

34  
25'



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE  
MÉXICO

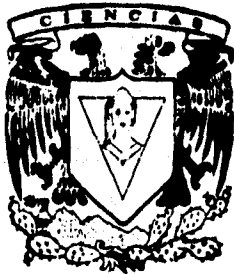
FACULTAD DE CIENCIAS

LA DESIGUALDAD DE JØRGENSEN



**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**M A T E M A T I C O**

P R E S E N T A :  
OSWALDO ZUÑIGA SILVA



DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



1996

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

**TESIS CON  
FALLA-DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"La Desigualdad de Jorgensen"  
realizado por Oswaldo Zuñiga Silva  
con número de cuenta 830464b-6 , pasante de la carrera de Matemáticas  
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dr. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

Propietario

Dra. SILVIA DE NEYNET URBINA

Propietario

Dr. GUILLERMO SIENRA LOERA

Suplente

M. en C. PILAR MARTINEZ TELLEZ

Suplente

M. en C. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ

  
Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo M.

*A mi familia.*

*Agradezco al Dr. Antonio Lascurain su tiempo  
y paciencia al dirigir esta tesis.*

## INTRODUCCIÓN.

Si  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  son dos transformaciones de Möbius que generan un grupo discreto no elemental entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$|tr^2(\bar{f}) - 4| + |tr(\bar{f}\bar{g}\bar{f}^{-1}\bar{g}^{-1}) - 2| \geq 1$$

Esta desigualdad fue encontrada por Troels Jørgensen en los años setenta y juega un papel fundamental en la teoría de los grupos Fuchsianos y Kleinianos. Esencialmente dice que  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  no pueden estar ambas cerca de la identidad.

Existen múltiples aplicaciones de esta desigualdad. En esta tesis se desarrollarán algunas de ellas, por ejemplo, la existencia de horodiscos ( horobolas ) ajenas e invariantes bajo la acción del grupo (Teorema 3.3 ), o las restricciones universales de los grupos de rango dos, éstas dicen que los elementos generadores de estos grupos no pueden mover "muy poco" los puntos de  $\mathbf{H}^2$  ( $\mathbf{H}^3$ ), ver Teorema 3.4.

Una aportación importante en esta tesis es lograr una mejor cota de la "cercanía" a la identidad de dos transformaciones que generan un grupo discreto no elemental, esta se logra en el Corolario 2.3., comparar con la obtenida en [B] Sección 5.4.

Existen grupos para los cuales la desigualdad es igualdad, estos grupos llamados extremos en el caso Fuchsiano son ciertos grupos triangulares ver [J,K]. Finalmente quisieramos mencionar que esta desigualdad ha sido generalizada recientemente a dimensiones altas  $\geq 4$  por F. W. Gehring y G. J. Martin ver [G,M].

## INDICE

	pagina
Introducción	3
Capítulo I: Preliminares	5
Capítulo II: Desigualdad de Jørgensen	26
Capítulo III: Aplicaciones	37
Bibliografía	54

## CAPÍTULO I

### PRELIMINARES

#### Densidades

En este capítulo presentaremos algunos resultados que usaremos en esta tesis.

**Definición.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable se dice que  $f$  es *conforme* en  $x$  si su diferencial es un múltiplo escalar positivo  $\mu(x)$  de una matriz ortogonal, a  $\mu(x)$  se le llama *factor de conformatividad*.

Obsérvese que

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \mu(x);$$

Este límite existe ya que como  $f$  es diferenciable entonces

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)|}{|y - x|} = 0$$

por lo que

$$\lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} - \frac{|Df(x)(y - x)|}{|y - x|} \right| = 0$$

si  $f$  es conforme  $Df(x) = \mu(x)A$  donde  $A$  es una matriz ortogonal y  $\mu(x)$  es un escalar positivo, de esta manera

$$\frac{|Df(x)(y - x)|}{|y - x|} = \frac{|\mu(x)A(y - x)|}{|y - x|}$$

$$= \mu(x) \frac{|A(y - x)|}{|y - x|}$$



$$= \mu(x)$$

esto último se justifica observando que, como  $A$  es ortogonal entonces

$$|A(y - x)| = |y - x|.$$

**Definición.** Una *densidad* es una función definida en un dominio de  $\mathbb{R}^n$  la cual es continua y positiva.

Dada una densidad  $\lambda$  en  $D \subset \mathbb{R}^n$  se define una métrica en  $D$  de la siguiente manera:

Primero definimos la longitud de una curva suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  con respecto a  $\lambda$  como

$$\int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

esta longitud la denotaremos por  $\ell_\lambda(\gamma)$ , esto nos permite definir la distancia de  $x$  a  $y$  en  $D$  como

$$\rho(x, y) = \inf \ell_\lambda(\gamma)$$

donde  $\gamma$  recorre todas las curvas suaves que unen  $x$  con  $y$ , (de hecho se toman curvas suaves por tramos).

**Proposición 1.1.**  $\rho$  es una métrica.

DEMOSTRACION.  $\rho$  es evidentemente no negativa,  $\rho$  es simétrica ya que

$$\ell_\lambda(\gamma) = \ell_\lambda(-\gamma)$$

$\rho$  satisface la desigualdad del triángulo ya que si  $\rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, z)$  entonces existiría una curva  $\gamma_1$  que une  $x$  con  $y$  y otra  $\gamma_2$  que une  $y$  con  $z$  tal que

$$\ell_\lambda(\gamma_1) + \ell_\lambda(\gamma_2) < \rho(x, z)$$

pero  $\gamma_1 + \gamma_2$  une  $x$  con  $z$ . Falta solamente probar que  $\rho(x, y) > 0$  si  $x \neq y$ . Sea  $N$  una bola cerrada con centro en  $x$  y radio  $r$  tal que  $y \notin N \subset D$ , por continuidad  $\lambda$  alcanza un ínfimo  $\lambda_0$  en  $N$ , dada  $\gamma$  una curva que une  $x$  con  $y$ , sea  $x_0$  el primer punto de  $\gamma$  si la recorremos empezando por  $x$  tal que  $x_0 \in \partial N$

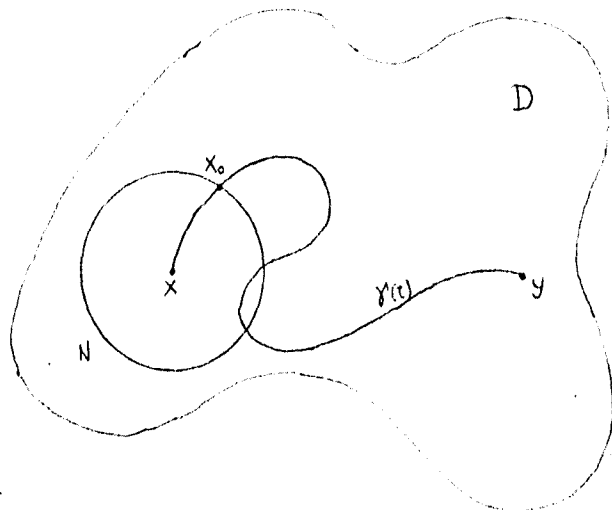


figura 1

entonces si  $\gamma_0$  es el segmento de curva de  $\gamma$  que une a  $x$  con  $x_0$ , se tiene

$$\ell_\lambda(\gamma) > \ell_\lambda(\gamma_0) \geq r\lambda_0 > 0$$

por lo tanto  $\rho(x, y) > 0$ .  $\square$

Por otra parte, sea  $\lambda$  una densidad definida en  $D$ , si  $f$  es una biyección conforme de  $D$  sobre un dominio  $D_1$  y  $\mu(x)$  es el factor de conformalidad de  $f$ , entonces  $D_1$  hereda la densidad  $\sigma$ , donde

$$\sigma(fx) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$$

y por lo tanto una métrica  $\rho_1$ , de esta manera  $f$  es una isometría de  $(D, \rho)$  sobre  $(D_1, \rho_1)$  ya que dada  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$

$$\begin{aligned} \ell_\sigma(f\gamma) &= \int_a^b \sigma(f\gamma(t)) |f' \gamma(t) \gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu(\gamma(t))} \mu(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\ &= \ell_\lambda(\gamma). \end{aligned}$$

La penúltima igualdad resulta de observar que como  $f$  es conforme en  $D$  entonces

$$|f' \gamma(t)| = \mu(\gamma(t)).$$

En particular si  $D = D_1$  y

$$\lambda(x) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$$

entonces  $f$  es una isometría de  $(D, \rho)$  sobre si mismo.

## Matrices

Consideremos el conjunto de las matrices de  $2 \times 2$  con entradas complejas, la clase de las matrices no-singulares (cuyo determinante es distinto de cero) forman un grupo, el cual se denota por  $GL(2, \mathbb{C})$ , el subgrupo de  $GL(2, \mathbb{C})$  de matrices con determinante igual a uno se denota por  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Se denota la traza de  $A$  como  $tr A$ , un calculo sencillo muestra que

$$tr(AB) = tr(BA),$$

por lo que

$$\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}(AB^{-1}B) = \text{tr}(A).$$

Por otra parte, consideraremos a las matrices de  $2 \times 2$  con entradas complejas como un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ .

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

definimos la transpuesta Hermitiana  $A^*$  de  $A$  como

$$A^* = (\overline{A})^t = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

**Definición.** Dadas dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

se define un producto Hermitiano como

$$\begin{aligned} [A, B] &= \text{tr}(AB^*) \\ &= a\overline{\alpha} + b\overline{\gamma} + c\overline{\beta} + d\overline{\delta}. \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que este es en efecto un producto Hermitiano, por lo cual induce una norma en  $GL(2, \mathbb{C})$  de la siguiente manera

$$\|A\| = [A, A]^{1/2} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$$

(solo es necesario demostrar la desigualdad del triángulo, lo cual se probará en seguida). A

su vez esta norma induce una métrica dada por

$$\|A - B\| = \left[ |a - \alpha|^2 + |b - \beta|^2 + |c - \gamma|^2 + |d - \delta|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Lema. 1.2** Sean  $A$  y  $B$  matrices entonces

i)  $|[A, B]| \leq \|A\| \|B\|$ ;

ii)  $|\operatorname{tr}(AB)| \leq \|A\| \|B\|$ ;

iii)  $2|\det(A)| \leq \|A\|^2$ ;

iv)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ;

v)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

DEMOSTRACION. i) Sea  $C = [B, A]A - \|A\|^2 B$

$$\begin{aligned} \|C\|^2 &= \operatorname{tr} \left\{ ([B, A]A - \|A\|^2 B)(\overline{[B, A]}A^* - \|A\|^2 B^*) \right\} \\ &= \operatorname{tr} \left( \| [B, A] \|^2 AA^* - [B, A] \|A\|^2 AB^* - \|A\|^2 \overline{[B, A]} BA^* + \|A\|^4 BB^* \right) \\ &= \| [B, A] \|^2 \|A\|^2 - \| [B, A] \|^2 \|A\|^2 - \|A\|^2 \| [B, A] \|^2 + \|A\|^4 \|B\|^2 \\ &= \|A\|^4 \|B\|^2 - \|A\|^2 \| [B, A] \|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

ya que  $[B, A] = \overline{[A, B]}$ .

ii) es consecuencia de (i) ya que  $\|B^*\| = \|B\|$ .

iii) como

$$\begin{aligned} \|A\|^2 - 2|\det(A)| &\geq |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 - 2(|ad| + |bc|) \\ &= (|a| - |d|)^2 + (|b| - |c|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

para demostrar *iv)* consideremos la siguiente identidad

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + [A, B] + [B, A] + \|B\|^2$$

$$\leq \|A\|^2 + 2\|A\| \|B\| + \|B\|^2$$

$$= (\|A\| + \|B\|)^2,$$

ya que  $|\overline{[A, B]}| \leq \|A\| \|B\|$ .

*v)* tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$\|AB\|^2 = |a\alpha + b\gamma|^2 + |a\beta + b\delta|^2 + |c\alpha + d\gamma|^2 + |c\beta + d\delta|^2.$$

Ahora

$$|a\alpha + b\gamma|^2 \leq (|a|^2 + |b|^2) (|\alpha|^2 + |\gamma|^2),$$

esto es por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En forma análoga se obtienen desigualdades para los otros sumandos.

Por lo cual

$$\|AB\|^2 \leq (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2). \quad \square$$

Es claro que

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en la métrica de  $GL(2, \mathbb{C})$  si y solo si  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ ,  $c_n \rightarrow c$ ,  $d_n \rightarrow d$ . Esta observación implica que la transformación  $A \rightarrow A^{-1}$  es continua en  $GL(2, \mathbb{C})$ . Además si  $A_n \rightarrow A$  y  $B_n \rightarrow B$  entonces como

$$\begin{aligned} \|A_n B_n - AB\| &= \|A_n B_n - A_n B + A_n B - AB\| \\ &= \|A_n(B_n - B) + (A_n - A)B\| \end{aligned}$$

por el lema 1.2 inciso (v) tenemos

$$\|A_n(B_n - B) + (A_n - A)B\| \leq k_1 \|B_n - B\| + k_2 \|A_n - A\|$$

$A_n$  converge y en consecuencia  $\|A_n\| \leq k_1$ , también  $\|B\| \leq k_2$  para ciertas constantes  $k_1$  y  $k_2$ ) de esta manera el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero ya que  $\|B_n - B\| \rightarrow 0$  y  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ . por lo tanto

$$\|A_n B_n - AB\| \rightarrow 0$$

es decir  $A_n B_n \rightarrow AB$ . Esto muestra que  $GL(2, \mathbb{C})$  es un grupo topológico con respecto a la métrica  $\|A - B\|$ .

### Grupos discretos.

Daremos tres definiciones equivalentes.

**Definición 1.** Un subgrupo  $G$  de  $GL(2, \mathbb{C})$  es discreto si dadas  $X, A_1, A_2, \dots$  matrices en  $G$ , con  $A_n \rightarrow X$  entonces  $A_n = X$  para toda  $n$  suficientemente grande.

**Definición 2.** Un subgrupo  $G$  de  $GL(2, \mathbb{C})$  es discreto si dadas  $A_1, A_2, \dots$  matrices en  $G$ ,

con  $A_n \rightarrow X$ ,  $X \in GL(2, \mathbb{C})$  entonces  $A_n = X$  para toda  $n$  suficientemente grande.

**Definición 3.** Un subgrupo  $G$  de  $GL(2, \mathbb{C})$  es discreto si dadas  $A_1, A_2, \dots$  matrices en  $G$ , con  $A_n \rightarrow I$  entonces  $A_n = I$  para toda  $n$  suficientemente grande.

La definición 1 es equivalente a la 2, ya que si  $X \in GL(2, \mathbb{C})$  y  $A_n \rightarrow X$  entonces

$$A_n A_{n+1}^{-1} \rightarrow X X^{-1} = I,$$

de esta manera  $A_n = A_{n+1}$  a partir de cierta  $n$ .

La definición 1 es equivalente a la 3 ya que si suponemos que  $B_n \rightarrow X$  entonces

$$X^{-1} B_n \rightarrow I.$$

**Lema 1.3.** Un subgrupo  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto si y solo si para cada  $k$  positivo el conjunto

$$\{A \in G : \|A\| \leq k\}$$

es finito.

**DEMOSTRACION.** Si este conjunto es finito para cada  $k$ , entonces  $G$  no tiene puntos de acumulación, es decir todo elemento de  $G$  es aislado y por lo tanto  $G$  es discreto. Por otro lado si para alguna  $k$  este conjunto es infinito existen elementos distintos  $A_n \in G$  con  $\|A_n\| \leq k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Se pueden identificar a las matrices  $A_n$  con puntos en  $\mathbb{R}^4$  los cuales estan contenidos en una bola cerrada y por el teorema de Bolzano-Weierstrass este conjunto de puntos tiene un punto de acumulación, por lo tanto hay una subsucesión de  $A_n$  que converge, digamos a una matriz  $B$  y como la función determinante es continua,  $B \in SL(2, \mathbb{C})$  por lo tanto  $G$  es no discreto.  $\square$



## Cuaternios

Un *cuaternio* es una matriz de  $2 \times 2$  con entradas complejas de la forma

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

El conjunto de cuaternios es denotado por  $\mathbb{H}$ , la adición y multiplicación es la definida para las matrices, se prueba fácilmente que:

- (i)  $\mathbb{H}$  es un grupo abeliano con respecto a la suma.
- (ii)  $\mathbb{H} - \{0\}$  forma un grupo no abeliano con respecto a la multiplicación.
- (iii)  $\mathbb{H}$  es un espacio vectorial de dimensión cuatro sobre el campo de los números reales con base

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}.$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Por otra parte, si escribimos  $x + iy = z$  y  $u + iv = w$  entonces

$$q = (x\mathbf{1} + yi) + (uj + vk)$$
$$= (x\mathbf{1} + yi) + (u\mathbf{1} + vi)\mathbf{j}.$$

Esto sugiere que una forma conveniente de escribir los cuaternios es la siguiente

$$q = z + wj,$$

con la multiplicación

$$(z_1 + w_1j)(z_2 + w_2j) = (z_1z_2 - w_1\bar{w}_2) + (z_1w_2 + w_1\bar{z}_2)j.$$

Un cálculo muestra que esta es la multiplicación definida anteriormente. En particular si  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}$  contiene una copia de  $\mathbb{R}^3$  mediante la identificación

$$(x, y, t) \mapsto (x + iy) + tj \quad \text{con } x, y, t \in \mathbb{R}.$$

### Matrices unitarias.

**Definición.** Una matriz de  $2 \times 2$  con entradas complejas es *unitaria* si y solo si

$$AA^* = I \quad \text{donde } A^* = \bar{A}^t.$$

obsérvese que si  $A$  es unitaria  $|\det(A)|^2 = 1$ , a continuación enunciamos el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.** Sea  $A$  en  $SL(2, \mathbb{C})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i)  $A$  es unitaria;

(ii)  $\|A\|^2 = 2$ ;

(iii)  $A$  es un cuaternio.

DEMOSTRACION. Supóngase que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad - bc = 1$$

por lo que

$$AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

de aquí se sigue que si  $A$  es unitaria entonces  $\|A\|^2 = 2$ , por otra parte un cálculo muestra que

$$|a - \bar{d}|^2 + |b + \bar{c}|^2 = \|A\|^2 - 2;$$

Por lo cual si  $\|A\|^2 = 2$ , se concluye que  $a = \bar{d}$  y  $b = -\bar{c}$  y  $A$  es un cuaternio; finalmente si  $A$  es un cuaternio

$$AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix}$$

como  $\det(A) = 1$ , entonces  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ; por lo tanto  $A$  es unitaria.  $\square$

Denotaremos a la clase de las matrices unitarias con determinante igual a uno por  $SU(2, \mathbb{C})$ .

Una de las propiedades de las matrices unitarias es la de preservar la norma de los vectores, es decir si  $A \in SU(2, \mathbb{C})$  y  $x = (z, w) \in \mathbb{C}^2$  entonces  $\|Ax\| = \|x\|$ ; esto se sigue ya que como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + bw \\ -\bar{b}z + \bar{a}w \end{pmatrix}$$

de esta manera se tiene

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= |az + bw|^2 + |-\bar{b}z + \bar{a}w|^2 \\ &= (az + bw)\overline{(az + bw)} + (-\bar{b}z + \bar{a}w)(-\overline{b\bar{z} + a\bar{w}}) \\ &= |az|^2 + |bw|^2 + |aw|^2 + |bz|^2 \\ &= (|a|^2 + |b|^2)(|z|^2 + |w|^2) \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

$(|a|^2 + |b|^2 = \det(A) = 1)$ . De manera similar  $\|xA\| = \|x\|$ : se concluye que si  $A, X, Y$  son matrices de  $2 \times 2$  con entradas complejas,  $A \in SU(2, \mathbb{C})$ .

$$\|AXA^{-1} - AYA^{-1}\| = \|A(X - Y)A^{-1}\| = \|X - Y\|;$$

de esta manera se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.5.** Si  $A \in SU(2, \mathbb{C})$  entonces la transformación  $X \mapsto AXA^{-1}$  es una isometría del espacio de matrices complejas de  $2 \times 2$  sobre si mismo.

### Transformaciones de Möbius.

En esta sección enunciaremos algunos resultados que usaremos en la tesis. Estos resultados no los probaremos, las demostraciones se pueden consultar principalmente en [13] capítulo 3, otras referencias útiles son [L] y [R].

### Reflexiones en esferas y planos.

La esfera con centro  $a$  y radio  $r$  la denotaremos por  $S(a, r)$ , la reflexión (o inversión) en  $S(a, r)$  es la función  $\phi$  definida como

$$\phi(x) = a + \left( \frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a), \quad \text{si } x \neq a$$

Si  $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ , se extiende  $\phi$  a  $\hat{\mathbb{R}}^n$  definiendo  $\phi(a) = \infty$  y  $\phi(\infty) = a$ . Se tiene que  $\phi^2(x) = x$  para toda  $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$  y  $\phi$  es una biyección de  $\hat{\mathbb{R}}^n$  sobre si mismo.

Los planos en  $\hat{\mathbb{R}}^n$  (de codimensión 1) están definidos como el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x \cdot a) = t\} \cup \{\infty\}$$

donde  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $|a| = 1$  y  $t \in \mathbb{R}$ , estos planos se denotan por  $P(a, t)$ . La reflexión  $\psi$  en el plano

$P(a, t)$  se define de la siguiente manera

$$\psi(x) = x - 2[(x \cdot a) - t]a, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

y se define  $\psi(\infty) = \infty$ . De esta manera  $\psi$  es también una transformación biyectiva de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  en el mismo que satisface  $\psi^2(x) = x$ . Se puede probar que las reflexiones  $\phi$  y  $\psi$  son continuas con respecto a la métrica cordal en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , la cual se define de la siguiente manera

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x, y \neq \infty; \\ \frac{2}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } y = \infty. \end{cases}$$

Además  $\phi$  y  $\psi$  son conformes e invierten la orientación.

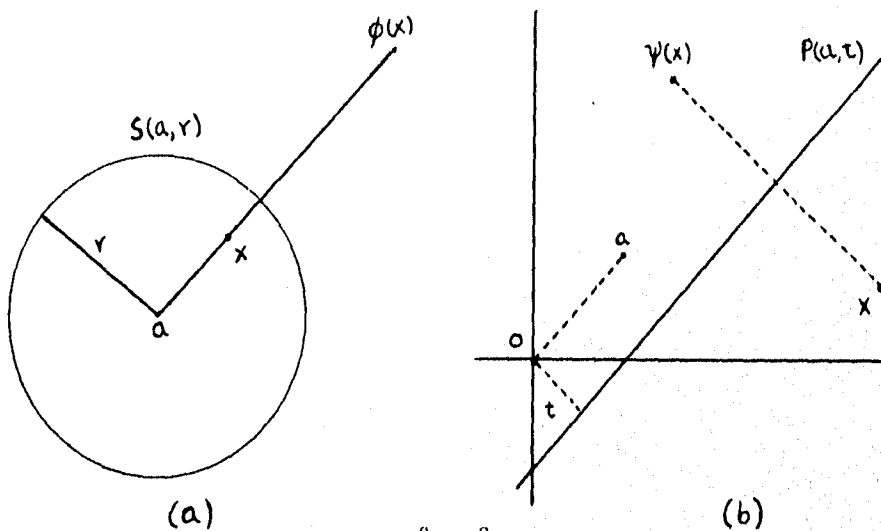


figura 2

**Definición.** Una transformación de Möbius que actúa en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es una composición finita de reflexiones en esferas y planos.

Las transformaciones de Möbius así definidas forman un grupo, el cual se denota por  $GM(\mathbb{R}^n)$  y el subgrupo de las transformaciones de Möbius que preservan la orientación se denota por  $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ . Algunos ejemplos de transformaciones de Möbius son las traslaciones, las rotaciones y las homotecias.

### Extensiones de Poincaré

Sea  $\phi$  la reflexión sobre la esfera  $S(a, r)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , se define su extensión de Poincaré  $\tilde{\phi}$  como la reflexión sobre la esfera  $S(\tilde{a}, r)$  donde  $\tilde{a} = (a, 0)$ ,  $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$  y de manera análoga dada una reflexión  $\psi$  sobre el plano  $P(a, t)$  se define su extensión de Poincaré  $\tilde{\psi}$  como la reflexión en  $P(\tilde{a}, t)$ ,  $\tilde{a} = (a, 0)$ ,  $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Además dada  $\phi \in GM(\mathbb{R}^n)$ , si  $\phi = \phi_n \dots \phi_1$  donde  $\phi_i$  es una reflexión sobre una esfera o plano, se define la extensión de Poincaré de  $\phi$ , como  $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_n \dots \tilde{\phi}_1$ .

$\mathbf{H}^n$  designa el semiespacio superior en  $\mathbb{R}^n$ , es decir

$$\mathbf{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Se puede probar que toda extensión de Poincaré de  $GM(\mathbb{R}^n)$  es una isometría del espacio  $\mathbf{H}^{n+1}$  con la métrica definida por la densidad  $\lambda(x) = \frac{1}{x_{n+1}}$  donde  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ . A  $\mathbf{H}^3$  con esta métrica llamada hiperbólica se le conoce como el espacio hiperbólico tridimensional.

También se puede probar que la métrica hiperbólica satisface la siguiente relación, si  $x = se_3$  y  $y = te_3$  con  $e_3 = (0, 0, 1)$ , entonces

$$\rho(x, y) = \left| \log \left( \frac{s}{t} \right) \right|; \quad (1.2)$$

usando esta relación se obtienen otras dos identidades que serán de gran utilidad más adelante.

$$\cosh \rho(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_3 y_3}. \quad (1.3)$$

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(x, y) = \frac{|x - y|^2}{4x_3 y_3}. \quad (1.4)$$

Además las geodésicas o curvas que minimizan distancias son semicírculos Euclidianos ortogonales a  $\mathbb{R}^2$  junto con las rectas verticales en  $\mathbb{H}^3$ .

### Modelo de la bola unitaria.

Consideremos la transformación  $\phi = \phi_0 \sigma$  donde  $\phi_0$  es la reflexión en  $S(c_{n+1}, \sqrt{2})$  y  $\sigma$  la reflexión en el plano  $x_{n+1} = 0$ , la transformación  $\phi$  transforma el plano  $x_{n+1} = 0$  sobre la esfera  $S(0, 1) = S^n$  y  $\mathbb{H}^{n+1}$  sobre la  $n + 1$  bola unitaria denotada por  $B^{n+1}$ , además

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|\phi(y) - \phi(x)|}{|y - x|} = \frac{1 - |\phi(x)|^2}{2x_{n+1}}.$$

Usando los resultados de la sección 1.1, la métrica  $\rho$  en  $\mathbb{H}^{n+1}$  induce una métrica en  $B^{n+1}$  definida por la densidad  $\lambda$

$$\lambda(x) = \frac{2}{1 - |x|^2}.$$

Ahora, dada una isometría  $\psi$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  esta define una isometría en  $B^{n+1}$  dada por  $\phi\psi\phi^{-1}$ . Esto muestra que  $GM(\mathbb{R}^n)$  es conjugado en  $GM(\mathbb{R}^{n+1})$  al subgrupo que consta de los elementos que dejan a  $B^{n+1}$  invariante y son precisamente las isometrías de  $B^{n+1}$ . De esta manera se obtiene un segundo modelo del espacio hiperbólico llamado el modelo de la bola.

### $PSL(2, \mathbb{C})$

En esta sección analizaremos la acción de las transformaciones de Möbius en  $\widehat{\mathbb{R}}^2$  y su extensión a  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ .

Consideremos el conjunto de transformaciones de la forma

$$\bar{g}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1.5)$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son números complejos dados con  $ad - bc \neq 0$ .

Estas transformaciones se extienden a biyecciones del plano complejo extendido

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

sobre si mismo definiendo  $\bar{g}(\infty) = \infty$  si  $c = 0$  y  $\bar{g}(-\frac{d}{c}) = \infty$ ,  $\bar{g}(\infty) = \frac{a}{c}$  si  $c \neq 0$ . Se puede demostrar que el conjunto de transformaciones de la forma (1.5) es un grupo bajo la la composición, éste grupo se le puede identificar con

$$PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\pm I}$$

de ésta manera, cada transformación  $\bar{g}$  de la forma (1.5) estará representada por la matriz

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } ad - bc = 1$$

Obsérvese además, que la composición de las transformaciones equivale a la multiplicación de matrices en  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Por otra parte se demuestra sin dificultad que cualquier reflexión en un círculo o una recta en el plano es de la forma

$$\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

e inversamente las transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{C})$  son composiciones de translaciones, rotaciones, homotecias y la transformación  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ , por lo cual se puede identificar  $PSL(2, \mathbb{C})$  con  $M(\hat{\mathbb{R}}^2)$ . Usando esta identificación se puede extender  $\bar{g}(z)$  en (1.5) a  $\hat{\mathbb{R}}^3$  mediante su extensión de Poincaré. Para hacer esto explícitamente identificamos a  $(x, y, t) \in \hat{\mathbb{R}}^3$  con el cuaternio  $x + yi + tj$ , con esta notación

$$\mathbf{H}^3 = \{z + tj : z \in \mathbb{C}, t > 0\}.$$

De ésta manera la extensión de Poincaré de  $\bar{g}$  esta dada por la transformación

$$\bar{g}(z + tj) = \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\bar{c}t^2 + |ad - bc| tj}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2}. \quad (1.6)$$



Denotaremos a las transformaciones de  $PSL(2, \mathbb{C})$  con una letra con una barra arriba y a una matriz en  $GL(2, \mathbb{C})$  que la representa con la misma letra sin barra.

Se definen las siguientes funciones en  $PSL(2, \mathbb{C})$ ,

$$\text{traza}^2(\bar{g}) = \frac{\text{tr}^2(g)}{\det(g)} \quad y \quad \|\bar{g}\| = \frac{\|g\|}{|\det(g)|^{\frac{1}{2}}}$$

donde  $g$  es una matriz en  $GL(2, \mathbb{C})$  que representa a  $\bar{g}$ , se verifica fácilmente que éstas funciones están bien definidas, es decir si  $g_1$  y  $g_2$  son matrices que representan a  $\bar{g}$  entonces

$$\frac{\text{tr}^2(g_1)}{\det(g_1)} = \frac{\text{tr}^2(g_2)}{\det(g_2)} \quad y \quad \frac{\|g_1\|}{|\det(g_1)|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\|g_2\|}{|\det(g_2)|^{\frac{1}{2}}}$$

Obsérvese que

$$\text{tr}^2(\bar{g}) = \text{tr}^2(\bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}).$$

A continuación enunciaremos dos teoremas que se usarán más adelante y cuyas demostraciones se omiten (estas se pueden consultar en [B] cap. 4).

**Teorema 1.6.** Para cada  $\bar{g} \in PSL(2, \mathbb{C})$  se tiene

$$\|\bar{g}\|^2 = 2 \cosh \rho(j, \bar{g}(j)).$$

**Teorema 1.7.** Dada  $g \in SL(2, \mathbb{C})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (i)  $g \in SU(2, \mathbb{C})$ ,
- (ii)  $\bar{J}\bar{g}\bar{J}^{-1} \in SO(3)$  donde  $\bar{J}$  es la transformación canónica que manda  $\mathbf{H}^3$  en  $B^3$  es decir  $\bar{J}$  es la reflexión sobre el plano  $xy$  seguida de la reflexión en  $S(e_3, \sqrt{2})$ .

Definimos ahora formas standard en  $PSL(2, \mathbb{C})$ ; para cada  $k \neq 0$ ,  $k \in \mathbb{C}$  se define

$$m_k(z) = kz \quad (\text{si } k \neq 1),$$

$$m_1(z) = z + 1.$$

Obsérvese que para toda  $k$

$$\text{tr}^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2$$

Además se puede probar que toda transformación  $\bar{y} \in PSL(2, \mathbb{C})$   $\bar{y} \neq I$  es conjugada a una forma standard  $m_k$ , de esta manera se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.8.** Sean  $\bar{h}$  y  $\bar{y}$  transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{C})$  ninguna de ellos la identidad. Entonces  $\bar{h}$  y  $\bar{y}$  son conjugadas si y solo si

$$\text{tr}^2(\bar{h}) = \text{tr}^2(\bar{y}).$$

A continuación clasificaremos a las transformaciones de  $PSL(2, \mathbb{C})$  con respecto a su traza, para lo cual daremos la siguiente definición.

**Definición.** Sea  $\bar{y} (\neq I)$  una transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$  se define  $\bar{y}$  como

(i)  $\bar{y}$  es parabólica si  $\text{tr}^2(\bar{y}) = 4$ ,

(ii)  $\bar{y}$  es elíptica si  $\text{tr}^2(\bar{y}) \in [0, 4)$ ,

(iii)  $\bar{y}$  es loxodrómica si  $\text{tr}^2(\bar{y}) \notin [0, 4]$  ó  $\text{tr}^2(\bar{y})$  no es real. En el caso de que  $\text{tr}^2(\bar{y}) \in (4, \infty)$  a  $\bar{y}$  se le llama hiperbólica y si  $\text{tr}^2(\bar{y})$  no es real a  $\bar{y}$  se le llama estrictamente loxodrómica.

Sea  $\bar{y} \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $\bar{y} \neq I$ , se define el orden de  $\bar{y}$  como el mínimo entero positivo  $k$  tal que  $\bar{y}^k = I$ , obsérvese que si  $\bar{y}$  es de orden finito entonces es elíptica. Las transformaciones de orden dos se caracterizan por tener traza igual a cero, es decir es conjugada a una de la forma

$$\begin{pmatrix} \exp(i\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

### Razón cruzada.

Dados cuatro puntos distintos  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  en  $\mathbb{C}$  se define la *razón cruzada* de estos puntos como

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)}.$$

Esta definición se extiende por continuidad y así se determina la razón cruzada en el caso de que  $z_j = \infty$ , además se puede probar el siguiente resultado.

**Teorema 1.9.** Sean  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  cuatro puntos distintos y  $w_1, w_2, w_3$  y  $w_4$  también cuatro puntos distintos. Entonces  $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$  si y sólo si existe  $\bar{g} \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $\bar{g}(z_i) = w_i$ .

### Grupos elementales

Dado un grupo  $G$  actuando en un conjunto  $X$ , la órbita de  $x \in X$  esta definida por el conjunto

$$G(x) = \{\bar{g}(x) : \bar{g} \in G\}.$$

**Definición.** Un subgrupo  $G$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$  se dice que es elemental si y sólo si existe al menos una  $G$ -órbita finita en  $\mathbb{R}^3$ .

Los grupos elementales se clasifican en tres categorías de acuerdo con el número de elementos de su órbita finita  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Tipo 1:  $n \geq 3$  o  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \widehat{\mathbb{R}^3} - \mathbb{C}$ .

Tipo 2:  $n = 1$  y  $x_1 \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

Tipo 3:  $n = 2$  y  $x_1, x_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

En el caso discreto, los grupos de tipo 1 son elípticos finitos.

Los grupos discretos de tipo 2 son de tres clases.

a) Cíclicos finitos (éstos también son de tipo 1).

b) Contiene parabólicas, todas fijan un mismo punto, no hay loxodrómicas, aunque puede

haber elípticas (éstas fijan el punto fijo parabólico).

c) Contiene loxodrómicas, no hay parabólicas y todos los elementos del grupo fijan los mismos dos puntos.

Los grupos discretos de tipo 3 son conjugados a un grupo  $G$  cuyos elementos son de la forma

$$z \mapsto \frac{\omega^k \alpha^n}{z} \quad \text{o} \quad z \mapsto \omega^k \alpha^n z$$

donde  $|\omega| = 1$  y  $|\alpha| > 1$  ver [B] Sección 5.1.

Finalmente enunciaremos un resultado que se usará en los siguientes capítulos.

**Teorema 1.10.** *Todo subgrupo no elemental de  $PSL(2, \mathbb{C})$  contiene un número infinito de elementos loxodrómicos, de tal manera que cualquier par de ellos no tienen puntos fijos en común.*

## CAPÍTULO II

### DESIGUALDAD DE JØRGENSEN

En este capítulo se analizarán algunas propiedades de grupos no elementales y discretos, en particular estudiaremos algunos resultados que exhiben el caracter aislado de sus elementos. Primero demostraremos un resultado que usaremos para probar la desigualdad de Jørgensen.

**Teorema 2.1.** Sea  $\bar{f} \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $\bar{f} \neq Id$ , tal que no es de orden dos. Dada  $\bar{g} \in PSL(2, \mathbb{C})$ , sea  $\phi(\bar{g})$  la transformación  $\bar{g}\bar{f}\bar{g}^{-1}$ . Si  $\phi^n(\bar{g}) = \bar{f}$  para alguna  $n$  entonces  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es elemental.

DEMOSTRACION. Sea

$$\bar{g}_0 = \bar{g} \quad \text{y} \quad \bar{g}_m = \bar{g}_{m-1}\bar{f}(\bar{g}_{m-1})^{-1}.$$

donde  $\phi^n(\bar{g}) = \phi(\phi^{n-1}(\bar{g}))$ , ya que  $\bar{g}_1 = \phi(\bar{g})$ , se tiene

$$\phi^n(\bar{g}) = \bar{g}_n = \bar{g}_{n-1}\bar{f}\bar{g}_{n-1}^{-1}.$$

Consideremos dos casos.

Caso 1. Supongase que  $\bar{f}$  es parabólica con punto fijo  $\alpha$ , como  $\bar{g}_m$  es conjugada de  $\bar{f}$  entonces  $\bar{g}_m$  también es parabólica, con punto fijo  $\bar{g}_{m-1}(\alpha)$ , por hipótesis  $\bar{g}_n = \bar{f}$ , entonces  $\bar{g}_n$  fija  $\alpha$ . Por lo que  $\alpha = \bar{g}_{n-1}(\alpha)$  y en consecuencia  $\alpha$  es punto fijo de  $\bar{g}_{r-1}$  para toda  $r \geq 1$ , en particular  $\bar{g}(\alpha) = \alpha$  y  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es elemental.

Caso 2. Supongamos que  $\bar{f}$  fija dos puntos  $\alpha$  y  $\beta$ . Como  $\bar{g}_r$  es conjugada de  $\bar{f}$  entonces  $\bar{g}_r$  fija a  $\bar{g}_{r-1}(\alpha)$  y  $\bar{g}_{r-1}(\beta)$ .

Si  $\bar{g}_n = \bar{f}$ ,  $\bar{g}_n$  fija  $\alpha$  y  $\beta$ , por lo que

$$\{\alpha, \beta\} = \{\bar{g}_{n-1}(\alpha), \bar{g}_{n-1}(\beta)\};$$

Si  $\bar{g}_{n-1}$  intercambia  $\alpha$  y  $\beta$  entonces  $(\bar{g}_{n-1})^2$  fijaría  $\alpha, \beta$  y a los puntos fijos de  $\bar{g}_{n-1}$ , por lo tanto  $\bar{g}_{n-1}$  será de orden dos y  $\bar{f}$  también (ya que  $\bar{f}$  y  $\bar{g}_{n-1}$  son conjugadas), lo cual es una

contradicción. Por lo que

$$\bar{g}_{n-1}(\alpha) = \alpha \quad \text{y} \quad \bar{g}_{n-1}(\beta) = \beta.$$

Inductivamente este razonamiento muestra que  $\bar{g}_r$  fija  $\alpha$  y  $\beta$  para todo  $r \geq 1$ ;

Por lo tanto  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  dejan el conjunto  $\{\alpha, \beta\}$  invariante y  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es elemental.  $\square$

Ahora presentaremos el resultado principal de esta tesis que es la desigualdad de Jørgensen.

**Teorema 2.2** (*Desigualdad de Jørgensen*) Sean  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  dos transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{C})$  que generan un grupo discreto y no elemental entonces:

$$|\text{tr}^2(\bar{f}) - 4| + |\text{tr}(\bar{f}\bar{g}\bar{f}^{-1}\bar{g}^{-1}) - 2| \geq 1.$$

Observemos que si  $f$  y  $g$  son matrices en  $SL(2, \mathbb{C})$  que representan a  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  respectivamente, éstas están determinadas de manera única salvo por un factor  $-1$ , por lo tanto la traza del conmutador  $fgf^{-1}g^{-1}$  esta bien definida, entonces

$$|\text{tr}^2(f) - 4| + |\text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geq 1.$$

DEMOSTRACION. Si  $\bar{f}$  es de orden dos su traza es igual a cero y el teorema se cumple.

Supóngase que  $\bar{f}$  no es de orden dos.

Se define inductivamente

$$g_0 = g \quad \text{y} \quad g_{n+1} = g_n f g_n^{-1} \quad (2.1)$$

La idea de la demostración es la siguiente, supóngase que  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es discreto y no elemental y que la desigualdad no se cumple, ésto nos llevará a que  $g_n = f$  para alguna  $n$  y por el Teorema 2.1 se tendrá que  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es elemental lo cual contradice las hipótesis. Consideremos dos casos, el primer caso  $\bar{f}$  es parabólica y en el segundo  $\bar{f}$  no lo es.

Caso 1,  $\bar{f}$  es parabólica.

Conjugando se puede suponer que

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad - bc = 1, \quad c \neq 0.$$

Como

$$fgf^{-1}g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + cn + c^2 & 1 - a^2 - ac \\ c^2 & 1 - ac \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = 2 + c^2;$$

Por lo que si la desigualdad no se cumple tenemos

$$|\text{tr}^2(f) - 4| + |\text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| < 1;$$

esto es

$$|c|^2 < 1$$

$$|c| < 1.$$

Ahora usando (2.1) se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - c_n a_n & a_n^2 \\ -c_n^2 & 1 + a_n c_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

por lo cual

$$c_n = -c^{2^n} \quad \text{para toda } n \geq 1,$$

y como  $|c| < 1$ , se tiene que  $c_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Además  $|a_n| \leq n + |a|$ . Esto se prueba por inducción.

Para  $n = 1$

$$a_1 = 1 - ca$$

por lo que

$$|a_1| \leq 1 + |c| |a|,$$

como  $|c| < 1$  esto implica que  $|a_1| \leq 1 + |a|$ .

Suponemos válido para  $n$ , esto es

$$|a_n| \leq n + |a|$$

y demostraremos para el caso  $n + 1$ . Como

$$a_{n+1} = 1 + c^{2^n} a_n$$

$$|a_{n+1}| \leq 1 + |c^{2^n}| |a_n|$$

por hipótesis de inducción se tiene

$$|a_{n+1}| \leq 1 + |c^{2^n}| (n + |a|),$$

$$|a_{n+1}| \leq 1 + n + |a|.$$

Probaremos ahora que  $|a_n c_n| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

$$|a_n c_n| \leq |c_n| (n + |a|)$$

$$= n |c|^{2^n} + |a| |c|^{2^n},$$

y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n c_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n |c|^{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} |a| |c|^{2^n},$$



siempre que los límites de la derecha existan.

El segundo límite ciertamente tiende a cero, también  $\lim_{n \rightarrow \infty} n |c|^{2^n}$  tiende a cero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n |c|^{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \exp(2^n \log |c|) = 0 \quad (\text{por L'Hopital}).$$

Se concluye que  $|a_n c_n| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ; Además  $b_n = a_{n-1}^2 \rightarrow 1$  y usando (2.2).

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente ya que  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es discreto se tiene

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para  $n$  suficientemente grande, y por el Teorema 2.1  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es elemental, lo cual es una contradicción.

Caso 2.  $\bar{f}$  loxodrómica ó elíptica.

Conjugando podemos suponer que

$$f = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad bc \neq 0. \quad (\bar{g} \text{ no fija } 0 \text{ ni } \infty)$$

Como

$$|\text{tr}^2(f) - 4| = \left| u - \frac{1}{u} \right|^2$$

y

$$|\text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| = |bc| \left| u - \frac{1}{u} \right|^2.$$

Si la desigualdad de Jørgensen no se cumple entonces  $\mu < 1$ , donde

$$\mu = (1 + |bc|) \left| u - \frac{1}{u} \right|^2.$$

Usando (2.1) se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n d_n u - \frac{b_n c_n}{u} & a_n b_n \left(\frac{1}{u} - u\right) \\ -c_n d_n \left(\frac{1}{u} - u\right) & \frac{a_n d_n}{u} - b_n c_n u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obsérvese que

$$b_{n+1}c_{n+1} = -a_n b_n c_n d_n \left(\frac{1}{u} - u\right)^2.$$

por lo que usando

$$a_n d_n = 1 - b_n c_n$$

se tiene

$$b_{n+1}c_{n+1} = -b_n c_n (1 + b_n c_n) \left(u - \frac{1}{u}\right)^2.$$

Ahor mostraremos que

$$|b_n c_n| \leq \mu^n |bc|.$$

por inducción, si  $n = 1$

$$\begin{aligned} |b_1 c_1| &= |bc| \left|1 + bc\right| \left|u - \frac{1}{u}\right|^2 \\ &\leq |bc| (1 + |bc|) \left|u - \frac{1}{u}\right|^2 = \mu |bc|. \end{aligned}$$

Suponemos válido para para  $n$ , es decir  $|b_n c_n| \leq |bc| \mu^n$ , por lo que

$$|b_n c_n| < |bc|.$$

Se tiene

$$|b_{n+1}c_{n+1}| \leq |b_n c_n| (1 + |bc|) \left|u - \frac{1}{u}\right|^2$$

y usando la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} |b_{n+1}c_{n+1}| &\leq \mu^n |bc| \left| u - \frac{1}{u} \right|^2, \\ &= \mu^{n+1} |bc|. \end{aligned}$$

Como suponemos  $\mu < 1$  tenemos que  $\mu^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

por lo tanto  $b_n c_n \rightarrow 0$  y  $a_n d_n \rightarrow 1$ .

Como

$$a_{n+1} = a_n d_n u - (b_n c_n) \frac{1}{u}$$

entonces  $a_{n+1} \rightarrow u$  y de manera similar  $d_{n+1} \rightarrow \frac{1}{u}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por otro lado

$$b_{n+1} = a_n b_n \left( \frac{1}{u} - u \right)$$

y

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = |a_n| \left| u - \frac{1}{u} \right|,$$

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \rightarrow |u| \left| u - \frac{1}{u} \right|.$$

Como

$$\mu^{\frac{1}{2}} > \left| \frac{1}{u} - u \right|,$$

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < |u| \mu^{\frac{1}{2}},$$

para  $n$  suficientemente grande. Por lo tanto

$$\left| \frac{b_{n+1}}{u^{n+1}} \right| < \mu^{\frac{1}{2}} \left| \frac{b_n}{u^n} \right|$$

$$< \left| \frac{b_n}{u^n} \right|.$$

Por consiguiente para  $N$  fija, suficientemente grande y para toda  $n \geq 1$  tenemos

$$\left| \frac{b_{N+n}}{u^{N+n}} \right| < (\mu^{\frac{1}{2}})^n \left| \frac{b_N}{u^N} \right|.$$

De esta desigualdad concluimos que  $\frac{b_n}{u^n}$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . De manera similar  $u^n c_n \rightarrow 0$ , finalmente estas estimaciones implican que

$$f^{-n} g_{2n} f^n = \begin{pmatrix} a_{2n} & \frac{b_{2n}}{u^{2n}} \\ u^{2n} c_{2n} & d_{2n} \end{pmatrix} \rightarrow f \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty;$$

Como  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es discreto, se tiene que  $f^{-n} g_{2n} f^n = f$  para  $n$  suficientemente grande, esto es  $g_{2n} = f$ , lo cual implicaría que  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es elemental (Teorema 2.1), que es la contradicción buscada.  $\square$

Obsérvese que la desigualdad de Jørgensen implica que  $f$  y  $g$  no pueden estar simultáneamente muy cerca de la identidad. A continuación calculamos una cota inferior para

$$\max \{ \|f - I\|, \|g - I\| \}.$$

**Corolario 2.3** Si  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  generan un grupo discreto y no elemental y  $f$  y  $g$  son matrices en  $SL(2, \mathbb{C})$  que representan a  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  respectivamente, entonces

$$\max \{ \|f - I\|, \|g - I\| \} > 0.61$$

**DEMOSTRACION.** Expresamos a  $f$  como  $f = I + A$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$f = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1+d & -b \\ -c & 1+a \end{pmatrix}$$

además  $f^{-1} = I + A^*$

donde

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

y  $\det(A) = -\text{tr}(A)$  ya que  $f \in SL(2, \mathbb{C})$ .

Obsérvese también que  $\|A\| = \|A^*\|$  y

$$A + A^* + AA^* = 0 \tag{2.3}$$

De manera similar escribimos  $g = I + B$ ,  $g^{-1} = I + B^*$  y obtenemos también

$$\|B\| = \|B^*\| \quad \text{y} \quad B + B^* + BB^* = 0.$$

Substituyendo  $f$  y  $g$  por  $I + A$  y  $I + B$  respectivamente, en la desigualdad de Jørgensen obtenemos

$$\left| \text{tr}^2(I + A) - 4 \right| + \left| \text{tr}(I + A)(I + B)(I + A^*)(I + B^*) - 2 \right| \geq 1,$$

el segundo sumando se puede escribir de la siguiente manera

$$\left| \text{tr}(I + B + A + AB)(I + B^* + A^* + A^*B^*) - 2 \right|,$$

Desarrollando y usando (2.3) tenemos que  $|\text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2|$  es igual a

$$\left| \text{tr} \begin{pmatrix} B^* + A^* + A^*B^* + B + BB^* + BA^* + BA^*B^* + A + AB^* + AA^* + AA^*B^* + \\ AB + ABB^* + ABA^* + ABA^*B^* \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= |\operatorname{tr}[(A^* + A + AA^*)B^* + BA^* + BA^*B^* + A(B + BB^*) + ABA^* + ABA^*B^*]| \\
&= |\operatorname{tr}(BA^* + BA^*B^* - AB^* + ABA^* + ABA^*B^*)|.
\end{aligned}$$

Obteniéndose

$$|\operatorname{tr}^2(I + A) - 4| + |\operatorname{tr}(BA^* + BA^*B^* - AB^* + ABA^* + ABA^*B^*)| \geq 1. \quad (2.4)$$

Si  $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , Un cálculo sencillo muestra que  $\operatorname{tr}(BA^*) = \operatorname{tr}(AB^*)$ , además como  $\operatorname{tr}(ABA^*) = \operatorname{tr}(BA^*A)$  y

$$\begin{aligned}
(BA^*A) &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a'(a + d) & * \\ * & -d'(a + d) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

se tiene

$$\operatorname{tr}(ABA^*) = -\operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$$

y de manera análoga se prueba que

$$\operatorname{tr}(BA^*B^*) = \operatorname{tr}(A^*B^*B) = -\operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B).$$

Simplificando la desigualdad (2.4) tenemos

$$|4\operatorname{tr}(A)| + |\operatorname{tr}^2(A)| + 2|\operatorname{tr}(B)| |\operatorname{tr}(A)| + |\operatorname{tr}(ABA^*B^*)| \geq 1. \quad (2.5)$$

Utilizando (ii) y (iv) del Lema 1.2, observamos que

$$|\operatorname{tr}(ABA^*B^*)| \leq \|AB\| \|A^*B^*\|$$

$$\leq \|A\|^2 \|B\|^2$$

por otro lado, como  $|\det(A)| = |\operatorname{tr}(A)|$  usando (iii) del Lema 1.2 obtenemos

$$|\operatorname{tr}(A)| \leq \frac{\|A\|^2}{2}.$$

por lo cual, (2.5) implica

$$2\|A\|^2 + \frac{\|A\|^4}{4} + \frac{\|A\|^2 \|B\|^2}{2} + \|A\|^2 \|B\|^2 \geq 1.$$

Si  $\varepsilon > \|A\|$  y  $\varepsilon > \|B\|$ , entonces

$$2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{4} + \frac{\varepsilon^4}{2} + \varepsilon^4 \geq 1$$

simplificando y completando cuadrados tenemos

$$\left(\varepsilon^2 + \frac{4}{7}\right)^2 \geq \frac{41}{49}$$

por tanto  $\varepsilon \geq 0.613$  lo cual demuestra el corolario. Obsérvese que la cota obtenida en el Corolario 2.3 es sustancialmente mejor que 0.146, la descrita en [B] sección 5.4.

## CAPÍTULO III

### APLICACIONES

Ahora presentaremos algunas aplicaciones de la desigualdad de Jørgensen. Como primera aplicación, mostramos que un grupo no elemental es discreto si se cumple esta condición para sus subgrupos de rango dos.

**Teorema 3.1.** *Sea  $G$  un subgrupo no elemental de  $PSL(2, \mathbb{C})$  entonces  $G$  es discreto si y sólo si para toda  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  en  $G$  el grupo  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es discreto.*

**DEMOSTRACION.** Si  $G$  es discreto evidentemente todo subgrupo de  $G$  también lo es. Para probar la suficiencia suponemos que cada  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es discreto, para todas  $\bar{f}, \bar{g} \in G$  pero que  $G$  no es discreto, por lo que podemos encontrar distintas  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots (\neq I)$  en  $G$  representadas respectivamente por las matrices  $f_1, f_2, \dots$  en  $SL(2, \mathbb{C})$  las cuales convergen a la identidad. Además podemos suponer que ninguna  $\bar{f}_n$  es de orden dos ya que  $tr(\bar{f}_n) \rightarrow 2$  y  $\bar{f}_n$  de orden dos implica  $tr(\bar{f}_n) = 0$ .

Sea  $\bar{g} \in G$  representada por la matriz  $g$ , entonces  $f_n g f_n^{-1} g^{-1} \rightarrow I$  por lo que  $tr(f_n g f_n^{-1} g^{-1}) \rightarrow 2$

$$\text{y} \quad |tr^2(\bar{f}_n) - 4| + |tr(f_n g f_n^{-1} g^{-1}) - 2| \rightarrow 0$$

Se sigue de la desigualdad de Jørgensen que para  $n$  suficientemente grande  $\langle \bar{f}_n, \bar{g} \rangle$  es elemental.

Por otro lado, como  $G$  no es elemental,  $G$  contiene dos elementos loxodrómicos que no tienen puntos fijos en común (Teorema 1.10). Sean  $\bar{g}$  y  $\bar{h}$  tales elementos, para  $n$  suficientemente grande los grupos  $\langle \bar{f}_n, \bar{g} \rangle$  y  $\langle \bar{f}_n, \bar{h} \rangle$  son elementales y discretos, lo cual implica que  $\bar{f}_n$  deja invariante los puntos fijos de  $\bar{g}$  y  $\bar{h}$ , como  $\bar{f}_n$  no es elíptica de orden dos,  $\bar{f}_n$  fija cada uno individualmente, por lo que  $\bar{g}$  y  $\bar{h}$  tienen los mismos puntos fijos, lo cual es una contradicción.  $\square$

Establecemos ahora otra aplicación de la desigualdad de Jørgensen en el caso particular de que  $\bar{f}$  sea parabólica, observemos primero que el punto al infinito en  $\hat{\mathbf{H}}^3$  corresponde al polo norte en el modelo de la bola. Este mediante una rotación se puede mandar a cualquier punto



en la esfera unitaria. Esta rotación vista como isometría hiperbólica de  $\mathbb{H}^3$  en si mismo esta definida por una transformación unitaria (Teorema 1.7).

**Teorema 3.2.** Sean  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  en  $PSL(2, \mathbb{C})$ , y supóngase que  $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$  es discreto y no elemental, entonces

- (i) Si  $\bar{f}$  es parabólica se tiene que  $\|f - I\| \|g - I\| \geq 1$ .
- (ii) Si  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  son parabólicas entonces para toda  $x \in \mathbb{H}^3$

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{f}x) \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) \geq \frac{1}{4}$$

donde  $\rho$  es la métrica hiperbólica.

DEMOSTRACION. Sea  $\bar{f}$  parabólica, si  $\bar{f}$  no fija  $\infty$  existe  $\bar{h}$  representada por una matriz unitaria  $h$  de tal manera que  $\bar{h}\bar{f}\bar{h}^{-1}$  fija  $\infty$ , si  $f$  es una matriz que representa a  $\bar{f}$  entonces por la observación previa a este Teorema y usando el Teorema 1.5. se tiene

$$\|hfh^{-1} - I\| = \|f - I\|$$

y análogamente ésto es válido para  $\bar{g}$ . Por lo cual se puede suponer que  $\bar{f}$  fija  $\infty$

$$f = \begin{pmatrix} \varepsilon & \lambda \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ donde } \varepsilon^2 = 1, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (ad - bc) = 1$$

calculando el conmutador  $fgf^{-1}g^{-1}$  se tiene que

$$fgf^{-1}g^{-1} = \begin{pmatrix} (a\varepsilon + c\lambda)(\varepsilon d + c\lambda) + (\varepsilon b + d\lambda)(-c\varepsilon) & * \\ * & c\varepsilon(-b\varepsilon - a\lambda) + \varepsilon da\varepsilon \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\operatorname{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = 2 + c^2\lambda^2$$

y como  $\operatorname{tr}^2 f = 4$  al substituir estos valores en la desigualdad de Jørgensen obtenemos

$$|c\lambda| \geq 1.$$

Finalmente como  $\|f - I\| \geq |\lambda|$  y  $\|g - I\| \geq |c|$  entonces

$$\|f - I\| \|g - I\| \geq 1.$$

Para probar (ii) escogemos matrices  $f$  y  $g$  que representan a  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  respectivamente con

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} g = 2$$

un cálculo sencillo muestra que

$$\begin{aligned} \|f - I\|^2 &= \|f\|^2 + 2 - 2\operatorname{Re}(\operatorname{tr} f) \\ &= \|f\|^2 - 2 \end{aligned}$$

y de manera análoga

$$\|g - I\|^2 = \|g\|^2 - 2.$$

Por el Teorema 1.6. se tiene que

$$\|f\|^2 = 2\cosh\rho(j, \bar{f}(j)) \quad \text{y} \quad \|g\|^2 = 2\cosh\rho(j, \bar{g}(j))$$

por lo que

$$\begin{aligned} \|f - I\|^2 &= 2\cosh\rho(j, \bar{f}(j)) - 2 \\ \|g - I\|^2 &= 2\cosh\rho(j, \bar{g}(j)) - 2 \end{aligned}$$

utilizando algunas identidades trigonométricas y simplificando obtenemos

$$\|f - I\| = 2\sinh\frac{1}{2}\rho(j, \bar{f}(j)) \quad \text{y} \quad \|g - I\| = 2\sinh\frac{1}{2}\rho(j, \bar{g}(j)),$$

usando (i) se tiene

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(j, \bar{f}(j))\sinh\frac{1}{2}\rho(j, \bar{g}(j)) \geq \frac{1}{4}.$$

Esto verifica (ii) en el caso particular en que  $x = j$ .

Como se mencionó en el Capítulo I, las extensiones de Poincaré de  $PSL(2, \mathbb{C})$  son transitivas en  $\mathbf{H}^3$ ; por lo que dado  $x \in \mathbf{H}^3$  existe  $\bar{h}$  (extensión de Poincaré) tal que  $\bar{h}(x) = j$ , como  $\bar{h} \bar{f} \bar{h}^{-1}$  y  $\bar{h} \bar{g} \bar{h}^{-1}$  son también parabólicas y  $\langle \bar{h} \bar{f} \bar{h}^{-1}, \bar{h} \bar{g} \bar{h}^{-1} \rangle$  es discreto y no elemental, aplicamos (ii) a este grupo por lo que se tiene

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(j, \bar{h} \bar{f} \bar{h}^{-1}(j)) \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(j, \bar{h} \bar{g} \bar{h}^{-1}(j)) \geq \frac{1}{4}$$

como  $\bar{h}$  es una isometría hiperbólica tenemos que

$$\rho(j, \bar{h} \bar{f} \bar{h}^{-1}(j)) = \rho(\bar{h}^{-1}(j), \bar{f} \bar{h}^{-1}(j)) = \rho(x, \bar{f}(x))$$

$$\rho(j, \bar{h} \bar{g} \bar{h}^{-1}(j)) = \rho(\bar{h}^{-1}(j), \bar{g} \bar{h}^{-1}(j)) = \rho(x, \bar{g}(x))$$

con lo cual queda demostrada la afirmación.  $\square$

Ahora presentaremos una interpretación geométrica del teorema anterior. Una *horobola*  $\Sigma$  en  $\mathbf{H}^3$  es una bola Euclidiana abierta en  $\mathbf{H}^3$  que es tangente a  $\hat{\mathbb{C}}$ , si  $w$  es el punto de tangencia se dice que  $\Sigma$  esta basada en  $w$ , una horobola basada en  $\infty$  es un conjunto de la forma

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{H}^3 : x_3 > k > 0\}.$$

Se define para cada transformación parabólica  $\bar{g} \in PSL(2, \mathbb{C})$  la horobola

$$\Sigma_{\bar{g}} = \left\{ x \in \mathbf{H}^3 : \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}(x)) < \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.1)$$

Si  $w$  es el punto fijo de  $\bar{g}$ ,  $\Sigma_{\bar{g}}$  es una horobola basada en  $w$ .

Una manera de observar que  $\Sigma_{\bar{g}}$  es efectivamente una bola Euclidiana abierta es la siguiente: Sea  $\bar{f}(z) = z + 1$ , utilizando la expresión (1.4) y escribiendo  $x = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\bar{f}(x) = (x_1 + 1, x_2, x_3)$  se tiene

$$\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{f}(x)) = \frac{|x - \bar{f}(x)|^2}{4x_3[\bar{f}(x)]_3}$$

donde  $[\bar{f}(x)]_3$  denota la tercera coordenada de  $\bar{f}(x)$ , por lo que

$$\widehat{\text{senh}} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{f}(x)) = \frac{1}{2x_3}$$

si  $\widehat{\text{senh}} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{f}(x)) < \frac{1}{2}$  entonces  $\frac{1}{2x_3} < \frac{1}{2}$ , por lo tanto  $x_3 > 1$ . De esta manera

$$\Sigma_{\bar{f}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{H}^3 : x_3 > 1\}.$$

$\partial(\Sigma_{\bar{f}})$  es el plano  $x_3 = 1$  el cual, bajo la acción de  $\bar{h} \in PSL(2, \mathbb{C})$  será transformado en una esfera Euclidiana tangente a  $\widehat{\mathbb{C}}$  (ésto es por conformalidad).

Por otra parte obsérvese que para toda  $\bar{h} \in PSL(2, \mathbb{C})$  se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\text{senh}} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{f}x) &= \widehat{\text{senh}} \frac{1}{2} \rho(\bar{h}x, \bar{h} \bar{f}x) \\ &= \widehat{\text{senh}} \frac{1}{2} \rho(y, \bar{h} \bar{f} \bar{h}^{-1}y) \end{aligned}$$

donde  $y = \bar{h}(x)$ , si  $x \in \Sigma_{\bar{f}}$  entonces  $y \in \Sigma_{\bar{h} \bar{f} \bar{h}^{-1}}$  e inversamente. Se concluye que

$$\bar{h}(\Sigma_{\bar{f}}) = \Sigma_{\bar{h} \bar{f} \bar{h}^{-1}}. \quad (3.2.)$$

De esta manera si  $\bar{g}$  es parabólica con punto fijo  $w$ , como  $\bar{g}$  es conjugada de  $\bar{f} = z + 1$  entonces  $\Sigma_{\bar{g}}$  es una horobola basada en  $w$ . De acuerdo con el teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.** *Sea  $G$  un subgrupo discreto y no elemental de  $PSL(2, \mathbb{C})$  con elementos parabólicos,  $\bar{g}$  parabólica en  $G$ ,  $\Sigma_{\bar{g}}$  la horobola definida por (3.1.). Entonces la familia*

$$\{\Sigma_{\bar{g}} : \bar{g} \text{ es parabólica en } G\}$$

*es permutada por  $G$  en el sentido que se establece en (3.2.) y para  $\bar{h} \in G$  parabólica,  $\Sigma_{\bar{g}} \cap \Sigma_{\bar{h}} = \emptyset$  a menos que  $\bar{g}$  y  $\bar{h}$  tengan puntos fijos en común.*

DEMOSTRACION. Usando (3.2.) es claro que dada  $\Sigma_{\bar{g}}$  una horobola y  $\bar{h} \in G$ ,  $\bar{h}(\Sigma_{\bar{g}})$  esta

en la familia de horobolas, por otra parte si  $\bar{h} \in G$  es parabólica y existe  $z \in \mathbf{H}^3$  tal que  $z \in \Sigma_{\bar{g}} \cap \Sigma_{\bar{h}}$  entonces por definición

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, \bar{g}(z)) < \frac{1}{2}$$

y

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, \bar{h}(z)) < \frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, \bar{g}(z)) \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, \bar{h}(z)) < \frac{1}{4} \quad (3.3)$$

si  $\langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$  es no elemental la expresión (3.3.) contradice el teorema 3.2., por lo que si  $\Sigma_{\bar{g}} \cap \Sigma_{\bar{h}} \neq \emptyset$  entonces  $\langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$  es elemental, es decir  $\bar{g}$  y  $\bar{h}$  tienen el mismo punto fijo.  $\square$

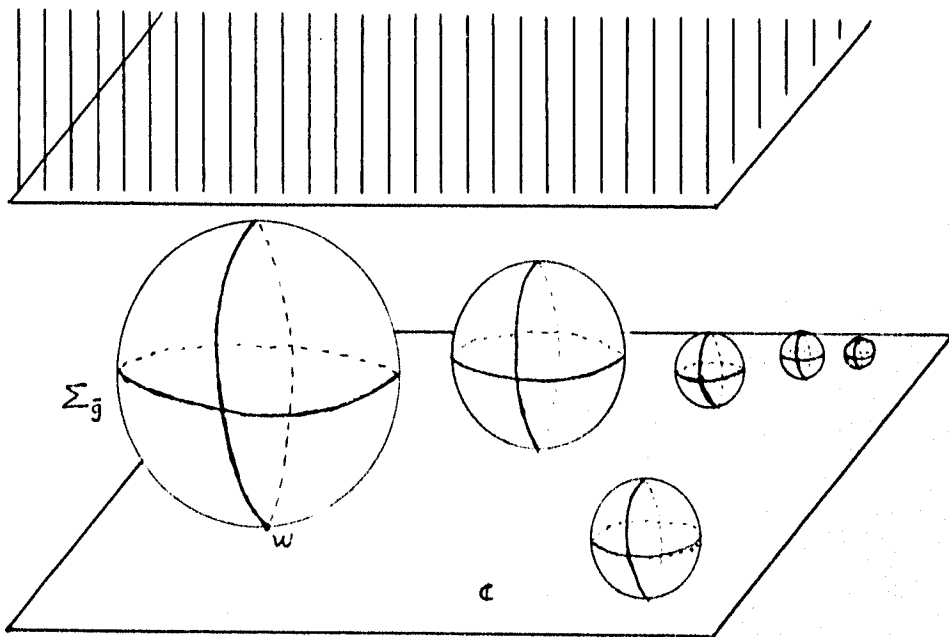


figura 3

Terminaremos esta tesis con algunas aplicaciones de la desigualdad de Jorgensen que nos dicen que tanto mueven a los puntos de  $\mathbb{H}^3$  los generadores de grupos discretos no elementales, para esto necesitaremos algunos resultados sobre la acción geométrica de las transformaciones elípticas y loxodrómicas.

Supóngase que

$$g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix} \quad u = |u| \exp(i\theta)$$

es decir  $\bar{g}$  es elíptica o loxodrómica, entonces

$$\begin{aligned} \left| u - \frac{1}{u} \right|^2 &= \left( u - \frac{1}{u} \right) \left( \bar{u} - \frac{1}{\bar{u}} \right) \\ &= |u|^2 - 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{u}{\bar{u}} \right] + \frac{1}{|u|^2} \end{aligned}$$

como

$$\frac{u}{\bar{u}} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2i \operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

se tiene

$$\left| u - \frac{1}{u} \right|^2 = |u|^2 - 2 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{|u|^2},$$

por lo que

$$\left| u - \frac{1}{u} \right|^2 = \left( |u| - \frac{1}{|u|} \right)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta \quad (3.4)$$

Por otra parte tenemos que para toda  $x$  y  $y$  en  $\mathbb{H}^3$  (ver Capítulo I, afirmación (1.4))

$$4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \rho(x, y) = \frac{|x - y|^2}{x_3 y_3},$$

además  $\bar{g}$  actúa en  $\mathbb{R}^3$  (visto como  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ) por la fórmula

$$\bar{g}: (z, t) \mapsto (u^2 z, |u|^2 t) \quad (\text{identidad (1.6)})$$

Por lo cual si  $x = (z, t) \in \mathbf{H}^3$  se tiene,

$$\begin{aligned} 4\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{y}(x)) &= \frac{|z - u^2 z|^2 + (t - |u|^2 t)^2}{|u|^2 t^2} \\ &= \frac{|z|^2 |1 - u^2|^2 + t^2 (1 - |u|^2)^2}{|u|^2 t^2}. \end{aligned}$$

obteniendose

$$4\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{y}(x)) = \left( \frac{|z|}{t} \right)^2 \left| u - \frac{1}{u} \right|^2 + \left( |u| - \frac{1}{|u|} \right)^2 \quad (3.5)$$

Ahora, el eje  $A$  de  $\bar{y}$  es por definición la geodésica que une los puntos fijos de  $\bar{y}$ , en éste caso son los puntos de la forma  $(0, 0, t)$  en  $\mathbf{H}^3$ .

**Definición.** Dada  $\bar{f} \in PSL(2, C)$ , loxodrómica se define la *longitud de translación de  $\bar{f}$*   $T_{\bar{f}}$  como  $T_{\bar{f}} = \rho(x, \bar{f}x)$  donde  $x$  es cualquier punto en el eje de  $\bar{f}$ .

Esto está bien definido ya que siempre se puede conjugar  $\bar{f}$  a una transformación como la descrita arriba y (3.5) nos dice que esta definición es independiente del punto que se tome en el eje. En efecto, para  $x = (0, 0, t)$  en  $A$ ,  $z = 0$  y usando (3.5) se tiene que

$$4\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} T_{\bar{f}} = \left( |u| - \frac{1}{|u|} \right)^2. \quad (3.6)$$

En el caso que  $\bar{f}$  sea elíptica se define la longitud de translación como cero.

Nótese también que los dos términos que contienen a  $u$  y  $\frac{1}{u}$  en la expresión (3.4) son invariantes bajo conjugación ya que pueden expresarse en términos de la traza de  $\bar{y}$  y la longitud de translación de  $\bar{y}$ , por lo cual  $\operatorname{sen}^2 \theta$  también es invariante bajo conjugación.

El término  $\frac{|z|}{t}$  tiene un significado geométrico, se afirma que

$$\frac{|z|}{t} = \operatorname{senh} \rho(x, A), \quad x = (z, t) \in \mathbf{H}^3,$$

y la justificación es la siguiente;

$$\rho(x, A) = \inf \{ \rho(x, w) : w \in A \}$$

y

$$A = \{ w : w = se_3, s > 0 \}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \cosh \rho(x, se_3) &= 1 + \frac{|x - se_3|^2}{2ts} \\ &= \frac{|z|^2 + t^2 + s^2}{2ts} \end{aligned}$$

sustituyendo  $|x|^2 = |z|^2 + t^2$

$$\begin{aligned} \cosh \rho(x, se_3) &= \frac{|x|^2 + s^2}{2ts} \\ &= \frac{|x|}{2t} \left( \frac{|x|}{s} + \frac{s}{|x|} \right) \geq \frac{|x|}{t} \end{aligned}$$

además, se da la igualdad si y solo si  $s = |x|$ , por lo tanto

$$\rho(x, A) = \rho(x, |x|e_3).$$

Así entonces

$$\cosh \rho(x, A) = \frac{|x|}{t}$$

y

$$\sinh^2 \rho(x, A) = \cosh^2 \rho(x, A) - 1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|x|^2}{t^2} - 1 \\ &= \frac{|z|^2}{t^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, combinando las expresiones (3.4), (3.5) y (3.6) obtenemos



$$\begin{aligned}
A \operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) &= \operatorname{senh}^2 \rho(x, A) \left( A \operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) + A \operatorname{sen}^2 \theta \right) + A \operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) \\
&= A \operatorname{senh}^2 \rho(x, A) \operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) + A \operatorname{senh}^2 \rho(x, A) \operatorname{sen}^2 \theta + A \operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) \\
&= A \operatorname{cosh}^2 \rho(x, A) \operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) + A \operatorname{senh}^2 \rho(x, A) \operatorname{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) = \operatorname{cosh}^2 \rho(x, A) \operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) + \operatorname{senh}^2 \rho(x, A) \operatorname{sen}^2 \theta \quad (3.7)$$

Esta última expresión muestra que el desplazamiento por  $\bar{g}$  (es decir, cuanto mueve  $\bar{g}$  a los puntos de  $\mathbf{H}^3$ ) depende de tres factores: la longitud de translación  $T_{\bar{g}}$ , el ángulo de rotación  $\theta$  y la distancia al eje  $A$ . Por conjugación la expresión (3.7) es válida para toda  $\bar{f} \in \operatorname{PSL}(2, \mathbf{C})$  loxodrómica o elíptica.

**Teorema 3.4** *Supóngase que  $\langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$  es discreto y no elemental*

(i) *Si  $\bar{g}$  es parabólica, entonces para toda  $x \in \mathbf{H}^3$*

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) \geq \frac{1}{4}.$$

(ii) *Si  $\bar{g}$  es hiperbólica, entonces para toda  $x \in \mathbf{H}^3$*

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) \geq \frac{1}{8}.$$

(iii) *Si  $\bar{g}$  es elíptica ó estrictamente loxodrómica y además  $|\operatorname{tr}^2 \bar{g} - 4| < \frac{1}{4}$*

*(lo cual define una vecindad de la identidad), entonces para toda  $x \in \mathbf{H}^3$*

$$\max \left\{ \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x), \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) \right\} \geq \frac{1}{4}$$

**DEMOSTRACION.** La afirmación (i) es una consecuencia inmediata del Teorema 3.2, por lo que concentraremos nuestra atención en las afirmaciones (ii) y (iii). Como este resultado es invariante bajo conjugación, podemos suponer que la matriz asociada a  $\bar{g}$  es de la forma

$$g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix} \quad \text{con } u = |u| \exp i\theta$$

y

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad - bc = 1, \quad bc \neq 0.$$

Usando la desigualdad de Jørgensen para el grupo  $\langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$  obtenemos

$$(1 + |bc|) \left| u - \frac{1}{u} \right|^2 \geq 1. \quad (3.8)$$

Para acotar el término  $|bc|$  escogemos una transformación de Möbius auxiliar  $\bar{f}$  que mande  $0, \infty, \bar{h}(0), \bar{h}(\infty)$  a  $1, -1, w, -w$  respectivamente, esta transformación nos permitirá expresar  $|bc|$  en términos de la distancia entre  $A$  y  $\bar{h}(A)$ , trasladando a una posición donde es más sencillo determinarla.

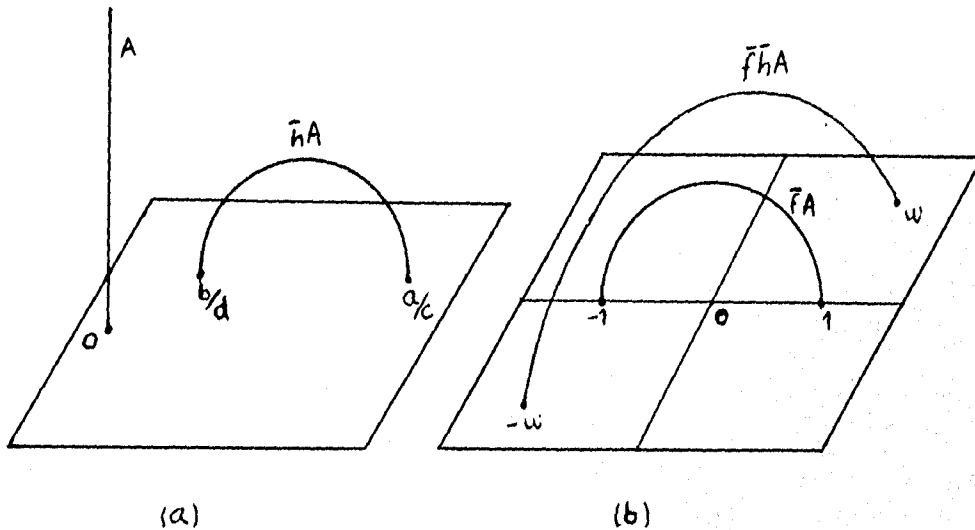


figura 4

La ventaja de esto radica en que la función desplazamiento involucra los términos  $\rho(x, A)$  y  $\rho(x, \bar{h}A)$  y usando desigualdades adecuadas estas se pueden expresar en términos de  $\rho(A, \bar{h}A)$ . Dicha  $\bar{f}$  existe si y solo si se da la igualdad de sus razones cruzadas, es decir si y sólo si

$$[1, -1, w, -w] = \left[0, \infty, \frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right]$$

o equivalentemente

$$bc = \frac{(1-w)^2}{4w} \quad (3.9)$$

Como  $bc \neq 0$  (por que el grupo  $\langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$  es no elemental), existen dos soluciones para (3.9) de la forma  $w, \frac{1}{w}$ . Sea  $w$  solución de la ecuación (3.9), podemos suponer que  $|w| \geq 1$ .

De la definición de métrica hiperbólica se deduce que

$$\begin{aligned} \rho(A, \bar{h}A) &= \rho(\bar{f}A, \bar{f}\bar{h}A), \\ &= \inf \left\{ \rho(x, y) : x \in \bar{f}A, y \in \bar{f}\bar{h}A \right\}, \\ &= \rho(e_3, |w|e_3), \\ &= \log |w|. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se deriva de lo siguiente, si  $(x, y, t) \in \bar{f}A$  y  $(u, v, s) \in \bar{f}\bar{h}A$  entonces

$$\frac{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (t-s)^2}{ts} = \frac{1 + |w|^2 - 2(xu + yv + ts)}{ts}$$

usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene  $xu + yv + ts \leq |w|$  además  $s \leq |w|$  y  $t \leq 1$ , por lo cual

$$\frac{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (t-s)^2}{ts} \geq \frac{1 + |w|^2 - 2|w|}{|w|} = \frac{(1-|w|)^2}{|w|}$$

Lo cual muestra que

$$\rho(x, \bar{h}A) \geq \rho(e_3, |w|e_3) \quad \forall x \in A,$$

para simplificar cálculos escribimos a  $w$  como  $\exp 2(\alpha + i\beta)$ , obteniéndose así

$$\rho(A, \bar{h}A) = 2\alpha.$$

Además, sustituyendo  $w = \exp 2(\alpha + i\beta)$  en la ecuación (3.9) se tiene

$$\begin{aligned} |bc| &= \frac{|1-w|^2}{4|w|} \\ &= \frac{(1-w)(1-\bar{w})}{4|w|} \\ &= \frac{1-2\operatorname{Re}[w]+|w|^2}{4|w|} \\ &= \frac{1-2\exp 2\alpha \cos 2\beta + \exp 4\alpha}{4\exp 2\alpha} \\ &= \frac{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}{2} \end{aligned}$$

como  $-\cos 2\beta \leq 1$ , entonces

$$|bc| \leq \frac{\cosh 2\alpha + 1}{2} = \cosh^2 \alpha$$

por lo que

$$|bc| \leq \cosh^2 \frac{1}{2} \rho(A, \bar{h}A),$$

el  $\cosh$  es estrictamente creciente, usando la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned} |bc| &\leq \cosh^2 \frac{1}{2} \left[ \rho(A, x) + \rho(x, \bar{h}A) \right] \\ &= \frac{\cosh \left[ \rho(A, x) + \rho(x, \bar{h}A) \right] + 1}{2} \\ &= \frac{\cosh \rho(A, x) \cosh \rho(x, \bar{h}A) + \sinh \rho(A, x) \sinh \rho(x, \bar{h}A) + 1}{2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

como

$$\cosh \left[ \rho(A, x) - \rho(x, \bar{h}A) \right] \geq 1$$

se tiene

$$\cosh \rho(A, x) \cosh \rho(x, \bar{h}A) \geq 1 + \operatorname{senh} \rho(A, x) \operatorname{senh} \rho(x, \bar{h}A).$$

sustituyendo esta expresión en (3.10) obtenemos

$$|bc| \leq \cosh \rho(A, x) \cosh \rho(x, \bar{h}A). \quad (3.11)$$

Por otra parte, usando (3.7) de la discusión previa a este teorema se obtiene

$$\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) = \cosh^2 \rho(x, \bar{h}A) \operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) + \operatorname{senh}^2 \rho(x, \bar{h}A) \operatorname{sen}^2 \theta,$$

(ya que el eje de  $\bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}$  es  $\bar{h}A$ ). Combinando esta expresión con (3.4), (3.5) y (3.7) de la discusión previa obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) + \operatorname{sen}^2 \theta &= \cosh^2 \rho(x, \bar{h}A) \operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) + \operatorname{sen}^2 \theta (\operatorname{senh}^2 \rho(x, \bar{h}A) + 1) \\ &= \cosh^2 \rho(x, \bar{h}A) (\operatorname{senh}^2 \left( \frac{1}{2} T_{\bar{g}} \right) + \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= \cosh^2 \rho(x, \bar{h}A) \frac{\left| u - \frac{1}{u} \right|^2}{4} \end{aligned}$$

de manera análoga se tiene que

$$\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) + \operatorname{sen}^2 \theta = \cosh^2 \rho(x, A) \frac{\left| u - \frac{1}{u} \right|^2}{4}$$

por lo tanto

$$(\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) + \operatorname{sen}^2 \theta) (\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) + \operatorname{sen}^2 \theta) =$$

$$\left[ \cosh \rho(x, A) \cosh \rho(x, \bar{h}A) \frac{\left| u - \frac{1}{u} \right|^2}{4} \right]^2$$

además de las expresiones (3.8) y (3.11) se tiene

$$2 \cosh \rho(x, A) \cosh \rho(x, \bar{h}A) \left| u - \frac{1}{u} \right|^2 \geq 1$$

así entonces

$$\frac{\cosh \rho(x, A) \cosh \rho(x, \bar{h}A) \left| u - \frac{1}{u} \right|^2}{4} \geq \frac{1}{8}$$

por lo que

$$(\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) + \operatorname{sen}^2 \theta) (\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) + \operatorname{sen}^2 \theta) \geq \frac{1}{64}$$

si  $\bar{g}$  es hiperbólica entonces  $\operatorname{sen} \theta = 0$  y se verifica (ii). En cualquier otro caso escribimos

$$m = \max \left\{ \sinh \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x), \sinh \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) \right\}$$

entonces

$$m^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \geq \frac{1}{8}$$

de la hipótesis para el inciso (iii) tenemos

$$\left| \operatorname{tr}^2(\bar{g}) - 4 \right| < \frac{1}{4}$$

ó equivalentemente

$$\left| u - \frac{1}{u} \right|^2 < \frac{1}{4}$$

lo cual usando (3.4) implica que

$$\operatorname{sen}^2 \theta \leq \frac{1}{16}$$

por lo que

$$m^2 + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{8}$$

$$m^2 \geq \frac{1}{16}$$

$$m \geq \frac{1}{4}$$

con lo cual se concluye la demostración del teorema.  $\square$

Una consecuencia del Teorema 3.4 es el siguiente corolario.

**Corolario 3.5.** *Sea  $N$  una vecindad de la identidad en  $PSL(2, \mathbb{C})$  definida por*

$$\{\bar{f} : |\operatorname{tr}^2(\bar{f}) - 4| < \frac{1}{3}\}.$$

*Si  $\bar{g}$  esta en  $N$  y si  $\langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$  es discreto y no elemental entonces para toda  $x \in \mathbf{H}^3$*

$$\max \{ \rho(x, \bar{g}x), \rho(x, \bar{h}x) \} \geq 0.16$$

DEMOSTRACION. Sea  $x \in \mathbf{H}^3$ , si  $\rho(x, \bar{g}x) < \epsilon$  y  $\rho(x, \bar{h}x) < \epsilon$  acotaremos  $\epsilon$  usando el Teorema 3.4. Como  $\bar{h}^{-1}$  es una isometría hiperbólica se tiene

$$\begin{aligned} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) &= \rho(\bar{h}^{-1}x, \bar{g}\bar{h}^{-1}x), \\ &\leq \rho(\bar{h}^{-1}x, x) + \rho(x, \bar{g}x) + \rho(\bar{g}x, \bar{g}\bar{h}^{-1}x), \end{aligned}$$

(desigualdad del triángulo), además como cada uno de estos terminos es menor que  $\epsilon$  tenemos que

$$\rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) \leq 3\varepsilon.$$

Ahora, sea

$$r = \max \left\{ \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x), \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) \right\},$$

por el Teorema 3.4  $r \geq \frac{1}{4}$ , por otra parte, como  $\rho(x, \bar{g}x)$  y  $\rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x)$  son ámbos menores que  $3\varepsilon$  se tiene que  $\frac{1}{2}\rho(x, \bar{g}x)$  y  $\frac{1}{2}\rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x)$  son menores que  $\frac{3}{2}\varepsilon$ .

Por lo que

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{g}x) < \operatorname{senh} \frac{3}{2} \varepsilon$$

y también

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, \bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}x) < \operatorname{senh} \frac{3}{2} \varepsilon.$$

Así entonces

$$\operatorname{senh} \frac{3}{2} \varepsilon > r \geq \frac{1}{4}.$$

y

$$\frac{3}{2} \varepsilon > \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{1}{4} \right)$$

$$\varepsilon > \frac{2}{3} \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{1}{4} \right)$$

por lo tanto  $\varepsilon > 0.164$ .  $\square$



## Bibliografia

- [ B ] Beardon A. F. *The Geometry of Discrete Groups*, GTM 91.  
Springer Verlag 1983.
- [J,K] Jørgensen T. and Kikka M. Some Extreme Discrete Groups.  
*Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I* (1975) 245-248.
- [ J ] Jørgensen T. On discrete Groups of Möbius Transformations,  
*Amer. J. Math.*, **08** (1976), 739-749.
- [G,M] F. W. Gehring and G. J. Martin, Stability and Extremality in Jørgensen's Inequality;  
*Complex Variables*, **12** (1989), 277-282.
- [ L ] Lehner, J., *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rindhart  
and Winston New York 1966.
- [ R ] Ratcliffe J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. GTM 149  
Springer Verlag, 1994.