una parte importante en mi formación y mis primos por ser un ejemplo para mi.
A todos mis amigos y a toda la gente que de alguna manera siempre me han brindado su amistad.

A Maribel:
Por darme el amor y apoyo que son mi mejor motivación.

A mi hijo Jorgito:
Por ser otra esperanza mas que tengo en la vida, y representar otro motivo mas para seguir adelante.
A MIS SINODALES:
Dra. Maria de la paz Alvarez scherer
M. en C. Francisco Struck Chavez
Dr. Javier Paez Cardenas
Fis.Mat. Victor Perez Torres.
A mi asesor de tesis:
M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz, mi admiración y respeto por su gran dedicación a este tipo de programas de titulación, por su paciencia tenidos para conmigo ya que gracias a el he terminado esta etapa importante de mi vida.
ANDRES GOMEZ VALLE.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, todo el agradecimiento, carino y respeto:
Guillermo Gómez Roman
Lucia Valle Aguilar
Todo el agradecimiento, carino y respeto: Por sus cuidados y consejos que tuvieron para conmigo desde siempre y por infundirme siempre a seguir el camino del estudio que por supuesto es el mejor.

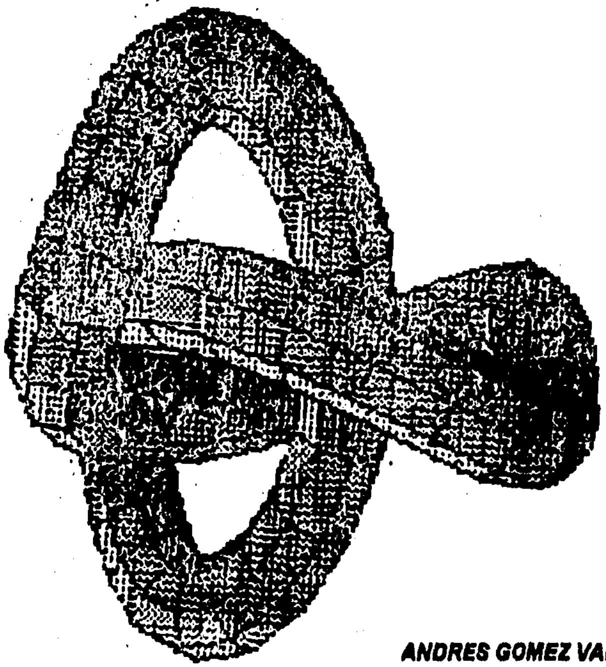
A mis hermanos:
Salvador, Jorge y Norma:
Por todo el apoyo incondicional que siempre me brindan.

A la familia Sanchez Arroyo (Tios y primos):
A mis tios por ser una parte importante en mi formación y mis primos por ser un ejemplo para mi.
A todos mis amigos y a toda la gente que de alguna manera siempre me han brindado su amistad.

A Maribal:
Por darme el amor y apoyo que son mi mejor motivación.

A mi hijo Jorgito:
Por ser otra esperanza mas que tengo en la vida, y representar otro motivo mas para seguir adelante.
A MIS SINODALES:
Dra. Maria de la paz Alvarez scherer
M. en C. Francisco Struck Chavez
Dr. Javier Paez Cardenas
Fis.Mat. Victor Perez Torres.
A mi asesor de tesis:
M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz, mi admiración y respeto por su gran dedicación a este tipo de programas de titulación, por su paciencia tenidos para conmigo ya que gracias a el he terminado esta etapa importante de mi vida.
ANDRES GOMEZ VALLE.

LA NOCION DE NUDO EN EL BACHILLERATO



ANDRES GOMEZ VALLE

INDICE

PRESENTACION

Cuando observamos un nudo en ocasiones nos hemos preguntado: ¿Está realmente anudado?, y si lo está ¿Haciendo un segundo nudo, es posible desatarlo?, ¿Cuándo dos nudos son equivalentes? Los nudos además de servirnos para amarrarnos los zapatos en su aplicación más sencilla, son objeto de un estudio matemático serio, y el problema principal de la teoría de nudos es llegar a saber cuándo dos nudos, que a primera vista son diferentes, son equivalentes.

El presente trabajo va dirijido a los estudiantes de bachillerato y se les presenta de la forma más sencilla posible, la noción de nudo, su definición, representación geométrica, equivalencia de un nudo con otro y algunos métodos sencillos para distinguirlos entre sí, además de algunas aplicaciones a otras disciplinas como a las Ciencias Naturales.

El objetivo es despertar el interés del alumno del bachillerato hacia la matemática pues el contenido de este trabajo puede insertarse como uno o varios tópicos en algunas de las materias de matemáticas.

En el capítulo I (*Muestrario de nudos*) a manera de introduccíon se presenta un muestrario de nudos usuales y nudos matemáticos, el nombre de algunos nudos según su forma o utilidad y algunas convenciones del trazado en el plano de estos, lo cuál será útil para capítulos posteriores.

En el capítulo II (*Nudos equivalentes*) se describe de una manera intuitiva como se puede saber, en el caso de nudos de sencillo diagrama, cuándo dos nudos son equivalentes; también se presenta un muestrario de nudos equivalentes.

En el tercer capítulo (*Invariantes*) se describen algunos métodos sencillos para poder saber distinguir un nudo de otro, es decir, saber distinguir cuando dos nudos son equivalentes; estos métodos son de fácil comprensión para un estudiante de bachillerato, pues estos se deducen casi de manera inmediata del diagrama de nudo.

En el capítulo IV (*Aritmetización de nudos*) se establece una relación de los nudos con los números Naturales y se describen las operaciones fundamentales entre nudos además de su representación por medio de diagramas. Se finaliza este trabajo con algunas aplicaciones de la teoría de nudos a otras disciplinas como la Biología Molecular en particular al ADN y a la Física.

En los apéndices que se encuentran al final de este trabajo se presentan algunas secciones que debieran de ser tratados en el trabajo principal, sin embargo debido a su complejidad para un estudiante de bachillerato se presentan solo como apéndices.

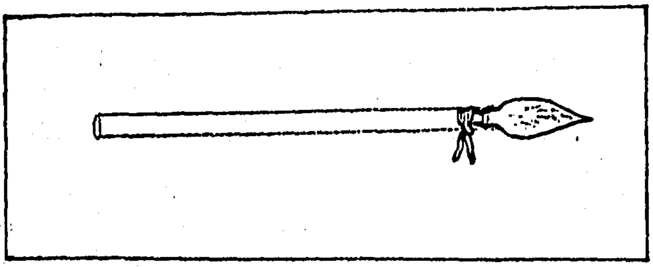
CAPITULO 1

MUESTRARIO DE NUDOS

1.1 INTRODUCCION

Desde que el hombre ha existido, siempre ha buscado la manera de hacer las cosas dificiles de una manera más fácil, así por ejemplo el hombre se dió cuenta que para poder transportar objetos pesados necesitaba de algún otro objeto donde pudiera subirlos y empujando lograr desplazar el objeto hasta el lugar deseado, pronto se dió cuenta que colocando ruedas en el objeto era más fácil de empujar, posiblemente el hombre así inventó la rueda .

¿Pero de los inventos del hombre la rueda será la más antigua? ¡No!, pues se supone que en ese entonces el hombre ya había inventado alguna otras cosas, inventos que para ese entonces eran grandes avances como por ejemplo las lanzas, hachas, *los nudos*, etc.



Lanza anudada de la punta.

¡El nudo es más antiguo que la rueda ! Se supone que para esos momentos el hombre ya tenía la necesidad de poder saber como se anudaba la punta de su lanza.

PRESENTACION

Cuando observamos un nudo en ocasiones nos hemos preguntado: ¿Está realmente anudado?, y si lo está ¿Haciendo un segundo nudo, es posible desatarlo?, ¿Cuándo dos nudos son equivalentes? Los nudos además de servirnos para amarrarnos los zapatos en su aplicación más sencilla, son objeto de un estudio matemático serio, y el problema principal de la teoría de nudos es llegar a saber cuándo dos nudos, que a primera vista son diferentes, son equivalentes.

El presente trabajo va dirijido a los estudiantes de bachillerato y se les presenta de la forma más sencilla posible, la noción de nudo, su definición, representación geométrica, equivalencia de un nudo con otro y algunos métodos sencillos para distinguirlos entre sí, además de algunas aplicaciones a otras disciplinas como a las Ciencias Naturales.

El objetivo es despertar el interés del alumno del bachillerato hacia la matemática pues el contenido de este trabajo puede insertarse como uno o varios tópicos en algunas de las materias de matemáticas.

En el capítulo I (*Muestrario de nudos*) a manera de introduccíon se presenta un muestrario de nudos usuales y nudos matemáticos, el nombre de algunos nudos según su forma o utilidad y algunas convenciones del trazado en el plano de estos, lo cuál será útil para capítulos posteriores.

En el capítulo II (*Nudos equivalentes*) se describe de una manera intuitiva como se puede saber, en el caso de nudos de sencillo diagrama, cuándo dos nudos son equivalentes; también se presenta un muestrario de nudos equivalentes.

En el tercer capítulo (*Invariantes*) se describen algunos métodos sencillos para poder saber distinguir un nudo de otro, es decir, saber distinguir cuando dos nudos son equivalentes; estos métodos son de fácil comprensión para un estudiante de bachillerato, pues estos se deducen casi de manera inmediata del diagrama de nudo.

En el capítulo IV (*Aritmetización de nudos*) se establece una relación de los nudos con los números Naturales y se describen las operaciones fundamentales entre nudos además de su representación por medio de diagramas. Se finaliza este trabajo con algunas aplicaciones de la teoría de nudos a otras disciplinas como la Biología Molecular en particular al ADN y a la Física.

En los apéndices que se encuentran al final de este trabajo se presentan algunas secciones que debieran de ser tratados en el trabajo principal, sin embargo debido a su complejidad para un estudiante de bachillerato se presentan solo como apéndices.

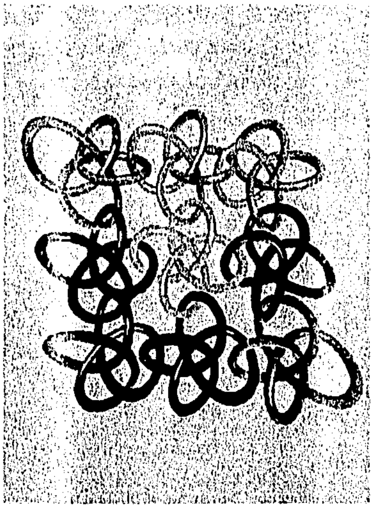


Figure 0.1:

El autor agradece al Laboratorio de Visualización Matemática del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM por su apoyo en algunos aspectos de la elaboración de este trabajo, en particular a Hector Miguel Cejudo Camacho por su ayuda en la edición en computadora, a J.Juan Hernández por la elaboración de los nudos vía computadora y por supuesto a Guillermo Gómez alcaraz por su dirección, consejos y paciencia dedicados al autor.

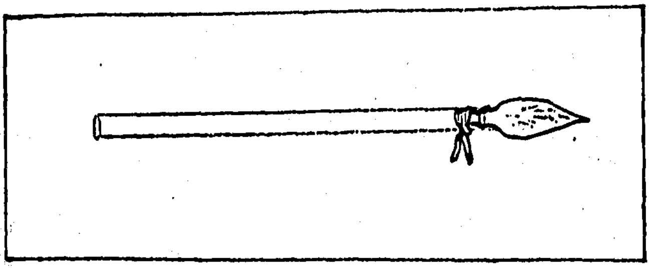
CAPITULO 1

MUESTRARIO DE NUDOS

1.1 INTRODUCCION

Desde que el hombre ha existido, siempre ha buscado la manera de hacer las cosas dificiles de una manera más fácil, así por ejemplo el hombre se dió cuenta que para poder transportar objetos pesados necesitaba de algún otro objeto donde pudiera subirlos y empujando lograr desplazar el objeto hasta el lugar deseado, pronto se dió cuenta que colocando ruedas en el objeto era más fácil de empujar, posiblemente el hombre así inventó la rueda .

¿Pero de los inventos del hombre la rueda será la más antigua? ¡No!, pues se supone que en ese entonces el hombre ya había inventado alguna otras cosas, inventos que para ese entonces eran grandes avances como por ejemplo las lanzas, hachas, *los nudos*, etc.



Lanza anudada de la punta.

¡El nudo es más antiguo que la rueda ! Se supone que para esos momentos el hombre ya tenía la necesidad de poder saber como se anudaba la punta de su lanza.

Así a través de los años el hombre fué perfecionando el uso de los nudos, y durante miles de años el arte de los nudos lo han desarrollado pueblos enteros, y aún en la actualidad los usan:

LOS TEJEDORES
LOS ARTESANOS
LOS TEXTILEROS
LOS PESCADORES
LOS MARINOS
LOS CAMPESINOS
LOS MEDICOS CIRUJANOS
LAS AMAS DE CASA.

Las tejedoras.

1.2 BREVE BOSQUEJO HISTORICO.

1.2.1 ALEJANDRO EL GRANDE Y EL NUDO GORDIANO.

Cuenta la leyenda que *Gordias*, un labrador Frigio fué proclamado como rey al ser mal interpretado un confuso oráculo que decía que aquel que pasara montado en su carro debía de elegirse como rey. Gordias en agradecimiento a Zeus, ordenó contruirle un templo en el que como ofrenda personal le depositó su carro de labranza el cuál poseía un "extraordinario nudo", que unía el yugo y el timón, y que parecia imposible de "deshacer". También se cuenta que aquel que fuera capaz de deshacer aquel "nudo gordiano" dominaria toda Asia. En el año de 334 (A.C), Alejandro de Macedonia, "El Grande" visitó el templo, y al conocer la leyenda, sin pensarlo un solo momento sacó su espada y de un solo tajo partió el nudo, y como es bien sabido, "Alejandro el Grande "conquistó el Asia.

1.2.2 LOS INCAS

Los Incas fueron pobladores de una antigua civilización del actual Perú; esta civilización no tenía un sistema de numeración, pero con el paso del tiempo estos encontraron una manera de poder contar los objetos, por ejemplo se cuenta que cuando llevaban a pastorear a sus animales ellos no sabían si en verdad regresaba el mismo número de animales que se habian llevado, debido a esta necesidad desarrollaron una técnica que les permitió solucionar este problema así pues inventaron el llamado *Quipu* .

El quipu consistía de una serie de nudos hechos con una cuerda, y por medio de el sabían cuantos animales tenían, cuantos soldados, incluso se dice que en el quipu se guardaban poemas épicos; observe en la figura de abajo que el quipu consiste de un cordel de donde cuelgan cuerdecillas (de colores) con nudos espaciados.

El quipu.

1.2.3 LOS NUDOS EN LOS SIGLOS XIX Y XX.

El estudio serio de los nudos se remonta 2268 años después de que Alejandro el Grande "deshiciera" el nudo Gordiano, en un congreso de Física Niels Bohr impresionó a los cientificos de su época al explicar gráficamente importantes descubrimientos sobre la estructura atómica y sus fuerzas cuánticas, mediante dos cuerdas colgadas de unas tijeras retorsiendo, anudando y trenzando las cuerdas para comprender los complejos grupos de simetría y rotaciones posibles en el espacio. ¡Esto no es broma ! Los movimientos de las tijeras de Niels Bohr están relacionados nada menos que con las nada sencillas simetrías con las que se explican y predicen las partículas subatómicas y sus sorprendentes características.

En el año de 1867, William Thomson (Lord Kelvin) se imaginó que los atómos estaban anudados [8],[9], y que los atómos se movían a lo largo de trayectorias anudadas y que la estabilidad de la materia podía ser explicada a través de la estabilidad de los nudos, es decir por su naturaleza topológica y que la variedad de los diferentes elementos químicos podían ser clasificados por la variedad de los diferentes nudos.También se explicaba que la habilidad de los átomos a transformarse en otros átomos, en altas energías, podia ser relacionada a los cortes y recombinación de nudos; Kelvin comisionó a Kirkman, Litle y Tait para que compilaran tablas de nudos con la esperanza de obtener una clasificación de los átomos; por 20 años la teoría de Kelvin fué muy tomada en cuenta.

Aún así el primer estudio significante con respecto a los nudos es atribuido a Gauss (1877) quién en sus estudios de electromagnetismo desarrolló una fórmula para el número de enlazamientos L_k [4]; incluso él introdujo la idea de diagrama de nudo como la proyección plana de un nudo.

En 1900 Peter G. Tait [8], [9], elaboró un estudio extensivo de los nudos, los clasificó y enumeró de acuerdo al número de cruces de la proyección del nudo en el plano, también esbozó una serie de conjeturas que, en algunos casos, han tenido que esperar más de 80 años para ser demostradas o refutadas, aún así la clasificación de los nudos sigue siendo un problema abierto.

En 1920 Kurt Reidemeister introdujo algunos "movimientos bidimensionales" que simplifican el estudio de los nudos.

En 1928 James W. Alexander descubrió un invariante el cual ahora se llama "El Polinomio de Alexander" el cuál da información sobre cuándo dos nudos son diferentes o iguales según su representación algebráica [14].

En 1984 Vaughan Jones descubrió *El Polinomio de Jones* V(t) [15], un invariante más fino que generaliza el de Alexander, incluso es más eficaz que este, pues para nudos diferentes con el mismo Polinomio de Alexander este encuentra diferentes Polinomios de Jones; Jones lo descubrió cuando llevaba a cabo sus investigaciones sobre ciertas estructuras que aparecen en Física Estadistica, las cuales han servido como base para fundamentar una Teoría

Unificada de la Física, el Polinomio de Jones fué reivindicado más tarde por Witten utilizando *Teorías cuánticas de campos topológicos.*

Actualmente el estudio de los nudos es una complicada teoría matemática de naturaleza topológica en donde se citan disciplinas como Geometrías avanzadas, Combinatoria y Teoría de Grupos. La mayoria de los teoremas descubiertos son muy recientes y aún existen conjeturas que no se han podido demostrar o refutar. Aún así ningún polinomio hasta ahora resuelve el problema de diferenciar dos nudos cualesquiera.

Así pues el estudio de los nudos tiene gran relevancia pues el estudio de las estructuras topológicas anudadas en el espacio tridimensional deben tener algunas "claves" que contribuyan a explicar porqué la materia y la energía se organizan como lo hacen [3], por ejemplo por qué la vida surge de complicadas moléculas de ADN muy anudadas y por qué el ADN circular es anudado y desanudado en diferentes tipos de nudos por la acción de ciertas enzimas.

En México la Teoría de Nudos fué introducida por el prof. Torres y desarrollada con exitos por matemáticos como González Acuna F., Gómez Larranaga J.C, Prieto C, Eudave,... etc.

1.3 NUDOS DE MARINOS

Todo el mundo sabe la experiencia que tienen los Marinos en hacer nudos, que según ellos son fácil de realizar; veamos pues algunos nudos de marinos.

1.3.1 Nudo plano.

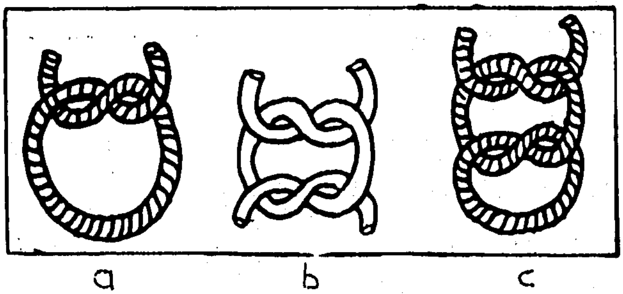
Este nudo se utiliza para terminar una fronda, y en Medicina para un vendaje o un torniquete, ya que este nudo no abulta.

Forma de hacerlo.

a) Tomar los extremos y pasar uno alrededor del otro.

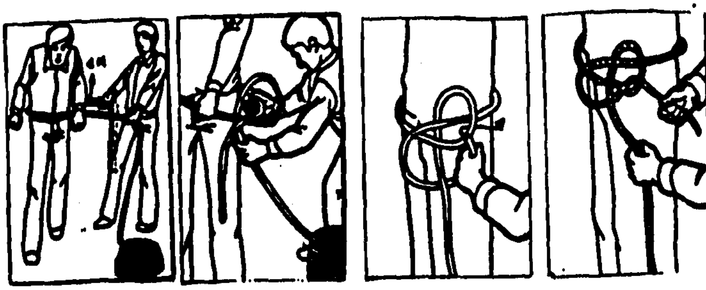
b) Reunir los dos extremos formando un bucle. Pasar por el bucle un extremo y después el otro.

c) Volver a meter dentro del bucle y apretar.



1.3.2 Nudo de amarre.

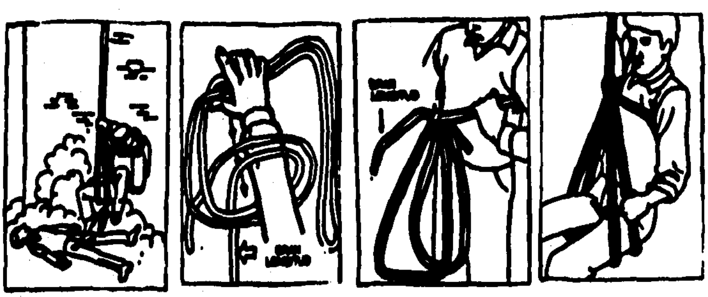
Este nudo sirve por ejemplo para atar a una persona que va a entrar a un lugar profundo de tal manera que despues pueda ser devuelto al exterior.



Nudo de amarre.

1.3.3 Nudo de doble caja.

Este nudo sirve para subir o bajar a una persona asegurandola por las condiciones del lugar, como por ejemplo en una fosa.



Nudo de doble caja.

1.3.4 Nudo de vuelta con dos bucles.

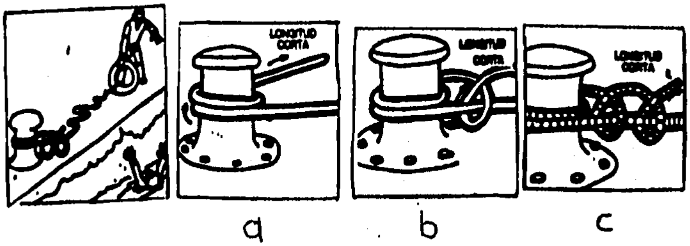
Este nudo sirve como para rodear un objeto, es fácil de realizar y permite tener las manos libres para un hipotético lanzamiento de un salvavidas.

Forma de hacerlo.

a) Dar dos vueltas en el objeto que debe de estar fijo, dejando un extremo corto y el otro largo.

b) Pasar el extremo corto haciendo un bucle que atrape el extremo más largo.

c) Repetir la operación: hacer un bucle con el extremo corto de tal forma que atrape a el grande y el extremo pase por el interior de los dos bucles.



Nudo de vuelta con dos bucles.

1.3.5 Nudo de media llave de encapillar.

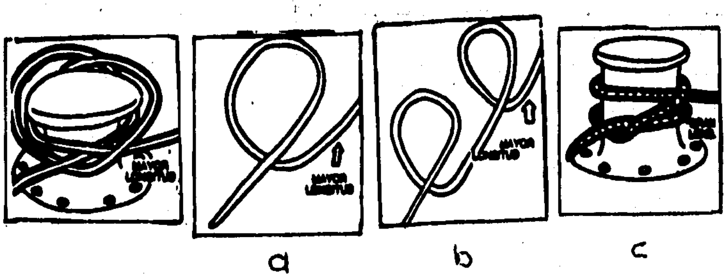
Sirve para fijar rápidamente en un objeto fijo una cuerda.

Forma de hacerlo:

a) Formar un bucle como se muestra en el dibujo.

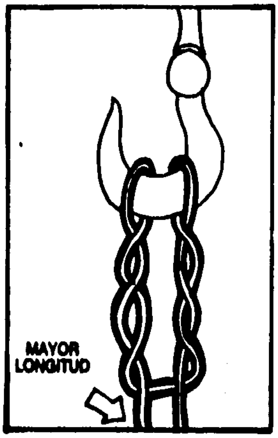
b) Forme otro bucle con la parte más larga de la cuerda.

c) Pase el bucle de mayor longitud por el interior del segundo bucle, colocarlos alrededor del objeto a sujetar y estirar.



1.3.6 Nudo de boca de pez.

Sirve para fijar una cuerda a un gancho a falta del aparato correspondiente (una anilla por ejemplo).



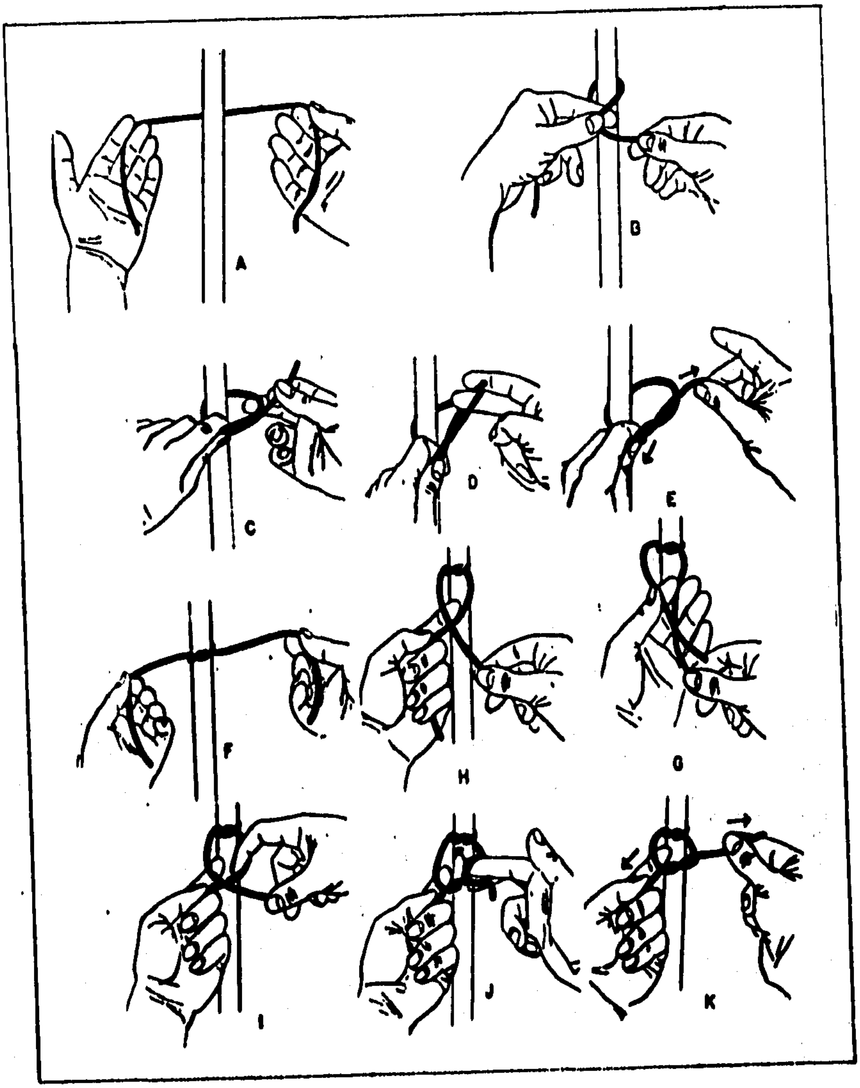
1.4 LOS NUDOS EN EL CAMPO DE LA MEDICINA.

Todos sabemos que los Médicos Cirujanos utilizan nudos para suturar las heridas; en el campo de la medicina todos los nudos deben de hacerse cuadrados, de lo contrario pueden aflojarse. En un nudo cuadrado, las lazadas se hacen de tal manera que los dos extremos de sutura caigan bajo la misma asa.

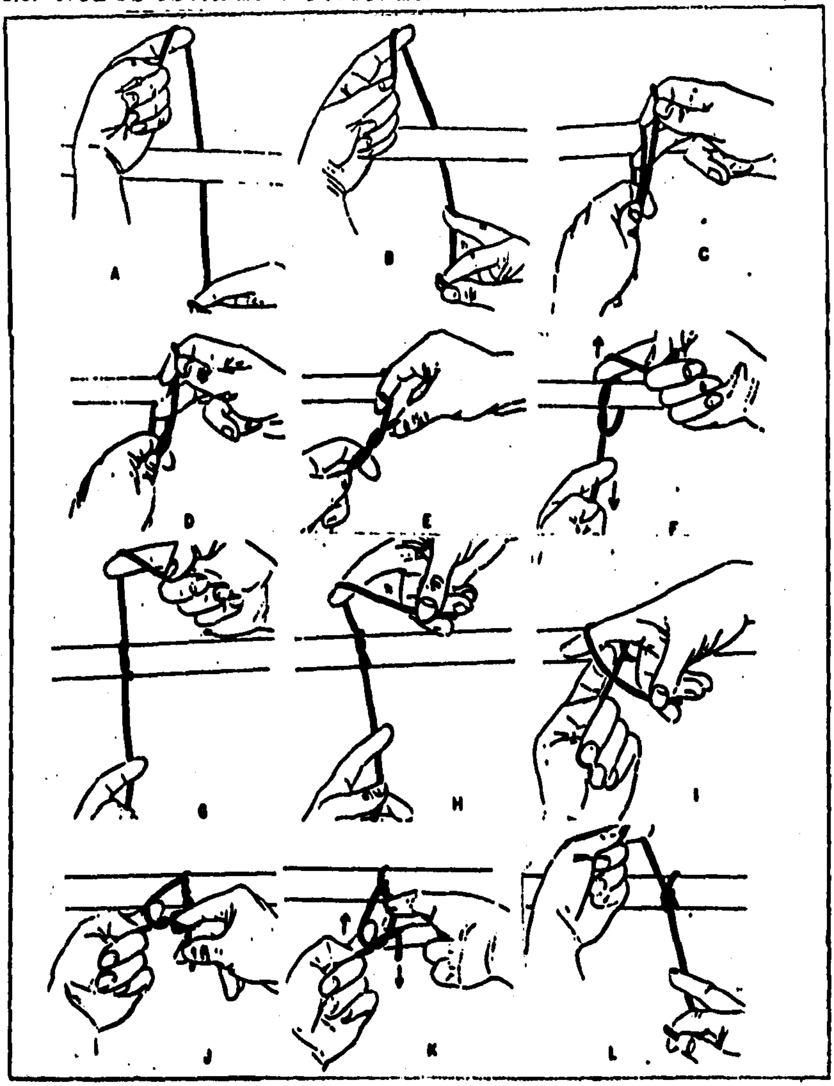
Existen dos formas de anudar: con dos manos y con una mano, generalmente el Médico principiante utiliza el nudo de Cirujano con las dos manos, el cuál es recomendable solo mientras se aprende a anudar.

También hay otro nudo, el cuál es bastante común entre ellos, este es el nudo Rectángular. se considera que un nudo está bién hecho cuando éste ni la hebra se retuirsen al anudarlo. El nudo rectangular está constituido por dos mitades, sí la primera no es plana al enroscarse puede debilitarse el hilo, sí la segunda se retuerse, puede hacer que se afloje la primera aunque se haya apretado bien.

CONSTRUCCION DELNUDO RECTANGULAR EN FORMA LENTA:



CONSTRUCCION DEL MISMO NUDO RECTANGULAR EN FORMA RAPIDA:



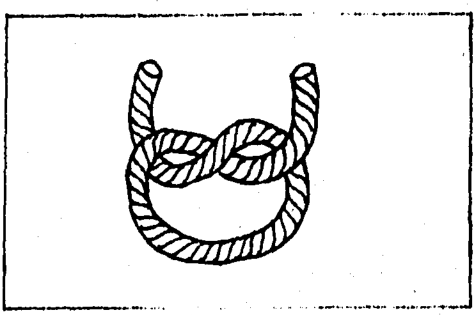
1.5 NUDOS USUALES O COMUNES.

En muchos momentos de nuestra vida uno está familiarizado con por lo menos los nudos más simples, por ejemplo el de moño y el del ocho los cuáles se tratarán posteriormente. Así pues *nudos usuales* o *nudos comunes* son todos aquellos nudos que se nos presentan en la vida cotidiana, este tipo de nudos tienen la característica de que los *extremos* están *sueltos*. Todos los nudos vistos hasta ahora son ejemplos de nudos usuales, pero mejor veamos un muestrario de nudos usuales, nudos que son utilizados en la vida cotidiana, por ejemplo día a día nos amarramos las agujetas de los zapatos y para hacerlo tenemos que realizar algunos nudos. Por lo general el nombre asignado a un nudo se debe a la forma que tiene o a la utilidad que presta:.

MUESTRARIO DE NUDOS USUALES

1.5.1 Nudo simple Izquierdo (De moño simple).

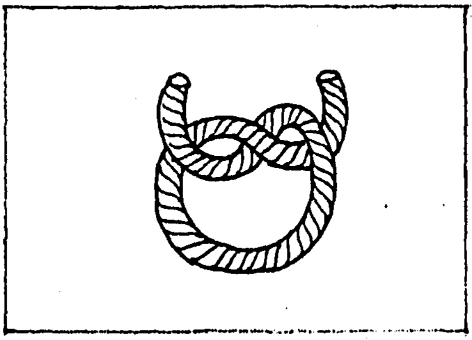
Este nudo también llamado nudo de moño es el nudo que más usamos en la vida cotidiana, por ejemplo para amarrarnos las agujetas de los zapatos.



Nudo izquierdo (de moño simple).

1.5.2 Nudo simple Derecho.

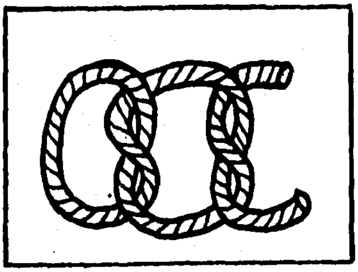
Este nudo es el mismo que el anterior y lo describimos aquí por razones que mas adelante se justifican.



Nudo derecho.

1.5.3 Nudo rectangular Izquierdo-Izquierdo (O de mujer).

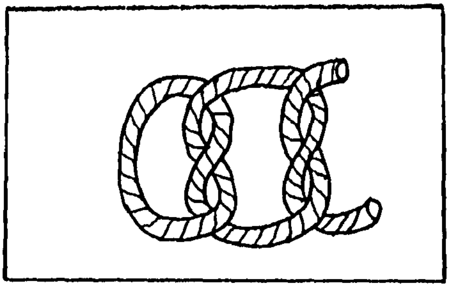
También llamado nudo de moño doble, este nudo es un nudo que resulta de hacer dos nudos izquierdos.



Nudo izquierdo-izquierdo.

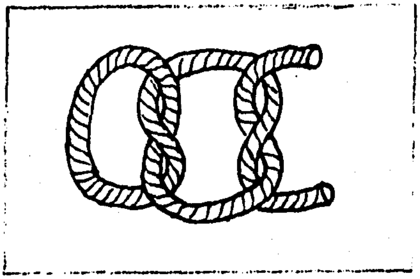
1.5.4 Nudo rectangular Derecho-Derecho .

Este nudo es un nudo que resulta de hacer dos nudos derechos.



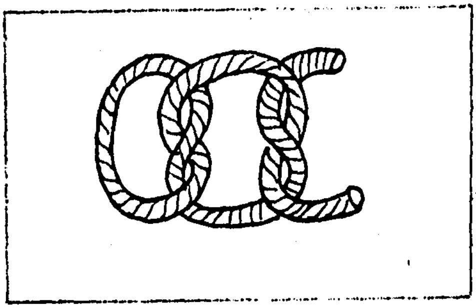
1.5.5 Nudo rectangular Izquierdo-Derecho (O recto invertido).

Este nudo resulta de la combinación de dos nudos, un derecho y un izquierdo respectivamente.



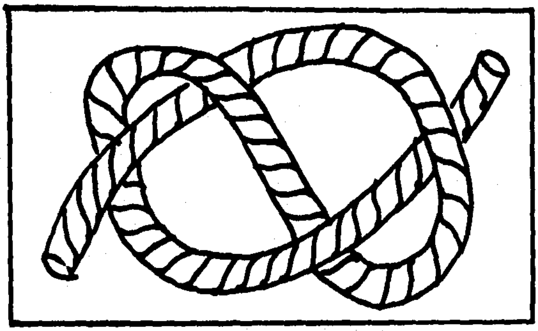
1.5.6 Nudo rectangular Derecho-Izquierdo.

Este resulta de realizar dos nudos, un derecho y un izquierdo respectivamente.



1.5.7 Nudo del Ocho.

Se le llama así porque su forma es similar al número ocho, hay un ocho derecho y un ocho izquierdo.



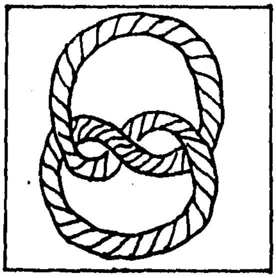
1.6 NUDOS ABSTRACTOS O NUDOS MATEMATICOS.

Pero los nudos no solo sirven para amarrar objetos, son también tema de investigación matemática seria .

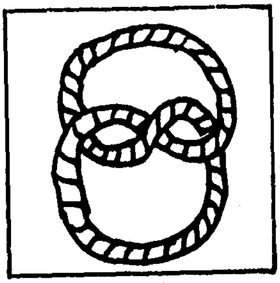
Si a un nudo usual se le unen los extremos aparece este como un buen modelo matemático, el nudo se convierte por definición en un nudo matemático (o nudo abstracto).

Como en estos nudos, ya no existen extremos sueltos, estos nudos son curvas cerradas en el espacio. A estos los matemáticos sí los consideran verdaderos nudos y les llaman nudos matemáticos, nudos abstractos o simplemente "*nudos*".

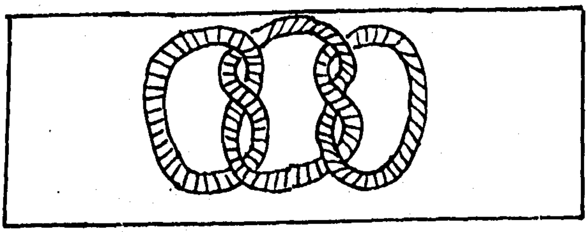
Pero otra vez echemos un vistazo sobre un muestrario de nudos matemáticos, comenzando primero con algunos de los nudos presentados previamente salvo que ahora ya convertidos en nudos matemáticos, es decir sin sus extremos sueltos:



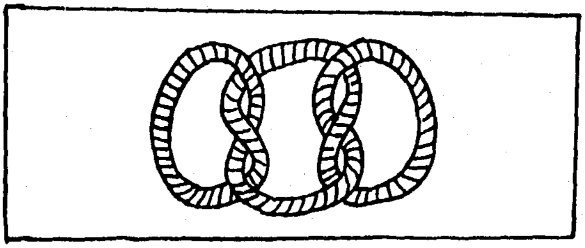
a) nudo izquierdo.



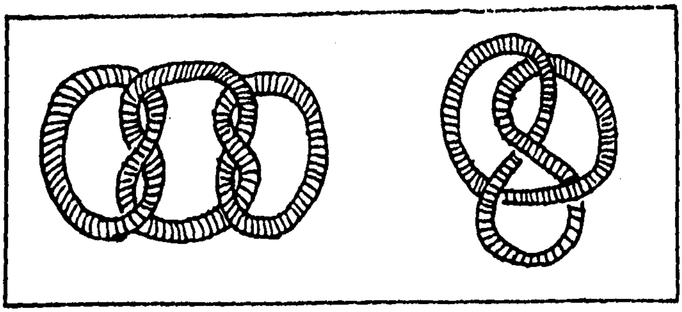
b) nudo derecho.



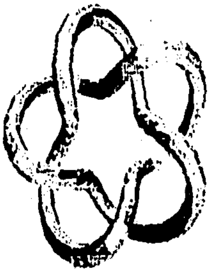
c) nudo rectángular izquierdo-izquierdo.



d) nudo rectángular izquierdo-derecho.



e) nudo rectángular derecho-izquierdo. f) nudo del ocho.



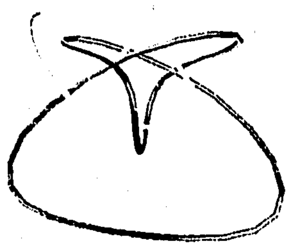
g) Trébol de cinco hojas.

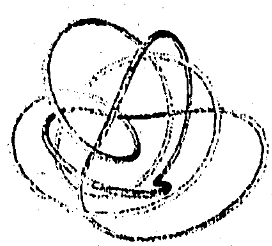
1.7 ENLACES.

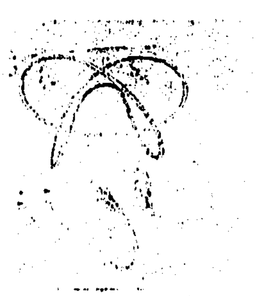
También en la vida cotidiana nos encontramos y hemos usado nudos entrelazados, por ejemplo algunas cadenas y pulseras que usamos en el cuello o muñeca, sin importar el material de que estan hechas, las cadenas usadas en las industrias, las amas de casa tejedoras de suéteres con hilo de estambre, etc.

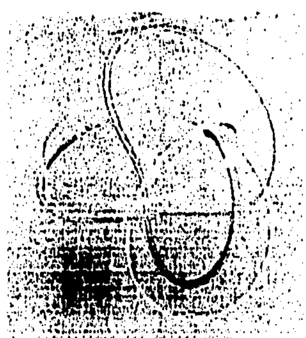
MUESTRARIO DE ENLACES:

1.7.1 Enlaces con dos nudos.

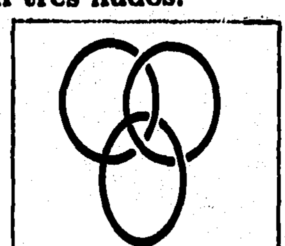






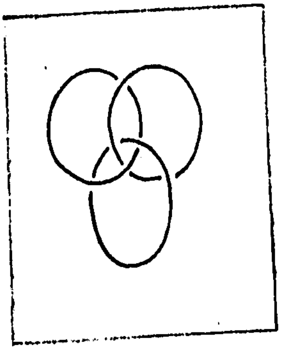


1.7.2 Enlaces con tres nudos.



Anillos de Borromeo.

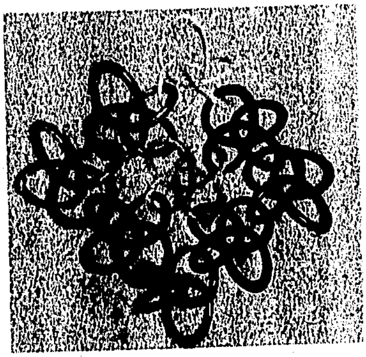
Los anillos de Borromeo se caracterizan por su extraña disposición: los tres aros están entrelazados, sin embargo al quitar uno de ellos se safan los otros dos.

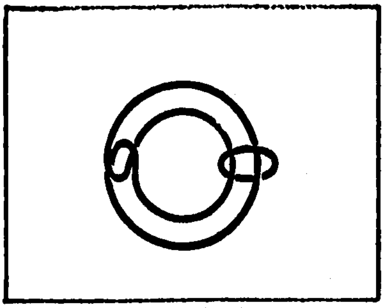


Anillos de Ballantine.

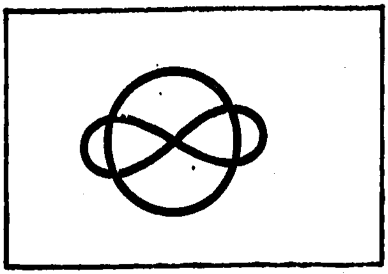
Observe que en estos enlaces el deshacer un nudo no necesariamente zafa a los otros dos, es decir no como los de Borromeo.

1.7.3 Otros enlaces.





Whitehead.



1.8 DEFINICIONES DE NUDO Y ENLACE.

De todo lo anterior podemos resumir y concluir que :

DEFINICION: DE NUDO es una curva unidimensional, trazada en el espacio tridimensional, la cuál empieza y termina en el mismo punto (es cerrada) y además esta no se intersecta con ella misma.

DEFINICION: DE ENLACE es un conjunto de dos o más nudos, los cuales no se intersectan entre sí.

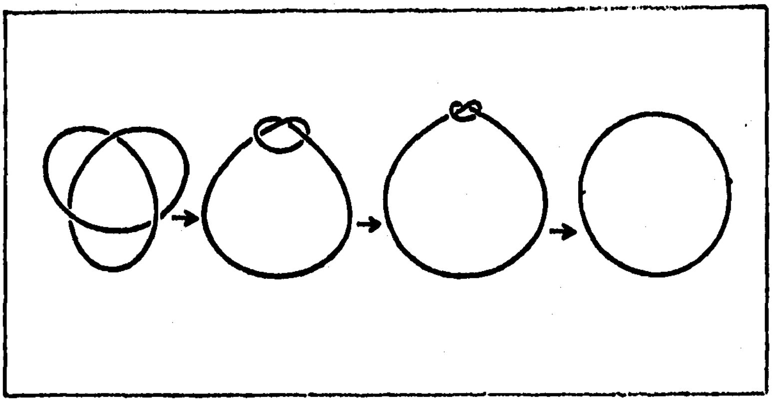
Hasta este momento ya sabemos lo que es un nudo, pero usualmente dibujamos en el plano, entonces ¿Cómo trazar un nudo en el plano?

1.9 COMO TRAZAR UN NUDO EN EL PLANO.

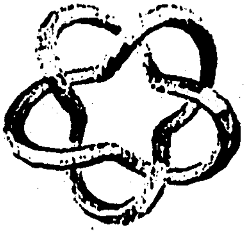
Si observamos un nudo, como por ejemplo el nudo Trébol o cualquier otro nudo, podemos observar que para dibujarlo se tienen que tomar ciertas convenciones:

Para describir un nudo N consideramos una proyección plana de N en algún plano del espacio de tres dimensiones, el cual es donde el diagrama vive.

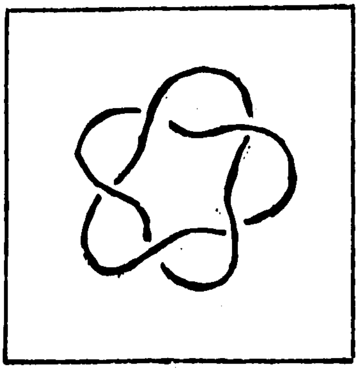
Primero, las curvas anudadas unidimensionalmente no son nudos matemáticos, para ver esto imaginese a un insecto unidimensional, el cual se arrastra por una curva del espacio unidimensional, el insecto no sabría distinguir cuando la curva pasa por encima o por abajo de el:



Para imaginarnos a un nudo en el espacio tridimensional solo tenemos que engrosar la curva:

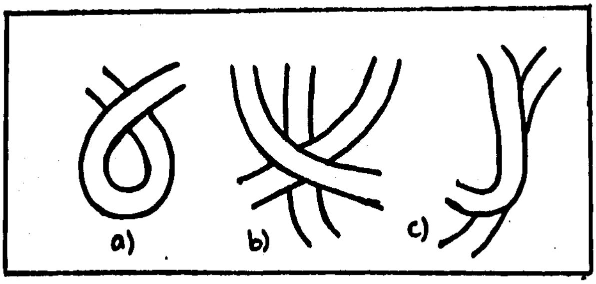


Esta curva la podemos dibujar en el plano, pero trazandola sin que se intersecte ella misma:



Inversamente, si quisieramos meter la curva dibujada en el plano en un tubo flexible lo que obtendríamos sería una curva en el espacio tridimensional:

Se observa que la figura dibujada de un nudo en el plano puede indicar aparentemente muchos puntos de intersección, pero moviendo el punto de vista desde el que se observa a cada punto aparente de intersección, lo más que se ve son puntos de cruce doble (entendiendo por cruce, una intersección solo aparente) .



Intersecciones aparentes: a) doble, b) triple, c) infinita.

Para evitar cruces múltiples adoptaremos la siguiente convención:

La parte de la curva que pasa por encima (arriba) de otra parte del nudo se dibuja en forma continua, y por consecuencia la parte que pasa por abajo se dibuja en forma discontinua, esa discontinuidad se presenta precisamente en el punto de cruce de las dos curvas. Así, a cualquier representación en el plano de un nudo con las tres características apuntadas: arriba, abajo y cruces dobles se le llama *Diagrama de Nudo.*

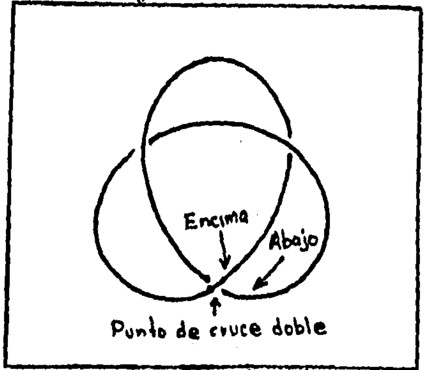
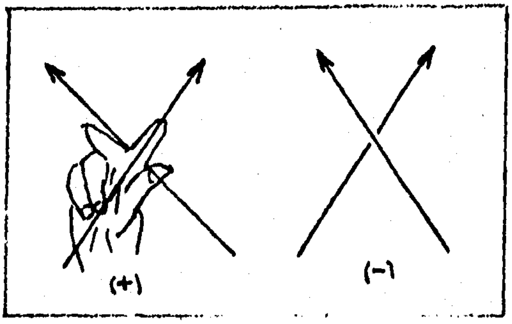


Diagrama de nudo.

Dado un diagrama de nudo orientado, podemos asignar signos (+) y (-) a cada cruce según las siguientes formas locales del cruce, esto es:



Esta convención está determinada por la regla de la mano derecha para orientaciones en el plano de objetos de tres dimensiones como se indica en la figura donde el cruce positivo coincide con las direcciones de los dedos índice y medio.

Convenciones para determinar el signo de cada cruce:

i) Dar una dirección arbitraria al nudo o enlace.

ii) En cada cruce, colocar el dedo índice sobre, y en la dirección de la parte del nudo que pasa por ancima.

iii) Sí el dedo medio apunta en dirección de la flecha del nudo de abajo, el cruce es (+).

Sí el dedo medio apunta en sentido opuesto al cruce de abajo, el cruce es (-).

Observaciones:

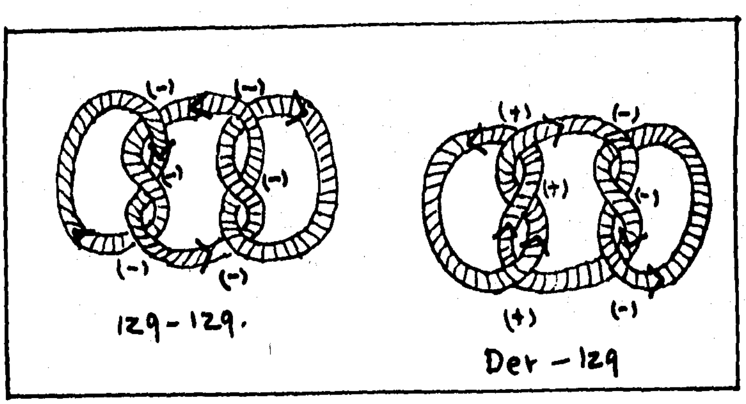
1.- Para un diagrama de nudo, cualquier orientación del nudo determina el mismo signo en cada cruce; porque el inverso de la orientación de un nudo, invierte la orientación de ambas direcciones en cada cruce, así el signo de cada cruce queda inalterado.

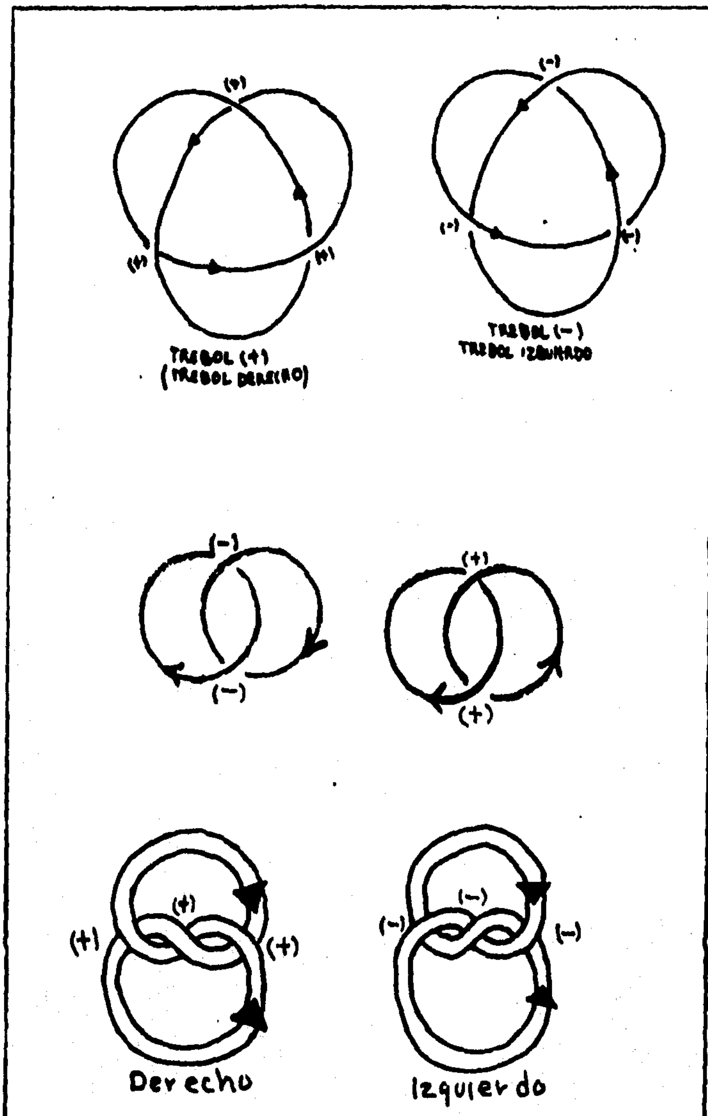
2.- Para un enlace, dado un cruce formado por diferentes componentes del enlace, sí se invierte la orientación de una de las componentes, se invierte el signo de cada cruce.

Convención:

Al nudo que tenga solo cruces positivos (+) le llamaremos *nombre* derecho, y al nudo con puros signos negativos (-) le llamaremos *nombre* izquierdo, por ejemplo al nudo Trébol que tiene puro signo de cruce (+) le llamaremos "*Trébol derecho*".

Veamos algunos ejemplos:




TREBOL (+)
(TREBOL DERECHO)
TREBOL (−)
Derecho
Izquierdo

CAPITULO 2

NUDOS EQUIVALENTES

Cuando observamos a un nudo en ocasiones nos hemos hecho las siguientes preguntas : ¿Está realmente anudado?, ¿Haciendo un segundo nudo se podrá deshacer el primero?, ¿Cuándo dos nudos son equivalentes?

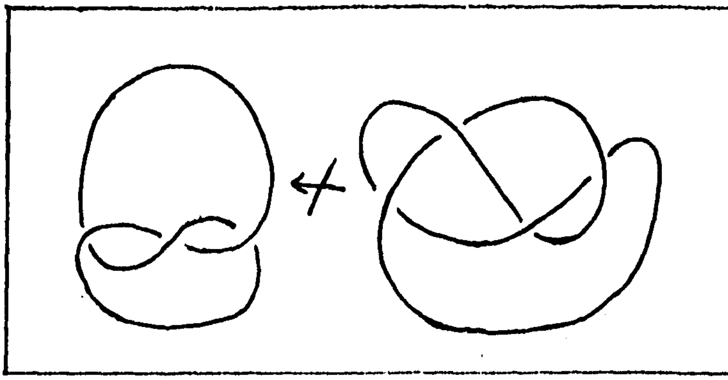
Esta última pregunta es considerada como el problema principal de la teoría de nudos: ¿Cómo distiguir cuándo dos nudos son diferentes?

Sabemos por la experiencia cotidiana, que con un poco de paciencia podemos tomar un nudo usual, manipularlo por sus extremos y desanudarlo o llevarlo a la forma de otro nudo; pero, ¿De qué manera se podrían formalizar estos conceptos intuitivos?

La Teoría de Nudos busca proporcionar métodos y modelos para saber cuando dos curvas son diferentes (o equivalentes) despreciando diferencias "superficiales" como tamaño, color e incluso forma.

2.1 COMO DESATAR UN NUDO.

Tomemos dos nudos, por ejemplo el nudo de moño y el del ocho, podemos mostrar físicamente que, partiendo de uno nunca podremos transformarlo en el otro sin manipular sus extremos (caso de nudos usuales), es decir, manteniendo fijos los extremos o considerando que los extremos están prolongados indefinidamente, o más aún: con los extremos unidos (caso de nudos matemáticos).



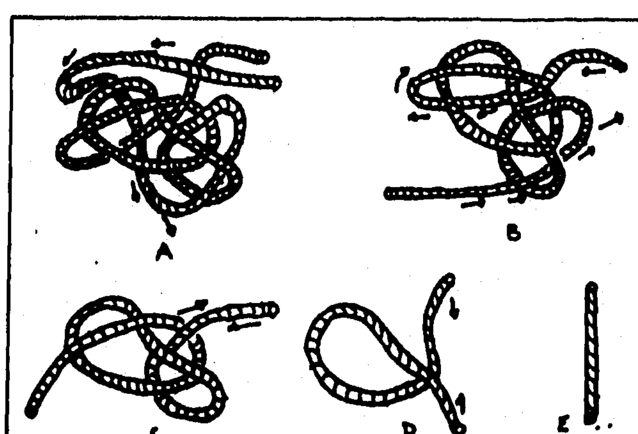
El problema que se considera es el de mostrar cuando dos nudos y muchos más son distintos. Una manera física (y no formal) es el de tomar una cuerda formar un nudo y mostrar que por mucho que se manipule, nunca se puede llevar al otro nudo.

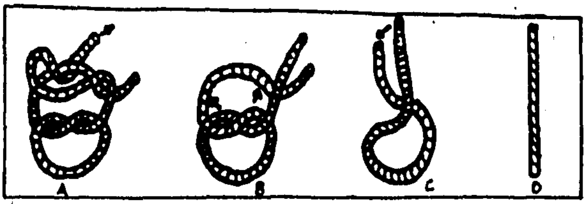
También muy a menudo, en la vida diaria nos hemos encontrado que tenemos que desatar un nudo. Por ejemplo los criadores de cerdos necesitan de atar a estos a un árbol y cuando regresan a desatarlos se dan cuenta con que ahora para desatar al cerdo tienen que desatar un nudo complicado, un nudo que a primera vista parece imposible de desatarlo, pero con paciencia por experiencia, se sabe que sí es posible desatarlo, pues sus cabos están sueltos, por ser un nudo usual.

Podemos pues decir cuándo un nudo usual se puede desatar o no.

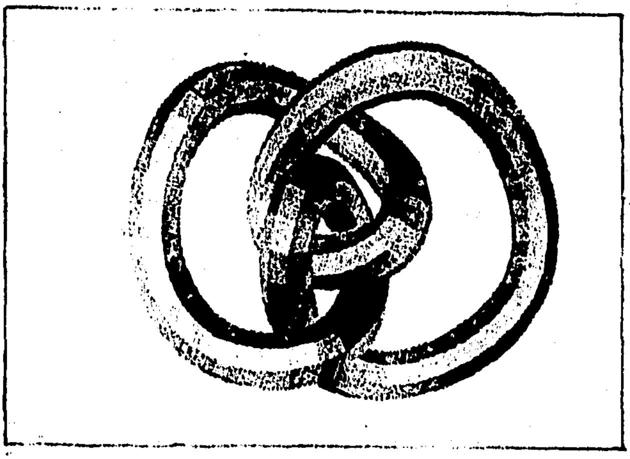
Se dice que un nudo usual es desatable sí y solo sí es posible llevarlo a la forma de una recta.

Veamos algunos ejemplos de nudos desatables.





Pero los nudos con los extremos unidos no se pueden llevar a una recta .



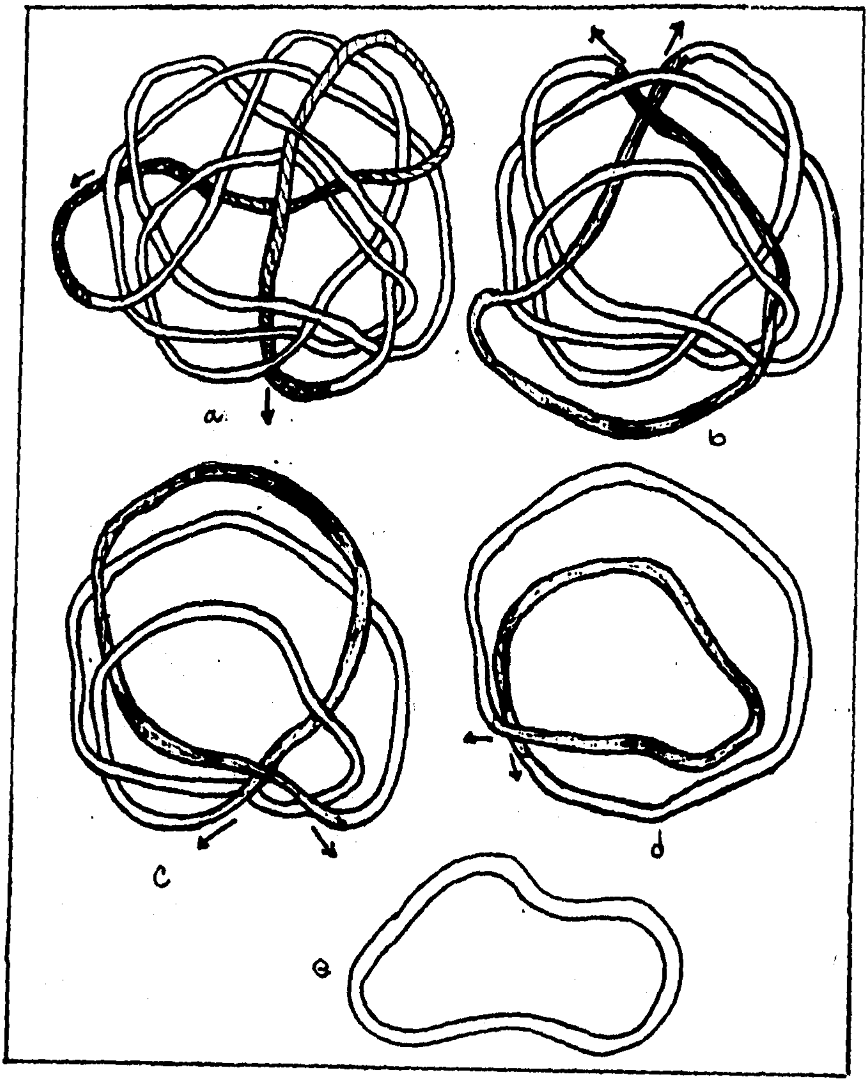
Estamos listos para poder dar una definición, la cual se deduce en forma natural como consecuencia de los ejemplos anteriores.

Pero antes daremos una definición útil que servirá como base para nuestra definición de nudo desatable.

DEFINICION: Al nudo matemático en forma de circunferencia se le llama nudo Trivial, también considerada como un nudo sin anudar.

DEFINICION:
Un nudo matemático es desatable sí y solo sí es posible llavarlo a la forma de un nudo Trivial.

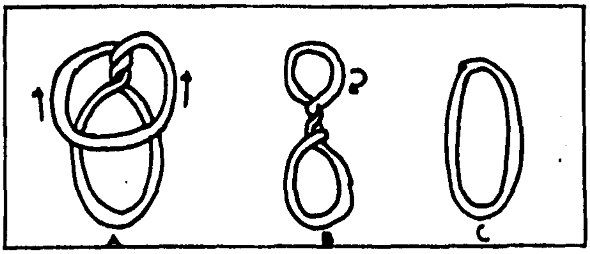
Ejemplo:

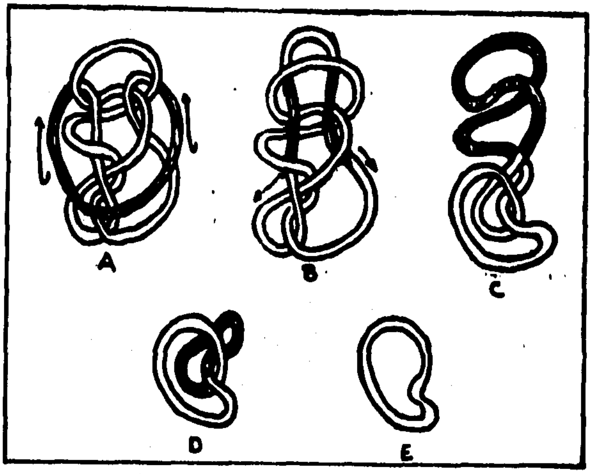


Se ha marcado la parte del nudo que hay que desplazar aproximadamente en dirección de las flechas, es decir el siguiente dibujo del nudo es el dibujo del nudo actual menos la parte marcada (desanudada) de este. Nótese que el nudo final es el nudo Trivial.

Hemos visto que el nudo matemático que al principio aparentemente era un montón de nudos, los cuales se veían muy enredados y por lo tanto difícil de desanudar es desatable, es decir lo pudimos llevar al nudo Trivial.

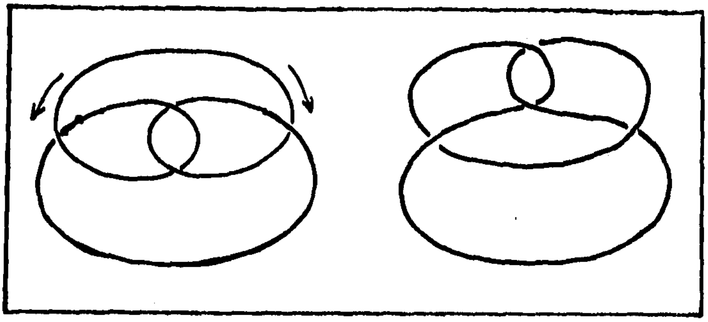
Veamos algunos otros ejemplos de nudos que se pueden desanudar:





2.1.1 NUDOS ISOTOPOS.

Como se mencionó anteriormente, al ver algún nudo a veces nos preguntamos si en realidad está anudado, o al hacerle un segundo nudo se deshace el primero o incluso cuándo dos nudos son equivalentes.



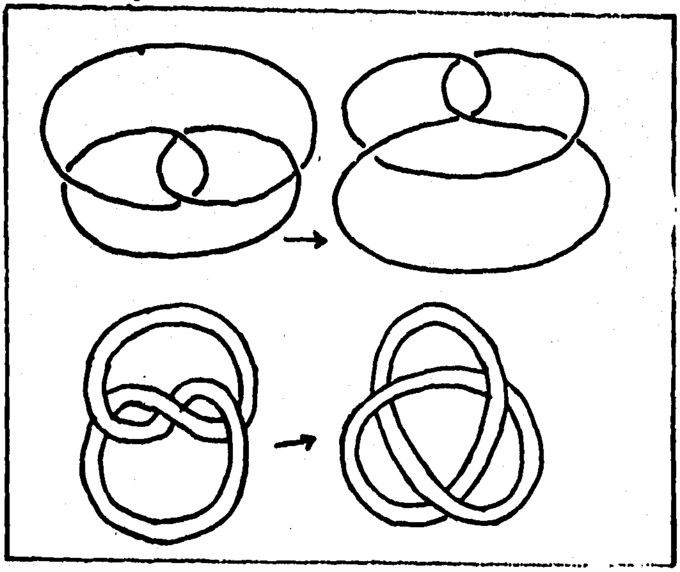
Con muchos de los ejemplos anteriores podríamos decir que en cada par de ellos uno puede llevarse al otro, pues cada uno se puede llevar a la circunferencia, esto nos motiva a dar la siguiente definición:

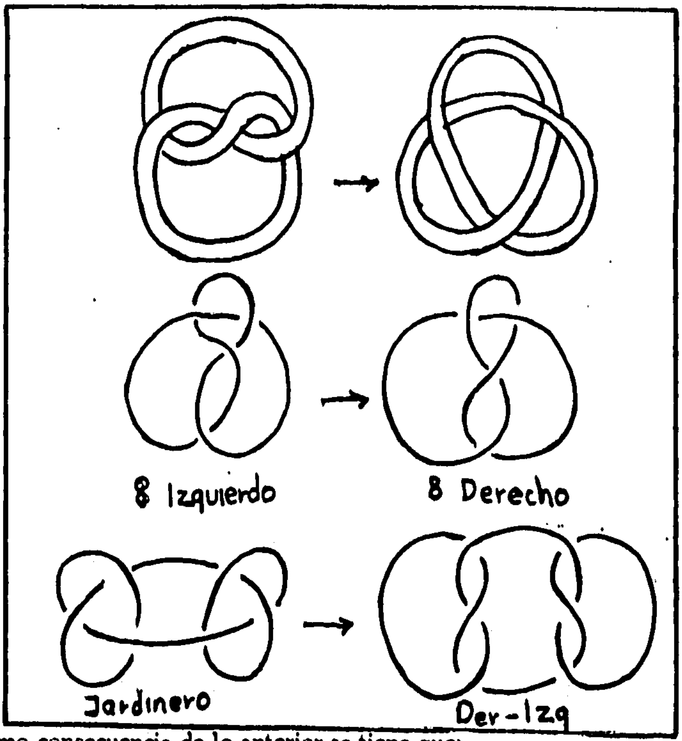
DEFINICION: Dos nudos son isótopos sí y solo sí uno de ellos puede ser llevado al otro, sin romperlo o sin intersectarlo con él mismo.

Estos últimos nudos pueden constituir parte de nuestro muestrario de nudos isótopos.

Mediante el símbolo → denotaremos el hecho de que el nudo de la izquierda puede llevarse al de la derecha, esto es

→= "es isótopo a ".





Como consecuencia de lo anterior se tiene que:
Nudo Trébol →Nudo del Moño simple.
Nudo de Corbata →Nudo del moño simple, entonces se tiene que:
Nudo Trébol →Nudo de corbata.

De una manera natural que surge de los ejemplos anteriores podemos definir algunas formas *prácticas* que nos sirvan para verificar si dos nudos son isótopos.

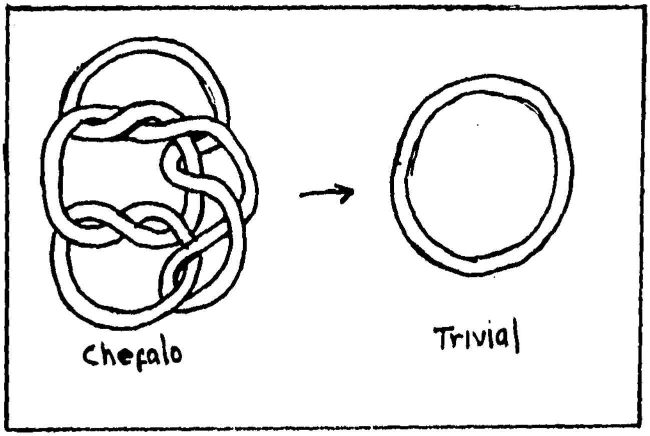
La primera está relacionada con los nudos desatables, sea N_1 el nudo matemático ha verificar si es desatable, y sea N_T el nudo trivial.

DEFINICION: $N_1 \rightarrow N_T$, sí y solo sí mediante transformaciones de N_1 se llega a N_T y viceversa.

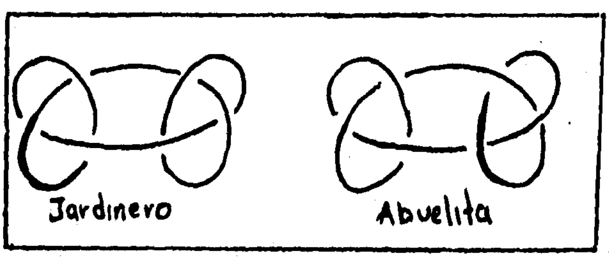
La siguiente definición es más general, pues cubre a todo tipo de parejas de nudos, sea N_1 y N_2 dos nudos.

DEFINICION: $N_1 \rightarrow N_2$, sí mediante transformaciones de N_1 se llega al nudo N_2 (o N_1).

Ejemplo:



¿Son isótopos estos nudos?



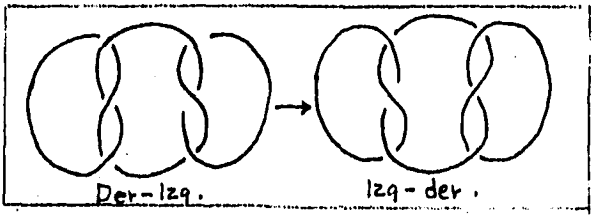
Se puede observar que estos dos nudos son muy parecidos, pero sin embargo son diferentes, es decir:

Nudo de Jardinero $\nrightarrow$Nudo de abuelita .

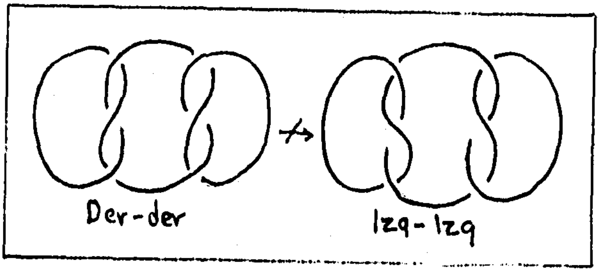
Pues:

Nudo de Jardinero →Nudo recto (der-izq) y abuelita → nudo recto (der-der)

Pero aunque los moños dobles: der-izq y izq.-der.(recto invertido) sí son isótopos, pues basta con voltear uno de ellos para obtener el otro:



Los nudos dobles Der-Der e Izq-Izq. no son isótopos:



2.2 NUDOS EQUIVALENTES Y ANFIQUIERALES

Observemos un hecho interesante: ¡*El nudo llano visto en un espejo es él mismo*¡

Las imagenes que se observan en un espejo son llamadas imagenes especulares una de la otra, por ejemplo los nudos trébol(+) y trébol(-) son imagenes especulares uno del otro. Las personas que no son zurdas en su mayoría, anudan inconcientemente en forma dextrogira (+). Por ejemplo el nudo de corbata hecho por una persona dextrogira es equivalente al trébol(+).

Según lo anterior y en forma experimental (¡hagalo usted mismo¡) podemos encontrar que:

1.- El nudo Derecho-Derecho y el nudo Izquierdo-Izquierdo son especulares entre sí.

2.- El nudo Abuelita y el nudo Rizo son especulares entre sí.

Como Abuelita $\rightarrow$ Derecho-Derecho, entonces podemos decir que el nudo Abuelita es isótopo a la imagen especular del nudo Izquierdo-Izquierdo (o de mujer).

Es decir Der-Der $\rightarrow$ Esp(Izq-Izq), donde Esp(N_1) significa *especular del nudo* N_1.

Abuelita $\rightarrow$ Esp(Rizo).
Llano $\rightarrow$ Esp(Llano).
Observe que:

i) Para todos los nudos especulares N_1 y N_2 se cumple que $N_1 \rightarrow$ Esp(N_2).

ii) Sí $N_1 \rightarrow$ Esp(N_2) $\Rightarrow N_2 \rightarrow$ Esp(N_1), para cualquier par de nudos N_1y N_2.

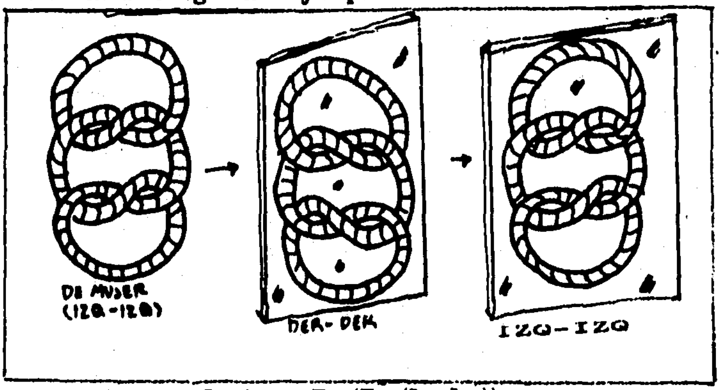
DEFINICION: Dos nudos N_1 y N_2 son *equivalentes* si se cumple al menos una de las dos condiciones siguientes:

1) $N_1 \rightarrow N_2$.

2) $N_1 \rightarrow$ Esp(N_2).

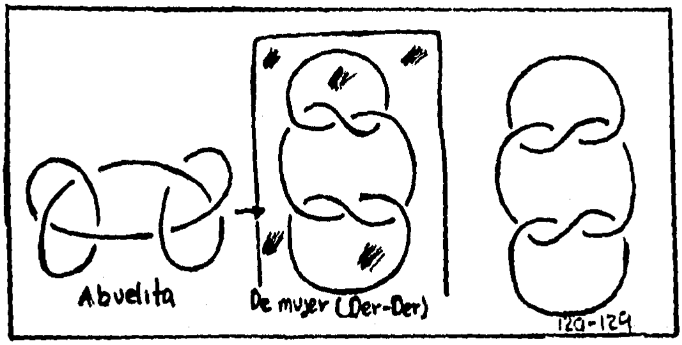
Las siguientes figuras muestran que todo nudo es equivalente a su imagen especular, pues todo nudo es equivalente a su imagen especular de su imagen especular, es decir $N \rightarrow$ Esp(Esp(N)).

Observemos el siguiente ejemplo:



Izq-Izq = Esp(Esp(Izq-Izq)).

Entonces el nudo de Abuelita es isótopo a la imagen en un espejo del nudo de Mujer:



Observese que un nudo es isótopo a la *imagen del otro en un espejo* que de ahora en adelante lo abreviaremos como *Esp* esto es:

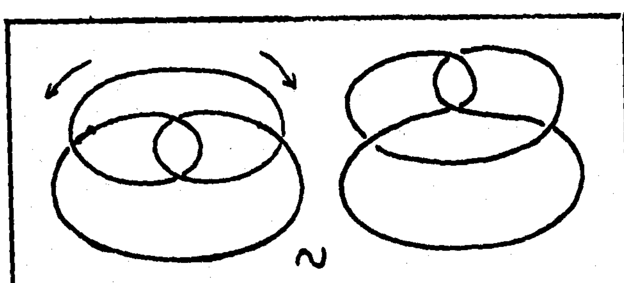
El nudo Abuelita →*Esp*(Izq-Izq).

Las últimas figuras muestran que todo nudo es equivalente a su *Esp*, pues todo nudo es igual a la imagen en un espejo de esa imagen de él en otro espejo.

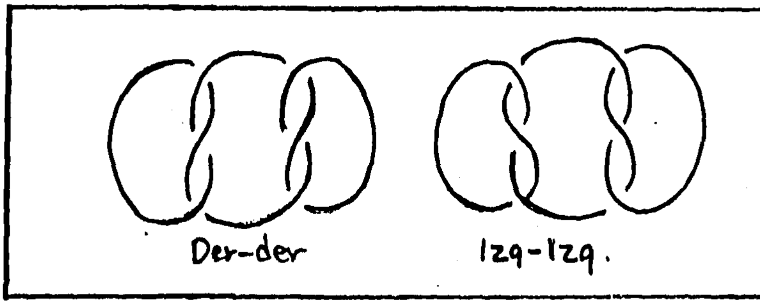
Por lo tanto: Nudo Der-Der →*Esp*(Der-Der).

MUESTRARIO DE NUDOS EQUIVALENTES

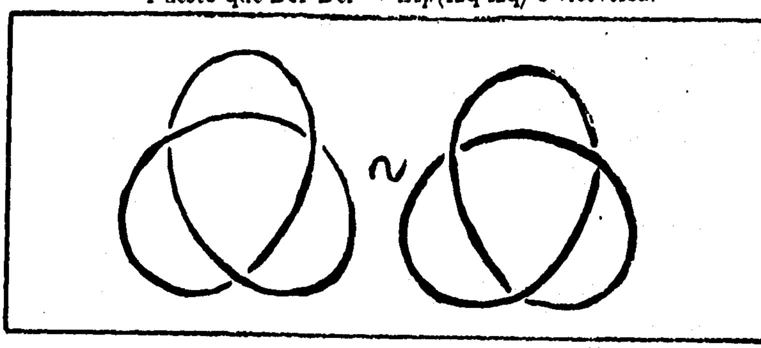
NOTACION:
→: ES ISOTOPO A:
~: ES EQUIVALENTE A:



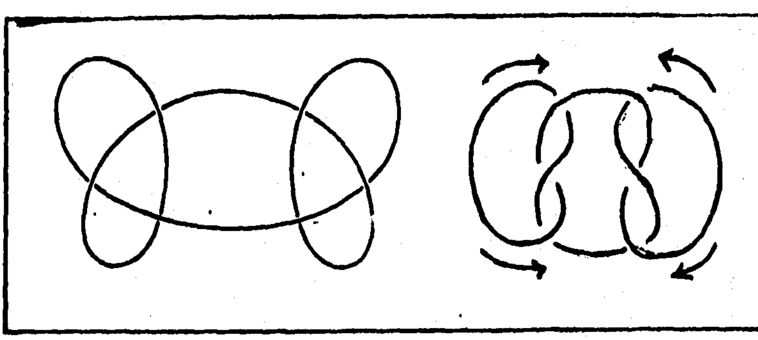
Ya que jalando el segmento superior en dirección de las flechas se obtiene el nudo de la derecha, es decir los nudos son isótopos.



Puesto que Der-Der → *Esp*(Izq-Izq) o viceversa.

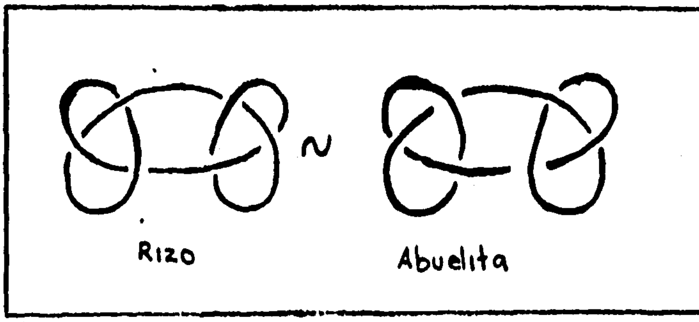


Debido a que Trébol → *Esp*(Trébol (-)).

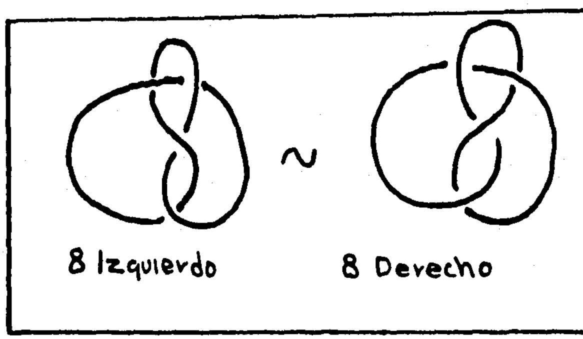


Puesto que si se jalan los segmentos indicados en dirección de las flechas en el nudo Der-Izq. se obtiene el nudo de jardinero o también conocido como nudo llano, es decir Der-Izq → Jardinero.

Observe que: (hagalo usted mismo), cada uno de estos nudos son iguales a su imagen en un espejo.

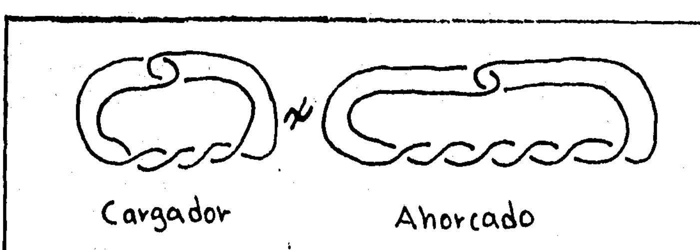


Ya que Rizo → *Esp*(Abuelita) y viceversa es decir, Abuelita → *Esp*(Rizo).

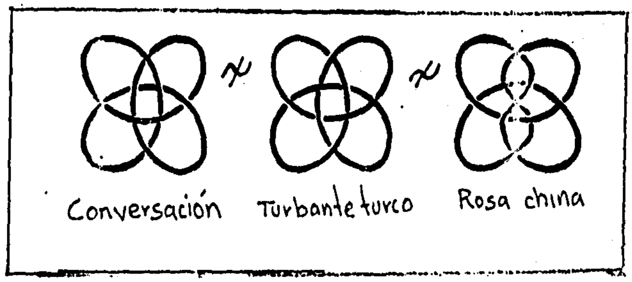


Puesto que 8 Izquierdo → 8 Derecho, como ya se vió.

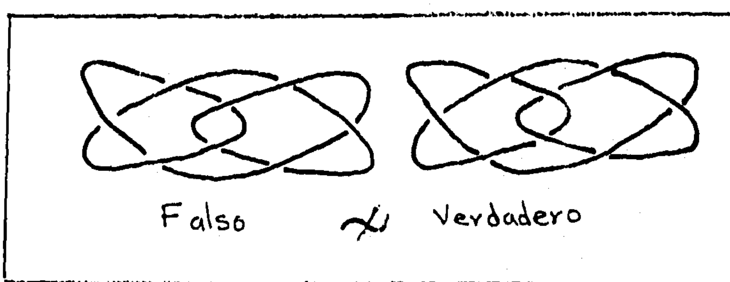
ALGUNOS NUDOS NO EQUIVALENTES



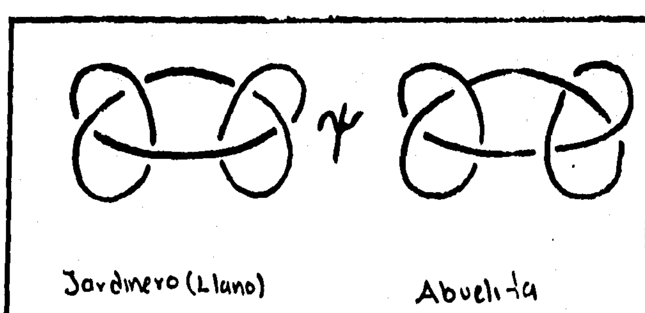
Ya que los nudos son casí exactamente iguales salvo que el nudo de ahorcado tiene más torsiones (cruces) que el de cargador.



Dado que ningún par de ellos son isótopos, ni siquiera uno de ellos es isótopo al *Esp* de otro.



Puesto que Falso $\nrightarrow$ *Esp*(Verdadero) y viceversa, observe que este par de nudos son casí idénticos salvo el cambio que hay en el centro de cada uno.



Pues Jardinero $\nrightarrow$ *Esp*(Abuelita) y viceversa, también Jardinero $\nrightarrow$ Abuelit

Con lo definido y mostrado anteriormente se puede decir que:

i) Los nudos isótopos son siempre equivalentes.

ii) Los nudos equivalentes no siempre son isótopos.

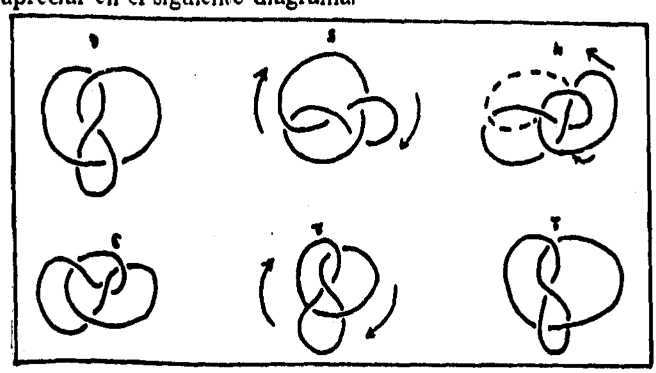
Es decir, sí $N_1 \rightarrow N_2$, entonces $N_1 \sim N_2$.

¿Habrá algún nudo que cumpla con: $N_1 \rightarrow Esp(N_1)$?, sí pues como hemos visto Llano $\dashrightarrow$ Esp(Llano).

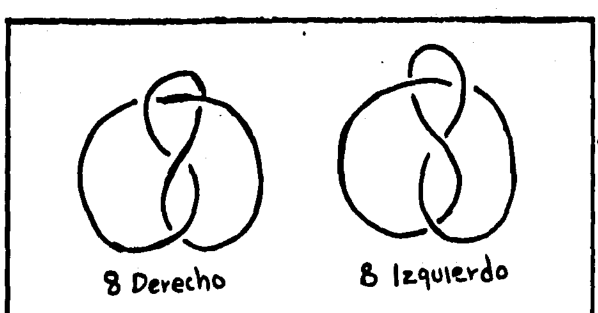
DEFINICION: Un nudo es "*Anfiquieral* " o *Bilateral* sí es isótopo a su imagen en un espejo.

A todos los nudos que cumplen con la propiedad anterior se les llama "Nudos *Anfiquierales*".

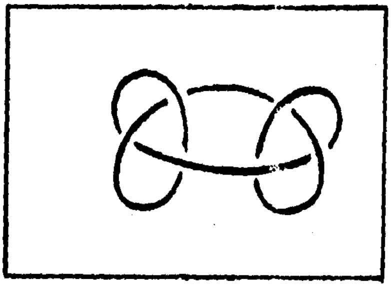
Por ejemplo, el nudo del 8 es un nudo Anfiquieral, ya que podemos rehacer el nudo del 8 derecho a partir del nudo del 8 izquierdo y viceversa, como se puede apreciar en el siguiente diagrama:



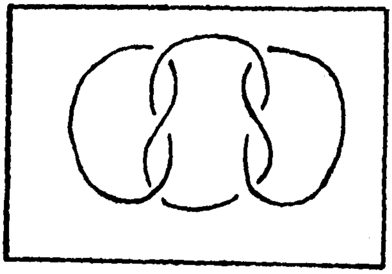
PEQUEÑO MUESTRARIO DE NUDOS ANFIQUIERALES:



El 8 derecho es Anfiquieral, ya que este es isótopo a la imagen en un espejo del nudo del 8 izquierdo y viceversa.



El nudo de Jardinero o Llano es Anfiquieral, ya que visto en un espejo es él mismo.

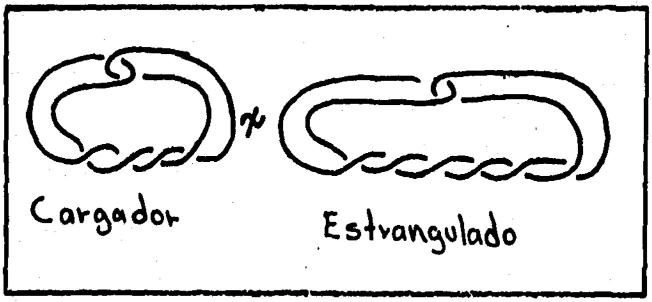


El nudo Recto (Der-Izq) es Anfiquieral ya que este nudo visto en un espejo es exactamente el mismo.

CAPITULO 3

INVARIANTES

En el capítulo anterior se vió que cuando dos nudos son isótopos, entonces son equivalentes, y que dos nudos son isótopos si uno puede llevarse al otro mediante una serie de manipulaciones, además uno es equivalente al otro si uno es isótopo a la imagen en un espejo del otro. También se vieron algunos ejemplos de nudos no equivalentes, por ejemplo los nudos de Cargador y Estrangulado se ve que son muy parecidos, casi idénticos salvo la pequeña diferencia de que uno tiene más torsiones que el otro, es decir, hay más puntos de cruce en la parte donde se turse la cuerda.



Observe que con un cruce mas y los nudos ya no son isótopos, solo resta ver si mediante manipulaciones se puede mostrar que: *Cargador* $\dashrightarrow$ *Esp(Estrangulado)*, si estos dos criterios no se cumplen entonces: *Cargador* $\not\sim$ *Estrangulado.*

Ya sabemos pues que si deseamos ver si dos nudos son equivalentes lo primero que tenemos que hacer es tomar un nudo, manipularlo y tratar de llevarlo a la forma del otro, si no lo logramos con esto no basta, ya que siempre tedremos la duda de que tal vez con un trúco hábil podamos lograrlo; por lo tanto para ver si dos nudos son equivalentes debemos descubrir algunos criterios y propiedades que los caractericen, a las propiedades de este tipo se les llama *Invariantes.*

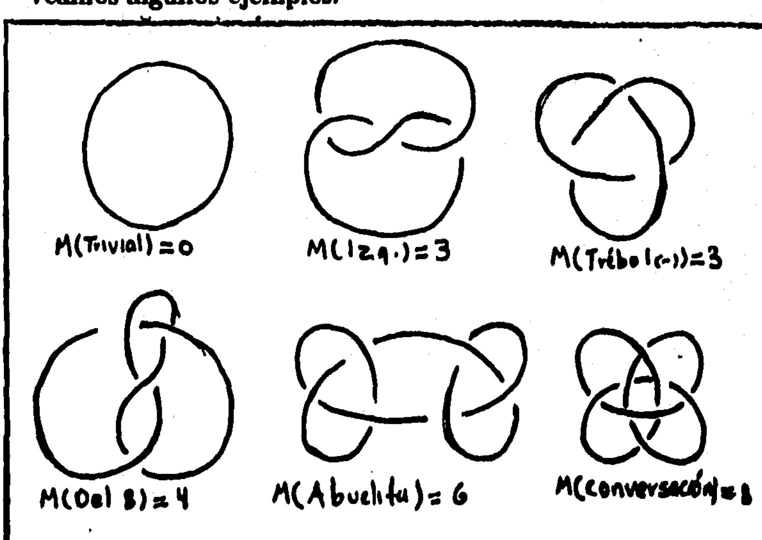
Los invariantes nudos son características que no se alteran cuando deformamos al nudo.

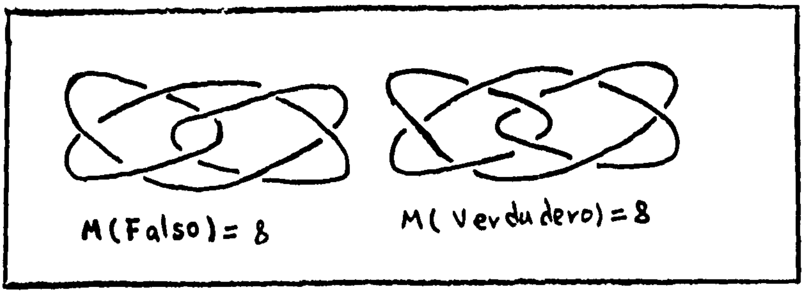
Hay varios tipos de invariantes, algunos son difíciles de entender para un estudiante de bachillerato pues se necesitan algunos conocimientos de Algebra Superior y Topología. Aún así el invariante más cómodo es el llamado *Grupo de un Nudo* el cuál sirve como una herramienta para mostrar cuando dos nudos son equivalentes o también cuando un nudo por muy enredado que esté, es un nudo Trivial; a este nivel se pretende menos y el Grupo de un Nudo se tratará en el apéndice en forma breve y superficial, también se verán algunos invariantes numéricos sencillos, los cuales se obtienen casi del diagrama del nudo:

3.1 NUMERO MINIMO DE PUNTOS DE CRUCE DEL NUDO N: M(N)

Este invariante consiste en determinar el número de puntos de cruce dobles del diagrama del nudo N, y en todas las posibles formas en que pueda disponerse el nudo N y tomar el de menor valor M.

Veamos algunos ejemplos:





De los ejemplos vistos, ¿Que pares de nudos son equivalentes?
Ya hemos visto que:
a) Trébol (-) ~Izquierdo
b) Trébol (+) ~Derecho.
c) Derecho ~Izquierdo.
d) Derecho-Derecho ~ Izquierdo-Izquierdo.
e) Derecho-Izquierdo ~ Izquierdo-Derecho.
f) Jardinero ~ Recto.
g) Recto ~ Jardinero.
h) Abuelita ~ Derecho-Derecho.

Ahora comparemos su M(N):

a) M(Trébol (-))=M(Izquierdo)=3
b) M(Trébol (+))=M(Derecho)=3
c) M(Derecho)=M(Izquierdo)=3
d) M(Derecho-Derecho)=M(Izquierdo-Izquierdo)=6.
e) M(Derecho-Izquierdo)=M(Izquierdo-derecho)=6
f) M(Jardinero)=M(Recto)=6.
g) M(Recto-Jardinero)=6.
h) M(Abuelita)=M(Derecho-Derecho)=6.

Observación:

En nudos equivalentes sus M(N) coinciden, es decir:
Sí $N_1 \sim N_2$, entonces $M(N_1)=M(N_2)$.
¿El inverso de la propiedad anterior es válida? Es decir :
¿Sí $M(N_1)=M(N_2)$, entonces $N_1 \sim N_2$?
Claramente se ve que esto es falso, pues:

M(Conversación)=M(Turbante turco)=8 y sin embargo estos dos nudos no son equivalentes. Así pues este invariante es poco satisfactorio, dado que no estamos seguros en primer lugar si el diagrama del nudo es el de mínimo número de cruces, además existen muchos nudos como los anteriores que son diferentes y con el mismo número mínimo de cruces.

Así pues lo anterior prueba que para poder establecer cuando dos nudos son equivalentes, M(N) en general no es suficiente y por lo tanto tenemos que recurrir a otros invariantes .

Sin embargo de este invariante podemos sacar algunas conclusiones importantes:

i) El nudo más simple es aquel nudo que no tiene cruces con él mismo y este es llamado el nudo Trivial.

ii) El nudo Trébol es el único nudo con tres cruces.

iii) El nudo del ocho es el único nudo con cuatro cruces .

A medida que el número de cruces aumenta, el número de nudos distintos se incrementa de acuerdo a la siguiente tabla, la cuál fué encontrada en forma empírica:

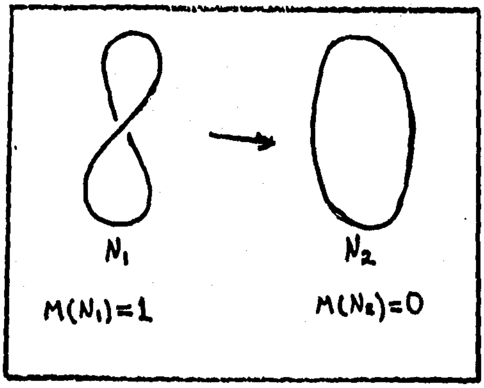
Número de cruces	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Número de nudos	1	0	0	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988

Número de nudos con trece o menos cruces.

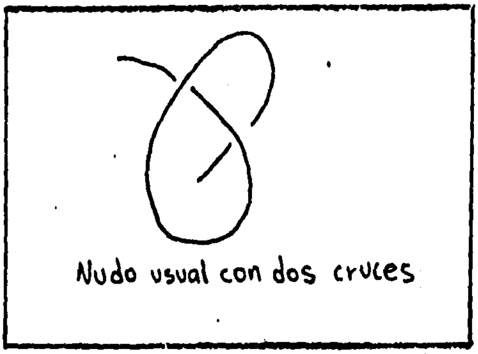
De la cuál podemos decir que:

iv) No existen nudos N_1 y N_2, tales que $M(N_1)=1$ y $M(N_2)=2$.

Esto es claro, pues si un nudo tiene un solo cruce, este nudo es isótopo al nudo Trivial, pues el nudo trivial es el único nudo que no tiene cruces:



Por otro lado si un nudo tiene dos cruces, este nudo tiene que ser isótopo al nudo trivial:

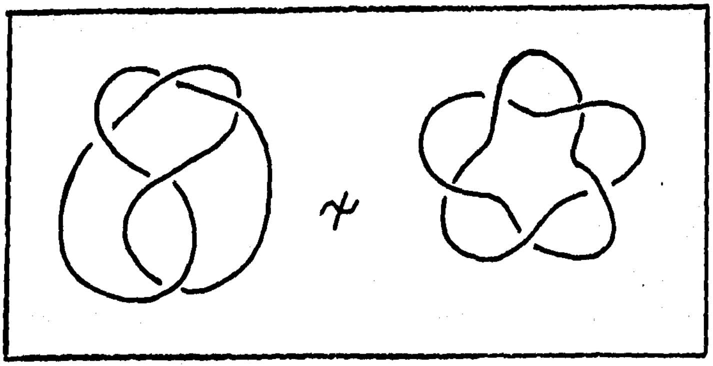


Pero este nudo con dos cruces es solo un nudo usual y se requiere hacerlo matemático, para convertirlo a nudo matemático hay que unir los extremos y solo hay dos formas:

Sí los extremos se unen por abajo resulta el trivial, y si se unen por encima resulta el Trébol.

Por lo tanto "no existen nudos N_1, N_2 tales que $M(N_1)=1$ y $M(N_2)=2$.

¿Sí $M(N)=5$, entonces $N \sim$ trébol de cinco hojas? He aquí un ejemplo que prueba lo contrario:

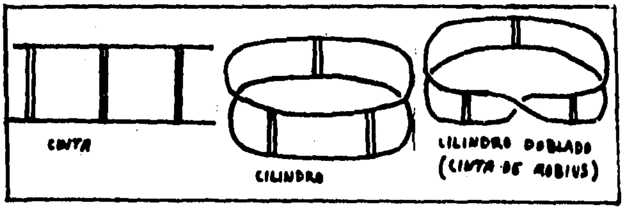


Hemos así encontrado nudos equivalentes con un $M(N) \leq 4$, pues a partir de un $M(N)=5$, esto no es necesariamente verdadero y necesitamos continuar con nuestra investigación y recurrir a otro invariante.

3.2 NUMERO DEL PASTELERO DEL NUDO N: K(N).

Es fácil ver que de todos los nudos, solo el nudo trivial es el único nudo que puede dibujarse sobre una esfera de tal manera que no haya autointersecciones.

Para otros nudos ya no es posible dibujarlos sobre una esfera, pues siempre existirá al menos una autointersección, al menos que se le hagan agujeros a la esfera y se haga algo similar como en la cinta de *Möbius*, la cuál tiene una sola cara, es decir, podemos dibujar una linea sobre su cara y esta pasará por todas las caras o lados de la figura lo cuál significa que la cinta de Möbius es una superficie de una sola cara.



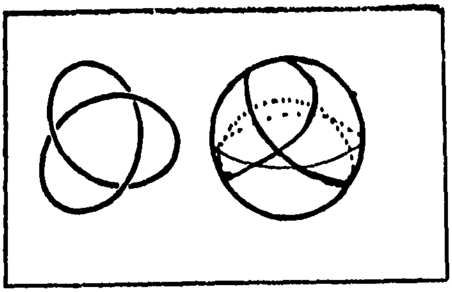
DEFINICION: : K(N) es llamado Número del Pastelero del nudo N.

K(N)= Número mínimo de asas que hay que pegarle a la esfera tal que la superficie obtenida pueda admitir al nudo N sin que existan puntos de autointersección.

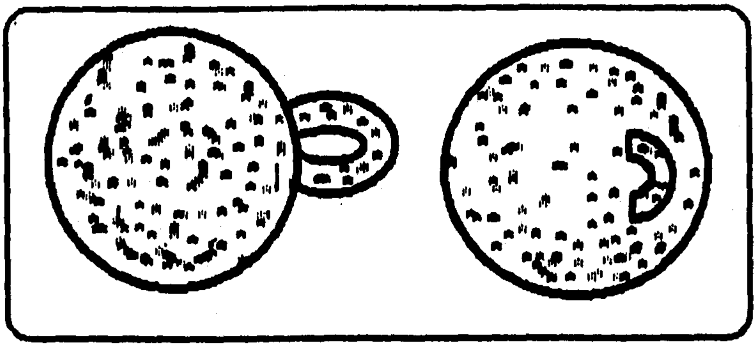
Se le llama *Número del Pastelero* porque de manera similar, el pastelero o repostero decora a sus pasteles.

De esta menera tenemos que K(Trivial)=0.

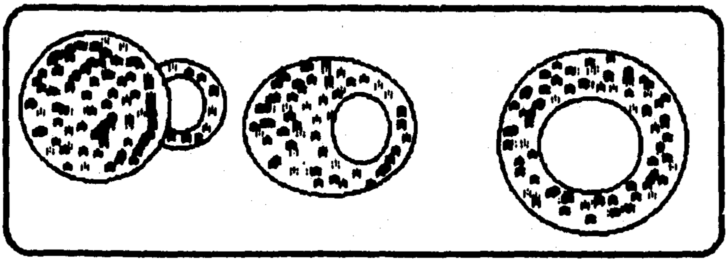
¿El nudo Trébol puede dibujarse sobre una esfera?



Es claro que no, pues habría intersecciones entre la misma curva o nudo y por lo tanto K(Trébol) no puede calcularse. Pero,... peguemosle una agarradera a la esfera como se mustra en la siguiente figura:

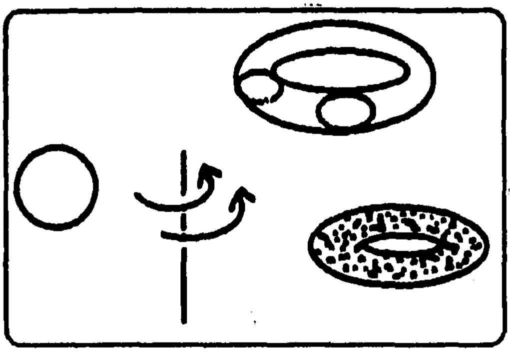


Las agarraderas que le pongamos a la esfera junto con ella, pueden ser deformadas como nosotros queramos según nos convenga pero, sin romperla ni adherirle nada:

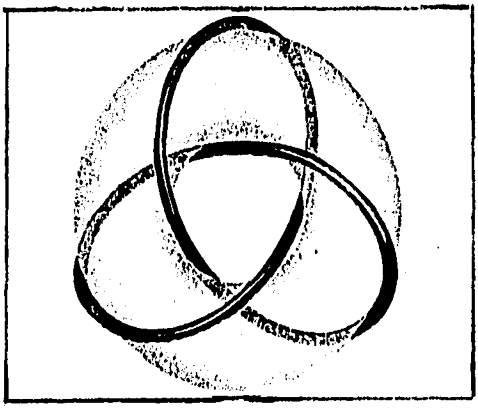


Así, una esfera a la cuál se le ha pegado una agarradera la hemos transformado en un *Toro*. Un Toro es una figura Geométrica, semejante a una *Dona* o a una *camara inflada*, un Toro se enjendra haciendo girar una circunferencia alrededor de una recta contenida en su mismo plano y exterior a ella.

A los nudos que se pueden dibujar sobre un Toro, se les llaman *Toroidales*.

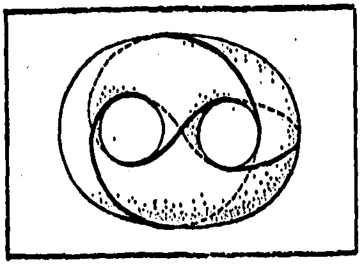


Entonces se tiene que para el nudo Trébol: K(Trébol)=1, pues pegandole una agarradera a la esfera, lo que resulta es la figura de un Toro, y sobre el Toro ya podemos dibujar al nudo Trébol sin autointersecciones :

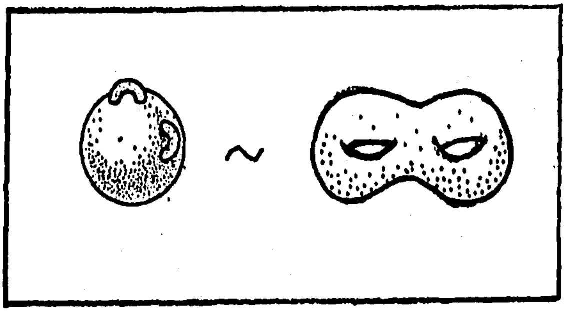


Veamos para otro para otro nudo:

K(Nudo del 8)=2, pues pegandole dos agarraderas a la esfera lo que resulta es una "doble dona" en forma de 8 y sobre de ella ya podemos dibujar al nudo del 8 sin que existan autointersecciones:

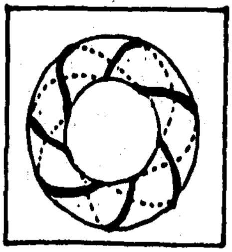


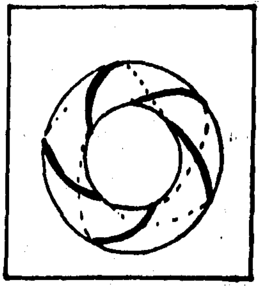
Observese que, en efecto, ponerle dos agarraderas a una esfera es similar a hacerle dos agujeros a una esfera, y entonces obtener un "Bitoro":

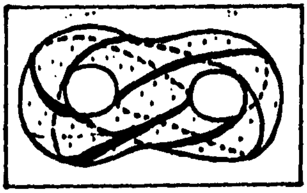


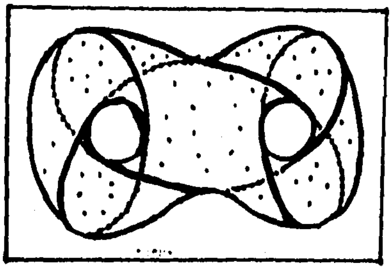
Así, podemos encontrar una manera más fácil de poder dibujar un nudo sobre una esfera con asas.

Veamos algunos ejemplos más:

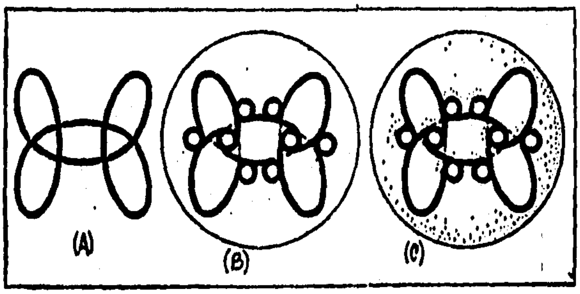








Finalmente se puede decir que dado cualquier nudo este siempre puede dibujarse sobre una esfera con asas, para ponerle las asas a la esfera se puede hacer agujeros en cada punto de cruce doble como se muestra en la siguiente figura de tal manera que al dibujar al nudo tratemos siempre de agotar todas las posibilidades de paso sobre un agujero, agotado este, utilizar otro y así sucesivamente hasta dibujar al nudo:



Pero esta manera de diferenciar nudos no nos resuelve el problema pues para nudos muy complicados este método resulta difícil.

3.3 GENERO DE UN NUDO N: G(N)

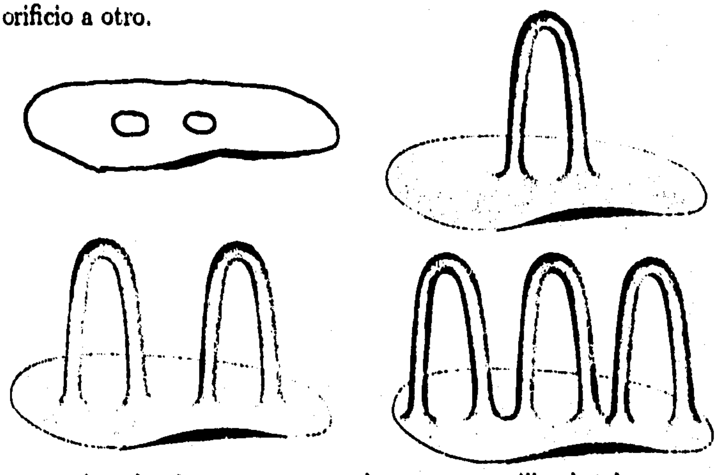
Para definir el Genero de un nudo N se construye una superficie, cuyo único borde o frontera sea el nudo N.

Imaginemos una superficie bidimensional de un solo borde, inmersa en el espacio tridimensional, la cuál puede tener dos caras o una como la Banda de Möbius.

DEFINICION:

> Se dice que una superficie es *orientable*, si tiene dos caras; y es *no orientable* si solo tiene una cara.

> Las superficies orientables son equivalentes topológicamente a discos provistos de cierto número de asas. Para colocar una asa a un disco, se cortan en él dos agujeros y se conecta un tubo de un orificio a otro.



En estos ejemplos, las asas se ponen de manera sencilla, de tal manera que los bordes de los discos no se anudan; pero en general las asas de superficies limitadas por curvas anudadas se enlazan de manera más complicada.

3.4 CONSTRUCCION DE UNA SUPERFICIE, CUYO UNICO BORDE ES UN NUDO.

En 1935 H.Seifert ideó un procedimiento para construir una superficie orientable con borde igual a un nudo[16]. Esta superficie prueba que todo nudo ha de ser borde de al menos una superficie equivalente a un disco con asas. Dado un nudo cualquiera, habrá muchas superficies de este tipo, dotadas de distintos números de asas, de entre todas ellas, la de menos asas es llamada "superficie minima del nudo ".

DEFINICION: G(N): "*Género del nudo N* "= "Número mínimo de asas que exige una superficie orientable tal que su borde es el nudo N".

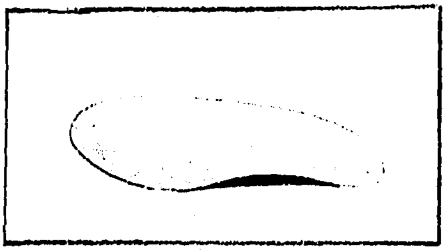
O simplemente como:

G(N)= "*Número de asas de una superficie minima*".

Con lo anterior, ya tenida una superficie minima, no es posible disminuir el número de asas y por lo tanto el género G(N) es un invariante.

Observemos un ejemplo:

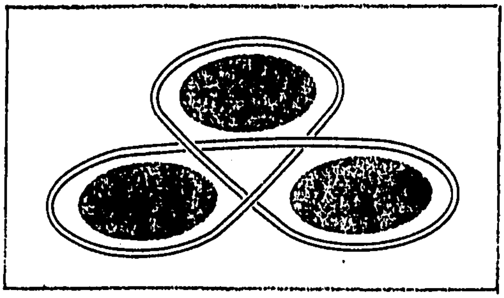
El nudo Trivial es el único nudo con Género cero, es decir, es el borde de una superficie sin asas, por lo tanto G(Trivial)=0, de hecho esta es la forma de determinar cuando un nudo es el trivial .



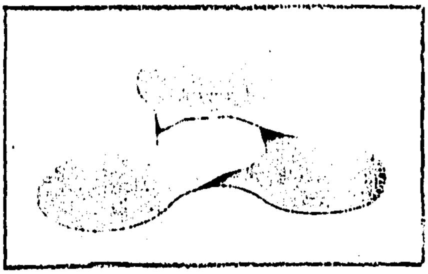
De lo anterior se puede decir que:

Sí un nudo N está desanudado, entonces G(N)=0.

Veamos un ejemplo de la construcción de una superficie, cuyo borde es un nudo:



a) Nudo Trébol con las lazadas rellenas con discos.



b) Unir o rellenar los puntos de cruce con las cintas retorcidas para conectar a los discos.

En este ejemplo se puede observar que al viajar sobre la superficie obtenida, se viaja de un nivel a otro (es decir por encima y por abajo) y por lo tanto la superficie es no orientable como la cinta de Möbius.

Observese que el borde de la superficie obtenida es el nudo del Trébol (-).

Asì pues, la superficie obtenida es " no orientable", ahora veamos un " algoritmo en el cual la superficie que se obtiene sì es orientable.

DEFINICION: Una "superficie " de Seifert para un nudo o enlace N, es una superficie orientable tal que su borde o frontera es el nudo N.

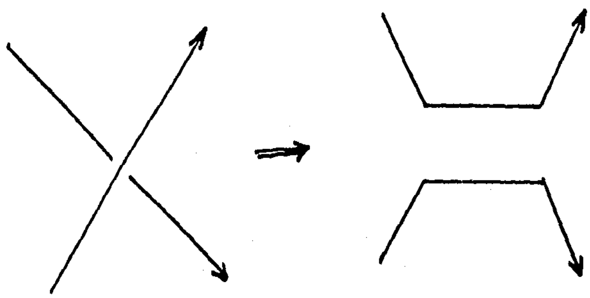
Como se dijo al principio de esta secciòn, con el procedimiento de Seifert se probò que todo nudo debe ser el borde de al menos una superficie de Seifert.

Algoritmo para encontrar la superficie de Seifert para un nudo N.

Dado un nudo N (o enlace):

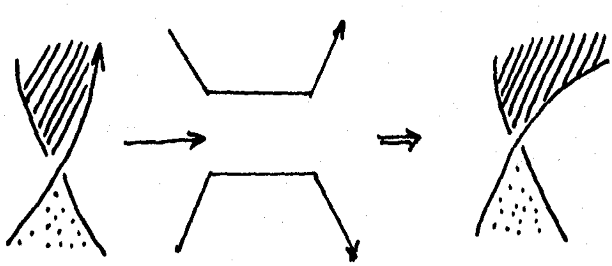
Paso1: Asignarle una direcciòn.

Paso2: Borrar los puntos de cruce y reemplazarlos por arcos como se muestra a continuaciòn:



Al realizar el paso 3, los discos que resultan son llamados "Circulos de Seifert" .

Paso3: Conectar los circulos de Seifert por la parte donde se encontraban los cruces originales mediante cintas medio torcidas, donde las regiones que se encuentran al recorrer el segmento en direcciòn de la flecha en sentido contrario a las manecillas del reloj se marcan con el mismo color .

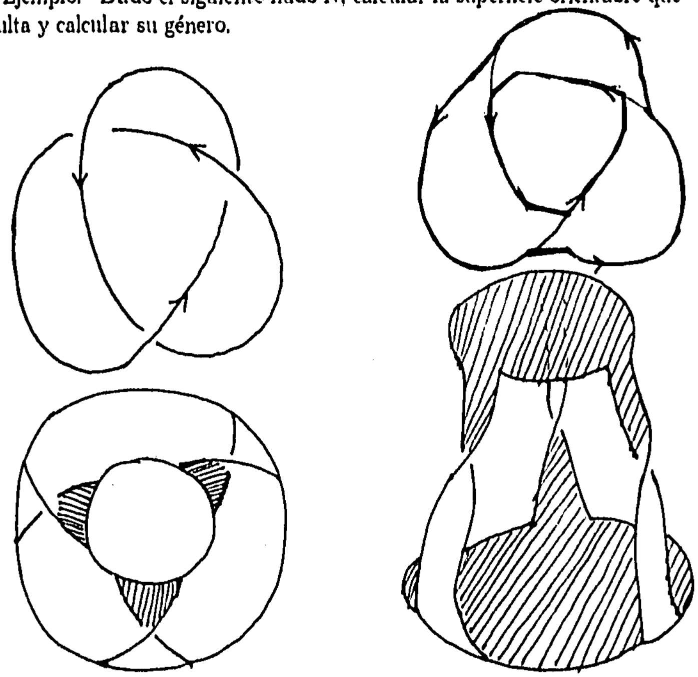


Paso 4: La superficie obtenida es orientable cuyo borde el el nudo N (o enlace).

Paso 5: El género de la superficie es:

$$g = 1 - \frac{s+n-m}{2}$$

Donde:
s: No. de circulos de Seifert.
n: No. de componentes del enlace (n=1 para nudos).
m: No. de cruces del nudo N.
Ejemplo: Dado el siguiente nudo N, calcular la superficie orientable que resulta y calcular su género.



El género de un nudo, posese la propiedad de que $G(N_1 \sharp N_2)=G(N_1) + G(N_2)$. El lector puede comprobar que G(Abuelita)=2, ¿porque?

Tambièn se puede comprobar que al cortar un Toro a través del nudo Trébol, lo que resulta es una

superficie orientable y por lo tanto G(Trébol)=1.

Sin embargo nudos diferentes pueden tener la misma superficie minima y por lo tanto el género además de que no siempre es fácil de determinar y no nos resuelve el problema propuesto.

CAPITULO 4

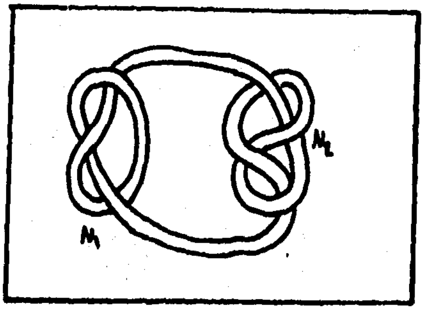
ARITMETIZACION DE LOS NUDOS

Veamos como de manera semejante a los números Naturales los nudos tienen sus propias operaciones.

Cuando se tiene un primer nudo y luego sobre este se hace un segundo nudo, entonces esta operación nos genera un nuevo nudo. Esta operación será la operación de componer.

4.1 COMPOSICION DE NUDOS

DEFINICION: Sean N_1 y N_2 dos nudos, entonces "*el composición de N_1 y N_2* " es igual al nudo que resulta de amarrar N_1 y N_2 a una cuerda:



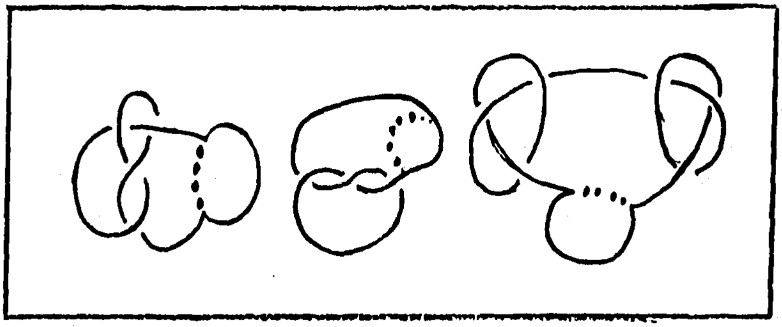
Notación:

$N_1 \sharp N_2$: La *composición* de los nudos N_1 y N_2.

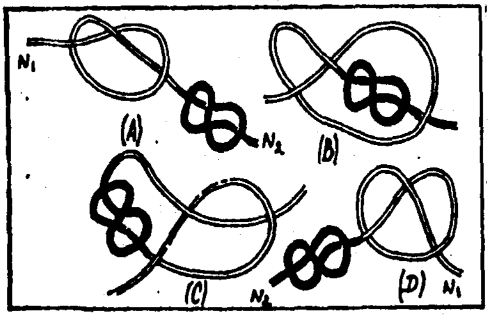
Observaciones:

i) $N_1 \sharp N_2 = N_2 \sharp N_1$, es decir la *composición* es conmutativa.

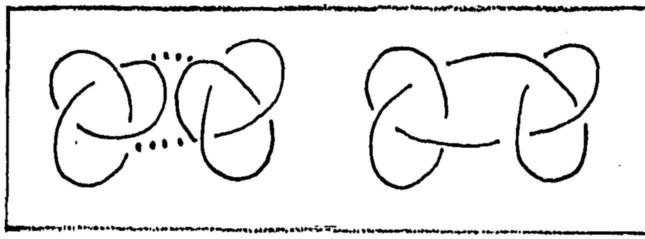
ii) Sí N_T es el nudo trivial, entonces $N_1 \sharp N_T = N_T \sharp N_1 = N_1$, es decir N_T hace las veces de la unidad.



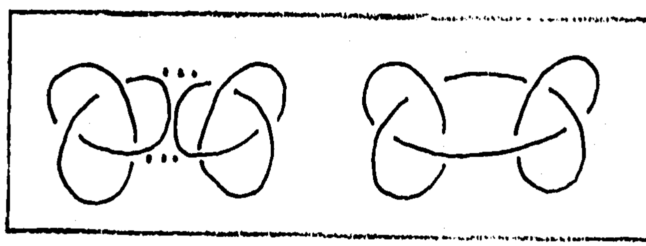
El nudo trivial N_T es la unidad: en el primer caso se tiene que: $N_{Del\ 8} = N_{Del\ 8} \sharp N_T$; en los otros casos esta propiedad se cumple en forma analoga.



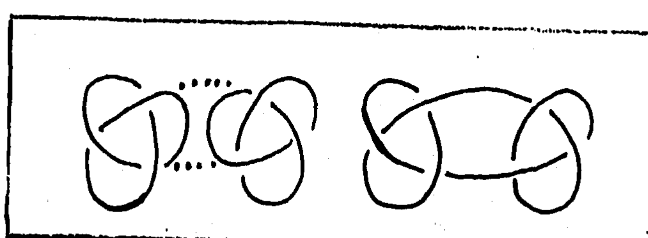
La *composición* es conmutativa: N_2 se ha deslizado a través de N_1.



$N_{Trébol(+)} \sharp N_{Trébol(+)} = N_{Abuelita}$.



$N_{Trébol(+)} \sharp N_{Trébol(-)} = N_{Jardinero}$.



$N_{Trébol(-)} \sharp N_{Trébol(-)} = N_{Rizo}$.

De todo lo anterior podemos sacar la conclusión siguiente:

Cualquier nudo se puede representar como la composición de dos o más nudos.

Como conclusión tenemos lo siguiente:

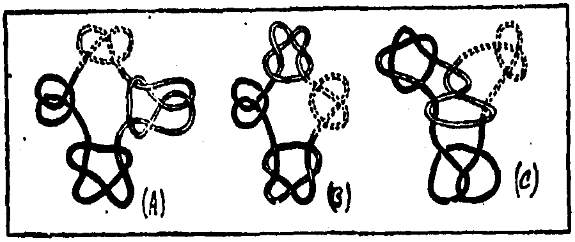
$N_{Abuelita} = N_{Trébol(+)} \sharp N_{trébol(+)}$

$N_{Jardinero} = N_{Trébol(+)} \sharp N_{Trébol(-)}$.

$N_{Rizo} = N_{Trébol(-)} N_{Trébol(-)}$.

Con todo lo anterior podemos pensar de una manera natural que la conmutatividad de la *composición* nos puede mostrar cuando dos nudos son isótopos, pues si un nudo se puede representar como el *composición* de dos nudos y además un nudo puede deslizarse a travós del otro (se vale la conmutatividad), entonces el nudo original es isótopo a cada nuevo nudo obtenido al ir deslizando un nudo a través del otro.

Ilustremos lo anterior con el siguiente ejemplo:



El producto de nudos es asociativo.

Observe que de este ejemplo se puede decir que la *composición* es asociativa, ya que la *composición* se entiende como amarrar un segundo nudo a un primer nudo, entonces se cumple que:

$$(N_1 \sharp N_2) \sharp N_3 = N_1 \sharp (N_2 \sharp N_3) = (N_2 \sharp N_3) \sharp N_1 = N_2 \sharp (N_3 \sharp N_1) = \ldots$$

De lo anterior podemos decir que cada nudo por muy complicado que sea, es la composición de otros nudos y si se desliza un nudo a través de otros nudos se obtiene un nuevo nudo, el cuál es isótopo al original.

4.2 MULTIPLO DE UN NUDO.

DEFINICION: *Se dice que un nudo A es multiplo del nudo B, si existe un nudo C tal que se cumple que $A = B \sharp C$.*

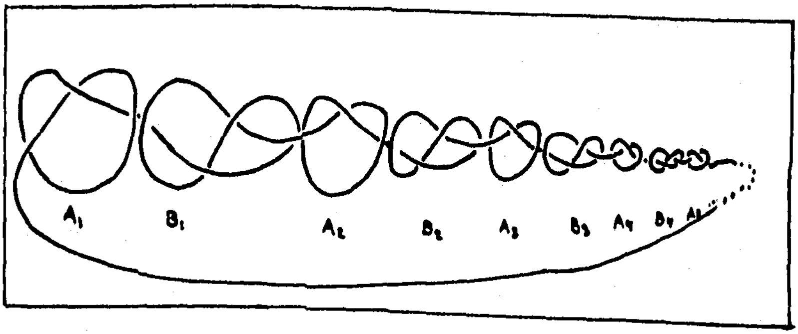
Observese que sí N_T es el nudo trivial, entonces se tiene que N_T=B♯C, esta expresión nos dice que el nudo trivial N_T tiene dos multiplos. Es decir "si se tiene un nudo B y después se amarra junto a el otro nudo C, el nudo resultante es el nudo trivial N_T, entonces "*el nudo B se puede desanudar* ".

De lo anterior podemos decir que el único nudo que cumple con: N_T=B♯C es el nudo trivial N_T, es decir, N_T=B=C; lo anterior se resume en la siguiente:

Proposición: *ningún nudo que no sea el nudo trivial se puede desanudar al amarrarle un segundo nudo.*

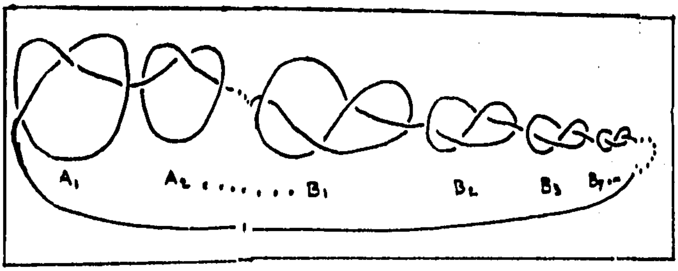
Veamos una posible demostración:

Supongamos que $N_T = A\sharp B$, sean A y B dos nudos, amarremos un número infinito de nudos A_i y B_i; es decir al nudo A_1 amarrarle B_1, al B_1 amarrarle A_2, etc., lo que resulta es un nudo salvaje como el que se muestra abajo:



El nudo obtenido si es desatable pues basta con desatar simultáneamente cada par de nudos A_k y B_k; recuerde que sí $A\sharp B = N_T$ y por lo tanto $A_k\sharp B_k = N_T$; además observe que si $A_1\sharp B_2 = N_T$, entonces también se cumple que $B_1\sharp A_2 = N_T$ ya que $A_1 = A_2 =$...y también $B_1 = B_2 = ...$

Utilizando la noción de deslizamiento, la figura anterior es isotópica a la siguiente:



Lo que significa que:
$A_1 \sharp A_2 \sharp ... \sharp B_1 \sharp B_2 \sharp ... = N_T$
ya que el nudo de la figura anterior es desatable, pero si el nudo es desatable entonces los nudos $A_k = B_k = N_T$.

4.3 NUDOS PRIMOS.

Al igual que entre los números naturales existen los números primos, también entre los nudos existen nudos primos.

DEFINICION: Se dice que un nudo A es Primo si no es el nudo trivial y sólo es multiplo por los nudos isótopos a él y por la unidad N_T.

Según lo anterior, cualquier nudo es primo o compuesto, donde compuesto significa que es múltiplo de otro.

Al igual que entre los números primos es evidente que: "*existe un conjunto infinito de nudos primos*".

También al igual que en los naturales, los nudos no triviales se puede representar en forma única como *composición* de un número finito de nudos primos.

Veamos un ejemplo muy simple:

i) El nudo Trébol es un nudo primo, pues sus únicos multiplos son los nudos isótopos al trébol y al nudo trivial N_T.

Esto es: Trébol es primo $\Leftrightarrow$ trébol =B$\sharp$C tal que:

a) Uno y solo uno de los nudos B o C es el nudo trivial N_T.

b) Sí el nudo B es el nudo trivial N_T, entonces: trébol $\rightarrow$ C.

Demostración:

a) Sea el nudo trébol de tal forma que trébol=B $\sharp$ C, entonces al nudo trébol es multiplo de B y C.

Como: trébol=B$\sharp$C, entonces uno y solo uno de los nudos B y C deben ser la unidad.

b) Supongamos que B=N_T, entonces trébol=$N_T\sharp$C, como N_T es la unidad, entonces trébol=C, pero esta última expresión indica que trébol $\dashrightarrow$ C (trébol y C son isótopos), y por lo tanto cualquier nudo isótopo al trébol también es multiplo.

Por lo tanto los únicos multiplos de trébol son él mismo y la unidad, es decir el nudo trébol es un nudo primo.■

El invariante G(N) tiene y una propiedad muy importante la cuál no se demostrará en este trabajo por ser complicada para este nivel y nos comformaremos con solo mencionarla:

$$\mathbf{G(A\sharp B) = G(A) + G(B)}$$

Con la propiedad anterior demostremos la siguiente afirmación:

Ningún nudo no trivial se puede desatar amarrandole un nudo junto a él.

Demostración:

Sea $A \neq N_T$, amarrémosle otro nudo B y supongamos que se desata, es decir A$\sharp$B=N_T, entonces por la propiedad se tiene que:

$G(A\sharp B) = G(A) + G(B) = G(N_T)$

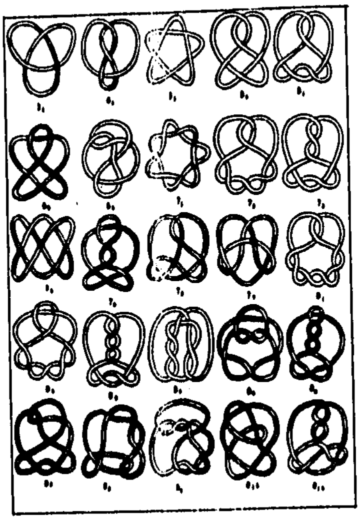
pero como vimos arriba $G(N_T) = 0$

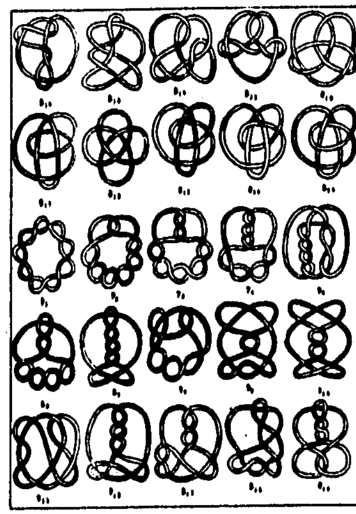
entonces $G(A) + G(B) = 0$

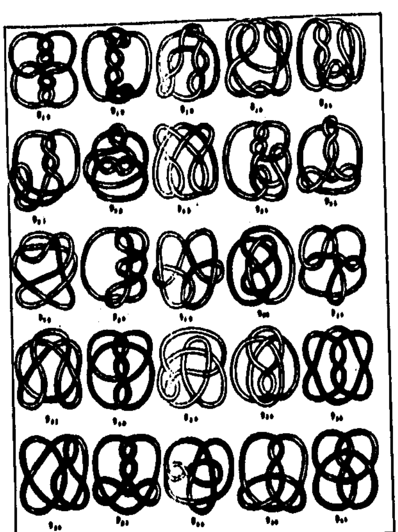
es decir $A = B = N_T$.

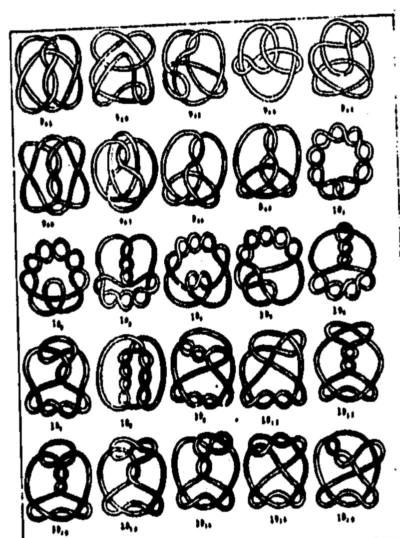
Por lo tanto, A es el nudo trivial, es decir, el único nudo que se desata al amarrarle un segundo nudo es el nudo trivial .

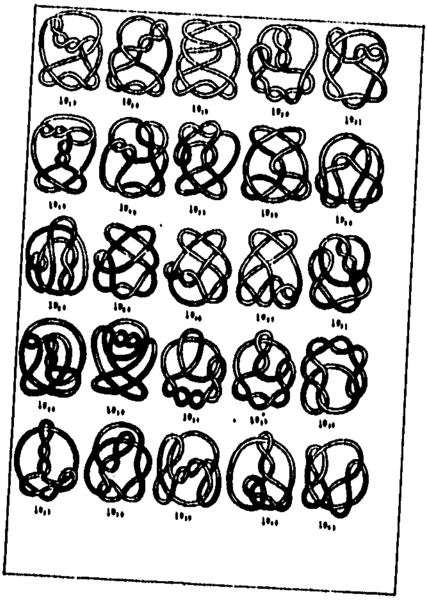
En 1926 Briggs y Alexander publicaron una tabla de nudos en el apéndice del primer libro sobre nudos de Reidemeister [16], la tabla completa se muestra continuación:

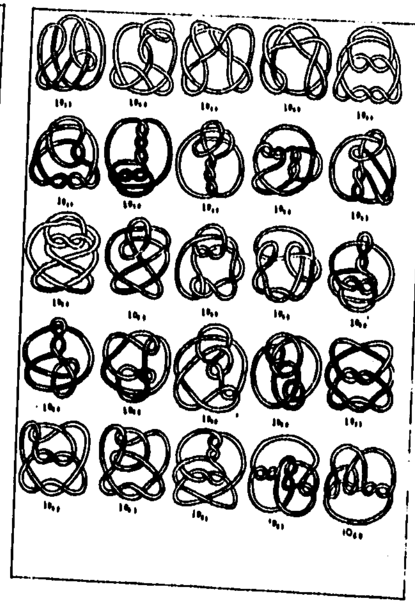


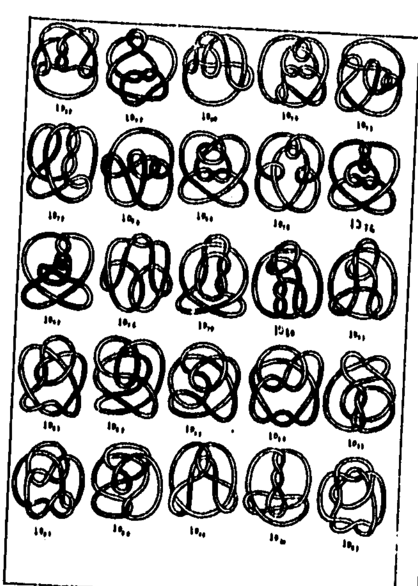


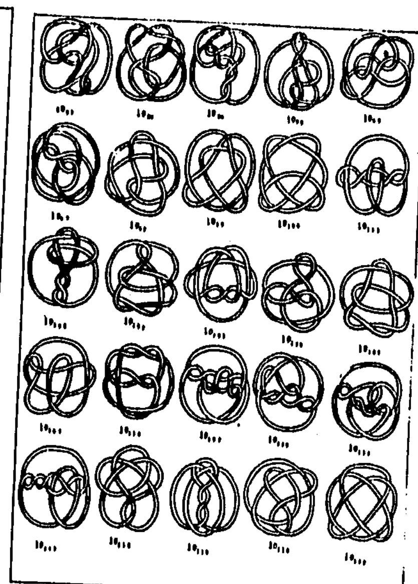






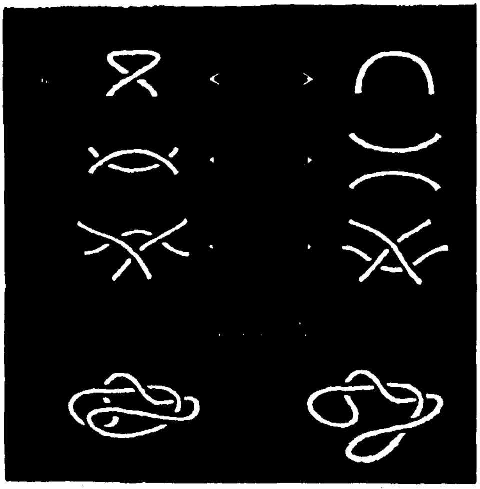






Se tiene documentado que a fines del siglo XIX comenzaron los matemáticos a interesarse por los nudos, incluso el Físico Lord Kelvin se esforzó por deducir la estructura de la tabla periódica de los elementos tomando como hipótesis que los átomos eran en realidad vórtices anudados en el seno del "eter", dicho trabajo fué infructuoso, pero sirvió para que matemáticos como G.Tait creara la primera tabla de nudos[16].

Kurt Reidemeister en los años 20 simplificó el estudio de los nudos introduciendo una pequeña colección de movimientos bidimensionales en los diagramas de los nudos los cuáles no cambian al nudo[8].



Los movimientos de Reidemeister simplifican el estudio de los nudos, donde dos nudos son iguales sólo si sus diagramas son idénticos salvo cierta combinación de movimientos de Reidemeister.

CAPITULO 5

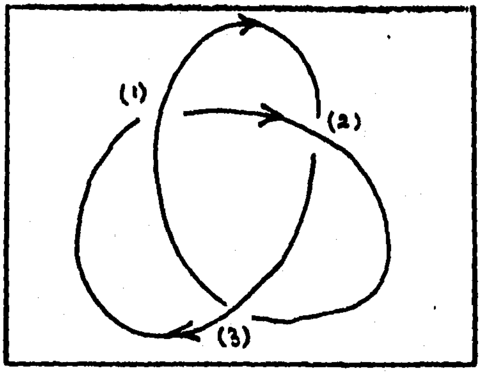
ENTRETENIMIENTOS Y NUDOS

Este capìtulo está dedicado para aquellos que gustan de jugar y entretenerse con las matemáticas, en este caso con la topología nudista (sobre nudos).

Paridad y alternancia de un nudo.

Sea N un nudo con sus cruces enumerados en forma arbitraria, entonces se puede observar que a partir de un cruce cualquiera y recorriendo todos los demás cruces en forma arbitraria hasta recorrer todo el nudo, se pasa por cada cruce dos veces (uno por encima y otro por abajo).

Por ejemplo al recorrer el nudo trèbol se obtiene la secuencia de cruces: 123123.



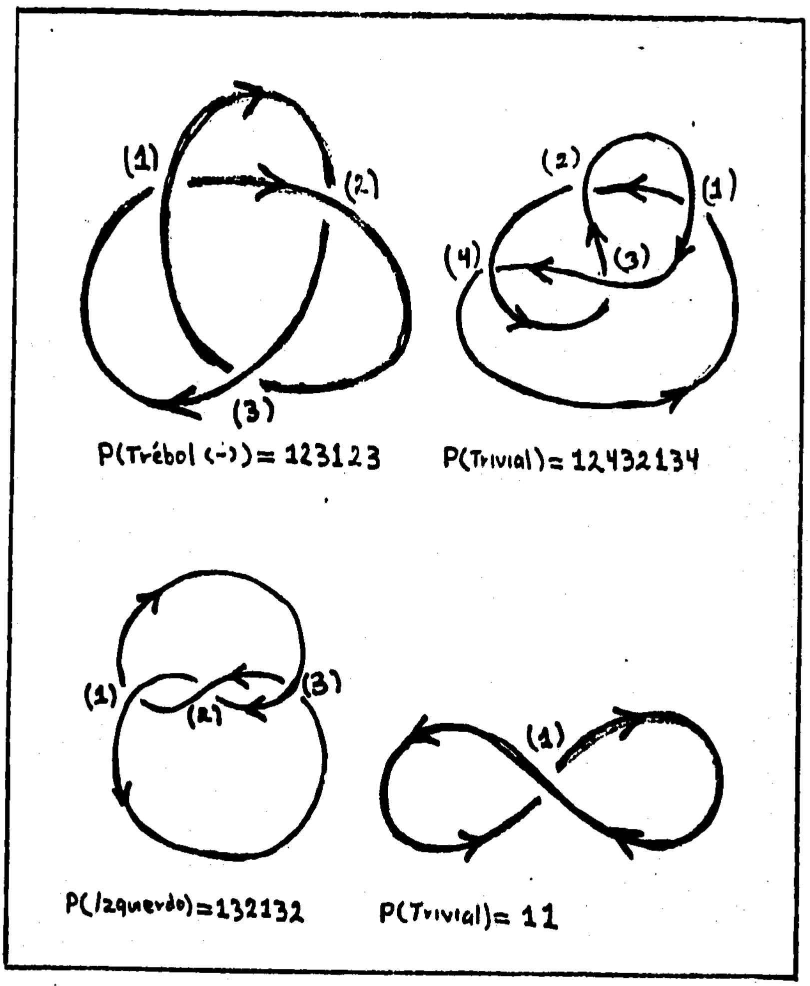
Invirtiendo la dirección se obtiene la secuencia:132132

Definimos a la *paridad* de un nudo como la secuencia de los números que se obtienen al recorrer el nudo en una dirección arbitraria.

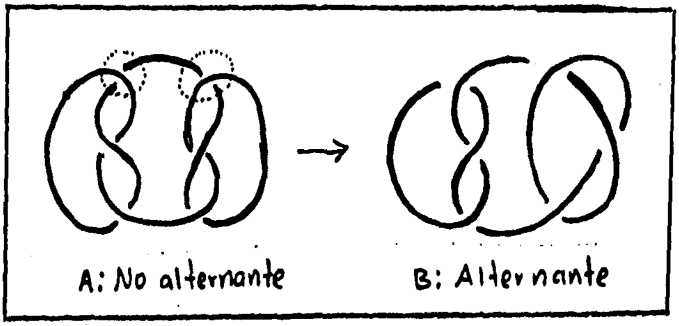
Gauss demostró que en una secuencia de cruces relacionados a una curva cualquiera, cada número de cruce aparece dos veces, una en una posición par y otra en un lugar impar.

Así pues, en cualquier nudo se cumple la propiedad invariante de que las posiciones en las que aparece un punto de cruce, están separadas por un número par de lugares, o bien son consecutivas.

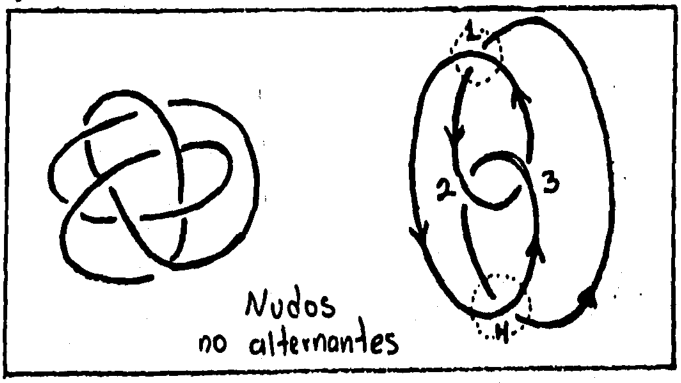
Ejemplos:



DEFINICION: Un nudo es *alternante*, si al recorrerlo en una dirección arbitraria, pasamos alternadamente por encima (E) y por abajo (A); en otro caso el nudo es no-alternante.



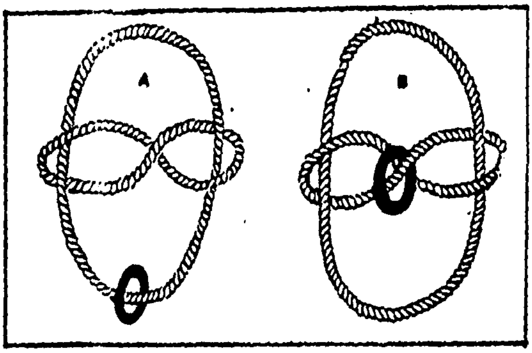
En el ejemplo anterior $A \sim B$, entonces debe ser posible convertir un nudo no-alternante a alternante, aunque la existencia de nudos no-alternantes es muy rara, pues cuando uno piensa haber encontrado un nudo no alternante, este es equivalente a un alternante:



Problemas:

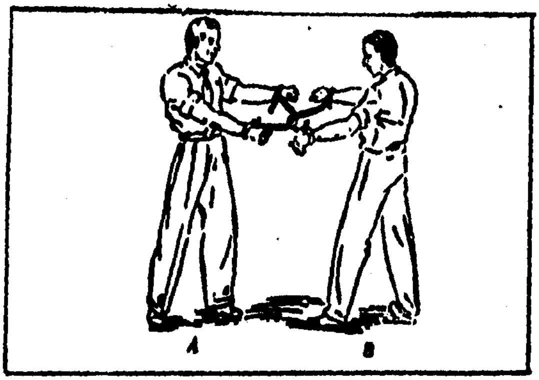
1.- Si un compañero te dice que ha dibujado un nudo, cuya paridad es 123214324, ¿ Qué le puedes afirmar, aunque no te muestre el nudo?

2.- Busquese la forma de llevar la anilla marcada de la posición A a la posición B .



3.- El problema de los presos.

Sean A y B dos personas, cada de las cuales una tienen esposadas las muñecas, y además entrelazadas entre ellas, como se muestra en la figura de abajo:

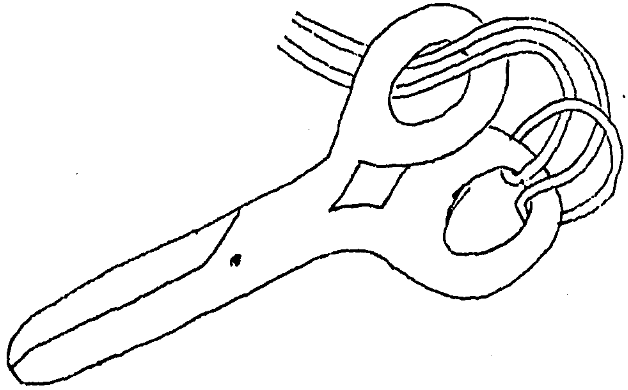


¿Podrán safarse A y B sin desatarse o romper la cuerda?; Para desatarse pueden subirse uno en el otro, o hacer cualquier maniobra, pero como se dijo entes sin romper la cuerda o desatrse de las muñecas.

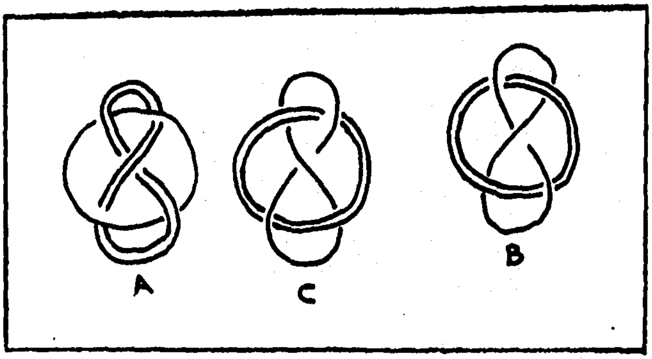
Como podrá apreciarse, a primera vista es imposible desatarse, pero realizando un segundo nudo las personas A y B pueden soltarse ¿Cómo? Intentese primero por sí mismo.

4.- El problema de las tijeras.

Dadas unas tijeras anudadas como se muestra en la siguiente figura, donde los extremos están fijos como por ejemplo a la pared o la tierra, sacar las tijeras en forma diferente a la *Alejandrina*.



5.- Lo retamos a que intente transformar el nudo (enlace) A en la forma del enlace B, es decir compruebe que $A \dashrightarrow B$ y $A \nrightarrow C$ por lo tanto $B \nrightarrow$ C .

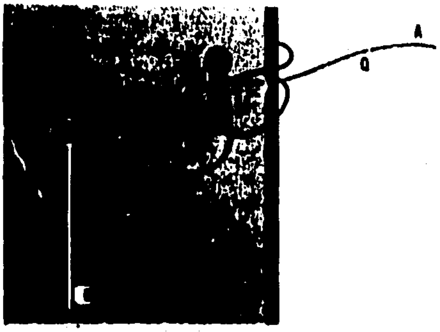


Observese que la transformación de A a B transfiere la torsión de un aro a otro conservando el número de cruces y el sentido del giro. Como A $\sim$ B, entonces no ha habido ninguna varianción en el paso de A a B; la relación topológica en el espacio tridimensional entre los dos aros se mantuvo invariable. Solo nos dimos cuenta de lo sucedido porque los dos aros están diferenciados por su color, en otro caso ni nos hubieramos enterado de lo sucedido. Entonces no tiene sentido decir que en A la cuerda gruesa está torsionada y que en B es al revés. Topológicamente tan torsiónada está en A y en B la cuerda obscura respecto de la delgada y viceversa . En el paso de A a B las cuerdas realmente no varian su relación reciproca es el espacio circundante el que ha sido torsionado con respecto de los aros.

6.- Atese las agujetas del zapato izquierdo en forma dextrogira y de forma levogira el derecho, y preguntese: ¿Permanecí invariante respecto del espacio?

7- Problema:

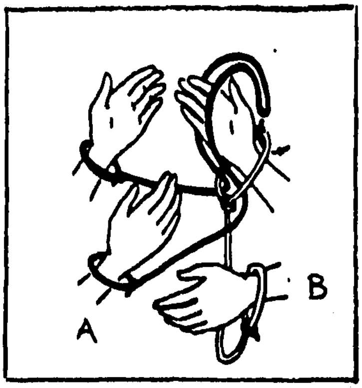
Lo desafiamos a que intente pasar la llave hacia el otro lado de la puerta (de la posición P a la Q) sin pasarla a través de la cerradura (pues se supone que no se puede):



ALGUNAS SOLUCIÓNES:

1) Se le puede afirmar que no existe un nudo con tal trayecto, ¿Porqué?

3) **Paso 1:** B forma un bucle pequeño en el centro de su cuerda como se muestra a continuación:



Paso 2: B pasa el bucle por dentro del nudo que rodea la mano derecha de A en dirección de adentro hacia afuera (del codo hacia la mano).

Paso 3: B desliza el bucle en sentido contrario a las manecillas del reloj y lo coloca sobre la mano (al otro lado de la palma de la mano de A).

Paso 4: B gira el bucle sobre la mano a reloj).

Paso 5: B atrapa la mono de A con el bucle.

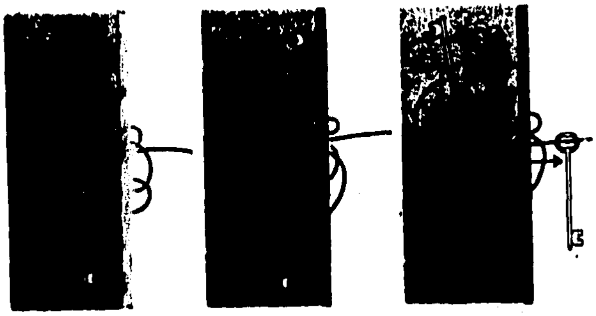
Paso 6: B pasa el bucle como en 2), pero de afuera hacia adentro.

Paso 7: B o A se jalan, y ya se pueden soltar.

4) **Solucion gráfica:**

Este problema además de entretenido esconde fenómenos y principios topológicos nada sencillos pero sí muy importantes, pues las tijera están al mismo tiempo *dentro y fuera del nudo*, es decir no había nudo o el nudo era el trivial.

7) **Solución:**



a b

i) Pase la llave del bucle de manera que cuelgue como se muestra en la figura (a).

ii) Tome la curda doble por los puntos A y B y hagase pasar el bucle por detrás y a través de la cerradura, de esta manera obtendrá dos nuevos bucles fuera del agujero (fig.b)

iii) Traslade la llave hacia arriba a lo largo de la cuerda, pasando por ambos bucles y tome los dos trozos de la cuerda por el lado opuesto de la puerta y saquense de nuevo los dos bucles a través de la cerradura dejando la cuerda en su posición original.

iv) Deslice la llave hacia la derecha, a través del bucle y .. ya.

CAPITULO 6

APLICACIONES

6.0.1 INTRODUCCION .

Desde el siglo pasado y particularmente durante la última década los científicos han incrementado el uso de las técnicas analíticas de Geometría y Topología en el diseño e interpretación de experimentos .

Los Químicos han usado gráficas para representar a las moléculas, también están interesado en el desarrollo de técnicas que les permitan sintetizar moléculas en su estructura Tridimensional; también los han usado para el estudio de los Polímeros, etc., dándoles un tratamiento similar.

Los Biólogos estudiosos de la Bioquímica y de la Biología Molecular usan la Geometría Diferencial y la Teoría de Nudos para descubrir y cuantificar la estructura tridimensional del ADN (Acido desoxirribonucleico), pues saben que la conformación espacial de este y las proteínas que actuan sobre el mismo ADN es importante para su función biológica.

Todos estos avances han permitido crear modelos matemáticos que permiten realizar observaciones cualitativas y cuantitativas en los experimentos, permitiendo predecir algunos resultados.

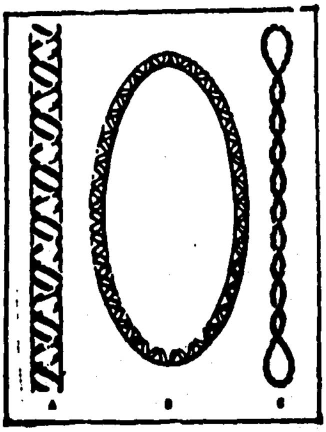
Este capítulo trata sobre algunas aplicaciones de la teoría de nudos a algunas ramas de las Ciencias Naturales.

6.1 DESCRIPCION BREVE DEL ADN.

Para los bioquímicos la molécula del ADN es de gran interés .

Veamos una breve descripción de ella:

La molécula de ADN es un polímero lineal construido como una sucesión de cuatro monómeros distintos llamados Nucleótidos. Cada monómero tiene una parte constante (Moléculas de Fosfato y del azucar desoxirribosa) y una parte variable que puede ser cualquiera de las cuatro bases nitrogenadas : Adenina (A), Guanina (G), Timina (T), y Citosina (C). Usualmente al ADN se le ve como una doble hélice formada por dos polímeros lineales antiparalelos en forma de escalera girando sobre un eje virtual, los pasamanos de la escalera son las moléculas de fosfato y desoxirribosa, mientras que los peldaños son dos de las cuatro bases mencionadas anteriormente.

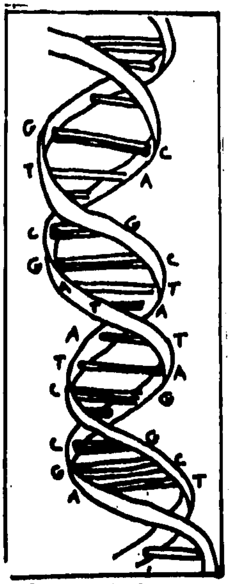


A: Modelo lineal del ADN; B: Forma relajada; C: ADN cerrado superhelicoidal.

Las cuatro bases mencionadas anteriormente especifican escencialmente toda la información genetica, la cuál está contenida en las cuatro bases mencionadas, una de cada lado y unidas entre sí mediante puentes de Hidrógeno.

En el ADN se observa el siguiente principio de complementaridad entre los dos lados de la escalera: cada vez que de un lado aparece una A esta se hallará aparejada con una T del otro lado y viceversa, mientra que toda vez que aparezca una C esta se hallará aparejada con una G y viceversa. Gracias a este hecho, la información contenida en la molécula se puede deducir de una rama de la doble hélice.

La unión de los peldaños de la escalera no es homogénea; las parejas A-T están unidas mediante dos puentes de Hidrógeno (liga energética débil) mientras que G-C lo está por tres puentes de Hidrógeno (liga energética fuerte).

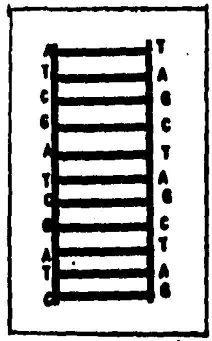


Configuración helicoidal.

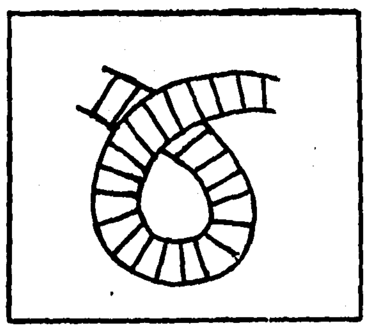
La cadena de ADN contiene toda la información necesaria para la producción de Polipéptidos que, a su vez, dan lugar a las proteínas que son la materia prima tanto estructural como funcional de todo ser vivo.

La doble hélice se abre como una cremallera, para dos procesos diferentes de la vida celular. Uno de ellos es el proceso de *replicación* en el cual el ADN se duplica generando dos copias idénticas (salvo errores de copiado o mutaciones) quedando una de estas copias en cada célula producto de la división celular. El otro proceso llamado de *transcripción* es aquel mediante el cual la información contenida en el ADN determina la manera de como una celula produce polipéptidos que a la larga darán lugar a las proteínas. Un segmento de ADN que contiene la información necesaria para la síntesis de una proteina se le denomina *Gen* .

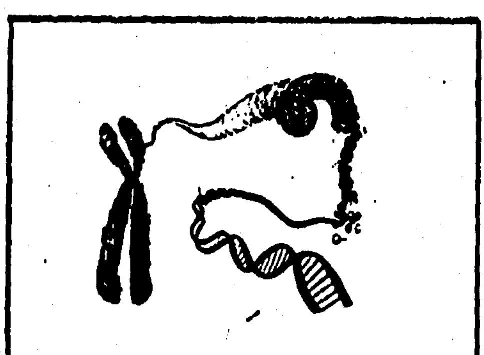
Al conjunto de material genético se le llama *Genoma.* El genoma humano consta aproximadamente de 2000 megabases (mgb) de las cuáles casi el 5% codifica para la producción de polipéptidos o regula el funcionamiento de esta producción, la función del resto en caso de haberla es desconocida.



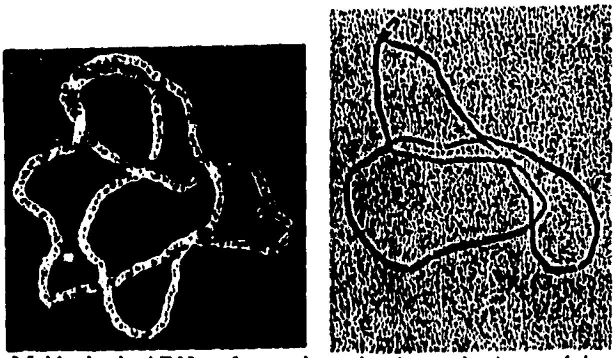
El ADN es como una escalera o cinta.



Esta cinta puede estar enrollada y anudada.



Esta cinta puede estar más anudada y más enrollada.



Molécula de ADN en forma de nudo vistos al microscópio electrónico.

6.2 GEOMETRIA Y TOPOLOGIA DEL ADN.

Sí la molécula está más enrollada o más anudada se dice que la molécula está más compactada. Para medir el grado de compactación, Brock Fuller introdujo dos invariantes geométricos[8]: la Torsión y la Retorsión (T_w y W_r) los cuáles se describirán en el Apéndice C.

CAPITULO 7

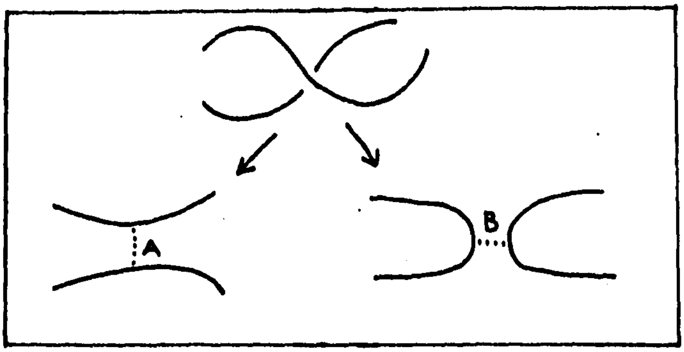
NUDOS Y FISICA.

La idea de asociar un polinomio a un nudo fué introducida en 1928 por Alexander.

Jones en 1990 mientras estudiaba las relaciones entre las algebras de Von Neuman[20], las cuales surgen en física cuántica, él descubrió una nueva clase de invariante polinomial de nudos; a raíz de esto muchos otros polinomios han sido descubiertos, uno de ellos es *el modelo de estados* o mejor conocido como el Polinomio de Kauffman (1991)[6]. El modelo de estados opera eliminando todos los cruces de un nudo o enlace que será reemplazado por circulos (ciclos) desconectados, cada cruce puede encontrarse en uno de los dos posibles *estados*, cada posible combinación de estados de cruce determina un estado del enlace además en él se da un conjunto de reglas, un simple cambio de variable en este polinomio lleva a establecer la equivalencia con el polinomio de Jones.

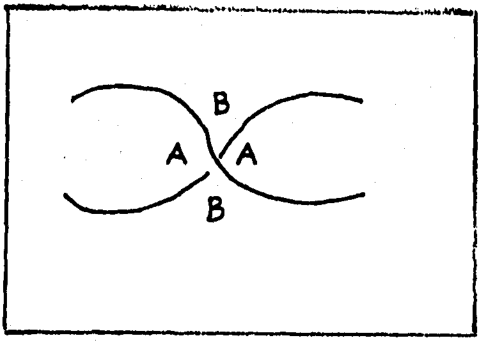
7.1 EL POLINOMIO DE KAUFFMAN.

Dado un diagrama de nudo o enlace N, a partir de este podemos obtener diagramas más pequeños por medio de las desconexiones de sus cruces. Sí desconectamos un cruce, este puede ser desconectado en dos formas, como se muestra a continuación:



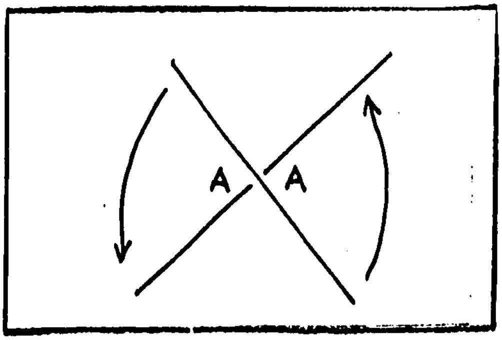
7.1.1 Tipos de desconexiones.

En cada cruce, hay cuatro regiones incidentes a este: Dos del tipo A y dos del tipo B.

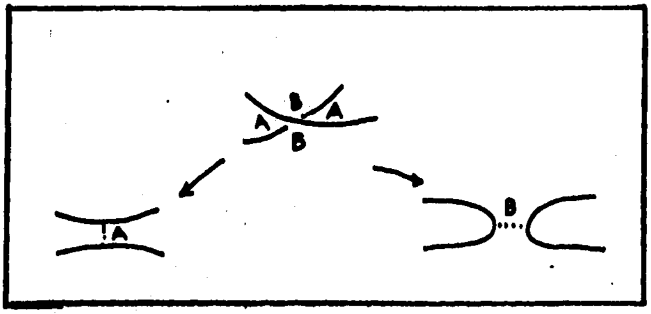


Las regiones del tipo A son aquellas que aparecen al lado izquierdo de un observador que antes del cruce camina por el segmento que pasa por abajo .

Otra forma de determinar las regiones del tipo A es haciendo girar el segmento superior contra reloj, y la primera región de encima será del tipo A:

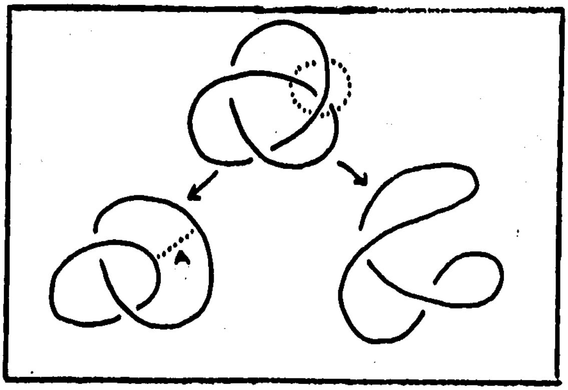


Una desconexión es del tipo A, si la desconexión une las regiones del tipo A, o del tipo B si la desconexión une las regiones del tipo B:



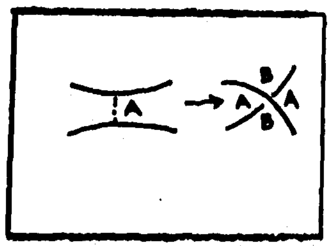
Determinación del tipo de desconexión.

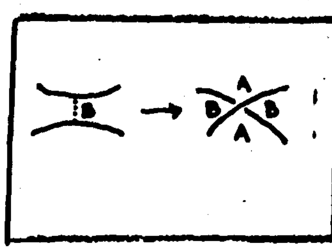
Por ejemplo si se desconecta el cruce indicado en el siguiente diagrama, se obtienen los siguientes diagramas:



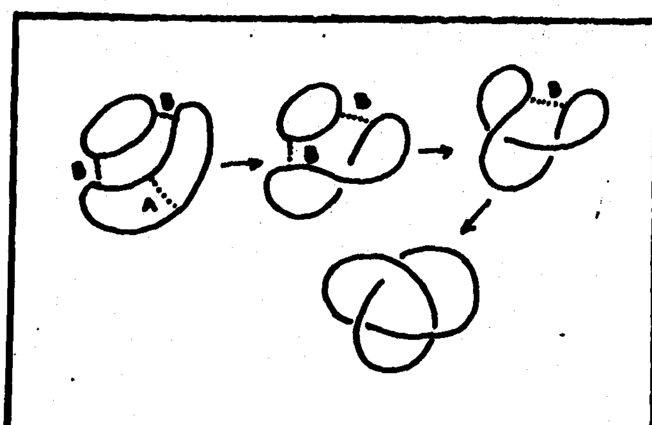
Si se repite este proceso hasta no tener ningún cruce, se puede obtener una familia de diagramas, cuyo antecesor inicial es el diagrama original.

En forma inversa, una desconexión del tipo A o B se puede utilizar para reconstruir la forma del cruce anterior, y así sucesivamente hasta reconstruir el diagrama original:

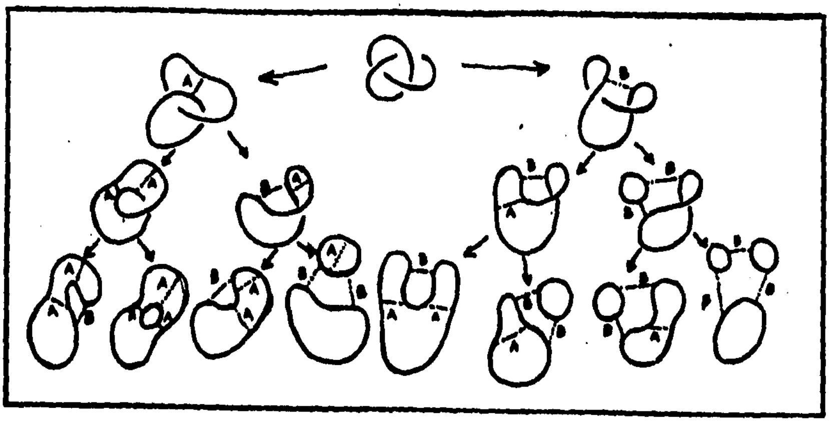




Por ejemplo una reconstrucción es como la siguiente:



Por ahora descompongamos el nudoTrébol (+):

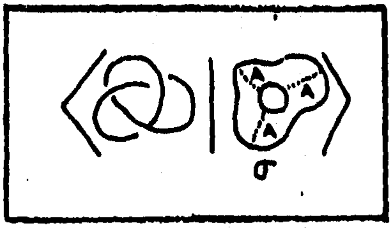


Llamemos a cada descendiente final del diagrama de nudo N, *un Estado de N*.

Notemos que en la descomposición anterior hay ocho estados; en general, si un diagrama tiene n cruces entonces hay 2^n estados del diagrama.

Sí σ es un estado de N, sea $\prec N \mid \sigma \succ$ el producto de las etiquetas del estado σ del nudo N.

Por ejemplo:



$\prec Trébol(+) \mid \sigma \succ = A.A.A = A^3$.

Sea también $\|\sigma\|$ igual al número de ciclos (círculos) menos uno en el estado σ.

Por ejemplo:

$\|$  $\| = 2 - 1 = 1$

DEFINICION: El *polinomio de Kauffman* se define como:

$$\prec N \succ = \sum_{\sigma} \prec N \mid \sigma \succ d^{\|\sigma\|}$$

donde A,B,d son variables algebraicas conmutativas.

Ejemplo: Calcular el polinomio $\prec \mathit{Trébol}(+) \succ$.

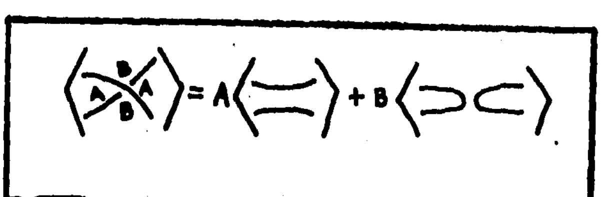
Utilizando la descomposición anterior de este nudo tenemos que:

$$\prec \mathit{Trébol}(+) \succ = A^3d^{2-1} + A^2Bd^{1-1} + A^2Bd^{1-1} + AB^2d^{2-1}$$
$$+A^2Bd^{1-1} + AB^2d^{2-1} + AB^2d^{2-1} + B^3d^{3-1}$$

es decir:

$$\prec \mathit{Trébol}(+) \succ = A^3d + 3A^2Bd^0 + 3AB^2d + B^3d^2 = A^3d +$$
$$3A^2B + 3AB^2d + B^3d^2$$

Este polinomio por sí solo no es un invariante topológico, pero veamos las siguientes reglas o condiciones bajo las cuáles este polinomio llega a ser un invariante:



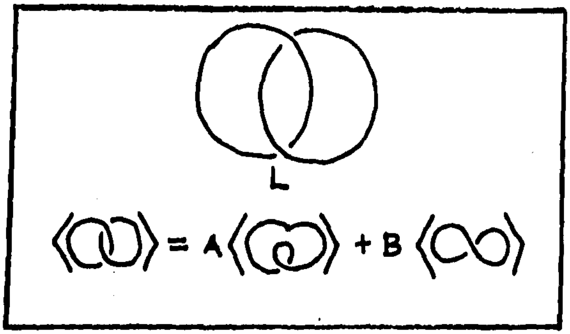
Regla 1.

Demostración:

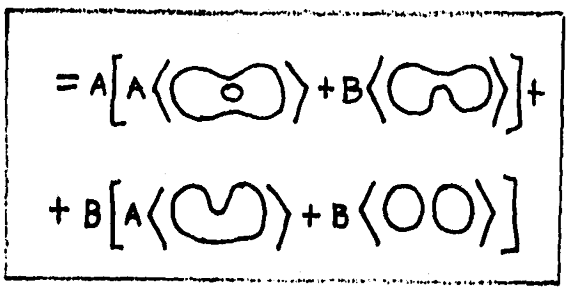
La demostración es obvia pues cada cruce puede ser desconectado en dos formas $\prec N \succ = A \prec N_1 \succ + B \prec N_2 \succ$ □

Veamos el siguiente ejemplo donde aplicamos la regla anterior:

Ejemplo: Calcular el polinomio $\prec L \succ$ aplicando la regla 1.

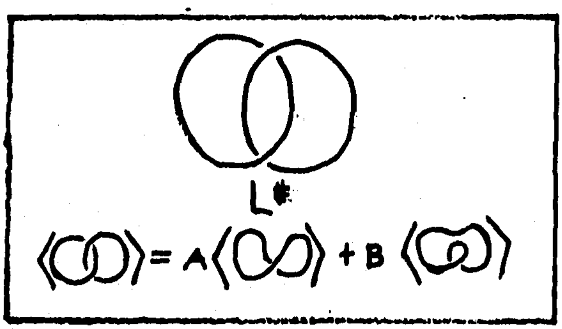


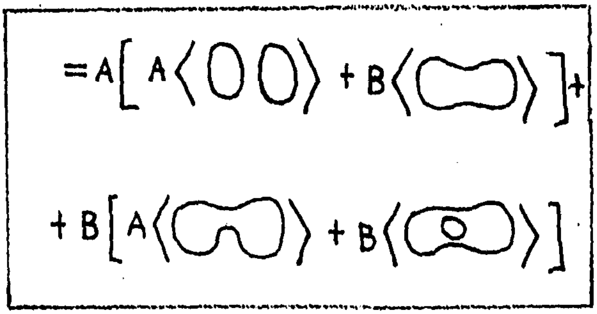
continuamos aplicando la regla:



$$\prec L \succ = A^2d^{2-1} + ABd^{1-1} + ABd^{1-1} + B^2d^{2-1}$$
$$\prec L \succ = A^2d + 2ABd^0 + B^2d$$
$$\prec L \succ = A^2d + 2AB + B^2d$$

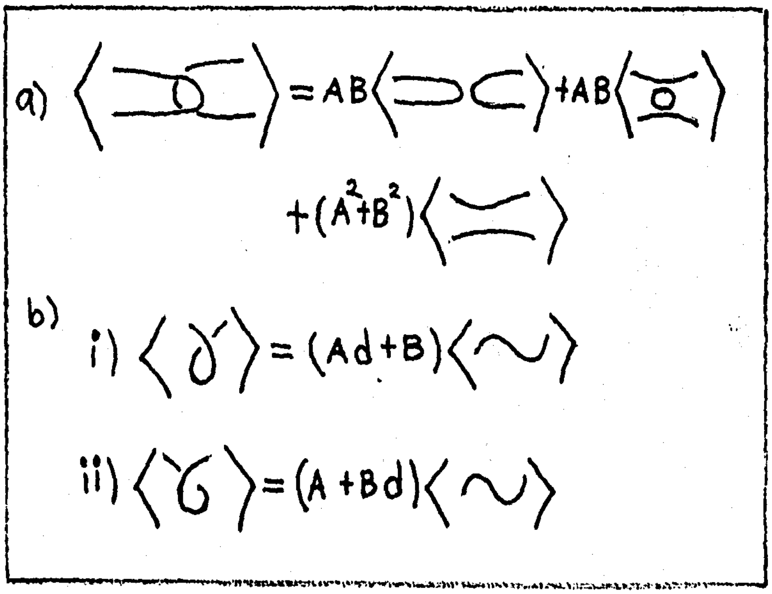
Ejemplo: Calcular el polinomio $\prec L^\sharp \succ$ aplicando la regla 1





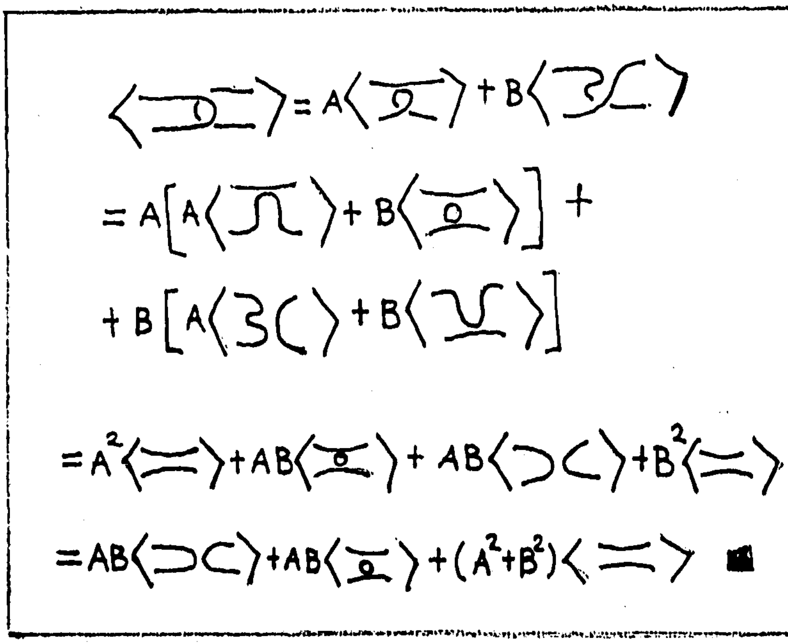
$\prec L^{\sharp} \succ = A^2d^{2-1} + ABd^{1-1} + ABd^{1-1} + B^2d^{2-1}$
$\prec L^{\sharp} \succ = A^2d + 2ABd^0 + B^2d$
$\prec L^{\sharp} \succ = A^2d + 2AB + B^2d$

Por lo tanto podemos observar que: $\prec L \succ = \prec L^{\sharp} \succ$
Regla 2:



Regla 2.

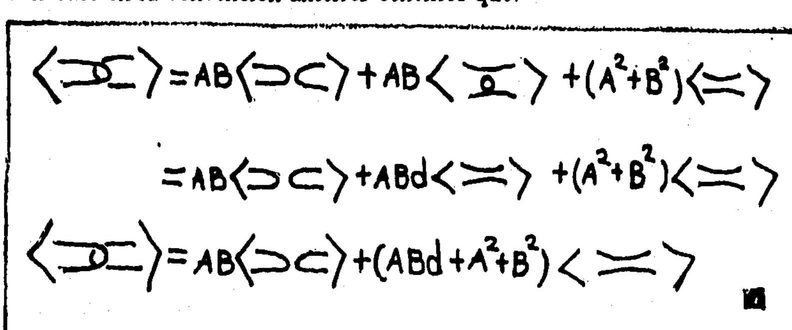
Demostración: a)

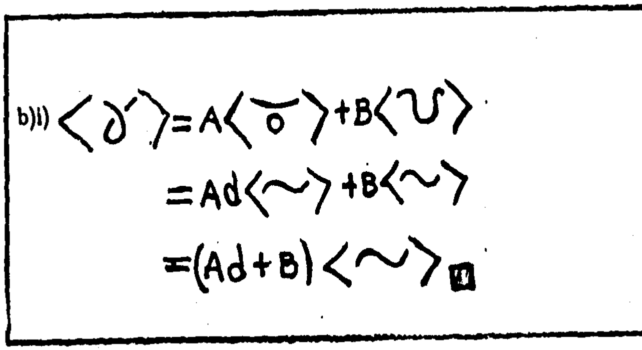


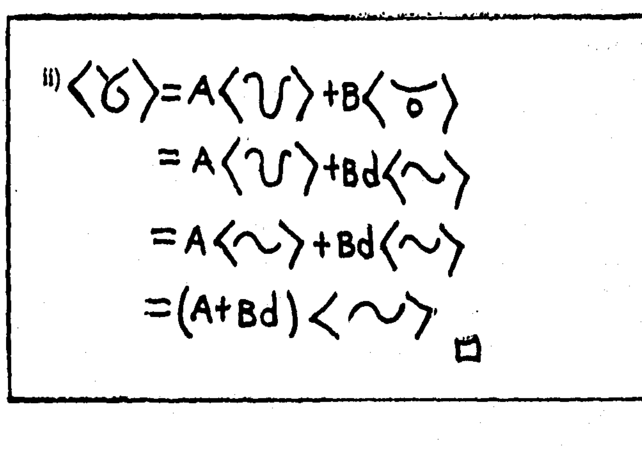
Convención:

$$\prec ON \succ = d \prec N \succ$$

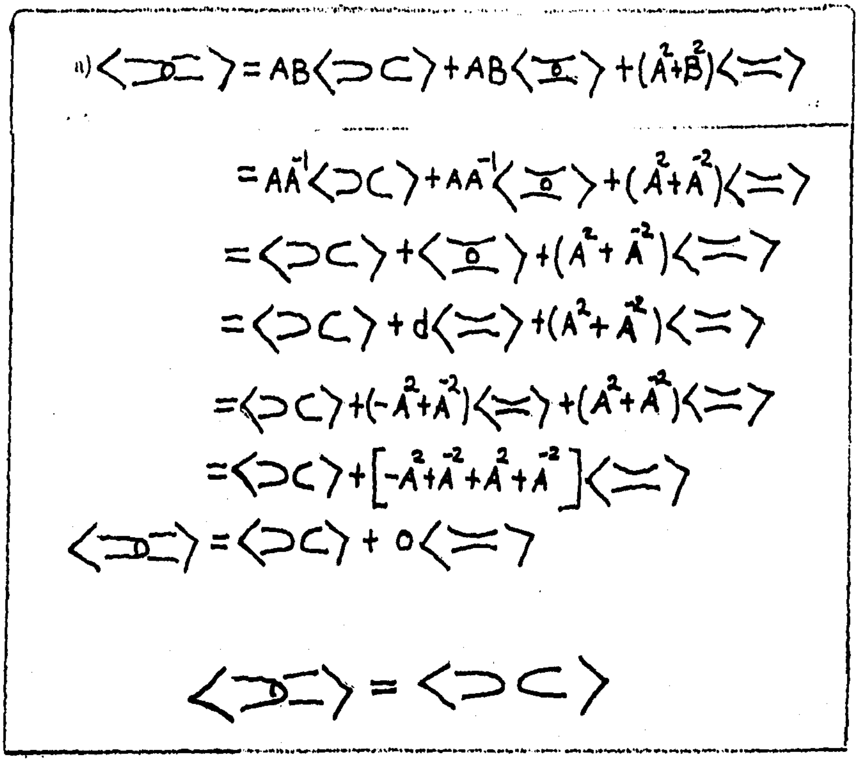
Con base en la convención anterior tenemos que:



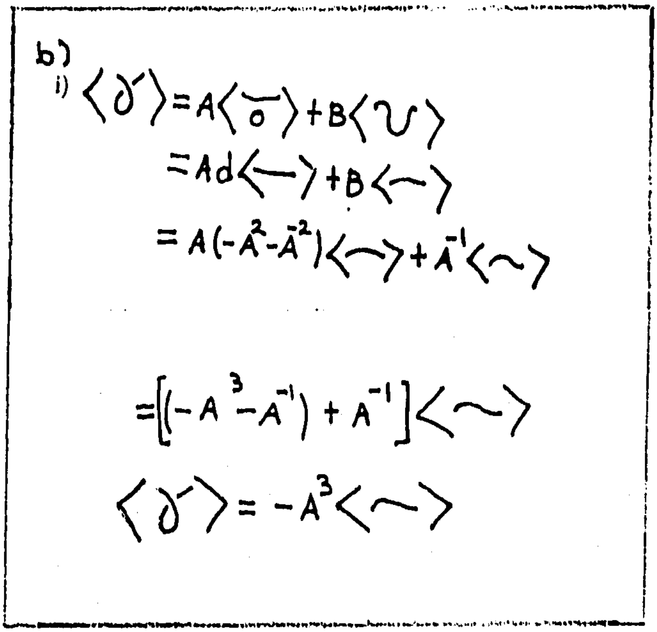


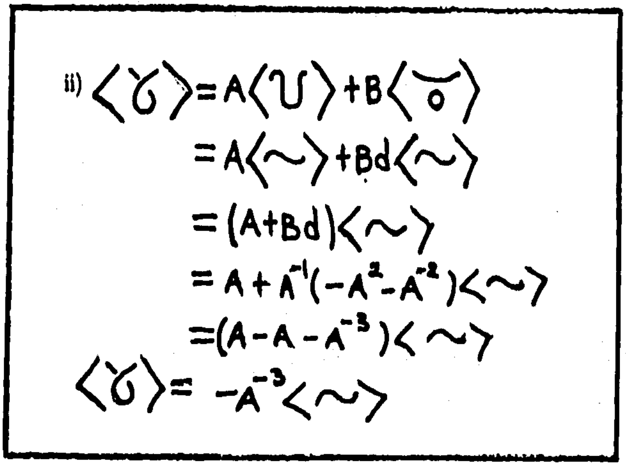


Sí hacemos que $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$, entonces tenemos que las reglas indican que:



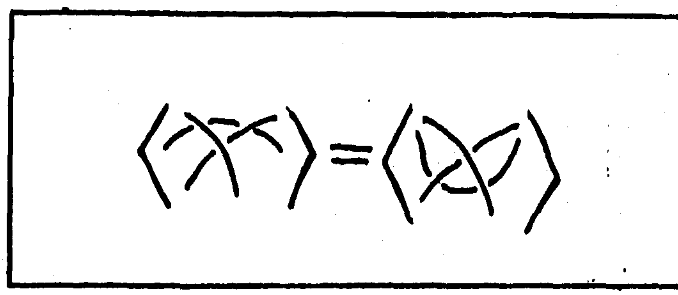
Observamos que esto justifica el movimiento de Redemeister del tipo II.


b)
i)
=A(-A2-A-2)
=[(-A3-A-1) + A-1]
= -A3


ii)
=(A+Bd)
=A+A-1(-A2-A-2)
=(A-A-A-3)
= -A-3

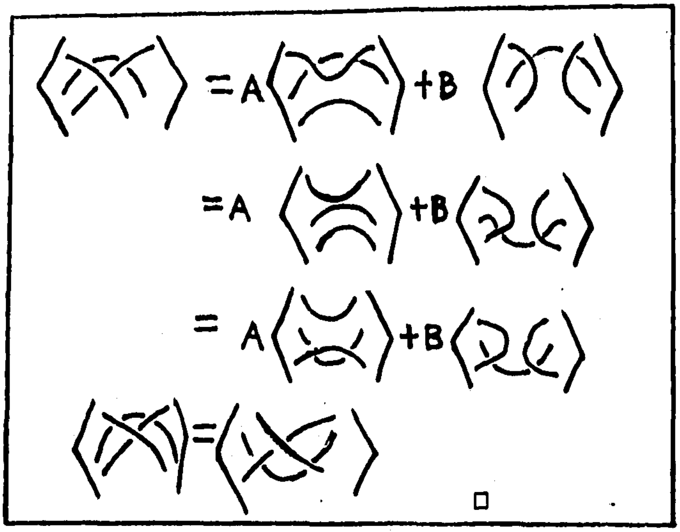
las cuáles son casí iguales salvo el signo del exponente de A.

Regla 3:



Demostración:

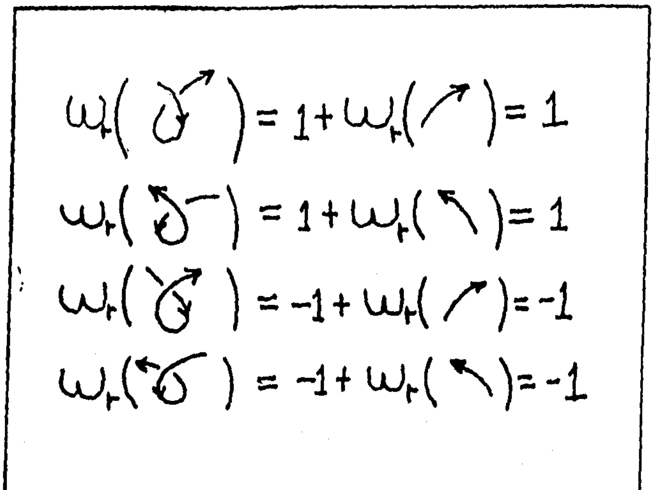
Por la regla 1:



Por lo tanto podemos afirmar hasta ahora que $\prec N \succ$ es invariante bajo los movimientos del tipo II y III de Reidemeister y se dice que $\prec N \succ$ es de *isotopía regular*.

Para que $\prec N \succ$ sea un invariante topológico o de isotopía completa, solo falta ver de que manera puede ser invariante bajo movimientos del tipo I.

En el apéndice C se define la retorsión (Writhe) de un nudo N ($W_r(N)$), la cual es invariante bajo movimientos del tipo II y III:

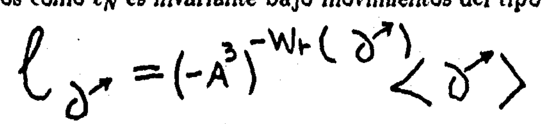


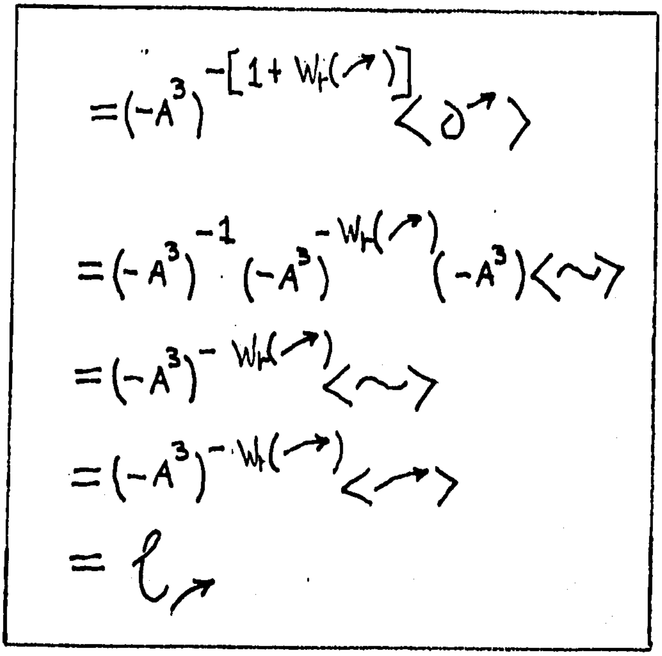
Utilicemos el $W_r(N)$ para normalizar al polinomio de Kauffman $\prec N \succ$:

DEFINICION: El polinomio $\prec N \succ$ normalizado por medio de la retorsión (Writhe) se define como:

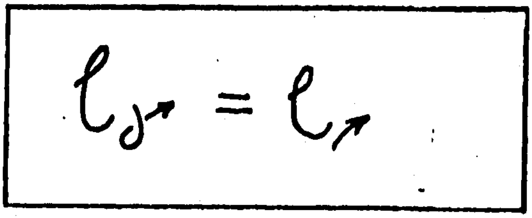
$$\ell_N = (-A^3)^{-W_r(N)} \prec N \succ$$

Veamos como ℓ_N es invariante bajo movimientos del tipo I.

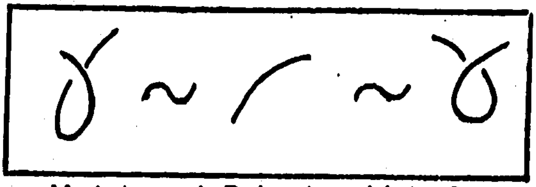
Sea 



Por lo tanto llegamos a que:



Lo cuál nos indica que ℓ_N es invariante bajo movimientos del tipo I:

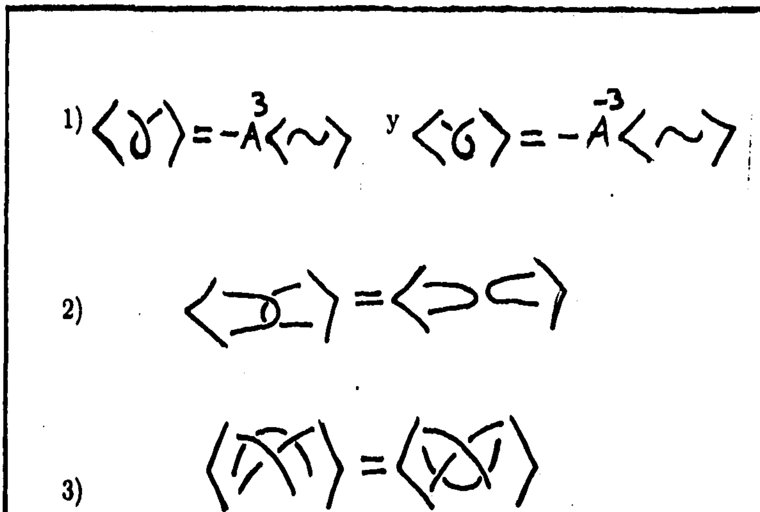


Movimientos de Redemeister del tipo I.

Hemos llegado a que:

El polinomio de Kauffman $\prec N \succ$ es un invariante topológico si se cumple que:

$B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$



y además:

$\ell_N = (-A^3)^{-W_r(N)} \prec N \succ$ donde $W_r(N)$ es la retorsiòn (Writhe) del nudo N.

EJERCICIOS:

Calcular: 

Calcular: 

Calcular $\prec Trébol(+) \succ$

Calcular $\prec Trébol(-) \succ$

Calcular: $\prec$ *del* 8 $\succ$

Calcular: $\prec$ *Derecho* $\succ$

Soluciones:

1) 

$= A^2d + 2AB + B^2d$

$= A^2(-A^2 - A^{-2}) + 2AA^{-1} + A^{-2}(-A^2 - A^{-2})$

$= -A^4 - 1 + 2 - 1 - A^{-4})$

$= -A^4 - A^{-4}$ ■

2) $\langle \bigcirc \rangle$

$= d^{1-1} = 1$ ■

3) $\prec$ *Trébol*$(+) \succ = A^3d + 3A^2B + 3AB^2d + B^3d^2$

$= A^3(-A^2 - A^{-2}) + 3A^2A^{-1} + 3AA^{-2}(-A^2 - A^{-2}) + A^{-3}(-A^2 - A^{-2})^2$

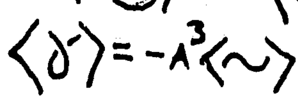
$= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$ ■

4) $\prec$ *Trébol*$(-) \succ = A^3d^2 + 3A^2Bd + 3AB^2 + B^3d$

$= A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + 3A^2A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + 3AA^{-2} + A^{-3}(-A^2 - A^{-2})$

$= -A^{-5} - A^3 + A^7$ ■

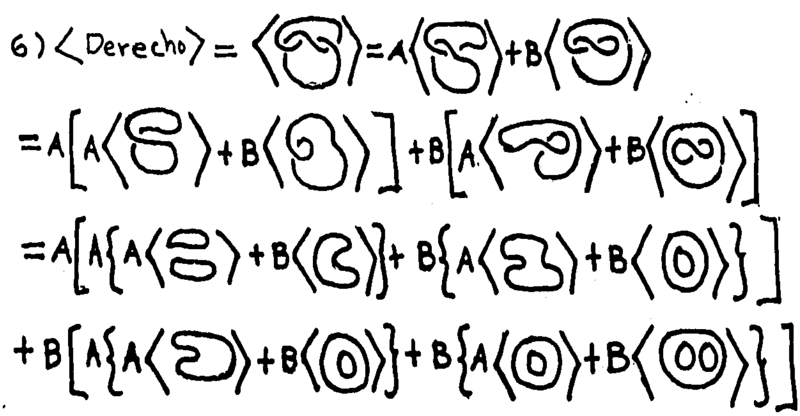
5) 

por la regla : 

$= -A^4(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7})$

$= A^8 + 1 - A^4 - A^{-4} + A^{-8}$

$= A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$ ■



$= A^3d + A^2B + A^2B + AB^2d + A^2B + AB^2d + AB^2d + B^3d^2$
$= A^3d + 3A^2B + 3AB^2d + B^3d^2$
$= -A^5 - A^{-3} + A^{-7} = \prec Tr\acute{e}bol(+) \succ$

Proposición:
Sí N y $N^\sharp$ son dos nudos especulares entre sí, entonces:
$\prec N \succ (A^{-1}) = \prec N^\sharp \succ$
y además:
$\ell_N(A^{-1}) = \ell_{N^\sharp}$

donde (A^{-1}), significa invertir el signo de los exponentes de las expresiones algebraicas de los polinomios de Kauffman de los dos nudos especulares entre sí es decir si los exponentes son positivos cambiarlos a negativos y veceversa.

Demostración:

Invirtiendo los cruces en cada nudo, se invierten los papeles de A y A^{-1} en la definición de $\prec N \succ$ y ℓ_N ∎

Ejemplo: Ya vimos que:

$\prec Tr\acute{e}bol(+) \succ = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$
$\prec Tr\acute{e}bol(-) \succ = -A^{-5} - A^3 + A^7$
es claro que:
$\prec Tr\acute{e}bol(+) \succ (A^{-1}) = \prec Tr\acute{e}bol(+) \succ$

además como:
$W_r(Trébol(+)) = 3$
$W_r(Trébol(-)) = -3$
entonces:
$\ell_{Trébol(+)} = (-A^3)^{-3}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) = A^{-4} + A^{-12} + A^{-16}$
$\ell_{Trébol(-)} = (-A^3)^3(-A^{-5} - A^3 + A^7) = A^4 + A^{12} + A^{16}$
es decir $\ell_{Trébol(+)}(A^{-1}) \neq \ell_{Trébol(-)}$
concluimos que:
$\ell_{Trébol(+)} \neq \ell_{Trébol(+)}$
es decir, no son isotópicos, pues sus polinomios corchete normalizados no son iguales.

Se deja como ejercicio al lector resolver lo siguiente:
1) $\prec 8\ derecho \succ = \prec 8\ izquierdo \succ = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$
y que $\ell_{8derecho} = \prec 8\ derecho \succ = \ell_{8izquierdo}$
es decir comprobar que son isotópicos.

2) Demostrar que los nudos derecho y Trébol (+) son isotópicos.

CONLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha pretendido que el estudiante de Bachillerato perciba de una manera gradual, de lo trivial a lo complejo aunque no se està excento de saltos, y que que la noción de nudo es esencialmente una matemática cualitativa, es decir Geomètrica pues difiere de otras teorìas en las que son puros càlculos, y por otro lado que el estudiante perciba que objetivo principal de la teoría de nudos es saber diferenciar algunos nudos de otros y para lo cuál es necesario intentar buscar algunas técnicas que permitan resolver este problema; otro objetivo perseguido es el de despertar el interés del estudiante de Bachillerato hacia otro tipo de problemas matemáticos poco abordados en la actualidad a ese nivel y en los cuáles hay bastante por profundizar.

Debido a la gran pretendida sencillez del texto y a la presentación de una manera natural, la noción de nudo (nudos usuales y después nudos matemáticos) se recomienda este texto como una guía útil (según la habilidad del profesor) que puede ser introducida en diferentes partes del Plan de Estudios, en lo que actualmente es llamado *La enseñanza de las matemáticas vía resolución de problemas.*

Sí este texto logra despertar el interés de los profesores y en particular de los estudiantes, el objetivo se habrá alcanzado ya que este texto no contiene en rigor nada nuevo, excepto posiblemente el interés de despertar una actitud matemática de los estudiantes hacia campos poco explotados y explorados.

JUNIO DE 1996, ANDRES GOMEZ VALLE.

APENDICE A

7.2 EL GRUPO DE UN NUDO.

El grupo de un nudo es otro invariante que permite casi la clasificación completa de los nudos. Generalmente este consiste en descubrir las distintas formas en que es posible cruzar el espacio tridimensional sin tropezarse con un nudo inmerso en él.

El espacio que rodea a un nudo y las trayectorias que lo cruzan pueden ser descritos geométricamente. Henri Poincaré descubrió cómo pueden representarse algebráicamente propiedades de una configuración geométrica.

Veamos pues como a un nudo se le puede asociar una estructura de grupo:

Sean:

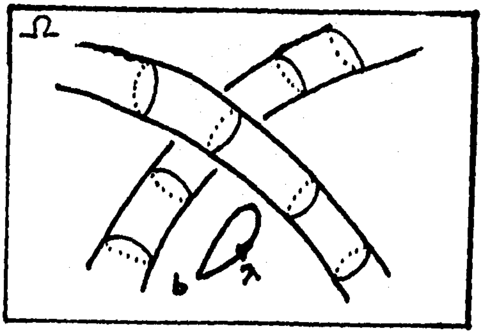
Ω : El complemento del nudo N $((R^n - N)$:el espacio R^3 que no contiene a N)

b: Un punto fijo en Ω.

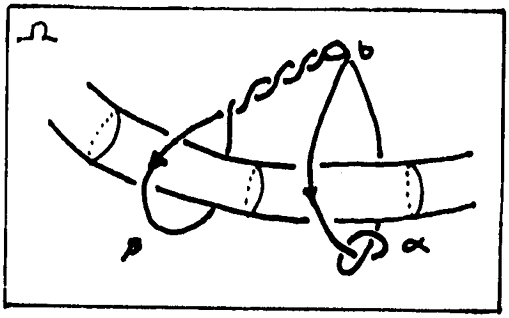
n: Conjunto de caminos unidimensionales que parten de b, recorren Ω sin tropezarse con N y retornan a b .

Convenciones:

α y β son dos caminos equivalentes, si uno de ellos puede deformarse hasta hacerse coincidir con el otro (durante el proceso de deformación se permite que el camino sea estirado o contraído, incluso que se cruce consigo mismo, pero su punto inicial y final no deben alterarse, es decir, los extremos deben de estar fijos).

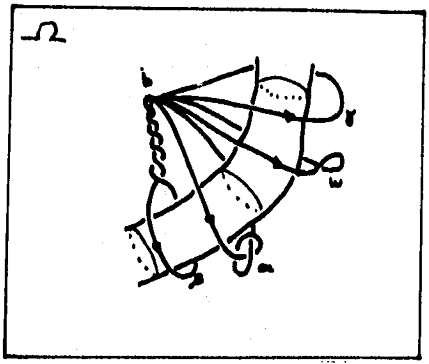


λ es un camino equivalente a b (pues λ puede contraerse hasta b).

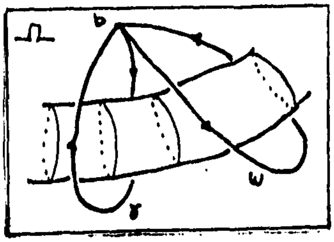


α es un camino equivalente a β, pues β puede destorcerse y el nudo de α se puede eliminar resultando los dos caminos equivalentes.

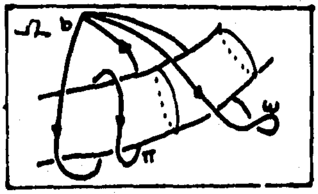
Estos procesos de deformación se llaman *Homotopías* y a los caminos α y β se les llama *Homotópicos.*



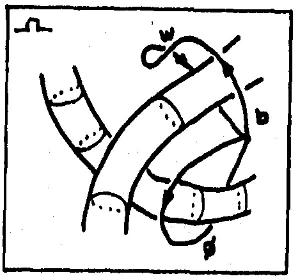
α, β, γ y ω son homotópicos, pues el camino β puede destrenzarse, el nudo de α puede eliminarse y el camino ω puede desdoblarse y por lo tanto todos ellos son equivalentes, es decir homotópicos.



γ y ω no son homotópicos pues tienen orientación diferente, aunque rodeen al mismo segmento de nudo.



π y ω no son homotópicos, ya que aunque rodeen al mismo segmento de nudo en el mismo sentido, π lo rodea dos veces y ω solo una vez.



ϕ y ω no son homotópicos, puesto que rodean a diferentes segmentos de nudos.

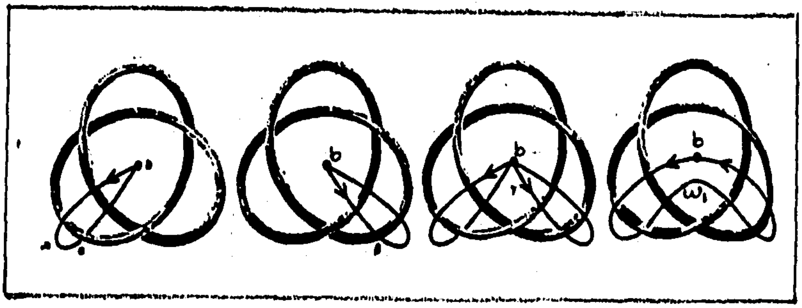
Si α es un camino, entonces la clase de equivalencia de todos los caminos homotópicos a α se denota por $[\alpha]$.Con esto se reduce el número de caminos de Ω.

7.3 MULTIPLICACION DE CLASES.

Veamos pues como a un nudo se le puede asociar una estructura de grupo.

Sí $b, \alpha, \beta, \gamma \ \varepsilon \ \Omega$, entonces $[\gamma] = [\alpha][\beta]$ es el producto de dos clases de caminos de Ω, donde γ es el camino $\alpha\beta$ que resulta de componer el camino α con el camino β.

$\alpha\beta$ es el camino que parte de b, recorre α regresando a b para luego recorrer β.



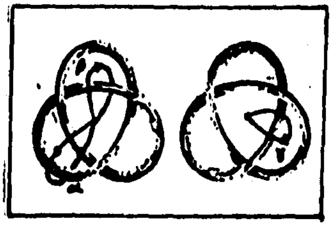
Observese que el camino $w_1 \ \varepsilon \ [\alpha\beta]$.

7.4 ASOCIACION DE CLASES.

Se puede observar fácilmente que la multiplicación de clases es una operación asociativa, es decir:

Para todo camino $\alpha, \beta, \gamma \ \varepsilon \ \Omega$ se cumple que:

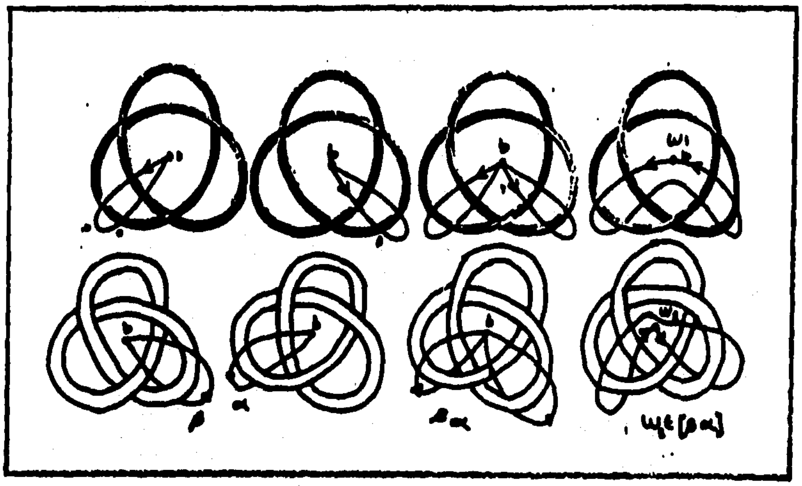
$([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma])$



7.5 CONMUTATIVIDAD DE CLASES.

En general, la conmutatividad en la multiplicación de clases no es válida, es decir:

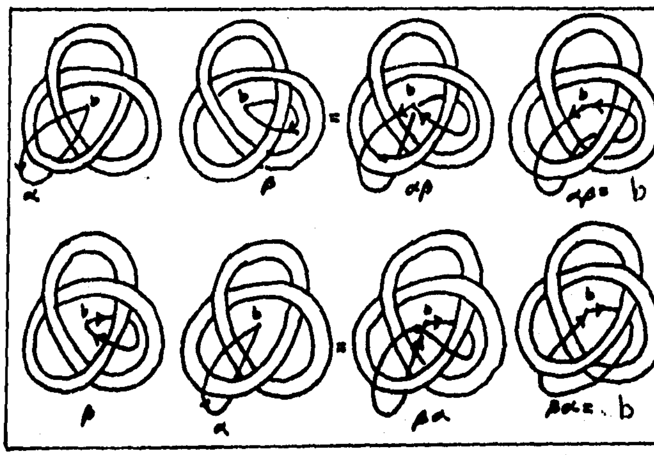
Para todo camino $\alpha, \beta \in \Omega$, $[\alpha][\beta]$ no siempre es igual a $[\beta][\alpha]$:



Así pues esto muestra que $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ pues el camino w_1 comienza en b rodeando primero a un segmento diferente del que rodea al principio w_2. Por lo tanto *la conmutatividad no es válida en general en la multiplicación de clases.*

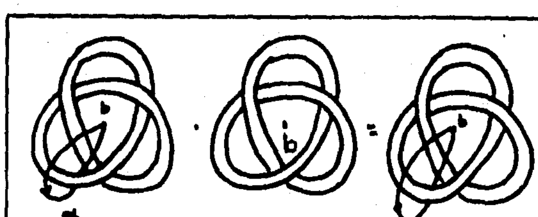
7.6 EXISTENCIA DE INVERSOS.

Es claro observar en las siguientes figuras, que $\alpha\beta = b$ y que $\beta\alpha = b$, ya que el producto en general no es conmutativo, entonces α y β son caminos inversos uno del otro:



Observe que los caminos $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ son el mismo camino salvo que en sentidos contrarios.

Además con el hecho anterior se puede ver fácilmente que el camino b actua como la *identidad.*



7.7 LA IDENTIDAD.

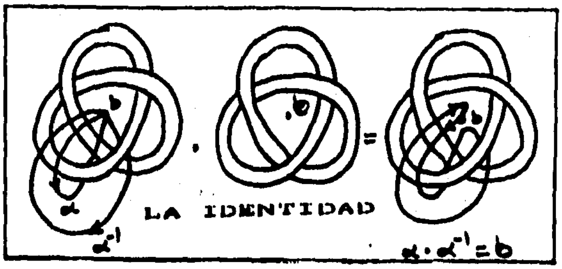
¿A qué es igual $[\alpha]\,[b]$ para toda $\alpha\varepsilon\Omega$?

Es claro que $[\alpha]\,[b] = [b]\cdot[\alpha]$, es decir, al igual que en los números enteros el número uno es la identidad $(a\cdot 1 = 1\cdot a = a\ , a\varepsilon Z)$ y en la multiplicación de clases $[b]$ actùa como la identidad.

7.8 INVERSA DE CLASES.

Como ya se dijo antes: Sí $\alpha\beta = b$, entonces α y β son dos caminos inversos uno del otro.

Sí α es un camino, entonces se dice que α^{-1} es el mismo camino α pero recorrido en sentido contrario.



$[\alpha]\,[\alpha]^{-1} = [\alpha]^{-1}\,[\alpha] = [b]$

Por todo lo anterior se concluye que:

i) El producto de clases es asociativo, es decir:

Para todo $\alpha, \beta, \gamma\ \varepsilon\ \Omega$ se tiene que: $([\alpha]\,[\beta])\,[\gamma] = [\alpha]\,([\beta]\,[\gamma])$.

ii) Existe la unidad, es decir:

$\exists\ e\ \varepsilon\ \Omega \mid [\alpha]\,[b] = [b]\,[\alpha] = [\alpha]$.

iii) Existencia de inversos, es decir:

Para todo $\alpha\ \varepsilon\ \Omega\ \exists\ \alpha^{-1} \mid [\alpha]\,[\alpha]^{-1} = [\alpha]^{-1}\,[\alpha] = [b]$

En algebra, a todo conjunto dotado de una estructura como la anterior, se le llama *Grupo*; y sí los elementos del grupo son las clases de homotopía de caminos que surcan el complemento del nudo, entonces se le llama *Grupo del Nudo*.

Así pues, al deformarse un nudo N_1 en otro N_2 los caminos de Ω_1 se convertirán en caminos de Ω_2; más aún, si α_1 es homotópico a α_2 con $\alpha_1,\alpha_2\ \varepsilon\ \Omega_1$, entonces β_1 es homotópico a β_2 donde $\beta_1,\beta_2\ \varepsilon\ \Omega_2$ y además α_1 es homotópico a β_1 y α_2 es homotopico a β_2 e inversamente también. Por lo tanto el grupo del nudo de los dos nudos son equivalentes.

Esto significa que *al deformarse un nudo cualquiera, su grupo nodal permanece invariante.*

Pero usted puede preguntarse, si en un nudo existe un número infinito de clases de caminos ¿Cómo distinguir unos nudos de otros? Es claro que esto solo es posible si se pueden mostrar explícitamente los objetos que describen al grupo nodal .

A los objetos que describen al grupo nodal se les llama *generadores del grupo del nudo* y a las ecuaciones que los describen se les llama *relaciones del grupo del nudo* o simplemente *generadores* y *relaciones* respectivemente.

7.9 DEDUCCION DE LOS GENERADORES.

Para deducir los generadores de algún nudo, seguir los siguientes pasos:

i) Elegir un punto base fijo b en el complemento Ω del nudo

ii) Trazar un camino desde b hacia cada segmento del nudo de tal manera que rodee al nudo y retorne a b.

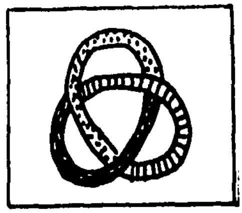
iii) Los caminos trazados en el paso ii) originan cada uno una clase de homotopía del grupo del nudo.

Las clases generadas en el paso iii) son llamadas *generadores del grupo.*

7.10 DEDUCCION DE LAS RELACIONES.

En cada punto de cruce se reunen los segmentos del nudo, uno encima y dos por abajo, donde cada segmento está asociado a algún generador.

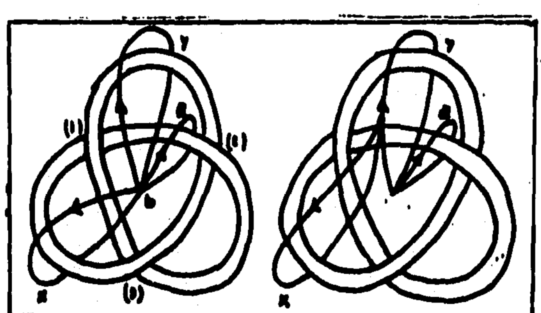
Así, en cada cruce los generadores determinan ciertas relaciones entre ellos.



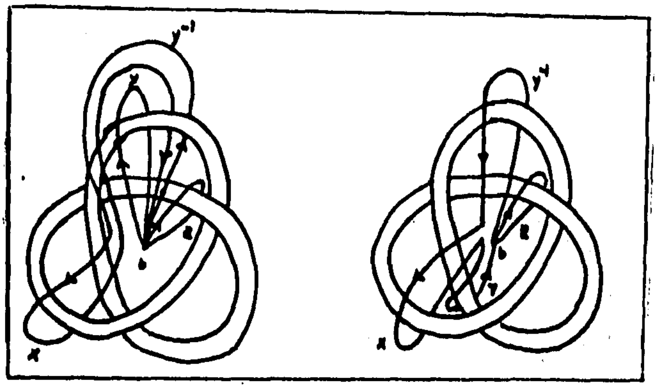
Los tres segmentos del nudo Trébol .

Veamos un ejemplo:

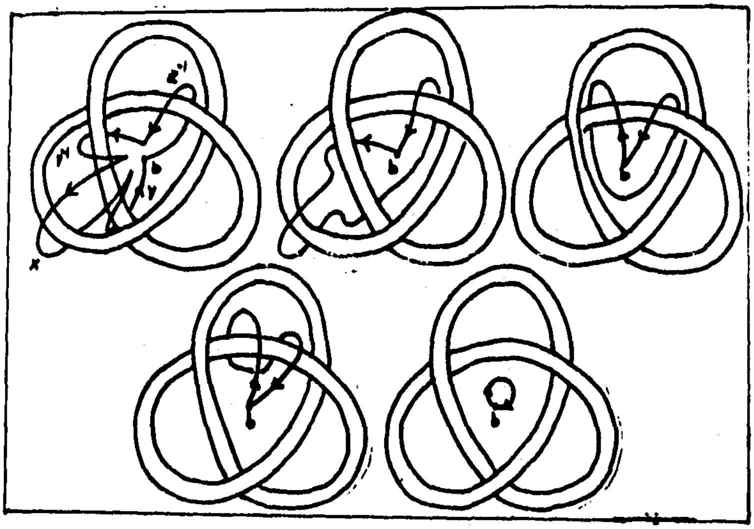
En el cruce de la parte superior izquierda (cruce(1)) el segmento asociado al generador $[y]$ está situado encima, y los segmentos asociados a $[x]$ y $[z]$ están empalmados por abajo. En cada punto de cruce los generadores se conducen de forma diferente lo cuál determina ciertas relaciones entre ellos:



Los generadores del grupo son $[x]$,$[y]$ y $[z]$. Levantando el extremo de x a lo largo de y, se origina un camino homotópico a z.



Entonces en el cruce 1 se determina la siguiente ralación :
$[y]^{-1}\,[x]\,[y] = [z]$, o multiplicando por $[z]^{-1}$ por la derecha:
$[y]^{-1}\,[x]\,[y]\,[z]^{-1} = [b]$ como se muestra en los siguientes diagramas:



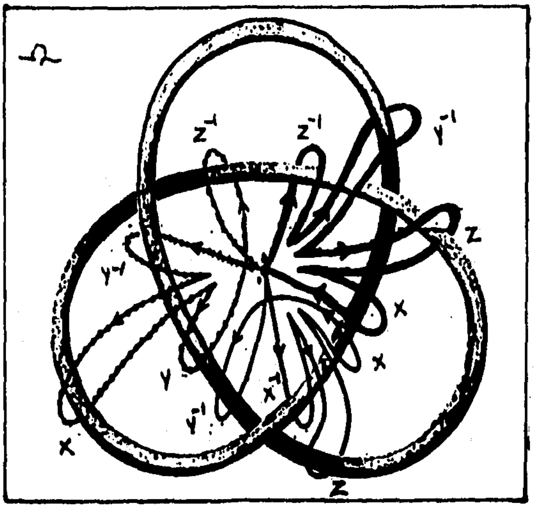
Así pues, $[y]^{-1}\,[x]\,[y]\,[z]^{-1} = [b]$ es una relación del grupo del nudo.

Analogamente se encuentran las otras dos relaciones correspondientes a los otros dos puntos de cruce:

RELACIONES DEL GRUPO NODAL DEL NUDO TREBOL:

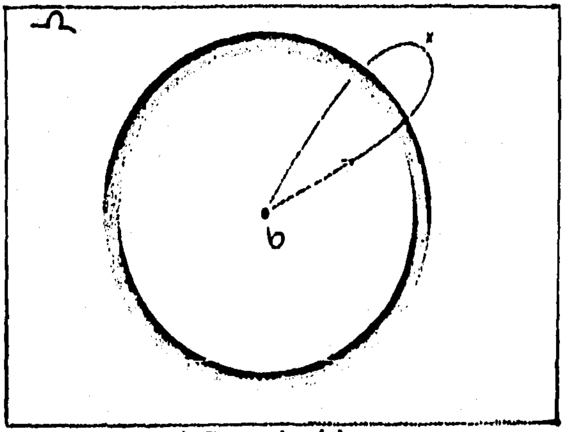
(Vease la siguiente figura)

$[y]^{-1}[x][y][z]^{-1} = [b]$. -.-.-.-.-.-.-Linea continua y punteada.
$[z]^{-1}[y]^{-1}[z][x] = [b]$ ....Linea gruesa.
$[x]^{-1}[z][x][y]^{-1} = [b]$ ———— Linea normal.

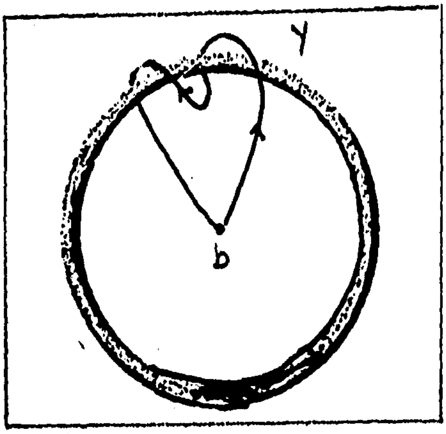


Los caminos de cada relación se han dibujado de forma diferente para poder distinguirlos.

¿Cuál será el grupo del nudo Trivial?



a) Generador $[x]$



b) Generador $[y]$

Como se puede observar en la figura b) el camino y es igual a darle dos vueltas al nudo, es decir: $[y] = [x] \cdot [x] = [x]^2$.

En general el nudo trivial no tiene relaciones, ya que cualquier camino en el nudo trivial puede ser representado por potencias de $[x]$ y de $[x]^{-1}$.

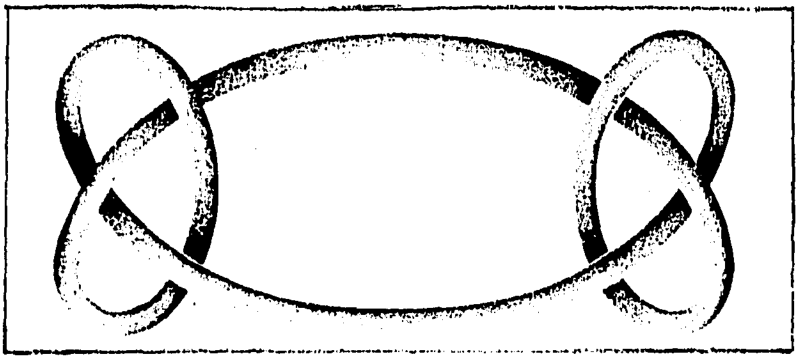
En 1910 Max Dehn [16] demostró que los generadores y las relaciones dan una descripción completa del grupo del nudo.

Observaciones:

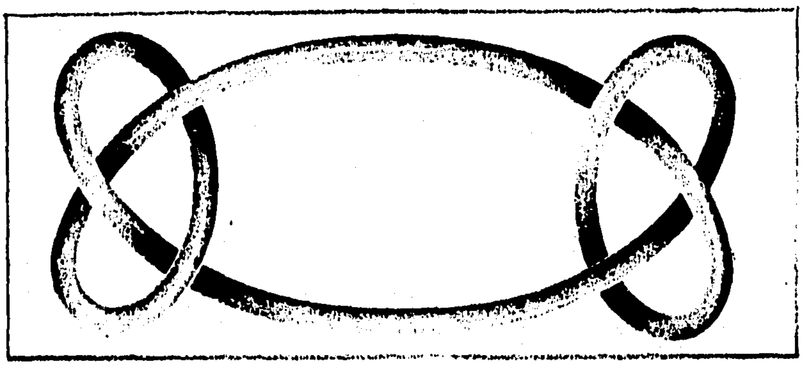
Es claro que sí $[x], [y]$ y $[z]$ son generadores de algún nudo, entonces se cumple que:

i) $[x]\,[x]^{-1} = [b]$
ii) Sí $[x] = [y]$, $\Rightarrow [x]\,[z] = [y]\,[z]$ y $[x]\,[z] \neq [z]\,[y]$.
iii) $[xy]^{-1} = [y]^{-1}\,[x]^{-1}$.

No todos los nudos quedan caracterizados por su grupo , es decir, al igual que en los otros invariantes, este invariante caracteriza casi a todos los nudos, pero hay algunos nudos que tienen grupos idénticos y sin embargo son distintos como el nudo Llano y el nudo Rizo:



Nudo Llano



Nudo Rizo

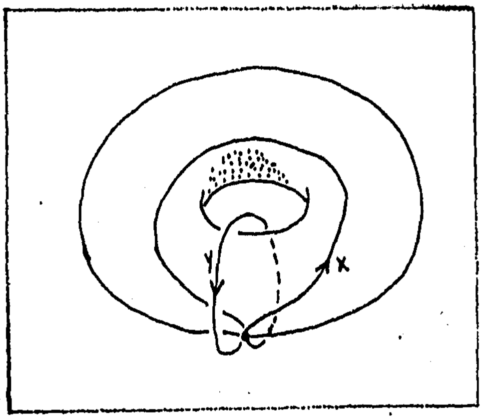
Debido a que nuestro objetivo es saber diferenciar nudos de otros, y por ejemplo en este caso no lo podemos hacer según los invariantes vistos, tenemos que seguir en la busqueda de algunas otras técnicas más. Sin embargo solo falta un poco más de información para determinar sí dos nudos son o no equivalentes.

Pero, ¿Cómo comprobar si dos grupos de nudos son equivalentes? La respuesta es obvia: como la representación geométrica del nudo ha sido reemplazada por expresiones algebraicas, entonces es posible saber si dos expresiones algebraicas son iguales o no, con solo aplicar artificios algebraicos.

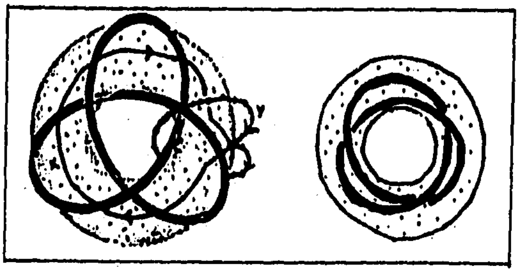
7.11 EL GRUPO DE NUDOS TOROIDALES.

Los nudos Toroidales son los nudos que se pueden distribuir sobre la superficie de un toro de tal manera que no haya autointersecciones.

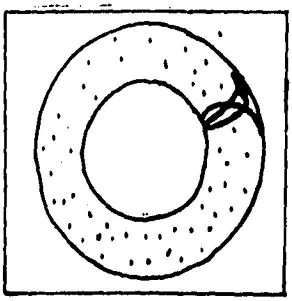
Tomemos un punto base b en el complemento del nudo y sobre la superficie del toro . Sean x y y dos caminos en el complemento del nudo:



Por ejemplo el nudo Trébol es un nudo tórico o toroidal, ya que disponiendo el nudo en el toro se observa fácilmente que el nudo trébol dá dos vueltas completas según el camino x:



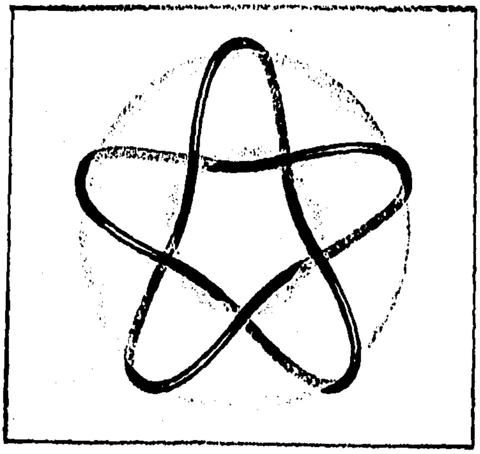
Encogiendo el nudo por el exterior, se observa que dá tres vueltas según el camino y:



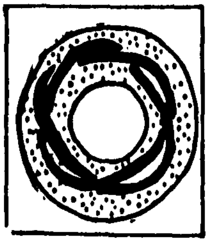
En general un nudo toroidal dá p vueltas según el camino x, y q vueltas según el camino $y \varepsilon \Omega$. Así el grupo de cualquier nudo toroidal puede ser representado por medio de las clases de homotopía $[x]$,$[y]$ las cuáles están relacionadas por la ecuación $[x]^p = [y]^q$, donde la ecuación de algún nudo toroidal $[x]^p = [y]^q$ indica que todo camino homotópico a x, bobinado p veces dentro del toro, puede ser deformado en un camino homotópico a y bobinado q veces por el exterior del toro; así pues el trébol es T(2,3).

Veamos otro ejemplo:

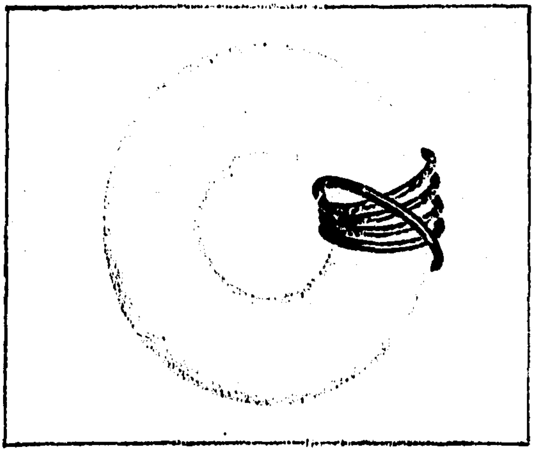
El nudo Trébol de cinco hojas es un nudo toroidal:



Introduciendo el nudo en el toro se observa que dá dos vueltas según el camino x:



Encogiendo el nudo poe el exterior, se ve que este dá cinco vueltas según el camino y, y así este nudo es T(2,5).



De lo anterior podemos decir que los grupos de dos nudos tóricos son el mismo si y solo si ocurre que $p = q$ y por consecuencia los nudos deben de ser equivalentes (con excepción de un nudo y su simétrico, ya que el grupo no los puede distinguir, como por ejemplo, el trébol derecho del izquierdo); todos los nudos tóricos están representados por solo dos generadores $[x]^p$ y $[y]^q$ donde p y q son primos relativos entre sí.

Además como ya se dijo, el grupo G de un nudo N toroidal T(p,q) es de la forma $G(N) = (x, y; [x]^p = [y]^q)$ y se pueden clasificar como .

a) $T(\pm 1, q)$ y $T(p, \pm 1)$, los cuáles son del tipo trivial.

b) $T(p, q)$ permanece invariante al cambiar el signo de p ó q e incluso intercambiando p y q.

Los nudos toroidales se presentan al estudiar ecuaciones con dos variables complejas y además sus grupos son los únicos grupos de nudos no triviales donde existen elementos distintos de la identidad que conmutan con los restantes elementos del grupo, es decir para los que existe $[c] \varepsilon \Omega$, tal que $[c]\,[x] = [x]\,[c]$ para todo clase de homotopía $[x]$ del grupo nodal.

7.12 ALGORITMO PARA CALCULAR EL GRUPO DE UN NUDO.

Acabamos de ver como a un nudo en el espacio tridimensional se le puede asociar una representación algebraica; pero como acabamos de ver, el método anterior resulta un tanto complicado para determinar las relaciones de cada cruce.

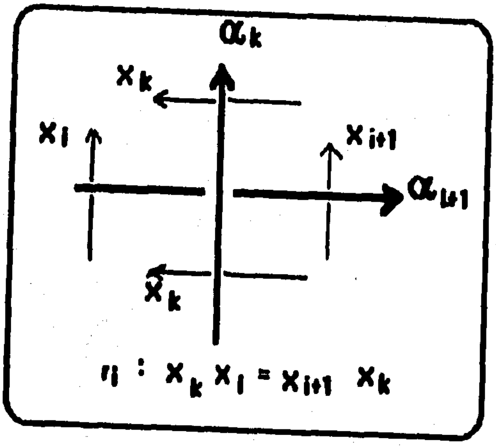
Durante el siglo XIX el estudio de los nudos y sus clasificaciones solo se llevó a cabo en forma experimental, pero con la llegada del *Grupo Fundamental* (tema no apto para bachillerato) algunos resultados fueron muy útiles para el estudio de los nudos. El primer método para calcular el grupo de un nudo fué introducido por Wirtinger alrededor del año de 1904, pero este fué publicado hasta 1908 [7]:

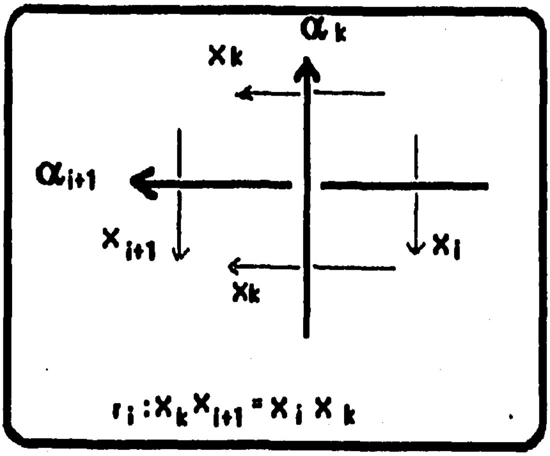
> i) Dado el diagrama de un nudo N, *asignèmosle una dirección arbitraria*, donde por diagrama entendemos a un número finito de arcos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ además cada arco α_i está conectado con α_{i+1} y α_{i-1} y la unión de todos los arcos es igual al nudo N .
>
> ii) Intuitaivamente se puede ver que el grupo del nudo N (En el lenguaje de la Topología llamado $\pi_1(R^3 - N)$) es generado por caminos x_i que rodean a estos arcos y de esta manera obtenemos tantos generadores como cruces existen.

Elijamos una orientación de N y orientemos los caminos x_i alrededor de los arcos α_i según la regla de la mano derecha.

iii) *Representemos imaginariamente un circuito en el complemento del nudo N*, es decir en $R^3 - N$; sea $b = (0,0,1)$ un punto base (imaginese a b como a su ojo), el circuito consiste del triángulo orientado que va de b al extremo inicial de x_i, recorriendo x_i para despuès regresar a b.

iv) *Determinemos los relaciones de cada cruce de acuerdo a las reglas de las siguiente figuras:*





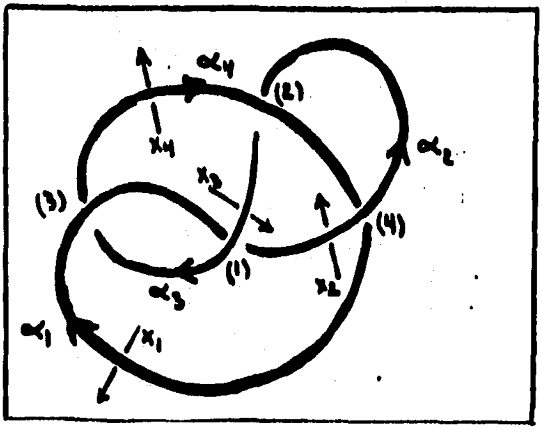
Donde α_k es el arco que pasa por encima.

v) *Así el grupo del nudo N es* $G(N) = (x_1, ..., x_n; r_1, ...r_n)$

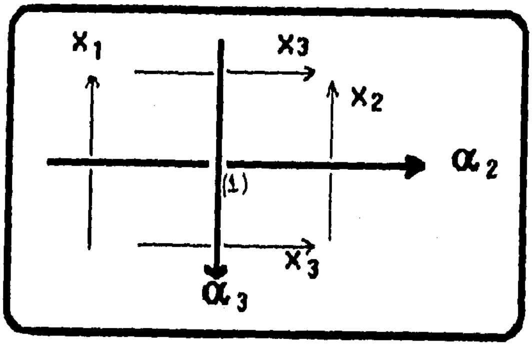
Lo anterior nos muestra que el grupo de un nudo N es generado por los caminos x_i y por las relaciones r_i.

.Problema: Calcular el grupo del nudo del ocho.

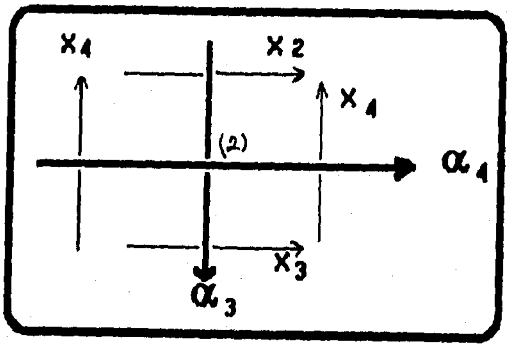
Los generadores son x_1, x_2, x_3, x_4:



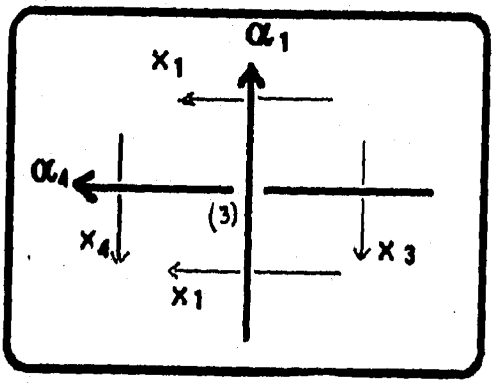
Las relaciones de cada cruce son (de acuerdo al diagrama de arriba):



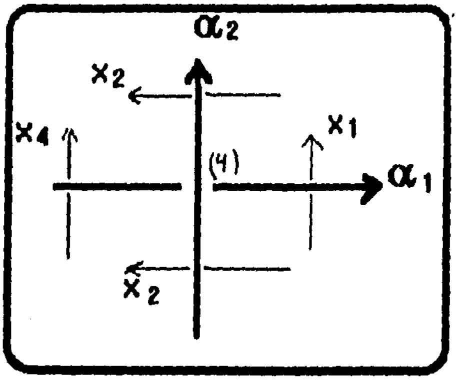
Cruce (1): La relación correspondiente es: $r_1 : x_1x_3 = x_3x_2$



Cruce (2): La relación correspondiente es: $r_2 : x_4x_2 = x_3x_4$



Cruce (3): La relación correspondiente es: $r_3 : x_3x_1 = x_1x_4$



Cruce (4): La relación correspondiente es: $r_4 : x_2x_4 = x_1x_2$

Por lo tanto se tiene que el grupo del nudo del ocho es: $G\,(nudo\ del\ ocho) = (x_1, x_2, x_3, x_4; r_1, r_2, r_3, r_4)$, pero lo anterior puede ser simplificado omitiendo alguna r_i:

Tomemos $r_1 : x_1x_3 = x_3x_2$

multiplicando el lado izquierdo de ambos lados por x_3^{-1} :

$r_1 : x_3^{-1}x_1x_3 = x_2$

Tomemos ahora: $r_3 : x_3x_1 = x_1x_4$ y multilpliquemos por el lado izquierdo por x_1^{-1} ; $r_3 : x_1^{-1}x_3x_1 = x_4$.

Sustituyendolos x_2 y x_4 anteriores en $r_2 : x_4x_2 = x_3x_4$obtenemos: $r_2 : x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_3x_1^{-1}x_3x_1$

Sustituyendo x_2 y x_4 anteriores en $r_4 : x_2x_4 = x_1x_2$ obtenemos: $r_4 : x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3x_1 = x_1x_3^{-1}x_1x_3$

Multiplicando por la izquierda por x_1 en r_2 :

$x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_1x_3x_1^{-1}x_3x_1$

Multiplicando por x_3^{-1}'por el lado izquierdo de cada miembro de ésta última expresión de r_2:

$r_2 : x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3x_1$

Intercambiando los miembros de ésta igualdad:

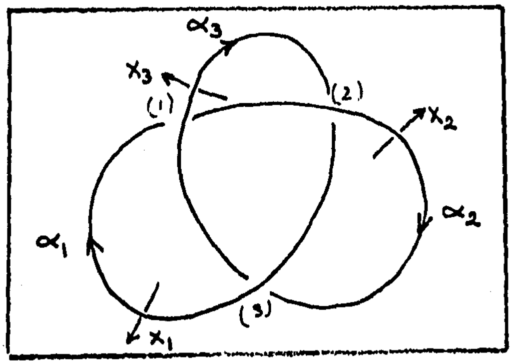
$r_2 : x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3x_1 = x_1x_3^{-1}x_1x_3$

Observese que los resultados transformados hacen que $r_2 = r_4$, por lo tanto se puede eliminar r_2 ò r_4, eliminemos r_4, por lo tanto tenemos que :

$G(Del\ ocho) = \left(x_1, x_3; x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_3x_1^{-1}x_3x_1 \right)$

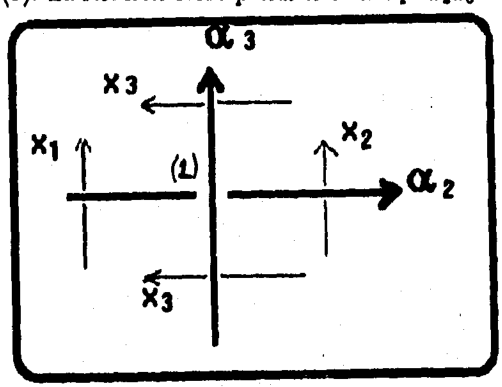
.**Problema:**Calcular el grupo del nudo Trébol (−).

Como se puede observar los generadores son x_1, x_2, x_3:

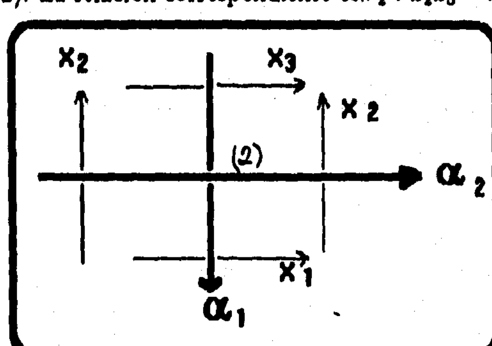


Las relaciones de cada cruce son (de acuerdo al diagrama de arriba):

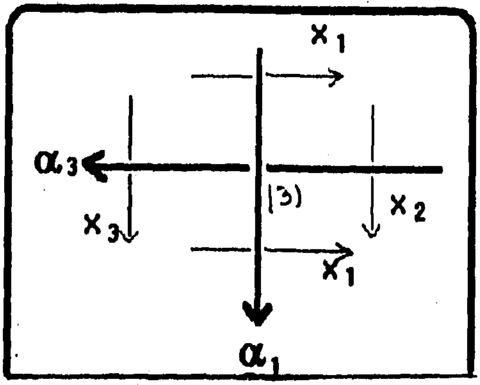
Cruce (1): La relación correspondiente es: $r_1 : x_2x_3 = x_3x_1$



Cruce (2): La relación correspondiente es:$r_2 : x_2x_3 = x_1x_2$



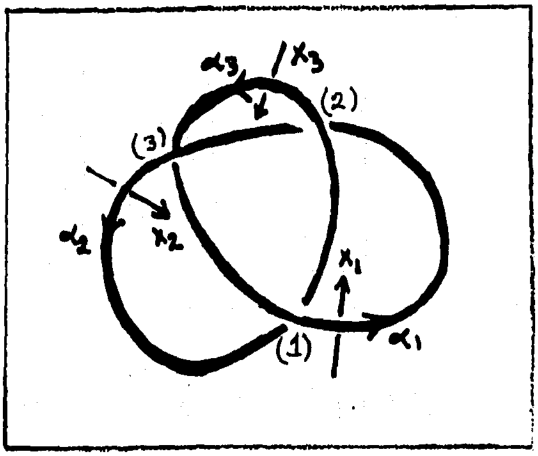
Cruce (3): La relación correspondiente es:$r_3 : x_1x_2 = x_3x_1$



Como $r_2 : x_2x_3 = x_1x_2$ y $r_3 : x_1x_2 = x_3x_1$,
entonces $x_2x_3 = x_3x_1$, que es r_1 despejando x_2 de r_3 :
$x_1x_2 = x_3x_1$
tenemos que $x_2 = x_1^{-1}x_3x_1$, sustituyendo x_2 en r_1 :
$x_1^{-1}x_3x_1x_3 = x_3\ x_1$ multiplicando por la izquierda por x_1;
$x_3x_1x_3 = x_1x_3x_1$
Por lo tanto tenemos que :
G(Trébol (-)) = $\left(\ x_1, x_3; x_3x_1x_3 = x_1x_3x_1\ \right)$

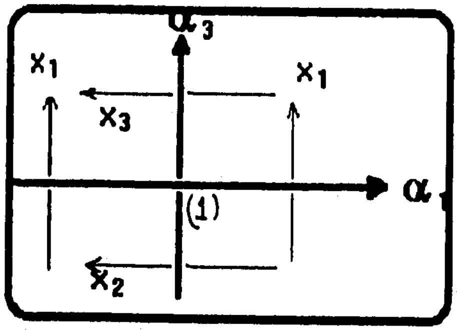
¿Los nudos trébol (+) y trébol (-) tendrán grupos equivalentes ?

Calculemos para comprobarlo nosotros mismos:
Como se puede observar los generadores para el trèbol (+) son x_1,x_2, x_3:

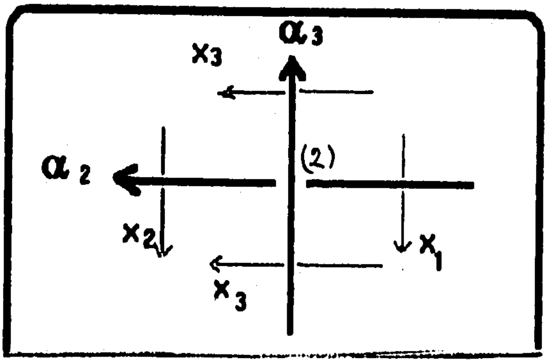


Las relaciones de cada cruce son (de acuerdo al diagrama de arriba):

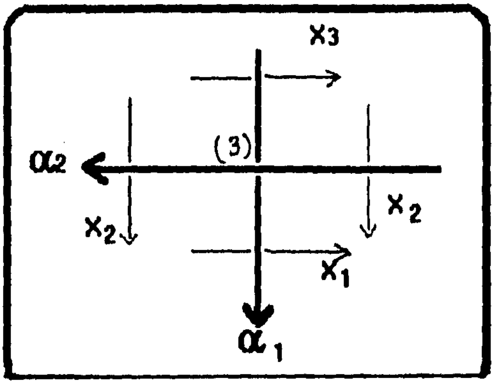
Cruce (1): La relación correspondiente es: $r_1 : x_1x_3 = x_2x_1$



Cruce (2): La relación correspondiente es:$r_2 : x_3x_2 = x_1x_3$



Cruce (3): La relación correspondiente es :$r_3 : x_3x_2 = x_2x_1$



Despejando x_2 de $r_1 : x_2 = x_1x_3x_1^{-1}$
Sustituyendo en r_2 y r_3:
$r_2 : x_3x_2 = x_1x_3$, entonces
$x_3x_1x_3x_1^{-1} = x_1 \; x_3$
r_3: $x_3x_2 = x_2x_1$ entonces
$x_3x_1x_3x_1^{-1} = x_1x_3x_1^{-1}x_1 = x_1x_3$
entonces se tiene que :
$r_2 : x_3x_1x_3 = x_1 \; x_3x_1$
r_3: $x_3x_1x_3 = x_1x_3x_1$
Como $r_2 = r_3$, podemos decir que:
G(Trébol (+)) $= (x_1, x_3; x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3)$

El cual es exactamente el mismo obtenido para el trébol (-), por lo tanto se tiene que:

Afirmación:

El grupo de un nudo no es capaz de distinguir dos nudos simétricos respecto de un plano que se deducen uno del otro, cambiando cada cruce debajo por un cruce por encima y viceversa.

Cuando calculamos el grupo del nudo trébol (-), obtuvimos las relaciones siguientes:
r_1: $[y]^{-1}[x][y][z]^{-1} = [b]$.
r_2: $[z]^{-1}[y]^{-1}[z][x] = [b]$
r_3: $[x]^{-1}[z][x][y]^{-1} = [b]$
y en esta sección hemos llegado a que: G(Trébol (-)) $= (x_1, x_3; x_3x_1x_3 = x$

Demostremos pues que el grupo nodal del nudo trébol (-), cuyos generadores y relaciones son respectivamente x, y, z, r_1, r_2, r_3 es equivalente a

$G(Trébol\ (-)) = (x_1, x_3; x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3)$.

Demostración: La demostración la realizaremos simplemente con artificios algebraicos:

Igualando $r_1 = r_3$ tenemos que:

$y^{-1}xyz^{-1} = x^{-1}zxy^{-1}$

Multiplicando por la izquierda por x:

$xy^{-1}xyz^{-1} = zxy^{-1}$, ya que $xx^{-1} = b$

Multiplicando por la derecha por y:

$xy^{-1}xyz^{-1}y = zx$, ya que $yy^{-1} = b$

entonces tenemos que:

$zx = xy^{-1}xyz^{-1}y$ ....(1)

sustituyendo zx en r_3:

$xx^{-1}y^{-1}xyz^{-1}yy^{-1} = b$

simplificando:

$y^{-1}xyz^{-1} = b$, ya que $x^{-1}x = b$ y $yy^{-1} = b$.

Multiplicando por la derecha por z y por la izquierda por y:

$xy = yz$ ....(2)

ahora sustituyendo zx de (1) en r_2.

$z^{-1}y^{-1}xy^{-1}xyz^{-1}y = b$

multiplicando por la izquierda por z:

$y^{-1}xy^{-1}xyz^{-1}y = z$

multiplicando por la izquierda por y:

$xy^{-1}xyz^{-1}y = yz$

obtuvimos pues que:

$yz = xy^{-1}xyz^{-1}y$..(3)

de (1) y (3) tenemos que:

$yz = zx$...(4)

por lo tanto de (2) y de (4) :

$xy = yz = zx$..(5)

Como $xy = yz$, entonces $xyx = y(zx)$ y por lo anterior tenemos que:

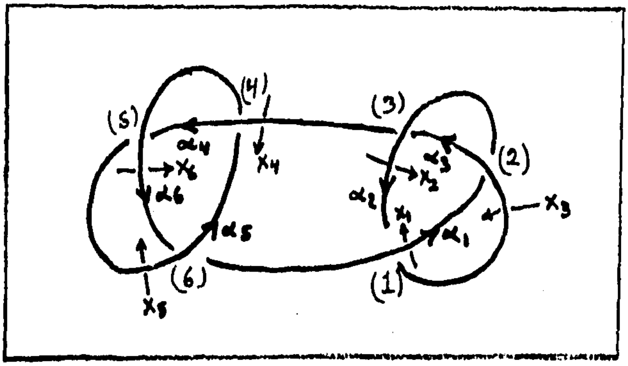
$xyx = yxy$..(6)

Sí $x = x_1$ y $y = x_3$ entonces (6) se convierte en :

$x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3$ ∎

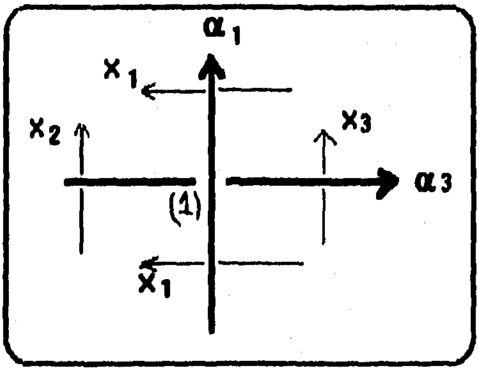
Lo anterior nos sugiere que para calcular el grupo nodal de un nudo, podemos utilizar cualquiera de los dos métodos anteriores; Evidentemente este último método es el más sencillo.

Algunos ejemplos más:
Calcular el grupo del nudo de Rizo.
Los generadores son $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

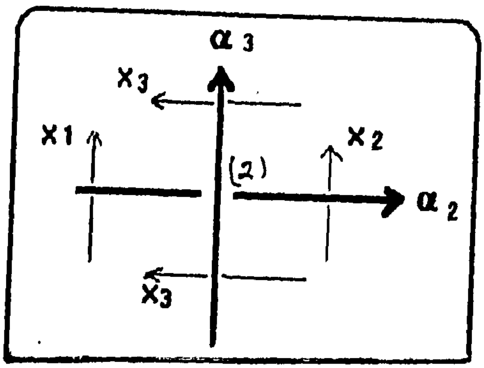


Las relaciones de cada cruce de acuerdo a la gráfica de arriba son:

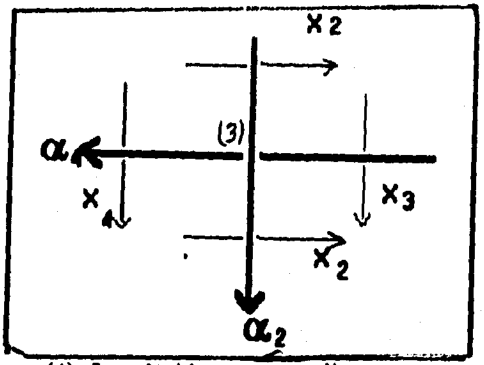
Cruce (1): La relación correspondiente es:
r_1: $x_3x_1 = x_1x_2$



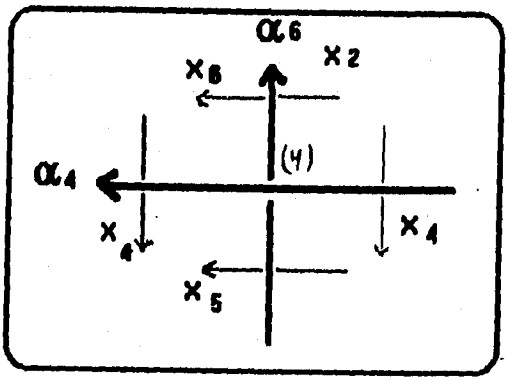
Cruce (2): La relación correspondiente es:
r_2: $x_2x_3 = x_3x_1$



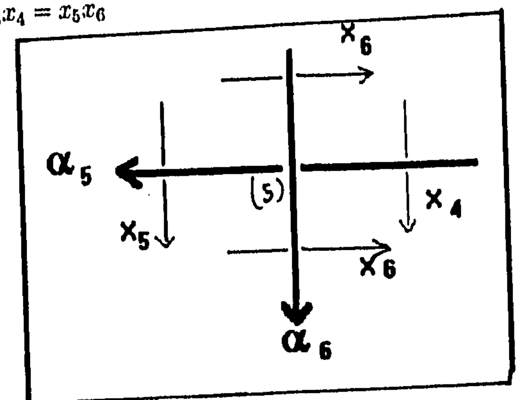
Cruce (3): La relación correspondiente es:
$r_{3;}\ x_2x_3 = x_4x_2$



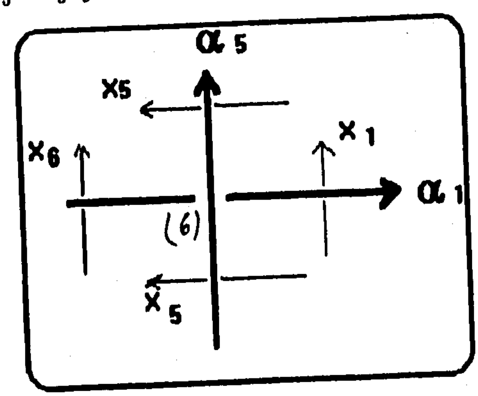
Cruce (4): La relación correspondiente es:
$r_{4;}\ x_6x_4 = x_4x_5$



Cruce (5): La relación correspondiente es:
r_5: $x_6 x_4 = x_5 x_6$

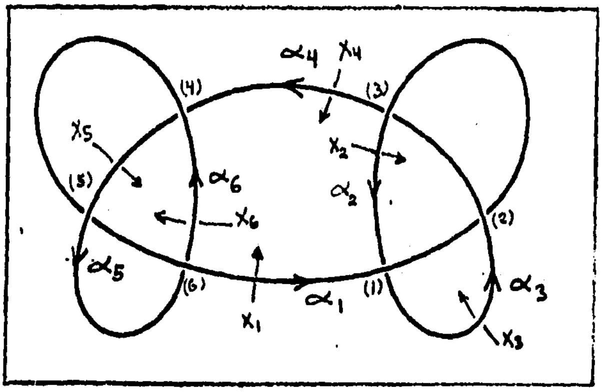


Cruce (6): La relación correspondiente es:
r_6: $x_1 x_5 = x_5 x_6$



reuniendo r_1, r_2 y r_3:
$x_3 x_1 = x_1 x_2$
$x_2 x_3 = x_3 x_1$
$x_2 x_3 = x_4 x_2$, entonces
$x_3 x_1 = x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_4 x_2$.
Como $x_1 x_2 = x_4 x_2$,
entonces $x_1 = x_4$,
luego $x_3 x_1 = x_1 x_2 = x_2 x_3$.
Como $x_3 x_1 = x_1 x_2$,

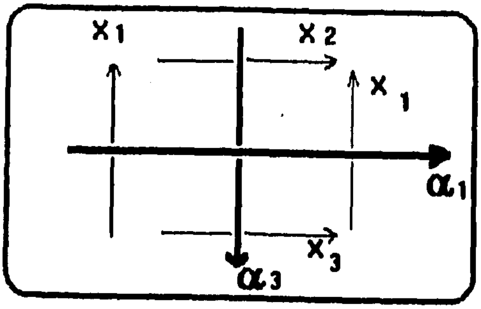
entonces $x_2 = x_1^{-1}x_3x_1$,
luego sustituyendo en:
$x_1x_2 = x_2x_3$:
$x_1x_1^{-1}x_3x_1 = x_1^{-1}.x_3x_1x_3$,
entonces $x_3x_1 = x_1^{-1}x_3x_1x_3$.
luego $x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3$.
reuniendo r_4, r_5 y r_6:
$x_6x_4 = x_4x_5$
$x_6x_4 = x_5x_6$
$x_1x_5 = x_5x_6$,
entonces $x_6x_4 = x_4x_5 = x_5x_6 = x_1x_5$
Como $x_4x_5 = x_1x_5$,
entonces $x_4 = x_1$, l
luego $x_6x_1 = x_1x_5 = x_5x_6$.
Como $x_6x_1 = x_1x_5$,
entonces $x_6 = x_1x_5x_1^{-1}$.
luego sustituyendo en $x_6x_1 = x_5x_6$:
$x_1x_5x_1^{-1}x_1 = x_5x_1x_5x_1^{-1}$,
tendremos $x_1x_5 = x_5x_1x_5x_1^{-1}$
entonces $x_1x_5x_1 = x_5x_1x_5$
por lo tanto se tiene que:
$G(Rizo) = (x_1, x_3x_5; x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3,\ x_1x_5x_1 = x_5x_1x_5)$.
.**Problema**:Calcular el grupo del nudo Llano.
Los generadores son $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.



Las relaciones de cada cruce de acuerdo a la gráfica de arriba son:

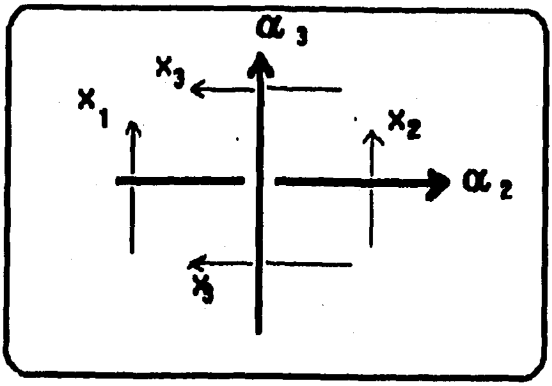
Cruce (1): La relación correspondiente es:

r_1: $x_1x_2 = x_3x_1$



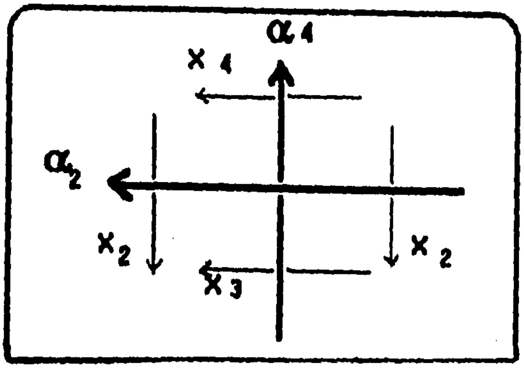
Cruce (2): La relación correspondiente es:

r_2: $x_3x_1 = x_2x_3$

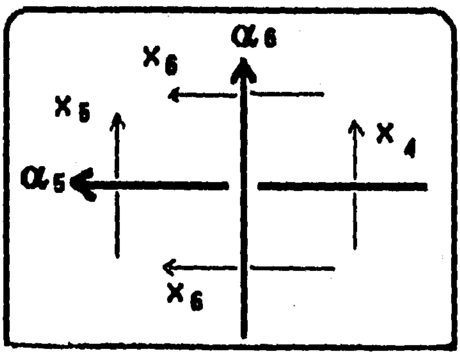


Cruce (3): La relación correspondiente es:

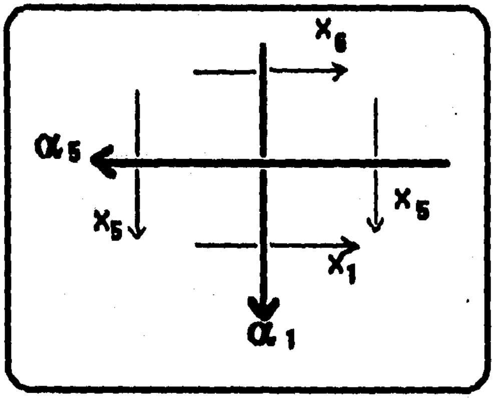
r_3: $x_2x_3 = x_4x_2$



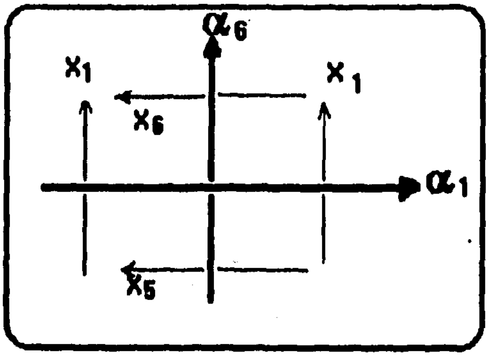
Cruce (4): La relación correspondiente es:
r_4: $x_6x_5 = x_4x_6$



Cruce (5): La relación correspondiente es:
r_5: $x_5x_1 = x_6x_5$



Cruce (6): La relación correspondiente es:
r_6: $x_1x_6 = x_5x_1$



reuniendo las seis relaciones :
r_1: $x_1x_2 = x_3x_1$
r_2: $x_3x_1 = x_2x_3$
r_3: $x_2x_3 = x_4x_2$
r_4: $x_6x_5 = x_4x_6$
r_5: $x_5x_1 = x_6x_5$
r_6: $x_1x_6 = x_5x_1$
De las primeras tres relaciones se deduce que:
$x_1x_2 = x_3x_1 = x_2x_3 = x_4x_2$
De las últimas tres relaciones también se deduce que :
$x_6x_5 = x_4x_6 = x_5x_1 = x_1x_6$
Como $x_3x_1 = x_2x_3$., entonces $x_2 = x_3x_1x_3^{-1}$.sustituyendo en: $x_1x_2 = x_3x_1$:
$x_1x_3x_1x_3^{-1} = x_3x_1$
multiplicando por la derecha por x_3:
$x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3$.
Como $x_6x_5 = x_4x_6$. entonces $x_4 = x_6x_5x_6^{-1}$.
sustituyendo en $x_4x_6 = x_5x_4$:
$x_6x_5x_6^{-1}x_6 = x_5x_1$, luego .$x_6x_5 = x_5x_1$
.luego $x_6 = x_5x_1x_5^{-1}$
sustituyendo en $x_5x_1 = x_1x_6$:
$x_5x_1 = x_1x_5x_1x_5^{-1}$
multiplicando por la derecha por x_5:
$x_5x_1x_5 = x_1x_5x_1$.

por lo tanto se tiene que:

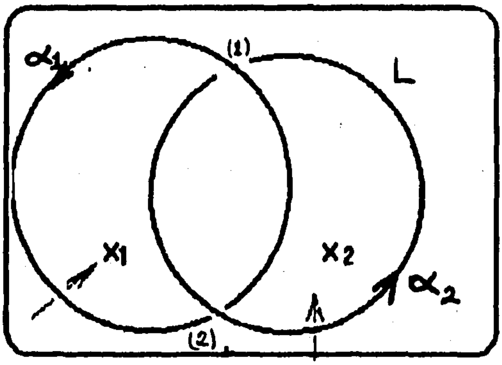
$G(Llano) = (x_1, x_3, x_5; x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3, x_1x_5x_1 = x_5x_1x_5)$.

El grupo del nudo llano es el mismo que el obtenido para el nudo Rizo, pero Rizo $\nsim$ Llano, esto significa que este invariante no es muy potente para diferenciar dos nudos, pero al menos es un poco mejor que los invariantes descritos en el capìtulo 3.

7.13 EL GRUPO DE ENLACES

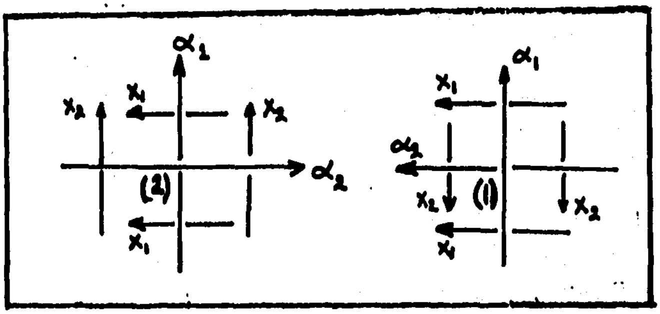
El càlculo del grupo para enlaces se hace en forma analoga: Planteemoslo mediante el siguiente problema:

Calcular el grupo nodal del siguiente enlace de dos nudos triviales:



Relaciones:

Cruce (1): La relación correspondiente es r_1: $x_1x_2 = x_2x_1$



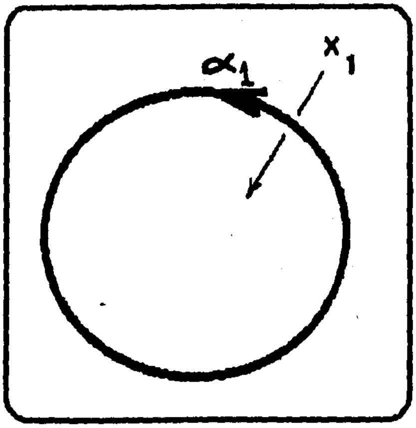
Cruce (2): La relación correspondiente es r_2: $x_1x_2 = x_2x_1$
Por lo tanto $G(L) = (x_1, x_2; x_1x_2 = x_2x_1)$

Observaciones:

i) Si a un nudo se le dá otra dirección , el grupo permanece invariante.

ii) Al invertir la dirección de una de las componentes de un enlace, el grupo permanece invariante.

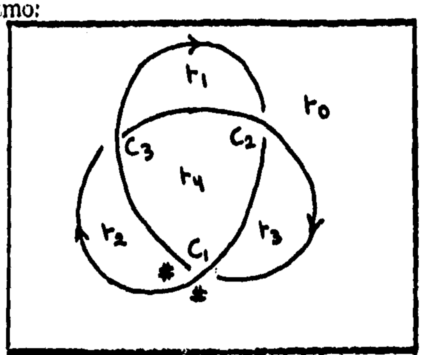
iii) El nudo trivial no tiene relaciones, es decir $G(Trivial) = (x_1; -)$



APENDICE B

7.14 EL POLINOMIO DE ALEXANDER

La idea de asociar un polinomio a un nudo fué introducida en 1928 por Alexander. A continuación se da un ejemplo de como calcular el polinomio de Alexander para un nudo N, en este caso para el nudo Trébol, el cuál se dará como un algoritmo:

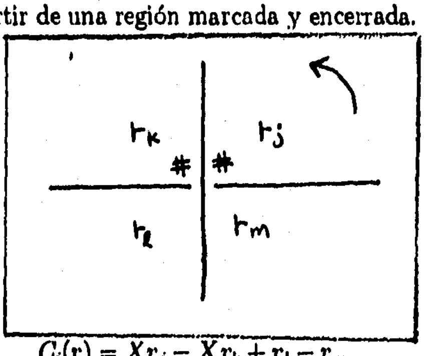


Paso 1: Dar una dirección arbitraria al nudo.

Paso 2: Etiquetar los puntos de cruce como C_i , $i = 1,2,3$ y las regiones $r_j, j = 0,1,2,3,4$, donde el índice de cada región se determina después de asignar en forma arbitraria un índice a una región tomada al azar. El índice del resto de las regiones se determina de manera que al pasar de una región de índice p a otra, de derecha a izquierda contra reloj el índice será p+1.

Paso 3: Poner dos marcas ♯ en las regiones que quedan a la izquierda cuando se pasa por abajo del cruce en la dirección dada.

Paso 4: Determinar las relaciones $C_i(r) = Xr_j - Xr_k + r_l - r_m$ de acuerdo al desplazamiento en sentido contrario a las manecillas del reloj a partir de una región marcada y encerrada.



$C_i(r) = Xr_j - Xr_k + r_l - r_m$

Donde la variable X corresponde a las regiones marcadas y a partir de la región r_j encerrada. Así pues los cruces quedaràn como:

$$\begin{aligned} C_1(r) &= Xr_2 - Xr_0 + r_3 - r_4 \\ C_2(r) &= Xr_3 - Xr_0 + r_1 - r_4 \\ C_3(r) &= Xr_1 - Xr_0 + r_2 - r_4 \end{aligned}$$

los cuales se pueden poner como:

$$\begin{aligned} C_1(r) &= -Xr_0 + Xr_2 + r_3 - r_4 \\ C_2(r) &= -Xr_0 + r_1 + Xr_3 - r_4 \\ C_3(r) &= -Xr_0 + Xr_1 + r_2 - r_4 \end{aligned}$$

Entonces el sistema anterior se puede poner como una matriz respecto de las r_j como incògnitas:

$$M=\begin{bmatrix} -X & 0 & X & 1 & -1 \\ -X & 1 & 0 & X & -1 \\ -X & X & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

> Alexander dijo ⊏ 13–14 ⊐ : "Sí la matrix M es reducida a una matrix cuadrada M_0 quitando dos de sus columnas correspondientes a regiones con índices consecutivos p, p+1, el determinante de M_0 será independiente de las columnas eliminadas y tendrá un factor de $\pm X^n$ ", y mostró que este polinomio es invariante bajo movimientos de Redemeister, para los nudos con menos de 9 cruces. Tambièn se encontró con que el polinomio es único, desafortunadamente para nudos con 9 o más cruces esto ya no ocurre.

Así pues quitando las columnas con índice consecutivo con respecto de la gráfica, como por ejemplo r_1 y r_0, r_3 y r,r_2 y r_0, :

Quitando las columnas correspondientes a r_1 y r_0, queda:

$$det(M_0) = det(\begin{bmatrix} X & 1 & -1 \\ 0 & X & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}) = -X^2 - X - 1$$

Quitando las columnas correspondientes a r_3 y r_0, queda:

$$det(M_0) = det(\begin{bmatrix} 0 & X & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ X & 1 & -1 \end{bmatrix}) = -X^2 + X - 1$$

Quitando las columnas correspondientes a r_2 y r_0, queda:

$$det(M_0) = det(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & X & -1 \\ X & 0 & -1 \end{bmatrix}) = X^2 - X + 1$$

El polinomio $\Delta(X) = X^2 - X + 1$ es el polinomio de Alexander para el nudo Trébol (-).

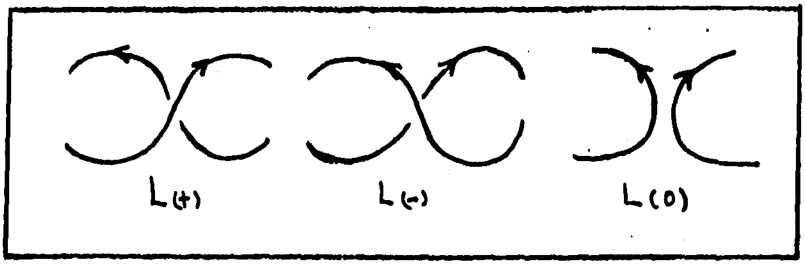
7.15 EL POLINOMIO DE JONES.

En Mayo de 1984 Vauhan F.R. Jones mientras estudiaba las álgebras de von Neumann (en donde existe la posibilidad de que la dimensión sea una variable continua, lo cuál fue la clave para Jones en la unión de la teoría de nudos y la mecánica estadistica) las cuales surgen en física cuántica (teoría de campos cuánticos) descubrió con gran sorpresa expresiones algebraicas de ciertas relaciones topológicas entre trenzas y pensó que tal vez esas técnicas se pudieran utilizar en teoría de nudos, o tal vez se podrían deducir propiedades del polinomio de Alexander $\Delta(x)$. Jones pensó que había generado un nuevo invariante polinómico de nudos o tal vez una nueva versión del polinomio $\Delta(x)$ aunque muy interesante por su conexión con la Mecánica Estadística. La Mecánica Estadística estudia sistemas compuestos por grandes números de elementos, donde los pequeños sistemas son de poco interés, lo cuál en teoría de nudos no sucede, así pues hasta los nudos más pequeños son de gran importancia.

Jones se dió cuenta que había desarrollado un nuevo polinomio y lo llamó $V_N\ (t)$.

Para calcular el polinomio de Jones se recurre a la *relación de enmadejado* inventada por John Horton Conway cuando intentaba en la secundaria escribir un programa para calcular el polinomio de Alexander $\Delta(x)$:

Dado un enlace L, al alterar un punto de cruce se producen tres diferentes diagramas de enlace:



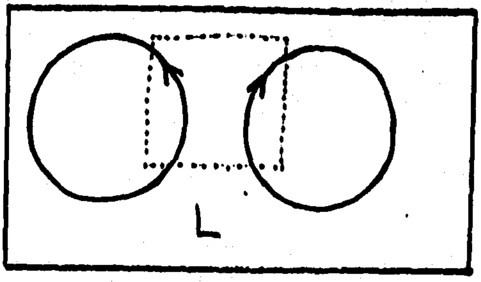
Sean $V_{L_{(+)}}, V_{L_{(-)}}$ y $V_{L_{(0)}}$ los polinomios de Jones de esos diagramas (o enlaces), entonces:

DEFINICION: El polinomio de Jones es un polinomio asignado a un enlace N y satisface:

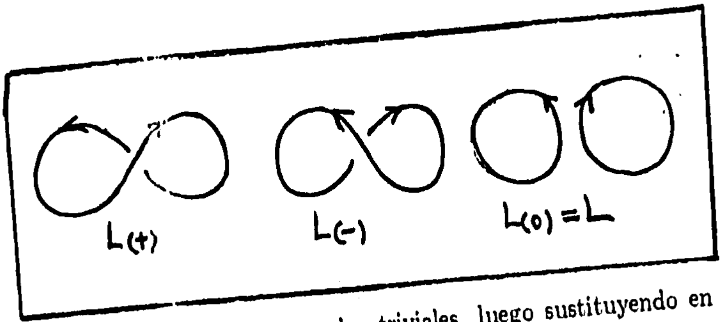
i) Sí $N_1 \sim N_2 \Rightarrow V_{N_1}(t) = V_{N_2}(t)$
ii) $V_{Trivial}(t) = 1$ (es normalizado).
iii) Se cumple la relación de enmadejado:

$$\left(\frac{1}{t}\right) V_{L_{(+)}} - tV_{L_{(-)}} = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{L_{(0)}}$$

Ejemplo: Calcular el polinomio de Jones para el anlace desanudado L:



En la región de posible cruce marcada en L, los tres enlaces correspondientes en la relación son:



Observe que $L_{(+)}$ y $L_{(-)}$ son nudos triviales, luego sustituyendo en la relación de enmadejado:

$$\left(\frac{1}{t}\right)\cdot 1 - t\,(1) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{L_{(0)}}$$

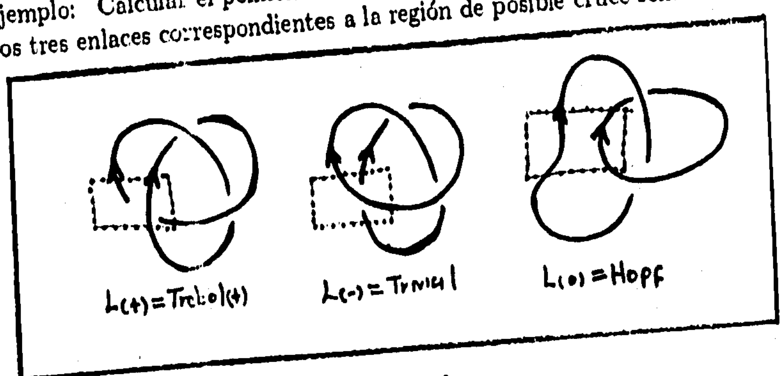
despejando $V_{L_{(0)}}$:

$$V_{L_{(0)}} = \frac{\frac{1}{t}-t}{\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{t^{-1}-t}{\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{t^{-1}-t}{\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\cdot\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{(t^{-1}-t)(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}})}{t-\frac{1}{t}}$$

$$= \frac{-(t^{-1}-t)(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}})}{(t^{-1}-t)} = -(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}})$$

$$V_{L_{(0)}} = -(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}).\blacksquare$$

Ejemplo: Calcular el polinomio de Jones para el nudo Trébol (+):
Los tres enlaces correspondientes a la región de posible cruce son:



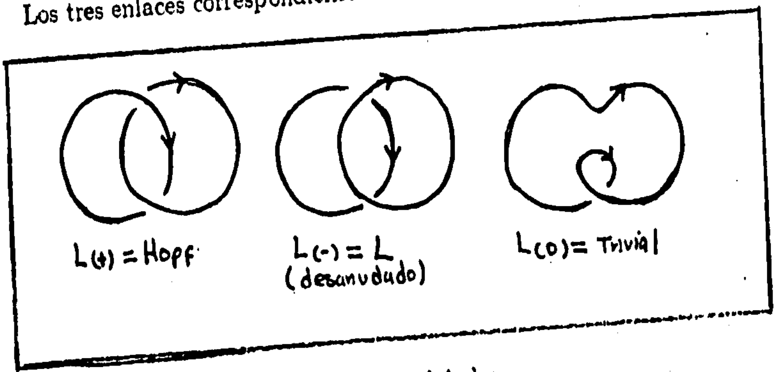
Sustituyendo en la relación de enmadejado:

$$\left(\frac{1}{t}\right) V_{Trébol(+)} - tV_{Trivial} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{Hopf} \Rightarrow V_{Trébol(+)} = \frac{\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{Hopf}(t)}{\left(\frac{1}{t}\right)}$$

Observemos que necesitamos calcular V_{Hopf} :

Calculemos:

Los tres enlaces correspondientes a una posible región de cruce son:



sustituyendo en la relación de enmadejado:

$$\left(\frac{1}{t}\right) V_{Hopf} - tV_L = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{Trivial}$$

Despejando V_{Hopf} y sustituyendo V_L :

$$V_{Hopf} = \frac{\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\cdot 1 + t\left(-(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}})\right)}{\frac{1}{t}}$$
$$= t\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) + t^2\left(-(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}})\right)$$
$$= t^{3/2} - t^{1/2} - t^{5/2} - t^{3/2} = -t^{5/2} - t^{1/2} - = -(\sqrt{t^5} + \sqrt{t})$$
$$= -(t^2\sqrt{t} + \sqrt{t})] = -\sqrt{t}(t^2+1) = -\sqrt{t}(1+t^2)$$
$$V_{Hopf} = -\sqrt{t}(1+t^2) \blacksquare$$

sustituyendo tenemos que:

$$V_{Trébol(+)} = \frac{\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(-\sqrt{t}(1+t^2)) + t}{\frac{1}{t}} = t(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})(-\sqrt{t}(1+t^2)) + t^2$$
$$= (t^{3/2} - t^{1/2})(-t^{1/2} - t^{5/2}) + t^2 = -t^2 - t^4 + t + t^3 + t^2 = t + t^3 - t^4$$

Por lo tanto:

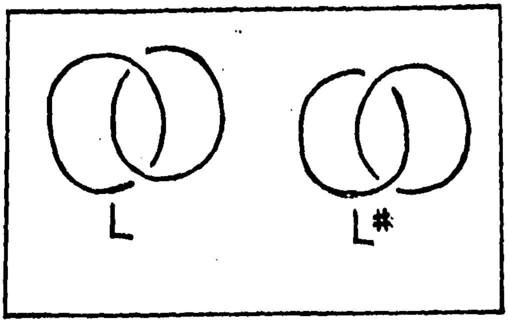
$$V_{Trébol(+)} = t + t^3 - t^4 \blacksquare$$

7.15.1 El polinomio de Jones para nudos especulares.

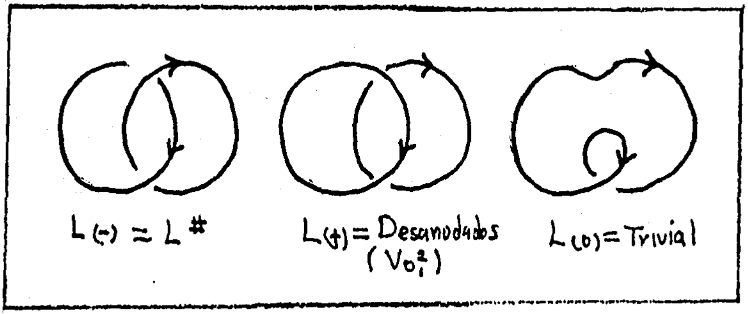
El polinomio de Jones, es un polinomio en las variables t y t^{-1} ya que tiene la propiedad de que $V_{N^\sharp}(t) = V_N(t^{-1})$, donde $N^\sharp$ es la imagen especular del nudo N.

Este polinomio no es invariante bajo transformaciones de t a t^{-1} y por lo tanto el polinomio de Jones puede algunas veces distinguir nudos de sus especulare, lo que no hace el de Alexander pues este último asigna el mismo polinomio a dos nudos especulares.

Ejemplo: Calcular el polinomio de Jones para los enlaces siguientes:



Ya calculamos que: $V_L(t) = -\sqrt{t}(1+t^2) = -t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}$
Calculemos ahora$V_{L^\sharp}(t)$:
Los tres diagramas correspondientes a una región de cruce son:



la relación de enmadejado es:

$$\left(\frac{1}{t}\right) V_{L(+)} - tV_{L(-)} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{L(0)}$$

sustituyendo:

$$\left(\tfrac{1}{t}\right) V_{0^2_1} - tV_{L^\sharp} = \left(\sqrt{t} - \tfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \cdot 1$$

despejando $V_{L^\sharp}$ y sustituyendo $V_{0^2_1}$:

$$V_{L^\sharp} = \frac{\frac{1}{t}(-(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}))-(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})}{t}$$
$$= \frac{-\frac{1}{t}(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}})-(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})}{t} = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}$$

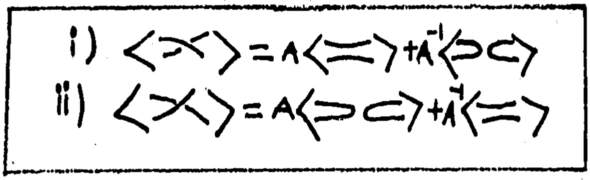
por lo tanto:

$$V_L(t) = -t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}} = V_{L^\sharp}(t^{-1}) = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}$$

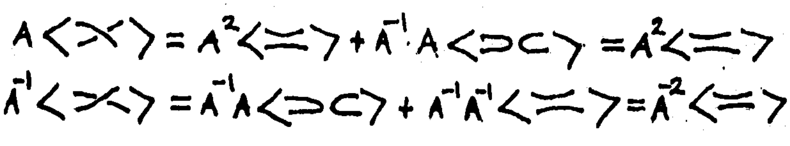
con $L^\sharp = esp(L)$■
EJERCICIO: Se deja como ejercicio al lector comprobar que:

$$V_{Trébol(+)}(t) = t + t^3 - t^4 = V_{Trébol(-)}(t^{-1}) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

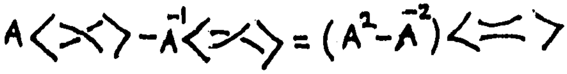
con Trébol(-)=esp(Trébol(+))■.
Terminamos este trabajo con el siguiente:
Teorema: Sean $\ell_{N(A)} = (-A^3)^{-\varpi(N)} \prec N \succ$
y $V_{N(T)}$ los polinomios de Kauffman y Jones respectivamente, entonces $\ell_N(t^{-\frac{1}{4}}) = V_N(t)$.
Demostración:
Sabemos que:



entonces:



entonces:



que es igual a:

$$A\langle\ \rangle - A^{-1}\langle\ \rangle = (A^{2} - A^{-2})\langle\ \rangle$$

sea $\alpha = -A^3$, entonces multiplicando por α^{-Wr}:

$$A\langle\ \rangle\alpha^{-Wr} - A^{-1}\langle\ \rangle\alpha^{-Wr} = (A^{2} - A^{-2})\langle\ \rangle\alpha^{-Wr}$$

donde $0 = Wr = Wr(\ )$ y $Wr(\ ) = 1 + Wr$,

entonces: $Wr(\ ) = -1 + Wr$

$$A\alpha\langle\ \rangle\alpha^{-(Wr+1)} - A^{-1}\alpha^{-1}\langle\ \rangle\alpha^{-(Wr-1)} =$$
$$= (A^{2} - A^{-2})\langle\ \rangle\alpha^{-Wr}$$

que se puede escribir como:

$$A\alpha\langle\ \rangle\alpha^{-(1+Wr)} - A^{-1}\alpha^{-1}\langle\ \rangle\alpha^{-(-1+Wr)} =$$
$$= (A^{2} - A^{-2})\langle\ \rangle\alpha^{-Wr}.$$

y también como:

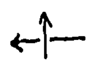
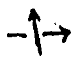
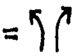
$$A\alpha\cdot\alpha^{-(1+Wr)}\langle\ \rangle - A^{-1}\alpha^{-1}\alpha^{-(-1+Wr)}\langle\ \rangle =$$
$$= (A^{2} - A^{-2})\langle\ \rangle\alpha^{-Wr}$$
$$= A\alpha(-A^{3})^{-Wr(\ )}\langle\ \rangle - A^{-1}\alpha^{-1}(-A^{3})^{-Wr(\ )}\langle\ \rangle$$
$$= (A^{2} - A^{-2})(-A^{3})^{-Wr(\ )}\langle\ \rangle$$

$$A\alpha \ell_{L_{(+)}} - A^{-1}\alpha^{-1}\ell_{L_{(-)}} = (A^{2}-A^{-2})\,\ell_{L_{(0)}}$$

$$A(-A^{3})\ell_{L_{(+)}} - A^{-1}(-A^{3})^{-1}\ell_{L_{(-)}} = (A^{2}-A^{-2})\,\ell_{L_{(0)}}$$

$$-A^{4}\ell_{L_{(+)}} + A^{-4}\ell_{L_{(-)}} = (A^{2}-A^{-2})\,\ell_{L_{(0)}}$$

Sean $A = t^{-\frac{1}{4}}$,

y $L_{(+)} =$  , $L_{(-)} =$  y $L_{(0)} =$ 

entonces:

$$-t^{-1}\,\ell_{L_{(+)}} + t^{1}\,\ell_{L_{(-)}} = (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\,\ell_{L_{(0)}}$$

multiplicando por -1 y haciendo $\ell = V$:

$$\frac{1}{t}V_{L_{(+)}} - tV_{L_{(-)}} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{L_{(0)}}$$

que es la relación de enmadejado en el polinomio de Jones, es decir hemos demostrado la equivalencia entre el polinomio de Kauffman y el polinomio de Jones.

Es claro también que:

i) Sí $N_1 \sim N_2 \Rightarrow V_{(N_1)}(t) = V_{N_2}(t)$

pues $\prec N_1 \succ = \prec N_2 \succ$ y $\ell_{N_1}(A) = \ell_{N_2}(A)$

ii) $V_{Trivial}(t) = 1$ pues $\prec o \succ = 1$ y $\ell_o(A) = (-A^3)^{-W_r(o)} \prec o \succ = 1$.■

APENDICE C

7.16 INVARIANTES GEOMETRICOS DEL ADN.

Hay tres magnitudes que son muy útiles para describir a un ADN cerrado:

a) El número de Enlazamientos L_k (Linking Number)

b) La torsión T_w (Twist)

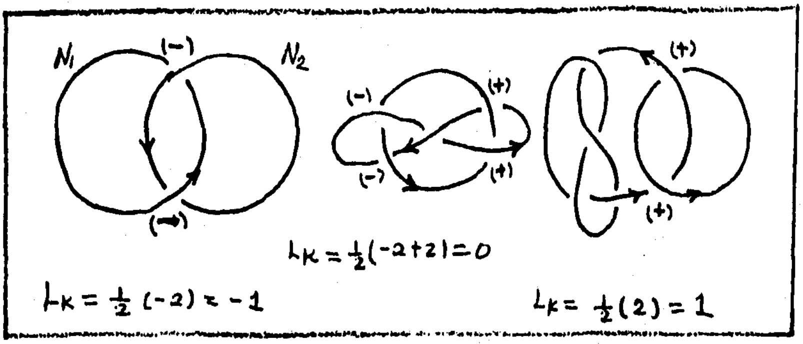
c) La retorsión W_r (Writhe).

a) EL NUMERO DE ENLAZAMIENTOS.

Este número está asociado a dos curvas N_1 y N_2 orientadas y cerradas, mide el número de cruces de las dos curvas N_1 y N_2, en un enlace se denota como L_k (N_1,N_2) y se define como la mitad de la suma algebraica de los cruces signados (cualquier cruce + o -), donde la suma se hace sobre todos los cruces de las diferentes componentes.

$L_k(N_1, N_2)=\frac{1}{2}$(de la suma algebraica del número de cruces signados).

Ejemplos:



Observaciones:

i) Los cruces de las componentes con ella misma son ignorados

ii) Al invertir la dirección en una componente, cambia el signo de cruce (Esto no pasa con un nudo, es decir con un enlace de una componente) y por lo tanto de L_k.

iii) El L_k es invariante bajo movimientos elementales.

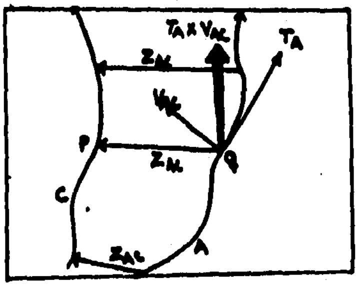
Para medir el grado de compactibilidad de una cinta (como ya mencionamos) Brock Fuller introdujo dos invariantes Geométricos: la Torsión y la Retorsión, los cuáles son útiles en la descripción de propiedades geométricas del ADN superhelicoidal (superenredado).

b) LA TORSION (Twist).

Definiremos ahora la Torsión de una curva C sobre otra curva A, y después la aplicaremos a algunos modelos de ADN.

Definición de la torsión $T_w(C,A)$.

Sea Z_{AC} un vector que une un punto de la curva A con un punto de la curva C (ver la figura adjunta). El vector Z_{AC} será llamado el *vector correspondiente* y la superficie generada por todos los vectores correspondientes será llamada *superficie correspondiente* .



Convenciones:

i) Las superficies correspondientes a las curvas A y C no contienen discontinuidades.

ii) La superficie correspondiente está acotada por las curvas A y C.

iii) En cada punto q ∈ A, el vector tangente a la curva A no es colineal con el vector Z_{AC} .

Sea T_A el vector unitario tangente a la curva A en el punto q ∈ A, teniéndose que T_A y Z_{AC} no necesariamente son ortogonales

.

Sea también V_{AC} el vector unitario dirigido a lo largo de Z_{AC} y perpendicular a T_A.

Los vectores T_A y V_{AC} son ortogonales y dan información sobre la curva A y la *superficie correspondiente.*

La torsión de la curva C sobre la curva A $T_w(C,A)$ está definida por la fórmula:

$$T_w(C,A) = \frac{1}{2\pi}\int_A [T_A \times V_{AC}]\, dV_{AC}$$

Donde $\frac{1}{2\pi}$ es un factor de normalización y permite expresar al número T_w en número de vueltas.

La torsión T_w es el cambio total del vector V_{AC} en la dirección mutuamente perpendicular a T_A y V_{AC}.

La última dirección está dada por el producto vectorial $T_A \times V_{AC}$ y el cambio en V_{AC} está dado simplemente por dV_{AC}, entonces la contribución local a la torsión T_w es $dV_{AC}[T_A \times V_{AC}]$.

Algunas observaciones:

i) Sí Z_{CA} es el vector que une un punto p de la curva C con un punto q de la curva A, entonces $Z_{CA} = -Z_{AC}$.

ii) Sí T_C es el vector unitario tangente a la curva C en el punto c de C y V_{CA} es un vector a lo largo de la componente de Z_{CA} que es perpendicular a T_C en p entonces:

$$T_w(A,C) = \frac{1}{2\pi}\int_C [T_C \times V_{CA}] \cdot dV_{CA}$$

donde $\frac{1}{2\pi}$ otra vez es usado para normalización .

Obsérvese que lo único que cambia en la fórmula es el orden en que aparecen A y C .

CALCULO DEL $T_w(C,A)$ PARA UNA HELICE SOLENOIDAL CON UN SEGMENTO DE LINEA COMO EJE.

Sea C una hélice de radio constante r que gira *positivamente* (a la derecha) sobre un eje A, el cuál es un segmento de linea de longitud L.

Sea $Y(s) = (r\cos(\alpha s), r sen(\alpha s), p\alpha s)$

la ecuación vectorial de la curva C, donde $Y(s)$ es un vector del origen a un punto de la curva C; $\alpha = \frac{2\pi n}{L}$.

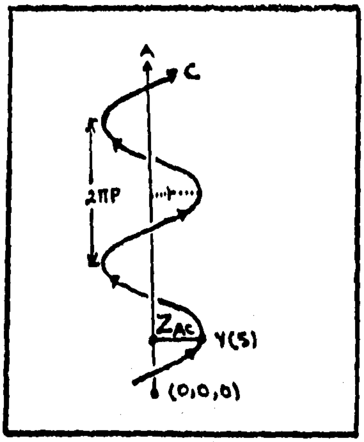
s: Es la medida o longitud a lo largo del eje, con $0 \leq s \leq L$.

Observación:

Cómo s corre de 0 a L, la hélice C gira sobre el eje A n veces con una amplitud de $2\pi p$ y por lo tanto $2\pi p n = L$, $p \geq 0$.

Supongase que hay una correspondencia uno a uno entre los punto de C y A.

Sea $(0, 0, p\alpha s)$ un punto en A al cual le corresponde el punto $y(s)$ con coordenadas dadas por $(r\cos(\alpha s), r sen(\alpha s), p\alpha s)$ en C.



El vector Z_{AC} es la diferencia entre estos dos vectores y está dada como: $Z_{AC} = (r\cos(\alpha s), r sen(\alpha s), 0)$.

Como $Z_{AC} \perp A$, entonces el vector unitario a lo largo de Z_{AC} está dado por: $V_{AC} = (\cos(\alpha s), sen(\alpha s), 0)$

y su derivada es:

$\frac{dV_{AC}}{ds} = (-\alpha sen(\alpha s), \alpha\cos(\alpha s), 0)$.

El vector unitario tangente al eje A es:

$T_A = (0, 0, 1)$

entonces se tiene que :

$$T_A \times V_{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\alpha s) & sen(\alpha s) & 0 \end{vmatrix} = (-sen(\alpha s), \cos(\alpha s), 0)$$

y también

$(\frac{dV_{AC}}{ds})\cdot[T_A \times V_{AC}] = ((-\alpha sen(\alpha s), \alpha\cos(\alpha s), 0)\cdot(-sen(\alpha s), \cos(\alpha s).0)$
$= \alpha sen^2(\alpha s) + \alpha\cos^2(\alpha s) + 0 = \alpha(sen^2(\alpha s) + \cos^2(\alpha s)) = \alpha$

Por lo tanto

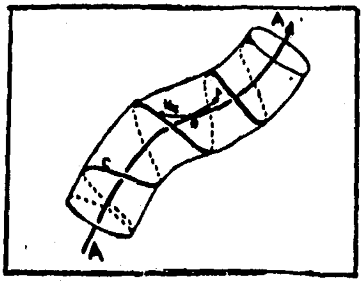
$(\frac{dV_{AC}}{ds}) \cdot [T_A \times V_{AC}] = \alpha$.

Finalmente la torsión $T_w(C, A) = \frac{1}{2\pi}\int_A [T_A \times V_{AC}] \cdot dV_{AC} = \frac{1}{2\pi}\int_0^L (\frac{dV_{AC}}{ds}) \cdot [T_A \times V_{AC}]\, ds$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^L \alpha ds = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^L ds = \frac{\alpha}{2\pi}(s\,|_0^L) = \frac{\alpha}{2\pi}(L) = \frac{\alpha L}{2\pi}$.
Como
$\alpha = \frac{2\pi n}{L} \Rightarrow \frac{\alpha L}{2\pi} = n$
Por lo tanto
$T_w(C, A) = n.$
Observe que
$L = 2\pi pn$ y $\alpha = \frac{2\pi n}{L} \Rightarrow 2\pi pn = \frac{2\pi n}{\alpha}$
y por lo tanto
$p\alpha = 1$
y como consecuencia
$(0, 0, p\alpha s) = (0, 0, s)\ \varepsilon\ A.$

Así pues, la torsión de una curva C sobre un eje A es igual a el número de vueltas que dá la curva C alrededor del eje A.

Definiremos ahora la torsión de un ADN cerrado.



Usualmente se definirá la torsión de la curva C sobre un eje A el cuál será denotado por $T_w(C, A)$ o simplemente como T_w.

Sea V_{AC} el vector unitario que une un punto $a \varepsilon A$ con un punto c de C.

Como la curva C dá vueltas helicoidalmente sobre A, V_{ac} gira alrededor de A.

$T_w(C, A)$ es una medida de este giro:

A medida que el punto a de A se mueve a lo largo del eje A, el vector V_{ac} cambia continuamente de posición, el cambio infinitesimal de V_{ac} , denotado por dV_{ac}, tendrá una componente tangente T y una componente perpendicular al eje A.

T_w. es la medida del cambio total de la perpendicular V_{ac} sobre todo el ADN y se representa por la integral de linea:

$$T_w(C,A) = \frac{1}{2\pi}\int_A [T_a \times V_{ac}] \cdot dVac$$

donde:

T_w: Torsión de C sobre A.

A: Curva central del ADN.

V_{ac} : Vector unitario uniendo A con C.

T: Vector unitario tangente a la curva A.

El factor $\frac{1}{2\pi}$ es usado para normalización.

Cuando A es un segmento de línea, V_{ac} es siempre perpendicular a A, en este caso T_w es el número de veces que V_{ac} gira sobre el eje A.

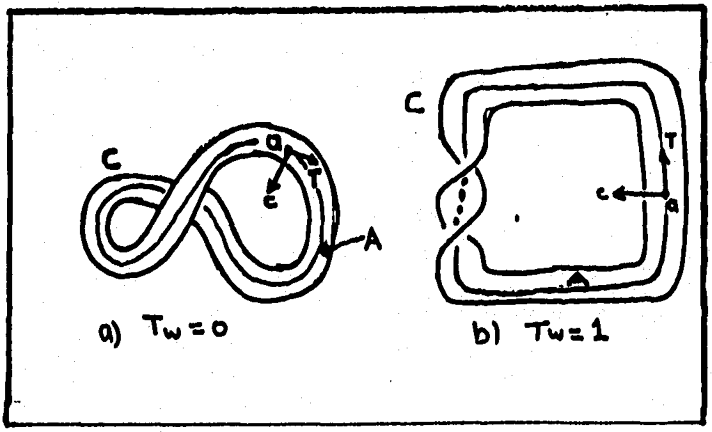
En un ADN cerrado las posiciones inicial y final de V_{ac} coinciden y T_w es el número de giros de C sobre A, el cuál es un número entero.

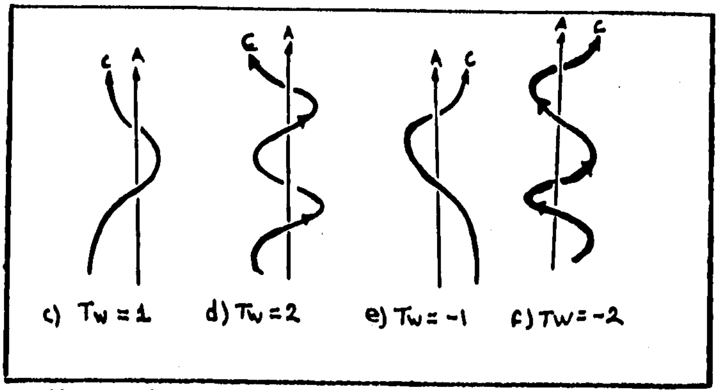
Por otro lado

$$T_w(A,C) = \frac{1}{2\pi}\int_c [Tc \times Vca] \cdot dVca$$

como se vió antes.

Veamos algunos ejemplos:

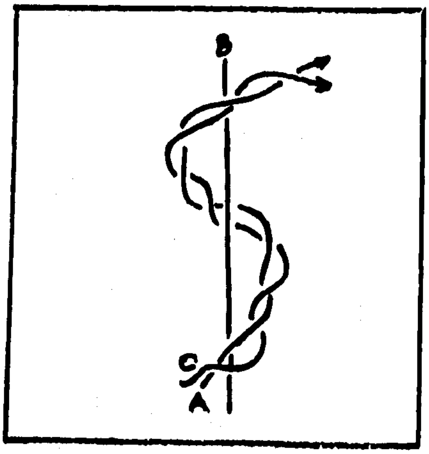




Observación:

T_w es positivo si el cruce entre A y C se determina por la regla de la mano derecha (c y d), y negativo si se determina por la regla de la mano izquierda (e y f).

Ahora presentamos un ejemplo en una porción de ADN superhelicoidal, observe que el eje A también es una hélice y por lo tanto el giro helicoidal de C llega ser un giro superhelicoidal.



Para este caso:

T_w = Número de veces que C gira sobre A + $nsen\gamma$.

Donde:

n: Número de veces que A gira sobre el eje B.

γ: El ángulo en amplitud de la hélice A con respecto del eje B.

En este ejemplo: n es aproximadamente a una vuelta y media, es decir, $n = 1.5$

$\gamma = 40^0$ y por lo tanto se tiene que:

$T_w = 4 + 1.5(0.6428) = 4.96$

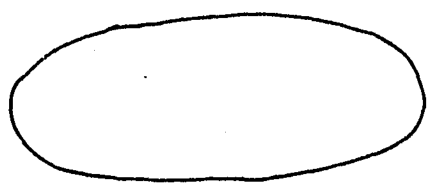
c) LA RETORSION (Writhe)

Aquí simplemente definiremos a la retorsión W_r como la suma del número de cruces signados con los signos (+) o (-), es decir:

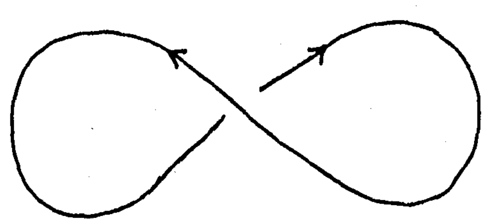
W_r = Suma de los cruces signados.

Obsérvese que para un ADN en su estado relajado $W_r = 0$ y por lo tanto $L_k = T_w$.

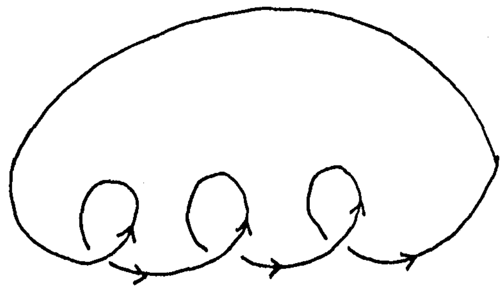
A manera de ejemplos:



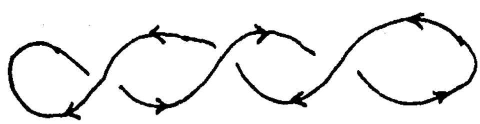
Wr = 0



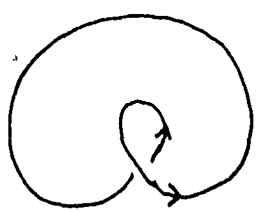
Wr = -1



$Wr = -3$



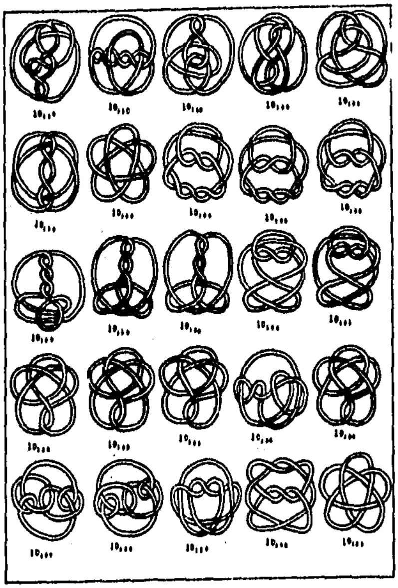
$Wr = 3$

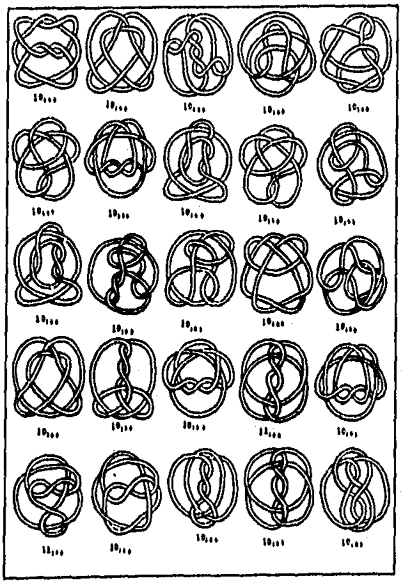


$Wr = 1$

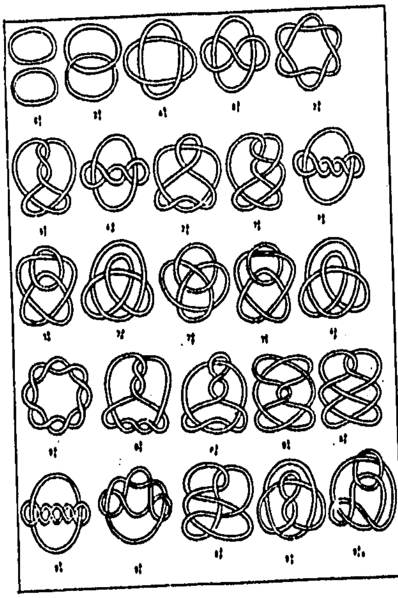
$Wr = -1$

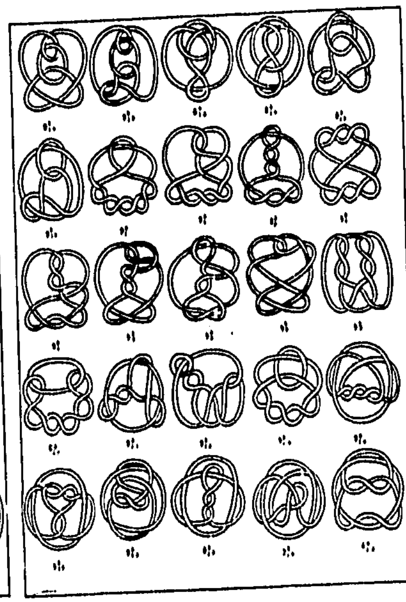
APENDICE D

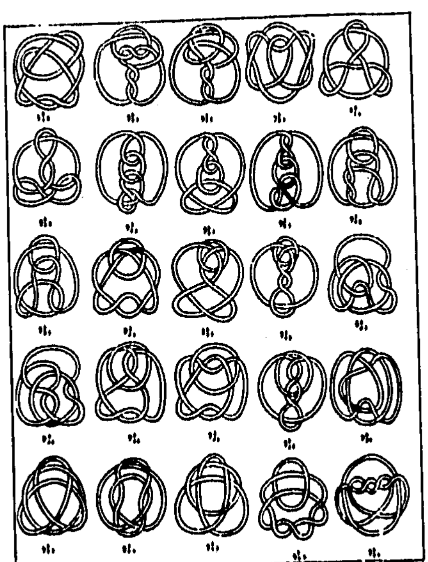


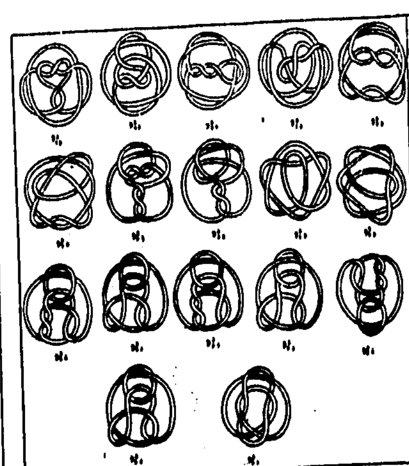


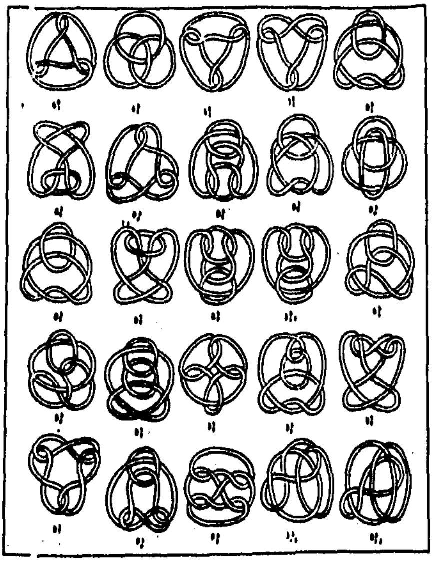
7.17 TABLA DE ENLACES

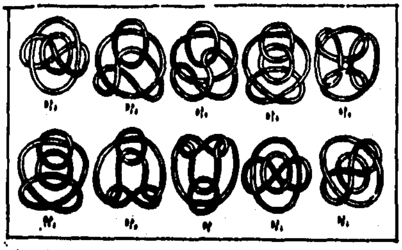


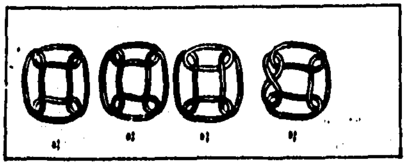




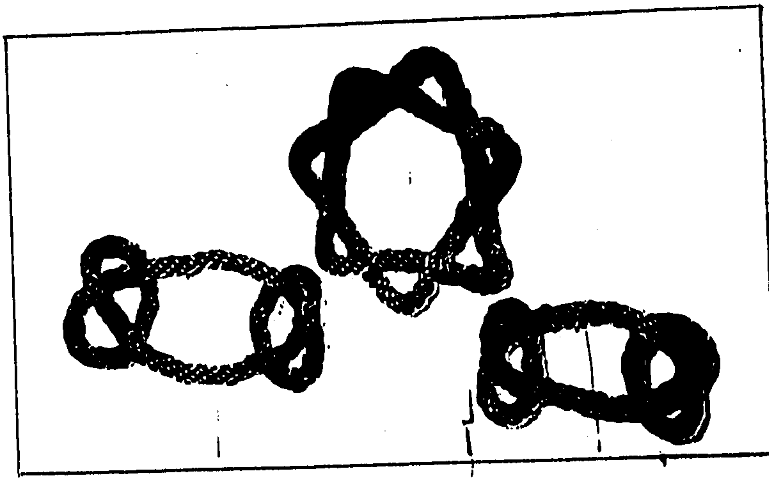


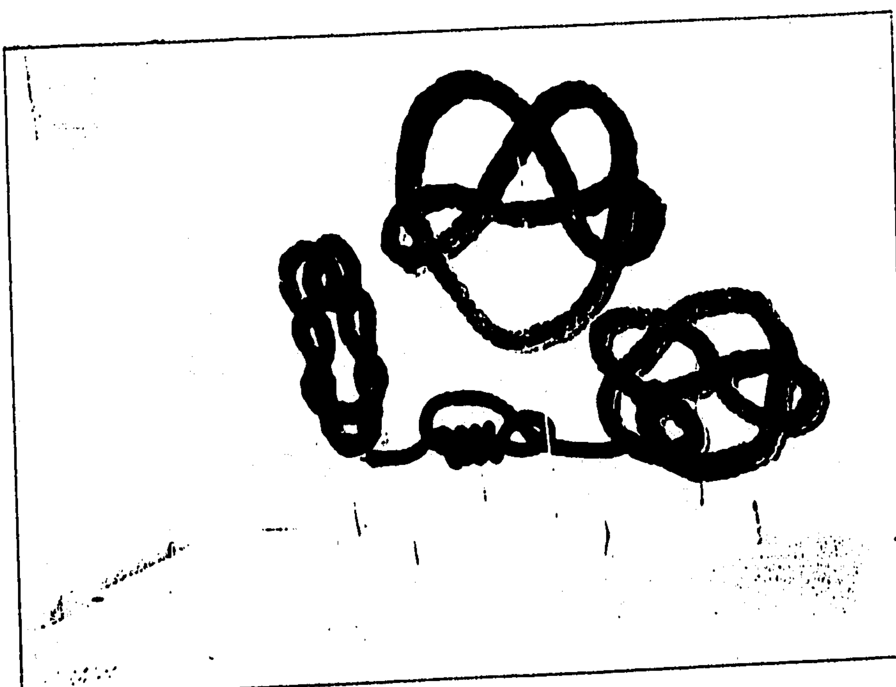


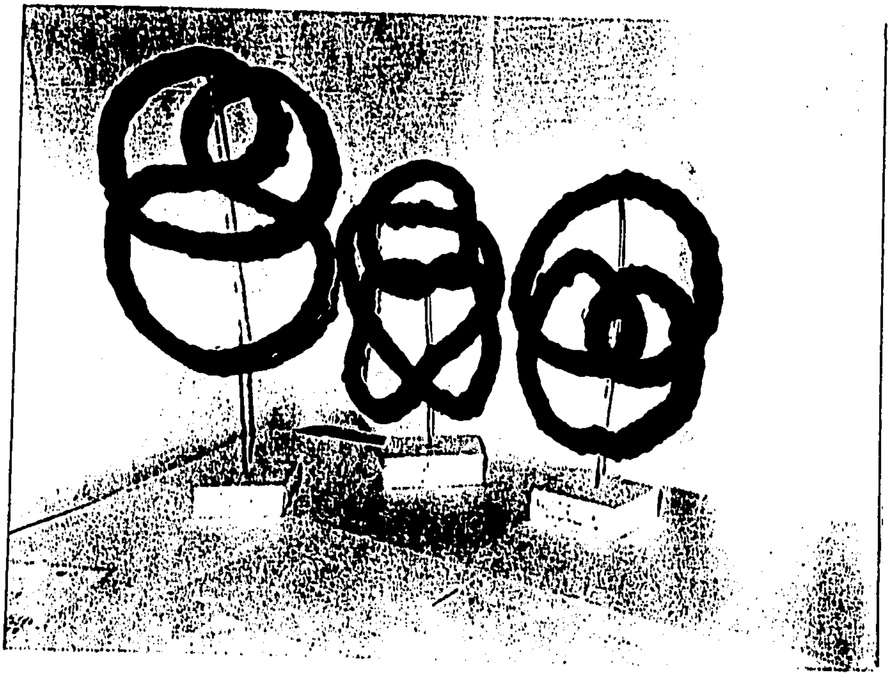


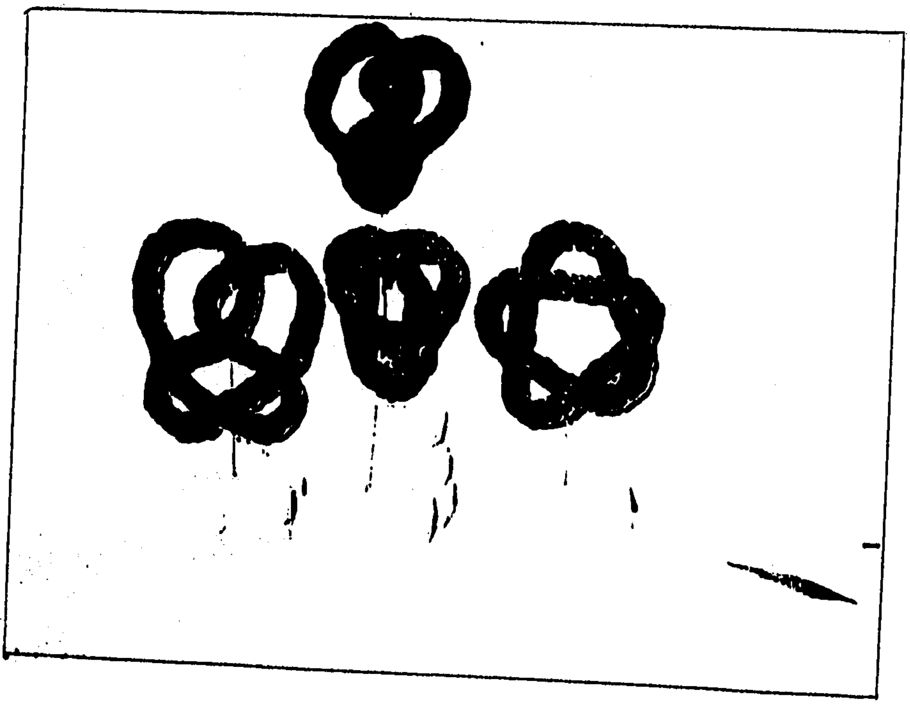


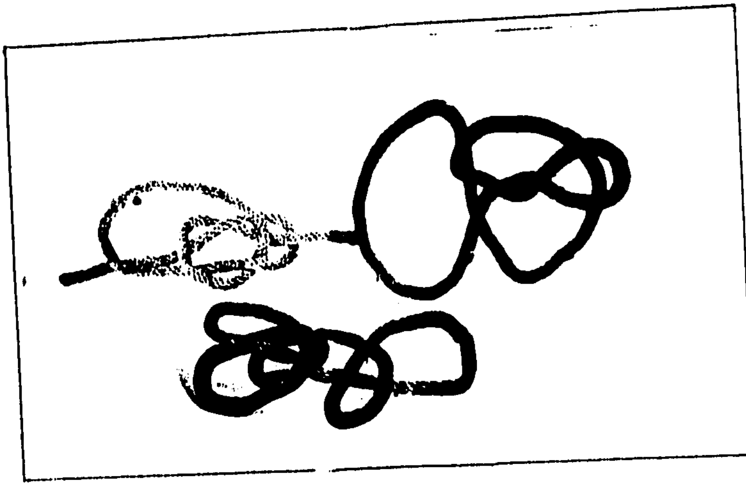
FOTOGRAFIAS DE NUDOS

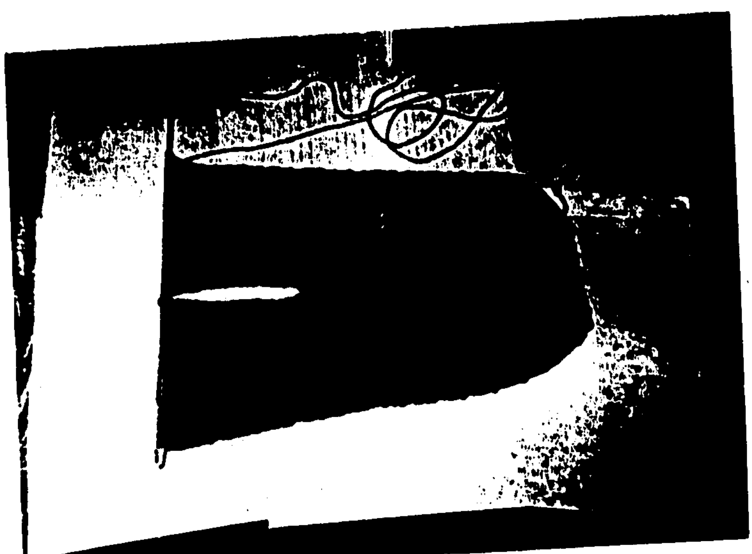




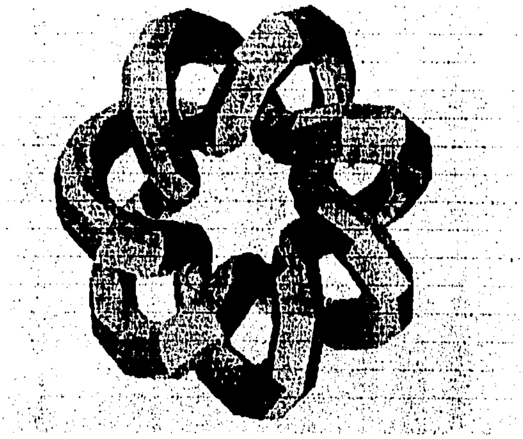


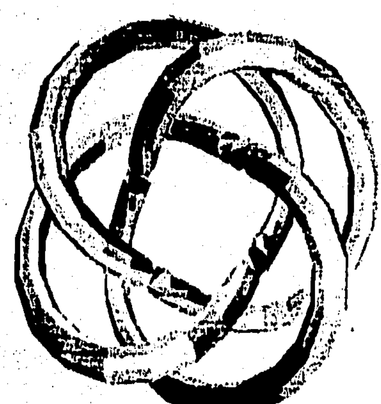






NUDOS GENERADOS EN COMPUTADORA





BIBLIOGRAFIA

[1] Neuwirth, Lee Paul. *Annals of mathematics.* studies 84 .

[2] Hemion Geoffrey. *The classification of knots and 3-dimentional spaces.*

[3] Atiyab Michael. *The Geometry and physics of knots.*

[4] L.H. Kauffman. *Formal knot theory.* Princeton university press mathematical, notes # 30 (1983).

[5] M.G.V. Bogle. *Lissajous knots.* Journal of Knot Theory and Its Ramifications, World Scientific Publishing Compeny, Vol.3 No. 2 (1994) 121-140.

[6] L.H. Kauffmen. *Knots and physics*, World Scientific; pub.singapure (1991).

[7] D.Rolfsen. *Knots and links*, publish or perish press, Houston Tex. (1990).

[8] De Witt L. Sumners, *New Scientific Applications of Geometry and Topology*, Proceedings in Applied methemetics Vol. 45. American mathematical society (1993).

[9] R.H. Crowell and R.H.Fox. *Introduction to knot theory.* Blaisdell Pub. Co. (1963).

[10] K. Reidemeister. *Knotentheorie.* Chelsea Publishing Co. New York (1948).

[11] V.F.R. Jones. *A polynomial invariant of links via von Neumann algebras.* Boll.Amer.Math.Soc. 129 (1985) 103-112.

[12] J.W. Alexander. *Topological invariants of knots end links.* Trans.Amer.Math.Soc. 20 (1923). 275-306.

[13] M.Tabor and I. Klapper. *The Dynamics of knots and curves (part I).* Nonlinear Science Today, (Vol.4.No.1).1994,pags.7-13.

[14] M.Tabor and I. Klapper. *The Dynamics of knots and curves (part II).* Nonlinaar Science Today 1994 (Vol.4.No.2).pegs.12-18

[15] J.M. Famandaz de Labastida. *Teorias cuánticas de campos topologicas.* Investigacion y Ciencia, Julio (1995) pag. 84-71.

[16] Lee, Nauwirth. *Teoria de nudos.* Investigacion y Ciencia, Agosto (1979) pag. 52-66.

[17] J.C. Larranaga, H.B.Short. Revista Del Seminario de Ensenanza y Titulacion, Ano V, Numaro especial 31^, pags.68-77

[18] J:H.White and W.R. Bauer. *Calculation of the Twist and the Writhe for Representative models of DNA*, J.Mol.Biol. 189,(1986), 329-341.

[19] Belaga E.G. Chetyre Fragmenta Matematiki Dvatzatogo Veka, Ser.Mat.Kib, No.5, 1977, 23-42. Znanie, Moscu, 5, 1977.

[20] Vaughan F.R. Jones. *Teoria de nudos y mecanica estadistica.* Investigacion y Ciencia, Enero 1991, pag. 51.

[21] Laboratorio de Visualizacion Matemática, *Not Knot, video.* Facultad de Ciencias, UNAM.