5
2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GENERALIZACIÓN EQUIVARIANTE DE ANTONIAN DEL TEOREMA DE EXTENSIÓN DE DUGUNDJI

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JOAQUÍN CRUZ GARCÍA

DIRECTOR: SYLVIA DE NEYMET URBINA

Facultad de Ciencias
de la UNAM

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "GENERALIZACION EQUIVARIANTE DE ANTONIAN DEL TEOREMA DE EXTENSION DE DUGUNDJI"

realizado por JOAQUIN CRUZ GARCIA

con número de cuenta 8303425-3, pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario DRA. SYLVIA DE NEYMET URBINA

Propietario DR. ROLANDO JIMENEZ BENITEZ

Propietario DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

Suplente DR. ADALBERTO GARCIA-MAYNEZ CERVANTES

Suplente DRA. ISABEL PUGA ESPINOSA

Consejo Departamental de Matemáticas

AGRADECIMIENTOS

A MIS PADRES :

POR EL APOYO BRINDADO EN TODO MOMENTO

Y

PRINCIPIOS QUE HAN GUIADO SUS VIDA

Especialmente quiero agradecer a la Dra. SYLVIA DE NEYMET URBINA, por haber dirigido este trabajo, cuya paciencia y asesoría prestada contribuyó significativamente durante el desarrollo y estructuración del mismo.

También agradezco al profesor SERGEY A. ANTONIAN por la ayuda prestada en algún momento, del seminario que impartió en la Facultad de Ciencias, durante su visita a México.

A los profesores ROLANDO JIMÉNEZ BENÍTEZ, ANGEL TAMARIZ MASCARÚA, ADALBERTO GARCÍA-MÁYNEZ CERVANTES E ISABEL PUGA ESPINOSA. Agradezco su revisión y comentarios hechos a este trabajo

Y así también agradezco a todas las personas que, aunque no las menciono, hicieron posible de alguna manera la elaboración del presente trabajo.

INDICE

INTRODUCCIÓN.

Una caracterización importante de los espacios normales es la dada, por H. Tietze en su teorema de extensión, para funciones reales de subconjuntos cerrados de espacios normales; precisando, cualquier función de un subconjunto cerrado de un espacio normal con valores en el intervalo unitario I es extendible a todo el espacio. En sí el teorema de extensión de H. Tietze establece que I es un extensor absoluto para los espacios normales.Como un caso particular del teorema de extensión de H. Tietze se tiene el teorema de P. Urysohn .

El interés de este trabajo se centra en la generalización equivariante del famoso teorema de extensión de J. Dugundji [Du, 1] publicado en 1951, que es a su vez una extensión del teorema de Tietze. Muestra que cualquier subconjunto convexo de un espacio vectorial localmente convexo es un extensor absoluto para los espacios metrizables.

La generalización equivariante del teorema de extensión de J. Dugundji se debe a S. Antonian [An, 1] publicada en 1985. Muestra que cada función equivariante $f: A \to B$, de un subconjunto cerrado invariante A de un G-espacio metrizable X, con G grupo de Lie compacto, con valores en un conjunto covexo invariante B de un G-espacio localmente convexo, admite una extensión equivariante a una vecindad invariante de A. Esto significa bevemente que, B es un extensor absoluto de vecindades para todo G-espacio metrizable. Este es uno de dos teoremas de extensión de una función equivariante publicados por S. Antonian.

Para comprender el enunciado del teorema principal necesitamos los conceptos de G-espacio, bajo la acción de un grupo, donde el concepto de grupo es en sentido general. Además de conjunto invariante y de función equivariante, términos básicos en la demostración del teorema [I. 1, 2 y 3]. Una condición que se requiere en el enunciado del teorema es que el grupo sea compacto de Lie [II. 3], esto para asegurar la existencia de tubos alrededor de las órbitas del conjunto cerrado invariante A [II. 4].

Los conceptos de tubos y rebanadas, desarrollados entre otros por Palais [Pa] y definidos mediante el concepto de H-kernel [II. 4], se utilizarán en los lemas preliminares [III. 1]. Resultados, como son la existencia de cubierta tubular y cubierta G-canónica, en los que se apoya la prueba del teorema [III. 2]. Sin embargo requerimos en este trabajo la presentación de tubos y rebanadas hecha por Bredon [Bre].

A lo largo del presente trabajo, cuando un término aparece subrayado, es porque se está definiendo. Los principales conceptos usados en este trabajo son definidos de manera explicita; muchos otros conceptos se destacan subrayados, sin dar una definición explicita, y algunos otros, de topología general, se da por hecho que son conocidos. Respecto a los teoremas, lemas y proposiciones son presentados, a lo largo del trabajo, en negritas. De esta manera se destacarán las ideas del presente trabajo.

CAPITULO I

1. ACCION DE GRUPOS EN ESPACIOS TOPOLOGICOS.

Comenzaremos definiendo los elementos necesarios para ver de qué manera un grupo G transforma a un espacio topológico X, bajo su acción. Primeramente definiremos la acción del grupo de la siguiente manera:

1.1 Definición.- *Sea G un grupo multiplicativo con elemento idéntico e. Una acción por la izquierda de G en un espacio topológico X es una función $\theta : G \times X \to X$ que satisface:*

A_1: $\theta(h,\theta(g,x)) = \theta(hg,x)$, para toda $x \in X$, y $g,h \in G$.

A_2: $\theta(e,x) = x$, para todo $x \in X$

A_3: $\theta_g : X \to X$ dada por $\theta_g(x) = \theta(g,x)$ es continua para toda $g \in G$

Se denota usualmente $\theta(g,x) = gx$ y las condiciones A_1 y A_2 se escriben como $h(gx) = (hg)x$ y $ex = x$.

La acción θ:G × X → X induce una función $\theta_g : X \to X$ (a cada x le asigna gx) para toda g en G donde A_1 implica $\theta_{gh}(x) = (\theta_g \circ \theta_h)(x)$ y A_2 implica $\theta_e = 1_X$. Entonces $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$, puesto que

$\theta_{g^{-1}g}(x) = \theta_{g^{-1}}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = \theta_e(x) = x = (\theta_g)^{-1} \circ \theta_g(x)$. Por tanto θ_g: X → X es un homeomorfismo.

θ también induce un homomorfismo $\hat{\theta} : G \to Homeo(X); g \mapsto \theta_g$ en el grupo Homeo(X) de homeomorfismos de X sobre sí mismo con la operación composición.

Efectivamente $\hat{\theta}(G)$ es grupo pues se cumplen :

1. Si $\theta_{g_1}, \theta_{g_2} \in$ Homeo(X), entonces $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}(x) = \theta_{g_1}(g_2 x) = (g_1 g_2)x = \theta_{g_1 g_2}(x)$. Por consiguiente

$\theta_{g_1g_2} \in$ Homeo(X). Por lo tanto $\hat{\theta}(g_1g_2) = \theta_{g_1g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \hat{\theta}(g_1) \circ \hat{\theta}(g_2)$.

2. $\theta_e = 1_X \in$ Homeo(X).

3. Para todo $g \in G$, $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1} \in Homeo(X)$. Si $\theta_g \in$ Homeo(X), con $g \in G$ implica que existe $g^{-1} \in G$ tal que $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1} \in$ Homeo(X).

Una acción θ es efectiva si el homomorfismo inducido $\hat{\theta}: G \to Homeo(X)$ es inyectivo, lo cual significa que $gx = x$ para toda $x \in X$ implica que $g = e$. En otras palabras una acción de G en X es efectiva si todo elemento g de G distinto de e mueve al menos un punto de X ($gx \neq x$).

Para cada acción $\theta : G \times X \to X$ y cada subgrupo $H < G$, definen una acción $\theta|_{H \times X} : H \times X \to X$ de H sobre X. Puesto que H es cerrado bajo la multiplicación, se cumple $(h_1h_2)x = h_1(h_2x)$ para toda $h_1, h_2 \in H$. Además, como H es un grupo se tiene, $e \in H$ y se cumple $e(x) = x$ para todo $x \in X$ y por A_3 se cumple la continuidad de θ_h para cada $h \in H < G$.

Emplearemos la notación siguiente para $S \subset G$ y $A \subset X$: $SA = \theta(S \times A) = \{ga : g \in S, a \in A\}$.

1.2 Definición.- *Un conjunto A contenido en X es invariante de X si $GA = A$. En este caso, $\theta/_{G \times A}$ es una acción de G en A.*

1.3 Definición-. *Si $A = \{a\}$ el conjunto $GA = G(a) = \{ga : g \in G\}$ es la órbita de a en X.*

1.4 Proposición: *Para $x_1, x_2 \in X$ se cumple : $G(x_1) = G(x_2)$ o $G(x_1) \cap G(x_2) = \varnothing$.*

PRUEBA: Supóngase $G(x_1) \cap G(x_2) \neq \varnothing$ y sea $x \in G(x_1) \cap G(x_2)$. Entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $x = g_1x_1 = g_2x_2$. Se tiene entonces que $x_1 = g_1^{-1}g_2x_2$; asi $x_1 \in G(x_2)$. Esto implica que $G(x_1) \subset$

$G(x_2)$. Luego $g_2^{-1}g_1x_1 = x_2$, $x_2 \in G(x_1)$ y, por consiguiente, $G(x_2) \subset G(x_1)$. Por lo tanto, $G(x_1) = G(x_2)$.

De la proposición anterior, tenemos que el conjunto de órbitas $\{G(x) : x \in X\}$ descompone a X en clases de equivalencia con la relación $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $G(x_1) = G(x_2)$, es decir, existe $g \in G$ tal que $x_2 = gx_1$.

El espacio cociente se denotará como X/G y se llama el espacio de órbitas de X, y la función cociente $\pi_0 : X \to X/G$ que envía x en el punto $G(x) \in X/G$ la llamaremos proyección canónica.

Así el espacio de órbitas X/G es el conjunto de órbitas con la topología cociente: Un conjunto A contenido en X/G es abierto si y sólo si $\pi_0^{-1}(A)$ es abierto de X, donde $\pi_0^{-1}(A)$ es unión de órbitas. La topología de X/G es la inducida por π_0 (la mayor topología tal que π_0 es continua).

1.5 Proposición: *La proyección canónica $\pi_0 : X \to X/G$ es abierta.*

PRUEBA: Sea $A \subset X$, $\pi_0^{-1}(\pi_0(A)) = \bigcup_{a \in A} G(a) = \bigcup_{g \in G} gA = \bigcup_{g \in G} \theta_g(A)$. Si A es un subconjunto abierto de X, como cada θ_g es un homeomorfismo, $\theta_g(A)$ es abierto, lo cual implica que $\bigcup_{g \in G} \theta_g(A)$ es abierto y, por lo tanto, $\pi_0(A)$ es abierto en X/G.

Observemos que para un subconjunto abierto A de X y $S \subset G$, SA es abierto por ser unión de abiertos gA con g en S.

1.6 Definición.- *Para cada $A \subset X$ sea $G_A = \{g \in G : gA = A\}$ el estabilizador de A. Es claro que si A es un conjunto invariante, $G_A = G$.*

***1.7 Proposición:** El estabilizador de G_A de un subconjunto A de X es un subgrupo de G.*

PRUEBA: $e \in G_A$ porque $eA = A$. Ahora, si $g \in G_A$ entonces $g^{-1} \in G_A$, ya que $gA = A$ implica $A = g^{-1}A$. Finalmente, si g y h pertenecen a G_A, $ghA = g(hA) = gA = A$. De donde $gh \in G_A$.

Cuando $A = \{x\}$, a su estabilizador $G_A = G_x = \{g \in G : gx = x\}$, se le llama también el grupo de isotropía de x.

***1.8 Proposición:** Para todo $x \in X$ y $h \in G$, $G_{hx} = hG_x h^{-1}$.*

PRUEBA: Si $g \in G_{hx}$, es decir, $g(hx) = hx$. Entonces $h^{-1}g(hx) = x$, así $h^{-1}gh \in G_x$. Esto implica que $g \in hG_x h^{-1}$. Por consiguiente $G_{hx} \subset hG_x h^{-1}$. Ahora, si $g \in hG_x h^{-1}$, se tiene $g(hx) = (hg_0 h^{-1})(hx)$, con $g_0 \in G_x$, así $g(hx) = h(g_0 x) = hx$. De donde, $g \in G_{hx}$. De lo anterior se concluye $G_{hx} = hG_x h^{-1}$.

Un grupo G actúa por la derecha en X si existe una función $X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto xg$ que satisface:

A'_1: $(xg)h = x(gh)$.

A'_2: $xe = x$.

A'_3: $x \mapsto xg$ define una función continua de X en sí mismo.

Como en las acciones por la izquierda , $x \mapsto xg$ es un homeomorfismo. Si A es abierto en X y S $\subset G$, $AS = \{ag : a \in A, g \in S\}$ es abierto en X. De hecho, cada acción por la derecha de G en X determina una acción por la izquierda definiendo $gx = xg^{-1}$.

Consideremos siempre acciones por la izquierda, salvo que en algún caso se indique lo contrario.

2. ACCIONES CONTINUAS DE GRUPOS TOPOLOGICOS

Definimos en la sección anterior la acción de un grupo. Ahora al grupo le daremos la estructura de espacio topológico, considerando a las operaciones de grupo continuas, de la manera siguiente:

2.1 Definición.- *Un grupo topológico G es un grupo provisto de una topología tal que las operaciones del grupo, la multiplicación $\mu : G \times G \to G$ $((g,h) \mapsto gh)$ y la inversión $\imath : G \to G$ $(g \mapsto g^{-1})$, son continuas.*

Algunos autores suponen que la topología de un grupo topológico G es de Hausdorff, es decir G es un espacio de Hausdorff. Esto equivale, como veremos en la siguiente proposición, a que el conjunto $\{e\}$ de G sea cerrado.

2.2 Proposición: *Para un grupo topológico G se tiene:*

(1) *Para cada $h \in G$ las funciones multiplicación por la izquierda $\mu_h : g \mapsto hg$ y derecha $\mu'_h : g \mapsto gh$ llamadas traslaciones son homeomorfismos de G sobre sí mismo.*

(2) *G es un espacio homogéneo (para toda $g_1, g_2 \in G$ existe $f : G \to G$ homeomorfismo tal que*

$f(g_1) = g_2$).

(3) *Para $A, B \subset G$, si A es un subconjunto abierto en G, entonces $AB = \mu(A\times B)$ y $BA = \mu(B\times A)$ son abiertos.*

(4) *Si V es vecindad de e, gV y Vg son vecindades de g en G.*

(5) *Si V es vecindad de e, existen U y W vecindades de e tales que $V^2 = \mu(V\times V) \subset U$ y $W^{-1} = i(W) \subset U$. Es más, existe una vecindad A de e tal que $AA^{-1} \subset V$.*

(6) *Si $\{e\}$ es cerrado en G, entonces G es de Hausdorff.*

(7) *G es regular.*

<u>*PRUEBA:*</u> **(1)** La restricción $\mu|_{G\times\{h\}}$ es continua y la función $G \to G\times\{h\}$ que envía g en (g, h) es un homeomorfismo. Luego, la composición que envía $g \mapsto (g, h) \mapsto gh$ es continua, su inversa es la función continua que envía $g \mapsto gh^{-1}$, así μ^d_h , que envía $g \mapsto gh$, es un homeomorfismo. Análogamente se prueba que también lo es μ^i_h.

(2) Sean $g_1, g_2 \in G$. Entonces $g \mapsto g_2g_1^{-1}g$ es un homeomorfismo por (1), y envía g_1 en $g_2g_1^{-1}g_1 = g_2$.

(3) $AB = \{gh : g \in A, h \in B\} = \bigcup_{h\in B} Ah$ y $BA = \{hg : g \in A, h \in B\} = \bigcup_{h\in B} hA$. Pero, por **(1)**, si A es abierto en X, hA y Ah son abiertos en X. Por lo tanto, $AB = \bigcup_{h\in B} Ah$, y $BA = \bigcup_{h\in B} hA$ son abiertos.

(4) $gV = \{gv : g \in G, v \in V\} = \mu^i_g(V)$, donde $\mu^i_g : G \to G$, está definida como $\mu^i_g(g') = gg'$. Por (1), μ^i_g es un homeomorfismo. Entonces gV es vecindad de g.

Ahora, si $\mu^d_g: G \to G$, es el homeomorfismo multiplicación por la derecha, $\mu^d_g(g') = g'g$, $Vg = \{vg : g \in G, v \in V\} = \mu^d_g(V)$ es abierto. Esto implica que Vg es vecindad de $g = \mu^d_g(e)$.

(5) Por la continuidad de μ existen vecindades V_1, V_2 de e, tales que $\mu(V_1 \times V_2) \subset U$. Sea $V = V_1 \cap V_2$. Entonces $\mu(V \times V) = V^2 \subset U$. Ahora, dada U vecindad de e, existe W vecindad de e tal que $\iota(W) = W^{-1}$, con $W^{-1} \subset U$, por la continuidad de ι. También, para la vecindad anterior V de e, existe una vecindad A de e contenida en V tal que $A^{-1} \subset V$. Entonces $AA^{-1} \subset VV = V^2 \subset U$. Por lo tanto, existe una vecindad A de e tal que $AA^{-1} \subset U$.

(6) Supongamos $\{e\}$ es cerrado. Sea $g \in G$, $g = \mu^i_g(e)$. Puesto que μ^i_g es cerrada, $\{g\}$ es cerrado en G. Así, G es un espacio T_1. Ahora, sean $g, h \in G$ tales que $g \neq h$. Como $h^{-1}g \neq e$ y G es T_1, se tiene que existe U, vecindad de e, tal que $h^{-1}g \notin U$. Por el inciso (5), sea V vecindad de e tal que $VV^{-1} \subset U$. Entonces $h^{-1}g \notin VV^{-1}$ y $g \notin hVV^{-1}$. Luego $gV \cap hV = \varnothing$, pues si no fuera vacío, existiría $x \in gV \cap hV$ tal que $x = gv_1 = hv_2$, $g = hv_2v_1^{-1} \in hVV^{-1}$, contrario a lo antes obtenido. Por tanto, gV y hV son vecindades ajenas. Así, G es de Hausdorff.

(7) Por ser G homogéneo basta probar que e y un cerrado C de G que no contiene a e tienen vecindades ajenas.

Puesto que $e \in G\text{-}C$, y $G\text{-}C$ es abierto, existe una vecindad V de e tal que $VV^{-1} \subset G\text{-}C$. De donde, $VV^{-1} \cap C = \varnothing$ y $V \cap CV = \varnothing$. Por tanto, V y CV son vecindades ajenas de e y C, respectivamente.

Debido a la asociatividad de la multiplicación, la propiedad del elemento idéntico e y la continuidad de las multiplicaciones izquierda y derecha para cada $g \in G$, se infiere que $\mu: G \times G \to G$ es una acción, llamada <u>traslación</u> de G en G por la izquierda (o por la derecha) ya que satisface los axiomas A_1, A_2 y A_3 de acción por la izquierda (o los correspondientes de acción por la derecha).

Dado un subgrupo H de G, como en la sección 1, H actúa por traslación (izquierda) en G y las órbitas son las clases laterales (derechas) Hg. El espacio de órbitas G/H es el espacio cociente de las clases laterales y la proyección canónica $q: G \to G/H$ es abierta.

***2.3 Proposición:** Sea H un subgrupo de un grupo topológico G. Entonces H, como subespacio de G, es un grupo topológico. Si H es subgrupo normal, el grupo cociente G/H es un grupo topológico y q: G → G/H es un epimorfismo continuo y abierto.*

PRUEBA: Puesto que μ e ι son continuas para cualquier $H < G$, se cumple que $\mu|_{H\times H}$ y $\iota|_H$ son continuas. Por tanto, H es un grupo topológico.

Dado que $\mu|_{H\times G}$ es la acción de H en G (traslación izquierda), por la proposición 1.5, la proyección canónica $q: G \to G/H$ es abierta. Cuando $H \triangleleft G$, en el grupo cociente G/H las operaciones μ' e ι' se definen como $\mu'(g_1H, g_2H) = g_1g_2H$ y $\iota'(gH) = g^{-1}H$. Estas operaciones son continuas, debido a que los diagramas siguientes son conmutativos.

$$
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "q\times q"'] & G \arrow[d, "q"] \\
G/H\times G/H \arrow[r, "\mu'"] & G/H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "q"] \\
G/H \arrow[r, "\iota'"] & G/H
\end{tikzcd}
$$

μ' es continua, puesto que $q\times q$ es continua, abierta y sobre. Ya que $G/H\times G/H$ tiene la topología cociente de $G\times G$ respecto a $q\times q$, $\mu'\circ(q\times q) = q\circ\mu$ continua implica μ' continua, por la propiedad de las funciones cociente. Por la misma razón, $\iota'\circ q = q\circ\iota$ continua, implica ι' continua.

El concepto de espacio vectorial puede ser extendido al concepto de espacio vectorial topológico de la manera siguiente.

2.4 Definición.- *Sea L un espacio vectorial, con una topología, sobre el campo de los números reales **R**. Si las operaciones suma de vectores $\sigma : L\times L \to L$ y multiplicación por escalares $\nu : R\times L \to L$ son continuas respecto a la topología producto en $L\times L$ y $R\times L$, con la topología usual en **R**, se dice que L es un* *<u>espacio vectorial topológico</u>* *(real).*

El conjunto $D = \{c : c = \lambda b + (1-\lambda)a;\ 0 \le \lambda \le 1\}$, para $a,b\in L$, es el <u>segmento</u> que une a a con b.

Un subconjunto C de L es <u>convexo</u> si para cada c,d en C el segmento que une a c y d está contenido en C. Es claro que cualquier espacio vectorial L es convexo.

El espacio vectorial topológico L es <u>localmente convexo</u> si para cada punto a en L y cada vecindad U de a , existe una vecindad convexa V de a contenida en U .

Por ejemplo, todo espacio vectorial normado (L, || ||) es un espacio vectorial topológico respecto a la topología de la métrica $d(x, y) = \| x - y \|$ y es localmente convexo porque las ε-vecindades $V_\varepsilon(x)$ son convexas.

3. G-ESPACIOS.

3.1 Definición.- *Un* *<u>G-espacio</u>* *consta de un espacio topológico X junto con una acción continua $\theta : G\times X \to X$ del grupo topológico G sobre X y con la topología producto en $G\times X$.*

Observemos que si X es un G-espacio y $H < G$, como vimos en la sección 2, H es un grupo topológico y X es un H-espacio con la acción de G en X restringida a $H\times X$.

Si A es un subespacio invariante de X, entonces A es un G-espacio con la acción de G en X restringida a $G\times A$.

Consideremos un grupo topológico G y un G-espacio X.

3.2 Proposición: *La acción $\theta: G\times X \to X$ del G-espacio X es abierta.*

PRUEBA: Dado que los abiertos básicos de $G\times X$ son de la forma $W\times U$ con W abierto de G y U abierto de X, $\theta(W\times U) = WU$ es abierto, por la observación que sigue a la proposición 1.5. Por tanto, θ es abierta.

3.3 Proposición: *Si X es un G-espacio de Hausdorff, entonces para cada $x\in X$, el grupo de isotropía G_x es cerrado en G.*

PRUEBA: Sea $h\in\overline{G_x} - G_x$. Supongamos que $hx = y$ y $y\neq x$. Como X es de Hausdorff, x e y tienen vecindades ajenas U y V respectivamente. Por la continuidad de la acción, existen vecindades W de h en G y A de x en X contenida en U tales que $WA\subset V$. Pero como $h\in\overline{G_x} - G_x$, existe $g\in W\cap G_x$. Por tanto, $x = gx\in WA\subset V$, luego $x\in U\cap V$. Contrario a la hipótesis.

De la proposición 1.8 se sigue que los grupos de isotropía de puntos en la misma órbita son conjugados, porque todos los puntos de la órbita de x tienen grupo de isotropía conjugado a G_x.

Si $G_x = \{e\}$, es decir, si G_x es trivial, para toda x en X, se dice que la acción de G sobre X es libre (para todo $g \neq e$, $gx \neq x$, para toda $x \in X$), es decir, θ_g mueve todos los puntos de X.

3.4 Definición.- *Una función continua $\varphi : X \to Y$ entre G-espacios es equivariante si $\varphi(gx) = g\varphi(x)$.*

3.5 Proposición: *Sea $\varphi : X \to Y$ equivariante. Entonces*

(1) $G_x \subset G_{\varphi(x)}$ para toda $x \in X$.

(2) Si φ es un homeomorfismo, entonces $\varphi^{-1} : Y \to X$ es equivariante.

PRUEBA: **(1).** Sea $g \in G_x$, $g\varphi(x) = \varphi(gx) = \varphi(x)$. Por tanto, $g \in G_{\varphi(x)}$.

(2). Si φ es un homeomorfismo, entonces φ^{-1} existe y es continua. Sean $g \in G$, $y \in Y$ y $x = \varphi^{-1}(y)$. Entonces $\varphi^{-1}(gy) = \varphi^{-1}(g(\varphi(x))) = (\varphi^{-1}\varphi)(gx) = gx = g\varphi^{-1}(y)$. Por lo tanto, φ^{-1} es equivariante.

Observése que si G actúa libremente en Y y $\varphi : X \to Y$ es equivariante, entonces G actúa libremente en X, ya que para toda $x \in X$, como $G_{\varphi(x)} = \{e\}$ y $G_x \subset G_{\varphi(x)}$, $\{e\} \subset G_x = \{e\}$. Luego G_x es trivial.

Se dice que dos G-espacios X, Y son equivalentes si existe un $\varphi : X \to Y$ homeomorfismo equivariante (φ es una equivalencia).

CAPITULO II

1. ACCIONES DE GRUPOS COMPACTOS

En la demostración de la siguiente proposición utilizaremos los siguientes resultados de la teoria de redes, [Du, 2] capítulo X..

Para empezar recordemos que una red en un conjunto X es una función de un conjunto dirigido $\Lambda = (\Lambda, \leq)$ en X, donde $(\Lambda, \leq)$ es un conjunto preordenado (i.e. $\leq$ es una relación binaria reflexiva y transitiva) tal que para cualesquiera $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ existe λ'' la cual satisface $\lambda \leq \lambda''$ y $\lambda' \leq \lambda''$.

Como en el caso de sucesiones, una red en X se denota $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ entendiéndose que se trata de la función $\lambda \mapsto x_\lambda$. Una subred $(x_{\lambda_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ de una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en X está determinada por una red $(\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en Λ tal que si $\gamma \leq \gamma'$ en $(\Gamma, \leq)$, entonces $\lambda_\gamma \leq \lambda_{\gamma'}$ en $(\Lambda, \leq)$ y para todo $\lambda \in \Lambda$ existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\lambda \leq \lambda_\gamma$. Se dice que la red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x en un espacio topológico X y se escribe $x_\lambda \to x$, si para cada vecindad V de x existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$ para todo $\lambda \leq \lambda'$.

Los resultados que usaremos respecto a redes son los siguientes:

(a). Si $x_\lambda \to x$ y todos los términos x_λ de la red pertenecen a un cerrado C de X, entonces $x \in C$.

(b). Sea $E \subset X$. Entonces, $x \in \overline{E}$ si y sólo si existe una red en E que converge a x en X.

(c). Si $f: X \to Y$ es continua y $x_\lambda \to x$, entonces la red $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a f(x) en Y.

(d). Sea $(a_\lambda, b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en A×B. Entonces $(a_\lambda, b_\lambda) \to (a, b)$ en A×B si y sólo si $a_\lambda \to a$ en A y $b_\lambda \to b$ en B.

(e). Toda red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en un subespacio compacto *K* de X tiene una subred convergente.

Ahora supongamos que G es un grupo topológico compacto.

1.1 Proposición: *Sea G un grupo topológico compacto y sea X un G-espacio con la acción θ. Entonces*

(1). *$\theta : G\times X \to X$ es cerrada (además de continua, abierta y sobre).*

(2). *Si A es un subconjunto cerrado de X, GA es cerrado, y si A es compacto, entonces GA es compacto. En particular, las órbitas G(x) son compactas (si X es T_2, entonces las órbitas son también cerradas).*

(3). *$\pi_0 : X \to X/G$ es cerrada (además de continua, abierta y sobre) y propia. (i.e. para todo compacto K de X/G, $\pi_0^{-1}(K)$ es compacto).*

(4). *X es compacto si y sólo si X/G compacto.*

(5). *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces X/G es de Hausdorff.*

(6). *Si X es localmente compacto (y T_2), entonces X/G también lo es.*

(7). *Si V es una vecindad de un conjunto invariante B, entonces existe una vecindad abierta A invariante de B y contenida en V.*

<u>*PRUEBA*</u>: **(1).** Sea A un subconjunto cerrado de G×X. Se demostrará que θ(A) es cerrado. Sea $y \in \overline{\theta(A)}$, existe una red $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en θ(A) que converge a y, esto es, $y_\lambda = \theta(g_\lambda, x_\lambda)$ con $(g_\lambda, x_\lambda) \in A$ y

$g_\lambda x_\lambda \to y$. Ahora, puesto que G es compacto, toda red en G tiene una subred convergente. Podemos suponer que la red $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a un punto $g \in G$. Luego, por la continuidad de ι, inversión en G, se tiene que $\iota(g_\lambda) \to \iota(g)$, es decir $g_\lambda^{-1} \to g^{-1}$. Y puesto que θ es continua y $g_\lambda x_\lambda \to y$, se tiene :

$$\theta(g_\lambda^{-1}, g_\lambda x_\lambda) \to \theta(g^{-1}, y) = g^{-1}y$$

Como $\theta(\iota(g_\lambda), g_\lambda x_\lambda) = \theta(g_\lambda^{-1}, g_\lambda x_\lambda) = g_\lambda^{-1}(g_\lambda x_\lambda) = x_\lambda$, debido a lo anterior, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $g^{-1}y$.

Así, $(g_\lambda, x_\lambda) \to (g, g^{-1}y)$; pero $(g_\lambda, x_\lambda) \in A$ y A es cerrado, lo cual implica $(g, g^{-1}y) \in A$. Por tanto, $\theta(g, g^{-1}y) = y \in \theta(A)$. Entonces $\overline{\theta(A)} = \theta(A)$.

(2). Si A es cerrado, entonces $G\times A$ es cerrado en $G\times X$, y como θ es cerrada, $\theta(G\times A) = GA$ es cerrado. Si A es compacto, por la continuidad de θ, $\theta(G\times A)$ es compacto.

(3). Sea $A \subset X$ cerrado. De (2) tenemos que $\pi_0^{-1}\pi_0(A) = GA$. Puesto que π_0 es una identificación (o función cociente) tenemos que $\pi_0(A)$ es cerrado. Ahora supongamos que $K \subset X/G$ es compacto. Probaremos que $\pi_0^{-1}(K)$ es compacto.

Sea $\mathcal{U}$ cubierta abierta de $\pi_0^{-1}(K)$. Para cada $k\in K$, existe $x\in X$ tal que $\pi_0(x) = k$. Como $\pi_0^{-1}\pi_0(x) = G(x)$, $\pi_0^{-1}(k)$ es una órbita y por el inciso (2), es compacta. Por consiguiente existen $U_{k1},\ldots,U_{kn(k)} \in \mathcal{U}$ tales que $\pi_0^{-1}(k) \in \bigcup_{i=1}^{n(k)} U_{ki} = U_k$. Dado que π_0 es cerrada, $k\in V_k = (X/G)-\pi_0(X-U_k)$ es abierto para cada $k\in K$.

La cubierta abierta $\{V_k\}_{k\in K}$, de K tiene una subcubierta finita, esto es, $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{k_j}$. Entonces

$$\pi_0^{-1}(K) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \pi_0^{-1}(V_{kj}) \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{kj} = \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n(k_j)} U_{kji}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita, y $\pi_0^{-1}(K)$ es compacto.

(4). Supongamos que X es compacto, ya que π_0 es continua, $\pi_0(X) = X/G$ es compacto, por ser la imagen continua de un compacto. Recíprocamente, si X/G es compacto, (3) implica que X también lo es.

(5). Sea X espacio de Hausdorff. Sean $p, q \in X/G$ con $p \neq q$. Entonces $\pi_0^{-1}(p) = G(x)$ y $\pi_0^{-1}(q) = G(y)$, con $G(x) \cap G(y) = \emptyset$. Además las órbitas son compactas, y puesto que X es de Hausdorff, $\pi_0^{-1}(p)$ y $\pi_0^{-1}(q)$ tienen vecindades ajenas. Por tanto, existe un subconjunto abierto U de X tal que $\pi_0^{-1}(p) \subset U$ y $\overline{U} \cap \pi_0^{-1}(q) = \emptyset$. Como $\pi_0(y) = q \notin \pi_0(\overline{U})$ para algún $y \in \pi_0^{-1}(q)$, porque $\pi_0(\overline{U}) \cap \pi_0\pi_0^{-1}(q) = \pi_0(\overline{U}) \cap \{q\} = \emptyset$, y $\pi_0(\overline{U})$ es cerrado (ya que π_0 es cerrada) y como $p \in \pi_0(U)$ abierto, obtenemos $\pi_0(U)$ y $(X/G)-\pi_0(\overline{U})$ vecindades ajenas de p y q respectivamente.

(6). Probaremos que cada $p \in X/G$ tiene una vecindad compacta. Sea $x \in X$ tal que $\pi_0(x) = p$. Entonces $\pi_0^{-1}(p) = G(x)$ es compacto en X, espacio localmente compacto. Luego existe K, compacto, tal que $x \in \dot{K} \subset K$. Así $p = \pi_0(x) \in \pi_0(\dot{K}) \subset \pi_0(K)$, y $\pi_0(K)$ es compacto. Además, como π_0 es abierta, $\pi_0(\dot{K})$ es abierto.

(7) Sea V una vecindad abierta de B, un conjunto invariante de X. Como X-V es cerrado, $\pi_0(X-V)$ es cerrado, y como B es invariante, $\pi_0(B) \cap \pi_0(X-V) = \emptyset$. Efectivamente, si $\pi_0(x) \in \pi_0(B) \cap \pi_0(X-V)$, con $x \in X-V$ y $\pi_0(x) \in \pi_0(B)$, entonces $x \in \pi_0^{-1}\pi_0(B) = GB = B$, y por lo tanto, $B \cap X-V \neq \emptyset$, en contradicción con $B \subset V$. Consideremos el conjunto $A = \pi_0^{-1}((X/G)-\pi_0(X-V))$, resulta que A es abierto e invariante. Veremos que A contiene a B y está contenido en V: Puesto que $\pi_0(B) \subset (X/G)-\pi_0(X-V)$, $B = \pi_0^{-1}(\pi_0(B)) \subset \pi_0^{-1}((X/G)-\pi_0(X-V)) = A$, así $B \subset A$. Ahora, para todo $x \in X-V$, $\pi_0(x) \in \pi_0(X-V)$, es decir, $\pi_0(x) \notin (X/G)-\pi_0(X-V)$. Por tanto, $x \in \pi_0^{-1}\pi_0(x)$ y $\pi_0^{-1}\pi_0(x) \cap A = \emptyset$. De lo anterior se sigue que $A \subset V$.

***1.2 Proposición:** Sean G un grupo compacto y X, Y dos G-espacios. Si φ: $C \to Y$ es una función continua de un cerrado C de X en Y tal que siempre que c y gc estén ambos en C, entonces $\varphi(gc) = g\varphi(c)$. Entonces φ puede extenderse en forma única a una función equivariante $\varphi' : GC \to Y$.*

<u>PRUEBA:</u> Definimos $\varphi'(gc) = g\varphi(c)$ para cada $g \in G$ y $c \in C$. Comprobemos que φ está bien definida. Si $gc = g'c'$ con $g' \in G$ y $c' \in C$, se tiene $c = g^{-1}g'c'$, y, por hipótesis, $\varphi(c) = \varphi(g^{-1}g'c') = g^{-1}g'\varphi(c')$. Así

$\varphi'(gc) = g\varphi(c) = gg^{-1}g'\varphi(c') = g'\varphi(c') = \varphi'(g'c')$.

Para demostrar la continuidad de φ', consideremos un conjunto cerrado A en Y y una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ en $\varphi'^{-1}(A)$ convergente a $x \in \overline{\varphi'^{-1}(A)}$. Podemos escribir $x_\alpha = g_\alpha c_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, con $g_\alpha \in G$ y $c_\alpha \in C$. También podemos suponer que $(g_{\alpha_\beta})_{\alpha_\beta \in \mathcal{A}}$ es una subred de $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ convergente a g en G, por ser G compacto. Entonces $g_{\alpha_\beta}^{-1} x_{\alpha_\beta} = c_{\alpha_\beta}$ y así $c_{\alpha_\beta} \to g^{-1}x$. Como C es cerrado, se tiene que $g^{-1}x \in C$.

Por otro lado supongamos que $a_{\alpha_\beta} = \varphi'(x_{\alpha_\beta}) = \varphi'(g_{\alpha_\beta} c_{\alpha_\beta})$, con $a_{\alpha_\beta} \in A$. Entonces se tiene que $a_{\alpha_\beta} = g_{\alpha_\beta}\varphi(c_{\alpha_\beta})$. En consecuencia, $a_{\alpha_\beta} \to g\varphi(g^{-1}x) = g\varphi(g^{-1}x) = \varphi'(gg^{-1}x) = \varphi'(x)$. Por lo cual $\varphi'(x) \in A$, ya que A es cerrado. Por tanto, $x \in \varphi'^{-1}(A)$ y con esto se prueba que $\varphi'^{-1}(A)$ es cerrado.

2. INTEGRAL DE HAAR

De aquí en adelante supondremos que G es un grupo topológico compacto y de Hausdorff. Consideremos μ^d_h y μ^i_h las traslaciones derecha e izquierda, respectivamente. Como vimos éstas son homeomorfismos de G sobre sí mismo

Sea $C(G,\mathbf{R}) = \{f : f:G \to \mathbf{R}$ continua$\}$. Observemos que $C(G,\mathbf{R})$ es un espacio vectorial sobre los reales: Para $\psi, \varphi \in C(G, \mathbf{R})$ y $c, d \in \mathbf{R}$, definamos $(\psi + \varphi)(g) = \psi(g) + \varphi(g)$ y $(c\varphi)(g) = c\varphi(g)$. Se cumplen entonces :

1. $\psi + \varphi \in C(G, \mathbf{R})$ y $c\varphi \in C(G, \mathbf{R})$.
2. $c(\psi + \varphi)(g) = c(\psi(g) + \varphi(g)) = c\psi(g) + c\varphi(g)$.
3. $[(c+d)\psi](g) = (c+d)\psi(g) = c\psi(g) + d\,\psi(g)$.
4. *Existe* $\underline{o} \in C(G, \mathbf{R})$ *tal que* $\psi + \underline{o} = \psi$, *para toda* $\psi \in C(G, \mathbf{R})$, *donde* $\underline{o}(g) = 0$ *para toda* $g \in G$.

Esto significa que $\mathbf{C}(G, \mathbf{R})$ es un espacio vectorial real. Las traslaciones inducen las transformaciones lineales $R_h, L_h : C(G,\mathbf{R}) \to C(G,\mathbf{R})$ dadas por $R_h(\Psi)(g) = \Psi(gh) = \Psi(\mu^i_h(g))$ y $L_h(\Psi)(g) = \Psi(\mu^d_h(g))$. Además se define $\varphi \geq \psi$ si $\varphi(g) \geq \psi(g)$ para toda $g \in G$.

2.1. Teorema: *Existe una función $I: C(G,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, única, que satisface:*

(a). $I(\Psi_1 + \Psi_2) = I(\Psi_1) + I(\Psi_2)$.

(b). $I(c\Psi) = cI(\Psi)$, $c \in \mathbf{R}$.

(c). $I(\Psi \circ R_h) = I(\Psi) = I(\Psi \circ L_h)$, $h \in G$, *de manera que I es invariante por la derecha y por la izquierda).*

(d). Si $\Psi \geq 0$ *pero* $\Psi \neq \underline{0}$, *entonces* $I(\Psi) > 0$.

(e). $I(\underline{1}) = 1$, *donde* $\underline{1}: G \to \mathbf{R}$, *función* $\underline{1}(g) = 1 \in \mathbf{R}$

La demoostración de la existencia de la integral de Haar, invariante por la izquierda para grupos localmente compactos de Hausdorff G. Puede verse en [H - R] CAP. 4

2.2. Definición.-*Toda función lineal $I: C(G,R) \to R$ que satisface los incisos (a), (b), (c) y (d) del teorema anterior se define como una* <u>*integral de Haar*</u> *en G y es única si satisface el inciso (e). Esta es la integral de Haar normalizada que usaremos. Denotaremos a la integral de Haar de la forma siguiente*

$$I(\varphi) = \int \varphi(g)dg.$$

El inciso (c) puede escribirse como $\int \varphi(gh)dg = \int \varphi(g)dg = \int \varphi(h^{-1}g)dg$

y el inciso (d) como $\int \underline{1}\, dg = \int dg = 1.$

Por ejemplo, si G es finito de cardinalidad r, $\int \varphi(g)dg = (\frac{1}{r}) \sum_{g \in G} (\varphi(g))$ es la integral de Haar en G y está normalizada porque

$\int (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)(g)dg = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} [c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2](g) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} c_1\varphi_1(g) + \frac{1}{r} \sum_{g \in G} c_2\varphi_2(g) = c_1\int \varphi_1(g)dg + c_2\int \varphi_2(g)dg$,

$\int (R_h\varphi(g))dg = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} \varphi(hg) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} \varphi(g) = \int \varphi(g)dg$ y análogamente $\int (L_h\varphi(g))dg = \int \varphi(g)dg$. Luego ésta es la integral de Haar. Finalmente $\int dg = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} 1(g) = r/r = 1$.

2.3. Proposición: *La integral de Haar así definida tiene las siguientes propiedades:*

(1). *Si $\varphi_1 \geq \varphi_2$, entonces $\int \varphi_1(g)dg \geq \int \varphi_2(g)dg$.*

(2). *$| \int \varphi(g)dg | \leq \sup \{|\varphi(g)|\}_{g \in G}$*

<u>*PRUEBA:*</u> Se cumple, ya que si $\varphi_1 - \varphi_2 \geq 0$, entonces $\int (\varphi_1 - \varphi_2)dg \geq 0$; y, por lo tanto $\int (\varphi_1 - \varphi_2)dg = \int (\varphi_1)dg - \int (\varphi_2)dg \geq 0$.

(2). Como φ es continua y G es compacto, existe $s\in\mathbf{R}$, $s \geq 0$ tal que $|\varphi(g)| \leq \sup\{|\varphi(g)|\}_{g\in G} = s$, $-s \leq \varphi(g) \leq s$. Por tanto $\int(\varphi(g))dg \leq \int s dg = s\int dg = s$, y análogamente, $-s \leq \int\varphi(g)dg$. Por tanto, $|\int(\varphi)dg| \leq s = \sup\{|\varphi(g)|\}_{g\in G}$.

2.4.Teorema: Sea $\varphi: G \times A \to \mathbf{R}$ continua, con A un espacio topológico. La función $F:A \to \mathbf{R}$ definida por

$$F(a) = \int \varphi(g,a)dg \quad \text{para todo } a \in A.$$

es continua.

<u>*PRUEBA:*</u> Se probará que dada una vecindad V de F(a), existe U, vecindad de a, tal que $F(U) \subset V$. Sea $a\in A$ y $\varepsilon > 0$. Puesto que φ es continua en (g, a) para cada $g\in G$. Dada la vecindad $(\varphi(g, a)-\varepsilon, \varphi(g, a)+\varepsilon)$ de $\varphi(g, a)$ en $\mathbf{R}$, existe una vecindad W de (g, a), tal que $\varphi(W) \subset (\varphi(g, a)-\varepsilon, \varphi(g, a)+\varepsilon)$. Sean V_g, vecindad de g en G, y $Ua_{(g)}$, vecindad de a en A, tales que $W \supset V_g \times Ua_{(g)}$. Por tanto, $\varphi(V_g \times Ua_{(g)}) \subset (\varphi(g, a)-\varepsilon, \varphi(g, a)+\varepsilon)$.

Puesto que $\{V_g\}_{g\in G}$ es una cubierta de G y G es compacto, se tiene que $G = \bigcup_{i=1}^{n} V_{g_i}$ para ciertas $g_1, \ldots, g_n \in G$. Consideremos la vecindad $U = \bigcap_{i=1}^{n} Ua_{(g_i)}$ de a. Entonces, para toda $g\in G$ y $b\in U$, $\varphi(g, b) \in \varphi(V_{g_i} \times Ua_{(g_i)}) \subset (\varphi(g, a)-\varepsilon, \varphi(g, a)+\varepsilon)$. Por tanto para U vecindad de $a\in A$, se tiene $|\varphi(g, b) - \varphi(g, a)| < \varepsilon$. Así, $|F(b) - F(a)| = |\int(\varphi(g,b) - \varphi(g,a))dg| \leq \sup\{|\varphi(g,b) - \varphi(g,a)|\}_{g\in G} < \varepsilon$.

***2.5 Lema** : Sea X un G-espacio. Si $f: X \to R$ es una función continua,*

$$F(x) = \int f(gx)dg$$

define una función continua de X en R, <u>invariante</u>, es decir, $F(hx)=F(x)$ para toda $h\in G$. Y si S es un subespacio invariante de X y $f(S) \subset J$ intervalo acotado, entonces $F(S) \subset J$.

<u>*PRUEBA*</u>: Del teorema 2.1(c) se sigue que $F(hx) = \int f(hgx)dg = \int f(gx)dg = F(x)$,para toda $h\in G$.La continuidad de F está probada en el teorema anterior para φ la composición $(g, x) \mapsto gx \mapsto f(gx)$. Ahora supongamos que $a \le f(s) \le b$ para cada $s\in S$. Por la proposición 2.3(1) se tiene

$$a = \int a dg \le \int f(gs)dg \le \int b dg = b.$$

Entonces $a \le F(s) \le b$, para todo $s\in S$.

Sea d una métrica para X un G-espacio metrizable d es <u>invariante</u> si $d(gx,gy) = d(x,y)$ para todo $g\in G$, es decir, el homeomorfismo $x \mapsto gx$ bajo θ_g es una isometria para todo $g\in G$.

***2.6 Teorema** : Sea X un G-espacio metrizable. Entonces existe una métrica d invariante para X consistente con su topologia. Además para $p,q \in X/G$*

$$\tilde{d}(p,q) = \inf\{d(x,y) : x \in \pi_0^{-1}(p), y \in \pi_0^{-1}(q)\}$$

es una métrica en X/G que induce la topologia cociente de X/G.

<u>*PRUEBA*</u>: Sea ρ cualquier métrica consistente con la topología de X. Para x, y puntos de X definamos

$$d(x, y) = \sup(\rho(gx, gy))_{g\in G}.$$

Fácilmente se prueba que d es una métrica invariante en X. Esto último porque

$$d(hx, hy) = \sup\{ \rho(ghx, ghy)\}_{g \in G} = d(x, y).$$

Lo que no es inmediato, y probaremos a continuación, es que d y ρ generan la misma topologia. La demostración consiste en mostrar para cualquier sucesión de puntos (x_n) en X que (x_n) converge a x_0 en (X, d) si y sólo si (x_n) converge a x_0 en (X, ρ).

Como $\rho(x, y) \leq d(x, y)$ entonces claramente $x_n \to x_0$ en (X, d) implica que $x_n \to x_0$ en (X, ρ).

Supongamos ahora que $x_n \to x_0$ en (X, ρ). Dado $\varepsilon > 0$ elegimos vecindades abiertas O_g de g y $V_g = V^{\rho}_{\delta(g)}(x_0)$ de x_0 tal que $\theta(O_g \times V_g) = O_g\, V_g \subset V^{\rho}_{\varepsilon/2}(gx_0) := \{y \in X : \rho(y, gx_0) < \varepsilon/2\}$. Por tanto para cada $h \in O_g$ y x en X tal que $\rho(x, x_0) < \delta_{(g)}$ se tiene que $\rho(hx, gx_0) < \varepsilon/2$. Por otro lado, por la compacidad de G, se tiene $G = \bigcup_{i=1}^{n} O_{g_i}$. Sea $\delta = ½ \min\{ \delta_{(g_1)}, \ldots, \delta_{(g_n)} \}$. Para esta $\delta > 0$, existe N tal que $\rho(x_n, x_0) < \delta$ para cada $n \geq N$. Por consiguiente, para todo g en G, como g está en O_{g_i} para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\rho(x_n, x_0) < \delta \leq \delta(g_i)$ para cada $n \geq N$, así que $\rho(gx, g_ix_0) < \varepsilon/2$. De donde, $\rho(gx_n, gx_0) \leq \rho(gx_n, g_ix_n) + \rho(g_ix_n, gx_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Y hemos probado que (x_n) converge a x_0 en (X, d).

Ahora probaremos que $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \inf\{d(x,y) : x \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{x}), y \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{y})\}$ *para* $\tilde{x}, \tilde{y} \in X/G$, es una métrica. Es claro que $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{x}) = 0$, $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq 0$, $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{x})$ y $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{y})$. Además, si $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, puesto que $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \inf\{d(x,y) : x \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{x}), y \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{y})\}$ y las órbitas $\pi_0^{-1}(\tilde{x})$, $\pi_0^{-1}(\tilde{y})$ son compactas, se tiene $d(x', y') = 0$ para $x' \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{x}), y' \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{y})$, lo cual implica $\pi_0^{-1}(\tilde{x}) = \pi_0^{-1}(\tilde{y})$. De donde $\tilde{x} = \tilde{y}$.

Para probar que $\tilde{d}$ induce la topología cociente de X/G, bastará mostrar que $\pi_\theta : X \to (X/G, \tilde{d})$ es continua y abierta. Pero esto se sigue de la igualdad

$$\pi_\theta(V_\varepsilon^d(x)) = V_\varepsilon^{\tilde{d}}(\tilde{x}), \quad para\ toda\ x \in \pi^{-1}(\tilde{x})$$

que a continuación probamos.

Como $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) \leq d(x,y)$, *para toda* $x \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{x}), y \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{y})$ la proyección canónica disminuye la distancia. Esto implicaría $\pi_\theta(V_\varepsilon^d(x)) \subset V_\varepsilon^{\tilde{d}}(\tilde{x})$, para toda $x \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{x})$. Falta probar que $V_\varepsilon^{\tilde{d}}(\tilde{x}) \subset \pi_\theta(V_\varepsilon^d(x))$. Ahora si $\tilde{y} \in V_\varepsilon^{\tilde{d}}(\tilde{x})$, $\inf\{d(x,y): x \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{x}), y \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{y})\} < \varepsilon$.

Como $\pi_\theta^{-1}(\tilde{x})$ y $\pi_\theta^{-1}(\tilde{y})$ son órbitas compactas, existen $x_0 \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{x}), y_0 \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{y})$ tales que $d(x_0, y_0) = \inf\{d(x,y): x \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{x}), y \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{y})\} = \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) < \varepsilon$; pero $\pi_\theta(x_0) = \tilde{x}$. Entonces existe $g \in G$ tal que $x = gx_0$ y como d es invariante, $d(x_0, y_0) = d(gx_0, gy_0) = d(x, gy_0) < \varepsilon$. Así, también se cumple $y = gy_0 \in \pi_\theta^{-1}(\tilde{y})$ y $d(x, y) < \varepsilon$, por lo que $y \in V_\varepsilon^d(x)$. Por consiguiente, $V_\varepsilon^{\tilde{d}}(\tilde{x}) \subset \pi_\theta(V_\varepsilon^d(x))$.

Cada cubierta abierta localmente finita de cualquier espacio metrizable X admite una partición de la unidad subordinada. En caso de que X sea un G-espacio metrizable con G un grupo compacto, consideraremos a $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta invariante localmente finita de X, esto es, para cada $\lambda \in \Lambda$, U_λ es invariante.

2.7 Definición .- *Una familia de funciones continuas $\Phi = \{\varphi_\lambda : X \to I\}$ es una* ***partición de la unidad subordinada*** *a $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, cubierta abierta de un G-espacio metrizable X si :*

(i). Cada punto tiene una vecindad V tal que $\varphi_\lambda(V) = 0$ para toda $\lambda \in \Lambda$ salvo para un número finito de índices.

(ii). $\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x) = 1$, *para cada* $x\in X$.

(iii). $\varphi_\lambda(X - U_\lambda) = 0$, *para cada* $\lambda\in\Lambda$.

Diremos que la partición de la unidad Φ es invariante si para cada $\lambda\in\Lambda$, $\varphi_\lambda : X \to I$ es invariante ($\varphi_\lambda(gx) = \varphi_\lambda(x)$ para todo $g\in G$).

***2.8 Proposición** : Sea X un G-espacio métrico y $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta invariante de X. Entonces existe una partición de la unidad invariante $\{\varphi_\lambda : X \to I\}_{\lambda\in\Lambda}$ subordinada a $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.*

PRUEBA: Consideremos a $\{\pi_0(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Sabemos por la proposición 1.5 del capítulo I, que π_0 es continua y abierta. Consecuentemente, $\{\pi_0(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es cubierta abierta del espacio X/G. Mostraremos que es localmente finita. Sea p un punto en X/G. Entonces, para cada punto x en $\pi_0^{-1}(p)$, por ser $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ localmente finita, existe una vecindad abierta N_x de x tal que $N_x \cap U_\lambda = \emptyset$ si λ no pertenece al conjunto finito de índices Λ_x. Consideremos a la vecindad abierta $N = \bigcup_{x\in\pi_0^{-1}(p)} N_x$ que contiene a la órbita $\pi_0^{-1}(p)$, así que $N \cap U_\lambda = \emptyset$ si $\lambda \notin \bigcup_{x\in\pi_0^{-1}(p)}\Lambda_x = \Lambda'$. Por ser compacta la órbita, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que $\pi_0^{-1}(p) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i} = M \subset N$. Entonces $\pi_0(M)$ es vecindad de p tal que $\pi_0(M) \cap \pi_0(U_\lambda) = \emptyset$ si $\lambda\notin\Lambda'$ (puesto que $\pi_0^{-1}(\pi_0(M) \cap \pi_0(U_\lambda)) = M \cap U_\lambda = \emptyset$ si $\lambda\notin\Lambda'$). Por la proposición 2.6, tenemos que X/G es metrizable. Entonces existe $\{\psi_\lambda : X/G \to I\}_{\lambda\in\Lambda}$ partición de la unidad subordinada a $\{\pi_0(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Sea $\varphi_\lambda = \psi_\lambda\,\pi_0 : X \to I$. Entonces se obtiene la partición de la unidad, $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, buscada. En efecto :

(i). Obsérvese que cada punto de X/G tiene una vecindad W tal que $\psi_\lambda(W) = 0$ para toda $\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Si $x \in V = \pi_0^{-1}(W)$, entonces $\varphi_\lambda(V) = 0$ para toda $\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(ii). $\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda}\psi_\lambda(\pi_0(x)) = 1$ para cada $x \in X$.

(iii). $\varphi_\lambda(X - U_\lambda) = \psi_\lambda \circ \pi_0(X - U_\lambda) = \psi_\lambda(X/G - \pi_0(U_\lambda)) = 0$ para cada $\lambda \in \Lambda$.

3. GRUPO DE LIE.

3.1 Definición.- *Si X es un espacio topológico, una carta es un homeomorfismo $\varphi_\alpha: X_\alpha \to V_\alpha$ donde V_α es un abierto en R^n y X_α es abierto en X.*

3.2 Definición.- *Una variedad diferenciable(C^∞) de dimensión n es un par (X,Φ), donde X es un espacio de Hausdorff y $\Phi = \{\varphi_\alpha: X_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{a}}$ es una colección de cartas que satisface*

(i) La colección $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{a}}$ es cubierta abierta de X.

(ii) Para cualesquiera $\alpha,\beta \in \mathfrak{a}$, si $X_\alpha \cap X_\beta \neq \varnothing$, la función $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ del abierto $\varphi_\beta(X_\alpha \cap X_\beta)$ de R^n a R^n es diferenciable (C^∞).

iii) La colección Φ es maximal respecto a (ii), esto es: si φ es una carta tal que para cada $\varphi_\alpha \in \Phi$ con dominio$\varphi \cap$ dominio$\varphi_\alpha \neq \varnothing$ y las funciones $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ y $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ son diferenciables(C^∞), entonces $\varphi \in \Phi$

La colección de cartas Φ que cumple (i) y (ii) es un atlas de X y si cumple también (iii) es un atlas maximal. Φ es la estructura diferencial de la n-variedad X.Cualquier atlas siempre está contenido en un único atlas maximal.

Sean (X, Φ) y (Y, Ψ) n-variedades. Decimos que una función continua $f: (X, \Phi) \to (Y, \Psi)$ es diferenciable si para toda $\varphi_\alpha: X_\alpha \to \mathbf{R}^n$, carta de Φ, y $\psi_\beta: Y_\beta \to \mathbf{R}^n$, carta de Ψ, la función $\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(X_\alpha \cap f^{-1}(Y_\beta)) \to \psi_\beta(Y_\beta)$ es diferenciable (de clase C^∞).

3.3 Definición.- *Un grupo de Lie es un grupo topológico de Hausdorff G con una estructura de n-variedad diferenciable, tal que las operaciones μ, ι son diferenciables (de clase C^∞), donde la estructura diferenciable en $G\times G$ es la que se obtiene del atlas $\{\varphi_\alpha\times\varphi_\beta : X_\alpha\times X_\beta \to V_\alpha\times V_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in\alpha\times\alpha}$ inducido por la estructura diferenciable $\{\varphi_\alpha : X_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha\in\alpha}$ de G.*

Las cartas en la estructura diferenciable pueden darse localmente alrededor de la identidad e en G: basta considerar el homeomorfismo traslación $g \mapsto hg$ que transforma una vecindad abierta U de e en G sobre la vecindad abierta hU de h, para cada $h \in G$. Es más, un grupo topológico de Hausdorff G es un grupo de Lie si existe una vecindad abierta U de e en G y un homeomorfismo $\chi : U \to W$, W subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, para algún n, con $\chi_i(g)$ la i-ésima coordenada de $\chi(g)\in\mathbf{R}^n$, $g\in U$, tal que: $\chi_i(e) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, y existen funciones C^∞ reales φ_i y ψ_i definidas en alguna vecindad del $0\in\mathbf{R}^{2n}$ y del $0\in\mathbf{R}^n$ respectiva que cumplen :

$$\chi_i(gh) = \varphi_i(\chi_1(g),\ldots,\chi_n(g),\chi_1(h),\ldots,\chi_n(h))$$

para toda $g,h\in V$, vecindad abierta de e, con $V\subset U$, y

$$\chi_i(g^{-1}) = \psi_i(\chi_1(g^{-1}),\ldots,\chi_n(g^{-1}))$$

para toda $g \in W$ vecindad de e con $W = W^{-1} \subset U$. Esto implica que las operaciones de grupo son diferenciables alrededor de e.

4.TUBOS Y REBANADAS.

En esta sección definiremos, siguiendo a Bredon ([Bre] cap II, secciones 4 y 5), los conceptos de tubo y rebanada usando el producto torcido.

Dado un subgrupo H de G y A un H-espacio, definimos la acción de H en $G \times A$ como sigue:

$$h(g, a) = (gh^{-1}, ha), \quad h, g \in G \ \text{ y } \ a \in A$$

El espacio de órbitas $(G \times A)/H$ se denota $G \times_H A$ y la imagen de $(g, a) \in G \times A$ respecto a la proyección canónica $G \times A \to G \times_H A$ la denotaremos $[g, a]$. Por definición $[g, a] = [gh^{-1}, ha]$. Esto implica que $[gh, a] = [g, ha]$, ya que $h(gh, a) = (ghh^{-1}, ha) = (g, ha)$.

El espacio $G \times_H A$, llamado <u>producto torcido</u>, es a su vez un G-espacio con la acción

$$g'[g, a] = [g'g, a] \ , \ g', g \in G \ \text{ y } \ a \in A.$$

4.1 Definición.- *Una órbita P de un G-espacio es de <u>tipo (H)</u> $= \{gHg^{-1} : g \in G\}$, la clase de todos los subgrupos conjugados a H en G, si $\{G_x : x \in P\} = (H)$.*

4.2 Definición.- *Sea X un G-espacio con G compacto y $P \subset X$ una órbita de tipo (H). <u>Un tubo alrededor de P</u> es un homeomorfismo G-equivariante*

$$\varphi : G\times_H A \to W\subset X$$

para A un H-espacio, donde $\varphi(G\times_H A)=W$ es una vecindad abierta invariante de P en X, llamada conjunto tubular.

Obsérvese que en la situación anterior cada G-órbita en $G\times_H A$ contiene un punto de la forma [e, a]. Si $a\in A$ y $x = \varphi([e, a])\in P$, entonces $P = G(x)$, y como P es del tipo (H), G_x es conjugado a H. Pero por ser φ homeomorfismo equivariante, $G_x = G_{[e,a]}$ Por otro lado, $G_{[e,a]} = H_a$ porque si $g[e, a] = [g, a]$ es igual a [e, a] si y sólo si $g = eh^{-1}$ y $a = ha$ para algún $h\in H$, esto equivale a $g = h^{-1}\in H_a$. Entonces $G_x = H_a \subset H$ y como G_x es conjugado a H, $G_x = H$.

Ahora sea $i_e : A \to G\times_H A$, $a \mapsto [e, a]$ es un encaje H-equivariante. La composición $\varphi\circ i_e : A \to X$ es también un encaje H-equivariante, cuando φ es un tubo. Por tanto no se pierde generalidad al identificar el H-espacio A con el conjunto H-invariante $\varphi([e, A])$ de X, esto es : $A = \varphi([e, A]) \subset X$. Con lo anterior podemos definir lo siguiente.

4.3 Definición.- *Sea X un G-espacio y $x\in X$. Un subconjunto S de X es una rebanada en x, si $x\in S$, $G_x(S) = S$ y la función $\varphi : G\times_{G_x} S \to X$ dada por $[g, s]\mapsto gs$, es un tubo alrededor de G(x).*

4.4 Teorema.- *Sean X un G-espacio , $x\in S\subset X$ y $H = G_x$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *Existe un tubo $\varphi : G\times_H A \to X$ alrededor de G(x) con $\varphi([e, A]) = S$.*

(2) *S es una rebanada en x .*

(3) *GS es una vecindad abierta de G(x) y existe una retracción equivariante $r: GS \to G(x)$ tal que*

$r^{-1}(x)=S.$

PRUEBA: (1) $\Rightarrow$ (2) Suponiendo, como antes se dijo, que $A = S$, entonces claramente S es una rebanada. Para probar (2) $\Rightarrow$ (3), consideremos una rebanada S en x. Por definición, $\varphi : G\times_H S \to GS \subset X$ es un tubo alrededor de G(x) con $\varphi([g, s]) = gs$. Por otro lado, $[g, s] \mapsto gx$ define una función $\gamma : G\times_H S \to G(x)$. Esta función está bien definida ya que si $[g, s] = [g', s']$, por definición $g' = gh^{-1}$ para alguna $h \in H = G_x$. Entonces $g'x = gh^{-1}x = gx$. Su continuidad resulta de la continuidad de la función $(g, s) \mapsto gx$ que es la composición de γ precedida por la proyección natural π de $G\times S$ sobre $G\times_H S$. Entonces existe una función r definida por el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} G\times_H S \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & GS \arrow[dl, "r"] \\ & G(x) & \end{tikzcd}$$

Como $r = \gamma\circ\varphi^{-1} : GS \to G(x)$, $r(gs) = gx$ para cada $g\in G$ y $s\in S$ luego r es una retracción, r es equivariante, ya que si $z\in GS$ es tal que $gs = z$, con $g\in G$ y $s\in S$, para cada $g'\in G$, $r(g'z) = r(g'gs) = g'gx = g'r(gs) = g'r(z)$. Por último se tiene, para cada $s\in S$, $r(s) = \gamma([e, s]) = x$. Entonces $r(S) = x$ por lo que $S\subset r^{-1}(x)$. Luego consideremos $gs\in r^{-1}(x)$ con g en G y s en S. Al aplicar r obtenemos $x = r(gs) = gr(s) = gx$. Esto implica que $g\in G_x$. Entonces $gs\in S$, porque $G_xS = S$, y así $r^{-1}(x)\subset S$. Por tanto, $S = r^{-1}(x)$.

(3)$\Rightarrow$(1) GS es vecindad abierta de G(x), órbita en X. Consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} G\times S \arrow[r, "\theta|_{G\times S}"] \arrow[d, "\pi"'] & GS \arrow[d, "r"] \\ G\times_H S \arrow[r, "\gamma"] & G(x) \end{tikzcd}$$

Definamos $\varphi: G\times_H S \to GS$ por $\varphi([g, s]) = gs$. Veamos que φ está bien definida. Consideremos $[g', s'] = [g, s]$ con $g, g'\in G$ y $s, s'\in S$. Entonces $g' = gh^{-1}$ y $s' = hs$ con $h\in H$. Luego $g's' = (gh^{-1})(hs) = gs$, por lo que φ está bien definida. La continuidad de φ se sigue de la continuidad de $\varphi\circ\pi = \theta|_{G\cdot S}$. Además, φ es sobre. Veremos que φ es inyectiva. Tomemos $g, g'\in G$ y $s, s'\in S$, tales que si $\varphi([g, s]) = \varphi([g', s'])$, $gs = g's'$. En consecuencia $s = g^{-1}g's'$. Si aplicando la retracción, se obtiene $r(g^{-1}g's') = r(s) = x$ y $g^{-1}g'r(s') = g^{-1}g'x$ por consiguiente $g^{-1}g'x = x$ y $g^{-1}g'\in G_x = H$. Por todo sea $h = g^{-1}g'$, entonces $g' = gh$ y $s = hs'$ implica $g = g'h^{-1}$ y, por lo tanto, $[g, s] = [g', s']$. Por último, φ es cerrada, puesto que para cada C cerrado en $G\times_H S$, $\varphi(C) = \varphi\pi(\pi^{-1}(C)) = \theta(\pi^{-1}(C))$ es cerrado, ya que $\pi^{-1}(C)$ es cerrado y θ es cerrada.

Utilizando el concepto de H-kernel es el desarrollado por Palais [Pa], un conjunto tubular, o imagen de un tubo, es de la forma GS con S un H-kernel.

4.5 Definición.- *Sea X un G-espacio y H un subgrupo cerrado de G. Un conjunto $S\subset X$ es un* ***H-kernel*** *respecto a GS si:*

(a). GS es abierto en X.

(b) S es cerrado en GS.

(c) S es invariante respecto a H.

(d) Si $g\in G-H$, $gS\cap S = \varnothing$.

4.6 Teorema: *Sean X un G-espacio y $x\in S\subset X$. Entonces S es una rebanada en x si y sólo si $x\in S$ y S es un G_x-kernel.*

<u>*PRUEBA:*</u> *$\Leftarrow$)* La función constante c: $S \to \{x\}\subset X$ satisface que para s, $gs\in S$ $c(gs) = gc(s)$, porque si s y gs pertenecen a S, (d) implica que $g\in G_x$. En consecuencia $gc(s) = gx = x = c(gs)$. Por lo anterior la función constante satisface las condiciones de la proposición 1.2 capitulo II. Por tanto existe una única extensión equivariante r: $GS \to X$ de la función c. Claramente $r(GS) = Gr(S) = G(x)$. Luego r: $GS \to G(x)$ es una retracción. Veremos que $r^{-1}(x) = S$. En efecto, se tiene que $S = c^{-1}(x) \subset r^{-1}(x)$. Ahora, si $hs\in GS$ con $r(hs) = x$, entonces $x = hr(s) = hc(s) = hx$. Eesto implica que $h\in G_x$. Por (3) $hs\in G_xS = S$ y así $S = r^{-1}(x)$. La función r satisface las condiciones del inciso (3) del teorema 4.4 que aunado a la condición (a) implica que S es una rebanada en x.

$\Rightarrow$) Por hipótesis S es una rebanada. Entonces cumple (3) del teorema 4.4, esto es, cumple (a) de la definición 4.5 y existe r: $GS \to G(x)$, retracción equivariante, con $S = r^{-1}(x)$. De aquí se infiere (b). La condición (c) se cumple puesto que si $gs\in S$, entonces $x = r(gs) = gr(s) = gx$. De aquí que $g\in G_x$ y por consiguiente $G_xS = S$. Por último, para ver que cumple (d) sea $z\in gS\cap S$, entonces $z = gs = s'$ con s y s' en S. Aplicando r se tiene $gx = gr(s) = r(gs) = r(s') = x$. Por tanto $g\in G_x$.

4.7 Teorema: *Sea G un grupo de Lie compacto. Existe entonces un tubo alrededor de una órbita de un G-espacio completamente regular.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [Bre] página 86, pero aquí la omitiremos porque utiliza resultados de geometría diferencial los cuales no son considerados en este trabajo. Sin embargo, como una consecuencia de la existencia de tubos, se tiene el corolario siguiente :

4.8 Corolario: *Sea G grupo de Lie compacto. Si P es una órbita de un G-espacio X completamente regular, entonces, para una vecindad U de e en G y algún punto $x\in X$, existe una vecindad V de x tal que para algún $y\in V$, existe $u\in U$ con $u^{-1} G_y u \subset G_x$.*

PRUEBA: Supongamos que P = G(x). Por el teorema anterior, existe una rebanada S en x que por el teorema 4.4implica que , GS es abierto en X y existe una retracción r: GS → G(x) tal que $r^{-1}(x) = S$. Entonces V = US es abierto en GS y, por tanto, V es vecindad abierta de x en X. Si $y\in V$, y = us con $u\in U$ y $s\in S$. Luego $G_y = uG_su^{-1}$, por la proposición 1.8 del capítulo I, así que $u^{-1}G_yu = G_s$. Por otro lado, la equivariancia de r y la proposición 3.5 del capitulo I implican $G_s\subset G_{r(s)}$. Pero como $r(S) = x$, se tiene $G_{r(s)} = G_x$ y de aquí que se cumpla el resultado $u^{-1}G_yu \subset G_x$.

CAPITULO III

1. LEMAS PRELIMINARES.

Para enunciar el teorema principal 2.1 es necesario hacer uso de los siguientes conceptos de la teoría de retractos. En particular trabajaremos con la clase G-$\mathcal{M}$ de G-espacios metrizables.

1.1 Definición.- *Un G-espacio X es llamado un extensor absoluto (extensor absoluto de vecindad) para G-$\mathcal{M}$ y lo escribiremos como $X \in G\text{-}AE$ ($X \in G\text{-}ANE$), si para cualquier $Z \in G\text{-}\mathcal{M}$ y cualquier subconjunto A cerrado invariante de Z, cada función equivariante $f: A \to X$ puede ser extendida a una función equivariante $F: Z \to X$ ($F: U \to X$ para alguna vecindad invariante U de A en Z).*

Un G-espacio X es un retracto absoluto (retracto absoluto de vecindad) para G-$\mathcal{M}$ y lo escribiremos $X \in G\text{-}AR$ ($X \in G\text{-}ANR$), si $X \in G\text{-}\mathcal{M}$ y para cualquier encaje cerrado equivariante $i: X \to Y$, con $Y \in G\text{-}\mathcal{M}$, la imagen $i(X)$ es un retracto equivariante de Y (retracto equivariante de alguna vecindad abierta invariante en Y).

1.2 Definición.- *Dados G-espacios X, Y y H tal que $H : X \times I \to Y$, se dice que H es una homotopía equivariante si es equivariante respecto a la acción diagonal de G en $X \times I$, donde G actúa trivialmente en I, esto es :*

$$g(x,t) = (gx,t) \;\; y \;\; H(gx,t) = gH(x,t).$$

Un grupo G actúa linealmente en un espacio vectorial topológico (real) L si

$$g(sv_1 + tv_2) = sgv_1 + tgv_2 \text{ para cualesquiera } v_1, v_2 \in L,\; s,t \in \mathbf{R} \text{ y } g \in G.$$

A L se le llama brevemente un G-espacio vectorial.

La prueba del teorema 2.1 se fundamenta en los conceptos vistos en el capítulo II (tubos y rebanadas), además del concepto de cubierta G-canónica y algunos lemas desarrollados en este capítulo. Comenzaremos definiendo algunos conceptos mencionados anteriormente.

1.3 Definición.- *Una cubierta de un G-espacio es invariante o tubular si consiste de conjuntos invariantes ó tubulares, respectivamente.*

1.4 Lema: *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio paracompacto. Entonces toda cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ invariante o tubular de X tiene un refinamiento abierto localmente finito invariante o tubular.*

PRUEBA: Considerando la proyección canónica $\pi_0 : X \longrightarrow X/G$, el espacio de órbitas X/G es la imagen perfecta del paracompacto X, ya que π_0 es continua, abierta y perfecta. De manera que X/G es paracompacto ([Du] Cap. XI, sec. 5, teo. 5..3) . Entonces la cubierta abierta $\{\pi_0(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, de X/G, tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Veamos que la cubierta abierta $\{\pi_0^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, del espacio X, es localmente finita además es refinamiento de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Es más, se puede obtener éste refinamiento de la forma $\{\pi_0^{-1}(W_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, donde $\pi_0^{-1}(W_\alpha) \subset U_\alpha$ para cada $\alpha\in\mathcal{A}$, de manera siguiente :

Para cada $\lambda\in\Lambda$ eliga un elemento $\alpha(\lambda)$ de $\mathcal{A}$, de manera que $V_\lambda \subset \pi_0(U_{\alpha(\lambda)})$. Sea $W_\alpha = \cup\{V_\lambda : \alpha(\lambda) = \alpha\}$ claramente W_α es un abierto contenido en $\pi_0(U_\alpha)$. Consideremos a $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que es refinamiento abierto localmente finito de $\{\pi_0(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. En efecto, $\cup\mathcal{W} = \cup\mathcal{V} = X/G$ y, si $\tilde{x} \in X/G$, existe N vecindad de $\tilde{x}$ tal que $N \cap V_\lambda = \emptyset$ si $\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Entonces $N \cap W_\alpha = \cup\{N \cap V_\lambda : \lambda \in \Lambda$, con $\alpha(\lambda) = \alpha\} = \emptyset$, si $\alpha \neq \alpha(\lambda_1), \ldots, \alpha(\lambda_n)$. La cubierta abierta $\{\pi_0^{-1}(W_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ claramente es invariante, que refina a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, pues $W_\alpha \subset \pi_0(U_\alpha)$, y como U_α es invariante, $\pi_0^{-1}(W_\alpha) \subset \pi_0^{-1}\pi_0(U_\alpha) = U_\alpha$. Además es localmente finita (pues si $x \in X$, $\pi_0(x) = \tilde{x}$ y N es la vecindad de $\tilde{x}$, que sólo intersecta a $W_{\alpha_1}, \ldots, W_{\alpha_n}$, entonces $\pi_0^{-1}(N)$ es vecindad de x, pero de $\pi_0^{-1}(N) \cap \pi_0^{-1}(W_\alpha) = \pi_0^{-1}(N \cap W_\alpha)$, se tiene que sólo intersecta a $\pi_0^{-1}(W_{\alpha_1}), \ldots, \pi_0^{-1}(W_{\alpha_n})$).

Consideremos la cubierta abierta $\{\pi_0^{-1}(W_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ del espacio X. Como antes, resulta que es refinamiento invariante localmente finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$.

Si los elementos de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ son tubulares, $U_\alpha = GS_\alpha$ con S_α un H_α-kernel (con $H_\alpha = G_{x_\alpha}$ y $x_\alpha \in S_\alpha$).

Probaremos que la cubierta $\{\pi_0^{-1}(W_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ es tubular. Sea $Q_\alpha = \pi_0^{-1}(W_\alpha) \cap S_\alpha$, veamos que Q_α es un H_α-kernel, aplicando la definición 4.5 y el teorema 4.6 del capítulo II ;

(a). GQ_α abierto :

Es una consecuencia de que $GQ_\alpha = G(\pi_0^{-1}(W_\alpha) \cap S_\alpha) = \pi_0^{-1}(W_\alpha) \cap GS_\alpha = \pi_0^{-1}(W_\alpha)$, esto último porque $\pi_0^{-1}(W_\alpha) \subset U_\alpha = GS_\alpha$.

(b). Q_α es cerrado en GQ_α :

Como S_α es cerrado en GS_α, existe un conjunto cerrado E de X tal que $S_\alpha = E \cap GS_\alpha$. Entonces $Q_\alpha = \pi_0^{-1}(W_\alpha) \cap S_\alpha = \pi_0^{-1}(W_\alpha) \cap E \cap GS_\alpha = \pi_0^{-1}(W_\alpha) \cap E$; pero $\pi_0^{-1}(W_\alpha) = GQ_\alpha$. Por tanto, Q_α es cerrado en GQ_α.

(c). $H_\alpha Q_\alpha = Q_\alpha$:

Se tiene $Q_\alpha \subset H_\alpha Q_\alpha$, puesto que $e \in H_\alpha$. Para ver que $H_\alpha Q_\alpha \subset Q_\alpha$, se observa que $H_\alpha Q_\alpha \subset H_\alpha S_\alpha = S_\alpha$ y $H_\alpha Q_\alpha \subset H_\alpha \pi_0^{-1}(W_\alpha) = \pi_0^{-1}(W_\alpha)$. De ambos, se obtiene $H_\alpha Q_\alpha \subset \pi_0^{-1}(W_\alpha) \cap S_\alpha = Q_\alpha$.

(d). $gQ_\alpha \cap Q_\alpha = \varnothing$ para cada $g \in G\text{-}H_\alpha$:

Si $g \in G\text{-}H_\alpha$, $gS_\alpha \cap S_\alpha = \varnothing$ y $gQ_\alpha \cap Q_\alpha \subset gS_\alpha \cap S_\alpha = \varnothing$. Por tanto, se cumple (d).

Hemos probado que $Q_\alpha = \pi_0^{-1}(W_\alpha) \cap S_\alpha$ es un H_α-kernel y, como se vió en (a), $GQ_\alpha = \pi_0^{-1}(W_\alpha)$. Por tanto, $\pi_0^{-1}(W_\alpha)$ es tubular.

1.5 Definición.- *Sea U un abierto invariante de un G-espacio X y $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta tubular de U, con S_λ un H_λ-kernel. Se dice que $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta G-canónica de U respecto a X si:*

(1). $\{GS_\lambda\}$ es localmente finita.

(2). Para algún $\lambda\in\Lambda$ existe un punto $x\in U$ tal que $H_\lambda = G_x$.

(3). Para algún punto $a\in X\text{-}U$ y alguna vecindad V_a de a en X, existe una vecindad $W_a \subset V_a$ de a en X, tal que si $g\in G$ y $gS_\lambda \cap W_a \neq \varnothing$, entonces las condiciones siguientes se cumplen:

(a). $gS_\lambda \subset V_a$.

(b). Existe un elemento $h\in G$, tal que $ha\in V_a$ y $H_\lambda \subset g^{-1}G_{ha}g$.

1.6 Lema: *Sea G un grupo compacto de Lie. Para cada subconjunto abierto invariante U de un G-espacio metrizable X, existe una cubierta G-canónica de U respecto a X.*

PRUEBA: Si $U = X$, entonces la cubierta tubular $\mathcal{U}$ de X que se obtiene de un tubo alrededor de cada órbita, tiene un refinamiento localmente finito tubular $\{GS_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Claramente se tiene :

(1) $\{GS_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita.

(2) Cada GS_α es tubular, por lo que para cada $\alpha\in\mathcal{A}$, existe $x\in S_\alpha$ con $G_x = H_\alpha$, es decir, S_α es una rebanada en x.

(3) Como $X\text{-}X = \emptyset$, se cumplen las condiciones por vacuidad.

Por consiguiente , $\{GS_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una cubierta G-canónica de X.

Si $U \neq X$, consideremos una métrica invariante d en X ($d(gx, gy) = d(x, y)$ $\forall$ $g\in G$; $x, y\in X$). Esta existe por el teorema .2.6 del capítulo II. Sea $O(x, r)$ una bola abierta del espacio X con centro en el punto x y de radio r ($O(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}$). Si $x\in U$, definamos a $r_x = d(x, X\text{-}U)/4$.

Para cada órbita P contenida en U, elegimos $x\in P$ y una rebanada fija Q_x en el punto x. Tal rebanada existe como consecuencia del teorema 4.7 del capítulo II , ya que G es un grupo de Lie compacto y una vecindad tubular de P es de la forma GQ_x con Q_x una rebanada en x. Sea $R_x = Q_x \cap O(x, r_x)$. El diámetro de R_x es menor o igual a $2r_x$, ya que el diámetro de $O(x, r_x)$ es $2r_x$ y $R_x \subset O(x, r_x)$

Probaremos que R_x satisface (a), (b), (c) y (d) de la definición 4.3 de G_x-kernel:

(b). *R_x es cerrado en GR_x.*

Claramente , $R_x \subset GR_x \cap Q_x$. Ahora consideremos $y\in GR_x \cap Q_x$. Entonces $y = gz$ para algún $g\in G$ y $z\in R_x = Q_x \cap O(x, r_x)$. Por consiguiente, $y\in gQ_x \cap Q_x$ y $g\in G_x$. Como $d(x, z) < r_x$ y $d(x, z) = d(gx, gz) = d(gx, y) = d(x, y)$, se tiene $y\in O(x,r_x)$. Luego también se tiene que $y\in R_x$. Hemos probado

$R_x = GR_x \cap Q_x$, con Q_x cerrado en GQ_x. Por todo lo anterior, resulta que R_x es cerrado en GR_x.

(c). $R_x = G_x R_x$.

En efecto, resulta de:

$$G_xR_x = G_x(Q_x \cap O(x,r_x)) = \bigcup_{g\in G_x} g(Q_x \cap O(x,r_x)) = \bigcup_{g\in G_x} (gQ_x \cap gO(x,r_x)) = \bigcup_{g\in G_x} (Q_x \cap O(gx,r_x)) = Q_x \cap O(x,r_x) = R_x$$

(a). GR_x abierto en X.

Por la definición $R_x = Q_x \cap O(x, r_x)$, R_x es abierto en Q_x. Entonces $A_x = Q_x - R_x$ es cerrado en Q_x, por tanto en GQ_x, y como G es compacto, GA_x es cerrado en GQ_x. Si $\varnothing \neq g_1 R_x \cap g_2A_x$,

$\varnothing \neq g_2^{-1} g_1 R_x \cap A_x \subset g_2^{-1} g_1 R_x \cap Q_x$. Luego $g_2^{-1} g_1 \in G_x$ y, por (c), $g_2^{-1} g_1R_x = R_x$, obteniéndose $R_x \cap A_x \neq \varnothing$. En consecuencia, $GR_x \cap GA_x \neq \varnothing$. Por tanto, $GR_x = GQ_x - GA_x$ es abierto.

(d). Si $g\in G-G_x$, entonces $gR_x \cap R_x = \varnothing$.

En este caso, $gR_x \cap R_x = g(Q_x \cap O(x, r_x)) \cap (Q_x \cap O(x, r_x)) = (gQ_x \cap Q_x) \cap O(x, r_x) = \varnothing$, ya que Q_x es una rebanada en x.

Consideremos ahora la cubierta abierta tubular $\{GR_x\}_{x\in U'}$ de U, donde $U' \subset U$ y U' intersecta a cada órbita de U en un sólo punto x. Por el lema 1.4 esta cubierta de U admite un refinamiento abierto tubular localmente finito, $\{GS_x\}_{x\in U''}$, donde $x\in S_x \subset R_x$, $S_x = GS_x \cap R_x$ y S_x es un G_x-kernel para cada $x\in U'' \subset U'$. Obviamente, se satisfacen las condiciones (1) y (2) de la definición 1.5 de cubierta G-canónica de U. Veremos que se satisface (3) del capítulo III:

Sea $a\in X-U$ un punto y sea V_a vecindad del punto a. Puesto que $\theta : G\times X \rightarrow X$ es continua, entonces, dada V_a vecindad de a, como $\theta^{-1}(V_a)$ es vecindad del punto (e, a), existe E, vecindad de e, tal que

$E\times\{a\} \subset \theta^{-1}(V_a)$ y, por el corolario 4.8 del capítulo II, existe una vecindad $O(a, \varepsilon) \subset V_a$ del punto a tal que para cada punto $x \in O(a, \varepsilon)$, se puede encontrar un elemento $h \in E$ que satisface $G_x \subset hG_ah^{-1} = G_{ha}$. Si $W_a = O(a, \varepsilon/4)$, W_a es la vecindad buscada que cumple las condiciones del inciso (3). En efecto, si $gS_x \cap W_a \neq \varnothing$ para cada $x \in U''$, probemos (a) $gS_x \subset V_a$. Si $w \in gS_x \cap W_a$, se tiene $d(a, w) < \varepsilon/4$ y $w \in gS_x \subset gR_x$. Entonces $d(w, gx) \leq$ diámetro(gR_x) = diámetro(R_x) (por ser d invariante). Luego :

$$d(w, gx) \leq 2r_x = d(x, X\text{-}U)/2 = d(gx, X\text{-}U)/2$$

Como $a \in X\text{-}U$, se tiene $d(gx, X\text{-}U) \leq d(gx, a)$. Esto implica que

$$d(w, gx) \leq d(gx, a)/2$$

Por consiguiente, $d(a, gx) \leq d(a, w) + d(w, gx) < \varepsilon/4 + d(w, gx)/2$. De aqui que

$$d(a, gx) < \varepsilon/2$$

Por lo anterior, el diámetro$(gR_x) = d(gx, X\text{-}U)/2 \leq d(gx, a)/2 < \varepsilon/4$

Como debemos probar $gS_x \subset V_a$; mostraremos algo más, a saber, $gR_x \subset O(a, \varepsilon)$, pues $gS_x \subset gR_x$. Consideremos un punto z en gR_x. Entonces $d(a, z) \leq d(a, w) + d(w, z) < \varepsilon/4 +$ diámetro(gR_x), con $w \in gS_x \cap W_a$. En consecuencia

$$d(a, z) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Asi, $z \in O(a, \varepsilon)$; por tanto, $gR_x \subset O(a, \varepsilon) \subset V_a$. Además, como $gx \in gR_x \subset O(a, \varepsilon)$, debido a la forma como se eligió $O(a, \varepsilon)$, existe un $h \in E$ tal que $G_{gx} \subset G_{ha}$. Por consiguiente $G_x = g^{-1}G_{gx}g \subset g^{-1}G_{ha}g$. Ya que $ha \in V_a$, porque $E_a \subset V_a$, con esto se cumple (b) del inciso (3) de la definición 1.5 del capítulo III para $\{GS_x\}_{x \in U''}$.

1.7 Lema: *Sea $H \subset G$ subgrupo cerrado y S un H-kernel con respecto al G-espacio $X = GS$. Entonces existe una única función continua $\alpha : X \to G/H$ tal que $x \in gS$ si y sólo si $g \in \alpha(x)$. Además α es equivariante respecto a la acción de G en G/H por traslación izquierda.*

<u>PRUEBA</u>: Sea $H < G$ cerrado y S un H-kernel respecto a X. Para cada punto x en X, elegimos $g \in G$ tal que $x \in gS$. Entonces se afirma :

(1). g es único módulo H (si $x \in g'S$, $gH = g'H$).

(2). Definamos $\alpha : X \to G/H$ como $\alpha(x) = gH$, donde g es tal que $x \in gS$. α está bien definida y es continua.

(3). Si G actúa como traslación en G/H, α es equivariante.

Procedamos a probar las afirmaciones anteriores.

<u>**(1)**</u>. Como S es un H-kernel respecto a X se tiene, por definición $GS = X$. Para cada $x \in X$, elegimos $g_x \in G$ tal que $x \in g_x S$. El elemento g_x no esta determinado por x; pero la clase $\bar{g} = g_x H = \alpha(x)$ sí lo está porque si $x \in g_x S \cap g'_x S$, entonces $g_x^{-1} x \in g_x^{-1} g'_x S \cap S \neq \varnothing$. En consecuencia, por la definición 4.5 de H-kernel del capitulo II, se tiene $g_x^{-1} g'_x \in H$. Por consiguiente, $g_x H = g'_x H$. Es más, si $g_x H = g'H$, entonces se obtiene $g_x^{-1} g' \in H$ y $g_x^{-1} g' S = S$, por ser S un H-invariante. Por lo anterior, la función $\alpha : X \to G/H$ dada por $x \mapsto \alpha(x) = g_x H$, con $x \in g_x S$, está bien definida .

<u>**(2)**</u>. Para la continuidad de α, sea $x_0 \in X$ y consideremos U, vecindad abierta de $\alpha(x_0)$ en G/H. Sea $E = q^{-1}(U)$ en G, con $q : G \to G/H$ la función cociente. Puesto que $X = GS = \theta(G \times S)$ y θ es abierta, entonces la función

$$\theta|_{G\times S} : G\times S \to GS = X$$

es continua y abierta. Como el conjunto $E\times S$ de $G\times S$ es abierto, ya que E es abierto en G y S abierto en S, su imagen bajo θ , $ES = W$, es abierto en X. Falta verificar que $x_0 \in W \subset \alpha^{-1}(U)$. Esto se cumple porque $x_0 \in \alpha(x_0) = g_{x_0}H \in U$ por lo que $g_{x_0} \in E$ y, en consecuencia, $x_0 \in g_{x_0}S \subset ES = W$. Ahora, si $x \in W$, entonces $x = gs$, donde $g \in E$, $s \in S$; y como $x \in gS$, $\alpha(x) = gH = q(g) \in U$, pues $g \in E$. Luego, $\alpha(W) \subset U$. Por tanto, α es continua.

(3). La equivariancia de α se prueba tomando un x en X y g' en G. Si $\alpha(x) = gH$, $x \in gS$. Luego $g'x \in g'gS$, entonces $\alpha(g'x) = g'gH = g'(gH) = g'\alpha(x)$.

1.8 Lema: *Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado, sea $q: G \to G/H$ la función cociente (que manda un elemento g a su clase $\bar{g} = gH$) y sea $X[H]$ el conjunto de puntos H-fijos del G-espacio X es decir, $X[H] = \{x \in X : hx = x,\ h \in H\}$. Entonces la función $\bar{\theta}:(G/H)\times X[H] \to X$, definida por, $\bar{\theta}(\bar{g}, x) = gx$, es continua*

__*PRUEBA*__: $\bar{\theta}$ está bien definida. Puesto que $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$ implicaría que $g_1 = g_2h$ para algún $h \in H$, y para $x \in X[H]$, $g_1x = g_2hx = g_2x$. La continuidad de $\bar{\theta}$ se sigue de la continuidad de la acción de G en X, de la continuidad de la función cociente q y de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} (G/H)\times X[H] \arrow[rr, "\bar{\theta}"] & & X \\ & G\times X[H] \arrow[ul, "q\times 1_{X[H]}"] \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Puesto que q es abierta, entonces $q|_{X[H]}$ es abierta y, por tanto, identificación, y como $\overline{\theta}(q|_{X[H]}) = q$ es continua, entonces $\overline{\theta}$ es continua.

1.9 ***Corolario:*** *Para cada $\bar{g} \in G/H$, la correspondencia $x \mapsto gx$ define una función continua $\bar{\theta}_{\bar{g}} : X[H] \to X$*

2. GENERALIZACIÓN EQUIVARIANTE DEL TEOREMA DE EXTENSIÓN DE DUGUNDJI.

Una vez desarrollados los elementos que se requieren para la prueba del teorema principal, procedamos a enunciarlo y demostrarlo.

2.1 TEOREMA: *Sean G un grupo de Lie compacto, A un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio X metrizable, y B un subconjunto convexo invariante de algún G-espacio lineal L localmente convexo. Entonces cada función equivariante $f: A \to B$ admite una extensión equivariante $F: N \to B$ para alguna vecindad invariante N del conjunto A en X. Es decir, B es un G-ANE.*

PRUEBA: Para cada órbita $G(a) \subset A$, existe una vecindad abierta invariante N_a de $G(a)$, tal que para algún $x \in N_a$ existe un $g \in G$ para el cual $G_x \subset gG_ag^{-1}$. Esto se sigue del corolario 4.8 del capítulo II. Consideremos la vecindad abierta invariante del conjunto A en X $N = \bigcup_{a \in A} N_a$. Construyamos la extensión equivariante $F: N \to B$ de la función $f: A \to B$:

Sea $U = N - A$. Por el lema 1.6, existe una cubierta G-canónica $\{GS_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, de U con respecto a N. Sea $H_\lambda \subset G$ subgrupo cerrado correspondiente al S_λ, es decir, S_λ es un H_λ-kernel. Consideremos el conjunto A_λ de puntos de A fijos respecto a H_λ, $A_\lambda = \{a \in A : H_\lambda \subset G_a\}$. De la definición 1.5 (2), para algún $\lambda \in \Lambda$ existe un punto $x \in U$, tal que $H_\lambda = G_x$, con $x \in U \subset N$. Así, $x \in N_a$ para algún $a \in A$. Consecuentemente, por la proposición 1.8 del capítulo I, $H_\lambda = G_x \subset gG_ag^{-1} = G_{ga}$. Entonces $ga \in A_\lambda$ y $A_\lambda \neq \varnothing$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Además, cada A_λ es cerrado, puesto que si $x \in \overline{A}_\lambda$ y se tiene una sucesión $\{x_n\} \subset A_\lambda$, con $x_n \mapsto x$, dado $h \in H_\lambda$ entonces $hx_n \mapsto hx$, ya que la acción de G en x es continua pero $hx_n = x_n \mapsto hx$. Por tanto, $hx = x \in A_\lambda$.

Por otra parte se elige, para cada $\lambda\in\Lambda$, un punto x_λ en S_λ y se le asocia un punto $a_\lambda\in A_\lambda$ tal que

$$d(x_\lambda, a_\lambda) < 2d(x_\lambda, A_\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

En virtud de la proposición 2.8 del capítulo II, existe una partición de la unidad $\{\varphi_\lambda : U \to [0, 1]\}_{\lambda\in\Lambda}$ invariante subordinada a la cubierta abierta $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de U. Sea $x\in U$. Por definición de partición, $\varphi_\lambda(x) \neq 0$ sólo para $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$, y, como está subordinada a $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, se tiene que $x\in GS_{\lambda_i}$, $i = 1, 2,\ldots,n$. Definamos F(x) de la manera siguiente :

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \quad , & si \;\; x\in A \\ \sum\varphi_\lambda(x)f(\bar{\theta}_\lambda(\alpha(x), a_\lambda)) \,, & si \;\; x\in U = N - A \end{cases}$$

con $\alpha : U \to G/H_\lambda$; $\bar{\theta}_\lambda : G/H_\lambda \times A_\lambda \to A$ para cada $\lambda\in\Lambda$, en donde α y $\bar{\theta}_\lambda$ son como en los lemas 1.7 y 1.8, respectivamente, correspondiente al G-espacio GS_λ. Entonces $F(x)\in B$ para todo $x\in N$, pues $x\in A$ implicaría $F(x) = f(x)\in B$. Ahora, si $x\in U$, se tiene

$$F(x) = \sum\varphi_\lambda(x)f(\bar{\theta}_\lambda(\alpha(x), a_\lambda))$$

Como $f(\bar{\theta}(\alpha(x), a_\lambda)) = f(ga_\lambda)$ para cualquier g talque $x\in gS_\lambda$, $f(ga_\lambda) = gf(a_\lambda)\in gB = B$ y como $\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x) = 1$ es suma finita, por ser B convexo se tiene $\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x)f(\bar{\theta}_\lambda(\alpha(x), a_\lambda)) \in B$. Por lo tanto, $F(x)\in B$ para todo $x\in N$, y F está bien definida, puesto que $\varphi_\lambda(x) = 0$ si $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Por construcción, F es extensión de f y, por tanto, es continua en el conjunto $\overset{0}{A}$. Por otra parte, cada punto x de U, tiene una vecindad V tal que $\varphi_\lambda(V) = 0$ para toda $\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Entonces $F|V$ es una suma finita de funciones continuas $\varphi_{\lambda}(x')f(\bar{\theta}_{\lambda}(\alpha(x'),a_{\lambda}))$ para toda $x' \in V$ y, por tanto, es continua.

Esto demuestra la continuidad de F en U.

Falta probar la continuidad de F en $\partial A = A \cap \overline{U}$. Sea $a \in \partial A$ y sea J vecindad arbitraria de $F(a) = f(a)$ en L. Sin perder la generalidad, se puede suponer que J es convexa, pues L es localmente convexo.

Como f es continua, existe una bola abierta $O(a, \varepsilon)$ con centro en a tal que $f(A \cap O(a, \varepsilon)) \subset J$.

Consideremos $V_a = O(a, \varepsilon/6)$. Como $\{GS_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta G-canónica de U y, por la definición 1.5 inciso (3), "existe una vecindad W_a de a, contenida en V_a, tal que si $g \in G$ y $gS_\lambda \cap W_a \neq \emptyset$ con $\lambda \in \Lambda$, entonces se cumplen :

(a) $gS_\lambda \subset V_a$.

(b) Existe un elemento $h \in G$, tal que $ha \in V_a$ y $H_\lambda \subset g^{-1}G_{ha}g$. "

Se afirma que $F(W_a) \subset J$. En realidad, si $x \in A \cap W_a \subset A \cap O(a, \varepsilon)$, entonces, por definición de F, $F(x) = f(x) \in J$. Pero si $x \in U \cap W_a$, suponiendo que $\varphi_\lambda(x) = 0$, para toda $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, entonces

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\lambda}(x) f(\bar{\theta}_{\lambda}(\alpha(x), a_{\lambda}))$$

Como $\{GS_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta G-canónica de U, $x \in GS_\lambda$ para $\lambda = \lambda_\lambda$. Entonces $x \in g_\lambda S_\lambda \cap W_a$ y se tiene, por la propiedad (a) de W_a, que $g_\lambda S_\lambda \subset V_a$, en particular $x = g_\lambda x_\lambda$, $x_\lambda \in S_\lambda$, $g_\lambda x_\lambda \in V_a = O(a, \varepsilon/6)$ y, por la propiedad (b), para algún $g' \in G$, $H_\lambda \subset g_\lambda^{-1} G_{g'a} g_\lambda$ y $g'a \in V_a$; pero $g_\lambda^{-1} G_{g'a} g_\lambda = G_{g_\lambda^{-1}g'a}$. De donde $H_\lambda \subset G_{g_\lambda^{-1}g'a}$ y, por la definición de A_λ, $g_\lambda^{-1}g'a \in A_\lambda$. Entonces, usando (1), la invariancia de la métrica d y el hecho que $g_\lambda x_\lambda$, $g'a \in V_a = O(a, \varepsilon/6)$, se tiene

$$d(x_\lambda, a_\lambda) < 2d(x_\lambda, A_\lambda) \leq 2d(x_\lambda, g_\lambda^{-1}g'a) = 2d(g_\lambda x_\lambda, g'a) < 2\varepsilon/3$$

Además : $d(a, g_\lambda a_\lambda) \leq d(a, g_\lambda x_\lambda) + d(g_\lambda x_\lambda, g_\lambda a_\lambda) < \varepsilon/6 + d(x_\lambda, a_\lambda) < \varepsilon/6 + 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. De aquí que $g_\lambda a_\lambda \in O(a, \varepsilon) \cap A$. Entonces $f(\ \bar{\theta}_\lambda(\alpha(x), a_\lambda)\ ) = f(g_\lambda a_\lambda) \in J$ por las definiciones de α y $\bar{\theta}_\lambda$ y porque $x \in g_\lambda S_\lambda$, para $\lambda \in \{\lambda_i : i=1,\ldots,m\}$. Debido a la convexidad de J se tiene $F(x) = \sum \varphi_\lambda(x) f(g_\lambda a_\lambda) \in J$. Por consiguiente, $F(W_a) \subset J$ y así la continuidad de F en el punto a está probada.

A continuación daremos un caso en el que el conjunto convexo invariante B del teorema resulta un G-extensor absoluto.

2.2 Corolario: *Con las hipótesis del teorema 2.1, si además $B[G] = \{v \in B : gv = v, \forall\ g \in G\} \neq \emptyset$, entonces en la afirmación del teorema se puede tomar la vecindad $N = X$.*

PRUEBA: Sea $v_o \in B[G]$ para $v \in B$ y $t \in I$. Como B es convexo, entonces $\phi(v, t) = tv + (1-t)v_o \in B$. Entonces $\phi : B \times I \to B$, con $\phi(v, 0) = v_o$ y $\phi(v, 1) = v$, es una G-homotopía de Id_v a la función constante v_o. Puesto que $\phi(gv, t) = tgv + (1-t)v_o = g(tv) + (1-t)gv_o = g[tv + (1-t)v_o] = g\phi(v, t)$, esto implica que B es G-contraible. Aplicando el teorema de la teoría de Retractos : "Todo ANE es localmente contraíble y si es ANE y contraíble entonces es AE." válido para el caso equivariante [An, 2], al espacio $B \in$ G-ANE, obtenemos que $B \in$ G-AE.

BIBLIOGRAFIA

[An, 1] S. A. Antonyan, " Equivariant generalization of Dugundji's theorem " Matematicheskie zametki, Vol. 38 No. 4 , pp 608 - 616, 1985.

[An, 2] S.A. Antonyan "Retracts in categories of G-espaces" Izv. Akad. Nauk ArmSSR. Ser. Mat. 15, No. 5, 365-378 (1980).

[Bre] Glen E. Bredon, " Introduction to compact transformation groups " Vol. 46 in pure and applied mathematics Academic Press. (1972)

[Du, 1] J. Dugundji, " An extension of Tietze's theorem" Pac. J. Math., 1 353 - 367 (1951).

[Du, 2] J. Dugundji, " Topology " Boston : Allyn and Bacon, Inc. 1974

[H - R] E. Hewitt and K. A. Ross, " Abstract harmonic analisys ", Vol. 1, Springer Verlag. (1963)

[Kos] C. Kosniowski, " A first course in algebraic topology " Cambridge University Press. (1980)

[Ney] S. de Neymet , " Introducción a los grupos topológicos de transformaciones " , (Por publicar).

[Pa] R. S. Palais, " The classification of G-espaces ", Mem. Amer. Math. Soc., No. 36 (1960)

NOTACIONES.

G	grupo, 3
e	elemento idéntico de G, 3
$\in$, $x\in X$,	pertenencia, 3
$\theta . G\times X \to X$	acción de G en X, 3
$\theta_g : X \to X$	homeomorfismo de X en sí mismo, 3
Homeo(X)	grupo de homeomorfismos de X, 3
$\hat{\theta}$	homomorfismo de G en Homeo(X), 3
A_1, A_2, A_3,	axiomas de acción por la izquierda de grupo, 3
θ_g^{-1}	inverso de θ_g, 4
$\theta\|_{H\cdot X}$	acción restringida del subgrupo H en X, 4
SA	la acción θ aplicada a $S\times A$,4
GA	acción de G en un conjunto A, 4
G(a)	órbita de a en X, 4
$\varnothing$	conjunto vacio, 4
$\{G(x) : x\in X\}$	conjunto de órbitas,5
$a \sim b$	relación de equivalencia, 5
X/G	espacio de órbitas, 5
$\pi_0 : X \to X/G$	proyección canónica, 5
G_A	subgrupo que deja fijo cada elemento de A, 5
G_x	grupo de isotropía de x, 6
A_1', A_2', A_3'	axiomas de acción por la derecha de grupo, 6
μ, ι	operaciones de grupo, 7
μ^i_h, μ^d_h	traslaciones izquierda y derecha de G en sí mismo,7
V^2	multiplicación de grupo aplicada al conjunto $V\times V$,7
A^{-1}	inversión de grupo aplicada al conjunto A, 7
$\bigcup_{b\in B} Ab$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	unión de conjuntos,8
Hg, gH	clases laterales, 8
G/H	espacio cociente de clases laterales, 8
$q : G \to G/H$	proyección canónica, 8
L	espacio vectorial topológico, 10
R	números reales, 10
$V_\varepsilon(x)$	ε-vecindad en x, 11
$H \triangleleft G$	subgrupo normal del grupo G, 10
$(L, \\| \\|)$	espacio vectorial normado, 11
$\overline{A}$	cerradura de un conjunto,12

gx	acción θ aplicada a (g, x), 3
$(\Lambda, \leq)$	conjunto preordenado, 14
$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$	red en el espacio X, 14
$x_\lambda \to x$	red convergente a x, 14
T_2	espacio de Hausdorff, 15
$B - A$	diferencia de conjuntos, 9
$\mathring{A}$	interior del conjunto A, 17
$C(G, \mathbf{R})$	conjunto de funciones continuas de G a **R**, 18
R_h, L_h	transformaciones lineales de $C(G, \mathbf{R})$ en sí mismo, 19
$I(\varphi) = \int\varphi(g)dg$	integral de Haar, 20
$\sup\{\lvert\varphi(g)\rvert\}_{g\in G}$	supremo, 20
$\bigcap_{b\in B} A_b, \bigcap_{i=1}^{n} A_i$	intersección de conjuntos, 21
$d(x, y)$	métrica invariante, 22
$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$	métrica en el espacio de órbitas, 23
$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$	cubierta abierta, 16, 21, 35, 36
$\{\varphi_\lambda : X \to I\}_{\lambda\in\Lambda}$	partición de la unidad, 25
(X, Φ)	variedad diferenciable, 26
$\Phi=\{\varphi_\alpha : X\to V_\alpha\}_{\alpha\in a}$	colección de cartas, 26
$G\times_H A$	producto torcido, 28
(H)	clase de subgrupos conjugados a H en G, 29

$H : X\times I\to Y$	homotopía equivariante, 34
G-$\mathcal{M}$	clase de G-espacios métricos, 34
G-AE	clase de extensores absolutos, 34
G-ANE	clase de extensores absolutos de vecindades, 34
G-AR	clase de retractos absolutos, 34
G-ANR	clase de retactos absolutos de vecindades, 34
$\tilde{x}$	punto en el espacio X/G, 36
$\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$	cubierta G-canónica, 37
$O(x, r)$	bola abierta con centro en x y de radio r, 38
$X[H]$	conjunto de puntos en X que quedan fijos bajo la acción de H, 43
$\{x_n\}$	sucesión en un conjunto, 44
V_x	vecindad en un punto x, 23, 25

INDICE ANALITICO