

1  
24



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**UN ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA  
PRESION EN YACIMIENTOS NATURALMENTE  
FRACTURADOS**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**INGENIERO PETROLERO**  
P R E S E N T A :  
**ANABELL ACOSTA LOPEZ**



DIRECTOR DE TESIS:  
M.J. RAUL LEON VENTURA

MEXICO, D. F.

JUNIO 1996

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN  
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

SRITA. ANABELL ACOSTA LOPEZ

Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M. en I. Raúl León Ventura, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

UN ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESION EN YACIMIENTOS  
NATURALMENTE FRACTURADOS

	RESUMEN
I	INTRODUCCION
II	MODELO DE DOBLE-POROSIDAD
III	ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESION
IV	EJEMPLOS ILUSTRATIVOS
V	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
	APENDICES
	NOMENCLATURA
	REFERENCIAS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

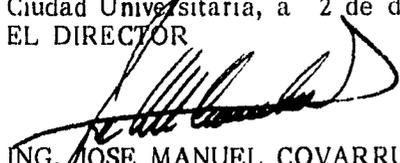
Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Ciudad Universitaria, a 2 de diciembre de 1994

EL DIRECTOR

  
ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE  
MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DIVISION DE INGENIERIA EN CIENCIAS DE LA TIERRA**

**"COMPORTAMIENTO DE LA PRESION EN YACIMIENTOS  
NATURALMENTE FRACTURADOS"**

**ANABELL ACOSTA LOPEZ**

**JURADO:**

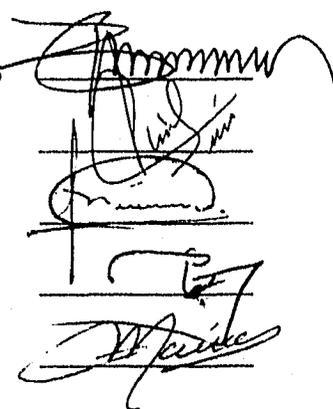
**PRESIDENTE: ING. MANUEL VILLAMAR VIGUERAS**

**VOCAL: M.I RAUL LEON VENTURA**

**SECRETARIO: ING. NESTOR MARTINEZ ROMERO**

**PRIMER SUPLENTE: M.I RAFAEL RODRIGUEZ NIETO**

**SEGUNDO SUPLENTE: ING. SALVADOR MACIAS HERRERA**

The image shows five handwritten signatures, each written over a horizontal line. The signatures are in black ink and appear to be cursive or semi-cursive. They are arranged vertically, corresponding to the names listed in the text to the left.

**JUNIO 1996.**



***A Dios por su innegable presencia en mi vida,  
especialmente en el comienzo de todo.***

***Con todo el amor que soy capaz de expresar  
dedico este esfuerzo a mis papas.  
Gracias mami por tu amor, forjador de todo  
lo bueno que hay en mi, te admiro.  
Gracias papi por tus enseñanzas  
y tu cariño.  
Los amo a ambos entrañablemente.***

---



***Quiero expresar mi más profundo amor a mis hermanas:***

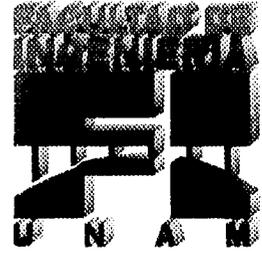
***Moni gracias por tu presencia cuando más la necesitaba, tu cariño siempre me acompaña.***

***Lulú eres una luz que llevo dentro, gracias por escucharme y ser mi amiga más querida.***

***A ambas, gracias por comprenderme y apoyarme toda la vida, ustedes son de lo más valioso que tengo, siempre estaremos juntas.***

***A todos mis amigos con quienes he compartido sueños, alegrías y lágrimas, gracias por dejarme estar cerca de ustedes, son una parte muy especial de mi vida, los quiero mucho.***

---



***Con cariño para el M.I. Raúl León Ventura  
por compartir conmigo sus conocimientos  
y por brindarme su valiosa amistad;  
sin usted este trabajo no hubiera sido posible.***

***Mi agradecimiento  
al Ing. Fernando Rosique Naranjo  
por su interés e incondicional apoyo.***

***Al Ing. Manuel Villamar Viguera  
y  
Al Ing. Néstor Martínez Romero.***

---



***Con especial agradecimiento a  
mi muy querida  
Facultad de Ingeniería.  
U . N . A . M***

***A todos mis profesores  
con mucho cariño.***

***A todos ustedes muchas gracias  
ANABELL.***

---

# CONTENIDO

	pág.
RESUMEN	iii
CAPITULO 1 INTRODUCCION	1
CAPITULO 2 MODELO DE DOBLE-POROSIDAD.	5
2.1 DEFINICION DEL MODELO	5
2.2 MODELO DE WARREN Y ROOT	23
2.3 MODELO DE DeSWAAN	39
CAPITULO 3 ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESION.	50
3.1 CARACTERISTICAS DEL MODELO DE WARREN Y ROOT	50
3.2 CARACTERISTICAS DEL MODELO DE DeSWAAN	60
3.3 CARACTERISTICAS DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESION	64
3.4 COMPARACION DE LAS RESPUESTAS DE PRESION	87
3.4.1 CONVERSION A VARIABLES ADIMENSIONALES	87
3.4.2 COMPARACION DE LAS RESPUESTAS DE PRESION	89
3.5 ANALISIS SEMILOGARITMICO	98
3.6 ANALISIS CON CURVAS TIPO	106
CAPITULO 4 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS	109
4.1 EJEMPLO 1	109
4.1.1 ANALISIS SEMILOGARITMICO	110
4.1.2 ANALISIS CON CURVAS TIPO	115
4.1.3 RESULTADOS	120

• • • • •

---

4.2	EJEMPLO 2	pág 121
4.2.1	ANALISIS SEMILOGARITMICO	122
4.2.2	ANALISIS CON CURVAS TIPO	126
4.2.3	RESULTADOS	132
 <b>CAPITULO 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>		 135
 <b>NOMENCLATURA</b>		 140
 <b>REFERENCIAS</b>		 146
 <b>APENDICES</b>		 151

# RESUMEN

En este trabajo se realiza un estudio del comportamiento de la presión en yacimientos naturalmente fracturados, a través del modelo básico de doble-porosidad, comparando consideraciones del modelo de Warren-Root y del modelo de DeSwaan.

Se plantea el concepto del modelo de doble-porosidad, en donde la roca se representa como un conjunto de bloques de matriz, rodeado por un sistema de fracturas las cuales se consideran ortogonales a los bloques. La respuesta de presión de yacimientos naturalmente fracturados está representada por el resultado de la superposición de los dos medios homogéneos que lo conforman; a cada uno de estos sistemas corresponden sus respectivas propiedades de porosidad, permeabilidad y compresibilidad.

También se estudia el comportamiento de la presión en función del tiempo, (problema directo) para cada uno de los modelos; se representa su respuesta en forma gráfica, así como la diferenciación de cada uno en base al comportamiento de la derivada y la comparación entre los modelos pseudo-estacionario y transitorio en base a los datos de una prueba sintética.

Por último, se describe la metodología utilizada para el análisis de pruebas de variación de presión (problema inverso) y se ilustra detalladamente a través de la aplicación de dos ejemplos, donde se establece el modelo representativo del sistema y la determinación de los parámetros característicos de los yacimientos naturalmente fracturados.

• • • • •

# Capítulo I

## *Introducción*

## CAPITULO 1

# INTRODUCCION

Los datos de variación de presión constituyen una fuente importante de información para la estimación de las características del yacimiento o bien para predecir el comportamiento del mismo. El análisis de estos datos incluye la identificación del modelo de interpretación, la validación de este modelo y la estimación de los parámetros del yacimiento. El concepto modelo de interpretación se refiere a una representación del comportamiento de la presión mediante un conjunto de ecuaciones, en función de ciertos parámetros del yacimiento y del tiempo.

Los yacimientos naturalmente fracturados están representados con el modelo de doble-porosidad; consiste de bloques de matriz separados por un sistema de fracturas. Los bloques representan la roca que conforma al yacimiento. La matriz y las fracturas están caracterizadas por ser cada uno de ellos sistemas homogéneos con propiedades relacionadas entre sí; baja capacidad de almacenamiento y alta capacidad de flujo corresponden a las fracturas y para la matriz se tiene alta capacidad de almacenamiento y baja capacidad de flujo. En el modelo de doble-porosidad la matriz actúa como fuente que aporta fluido a las fracturas. El comportamiento de la respuesta de presión de un sistema de doble-porosidad se identifica por el desarrollo de dos líneas rectas paralelas semilogarítmicas: una a tiempos cortos, correspondiente a la respuesta del flujo radial infinito del sistema de fracturas y la otra, después de un período de transición (flujo interporoso de matriz a fracturas), que corresponde al flujo radial infinito del sistema total (matriz + fracturas) <sup>1-6</sup>.

---

\*Referencias al final.

---

El modelo de doble-porosidad ha estado sujeto a diversos estudios en los últimos treinta años <sup>7-11</sup>, el concepto fue inicialmente introducido por Barenblatt<sup>1</sup> en el cual se establece la existencia de flujo interporoso de la matriz a las fracturas. Otros autores han desarrollado sus teorías en base a las condiciones bajo las cuales se realiza este flujo; así Odeh<sup>13</sup> y Warren-Root<sup>14-18</sup> consideran flujo pseudo-estacionario; el flujo interporoso transitorio corresponde a las teorías establecidas por Kazemi<sup>19</sup>, DeSwaan <sup>20-23</sup>, Najurieta <sup>1,7,12</sup> y Cinco<sup>1,7,12</sup>.

Warren y Root <sup>14-18</sup> proporcionan una solución analítica a un modelo de doble-porosidad y establecen que dos parámetros,  $\omega$  y  $\lambda$ , son suficientes para caracterizar a los sistemas naturalmente fracturados. Odeh<sup>13</sup> presenta un modelo similar al anterior y propone que el sistema de fracturas se comporta como un medio homogéneo.

Kazemi<sup>19</sup> resuelve numéricamente un modelo de estratos considerando flujo interporoso transitorio en la matriz; posteriormente DeSwaan<sup>20-23</sup> presenta una solución analítica al problema del flujo interporoso transitorio e introduce nuevos parámetros característicos ( $h_i, h_m$ ). Najurieta<sup>1,7,12</sup> proporciona una solución similar al modelo de DeSwaan y demuestra que el comportamiento de presión está descrito por cinco parámetros básicos. Cinco<sup>1,7,12</sup> presenta un modelo similar a los dos anteriores considerando flujo radial de un fluido ligeramente compresible en un sistema de doble-porosidad e introduce parámetros adimensionales para caracterizar al sistema matriz-fracturas.

Bourdet<sup>24-35</sup> introduce una nueva curva tipo para el análisis de la presión considerando efectos de almacenamiento y daño para sistemas de doble-porosidad, en donde se pueden identificar los periodos de flujo y determinar los

---

• • • • •

parámetros característicos del yacimiento, estas curvas tipo están basadas en los modelos que contemplan flujo interporoso pseudo - estacionario y transitorio. (modelos de Warren -Root y DeSwaan), respectivamente. En estas curvas tipo se establece la importancia de la derivada como una poderosa herramienta de diagnóstico, principalmente en cuanto al tipo de flujo interporoso se refiere.

El presente trabajo tiene como objetivo ilustrar aspectos generales del comportamiento de la presión en yacimientos naturalmente fracturados bajo el concepto del modelo de doble-porosidad, así como establecer las diferencias existentes, en cuanto a la respuesta de presión, entre las condiciones de flujo interporoso pseudo-estacionario y transitorio, considerando para ello los modelos de Warren - Root<sup>14-18</sup> y de DeSwaan<sup>20-23</sup>.

El propósito del trabajo se satisface plenamente mediante el desarrollo analítico de los modelos representativos del comportamiento de presión de los yacimientos naturalmente fracturados, la comparación de los aspectos relevantes, su representación gráfica, la descripción de la metodología de análisis y su aplicación a través de ejemplos ilustrativos<sup>36-46</sup>.

# Capítulo 2

## *Modelo de doble - porosidad*

---

## CAPITULO 2

# MODELO DE DOBLE-POROSIDAD

### 2.1 DEFINICION DEL MODELO

Los yacimientos naturalmente fracturados son sistemas formados por sólidos, poros, cavernas, canales interconectados y por supuesto fracturas, las cuales permiten el paso de los fluidos a través de ellas constituyéndose así en patrones de flujo diferentes a los existentes en yacimientos no convencionales.

Los yacimientos naturalmente fracturados han sido descritos y estudiados bajo el concepto del modelo de doble-porosidad, el cual considera la existencia de dos medios porosos homogéneos; el primero de ellos corresponde al material con porosidad primaria (matriz), esquematizado como un arreglo de bloques idénticos, el segundo se refiere a la porosidad secundaria la cual existe como un sistema ortogonal de fracturas, uniformes, continuas.

Cada uno de los medios anteriormente mencionados cuenta con sus respectivos valores de porosidad y permeabilidad, siendo para el primero alta porosidad y baja permeabilidad, y para el segundo, baja porosidad y alta permeabilidad; por lo que la definición del modelo considera que la matriz funciona como fuente que transfiere fluido al sistema de fracturas, el cual por sus características de alta permeabilidad conduce a los fluidos al pozo, lo anterior bajo un gradiente de presión; no se considera la

---

existencia de intercambio de fluidos entre los elementos de porosidad primaria.

La mayoría de los yacimientos naturalmente fracturados han sido conceptualizados dentro de un esquema de elementos de bloques de matriz muy regulares y separados por un sistema de fracturas bien definidas que se desarrollaron siguiendo direcciones preferenciales, generando un conjunto de bloques regulares cuyo tamaño y orientación dependen de los esfuerzos tectónicos, de las condiciones estructurales, la profundidad y la litología, puesto que se generan en rocas frágiles y densas tales como calizas, dolomías, lutitas, etc.

Para fines del presente trabajo se define una fractura como una discontinuidad de la roca, resultado de los esfuerzos tensoriales presentes en la corteza terrestre, a lo largo de planos de debilidad y una fractura es también una discontinuidad en la roca pero de menor magnitud.

Las fracturas se han clasificado bajo diversos criterios <sup>1</sup> :

- Asociadas con el eje del plegamiento figura 2.1:
  - a) **fracturas longitudinales**: a través del eje del plegamiento.
  - b) **fracturas transversales**: perpendiculares al plegamiento
  - c) **fracturas diagonales**: cualquier otra relación con el eje principal
  
- Referidas a los esfuerzos que las originaron figura 2.1:
  - a) **conjugadas**: debidas a un solo esfuerzo
  - b) **no conjugadas (ortogonal)**: son el resultado de varios esfuerzos.

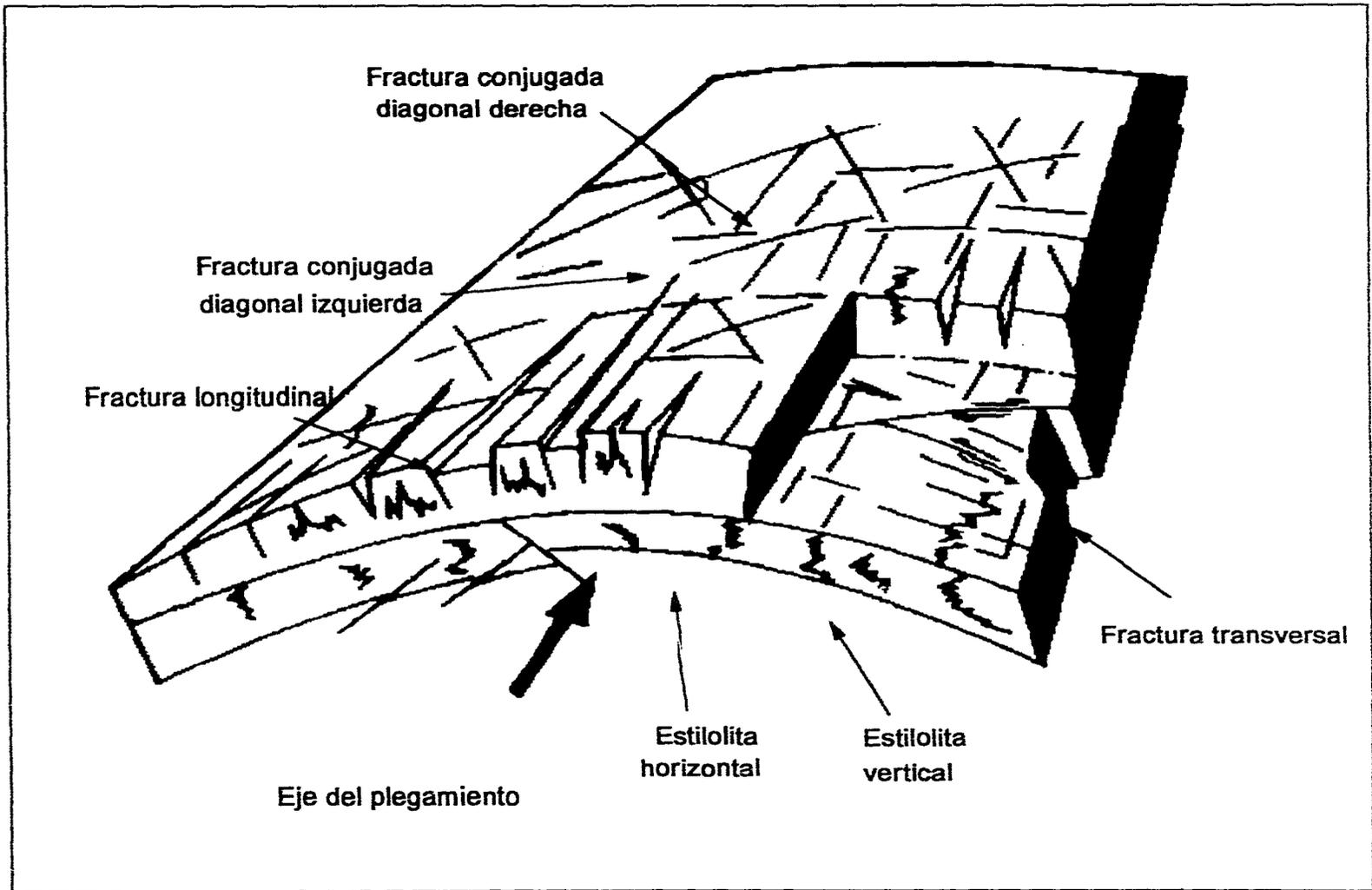


Fig. 2.1 Diferentes tipos de fracturas generadas por plegamientos<sup>1</sup>.

---

Las fracturas pueden existir en el medio poroso de la siguiente manera <sup>1</sup>:

a) **Efectivas**: Fracturas abiertas donde existe separación entre los bloques.

b) **Potenciales**: Fracturas separadas donde los bloques se encuentran en contacto

c) **Cubiertas parcialmente**: Fracturas que se encuentran parcialmente rellenas por depósitos secundarios.

d) **Cubiertas totalmente**: Existe relleno total de depósitos secundarios.

Las fracturas efectivas son las más importantes, ya que permiten el libre paso de los fluidos; con respecto a la figura 2.2, la anchura de la fractura está representada por "b", y es la separación existente entre los bloques de matriz, la cual depende de los esfuerzos a los que se encuentra sometida la roca así como al tipo de la misma y la profundidad a la que se encuentre, lo anterior a condiciones de yacimiento. El tamaño de una fractura es la relación comparativa entre la longitud de la fractura y el espesor de los estratos.

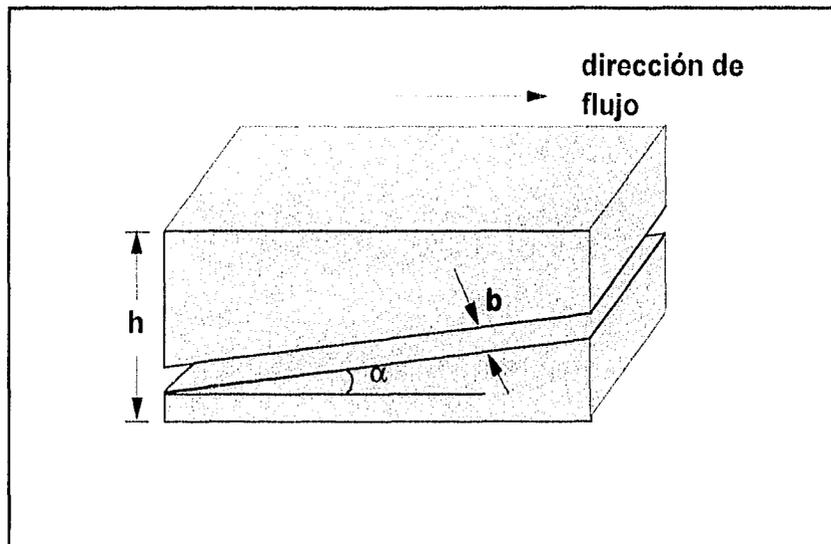


Fig 2.2 Bloque con fractura de amplitud  $b^1$ .

---

El tamaño y la forma de los bloques depende de la densidad de fracturas existentes en la roca, así como de la orientación de los esfuerzos tectónicos que originaron tales fracturas.

Existen varios tipos de arreglos de la geometría de los bloques y que pueden encontrarse en algunos yacimientos, dependiendo del sistema de fracturas<sup>2,3,4</sup>:

- 1) "**placas**", de matriz separadas por planos de fracturamiento paralelos e independientes de la dirección de flujo, figura 2.3 (a).
- 2) "**barras**", separadas por planos de fracturamiento ortogonales, la densidad de fracturas está asociada a la dirección de flujo, figura 2.3 (b).
- 3) "**cubos**", separados por planos de fracturas ortogonales, figura 2.3(c)  
La fractura horizontal es reemplazada por una delgada estratificación (ocurre frecuentemente), o bien los planos de fractura son igualmente importantes.

La determinación de la forma, tamaño y distribución de los bloques de matriz, es necesaria en la modelación matemática de la mayoría de los yacimientos fracturados; por ejemplo, el arreglo cúbico se ha utilizado en la simulación de algunos yacimientos de Irán<sup>4</sup>.

La alta permeabilidad de los yacimientos fracturados se atribuye no solo a la existencia de fisuras y fracturas en la roca, sino también a la presencia de cavernas desarrolladas por disolución del material existente al contacto con soluciones que circulan a través del medio poroso. Entonces, la porosidad secundaria está constituida por fisuras, cavernas y fracturas, donde los principales procesos que la originaron son la dolomitización, la lixiviación y el fracturamiento. La dolomitización es la reducción de los

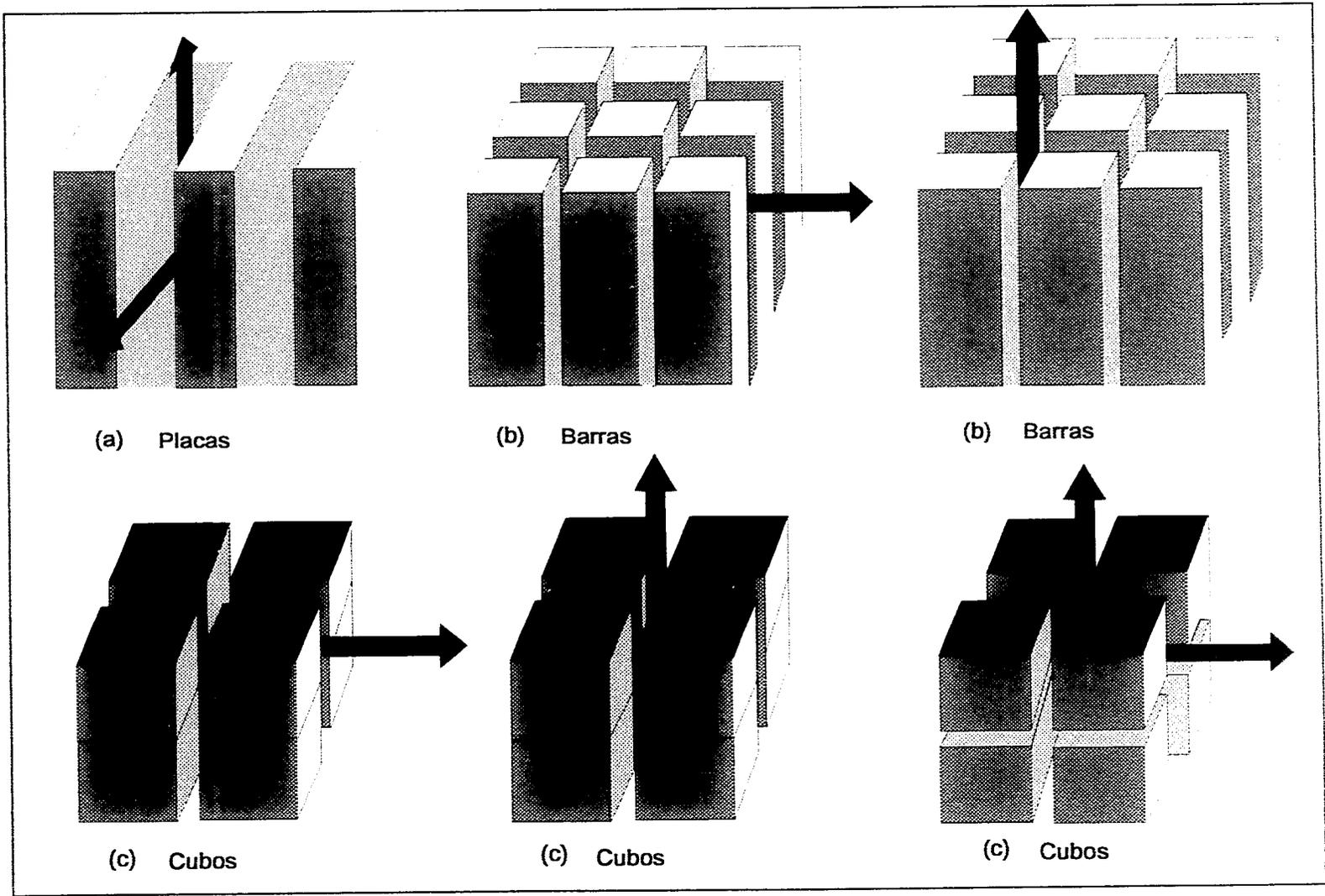


Fig. 2.3 Representación esquematizada de la geometría de los bloques de matriz<sup>3</sup>.

---

• • • • •

sólidos de una roca al transformarse una caliza en dolomía, en este proceso existe un reemplazamiento de una parte de carbonato de calcio por carbonato de magnesio; la lixiviación es el proceso mediante el cual se extraen las sustancias presentes en la roca, esto por la circulación de un disolvente, dando origen a cavernas de disolución. La porosidad primaria (matriz) es llamada también intergranular y es el resultado de la depositación de sedimentos u orgánicos de tal manera que al depositarse se forman huecos entre los granos, por lo que el valor de la porosidad primaria depende de la geometría y forma de los granos.

Los yacimientos naturalmente fracturados son el resultado de la combinación de las porosidades primaria y secundaria, y en el grado en que prevalezca una sobre la otra, variará la capacidad de almacenamiento del sistema matriz-fractura; así, cuando la capacidad de almacenamiento en la matriz es grande con respecto a la existente en las fracturas, se tendrá una transferencia más eficiente de los fluidos contenidos en la matriz al sistema de fracturas y se obtendrán mejores recuperaciones. Esto puede observarse en la figura 2.4 (a) <sup>2</sup>.

La figura 2.4 (b) presenta una formación que tiene aproximadamente la misma capacidad de almacenamiento, tanto en las fracturas como en la matriz, donde la matriz es compacta y de baja permeabilidad pero las fracturas tienen permeabilidad muy baja <sup>2</sup>.

Finalmente, puede existir una formación con porosidad sumamente baja en la matriz, por lo que la capacidad de almacenamiento se encuentra en las fracturas, es en estos casos donde al inicio de la explotación producirá

---

con grandes gastos, pero declinará rápidamente, lo cual es posible observar en la figura 2.4 (c) <sup>2</sup>.

Ahora bien, la transferencia de los fluidos puede ser inhibida por la existencia de mineralización o de bitúmenes en las fracturas.

Existen dos conceptos característicos del modelo de doble-porosidad: la capacidad de flujo, regida básicamente por la permeabilidad en las fracturas, y la capacidad de almacenamiento, la cual está en función de la porosidad de la matriz y de la compresibilidad, expresada como  $\phi c_t$ , y que muestra la expansión total o compresión de los fluidos y del volumen poroso.

La porosidad efectiva es la relación entre el volumen de poros comunicados y el volumen de roca y es el tipo de porosidad que más interesa ya que de los poros comunicados es posible extraer los fluidos que los saturan.

Así, para la porosidad total en un yacimiento fracturado se tiene la expresión <sup>1</sup>:

$$\phi_t = \phi_1 + \phi_2. \quad (2.1)$$

donde:

$$\phi_1 = \frac{\text{volumen poroso de la matriz}}{\text{volumen total}}$$

$$\phi_2 = \frac{\text{volumen poroso de la fractura}}{\text{volumen total}}$$

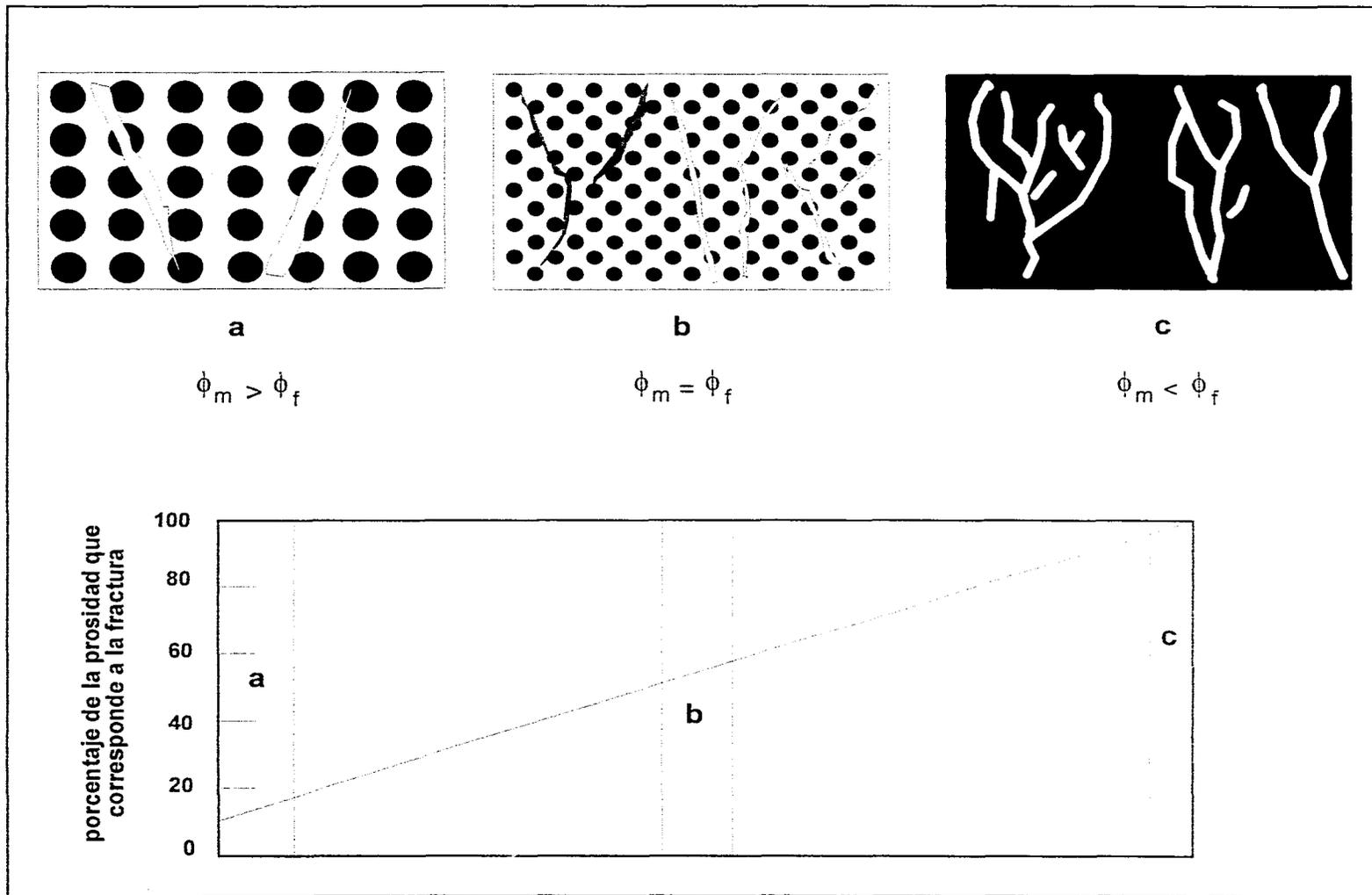


Fig. 2.4 Distribución de la porosidad en yacimientos fracturados <sup>2,3</sup>

---

Ambas porosidades son relativas al volumen total de masa (matriz + fracturas). En relación a la porosidad de la matriz ( $\phi_m$ ) y a la porosidad de las fracturas ( $\phi_f$ ), el factor de la porosidad de la matriz referido al volumen de matriz puede ser tomado en consideración<sup>1</sup>:

$$\phi_m = \frac{\text{volumen poroso de la matriz}}{\text{volumen de matriz}}$$

Y la porosidad de la fractura:

$$\phi_{\text{fractura}} \cong \phi_2 \quad (2.2)$$

En este caso la porosidad primaria, como función de la porosidad de la matriz, es expresada por la siguiente ecuación:

$$\phi_1 = (1 - \phi_2)\phi_m \quad (2.3)$$

y la porosidad primaria efectiva, conteniendo la fase aceite puede escribirse como sigue:

$$\phi_{1,e} = (1 - \phi_2)\phi_m(1 - S_{wi}) \quad (2.4)$$

La porosidad es representada esquemáticamente en la figura 2.5, donde el volumen unitario de masa total ha sido fraccionado figura 2.5 (a), indicándose esto en la parte superior de la figura y el fraccionamiento correspondiente al volumen unitario de masa de matriz se muestra en la parte inferior de la misma; conteniendo la porosidad de la matriz ( $\phi_m$ ), una parte saturada con agua, otra con aceite y cada una de ellas se representa como un porcentaje de la masa de matriz<sup>1</sup>.

---

La permeabilidad es un factor de suma importancia en la caracterización de los yacimientos ya que está definida como la capacidad de un medio para permitir el paso de los fluidos a través de él, esto matemáticamente puede ser expresado como:

$$k = \frac{q\mu l}{A\Delta p} \quad (2.5)$$

La anterior es la ecuación de Darcy en su forma más simple.

Siendo ésta, la permeabilidad absoluta cuando el fluido circulante satura 100% el medio poroso; cuando se tiene más de un fluido circulando sin importar su saturación se tiene la permeabilidad efectiva ( $k_e$ ) referida al fluido en cuestión <sup>5,6</sup>.

La permeabilidad del sistema matriz-fracturas se representa mediante la adición de las permeabilidades correspondientes a la matriz ( $k_m$ ) y la de la fractura ( $k_f$ ) <sup>1</sup>:

$$k_t = k_m + k_f \quad (2.6)$$

La permeabilidad intrínseca a la fractura está asociada a la medición de la conductividad durante el flujo del fluido a través del sistema de fracturas, independientemente del tamaño de bloques que lo rodea, esto es la conductividad de un canal o de un sistema de canales <sup>1</sup>.

Un caso simplificado de un bloque, donde la fractura es paralela a la dirección de flujo, se muestra en la figura 2.6 (fractura 1). El flujo a través de una fractura está dado por <sup>1</sup>:

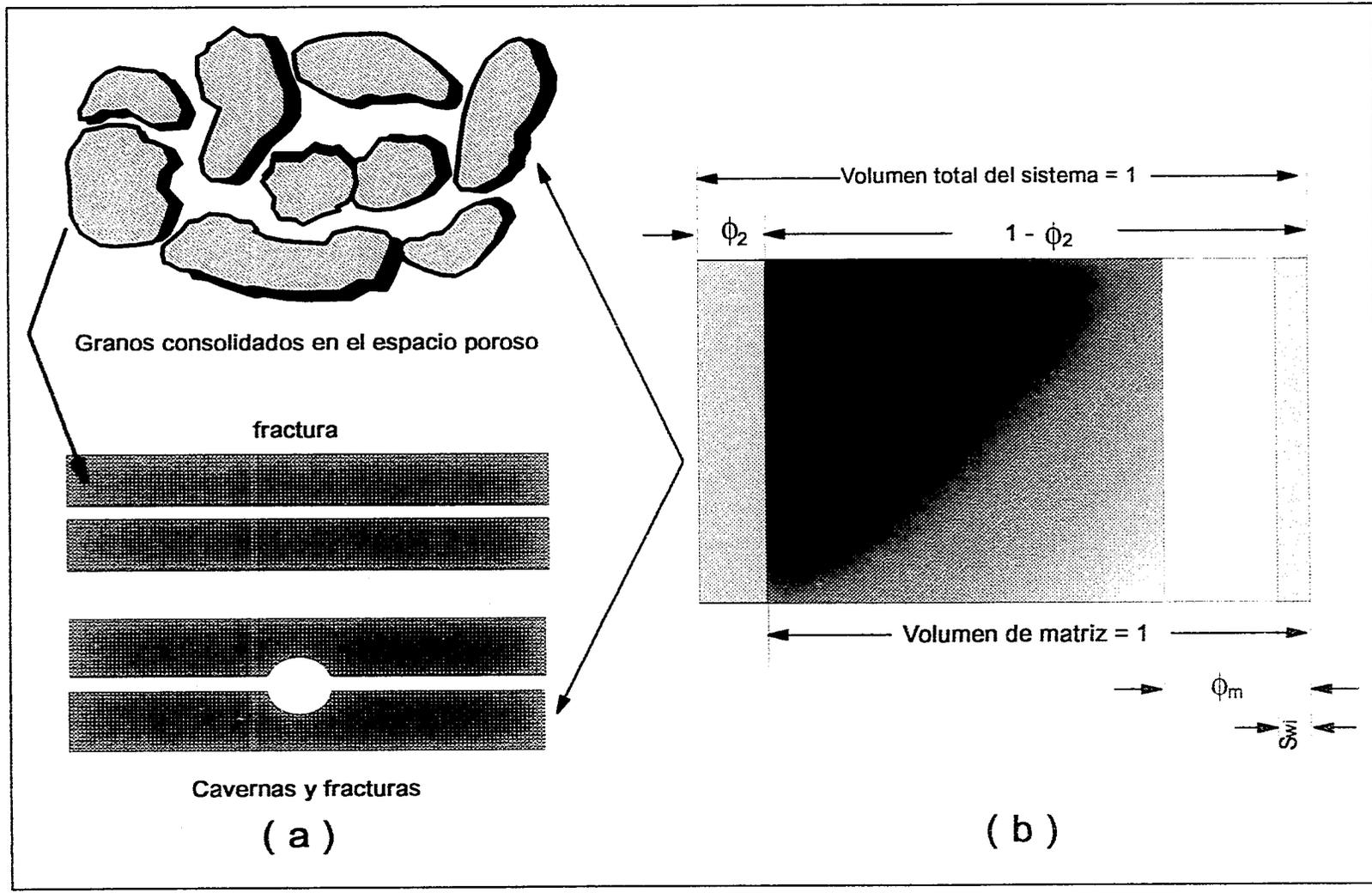


Fig. 2.5 Esquematización del concepto de doble - porosidad <sup>1</sup>.

$$q_f = ab \frac{b^2 \Delta P}{12\mu L} = a \frac{b^3 \Delta P}{12\mu L} \quad (2.7)$$

Ahora bien si existe un ángulo  $\alpha$  entre la fractura y la dirección de flujo, la siguiente ecuación expresa el flujo a través de ella<sup>1</sup>:

$$q_f = ab \frac{b^2 \cos^2 \alpha \Delta P}{12\mu L} \quad (2.8)$$

La figura 2.6 muestra un bloque de matriz que contiene una fractura paralela a la dirección de flujo, así como otra que forma un ángulo con éste, fractura 1 y 2, respectivamente, para las cuales la aplicación de las ecuaciones anteriores son válidas.

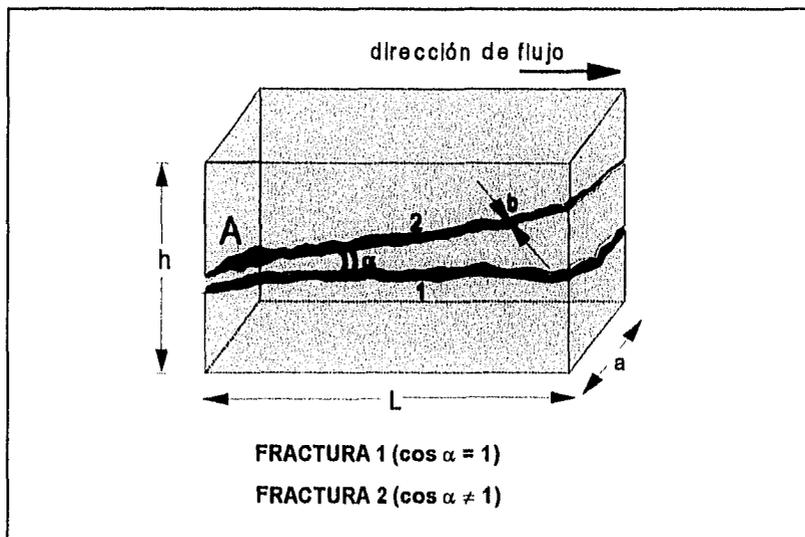


Fig. 2.6 Esquemización de un bloque de matriz con fracturas<sup>1</sup>

Ahora, con base en la definición de Darcy, si se limita el flujo a través de la sección  $A=ab$ ; el gasto estará representado por<sup>1</sup>:

---

Ahora, con base en la definición de Darcy , si se limita el flujo a través de la sección  $A=ab$ ; el gasto estará representado por <sup>1</sup>:

$$q = A \frac{k_{fr}}{\mu} \frac{\Delta P}{L} = ab \frac{k_{fr}}{\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (2.9)$$

La combinación de las ecuaciones 2.8 y 2.9 conducen a la siguiente:

$$k_{fr} = \frac{b^2}{12} \cos^2 \alpha \quad (2.10)$$

Para un sistema de fracturas con orientación similar la permeabilidad intrínseca está expresada como <sup>1</sup>:

$$k_{fr} = \frac{\cos^2 \alpha}{12} \left( \sum_1^n b_i \right)^2 \quad (2.11)$$

Para un arreglo de sistemas de fracturas que tiene n fracturas cada una con su propia orientación, la permeabilidad intrínseca puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$k_{fr} = \frac{1}{12} \left[ \cos^2 \alpha \sum b_{ai}^2 + \sum b_{\beta i}^2 + \dots \right] \quad (2.12)$$

La permeabilidad convencional de la fractura toma en cuenta el volumen de roca asociada a la fractura; se basa en la definición de Darcy, en donde el área de la sección transversal incluye el área de la matriz y el de la fractura ( $A_B = ah$ ).

---

Ahora, con base en la definición de Darcy, si se limita el flujo a través de la sección  $A=ab$ ; el gasto estará representado por <sup>1</sup>:

$$q = A \frac{k_{fr} \Delta P}{\mu L} = ab \frac{k_{fr} \Delta P}{\mu L} \quad (2.9)$$

La combinación de las ecuaciones 2.8 y 2.9 conducen a la siguiente:

$$k_{fr} = \frac{b^2}{12} \cos^2 \alpha \quad (2.10)$$

Para un sistema de fracturas con orientación similar la permeabilidad intrínseca está expresada como <sup>1</sup>:

$$k_{fr} = \frac{\cos^2 \alpha}{12} \left( \sum_1^n b_i \right)^2 \quad (2.11)$$

Para un arreglo de sistemas de fracturas que tiene n fracturas cada una con su propia orientación, la permeabilidad intrínseca puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$k_{fr} = \frac{1}{12} \left[ \cos^2 \alpha \sum b_{ai}^2 + \sum b_{\beta i}^2 + \dots \right] \quad (2.12)$$

La permeabilidad convencional de la fractura toma en cuenta el volumen de roca asociada a la fractura; se basa en la definición de Darcy, en donde el área de la sección transversal incluye el área de la matriz y el de la fractura ( $A_B = ah$ ).

---

Entonces:

$$q = A_B \frac{k_f \Delta P}{\mu L} = ah \frac{k_f \Delta P}{\mu L} \quad (2.13)$$

Comparando las ecuaciones 2.13 y 2.7 y el resultado aplicado a la ecuación 2.10, se obtiene la siguiente expresión<sup>1</sup>:

$$k_f = k_{fr} \frac{ab}{ah} = k_{fr} \frac{b}{h} = \frac{b^3}{12h} \quad (2.14)$$

La permeabilidad total, ecuación 2.6, referida al bloque descrito en la figura 2.6, depende de la dirección de flujo; cualquier cambio en la dirección de flujo originará un cambio en el valor de  $k_f$ , que depende de la relación entre fracturas y dirección de flujo.

Al medir la permeabilidad en núcleos, se obtiene la permeabilidad total  $k_t$  y se hace necesario indicar la dirección en la que se realiza la medición; si la matriz tiene un grado de anisotropía, debe considerarse el valor de  $k_m$  en la dirección de la medición. Del análisis de variación de la presión es posible obtener  $k_m$  y  $k_f$ <sup>1</sup>.

La determinación de la compresibilidad de un yacimiento fracturado es muy importante, en especial si el contraste entre la porosidad primaria y la secundaria es muy grande ( $\phi_f \ll \phi_m$ ), ya que se encuentra relacionada con el concepto de capacidad de almacenamiento<sup>3,4</sup>.

La compresibilidad de la roca para un yacimiento fracturado puede expresarse como:

---


$$c_r = c_m + \phi_c c_c + \phi_f c_f + \phi_v c_v \quad (2.15)$$

donde  $c_v \cong 3c_m$  por trabajos experimentales<sup>1</sup>.

La compresibilidad de los fluidos que saturan los poros, valuada a condiciones isotérmicas está expresada por la siguientes ecuaciones, cuya base es la propia definición de compresibilidad<sup>1</sup>:

$$c_o = -\frac{1}{V_o} \frac{dV_o}{dp} = -\frac{1}{B_o} \frac{dB_o}{dp} \quad (2.16)$$

$$c_w = -\frac{1}{V_w} \frac{dV_w}{dp} = -\frac{1}{B_w} \frac{dB_w}{dp} \quad (2.17)$$

$$c_g = -\frac{1}{V_g} \frac{dV_g}{dp} = -\frac{1}{B_g} \frac{dB_g}{dp} \quad (2.18)$$

La compresibilidad del sistema, incluyendo las rocas y los fluidos que saturan el medio poroso, puede expresarse como la suma de todos los términos contenidos en una unidad de porosidad<sup>1</sup>:

$$c_t = S_o c_o + S_w c_w + S_g c_g + c_p \quad (2.19)$$

Para el caso de un yacimiento convencional, la compresibilidad, cuando es referida solo a una fase, es denominada compresibilidad efectiva para una fase específica.

---

Así la compresibilidad efectiva del aceite está dada por:

$$c_{eo} = \frac{S_o c_o + S_w c_w + S_g c_g + c_p}{S_o} \quad (2.20)$$

Y recordando que:

$$S_o = S_{oi} = 1 - S_{wi}$$

considerando que no hay saturación de gas,  $S_g = 0$  :

$$c_{eo} = c_o + \frac{S_w c_w + c_p}{1 - S_{wi}} \quad (2.21)$$

Si se tiene un sistema con doble-porosidad, en donde la saturación de aceite en la matriz es referida a la cantidad de agua intersticial ( $S_o = 1 - S_{wi}$ ); mientras que la saturación de aceite en las fracturas es la unidad ( $S_o = 1$ ) y considerando que en la porosidad secundaria la saturación de agua intersticial es cero:

$$\begin{aligned} S_{oif} &= 1 \\ S_{w \text{ intersticial}} &= 0 \\ S_{oim} &= 1 - S_{wim} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la anterior puede escribirse la siguiente expresión para determinar la compresibilidad efectiva<sup>1</sup>:

$$c_{eo} \cong c_o + c_w \frac{\phi_m S_{wim}}{\phi_m (1 - S_{wim}) + \phi_f} + c_{pm} \frac{\phi_m}{\phi_m (1 - S_{wim}) + \phi_f} + c_{pf} \frac{\phi_f}{\phi_m (1 - S_{wim}) + \phi_f} \quad (2.22)$$

---

sabiendo que la porosidad de la fractura es muy pequeña:

$$\phi_f \ll \ll \phi_m$$

y que:

$$c_p = c_{pm} + c_{pf}$$

sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación 2.22:

$$c_{eo} = c_o + c_w + \frac{S_{wm}}{1 - S_{wim}} + c_p \frac{1}{1 - S_{wim}} \quad (2.23)$$

si la matriz es muy densa <sup>1</sup>:

$$S_{wm} = S_{wi} = 1$$

Entonces:

$$c_{eo} = c_o + c_w \frac{\phi_m}{\phi_f} + c_{pm} \frac{\phi_m}{\phi_f} + c_{pf} \quad (2.24)$$

En un sistema con doble-porosidad, la capacidad de almacenamiento está definida como:

$$\phi c_1 = \phi_1 c_1 + \phi_2 c_2$$

Donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son expresadas mediante las ecuaciones 2.2 y 2.4, así sustituyendo estas definiciones <sup>1,3,4</sup>:

$$c_1 \cong c_o + \frac{c_w S_{wi} + c_p}{1 - S_{wi}} c_1 \cong c_o + \frac{c_w S_{wi} + c_p}{1 - S_{wi}} \quad (2.25)$$

---

$$c_2 \cong c_0 \quad (2.26)$$

La determinación de la geometría, orientación y tamaño de los bloques es muy importante, ya que rigen el ritmo de transferencia de los fluidos de la matriz. Para tamaños de bloque grandes, este ritmo puede ser lento cuando la permeabilidad de la matriz sea muy baja; así, la caracterización de los yacimientos naturalmente fracturados debe incluir parámetros como permeabilidad, porosidad, tamaño y litología de la matriz, ángulo del plano de fractura, espesor, longitud y geometría de los bloques. Por lo tanto, se han realizado múltiples investigaciones al respecto, de tal manera que en la actualidad se cuenta con diferentes tipos de modelos que intentan representar el comportamiento de la presión en yacimientos naturalmente fracturados y a partir del análisis de los datos de presión, definir las propiedades físicas, la distribución y geometría de las fracturas.

Una de las consideraciones más importantes de estos modelos es el tipo de flujo interporoso que gobierna el intercambio de fluidos entre los bloques de matriz y las fracturas, existiendo para flujo pseudoestacionario y para flujo transitorio<sup>1,7,8-11</sup>.

## **2.2 MODELO DE WARREN Y ROOT**

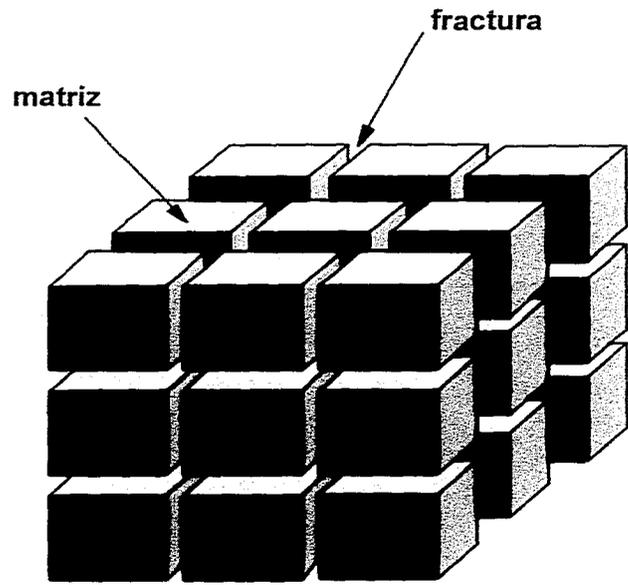
Warren y Root<sup>14</sup> presentaron un modelo basado en el concepto matemático de superposición de dos medios porosos, idealizado por un sistema formado por paralelepípedos rectangulares separados por una red ortogonal de fracturas.

---

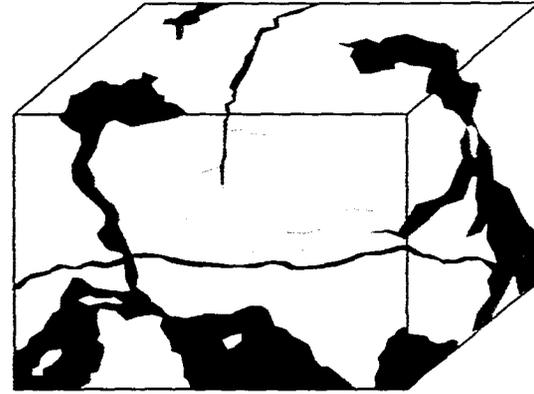
En este sistema, bajo condiciones pseudo-estacionarias, el comportamiento de la presión ocurre en función de dos parámetros adimensionales:  $\lambda$  y  $\omega$ . Estos parámetros caracterizan las relaciones entre las dos regiones de diferentes porosidades.

Este es uno de los modelos más estudiados para yacimientos con comportamiento de doble-porosidad, el cual está basado en las siguientes suposiciones <sup>1,7,14</sup>:

- a) La porosidad primaria es considerada homogénea e isotrópica y se encuentra representada por una red de paralelepípedos rectangulares e idénticos (matriz).
- b) La porosidad secundaria se considera contenida en un sistema ortogonal de fracturas, continuas y uniformes que se encuentran orientadas de tal manera que cada fractura es paralela a uno de los ejes de permeabilidad, están uniformemente espaciadas y su grosor es constante. Pueden existir a lo largo de cada uno de los ejes, esto con la finalidad de simular el grado de anisotropía del sistema, figura 2.7.
- c) Se ha establecido que el sistema de porosidad primaria y secundaria es homogéneo aunque anisótropo y que el flujo ocurre solo entre los elementos de porosidad primaria y secundaria, más no entre los propios elementos de porosidad primaria, los cuales solo actúan como fuente que cede fluido al sistema de fracturas y que a su vez es canalizado a través de éstas al pozo.



formación idealizada



formación real

Fig. 2.7 Modelo de Warren y Root<sup>14</sup>

---

Además, se considera flujo laminar en una sola fase y donde la ley de Darcy es válida, el fluido es ligeramente compresible, las fuerzas gravitacionales son despreciables y los gradientes de presión pequeños. El comportamiento del flujo entre los medios de porosidad primaria y secundaria se considera **pseudo-estacionario**, es decir la variación de la presión con respecto al tiempo es constante.

Otra de las consideraciones generales establece el uso de la porosidad media aritmética y la permeabilidad media geométrica, esto con el objetivo de contar con el " modelo mas probable ".

En virtud de que el yacimiento con doble-porosidad puede ser tratado como un yacimiento homogéneo, en cada uno de los elementos de porosidad que lo conforman; entonces se puede establecer dos presiones para cada punto (x,y,z,t) de la siguiente manera <sup>14,15</sup>:

$$p_1 = p(x,y,z,t)g_1(V)dV / g_1(V)dV \quad (2.27)$$

$$p_2 = p(x,y,z,t)g_2(V)dV / g_2(V)dV \quad (2.28)$$

Las expresiones anteriores pueden ilustrarse en la figura:

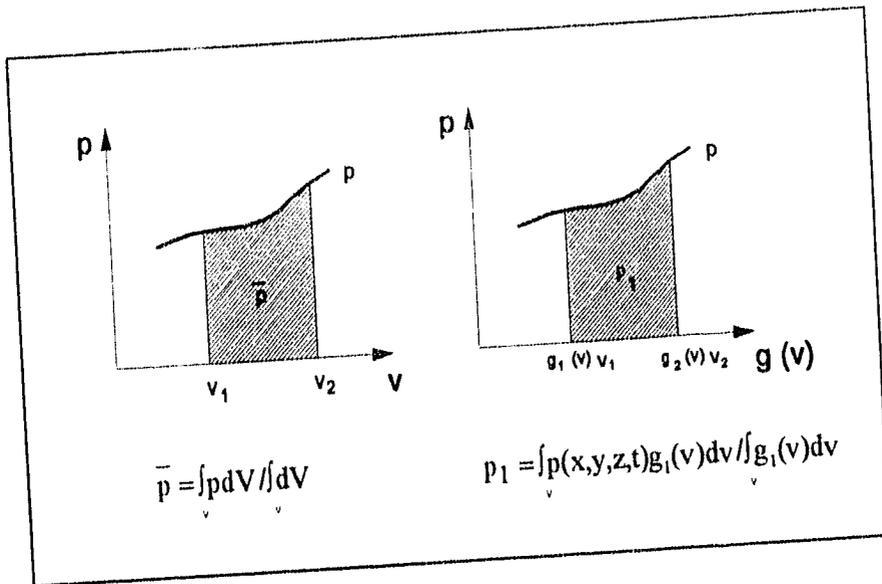


Fig. 2.8 Representación de la presión en cada punto<sup>18</sup>.

Si las soluciones se obtienen utilizando presiones medias en las regiones primaria y secundaria,  $p_1$  y  $p_2$ , respectivamente, entonces se puede establecer que el volumen considerado debe ser pequeño en comparación con el tamaño de los elementos de matriz; así, las siguientes condiciones deben ser satisfechas:

$$\int g_1(dV) = \phi_1 \tag{2.29}$$

$$\int g_2(dV) = \phi_2 \tag{2.30}$$

Las presiones medias  $p_1$  y  $p_2$  pueden observarse en la figura 2.9, en donde la  $p_1 > p_2$ , el flujo existe de la matriz a la fractura, la línea punteada representa la presión media existente en el sistema.

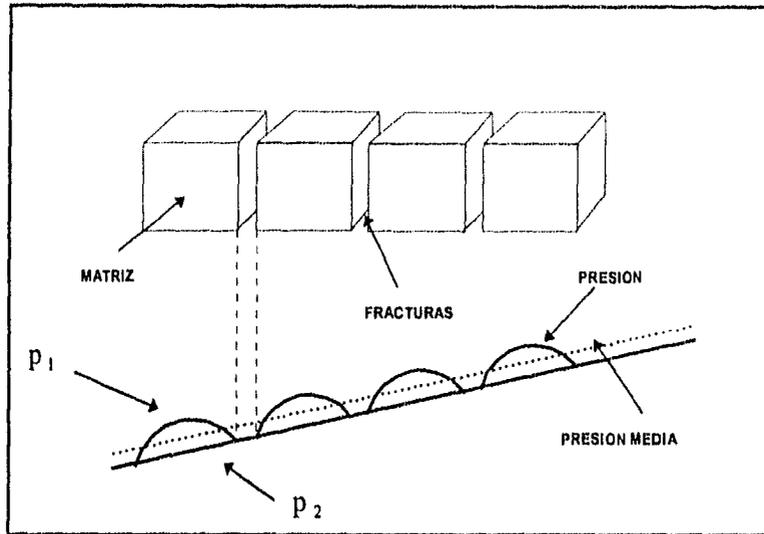


Fig. 2.9 Representación esquemática de la distribución de la presión en el modelo <sup>14</sup>.

Tomando en cuenta que la saturación de agua congénita en las fracturas es despreciable,  $S_{wcf}=0$ , entonces la porosidad media intergranular queda expresada de la siguiente manera:

$$\phi_1 = (1 - \phi_2) \phi_m (1 - S_{wc})_m \quad (2.31)$$

Ahora bien para un yacimiento horizontal de espesor uniforme, homogéneo y anisótropo con flujo en una sola fase y fluido ligeramente compresible, está descrito por la siguiente ecuación de continuidad <sup>14</sup>:

---


$$\frac{k_{2x}}{\mu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{k_{2y}}{\mu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} - \phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = \phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (2.32)$$

En la ecuación anterior los ejes "x" y "y" coinciden con los ejes principales de permeabilidad;  $c_1$  y  $c_2$  son las compresibilidades totales; sin embargo, si se considera que las fuerzas externas son constantes, que  $\phi_1$  es independiente de  $p_2$  y  $\phi_2$  es independiente de  $p_2$ , así como la variación de  $\phi_2$  con respecto a  $p_2$  es despreciable, entonces puede realizarse las siguientes aproximaciones:

La compresibilidad para los elementos de porosidad primaria puede representarse con la siguiente ecuación:

$$c_1 S_o = c_o S_o + c_w S_w + c_p \quad (2.33)$$

La saturación de aceite de la matriz,  $S_o = (1 - S_{wi})$

$$c_1 (1 - S_{wi}) = c_o (1 - S_{wi}) + c_w S_w + c_p \quad (2.34)$$

despejando  $c_1$ :

$$c_1 = \frac{c_o (1 - S_{wi})}{(1 - S_{wi})} + \frac{c_w S_w + c_p}{1 - S_{wi}} \quad (2.35)$$

$$c_1 = c_o + \frac{c_w S_w + c_p}{1 - S_{wi}} \quad (2.36)$$

---

La compresibilidad para el sistema de porosidad secundaria está representada de la siguiente manera:

$$c_2 S_2 = c_o S_o + c_w S_{wi} + c_p \quad (2.37)$$

Si la saturación de aceite en la fractura:  $S_o=1$ , considerando la saturación de agua igual a cero, entonces puede escribirse:

$$c_2 S_o = c_o S_o + c_p \quad (2.38)$$

y si además  $c_p$  es mucho menor que  $c_o$  ( $c_p \ll c_o$ ) el último término puede despreciarse, por tanto:

$$c_2 S_o = c_o S_o \quad (2.39)$$

$$c_2 = c_o \quad (2.40)$$

La compresibilidad en el sistema de fracturas puede considerarse prácticamente igual a la compresibilidad del aceite que se encuentra confinado en ellas.

Suponiendo que existe flujo pseudo-estacionario en los elementos de porosidad primaria para todo tiempo, en el volumen circunvecino a cada punto del yacimiento se tiene:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \text{cte} \quad (2.41)$$

---

y de la definición de compresibilidad:

$$c_1 = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)_T \quad (2.42)$$

aplicando la regla de la cadena,  $c_1 = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \frac{dt}{dp}$ , entonces:

$$c_1 \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{V c_1} \frac{dV}{dt}, \text{ luego despejando la variación de la presión con respecto}$$

al tiempo:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{V c_1} \frac{dV}{dt}, \text{ y como } \frac{dV}{dt} = q: \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{q}{V c_1},$$

consecuentemente:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{q}{V_p c_1} \frac{1}{V_p c_1}, \quad \text{si } V_p = L^3 \phi \quad (2.43)$$

Si el flujo es lineal la ecuación de Darcy es aplicable; entonces:

$$q = \frac{k_1 A}{\mu L} (p_1 - p_2) = -\frac{k_1}{\mu} L (p_2 - p_1)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión de la variación de la presión con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_1 L (p_2 - p_1)}{\mu L^3 c_1 \phi_1} = \frac{k_1 (p_2 - p_1)}{\mu L^2 c_1 \phi_1}$$

---

Si se define el parámetro  $\alpha = 1/L_2$ , la ecuación se puede escribir:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \phi_1 c_1 = \frac{\alpha k_1}{\mu} (p_2 - p_1) \quad (2.44)$$

El parámetro  $\alpha$  es un factor de forma que muestra la geometría de los bloques de matriz y controla el flujo entre los dos medios porosos.

Las ecuaciones 2.32 y 2.44 pueden expresarse en forma adimensional, mediante ciertas transformaciones; esto se hace con la finalidad de tener una expresión del comportamiento de la presión, mucho más compacta y que pueda ser mostrada gráficamente.

Los parámetros adimensionales son <sup>14</sup>:

$$p_D(\xi, \theta, t_D) = \frac{2\pi k_2 h}{q\mu\beta} [p - p(\xi, \theta, \tau)] \quad \text{caída de presión adimensional}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{x^2}{kr_w^2} + \frac{ky^2}{r_w^2}} \quad \text{coordenada radial adimensional}$$

$$t_D = \frac{\bar{k}_2 t}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) \mu r_w^2} \quad \text{tiempo adimensional.}$$

$$\bar{k}_2 = \sqrt{k_{2x} k_{2y}} \quad \text{permeabilidad efectiva del medio poroso}$$

$$K = \sqrt{\frac{k_{2x}}{k_{2y}}} \quad \text{grado de anisotropía}$$

$$\lambda = \frac{\alpha k_1 r_w^2}{k_2}$$

coeficiente de flujo interporoso que  
rige el flujo de la matriz a la  
fractura

$$\omega = \frac{\phi_2 c_2}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)}$$

capacidad de almacenamiento de las  
fracturas con respecto a sistema  
total

De esta manera, utilizando estas definiciones las ecuaciones 2.32 y 2.44 se puede escribir (Apéndice A) como sigue:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} - (1-\omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \omega \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D} \quad (2.45)$$

$$(1-\omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \lambda (p_{D2} - p_{D1}) \quad (2.46)$$

Sustituyendo la ecuación 2.46 en la ecuación 2.45 se tiene la siguiente:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} - \lambda (p_{D2} - p_{D1}) = \omega \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D} \quad (2.47)$$

Según las condiciones iniciales y de frontera:

---

Para  $t = 0$ ,  $p_1 = p_2 = p_i = p \quad \forall \quad x, y$ .

ahora en parámetros adimensionales:

$$t_D = \frac{\overline{k_2 t}}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) \mu r_w^2} = \frac{k_2(0)}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) \mu r_w^2} = 0; \quad t_D = 0$$

Para la caída de presión en  $t_D = 0$ :

$$p_{D2} = \frac{2\pi \overline{k_2 h}}{q \mu \xi} (p - p) = 0 \quad \text{y} \quad p_{D1} = \frac{2\pi \overline{k_2 h}}{q \mu \beta} (p - p) = 0.$$

lo anterior para todo  $\xi$  y  $\theta$ .

Ahora para  $t_D > 0$ :

Si  $\xi \rightarrow \infty$  entonces,  $x, y \rightarrow \infty$  y  $p_2 = p_i = p$

$$p_{D2} = \frac{2\pi \overline{k_2 h}}{q \beta \mu} (p - p) = 0, \quad p_{D2} = 0; \quad t_D > 0,$$

Si  $\xi \rightarrow \infty \quad \forall \theta$

La condición de frontera:

---


$$\left(\frac{p_2}{\partial r}\right) = \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \quad \text{si} \quad p_{D2} = \frac{2\pi k_2 h}{q\beta\mu} (p - p_2)$$

despejando  $p_2$ :

$$p_2 = p - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} p_{D2}$$

derivando:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_{D2}} = -\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h}$$

$$\partial p_2 = -\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \partial p_{D2}$$

Si el radio adimensional está definido como  $R=r/r_w$

entonces  $r=Rr_w$ ,

Si  $r_w=1$  entonces  $\partial r = \partial R$  y  $\frac{\partial p_{D2}}{\partial R} = -1$

$$\frac{1}{2t_D} = \int \frac{\partial p_{D2}}{\partial R} d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial R} \int d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial R} [\theta]_0^{2\pi} = -1 \quad (2.48)$$

---

Entonces tomando en cuenta las condiciones anteriores; se tiene la siguiente solución a la ecuación adimensional 2.47 (Apéndice B) para un yacimiento infinito con presión inicial uniforme que produce a gasto constante:

$$p_{Dw}(t_D) = p_{D2}^*(l, t_D) - S^* \quad (2.49)$$

donde:

$$S^* = \ln\left(\frac{k+1}{2\sqrt{k}}\right)$$

y  $p_{D2}^*(l, t_D)$  es la solución simétrica considerando  $k=1$  evaluada en  $\xi=1$ .

Usando la transformada de Laplace, la solución de la ecuación sujeta a las condiciones de frontera puede ser escrita como sigue:

$$p_{D2}(l, t_D) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_0(\sqrt{sf(s)})}{s\sqrt{sf(s)}k_1(\sqrt{sf(s)})} \right] \quad (2.50)$$

Donde el operador de la transformada inversa es :

$$f(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda} \quad (2.51)$$

La inversa de la ecuación 2.50 no puede ser obtenida analíticamente para un caso general; sin embargo, una solución asintótica para bajos valores de  $sf(s)$  puede ser obtenida considerando solamente los primeros términos de la serie de la función de Bessel.

.....

La solución asintótica correspondientes a valores de tiempo adimensional  $t_D > 100$  ó  $t_D > 100\omega$  para  $\lambda \ll 1$  y  $t_D > 100\lambda - 1/\lambda$  para  $\omega \ll 1$  se obtiene haciendo las sustituciones:

$$k_0(v) \cong (-\gamma + \ln v - \ln 2) \quad \text{y} \quad k_1(v) = \frac{1}{\gamma}$$

donde  $\gamma = .5772$  es el número de Euler.

La transformada inversa de la ecuación 2.50 es:

$$p_{D2}(1, t_D) \cong 1/2 \left\{ \ln t_D + .80908 + E_i \left[ -\lambda t_D / \omega(1-\omega) \right] - E_i \left[ -\lambda t_D / (1-\omega) \right] \right\} \tag{2.52}$$

donde:

$$-E_i = (-v) = \int_0^{\infty} \exp \frac{(-v)du}{u}$$

La solución para el caso de un yacimiento finito es obtenida de una forma similar si la condición de frontera de la ecuación 2.48 es reemplazada por:

$$\left. \frac{\partial p_2}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0, \quad \partial p_2 = -\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \partial p_{D2}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r}, \quad \xi = \sqrt{\frac{r^2 \cos^2 \theta}{kr_w^2} + \frac{kr^2 \sin^2 \theta}{r_w^2}} \quad \text{si } k=1:$$

.....

---


$$\xi = \frac{r}{r_w} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r_w}$$

En términos adimensionales:

$$\frac{\partial P_{D2}}{\partial \xi} = 0, \quad \text{para } t_D > 0; \xi=R, \quad \forall \theta.$$

Si  $R^2 \gg k$  la ecuación 2.49 es válida para este caso y la solución es:

$$p_{D2}^*(1, t_D) = \left( \frac{2}{R^2 - 1} \right) \left\{ \frac{1}{4} t_D + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} \left[ 1 - \exp(-\lambda t_D / \omega(1-\omega)) \right] - \left[ (3R^4 - 4R^4 \ln R - 2R^2 - 1/4(R^2 - 1)^2) \right] \right\} \quad (2.53)$$

Para valores de  $R$  y  $t_D$  grandes la solución es:

$$p_{D2}^*(1, t_D) = \left( \frac{2}{R^2} \right) \left\{ t_D + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} \left[ 1 - \exp(-\lambda t_D / \omega(1-\omega)) - (0.75 - \ln R) \right] \right\} \quad (2.54)$$

La solución está limitada a  $t_D > 100 R^2$  para  $\lambda \ll 1$  ó  $t_D > 100 R^2 - 1/\lambda$  para  $\omega \ll 1$ .

---

### 2.3 MODELO DE DeSWAAN

DeSwaan<sup>1,7,11,20-23</sup> presenta una solución analítica para determinar el comportamiento de la presión en un sistema de doble-porosidad; esta solución permite la determinación de características del yacimiento, tales como el producto permeabilidad-espesor (kh) .

Este modelo asume dos tipos de geometrías: fracturas horizontales con bloques en forma de placas infinitas y bloques esféricos de matriz, figura 2.10; se considera la existencia de flujo transitorio a través de la matriz a las fracturas, donde el flujo que cede un bloque es debido a la caída de presión en la fractura que la rodea y se distribuye uniformemente en ésta, de tal manera que la ecuación que representa la variación de la presión en el sistema fracturado con un fluido ligeramente compresible es:

$$\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial t^2} = \phi_f c \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} - q_m(\Delta p_f, t) \quad (2.55)$$

El término  $q_m(\Delta p_f, t)$  representa el flujo cedido por los bloques de matriz a las fracturas en razón a la disminución de presión en sus superficies, ya que la matriz actúa como una fuente uniformemente distribuida en el medio fracturado, este efecto se hace notorio después de cierto lapso de tiempo, debido a que la respuesta de los bloques es lenta respecto a la del medio fracturado debido a la diferencia de permeabilidades entre estos medios.

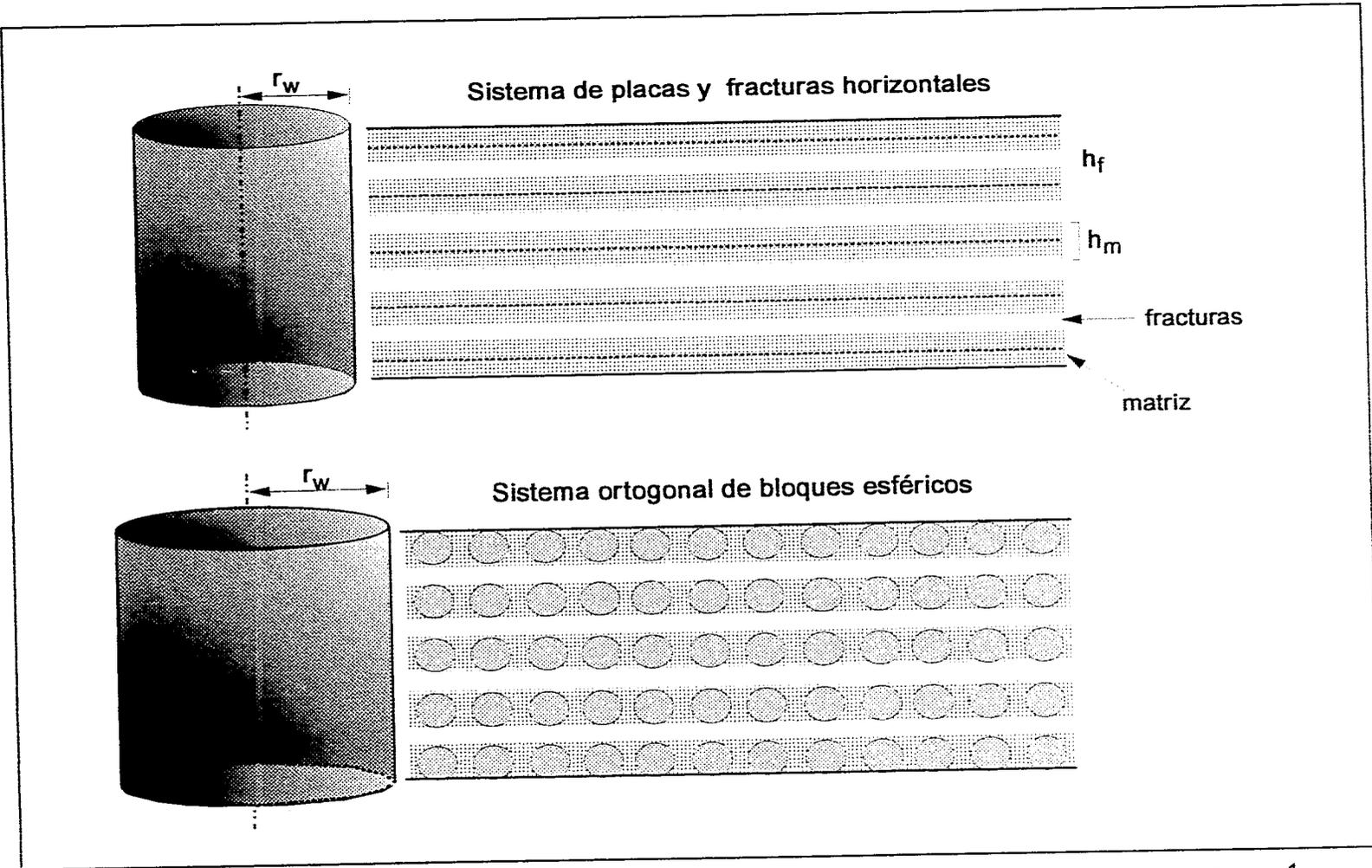


Fig. 2.10 representación esquemática de la geometría de bloques utilizada en el modelo de DeSwaan<sup>1</sup>.

---

Las condiciones inicial y de frontera son:

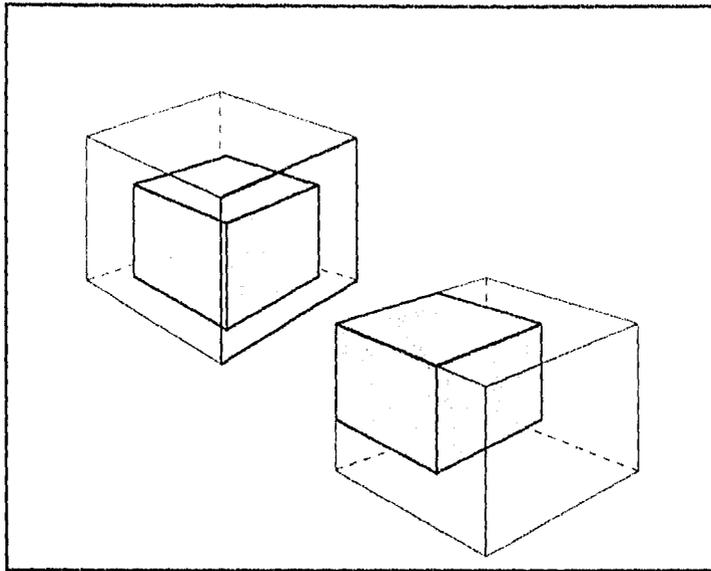
$$\begin{aligned} \Delta p_f &= 0, & t=0 \\ \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} &= \frac{q\mu}{2\pi k_f h_f r_w}, & r = r_w, r = r; & r \geq 0 \\ \Delta p_f &= 0; & r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

El flujo que cede cada bloque a las fracturas, a través de su superficie, puede definirse mediante:

$$q_{um} = \frac{k_m}{\mu} A_m (-\nabla \Delta p_{um})_{\text{en la superficie del bloque}} \quad (2.56)$$

En donde  $p_{um}$  es una función conocida que considera las condiciones de presión inicial constante y cambio unitario de presión en la superficie para  $t > 0$ , ya que los bloques de matriz tienen forma regular.

Si además, se supone que el flujo de salida se distribuye uniformemente en el volumen de la fractura que rodea a cada bloque de matriz, y que para fracturas delgadas en comparación con la dimensión característica de los bloques, este volumen puede aproximarse por  $A_m h_f / 2$ , figura 2.11, así el yacimiento es un conjunto de celdas elementales repetitivas<sup>21,22</sup>.



**Fig. 2.11 Relación de los volúmenes de roca y fractura de la celda elemental<sup>21,22</sup>.**

Si la presión que rodea al bloque es variable, el flujo a través de los bloques está descrito mediante la convolución:

$$q_m(\Delta p_f, t) = \frac{-2}{A_m h_f} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f}{\partial \tau} q_m(t - \tau) d\tau \quad (2.57)$$

Sustituyendo la ecuación 2.57 en la ecuación 2.55 y aplicando la transformada de Laplace<sup>18,18</sup>:

$$\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} = \frac{\phi_f c \partial \Delta p_f}{\partial t} + \frac{2\mu}{A_m k_f h_f} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f}{\partial \tau} q_m(t - \tau) d\tau$$

De la definición de  $\eta_f$ <sup>18</sup>:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} = \frac{1}{\eta_f} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + \frac{2\mu}{A_m k_f h_f} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f}{\partial \tau} q_{um}(t-\tau) d\tau \quad (A)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} dt$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ e^{-st} \Delta p_f \Big|_0^p + s \int_0^p e^{-st} \Delta p_f dt \right\}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ e^{-sp} \Delta p_f(p) - \Delta p_f(0) + s \int_0^p e^{-st} \Delta p_f dt \right\}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} \right\} = 0 + s \int_0^{\infty} e^{-st} \Delta p_f dt - \Delta p_f(0)$$

---


$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} \right\} = s\Delta p_f - 0 = s\Delta p_f \quad (B)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial \tau} q_{um}(t-\tau) d\tau \right\} = \mathcal{L} \left\{ \Delta p_f q_{um}(t-\tau) \right\} = \Delta p_f \mathcal{L} \left\{ q_{um}(t-\tau) \right\}$$

$$\Delta p_f \mathcal{L} \left\{ q_{um}(t-\tau) \right\} = \Delta p_f \int_0^{\infty} e^{-st} q_{um}(t-\tau) d\tau = \Delta p_f s q_{um}(s) \quad (C)$$

Sustituyendo las ecuaciones transformadas B y C en A:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r_w^2} = \frac{1}{\eta_f} s \Delta p_f + \frac{2\mu}{A_m k_f h_f} s \Delta p_f q_{um}(s)$$

factorizando:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r_w^2} = s \Delta p_f \left[ \frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} = \frac{1}{\eta_f} + \frac{2\mu}{A_m k_f h_f} q_{um}(s) \right] \quad (2.58)$$

La solución de esta ecuación considerando las condiciones inicial y de frontera, está dada por la transformada simétrica de Laplace<sup>23</sup>, para tiempos largos:

---

---


$$\Delta p_f = \frac{q_w \mu}{2\pi k_f h_f s} \ln \left[ \frac{\gamma r_w}{2} s^{1/2} \left( \frac{1}{\eta_f} + \frac{2\mu}{k_f h_f A_m} q_m(s)^{1/2} \right) \right] \quad (2.59)$$

Ya que el medio fracturado tienen una permeabilidad mucho más alta que la correspondiente a la matriz, se supone que al principio de la prueba el flujo debido a la compresibilidad del sistema ocurre únicamente en las fracturas.

Como a tiempos cortos, el flujo de los bloques de matriz no existe y la respuesta de presión en el pozo es la ecuación aplicada a yacimientos homogéneos, entonces:

$$\Delta p_f = \frac{q_w \mu}{2\pi k_f h_f} \ln \left( \frac{4\eta_f}{\gamma r_w^2} t \right) \quad (2.60)$$

Conforme pasa el tiempo, el efecto del flujo de los bloques empieza a hacerse patente y la respuesta de presión en el pozo cambia gradualmente a la solución transformada dada en la ecuación 2.59 esta transición gradual no es descrita por el modelo. La solución depende de la forma de los bloques de matriz a través de  $q_{um}(t)$ , que es el flujo causado por un decremento unitario de presión en la superficie de ellos.

La solución depende de la forma de los bloques de matriz. Para el caso de un yacimiento infinito con fracturas horizontales y bloques en forma de placas infinitas, la distribución de la presión en estos bloques es simétrica con respecto a un plano que pasa por la mitad del espesor del estrato.

El cambio de la presión está representado por la siguiente ecuación <sup>20</sup>:

---

• • • • •

---


$$\Delta p_m(z,t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{-1}{2n+1} e^{-\eta_m(2n+1)^2 \pi^2 t / h_m^2} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{h_m} \quad (2.61)$$

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial z}\right)_z = \frac{h_m}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} (-1) e^{-\eta_m(2n+1)^2 \pi^2 t / h_m^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{h_m}$$

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial z}\right)_z = \frac{2}{h_m} \theta_1(1/2, e^{\eta_m \pi^2 t / (h_m/2)^2}) \quad (2.62)$$

La transformada de Laplace de esta ecuación:

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial z}\right)_{z=\frac{h_m}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{\eta_m s}} \tanh\left(\frac{h_m}{2\sqrt{\eta_m}} s^{1/2}\right) \quad (2.63)$$

Si se aproxima el valor de la tangente hiperbólica para argumentos pequeños, esto es  $s$  es pequeño si  $t$  es grande,  $\tanh(x) = x$  entonces:

$$q_{um}(s) = \frac{k_m}{\mu} A_m \frac{h_m}{2\eta_m} \quad (2.64)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación 2.59 y aplicando la transformada simétrica<sup>23</sup> de Laplace, entonces la solución obtenida es semejante a la ecuación 2.60 pero con la siguiente constante de difusividad hidráulica:

---


$$\eta_{est} = 1 / \left( \frac{1}{\eta_f} + \frac{k_m h_m}{k_f h_f} \frac{1}{\eta_m} \right) \quad (2.65)$$

Si existe una relación grande entre las difusividades hidráulicas de la matriz y de la fractura:

$$\eta_{est} = \frac{k_f h_f}{k_m h_m} \eta_m = \frac{k_f h_f}{\mu c \phi_m h_m} \quad (2.66)$$

Si ahora se considera la geometría de los bloques como esferas de igual volumen, la presión interna en una esfera de radio  $r_m$  para  $t > 0$ ; es:

$$\Delta p_m(r, t) = 1 + \frac{2r_m}{\pi r} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\eta_m n^2 \pi^2 t / r_m} \cos \frac{n r \pi}{r_m} \quad (2.67)$$

En donde se considera que existe un cambio unitario de presión en la superficie de la esfera.

Siguiendo un procedimiento semejante al aplicado para estratos infinitos, se obtiene la solución para el caso de bloques esféricos en la ecuación del yacimiento y con constante de difusividad:

$$\eta_{esf} = 1 / \left( \frac{1}{\eta_f} + \frac{2k_m r_m}{3k_f h_f} \frac{1}{\eta_m} \right) \quad (2.68)$$

En donde  $k_f$  es la permeabilidad efectiva de las fracturas, la cual es obtenida de la primera línea de la respuesta de presión, lo cual es diferente a la permeabilidad intrínseca del medio fracturado.

---

---

Las ecuaciones anteriores pueden aplicarse a yacimientos constituidos por bloques de distintas dimensiones y propiedades, que se encuentran distribuidas en un sistema de fracturas con sus valores correspondientes de permeabilidad y porosidad. La constante de difusividad para este sistema es <sup>20</sup> :

$$\eta_{\text{comp}} = 1 / \left( \frac{1}{\eta_f} + \frac{\mu}{k_f} \frac{c}{h_f} \overline{\chi_m \phi_m} \right) \quad (2.69)$$

En donde  $\overline{\chi_m \phi_m}$  es el promedio ponderado de una dimensión característica  $\chi_m$ , que es el espesor del estrato o dos tercios del radio del bloque esférico ( $h_m$  ó  $2/3 r_m$ ) y el valor de la porosidad de esa geometría considerada.

Así, con lo expuesto anteriormente, el modelo considera que el comportamiento para tiempos grandes de un yacimiento con doble-porosidad es semejante al de un yacimiento homogéneo, con la única diferencia que el término de difusividad hidráulica es una función que depende de las propiedades de los bloques (geometría, porosidad) y de las fracturas.

El uso de la solución de estratos o esferas, para un yacimiento determinado, debe ser basado en la descripción geológica que apoye alguna de las geometrías consideradas <sup>7,20</sup>.

# Capítulo 3

## ***Análisis del comportamiento de la presión***

## CAPITULO 3

# ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESION

### 3.1 CARACTERISTICAS DEL MODELO DE WARREN Y ROOT

A partir del análisis de la respuesta obtenida con el modelo de Warren y Root<sup>14</sup> se concluye que son necesarios dos parámetros<sup>14</sup>,  $\omega$  y  $\lambda$  para definir a un yacimiento con comportamiento de doble-porosidad. En este capítulo tales parámetros son estudiados y evaluados en su magnitud y efecto sobre el comportamiento de la presión del yacimiento.  $\omega$  es el parámetro adimensional referido a la capacidad de almacenamiento del sistema de fracturas con respecto a la capacidad de almacenamiento del sistema total y representa la contribución de la porosidad secundaria a la capacidad de almacenamiento del yacimiento, y se representa por:

$$\omega = \frac{\phi_2 c_2}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)} \quad (3.1)$$

El parámetro  $\lambda$  es el que gobierna el flujo interporoso, está relacionado con el contraste de permeabilidades que existen entre los dos medios porosos y define el comportamiento de la presión durante el período de transición cuando los bloques de matriz comienzan a aportar fluido:

---


$$\lambda = \frac{\alpha k_1 r_w^2}{k_2} \quad (3.2)$$

El factor  $\alpha$  está definido por la ecuación <sup>7,10,14</sup>:

$$\alpha = \frac{4n(n+2)}{L^2} \quad (3.3)$$

donde L es una dimensión característica del bloque de matriz y n es el número de planos limitantes de estos bloques, para  $n = 3$ ,  $L^2$  se expresa de la siguiente manera<sup>10</sup>:

$$L^2 = 60r_w^2 \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{\lambda} \quad (3.4)$$

Probablemente la contribución más importante de este estudio es que se considera una variedad de casos sedimentológicos, y el modelo representa el caso general de yacimientos fracturados, así como el caso límite cuando se tiene una porosidad homogéneamente distribuida, lo cual sucede cuando  $\omega = 0$  ó  $\lambda = \infty$ <sup>14</sup>.

Warren y Root<sup>14</sup> proporcionaron las expresiones de la variación de la presión en función del tiempo, así como  $\omega$  y  $\lambda$  para yacimientos infinito y finito en pozos produciendo a gasto constante, ecuaciones 2.52 y 2.53.

La figura 3.1 muestra la solución de la ecuación para un yacimiento infinito, dando el comportamiento de la presión adimensional en función del tiempo adimensional, para diversos valores de  $\omega$  y  $\lambda$ . La respuesta cuando  $\lambda$  toma valores cercanos a

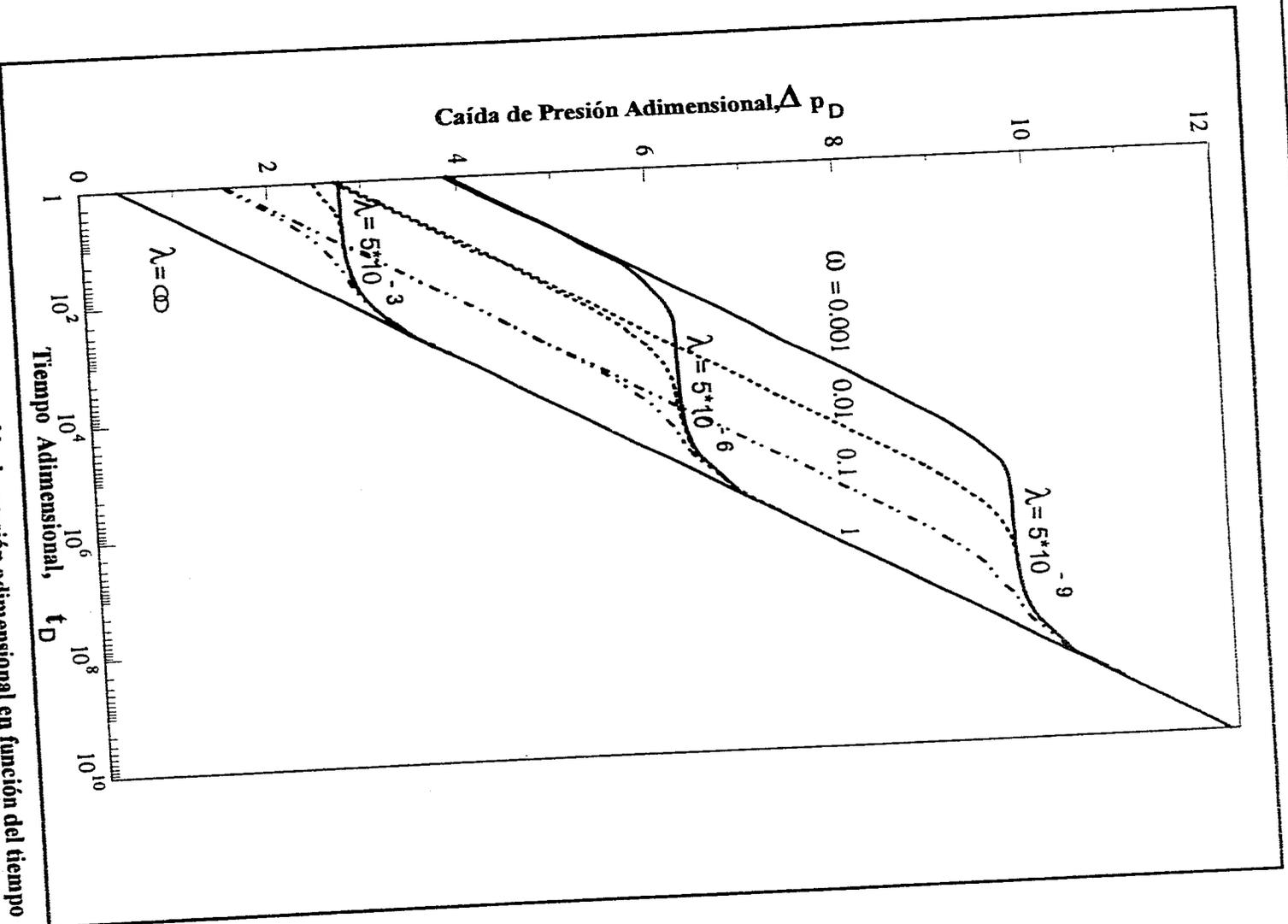


Fig. 3.1 Comportamiento de la caída de presión adimensional en función del tiempo adimensional para varios valores de  $\omega$  y  $\lambda$ , según el modelo de Warren - Root 14

---

∞, puede compararse con aquella establecida para yacimientos homogéneos<sup>1,7,14</sup>.

La figura 3.2 muestra la solución dada por la ecuación de la caída de presión para un yacimiento infinito, donde si se grafican la presión vs el log t se observa la presencia de dos líneas rectas paralelas que corresponden a los tiempos cortos y largos de una prueba de presión, además de una curva que une a estas dos líneas rectas, las cuales definen tres regiones con comportamientos característicos, ecuación 2.52<sup>1,7,14</sup>: La primera región corresponde a los primeros tiempos de producción, durante los cuales el fluido es producido principalmente del sistema de fracturas; corresponde a valores pequeños del argumento de la función Ei, es decir - Ei(-x) = -γ - ln x, y por tanto, la ecuación 2.52 para tiempos cortos puede aproximarse a:

$$p_D(1, t_D) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907 + \ln \frac{1}{\omega}) \quad (3.4)$$

que representa una línea recta semilogarítmica.

La segunda región corresponde a un periodo de transición, durante el cual la variación de la presión permanece aproximadamente constante, corresponde a la aportación inicial de fluido de los bloques de matriz al sistema de fracturas. La ocurrencia y duración de esta región depende de los parámetros ω y λ.

La tercera región corresponde a tiempos largos, cuando el flujo transitorio ha sido alcanzado y el yacimiento se comporta como un sistema homogéneo. Para valores suficientemente grandes del tiempo, las funciones Ei de la ecuación 2.52 tienden a ser cero y así es posible obtener la siguiente ecuación:

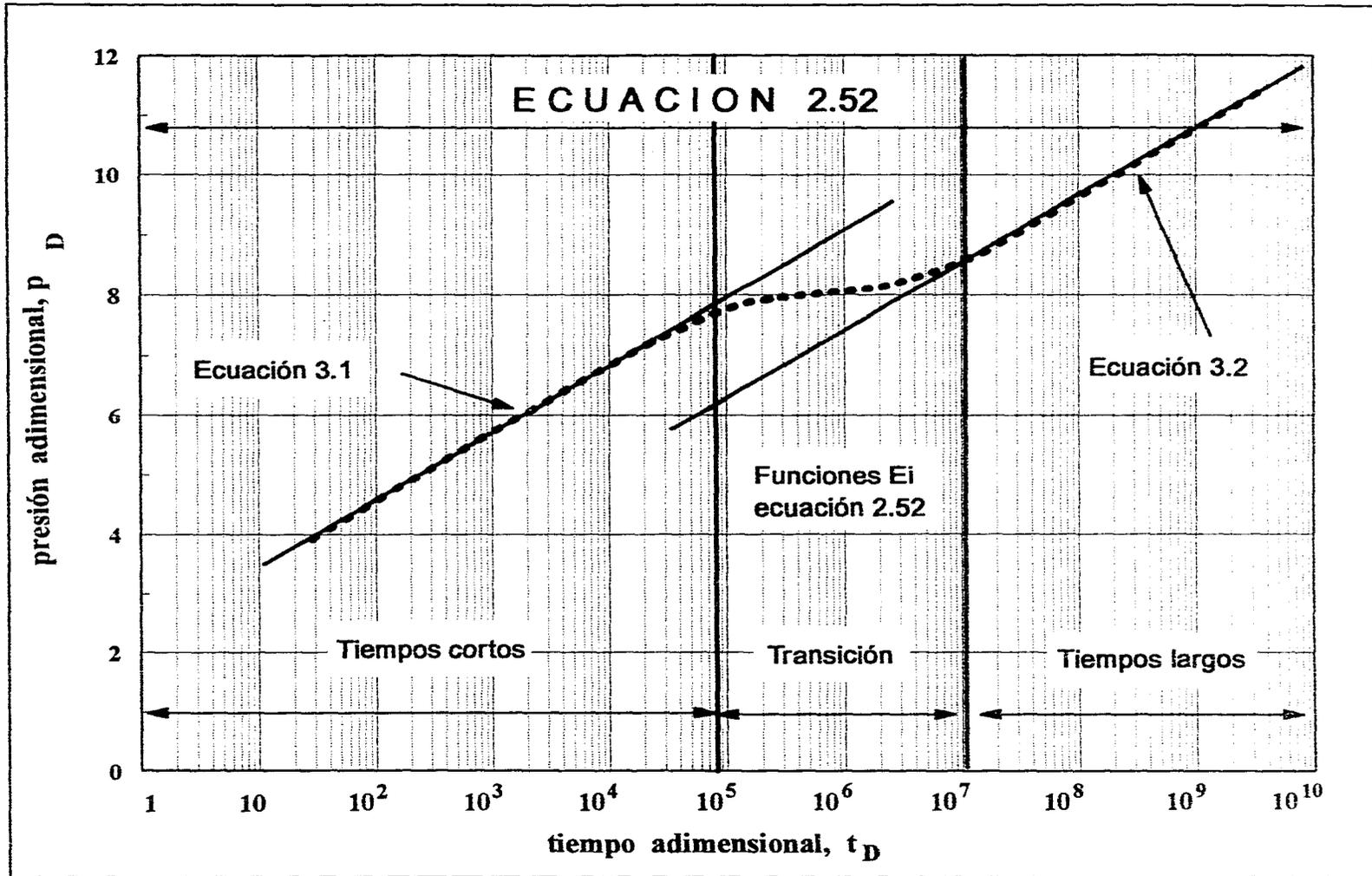


Fig. 3.2 Gráfica del comportamiento semilogarítmico del modelo de Warren-Root

---


$$p_D(1, t_D) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907 + \ln \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{2} \ln 2.25 t_D$$

$$p_D(1, t_D) = 1.151 \log(2.25 t_D) \quad (3.5)$$

Entonces esta tercera región está representada por una línea recta, paralela a aquella de la primera etapa de producción y verticalmente desplazada por  $\ln \sqrt{1/\omega}$ . La pendiente de ambas líneas rectas es  $-1.151/\text{ciclo}^{1,7,14}$ .

La separación entre las líneas rectas a tiempos cortos y largos depende de la capacidad de almacenamiento de las fracturas,  $\omega$ , mientras que el período de transición es función del parámetro  $\lambda$ ; la pendiente de ambas líneas rectas es función de la capacidad de flujo del sistema de fracturas, independientemente de la porosidad de la matriz (granular).

Si la capacidad de almacenamiento de las fracturas es despreciable,  $\omega = 0$  el inicio de la producción está caracterizado por un incremento de la presión aproximándose asintóticamente a la solución homogénea que refleja la falta de capacidad de almacenamiento en las fracturas, figura 3.3.

Las figuras 3.4 y 3.5 representan la desviación del comportamiento asintótico, dado por la siguiente ecuación:

$$\Delta_D = p_{2D}(1, t_D) - \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907)$$

$$\Delta_D = \text{Ei}\left(-\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}\right) - \text{Ei}\left(-\frac{\lambda t_D}{1-\omega}\right) \quad (3.6)$$

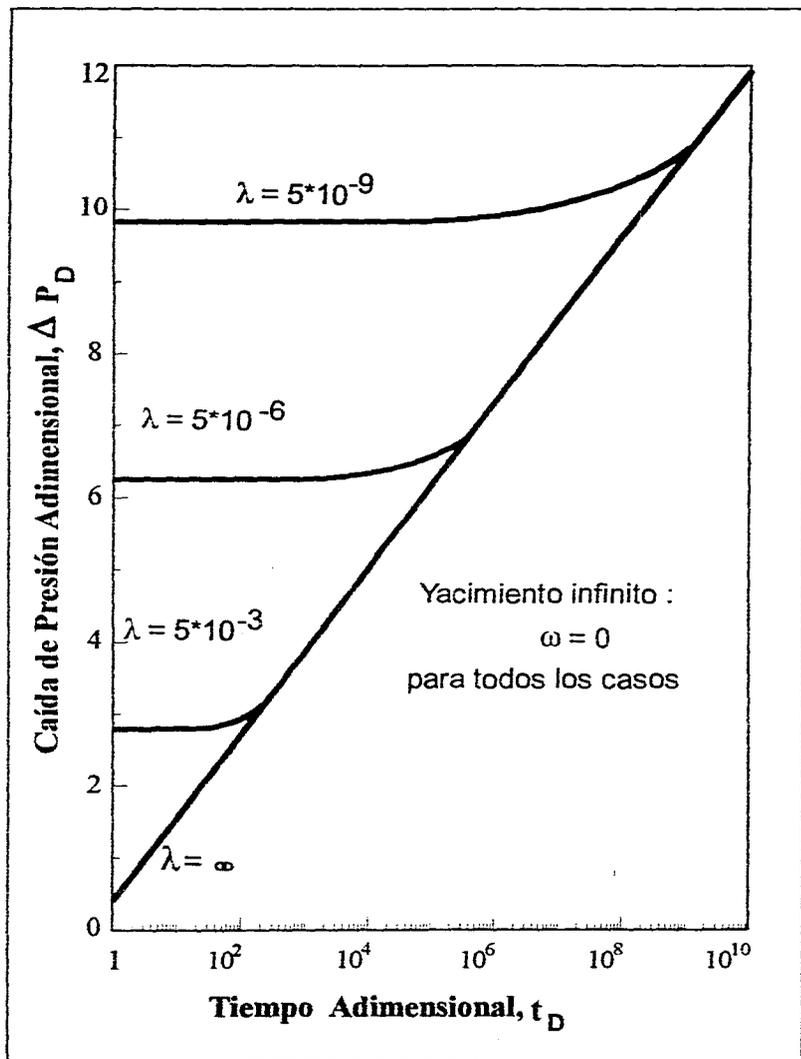


Fig. 3.3 Solución del modelo de Warren-Root para un yacimiento infinito considerando  $\omega = 0$  y algunos valores particulares de  $\lambda^{14}$ .

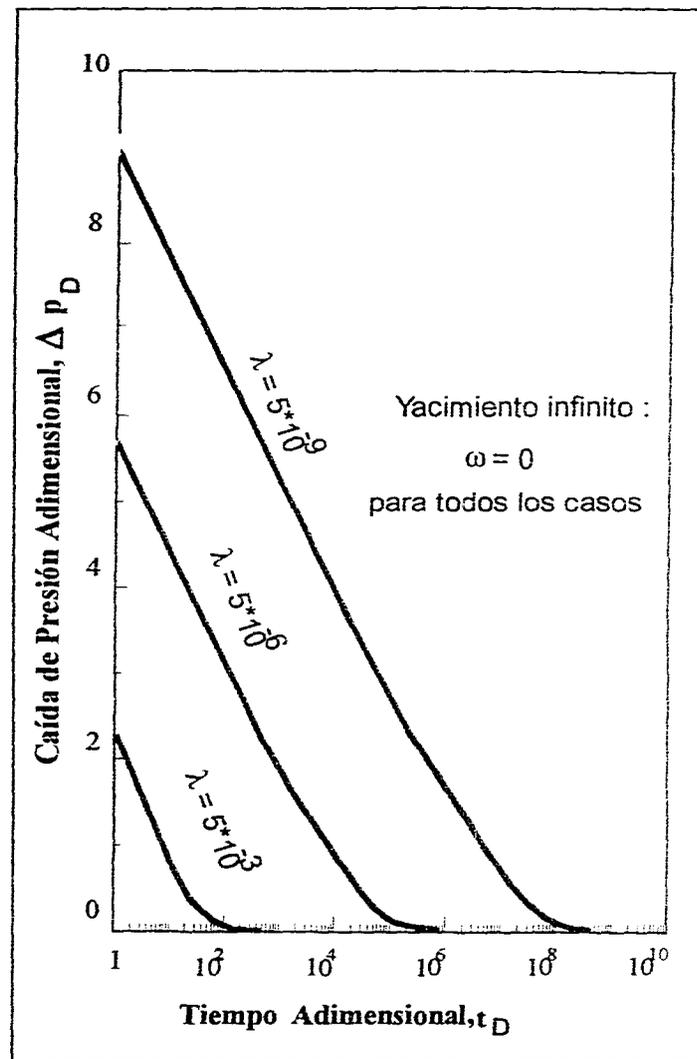


Fig. 3.4 Desviación del comportamiento asintótico considerando  $\omega = 0$  para valores particulares de  $\lambda^{14}$ .

---

La curva generada a partir de la diferencia de las funciones Ei intersecta al eje  $\Delta_D$  en  $\Delta_{D1} = \ln \sqrt{1/\omega}$ ; así para :

$$\begin{aligned} \omega = 0.001 & \quad \Delta_D = 3.4538 \\ \omega = 0.01 & \quad \Delta_D = 2.3025 \\ \omega = 0.1 & \quad \Delta_D = 1.1512 \end{aligned}$$

La intersección de la tangente a la curva de diferencias, a través del punto  $t_D = 1$ , está dada por :

$$\Delta_{D2} = \frac{1}{2} \left( -\gamma - \frac{\ln \lambda}{(1-\omega)} \right) \quad (3.7)$$

Con  $\Delta_{D1}$  y  $\Delta_{D2}$ , como valores conocidos y obtenidos de una prueba de producción pueden ser determinados los parámetros  $\omega$  y  $\lambda$ , para definir el comportamiento de doble-porosidad <sup>1,14</sup>.

La ecuación que describe el comportamiento de incremento de presión es obtenida por medio de la aplicación del principio de superposición de las soluciones de la ecuación 2.52:

$$\begin{aligned} \Delta p_{2D}(1, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left( \frac{t_D + \Delta t_D}{\Delta t_D} \right) + \text{Ei} \left[ -\frac{\lambda(t_D + \Delta t_D)}{\omega(1-\omega)} \right] - \text{Ei} \left[ -\frac{\lambda \Delta t_D}{\omega(1-\omega)} \right] \right. \\ \left. - \text{Ei} \left[ -\frac{\lambda(t_D + \Delta t_D)}{1-\omega} \right] + \text{Ei} \left[ -\frac{\lambda \Delta t_D}{1-\omega} \right] \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

---

Para valores grandes del tiempo de producción, la función Ei que contiene el parámetro  $t_0$  tiende más rápidamente a cero y así la solución de la ecuación 3.8 se reduce a :

$$\Delta p_{2D}(1, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left( \frac{t_D + \Delta t_D}{\Delta t_D} \right) - Ei \left[ -\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] + Ei \left[ -\frac{\lambda \Delta t_D}{1-\omega} \right] \right\} \quad (3.9)$$

Las ecuaciones 3.8 y 3.9 están sujetas a las mismas limitaciones de la ecuación 2.52,  $\Delta t_D > 100\omega$  para  $\lambda \ll 1$  ó  $\Delta t_D > 100\lambda - 1/\lambda$ , para  $\omega \ll 1$  y  $\lambda t_D > 3^{1,7,14}$ .

La ecuación 3.9 es muy similar a la forma de la ecuación 2.52 y el comportamiento de la solución de ambas ecuaciones es muy parecido también; esto se muestra en los tres períodos caracterizados por el modelo y descritos en párrafos anteriores. La figura 3.6 representa algunas curvas típicas de incremento de presión en un yacimiento infinito para un valor constante de  $\lambda$  y diversos valores de  $\omega$ . Las mismas tres regiones con comportamiento diferente para las pruebas de decremento son observadas también en las pruebas de incremento. Las curvas presentan una segunda línea recta, exceptuando aquella de  $\omega = 0$ ; este comportamiento es típico de los yacimientos de doble - porosidad.

Un análisis similar se desarrollo, para los mismos valores del desplazamiento entre las dos líneas rectas en  $p_{D2}$  vs  $\ln \frac{\Delta t_D}{(t_D + \Delta t_D)}$  para la curva de incremento<sup>1</sup> :  $\ln \sqrt{1/\omega^2}$ .

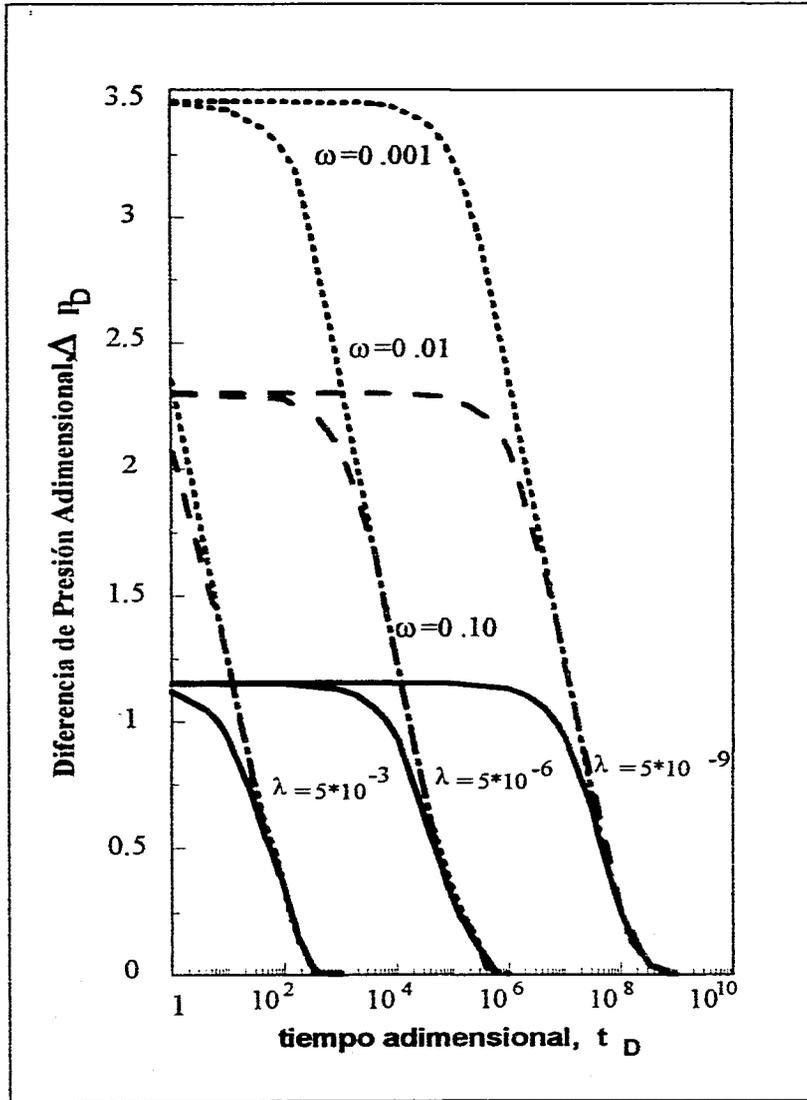


Fig. 3.5 Desviación del comportamiento asintótico<sup>14</sup>.

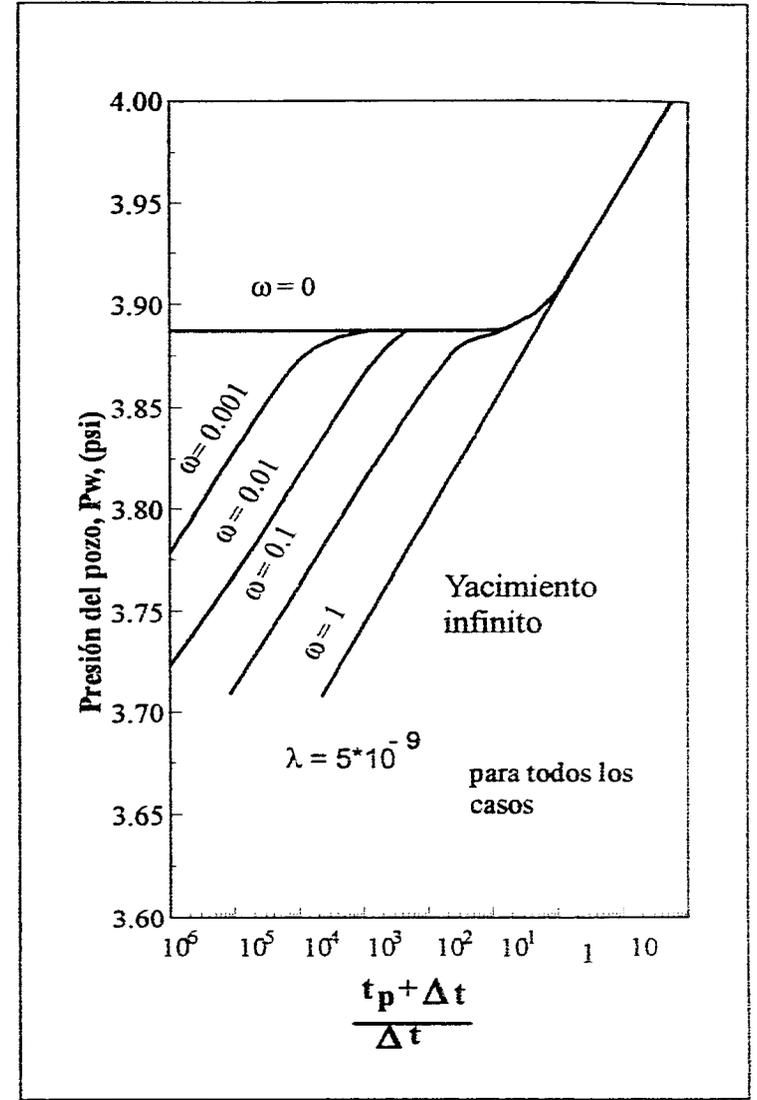


Fig. 3.6 Curvas típicas de incremento de presión en un yacimiento infinito, para un valor constante de  $\lambda$  y diversos valores de  $\omega$ <sup>14</sup>.

---

La intersección de la tangente a través del punto de inflexión, para la curva de diferencias, del comportamiento asintótico expresado por <sup>1</sup>:

$$\Delta = p_{2D} - \ln \Delta t_D / (t_D + \Delta t_D) \quad \text{vs} \quad \ln \Delta t_D / (t_D + \Delta t_D)$$

es obtenida para el tiempo inicial de la prueba de incremento, cuando  $\Delta t = 0$   
 $\ln \Delta t_D / (t_D + \Delta t_D) = \Delta$ .

El resultado es el mismo que aquel establecido para la curva de decremento<sup>1</sup>:

$$\Delta = [-\gamma - \ln \lambda / (1 - \omega)] / 2.$$

### **3.2 CARACTERISTICAS DEL MODELO DE DeSWAAN**

Del análisis del modelo de DeSwaan<sup>20-23</sup> se observa que el comportamiento para tiempos largos en un yacimiento fracturado es equivalente al de un yacimiento homogéneo con una difusividad hidráulica que depende de las propiedades de los bloques y las fracturas. La comparación de los resultados para el caso de considerar estratos infinitos, calculados para tiempos cortos con la ecuación 2.60 y para tiempos largos con la ecuación 2.65, con simulaciones numéricas presentadas por Kazemi<sup>19</sup> se muestra en la figura 3.7. Los datos correspondientes al yacimiento se ilustran en la Tabla 3.1, expresados tanto en unidades Darcy como las usadas en el campo.

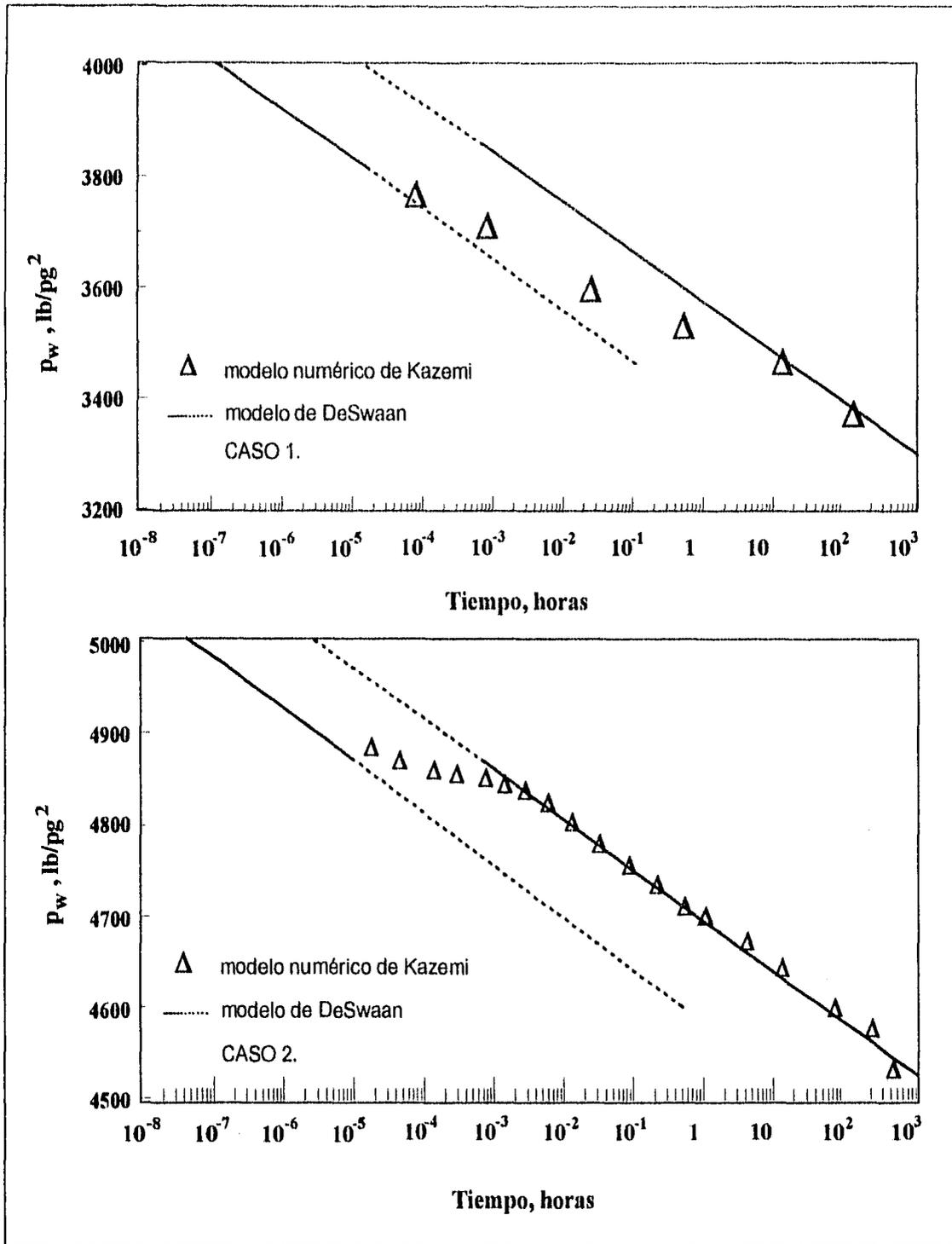


Fig. 3.7 Comportamiento de la presión en una prueba de incremento para los casos 1 y 2 según el modelo de De Swaan <sup>20</sup>.

PARAMETRO	CASO 1		CASO 2	
	UNIDADES PRACTICAS	UNIDADES DARCY	UNIDADES PRACTICAS	UNIDADES DRACY
$\phi_f$	0.05	0.05	0.08	0.08
$\phi_{ma}$	0.45	0.45	0.45	0.45
$k_{ma}$	$10^{-2}$ mD	$10^{-3}$ darcy	1 mD	$10^{-3}$ darcy
$k_f$	7236.39 mD	7.23639 darcy	5521 mD	5.521 darcy
$h_{ma}$	9.05 pies	275.844 cm	4.9 pies	149.352 cm
$h_f$	0.025 pies	0.762 cm	0.025 pies	0.762 cm
$q$	90.5 bo/d	166.52 cc/seg	200bo/d	368 cc/seg
$\mu$	1 cp	1 cp	0.235 cp	0.235 cp
$c_t$	$10^{-5}$ psi <sup>-1</sup>	$14.7 \cdot 10^{-5}$ atm <sup>-1</sup>	$10^{-5}$ psi <sup>-1</sup>	$14.7 \cdot 10^{-5}$ atm <sup>-1</sup>
$r_w$	0.375 pies	11.43 cm	0.375 pies	11.43 cm

Tabla 3.1 Características de los yacimientos idealizados <sup>8,20</sup>.

Como se muestra en la figura 3.8, la línea recta de la etapa inicial de la prueba, ecuación 2.60, se dibuja con una línea continua hasta el tiempo en el cual empieza la solución para tiempos largos, donde continúa como una línea sólida con una constante de difusividad dada por la ecuación 2.65.

La pendiente de ambas líneas rectas depende del parámetro  $kh$  de las fracturas y del ritmo de producción.

Para un yacimiento dado, el uso de la solución de estratos o esferas depende de la evidencia geológica que apoye el uso de cualquiera de las dos geometrías<sup>20</sup>.

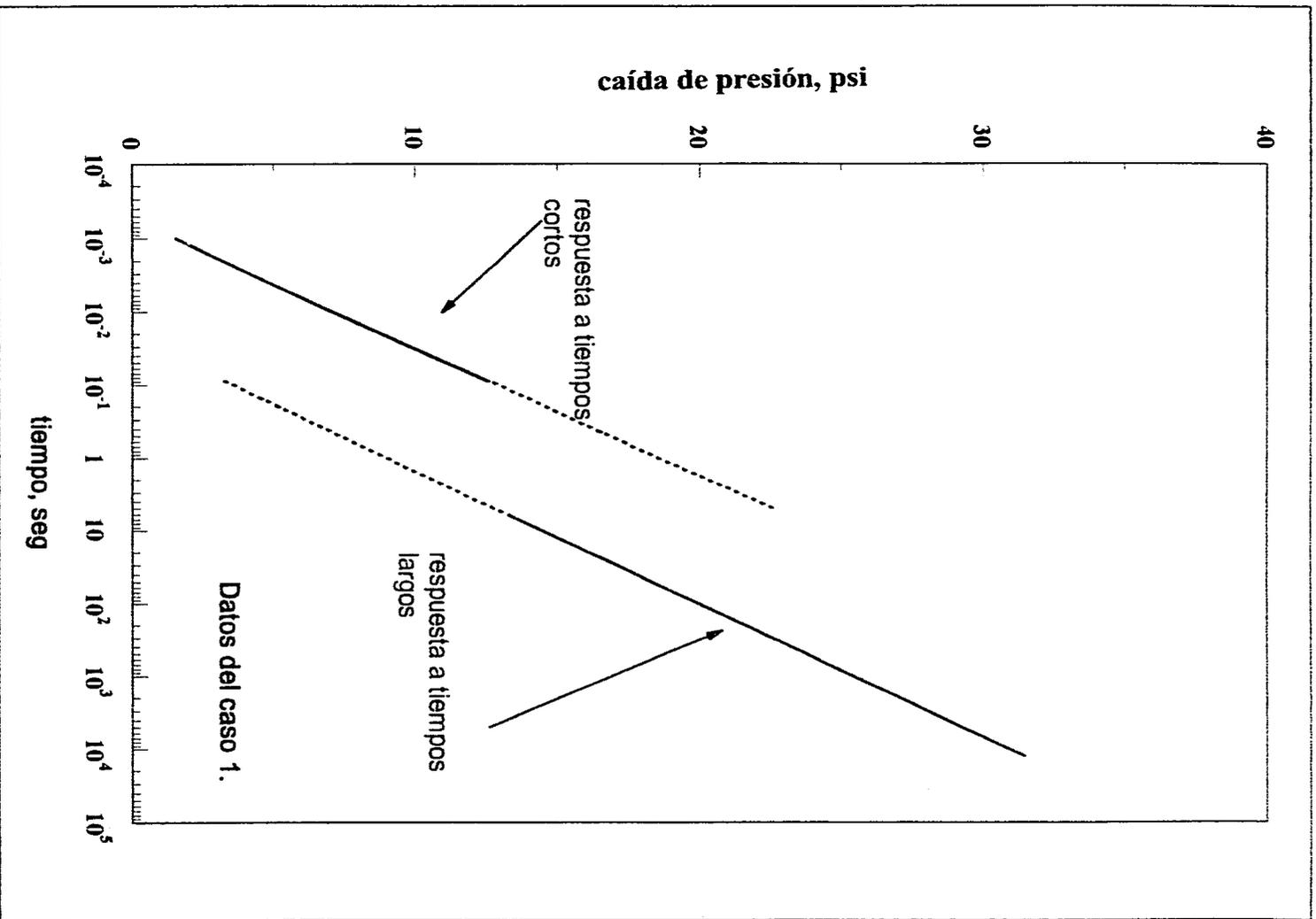


Fig. 3.8 Respuesta de presión a tiempos cortos y largos considerando estratos según el modelo de DeSwaan<sup>20</sup>.

---

Los resultados de este modelo pueden ser extensivos a yacimientos heterogéneos con zonas densas, equivalentes a bloques de matriz, incrustadas en un medio de alta transmisibilidad, el cual es equivalente a una red de macrofracturas<sup>20-23</sup>.

La solución para tiempos cortos, ecuación 2.60, puede considerarse como una solución asintótica al tiempo cero de la prueba, ya que los bloques de matriz cercanos al pozo pueden contribuir al flujo desde el inicio de la prueba.

### **3.3 CARACTERISTICAS DEL COMPORTAMIENTO DE PRESION**

Existen varias técnicas para identificar el comportamiento de doble-porosidad, tales como el análisis convencional el cual implica la gráfica de los datos de presión contra el logaritmo de una función del tiempo<sup>24,25</sup>. Teóricamente en este tipo de análisis el comportamiento de doble-porosidad es reconocido por la presencia de dos líneas rectas paralelas en una gráfica semi-logarítmica, la primera línea recta representa el comportamiento homogéneo del medio más permeable antes de que el medio menos permeable empiece a manifestarse; esta línea recta se prolonga durante un mayor tiempo para el modelo de flujo interporoso pseudo-estacionario que para flujo interporoso transitorio; la segunda línea recta representa el comportamiento de ambos medios cuando los efectos de la matriz están completamente establecidos<sup>25</sup>.

Las dos líneas rectas se encuentran separadas por una zona de transición que corresponde al comportamiento del flujo interporoso, la transición puede ser casi una línea recta en el caso de que el flujo sea transitorio y la pendiente de esta recta es aproximadamente la mitad de la pendiente de las líneas paralelas, figuras

---

3.2 , 3.7 y 3.9. En la práctica es común que la primera línea recta no se observe, esto depende de las condiciones del pozo, la composición de los fluidos del yacimiento.

Otra manera de identificar el sistema de doble-porosidad es mediante el análisis log-log que involucra una gráfica del logaritmo del cambio de la presión contra el logaritmo del tiempo. El comportamiento de doble-porosidad puede ser reconocido de este análisis si existe la presencia de una forma de "S" en el gráfico presentado, figura 3.10; donde la porción inicial de la curva representa el comportamiento en el medio más permeable, la región de transición corresponde al flujo interporoso durante el cual la presión en ambos medios se equilibra; finalmente, los efectos del sistema total se observan en la última porción de la curva<sup>25</sup>.

Generalmente las técnicas de análisis de línea recta no son confiables como herramientas de diagnóstico, porque una aparente línea recta no necesariamente indica la existencia de un régimen de flujo específico, el análisis log-log representa un mejoramiento de los análisis convencionales semi-logarítmicos, pero no es confiable en su totalidad ya que algunas veces la forma de "S" es difícil de observarse en pozos altamente dañados y por tanto, el comportamiento puede ser erróneamente diagnosticado como homogéneo; una forma de "S" puede encontrarse en yacimientos semi-infinitos con comportamiento homogéneo, por lo que se hace necesario contar con otra herramienta que proporcione un diagnóstico confiable de comportamiento del sistema pozo-yacimiento<sup>25</sup>.

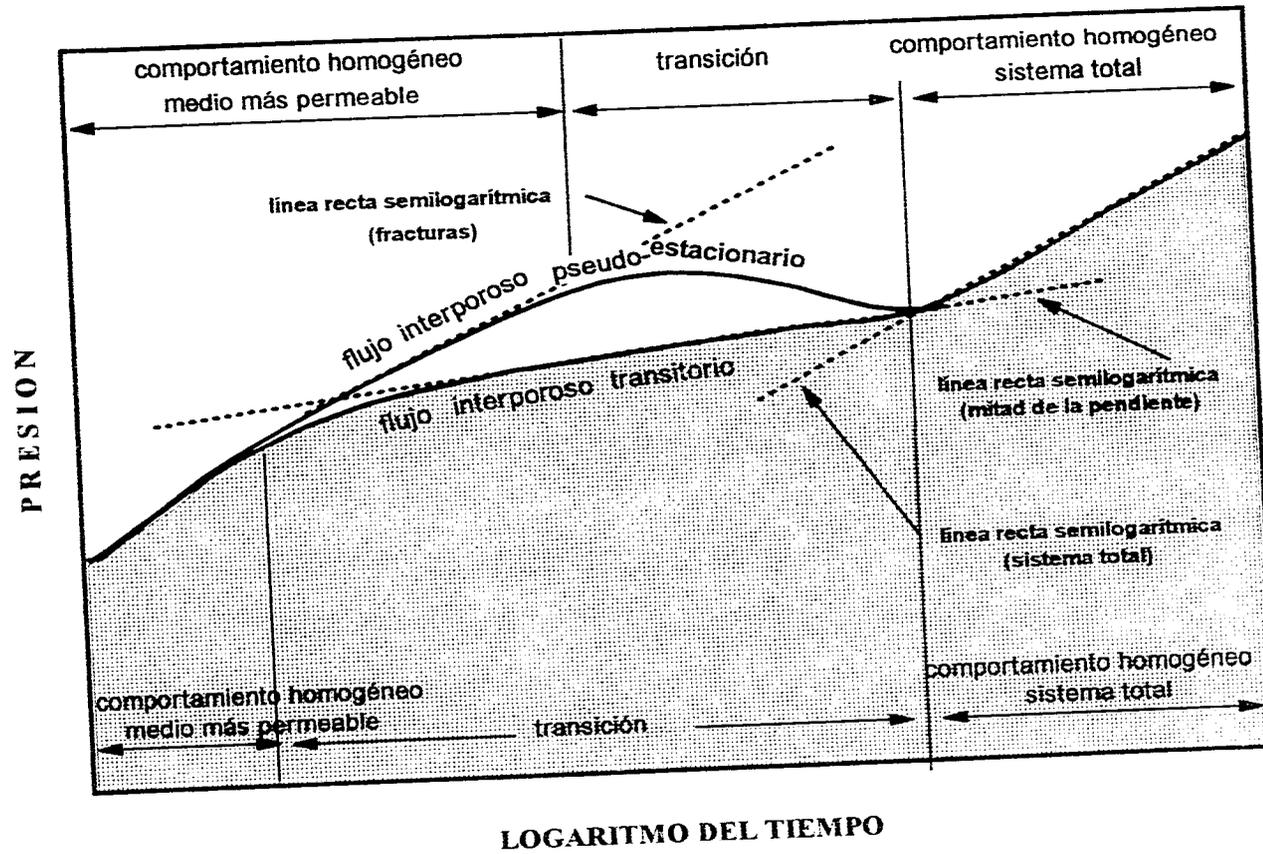


Fig. 3.9 Gráfica semi-logarítmica para flujo pseudo-estacionario y transitorio <sup>25</sup>.

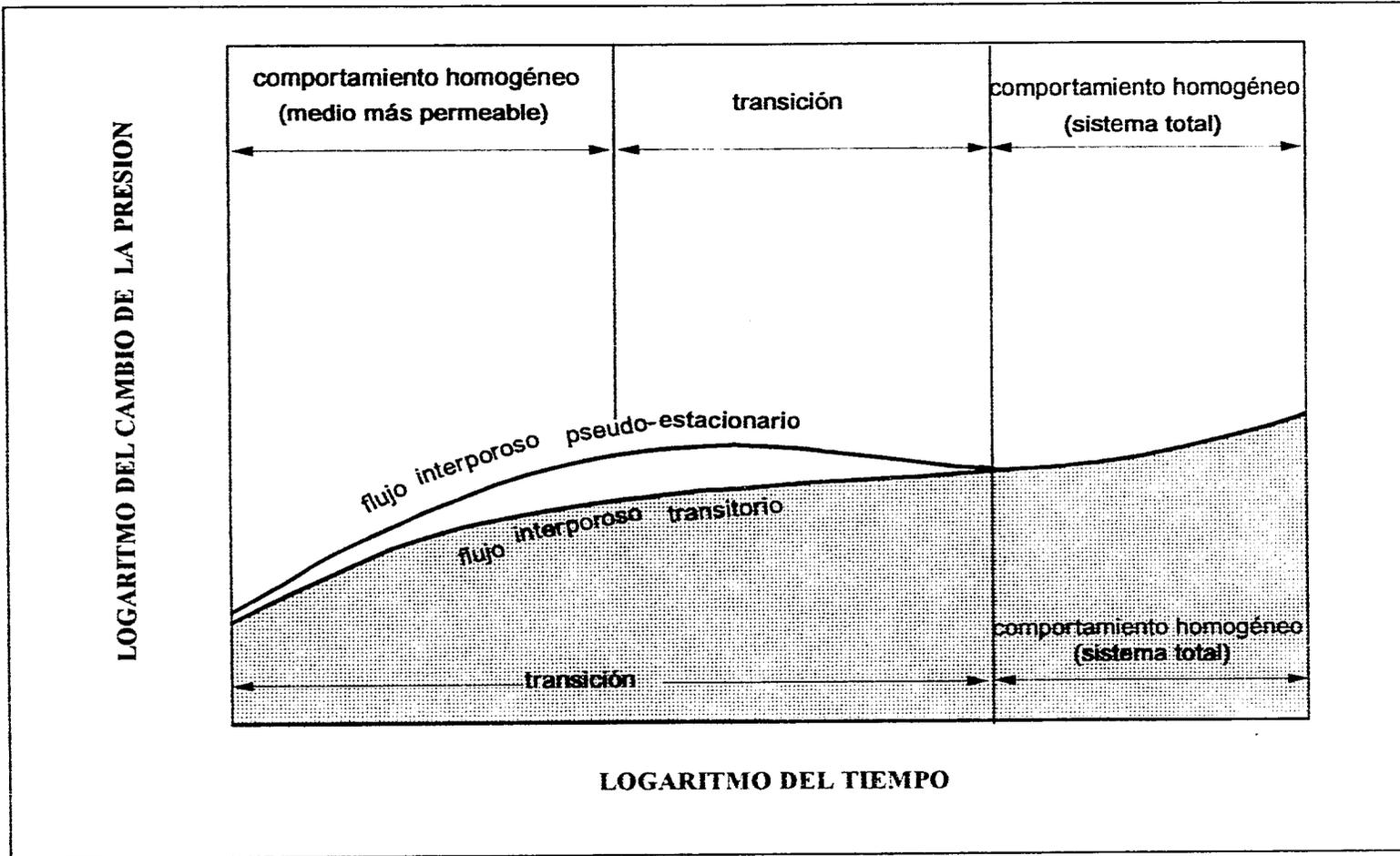


Fig. 3.10 Gráfica log-log para flujo pseudo-estacionario y transitorio <sup>25</sup>.

---

• • • • •

El análisis de la derivada es la forma más eficiente para identificar el modelo de interpretación e involucra una gráfica log-log de la derivada de la presión con respecto a alguna función del tiempo contra el tiempo, figuras 3.11 y 3.12<sup>26-34</sup>

El comportamiento de doble-porosidad está caracterizado por la existencia de un mínimo en la derivada de la presión; para una prueba de duración adecuada este mínimo puede ser precedido y seguido por una estabilización como se muestra en la figura 3.11 ó bien, solo seguido por una estabilización, figura 3.12.

La primera estabilización, figura 3.11, representa el comportamiento homogéneo del medio más permeable y corresponde a la primera línea recta que muestra el análisis convencional de Warren y Root o de DeSwaan, figuras 3.2 y 3.7, respectivamente. La segunda estabilización se presenta con el mismo valor de la derivada presente en la primera estabilización y muestra el comportamiento del sistema total, esta segunda estabilización corresponde a la segunda línea recta del análisis convencional<sup>25</sup>.

En la figura 3.12, la única estabilización que ocurre representa el comportamiento de ambos medios permeables actuando homogéneamente.

La forma del mínimo depende del tipo de flujo interporoso existente en el comportamiento de doble-porosidad; como se observa en la figuras 3.11 y 3.12. Para un régimen pseudo-estacionario se obtiene una forma de "V" en el mínimo de la derivada, en contraste con la existente en el régimen transitorio donde se observa una forma de "U" abierta para el mínimo. La parte más baja del mínimo para el flujo transitorio corresponde al valor de la derivada de presión que es siempre más grande o igual a la mitad del valor de la derivada de presión obtenida en la primera estabilización<sup>25</sup>.

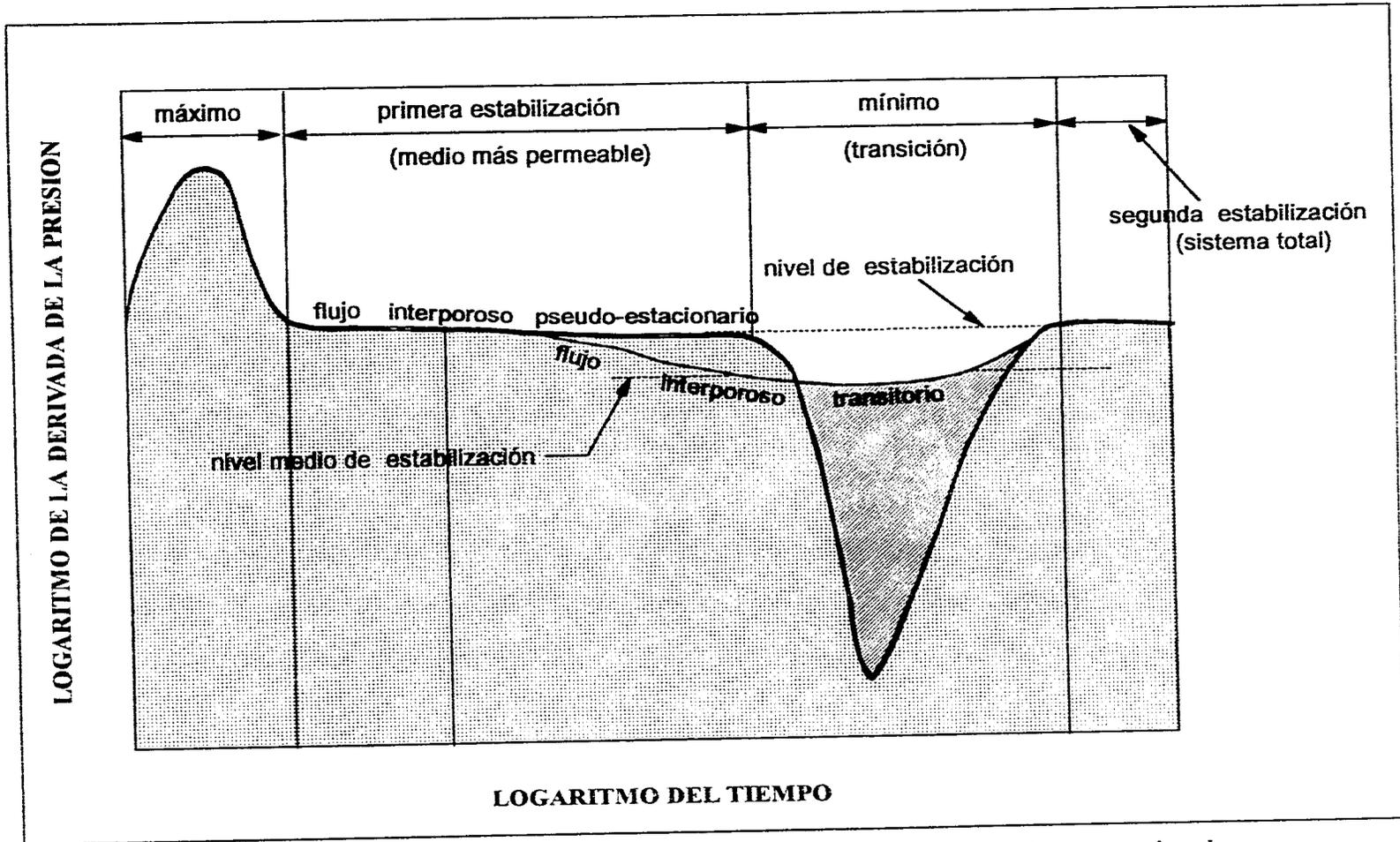


Fig. 3.11 Gráfica de la derivada donde se observa la estabilización anterior y posterior al período de transición. Comportamiento de doble - porosidad<sup>25</sup>.

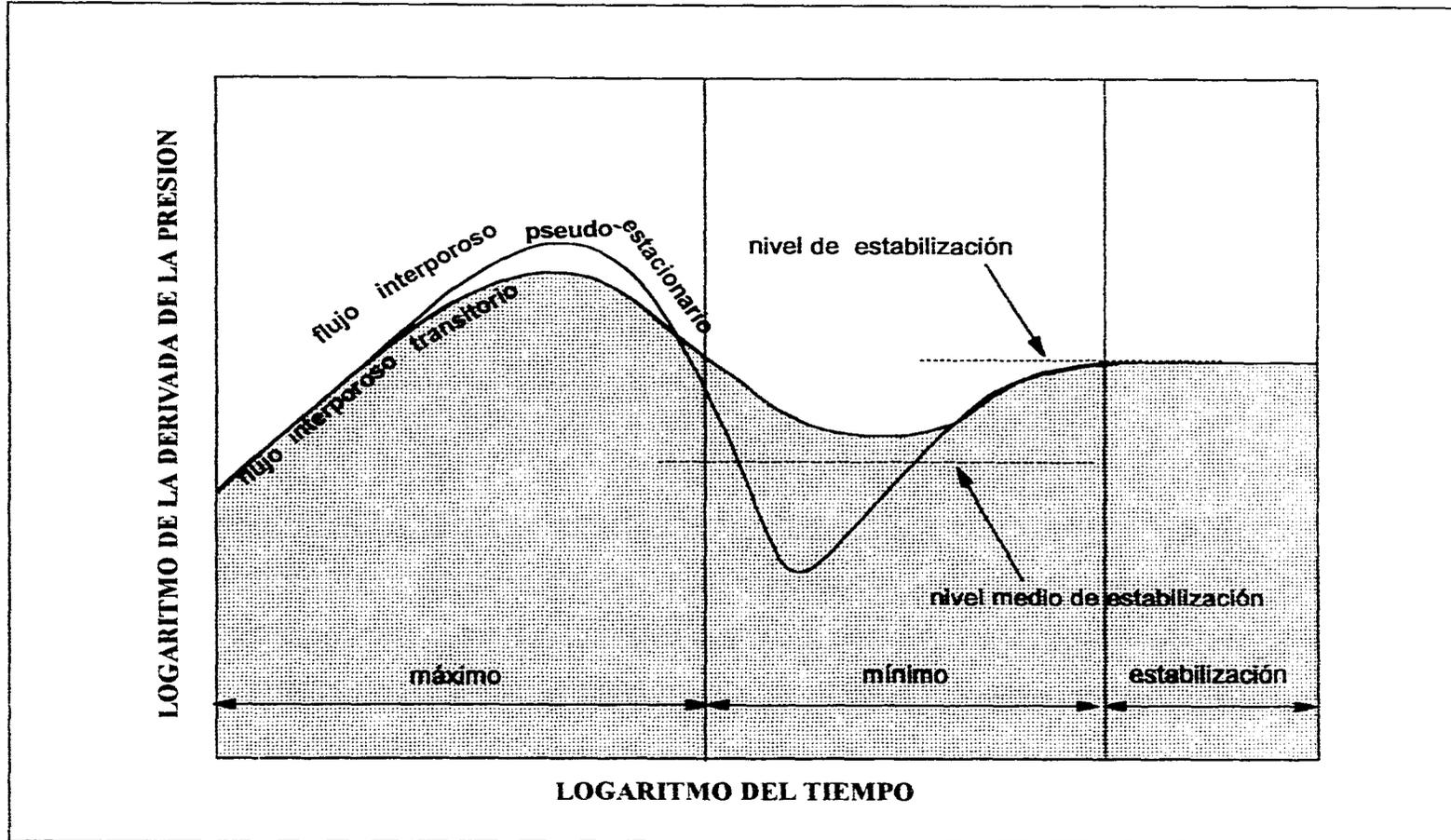


Fig. 3.12 Gráfica de la derivada donde se observa solo la estabilización posterior al período de transición comportamiento de doble - porosidad<sup>25</sup>.

---

Las curvas tipo que representan la respuesta de presión de un sistema con comportamiento de doble-porosidad se muestran en las figuras 3.13 y 3.14, considerando flujo interporoso pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente. La curva tipo de la figura 3.13 fué construida a partir de la combinación de <sup>27</sup>:

1. Las curvas  $C_D e^{2s}$  que corresponden al flujo radial infinito del comportamiento homogéneo de fracturas y del sistema total, y
2. Las curvas  $\lambda e^{2s}$  que muestran el comportamiento de la presión en la zona de transición.

Además, de la respuesta de la derivada caracterizada por las curvas  $(\lambda C_D) / \omega(1-\omega)$  y  $(\lambda C_D)_{f+m} / (1-\omega)$ .

Una respuesta completa para el comportamiento de doble-porosidad muestra tres curvas, una para cada régimen característico: 1) una curva de comportamiento homogéneo para tiempos iniciales de producción correspondiente al sistema de fracturas, 2) una curva que muestra el comportamiento de la presión en el período de transición y 3) una curva de comportamiento homogéneo para el sistema total (matriz y fracturas), figura 3.15. Para el caso A la presión para el comportamiento homogéneo cae en la curva etiquetada  $(C_D e^{2s})_f = 1$ , posteriormente comienza el período de transición y toma la curva  $\lambda e^{-2s} = 3 \cdot 10^{-1}$  hasta que alcanza un nuevo comportamiento homogéneo  $(C_D e^{2s})_{f+m} = 10^{-1}$ . Los parámetros kh, C y s se pueden obtener por medio de los datos del ajuste con curvas tipo,  $\omega$  se obtiene de las curvas  $C_D e^{2s}$  y la ecuación 3.8, y  $\lambda$  del ajuste de la curva de transición,  $\lambda e^{-2s}$ . En el caso B se tiene el siguiente comportamiento:  $(C_D e^{2s})_f = 10^5$ ,  $\lambda e^{-2s} = 10^{-7}$  y  $(C_D e^{2s})_{f+m} = 10^4$ .

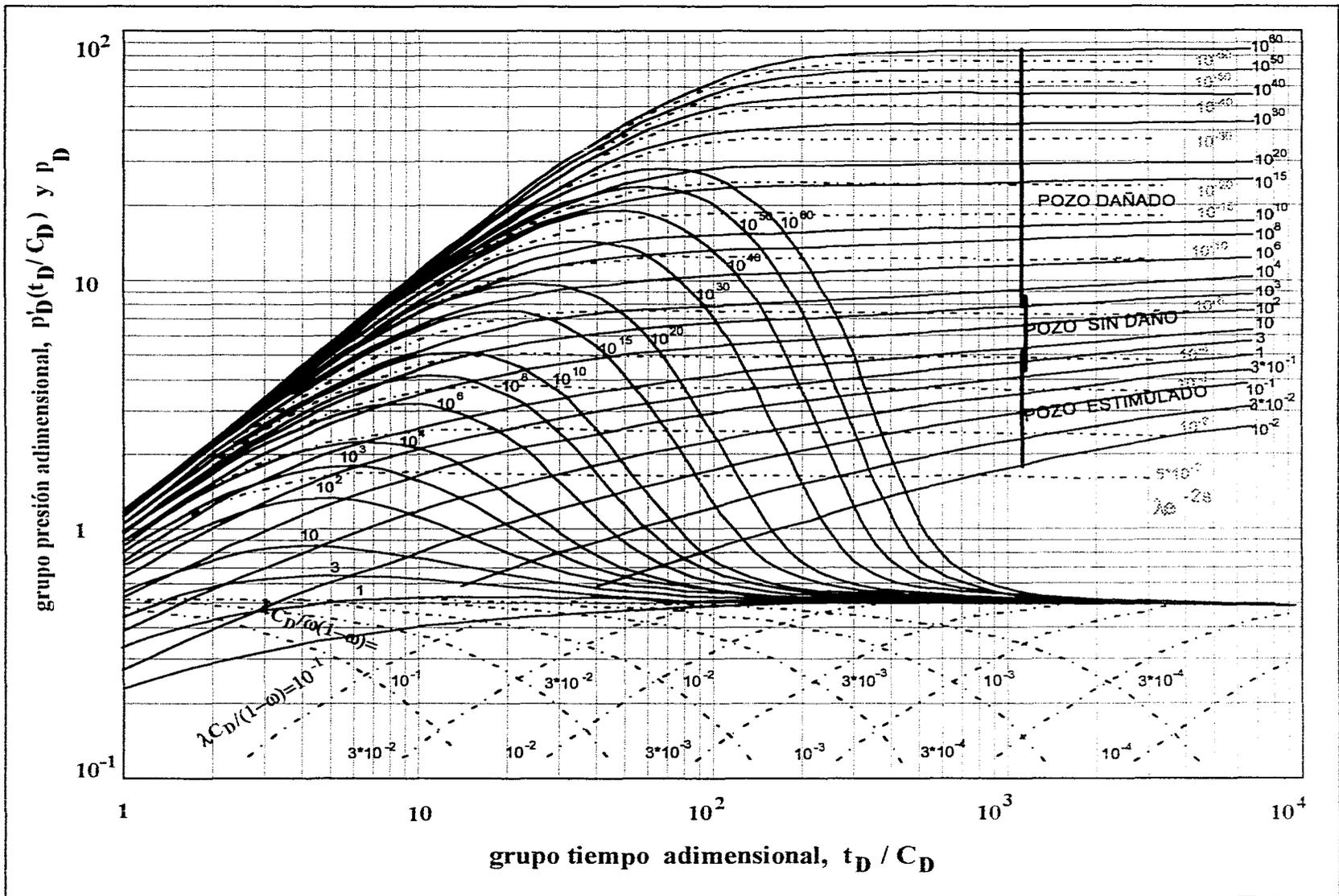


Fig. 3.13 Curva Tipo de la respuesta de presión de un pozo con comportamiento de doble-porosidad, flujo interporoso pseudo-estacionario<sup>28</sup>.

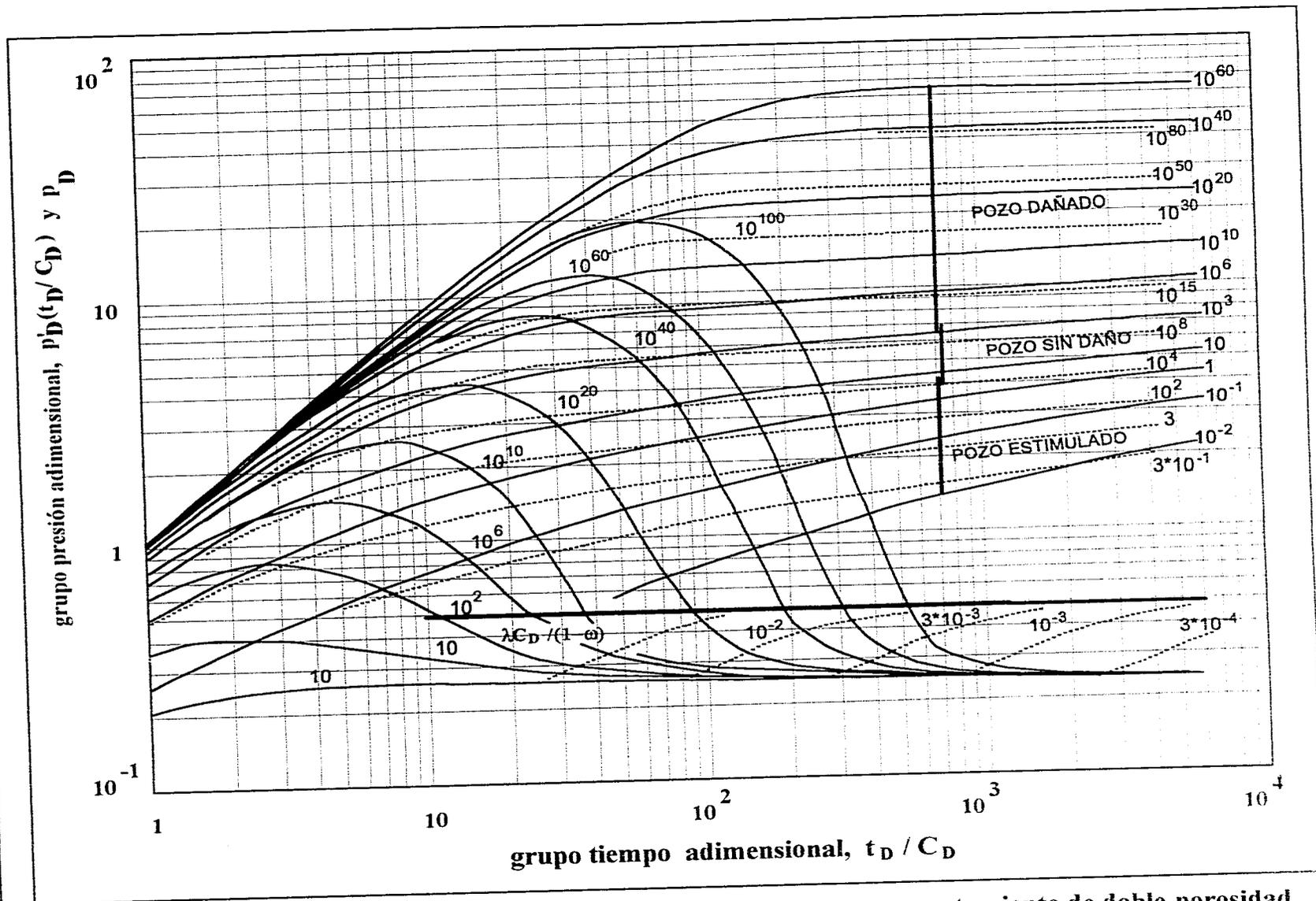


Fig. 3.14 Curva Tipo de la respuesta de presión de un pozo con comportamiento de doble-porosidad, flujo interporoso transitorio<sup>27</sup>.

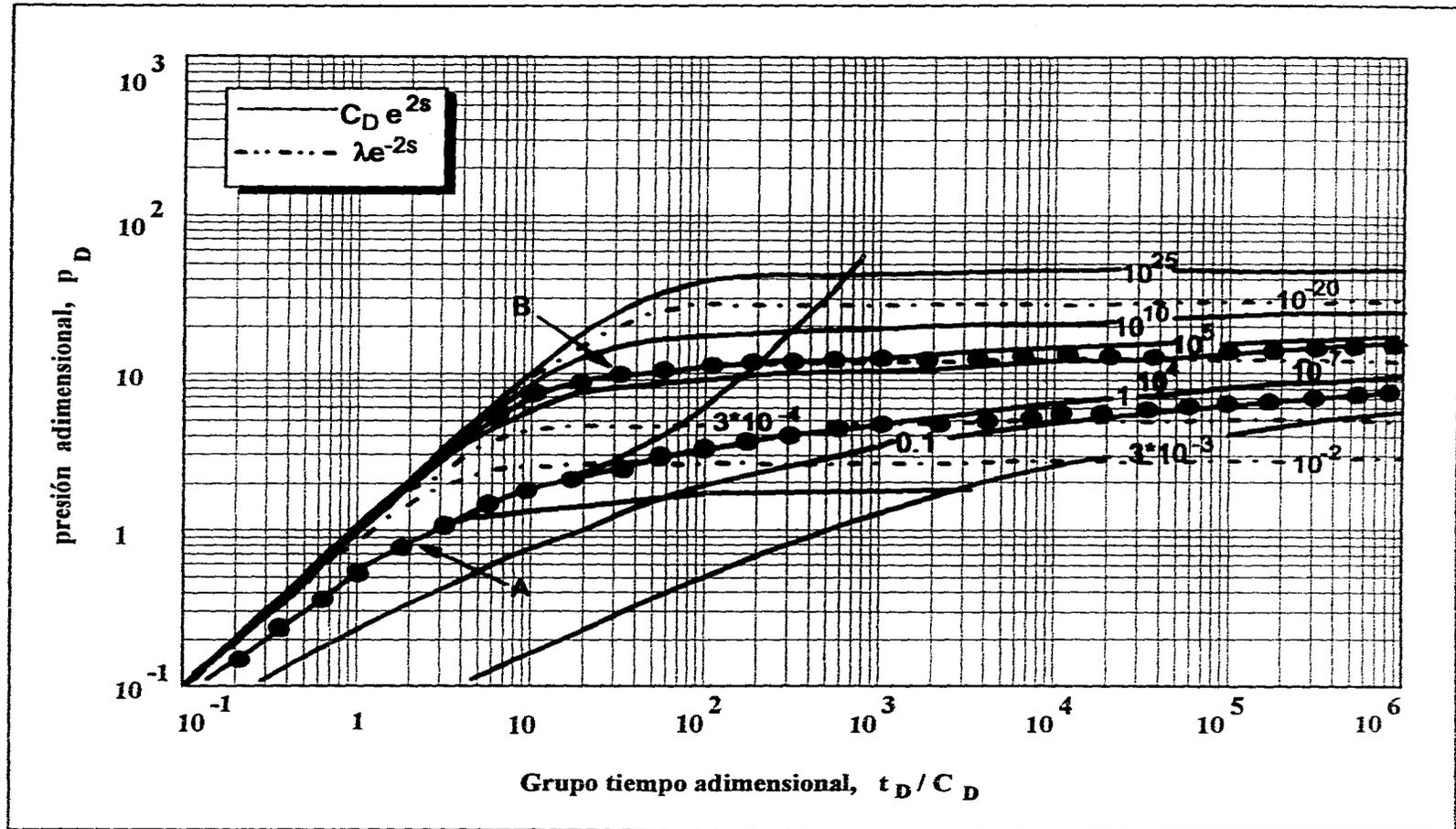


Fig. 3.15 Dos familias de curvas para los comportamientos homogéneos y la curva de transición casos A y B <sup>28</sup>.

---

En la figura 3.16 se presentan los mismos casos mostrados en la figura 3.15 en un gráfico semilogarítmico de  $p_D$  contra  $t_D / C_D$ ; en donde se presentan claramente la forma de "S" del período de transición y las líneas rectas paralelas en el caso A; para el caso B solamente aparece el comportamiento homogéneo del sistema total, ya que el correspondiente al sistema de fracturas está enmascarado por efectos de almacenamiento.

En la respuesta de doble-porosidad<sup>27</sup> la presión se estabiliza durante la transición; por consiguiente, la derivada con respecto al tiempo cae tal como se ilustra en la figura 3.17 (caso A). Inicialmente, y debido al efecto de almacenamiento, la curva de la derivada sigue  $C_D e^{2s} = 1$ , entonces actúa el flujo radial infinito que ocurre en el sistema de fracturas y la curva de la derivada alcanza la línea recta con  $p'_D(t_D / C_D) = 0.5$ . Posteriormente, la transición comienza y la derivada cae a lo largo de una curva etiquetada como  $(\lambda C_D) / \omega(1-\omega)$  hasta que llega a un mínimo y entonces sigue a la curva  $(\lambda C_D) / (1-\omega)$  antes de regresar a la línea recta con  $p'_D(t_D / C_D) = 0.5$ , que corresponde al flujo radial infinito en el sistema total  $(C_D e^{2s})_{f+m}$ . El período de transición está formado por dos familias de curvas y para este caso la transición temprana ajusta a una curva  $(\lambda C_{D_m})_{f+m} / \omega(1-\omega) = 3.33 * 10^{-4}$  y la transición tardía en  $(\lambda C_D)_{f+m} / (1-\omega) = 3.3 * 10^{-5}$ .

En la figura 3.18 se tiene el caso B en el cual el flujo radial infinito del sistema de fracturas está enmascarado por el efecto de almacenamiento del pozo y en la derivada se observa que la curva va directamente del almacenamiento a la transición. Cuando el almacenamiento está presente aún, empieza la transición temprana y se ajusta a un valor de  $(\lambda C_D)_{f+m} / \omega(1-\omega) = 1.11 * 10^{-2}$ , el cual no es estrictamente confiable, pero si el efecto de almacenamiento se desprecia se

---

En la figura 3.16 se presentan los mismos casos mostrados en la figura 3.15 en un gráfico semilogarítmico de  $p_D$  contra  $t_D / C_D$ ; en donde se presentan claramente la forma de "S" del período de transición y las líneas rectas paralelas en el caso A; para el caso B solamente aparece el comportamiento homogéneo del sistema total, ya que el correspondiente al sistema de fracturas está enmascarado por efectos de almacenamiento.

En la respuesta de doble-porosidad<sup>27</sup> la presión se estabiliza durante la transición; por consiguiente, la derivada con respecto al tiempo cae tal como se ilustra en la figura 3.17 (caso A). Inicialmente, y debido al efecto de almacenamiento, la curva de la derivada sigue  $C_D e^{2s} = 1$ , entonces actúa el flujo radial infinito que ocurre en el sistema de fracturas y la curva de la derivada alcanza la línea recta con  $p'_D(t_D / C_D) = 0.5$ . Posteriormente, la transición comienza y la derivada cae a lo largo de una curva etiquetada como  $(\lambda C_D) / \omega(1-\omega)$  hasta que llega a un mínimo y entonces sigue a la curva  $(\lambda C_D) / (1-\omega)$  antes de regresar a la línea recta con  $p'_D(t_D / C_D) = 0.5$ , que corresponde al flujo radial infinito en el sistema total  $(C_D e^{2s})_{f+m}$ . El período de transición está formado por dos familias de curvas y para este caso la transición temprana ajusta a una curva  $(\lambda C_{Dm})_{f+m} / \omega(1-\omega) = 3.33 * 10^{-4}$  y la transición tardía en  $(\lambda C_D)_{f+m} / (1-\omega) = 3.3 * 10^{-5}$ .

En la figura 3.18 se tiene el caso B en el cual el flujo radial infinito del sistema de fracturas está enmascarado por el efecto de almacenamiento del pozo y en la derivada se observa que la curva va directamente del almacenamiento a la transición. Cuando el almacenamiento está presente aún, empieza la transición temprana y se ajusta a un valor de  $(\lambda C_D)_{f+m} / \omega(1-\omega) = 1.11 * 10^{-2}$ , el cual no es estrictamente confiable, pero si el efecto de almacenamiento se desprecia se

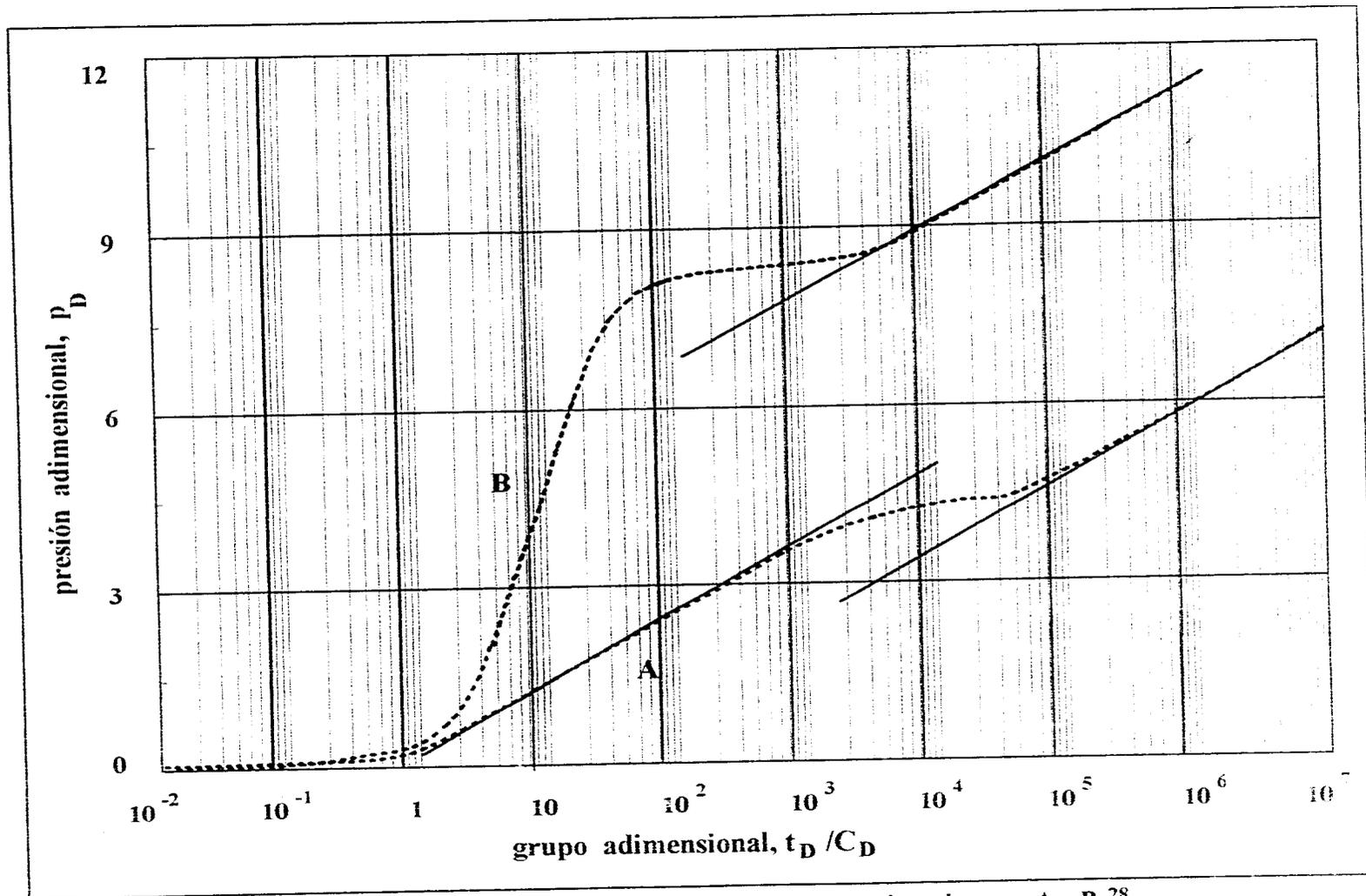


Fig. 3.16 Gráfica semi-logarítmica para flujo pseudo-estacionario casos A y B 28.

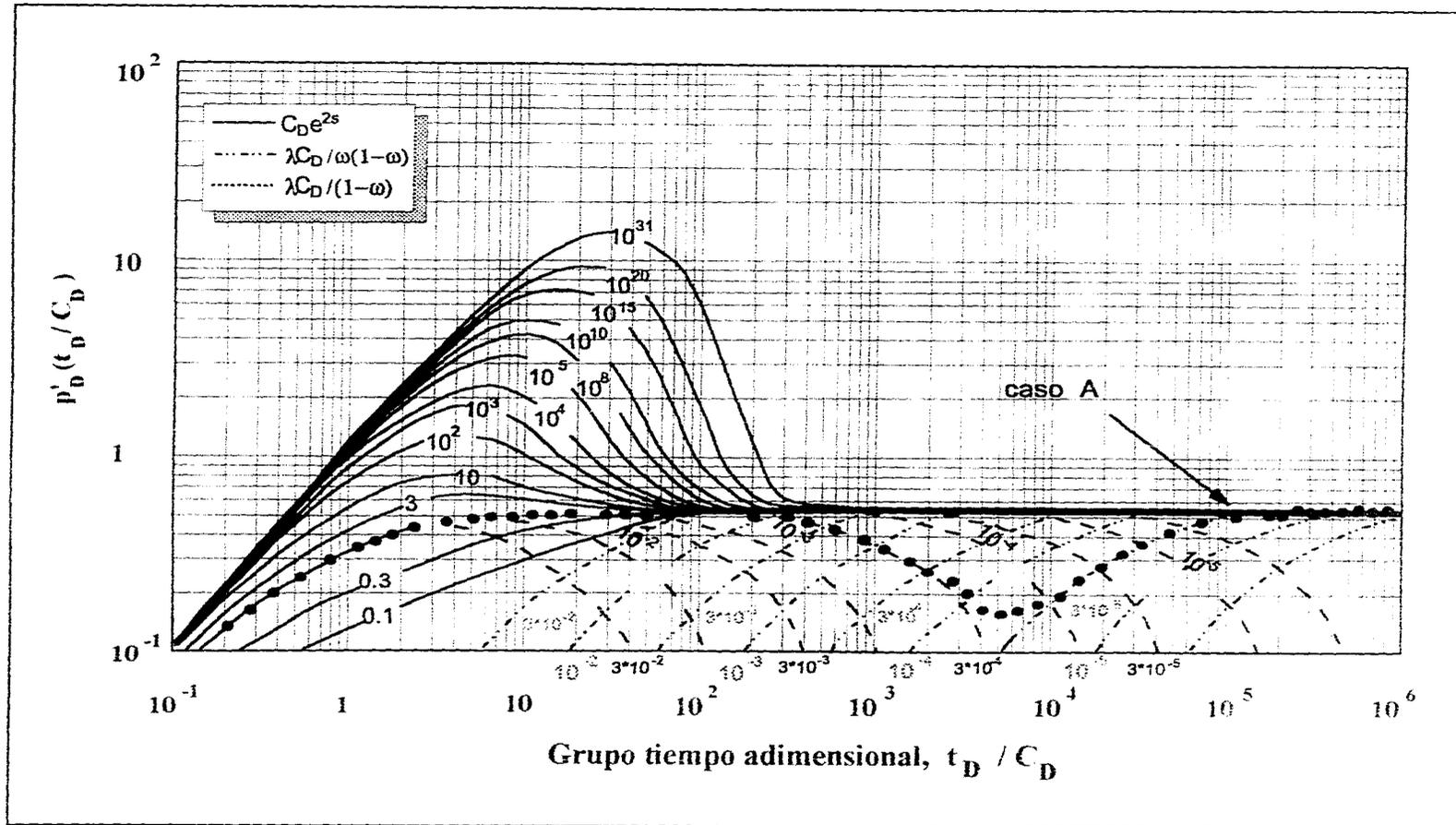


Fig. 3.17 Curva de la derivada de presión y curvas de transición, comportamiento de doble-porosidad considerando flujo pseudo-estacionario (caso A) <sup>28</sup>.

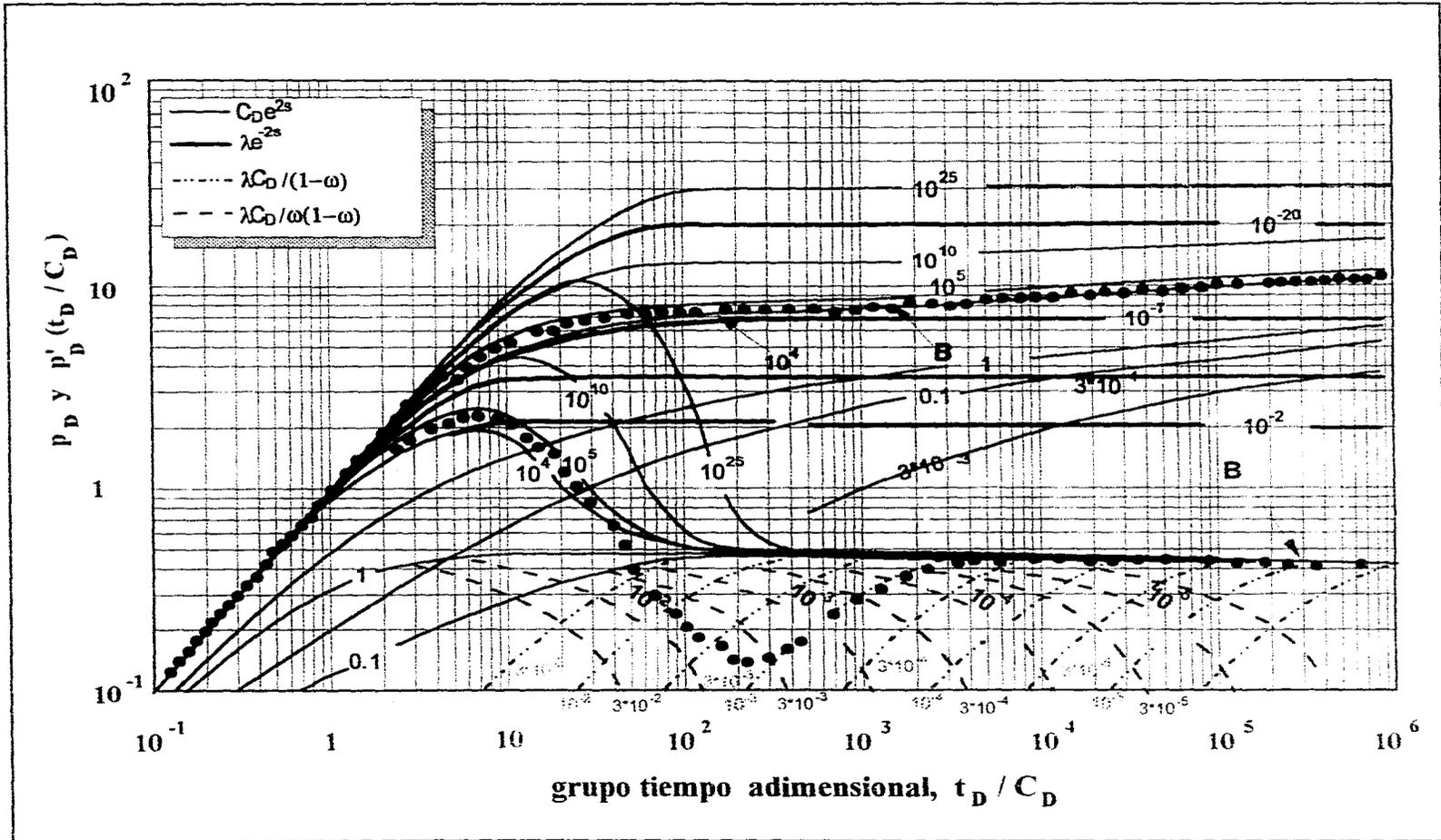


Fig. 3.18 Curva de presión y derivada de presión para el comportamiento de doble-porosidad, flujo pseudo-estacionario ( caso B ) <sup>28</sup>.

---

obtiene un ajuste confiable para la transición tardía en  $(\lambda C_D)_{f+m} / (1-\omega) = 1.11 \cdot 10^3$ .

La curva tipo mostrada en la figura 3.14 considera flujo transitorio<sup>28</sup> y es concordante con el desarrollo de la teoría de DeSwaan; se describen dos períodos homogéneos por la familia de curvas  $C_D e^{2s}$  y  $\beta'$  que describe la transición; al igual que en el modelo pseudo-estacionario los parámetros  $\omega$  y  $\lambda$  caracterizan la respuesta de doble-porosidad; el grupo adimensional  $\beta'$  esta definido como sigue:

$$\beta' = \delta' (C_D e^{2s})_{f+m} / \lambda e^{2s} \quad (3.10)$$

El factor de forma  $\delta'$  toma los siguientes valores, tomando en cuenta las dos geometrías establecidas por DeSwaan:

$\delta' = 1.8914$  para bloques rectangulares

$\delta' = 1.0508$  para bloques esféricos

Dos casos se ilustran en la figura 3.19 para describir el modelo con flujo transitorio (C y D). En el caso C, la respuesta sigue a la curva de transición  $\beta' = 10^{10}$  antes de alcanzar la curva que representa el sistema total en  $(C_D e^{2s})_{f+m} = 6 \cdot 10^3$ .

En el caso D las curvas de doble-porosidad van de  $\beta' = 10^6$  a  $(C_D e^{2s})_{f+m} = 4$ . Ambas respuestas están generadas para una relación de almacenamiento  $\omega = 10^{-3}$ . Con el modelo de flujo interporoso transitorio, la transición sobre la curva  $\beta'$  empieza en

---

tiempos muy cortos y por tanto, el régimen de flujo en las fisuras, sobre  $(C_D e^{2s})_f$ , no siempre se observa en la práctica<sup>29</sup>.

Las curvas de transición  $\beta'$  tienen la misma forma que aquellas curvas para yacimientos homogéneos y son obtenidas dividiendo entre dos la presión adimensional y el tiempo de  $C_D e^{2s}$ . Como resultado del comportamiento de doble-porosidad, una gráfica semilogarítmica teóricamente puede desarrollar una línea recta durante el período de transición, cuya pendiente es la mitad de aquella obtenida para la línea recta correspondiente al flujo radial infinito del comportamiento homogéneo  $(C_D e^{2s})_{f+m}$ , figura 3.20. En la curva **C** la transición es muy corta y en consecuencia sólo una línea recta se presenta, correspondiente a los efectos del sistema total. No obstante, la curva **C** muestra la forma característica de "S". En el caso de la curva **D**, la transición es más larga y la primera línea recta en aparecer es la de este período interporoso y tiene una pendiente igual a  $m/2$ <sup>10,29</sup>.

La figura 3.21 representa el comportamiento de la derivada de la presión para el caso **C** donde se manifiestan las tres curvas que la constituyen :  $(C_D e^{2s})_f = 6 \cdot 10^{-6}$ ,  $\beta' = 10^{10}$  y  $(C_D e^{2s})_{f+m} = 6 \cdot 10^{-3}$ . Los dos componentes homogéneos  $C_D e^{2s}$  muestran las características usuales de cada respuesta de la derivada, la primera línea con pendiente unitaria, efecto de almacenamiento, seguida de una joroba, función  $C_D e^{2s}$  durante el final del almacenamiento, y finalmente un valor constante de la derivada igual a 0.5 donde se alcanza el flujo radial infinito. La curva de transición  $\beta'$ , obtenida por el desplazamiento  $C_D e^{2s}$  por un factor de dos a través de la presión y del tiempo, presenta características similares para la línea de 0.5 si se intercambia por la línea de 0.25<sup>29</sup>.

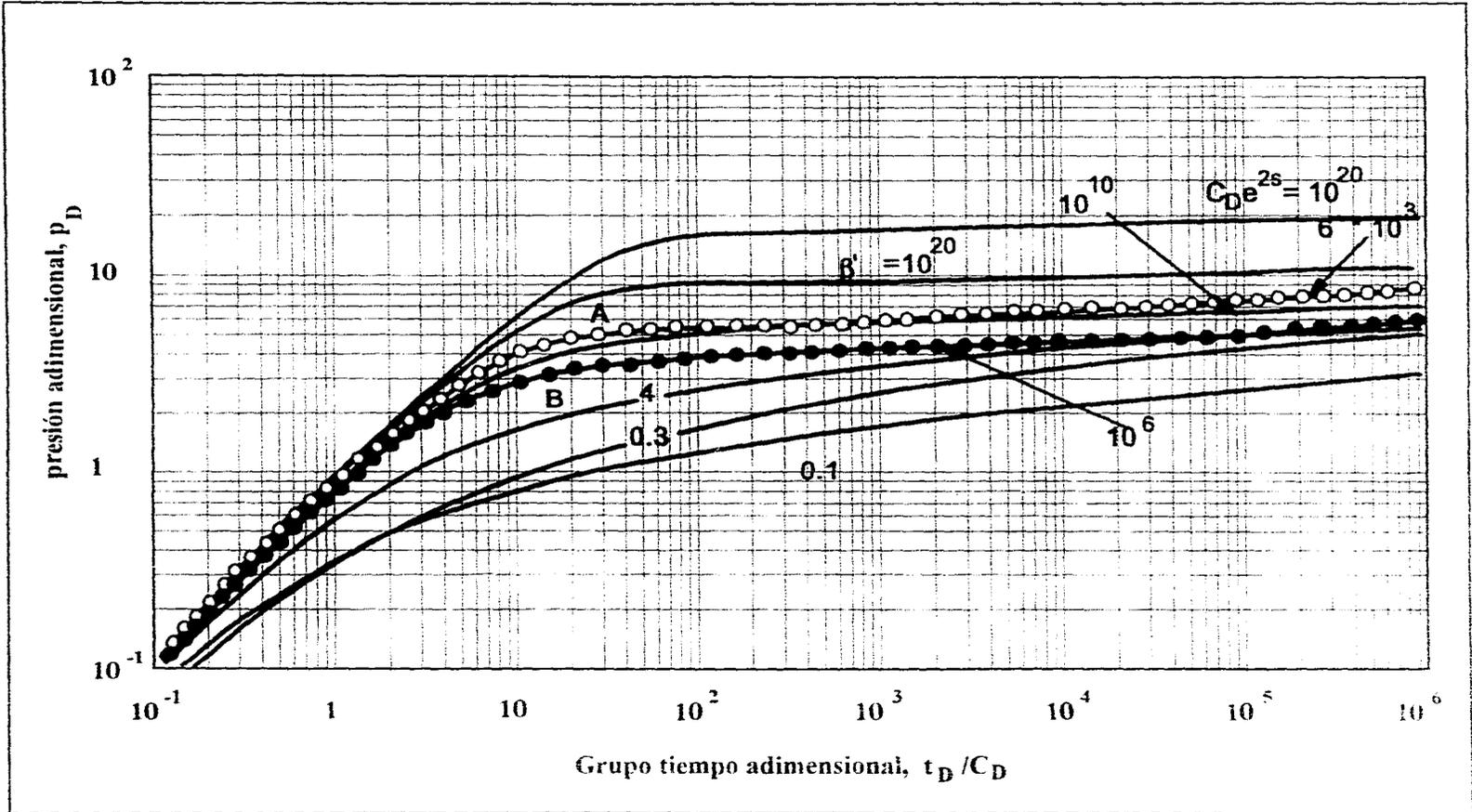


Fig. 3.19 Comportamiento de doble-porosidad de un pozo con almacenamiento y daño, flujo transitorio, (casos C y D)<sup>29</sup>.

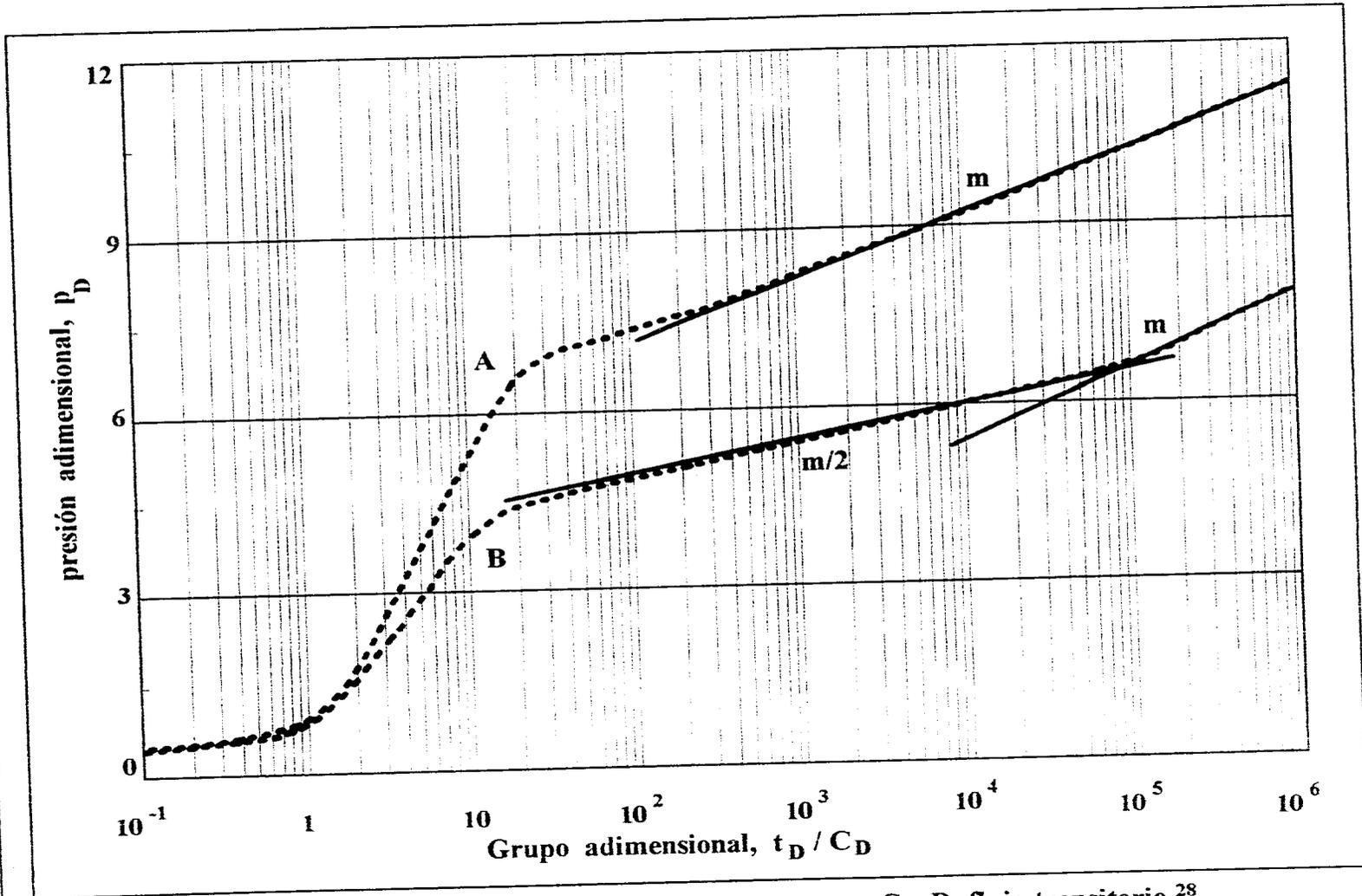


Fig. 3.20 Gráfica semi-logarítmica para los casos C y D, flujo transitorio<sup>28</sup>.

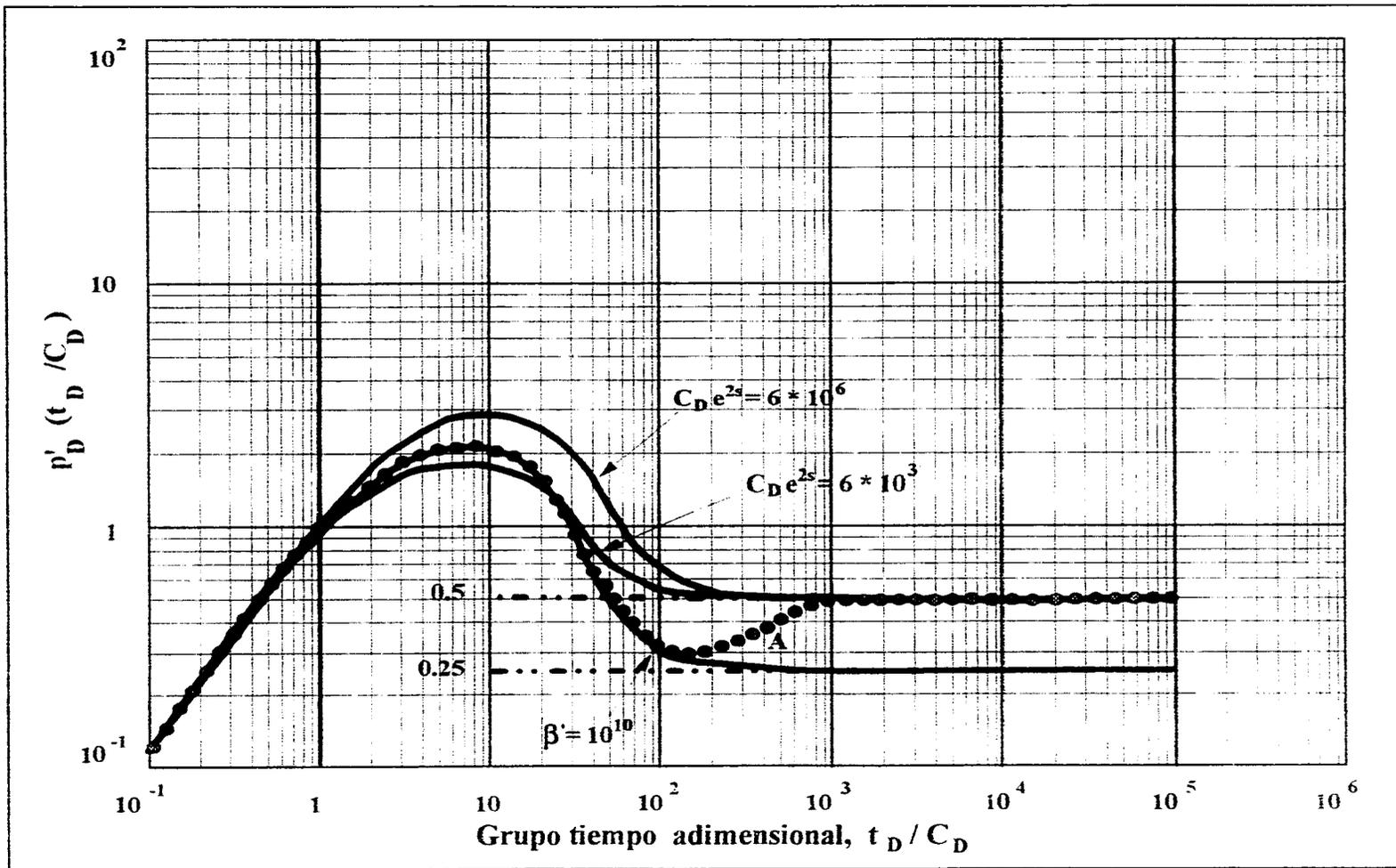


Fig. 3.21 Curva que muestra el comportamiento de la derivada para un sistema de doble-porosidad, flujo transitorio ( caso C )<sup>29</sup>.

---

La respuesta del caso **C** corresponde a una geometría de bloques de matriz en forma de estratos. La respuesta de presión en las fracturas termina en tiempos de producción muy cortos, pero empieza enseguida el período de transición, la gráfica sigue la curva  $\beta'$  hasta que alcanza la línea con  $p_D'(t_D / C_D) = 0.25$  y entonces continúa hacia arriba hasta llegar a la correspondiente del flujo radial para matriz y fracturas igual a 0.5. La transición tardía entre  $\beta'$  y el régimen del sistema homogéneo depende de los grupos adimensionales  $(\lambda C_D)_{im}$  y  $(1-\omega)^2$ .

La figura 3.22 presenta el comportamiento de la derivada de la presión para el modelo de doble porosidad del caso **D**, para bloques esféricos y estratos; ambas curvas empiezan siguiendo la curva  $\beta'$ , pero la solución para esferas se desvía antes de que la línea con  $p_D'(t_D / C_D) = 0.25$  sea alcanzada y por el contrario, para los estratos la solución alcanza a la línea con 0.25 con la curva  $\beta'$ . En teoría es posible identificar la geometría de la matriz a partir de las pruebas de pozo, pero prácticamente la identificación entre estas geometrías no se logra fácilmente.

La elección entre el flujo interporoso pseudo-estacionario y transitorio para la interpretación del modelo de doble-porosidad ha sido tema de debate, las diferencias entre los dos modelos se observan en el comportamiento de la derivada. Para un mismo valor de  $\omega$  (sea  $\omega = 10^{-2}$ ), como se observa en la figura 3.23, la derivada para flujo pseudo-estacionario cae por debajo de la línea recta de 0.25, mientras que para el modelo transitorio la derivada estará por encima de dicha línea recta de 0.25. Una confusión en la selección del modelo puede surgir en algunos casos, en particular cuando la calidad de los datos es baja, esto es debido al hecho de que si  $\omega$  es grande (0.2 por ejemplo) la derivada para el flujo pseudo-estacionario no cae por debajo de 0.25 y en algunos casos el modelo transitorio puede producir una forma muy similar, pero con un valor mucho más

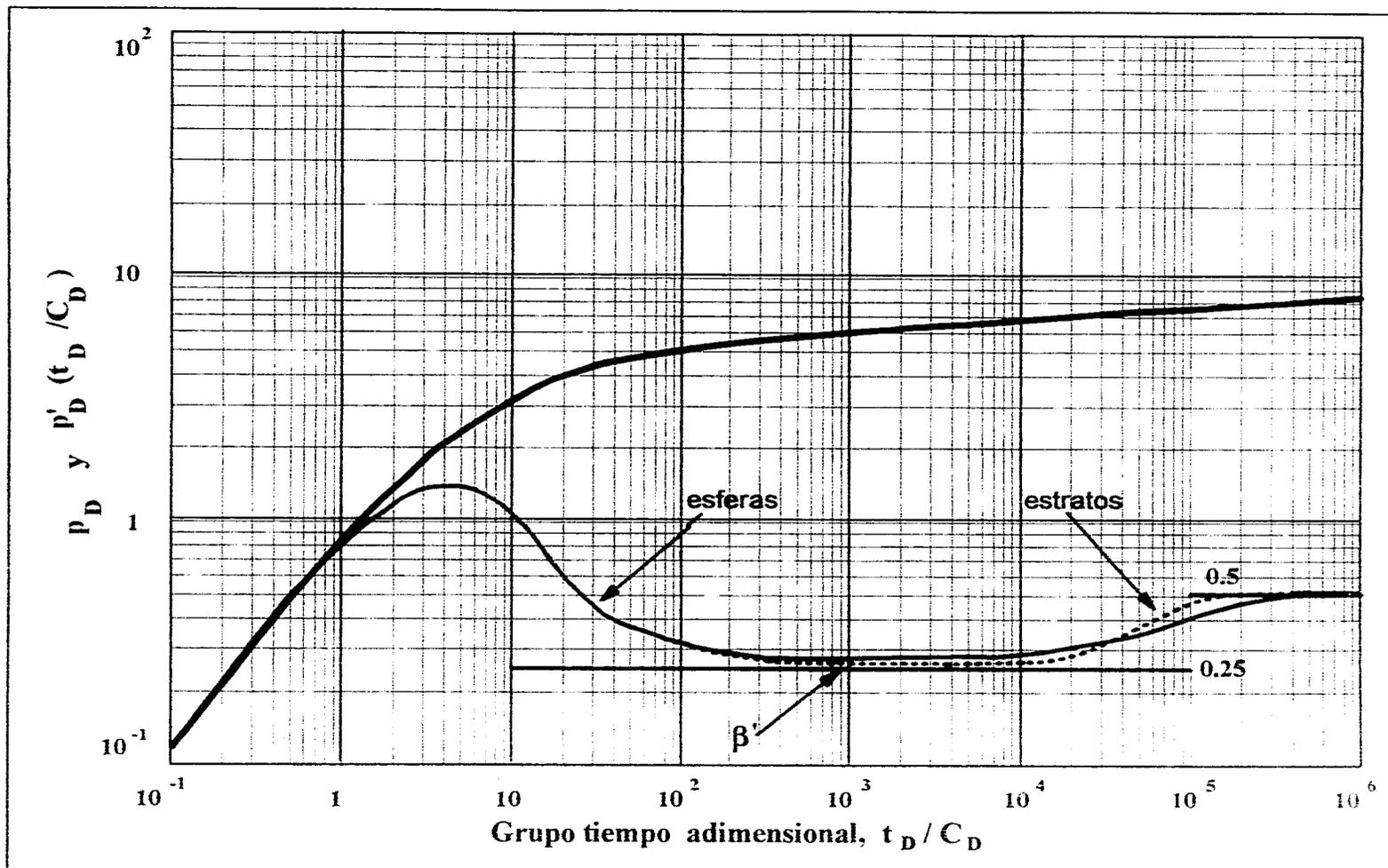


Fig. 3.22 Respuesta de la presión y la derivada de presión generada para el caso D considerando geometría de esfera y estratos para los bloques de matriz, flujo transitorio<sup>29</sup>.

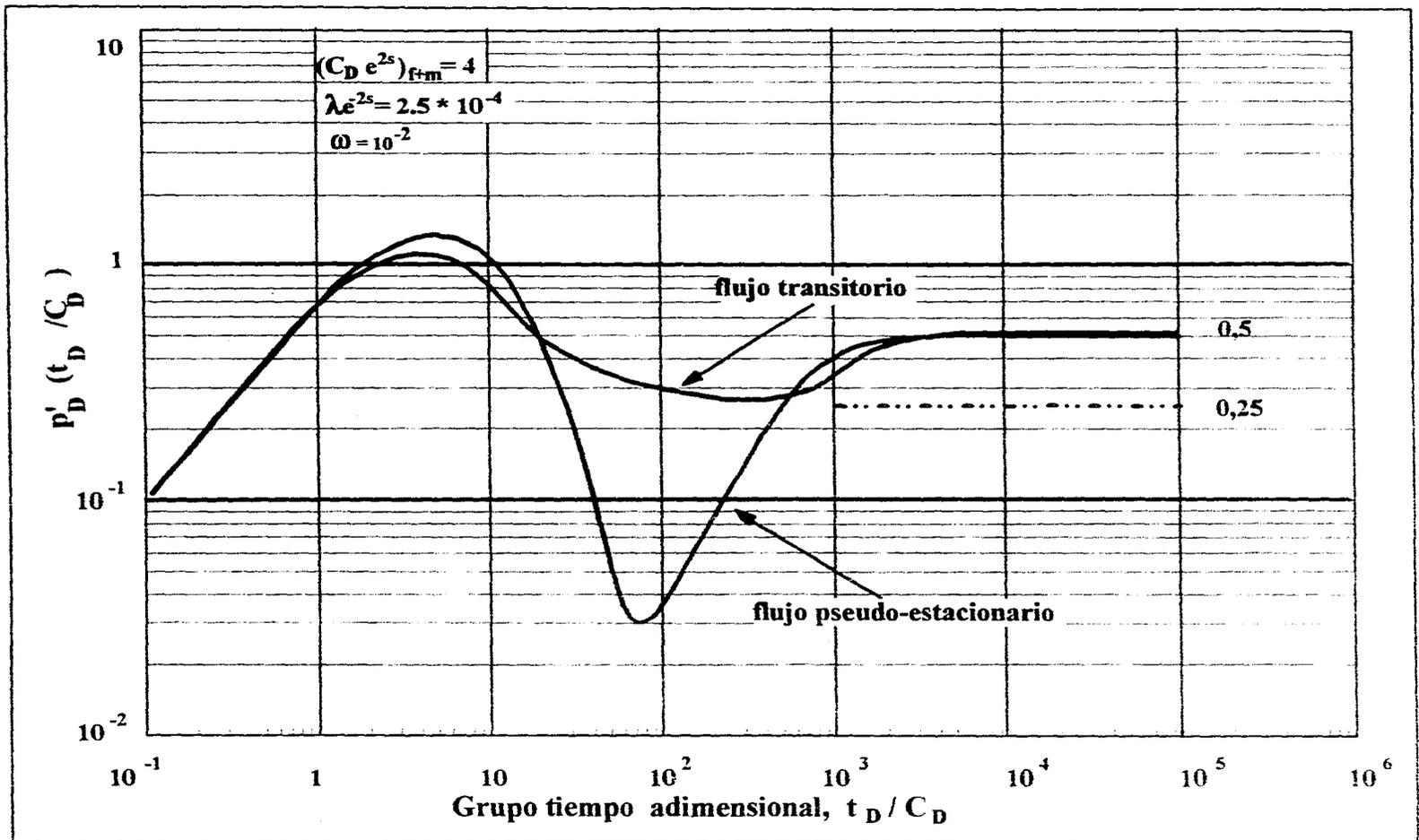


Fig. 3.23 Curvas de la derivada de presión que representa el comportamiento de doble-porosidad para flujo pseudo-estacionario y transitorio considerando el mismo valor de  $\omega^{29}$ .

---

pequeño de  $\omega$ , ( $\omega = 10^{-3}$ ). En estos casos la distinción se realiza seleccionando aquella respuesta que es compatible con la descripción física del yacimiento<sup>1,10,28</sup>.

### **3.4 COMPARACION DE LOS MODELOS DE WARREN-ROOT Y DeSWAAN.**

En el Capítulo 2, se observa que ambos modelos describen la respuesta de presión de yacimientos naturalmente fracturados, considerando cada una de ellas diferentes condiciones de flujo de la matriz a la fractura: transitorio (DeSwaan<sup>20-23</sup>) o pseudoestacionario (Warren-Root<sup>14</sup>). En virtud de que la teoría establecida para el modelo de DeSwaan utiliza variables reales de tiempo y presión, mientras que Warren y Root lo hacen utilizando términos adimensionales, y para poder estudiar las diferencias básicas entre ambos modelos, se presenta a continuación la conversión de la solución del modelo de DeSwaan.

#### **3.4.1 CONVERSION A VARIABLES ADIMENSIONALES DE LA ECUACION DEL MODELO DE DeSWAAN.**

La caída de presión en un pozo productor de un yacimiento de doble-porosidad, según el modelo de DeSwaan está definido por la ecuación 2.60

##### **a) Para Tiempos Cortos**

De las definiciones de los parámetros adimensionales<sup>37-39</sup>:

Presión adimensional :  $p_D = \frac{2\pi \bar{k}_2 h \Delta p}{q\mu}$ , donde  $\bar{k}_2 = k_f$  del modelo de DeSwaan.

En unidades prácticas y despejando  $\Delta p$ :

$$p_i - p = \frac{141.2qB\mu P_D}{k_f h} \quad (3.11)$$

Tiempo adimensional:  $t_D = \frac{kt}{\phi\mu c_t r_w^2}$  (3.12)

en unidades prácticas y despejando  $t$ :

$$t = \frac{\mu r_w^2 (\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) t_D}{0.0002637 k_f} \quad (3.13)$$

$$p_i - p = \frac{70.6qB\mu}{h_f k_f} \ln \left( \frac{0.005923 k_f t}{\phi_f \mu c_t r_w^2} \right) \quad (3.14)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación anterior:

$$\frac{141.2qB\mu P_D}{k_f h_f} = \frac{70.6qB\mu}{k_f h_f} \ln \left( \frac{0.0005923 k_f \mu r_w^2 (\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) t_D}{\phi_f \mu c_t r_w^2 0.0002637 k_f} \right)$$

$$P_D = 0.5 \ln(2.247188 t_D) = 0.5 [\ln t_D + 0.80907] \quad (3.15)$$

**b) Para tiempos largos :**

Considerando un modelo de estratos y a partir de las definiciones en unidades prácticas de presión adimensional y tiempo adimensional y sustituyendo se tiene:

$$\frac{141.2qB\mu p_D}{k_f h_f} = \frac{70.6qB\mu}{k_f h_f} \ln \left[ \frac{0.0005923 \mu r_w^2 (\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) t_D}{r_w^2} \frac{1}{0.0002637 k_f \left[ \frac{\phi_f \mu c_t}{k_f} + \frac{k_m h_m \phi_m \mu c_t}{k_f h_f} \right]} \right]$$

$$p_D = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{t_D (\phi_f + \phi_m)}{\phi_f + \frac{h_m \phi_m}{h_f}} + 0.80907 \right] \quad (3.16)$$

Considerando geometría de esferas y siguiendo un procedimiento similar al anterior se tiene:

$$\frac{141.2qB\mu p_D}{k_f h_f} = \frac{70.6qB\mu}{k_f h_f} \ln \left[ \frac{0.0005922 \mu r_w^2 (\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) t_D}{r_w^2} \frac{1}{0.0002637 k_f \left[ \frac{\phi_f \mu c_t}{k_f} + \frac{2 k_m r_m \phi_m \mu c_t}{3 k_f h_f} \right]} \right]$$

$$p_D = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{t_D (\phi_f + \phi_m)}{\phi_f + \frac{2 h_m \phi_m}{3 h_f}} + 0.80907 \right] \quad (3.17)$$

### 3.4.2 COMPARACION DE LAS RESPUESTAS DE PRESION.

Como la expresa DeSwaan<sup>20-23</sup>, los primeros tiempos de la respuesta de presión reflejan el comportamiento de las fracturas como un medio homogéneo, ecuación 3.15; mientras que la respuesta de presión representada por las ecuaciones 3.16 y 3.17, establece el comportamiento del sistema total (matriz+fracturas), el cual actúa también como un medio homogéneo. Las ecuaciones 3.16 y 3.17 son muy similares a la ecuación 3.15, la diferencia es que se encuentra afectadas por un

---

factor geométrico  $\frac{\phi_m + \phi_f}{\phi_f + \frac{h_m}{h_f} \phi_m}$  o bien  $\frac{\phi_m + \phi_f}{\phi_f + \frac{2 r_m}{3 h_f} \phi_m}$  según sea el caso, y que

establece la influencia de las propiedades y tamaño de bloques en la respuesta del sistema total (matriz+fracturas).

Una vez que se tienen las expresiones adimensionales para la solución de cada uno de los modelos, es factible hacer la comparación entre ambos, para lo cual se utilizan las ecuaciones 3.15, 3.16, 3.17 y 2.71, considerando un intervalo de tiempo y los siguientes datos<sup>8</sup> :

---

$q = 166.52 \text{ cm}^3/\text{seg}$	$r_w = 11.43 \text{ cm}$
$\mu = 1 \text{ cp}$	$r_{ma} = h_{ma}/2 = 137.92 \text{ cm}$
$B = 1.3$	$k_{ma} = 10^{-5} \text{ D}$
$h_{ma} = 275.84 \text{ cm}$	$k_f = 7.23 \text{ D}$
$h_f = 0.725 \text{ cm}$	$\phi_f = 0.45$
$c_f = 14.7 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$	$\phi_{ma} = 0.05$
$c_f = 4.15 \cdot 10^{-7} \text{ atm}^{-1}$	$\omega = 0.025$
$c_{ma} = 1.46 \cdot 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$	$\lambda = 1.42 \cdot 10^{-7}$
	$\alpha = 7.88 \cdot 10^{-4} (n = 3)$

---

Los resultados obtenidos se observan en la figura 3.24, donde se consideran para el modelo de DeSwaan las geometrías expuestas: estratos y esferas, y puede observarse que la respuesta de este modelo (esferas) se acerca más al comportamiento encontrado con el modelo de Warren y Root. Los valores de

---

presión adimensional contra tiempo adimensional se muestran en las Tabla 3.2, así como sus respectivos valores reales.

El período de transición no está representado en el modelo de DeSwaan. De los resultados anteriores se observa que los valores de presión, para un mismo tiempo, difieren en una constante cuyo valor se encuentra entre 20 y 24 atmósferas . Esta diferencia se debe a las condiciones de flujo pseudo-estacionario utilizadas en el modelo de Warren y Root, donde  $\frac{\partial p}{\partial t} = \text{cte.}$ , constante que probablemente sea el cambio con respecto a los valores obtenidos con el modelo de DeSwaan.

Del análisis de la respuesta de presión para el modelo de Warren y Root y de las definiciones que caracterizan este comportamiento ( $\omega, \lambda$ ) se observa que si <sup>1</sup>:

- $\phi_2 C_2 \gg \phi_1 C_1$ , entonces  $\omega \rightarrow 1$ , lo cual corresponde a yacimientos fracturados pero que prácticamente no tienen porosidad intergranular en los bloques de matriz, así la capacidad está sólo en las fracturas.
- $\phi_1 C_1 \gg \phi_2 C_2$ , entonces  $\omega \rightarrow 0$ , esto corresponde a un yacimiento convencional ya que la capacidad de almacenamiento en las fracturas es casi despreciable y su comportamiento es prácticamente homogéneo <sup>1</sup>.
- Valores de  $\omega$  entre 0 y 1 corresponden al comportamiento de un yacimiento de doble-porosidad clásico.

---

presión adimensional contra tiempo adimensional se muestran en las Tabla 3.2, así como sus respectivos valores reales.

El período de transición no está representado en el modelo de DeSwaan. De los resultados anteriores se observa que los valores de presión, para un mismo tiempo, difieren en una constante cuyo valor se encuentra entre 20 y 24 atmósferas . Esta diferencia se debe a las condiciones de flujo pseudo-estacionario utilizadas en el modelo de Warren y Root, donde  $\frac{\partial p}{\partial t} = \text{cte.}$ , constante que probablemente sea el cambio con respecto a los valores obtenidos con el modelo de DeSwaan.

Del análisis de la respuesta de presión para el modelo de Warren y Root y de las definiciones que caracterizan este comportamiento ( $\omega, \lambda$ ) se observa que si <sup>1</sup>:

- $\phi_2 C_2 \gg \phi_1 C_1$ , entonces  $\omega \rightarrow 1$ , lo cual corresponde a yacimientos fracturados pero que prácticamente no tienen porosidad intergranular en los bloques de matriz, así la capacidad está sólo en las fracturas.
- $\phi_1 C_1 \gg \phi_2 C_2$ , entonces  $\omega \rightarrow 0$ , esto corresponde a un yacimiento convencional ya que la capacidad de almacenamiento en las fracturas es casi despreciable y su comportamiento es prácticamente homogéneo <sup>1</sup>.
- Valores de  $\omega$  entre 0 y 1 corresponden al comportamiento de un yacimiento de doble-porosidad clásico.

Tabla 3.2 Valores de la respuesta de presión obtenidos con el modelo de DeSwaan y de Warren y Root.

TIEMPO		MODELO DE WARREN Y ROOT			MODELO DE DESWAAN			
t(seg)	t D	p D	p (atm)	t D	p D	p (atm)		
0.0036	26.547	3.888	24.293	3.01460	0.956	4.595		
0.0108	79.643	4.437	27.724	9.04390	1.505	7.235		
0.0216	159.287	4.783	29.887	18.0879	1.852	8.901		
0.0288	212.383	4.986	31.153	24.1173	1.996	9.592		
0.0363	265.479	5.038	31.481	30.1466	2.107	10.12		
0.1080	796.438	5.586	34.904	90.4398	2.656	12.76		
0.2160	1592.87	5.931	37.055	180.879	3.003	14.43		
0.360	2654.79	6.183	38.632	301.466	3.258	15.66		
1.080	7964.38	6.717	41.971	904.398	3.808	18.30		
2.160	15928.7	7.042	43.999	1808.79	4.154	19.96		
3.240	23893.1	7.223	45.132	2713.19	4.357	20.94		
3.60	26547.9	7.369	45.418	3014.66	4.410	21.19		
10.8	79.643.8	7.689	48.09	9043.98	4.959	23.83		
18.0	132739	7.832	48.937	15073.3	5.214	25.06		
25.2	185835	7.845	49.015	21102.6	5.353	25.87		
32.4	238931	7.923	49.504	27131.9	5.508	26.47		
36.0	265479	7.945	49.64	30146.6	5.561	26.72		
108	796438	8.041	50.239	90439.8	6.110	29.36		
180	1327397	8.078	50.469	150733	6.366	30.59		
288	2123835	8.129	50.79	241173	6.534	31.40		
					ESTRATOS		ESFERAS	
					p D	p (atm)	p D	p (atm)
360	2654794	8.162	50.994	271319	4.853	23.32	5.379	25.55
1080	7964382	8.478	52.97	813959	5.402	25.96	5.928	28.49
2160	1.59287*10 <sup>7</sup>	8.713	54.439	162791	5.749	27.63	6.275	30.52
3600	2.65479*10 <sup>7</sup>	8.954	55.941	271319	6.004	28.85	6.550	31.36
10800	7.96438*10 <sup>8</sup>	9.501	59.359	8139590	6.554	31.49	7.079	34.02
28800	2.12383*10 <sup>8</sup>	9.991	62.423	2.1705*10 <sup>7</sup>	7.044	33.85	7.570	36.88
36000	2.65479*10 <sup>9</sup>	10.103	63.12	2.7131*10 <sup>7</sup>	7.156	35.39	7.681	36.91
360000	2.65479*10 <sup>9</sup>	11.254	70.313	2.7131*10 <sup>8</sup>	8.301	39.92	8.833	42.45
3600000	3.39223*10 <sup>9</sup>	11.376	71.078	2.7131*10 <sup>9</sup>	9.458	45.95	9.964	47.98

TIEMPOS CORTOS  
(estratos y esferas)

TIEMPOS LARGOS

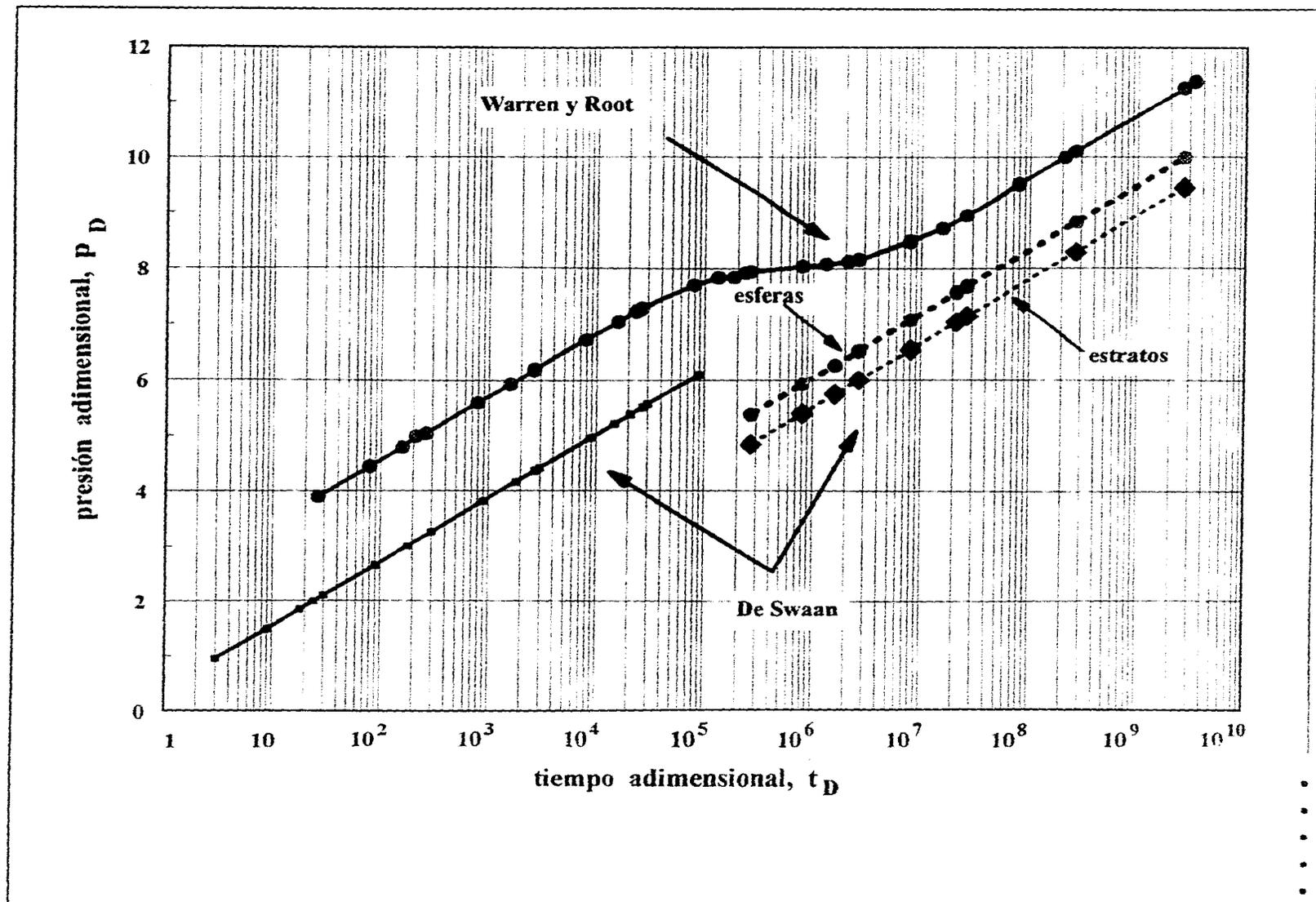


Fig. 3.24 Gráfica comparativa de los modelos de DeSwaan y Warren-Root

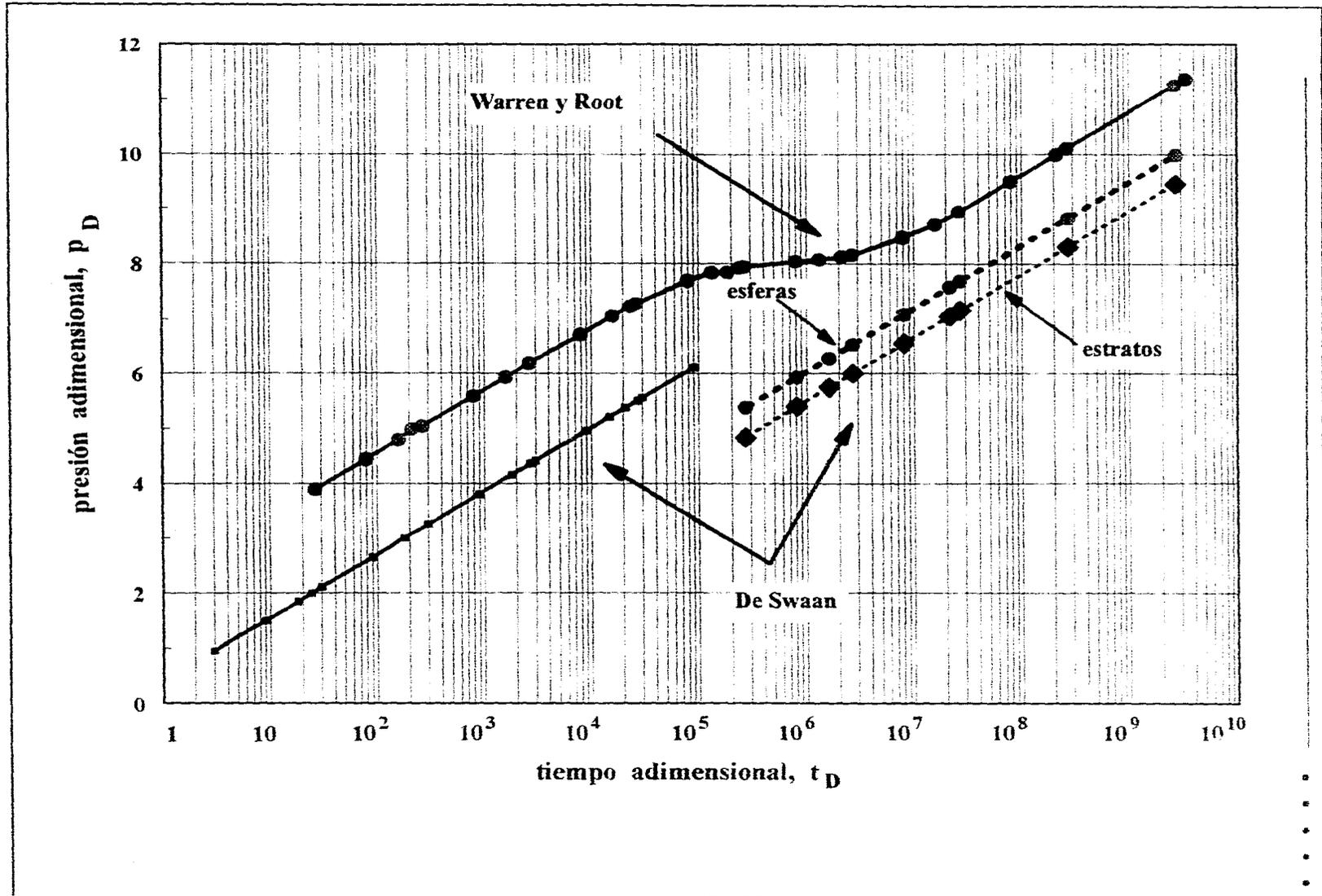


Fig. 3.24 Gráfica comparativa de los modelos de DeSwaan y Warren-Root

---

El parámetro de transferencia del fluido de la matriz a las fracturas, ( $\lambda$ ), es función de la relación de permeabilidades de la fractura y la matriz así como de la superficie de contacto por unidad de volumen de la roca ( $\alpha$ )<sup>1</sup>:

1. Para un valor dado del factor geométrico  $\alpha$  se tienen los siguientes casos:

- $k_1 \cong k_2$ , el proceso de flujo será similar al que se establece en un yacimiento homogéneo.
- $k_1 \ll k_2$ , el proceso de flujo corresponde al descrito para yacimientos con comportamiento de doble-porosidad, existe alto contraste entre los valores de permeabilidad de matriz y fracturas.

2. Ahora bien si se cuenta con una relación  $k_1 / k_2$  dada y el factor geométrico:

- $\alpha$  **es grande**, se tiene una superficie de flujo grande, lo cual corresponde a bloques pequeños de matriz por tanto existe una densidad de fracturamiento alta.
- $\alpha$  **es pequeño**, existe una reducida superficie de contacto, bloques de matriz grandes y se tiene una baja densidad de fracturamiento en el yacimiento.

Del análisis de la teoría para diferentes yacimientos, se observa que el modelo de Warren y Root trabaja satisfactoriamente cuando se tiene un alto contraste entre las propiedades de la matriz y las fracturas, las cuales están controladas por los parámetros  $\omega$  y  $\lambda^{-1}$ . Un análisis detallado indica que ciertos yacimientos fracturados se comportan como yacimientos homogéneos cuando determinados

Tabla 3.3 Influencia de los parámetros  $\lambda$  y  $\omega$  en la determinación de las características del yacimiento.

PARAMETRO	CASO	MAGNITUD	PARAMETRO DEL YACIMIENTO	CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO		FLUJO INTERPOROSO	DENSIDAD DE FRACTURAMIENTO	DIMENSIONES DE BLOQUE	POROSIDAD DEL SISTEMA		OBSERVACIONES	
				FRACTURA	MATRIZ				SIMPLE	DOBLE	SISTEMA	TIPO DE YACIMIENTO
$\omega$	1	$\omega = 0$	$\phi_2 c_2 = 0$	cero	grande	—	practicamente cero	—	si	—	solo matriz	porosidad convencional
	2	$\omega \rightarrow 0$	$\phi_1 c_1 \gg \phi_2 c_2$	pequeña	grande	—	bajo	grande	—	si predomina matriz	matriz y fracturas	(fracturado) doble porosidad
	3	$\omega \rightarrow 1$	$\phi_2 c_2 \gg \phi_1 c_1$	grande	pequeña	—	alto	muy pequeño	si fracturas	—	solo fracturas	solo un sistema de porosidad
$\lambda$	4	$\lambda = 0$	$k = 0$	—	—	pequeña	—	—	si fracturas	—	solo fracturas	solo un sistema de porosidad
	5		$\alpha = 0$	—	—	pequeña	practicamente cero	muy grande	si fracturas	—	solo matriz	porosidad convencional
	6	$\lambda \rightarrow \infty$	$\alpha \rightarrow \infty$	—	—	muy alta	muy alta	considerable	si	—	solo fracturas	porosidad convencional
			$k_1 \gg k_2$	—	—	muy alta	—	—	matriz	—	solo matriz	solo un sistema de porosidad
7	$0 < \lambda < 1$	$\alpha k_1 \ll k_2$	—	—	alto	promedio	promedio	—	si	—	(yacimiento fracturado) doble porosidad	
$\lambda, \omega$	8	$0 < \lambda < 0.01$	$k_2 \gg k_1$	—	normal	normal	promedio	promedio	—	si	matriz y fracturas	yacimiento de
		$0 < \omega < 0.1$	$\phi_1 c_1 \gg \phi_2 c_2$	normal	—	—	—	—	—	—	—	fracturas

---

parámetros se aproximan a sus valores límites, en la Tabla 3.3 se ilustran estos casos anteriores.

Por otro lado, para la aplicación del modelo de DeSwaan es necesario conocer los parámetros de tamaño de bloque y espesor de la fractura, los cuales están involucrados en los términos  $\eta_f$  y  $\eta_m$ ; que por lo regular no son evaluados en pruebas de laboratorio.

La figura 3.25 muestra la diferencia de los comportamientos de la derivada de presión para los modelos pseudo-estacionario y transitorio, la diferencia de estas curvas radica en la forma que se establece para el mínimo de la derivada y sobre todo para el comportamiento en el período de transición temprana, para el pseudoestacionario esta definido por la curva  $\frac{\lambda C_D}{\omega(1-\omega)}$ , flujo interporoso pseudo-estacionario, que no está definido para el flujo interporoso transitorio; se observa que las curvas del período de transición tardía,  $\frac{\lambda C_D}{1-\omega}$ , son coincidentes con las curvas de transición para el comportamiento transitorio,  $\frac{\lambda C_D}{1-\omega^2}$ ; en ambas curvas el flujo radial infinito para el sistema total se alcanza en la línea  $p'_D (t_D/C_D) = 0.5$ .

En ambas curvas tipo el almacenamiento se muestra con las curvas cuya pendiente es igual a 1; existe un defasamiento entre las curvas etiquetadas  $\beta'$  y  $\lambda e^{-2s}$ , ambas representan el período de transición para cada uno de los flujos interporosos considerados.

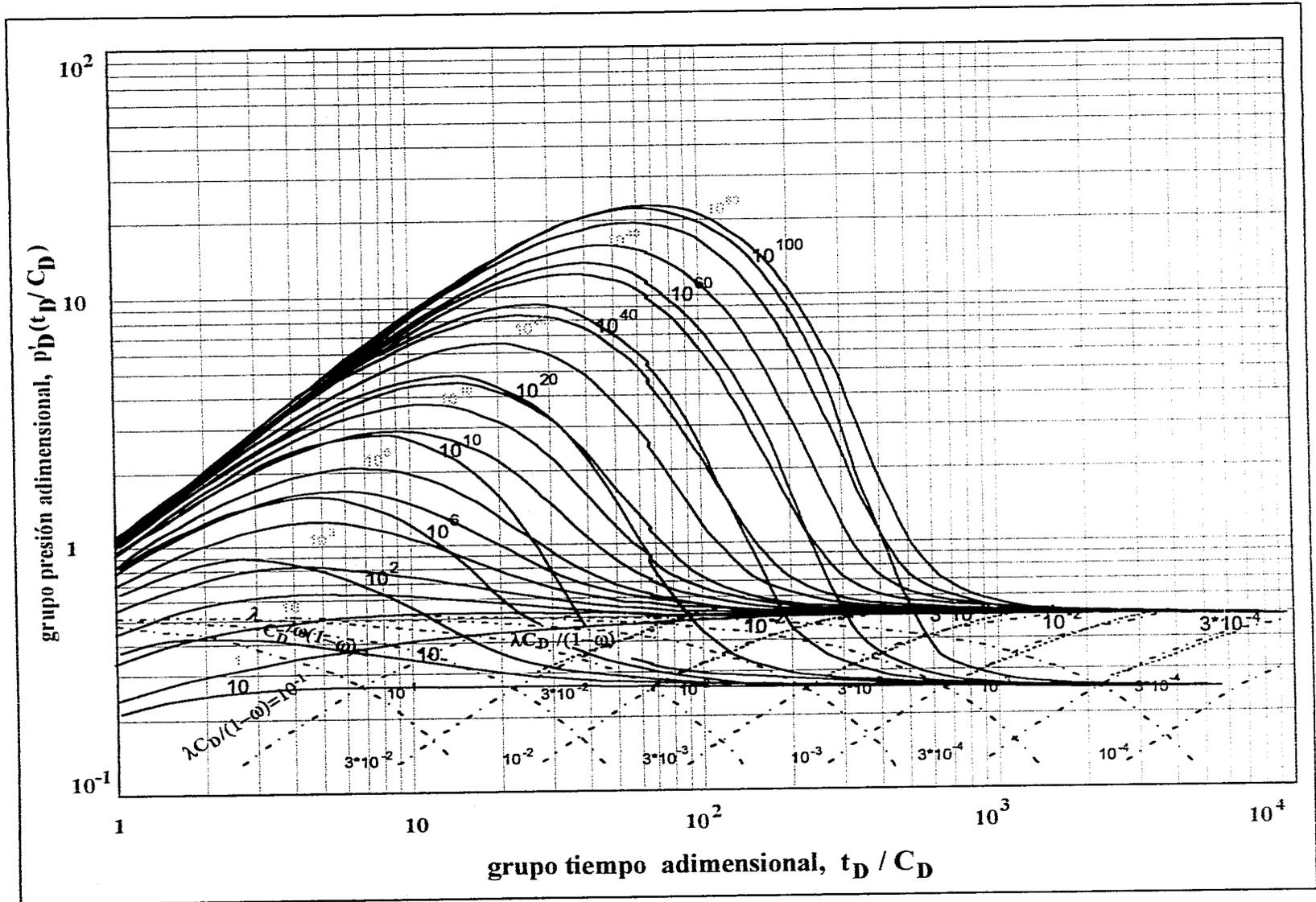


Fig. 3.25 Comparación de las Curvas Tipo para los tipos de flujo interporoso estudiados, pseudo-estacionario y transitorio.

---

La figura 3.26, datos Tabla 3.4, ilustra el comportamiento de la caída de presión y la respectiva derivada para ambos modelos, pseudo-estacionario y transitorio, donde se consideran ambas geometrías: esferas y estratos.

En esta figura se observa que la caída de presión para el flujo interporoso pseudo-estacionario es mayor en los primeros tiempos de las pruebas, en comparación con la respuesta de presión para el flujo transitorio a los mismos tiempos, el comportamiento con el modelo de Warren y Root se acerca al comportamiento con el modelo de DeSwaan conforme transcurre el tiempo de la prueba, de tal manera que para tiempos muy grandes la diferencia llega a ser mínima y esta diferencia es menor si se considera como geometría, para el modelo de DeSwaan, esferas.

Del gráfico se observa el comportamiento de la presión a tiempos largos para el modelo de DeSwaan, es similar para esferas y para estratos, las líneas que representan estas geometrías no llegan a ser coincidentes ya que difieren en su comportamiento por un factor geométrico, ecuaciones 3.16 y 3.17.

### **3.5 ANALISIS SEMILOGARITMICO.**

#### **a) Modelo de Warren y Root <sup>1,40</sup>.**

Cuando se construye un gráfico de pws contra  $\log \frac{t_p + \Delta t}{\Delta t}$ , se identifican las dos líneas rectas paralelas correspondientes a la respuesta del flujo radial infinito del sistema de fracturas y del sistema total (matriz+fracturas). La pendiente de las líneas rectas desarrolladas por el modelo de Warren y Root es proporcional al

- Tabla 3.4 Valores de la respuesta de caída de presión y derivada de presión con el modelo de DeSwaan y de Warren-Root.

TIEMPO		MODELO DE WARREN Y ROOT		MODELO DE DESWAAN		
t (hrs)	$\Delta p$ (psi)	$p'$ (psi)	$\Delta p$ (psi)	$p'$ (psi)		
0.000001	357.11		67.47	-		
0.000003	407.55		106.28	-		
0.000006	439.34	59.16	130.83	59.16		
0.000008	457.95	40.44	140.97	40.44		
0.00001	462.78	25.71	148.76	25.71		
0.00003	513.03	45.71	187.57	45.71		
0.00006	544.71	45.52	212.12	45.52		
0.0001	567.90	45.16	230.20	45.16		
0.0003	616.96	43.54	269.01	43.54		
0.0006	646.66	35.37	293.41	35.37		
0.0009	663.45	36.80	307.81	-		
0.001	667.65		311.49	-		
0.003	706.93	27.98	350.30	27.98		
0.005	719.38	18.00	368.38	11.73		
0.007	720.53	17.81	380.28	17.81		
0.009	727.71	21.81	389.10	21.81		
0.01	729.71	18.02	392.78	18.02		
0.03	738.52	7.06	431.59	7.08		
0.05	741.90	8.40	449.67	3.40		
0.06	746.62	12.16	461.58	12.16		
0.01	749.55	15.42	474.22	15.42		
0.03	778.66	29.35				
0.06	800.34	38.10				
1	822.34	44.01				
3	872.58	45.83				
8	917.62	45.93				
10	927.87	45.93				
100	1033.6	-				
1000	1044.8	-				
3000	-	-				
5000	-	-				
10000	-	-				
			ESTRATOS		ESFERAS	
			$\Delta p$ (psi)	$p'$ (psi)	$\Delta p$ (psi)	$p'$ (psi)
			462.90	35.34	500.09	39.30
			497.59	-	542.13	-
			-	-	542.57	-
			586.82	20.93	624.01	35.33
			675.46	31.88	705.30	36.34
			707.02	32.76	744.15	36.22
			731.50	-	768.51	-
			749.55	-	786.59	-

TIEMPOS CORTOS  
(estratos y esferas)

TIEMPOS LARGOS

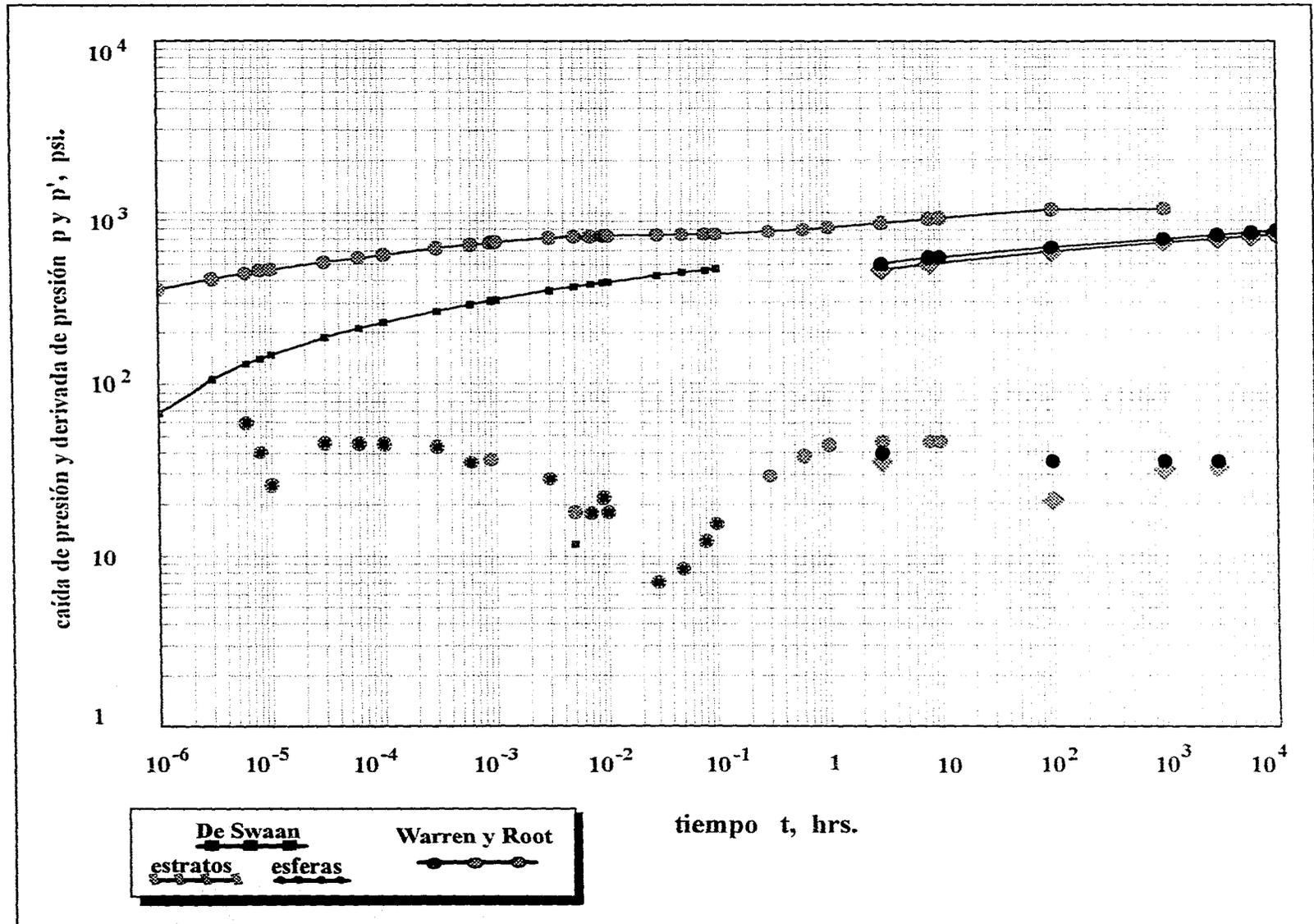


Fig. 3.26 Comparación de las curvas de presión y derivada de presión para modelo de Warren y Root y DeSwaan considerando tiempos cortos y largos para dos geometrías: estratos y esferas

producto permeabilidad-espesor, (kh), del sistema matriz-fracturas ya que virtualmente toda la permeabilidad está concentrada en las fracturas,  $k_m \ll k_f$ , este gráfico se ilustra en la figura 3.27.

- El producto kh se obtiene de la siguiente ecuación:

$$(kh)_f = \overline{kh} = -\frac{162.6qB\mu}{m} \quad (3.18)$$

- La capacidad de almacenamiento,  $\omega$ , se determina del desplazamiento vertical  $\delta p$  de ambas líneas rectas y  $\omega$  se calcula de la siguiente manera:

$$\omega = 10^{-\delta p/m} \quad (3.19)$$

- Para la obtención del parámetro flujo interporoso,  $\lambda$ , se traza una línea a presión constante justo a la mitad del período de transición y se toma la lectura sobre el eje del tiempo para la intersección de esta línea a presión constante con cada una de las líneas paralelas desarrolladas por el modelo, con estos valores se aplica la siguiente ecuación <sup>40</sup>:

$$\lambda = \frac{(\phi V c_t)_f \mu r_w^2 \left( \frac{t_p + \Delta t_1}{\Delta t_1} \right)}{\gamma k t_p} = \frac{(\phi V c_t)_{f+m} \mu r_w^2 \left( \frac{t_p + \Delta t_2}{\Delta t_2} \right)}{\gamma k t_p} \quad (3.20)$$

donde  $\Delta t_1$  y  $\Delta t_2$  corresponden a los tiempos de intersección para la primera y segunda línea recta, respectivamente, en un gráfico de Horner.

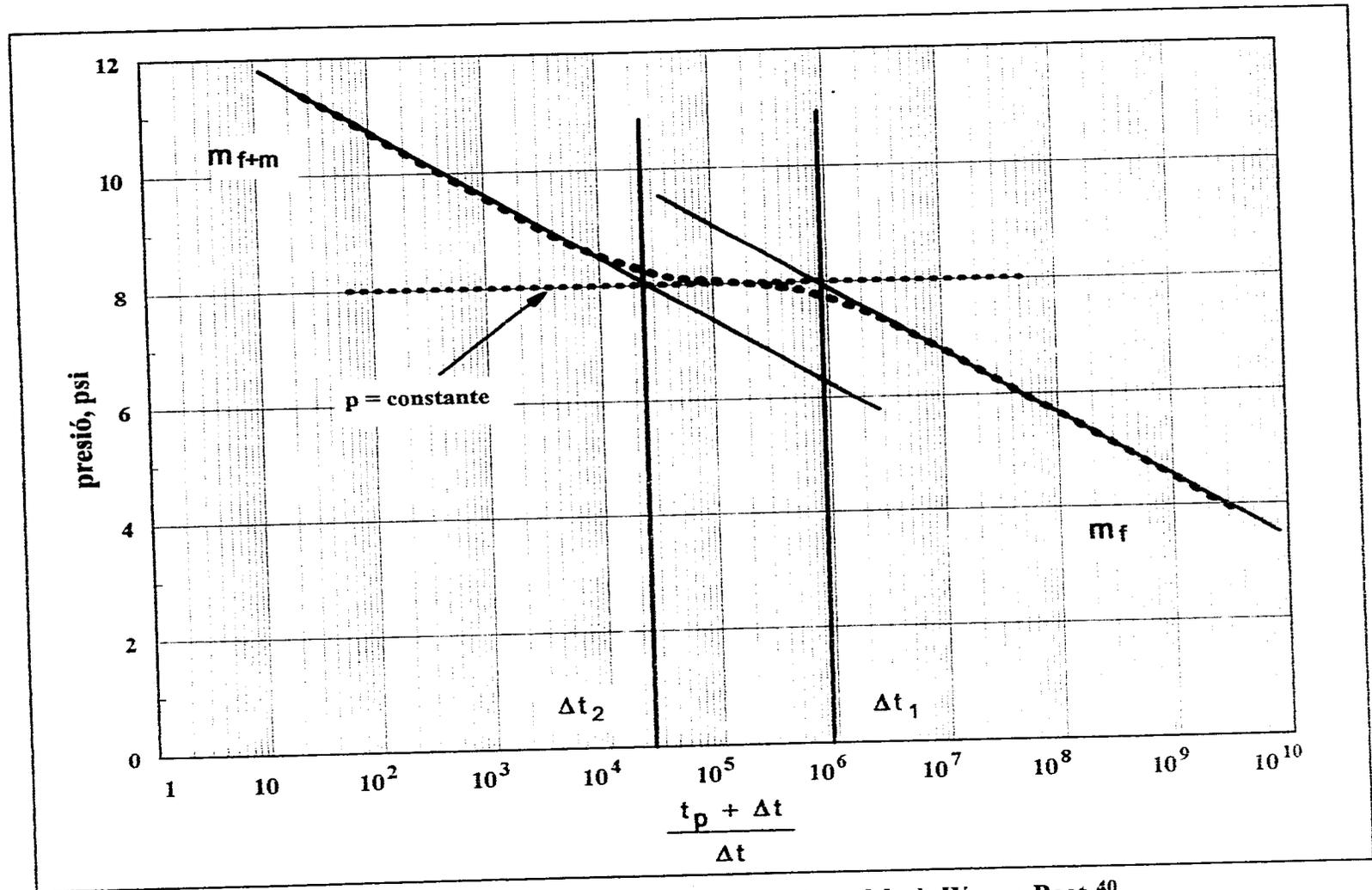


Fig. 3.27 Análisis semilogarítmico para el modelo de Warren-Roof <sup>40</sup>

---

De la definición de  $\omega$  :

$$(\phi V c_t)_f = (\phi V c_t)_m \left( \frac{1}{1-\omega} \right) \quad (3.21)$$

- Obteniendo la  $p_{thr}$  de la segunda línea recta, el factor de daño se puede calcular con:

$$s = 1.15 \left[ \frac{\Delta p_{thr}}{m} - \log \left( \frac{\bar{k}}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) + 3.2275 \right] \quad (3.22)$$

donde  $Dp_{thr} = p_i - p_{thr}$ , para una prueba de decremento y

$\Delta p_{thr} = p_{thr} - p_{wf} (\Delta t = 0)$ , para una prueba de incremento de presión.

#### b) Modelo de DeSwaan<sup>21,22</sup>.

Para conocer los parámetros del yacimiento, de un gráfico de presión contra el logaritmo del tiempo, figura 3.28, se procede de la siguiente manera:

- Determinar de la segunda línea recta la pendiente  $m$  y la intersección de esta línea con el eje del tiempo,  $\Delta t_{tm}$ , y el valor de la presión inicial, para conocer un parámetro relacionado con  $k_p$ . Se aplican las siguientes ecuaciones (las constantes implican el manejo de unidades prácticas):

$$A_l k_f = 1021 q B \mu r_w / m \quad (3.23)$$

$$A_l / \phi_l = 1687 r_w^2 \mu c_l / \Delta t_l \quad (3.24)$$

- 
- De la primera línea recta y su intersección con el eje del tiempo,  $\Delta t_{f+m}$ , a  $p = p_i$  se puede conocer la capacidad de almacenamiento  $\omega$ :

$$\omega = \frac{t_f}{t_{f+m}} \quad (3.25)$$

la relación se obtiene de :

$$t_f = e^{\gamma} r_w^2 / 4\eta_f$$

$$t_{f+m} = e^{\gamma} r_w^2 / 4\eta_f \omega$$

- El factor  $\eta_m \alpha$  se determina de la siguiente ecuación:

$$\eta_b \alpha = -3792 \log \left[ 1 - (\sqrt{\omega} - \omega) / (1 - \omega) \right] / t_{1/2} \quad (3.26)$$

El término  $\Delta t_{1/2}$  es la intersección de una línea recta de tiempo constante con la línea de presión inicial, tal línea recta se traza a la mitad del período de transición. Con este análisis es factible conocer el espesor del bloque, pero para ello se requiere de datos tales como la permeabilidad y la porosidad de la matriz, que se obtienen con técnicas de laboratorio; si se cuentan con estos datos es posible conocer  $\lambda$ .

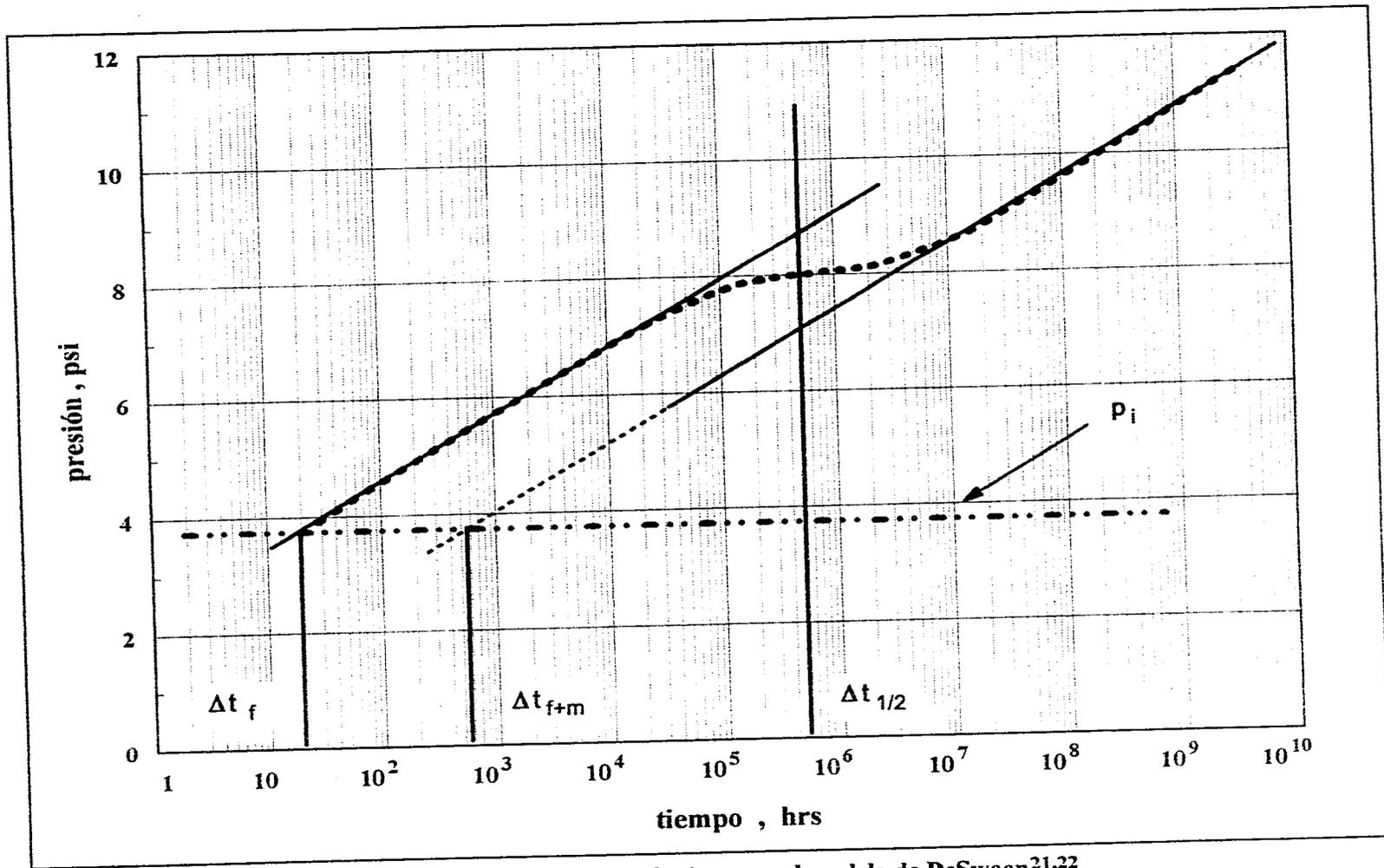


Fig. 3.28 Análisis semilogarítmico para el modelo de DeSwaan<sup>21,22</sup>.

---

. . . . .

### 3.6 ANALISIS CON CURVAS TIPO

Las curvas tipo son utilizadas para analizar datos de presión logrando identificar el comportamiento de sistemas de doble-porosidad entre otros, determinar los parámetros característicos de la formación y estimar las condiciones de producción del pozo. El procedimiento es el siguiente <sup>10,26-28,39</sup>:

- Graficar los datos de  $\Delta p$  contra  $\Delta t$  en un papel transparente con la misma escala utilizada en las curvas tipo.
- Sobreponer la curva de datos a la curva tipo y moverla horizontal y verticalmente hasta que se logre un buen ajuste de los datos a las curvas .
- Registrar los valores de  $p_D$ ,  $t_D/C_D$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta t, (C_D e^{2s})_f$ ,  $(C_D e^{2s})_{f+m}$  y  $\lambda e^{-2s}$  ó  $\beta$  (dependiendo del tipo de curva utilizada).
- $kh$  puede ser calculado de :

$$kh=141.2qB\mu(p_D / \Delta p)_{ajuste} \quad (3.27)$$

- El factor de almacenamiento  $\omega$  se calcula de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{(C_D e^{2s})_{f+m}}{(C_D e^{2s})_f} \quad (3.28)$$

- 
- Coeficiente de almacenamiento:

$$C = \frac{0.000295kh}{\mu} \left( \frac{\Delta t}{C_D / t_D} \right)_{\text{ajuste}}, \text{ bbl / psi} \quad (3.29)$$

y

$$C_D = \frac{0.893C}{\phi c_t h r_w^2} \quad (3.30)$$

- El daño se calcula con la siguiente ecuación:

$$s = 0.5 \ln (C_D e^{2s} / C_D)_{t+m} \quad (3.31)$$

- Para calcular el coeficiente de flujo interporoso se debe tomar en cuenta la curva tipo que se este manejando para aplicar cualquiera de las siguientes ecuaciones, así:

a) Modelo pseudo-estacionario:

$$\lambda = \lambda e^{2s} (\lambda e^{-2s}) \quad (3.32)$$

b) Modelo transitorio:

$$\lambda = 1.8914 (C_D e^{2s})_{t+m} / \beta e^{-2s}, \text{ para estratos} \quad (3.33)$$

$$\lambda = 1.0508 (C_D e^{2s})_{t+m} / \beta e^{-2s}, \text{ para esferas} \quad (3.34)$$

El ajuste de datos de variación de presión con curvas tipo se ilustra en la figura 3.18.

---

# Capítulo 4

## *Ejemplos ilustrativos*

---

. . . . .

## CAPITULO 4

### EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Se presentan dos ejemplos de pruebas de presión en los cuales se aplican la técnicas de análisis semilogarítmico y por medio de curvas tipo con los modelos de Warren-Root y DeSwaan, respectivamente. Los ejemplos que se presentan corresponden a casos documentados en la literatura y en los cuales se hace una comparación de los parámetros importantes para caracterizar un yacimiento naturalmente fracturado:  $\omega$  y  $\lambda$ , así como de  $k_f$  (o un parámetro que la contenga,  $A_f k_f$ ), y de  $\eta_m \alpha$ . Al final de cada ejemplo se presenta una tabla comparativa de los parámetros determinados <sup>27-45</sup>.

#### **4.1 EJEMPLO 1<sup>31</sup>.**

En la Tabla 4.1 se presentan los datos de presión de una prueba registrada en un pozo productor de aceite donde se tienen los siguientes datos:

$q = 880$ bl/día	$c_t = 5.0 \cdot 10^{-6}$ psi-1	$t_p = 25.27$ h
$r_w = 0.29$ pies	$h = 20$ pies	$\mu = 1.3$ cp
$\phi = 0.08$	$B = 1.3$	

---

Los datos de  $q$  y  $t_p$  se obtuvieron de los siguientes períodos de flujo:

DURACION hrs	GASTO bbl/día
3.00	3945
1.50	1265
1.75	1470
6.75	880
42.00	0

#### 4.1.1 ANALISIS SEMILOGARITMICO

##### a) Modelo de Warren y Root

En la figura 4.1 se muestra el gráfico de Horner para los datos de la prueba de incremento de presión del ejemplo 1 (Tabla 4.1). De aquí se obtiene:

- Para las rectas correspondientes a las fracturas y al sistema total,  $m = -162.5$  psi/ciclo.

- De la ecuación 3.18:

$$kh = (-162.6 \cdot 880 \cdot 1.3 \cdot 1.3) / -162.5$$

$$kh = 1488.11 \text{ mD-pie}$$

$$k = 74.40 \text{ mD}$$

- Para conocer  $\omega$  y  $\lambda$ , así:

$$\delta p = 227.5 \text{ psi,}$$

$$\Delta t_1 = 0.144 \text{ hrs}$$

$$\Delta t_2 = 4.075 \text{ hrs.}$$

---

$$\omega = 10^{-227.5 / 162.5}$$

$$\omega = 0.039810$$

$$\lambda = \frac{(4.1652 * 10^{-7}) * 1.3 * 0.29^2}{1.781 * 74.40 * 25.27} = 1.359 * 10^{-11}$$

$$\lambda = \frac{(1.046 * 10^{-5}) * 1.3 * 0.29^2}{1.781 * 74.40 * 25.27} = 3.415 * 10^{-10}$$

$$\bar{\lambda} = 1.7756 * 10^{-10}$$

## b) Modelo de DeSwaan

Para efectuar el análisis de los datos de presión utilizando el modelo de DeSwaan, se construyó el gráfico de la figura 4.2, de donde:

- $m = 78$  psi/ciclo,  $\Delta t_f = .00000027$  h,  $\Delta t_{f+m} = .0000023$  h y  $\Delta t_{1/2} = 0.62$  h.
- Aplicando las ecuaciones 3.23 a 3.26:

$$\omega = (0.001)/(0.00295)$$

$$\omega = 0.1173$$

$$k_f A_f = (1021 * 960 * 1.28 * 0.29) / 21.$$

$$k_f A_f = 1259.36 \text{ mD-pie}^2$$

$$k_f / \phi_f = (1687 * 0.29^2 * 1.3 * 5 * 10^{-5}) / 0.0000023$$

Tabla 4.1 datos de la prueba de incremento de presión del ejemplo 1.

TIEMPO	PRESIÓN	TIEMPO	DERIVADA	TIEMPO	PRESIÓN	TIEMPO	DERIVADA
hr.	psl	HORNER	DE	hr.	psl	HORNER	DE
			PRESIÓN				PRESIÓN
.0007425	7276.14	27300.		0.524200	7710.94	47.379	13.131
.0017679	7322.16	11466.		0.611880	7712.77	39.668	11.879
.0038186	7362.11	5309.1	89.911	0.699550	7715.72	34.127	17.298
.0053567	7398.13	3784.9	145.56	0.786700	7716.17	29.975	12.334
.0063821	7427.28	3177.0	136.24	0.874380	7716.67	26.765	4.3059
.0084329	7452.14	2404.6	159.10	0.961530	7717.61	24.182	7.4497
.0094583	7473.70	2144.0	175.29	1.049200	7718.22	22.080	8.3804
.0104837	7490.58	1934.4	135.60	1.136900	7718.78	20.319	6.9830
.0125345	7506.25	1618.1	106.96	1.224000	7719.27	18.829	6.7997
.0140726	7519.93	1441.3	149.58	1.311700	7719.74	17.560	6.7173
.0150980	7531.70	13.430	138.39	1.399400	7720.18	16.453	6.7953
.0171488	7542.65	1183.0	145.50	1.486500	7720.88	15.484	9.2789
.0181741	7552.64	1116.3	165.83	1.574200	7721.88	14.636	14.595
.0191995	7561.42	1056.7	132.31	1.661400	7722.81	13.876	17.344
.0212503	7569.66	954.86	97.170	1.749000	7723.72	13.200	42.364
.0227884	7577.22	890.48	136.87	1.836700	7725.85	12.589	28.481
.0238138	7584.04	852.18	127.81	1.923900	7726.63	12.061	15.612
.0258646	7590.39	784.69	1626.9	2.011500	7726.52	11.535	6.9758
.0268900	7495.96	754.81	246.11	2.099000	7726.98	11.077	4.2459
.0279154	7601.53	727.12	1872.2	2.186900	7727.75	10.653	14.930
.0299661	7606.87	677.43	832.86	2.274500	7728.50	10.268	19.011
0.315042	7611.32	644.40	119.41	2.361700	7729.23	9.9118	19.253
.0325296	7615.77	624.12	115.46	2.449400	7729.91	9.5828	19.020
.0345804	7620.09	587.17	105.74	2.537000	7730.57	9.2754	18.717
.0356058	7623.67	570.28	124.50	2.624200	7731.23	8.9897	19.163
.0366312	7627.26	554.35	105.26	2.711900	7731.89	8.7242	19.807
.0386820	7630.78	525.01	96.619	2.799500	7732.53	8.4744	20.104
.0397074	7633.71	511.48	97.763	2.886700	7733.14	8.2405	20.000
.0412454	7636.64	492.44	69.576	2.974400	7733.74	8.0218	19.968
.0432962	7639.55	469.17	86.088	3.061500	7734.35	7.8148	20.601
.0443216	7641.86	458.33	82.524	3.149200	7734.98	7.6209	21.726
.0463724	7644.18	438.11	87.910	3.236900	7735.58	7.4365	22.071
.0473978	7646.49	428.65	107.02	3.324000	7736.17	7.2621	22.035
.0484232	7648.81	419.60	88.486	3.411700	7736.74	7.0980	22.052
.0504740	7650.88	402.59	55.163	3.499400	7737.28	6.9413	21.578
.0520120	7652.65	390.71	58.722	3.586500	7737.83	6.7924	21.832
.0694437	7668.94	292.89	46.189	3.674200	7738.40	6.6517	34.984
.0868753	7677.52	234.32	32.592	3.761400	7739.48	6.5168	40.166
0.103790	7682.51	196.29	27.236	4.111500	7741.07	6.3889	21.156
0.121230	7686.63	168.20	24.208	4.549400	7743.59	5.9300	25.440
0.139680	7689.76	146.11	22.103	4.986700	7745.97	5.4555	27.050
0.157110	7692.36	130.01	21.070	5.424000	7748.33	5.0548	28.025
0.174550	7694.48	117.12	21.315	5.861400	7750.50	4.7370	29.361
0.191980	7696.61	106.58	19.643	6.299700	7752.71	4.4582	30.748
0.209410	7698.10	97.779	16.423	6.737000	7754.78	4.2176	30.267
0.226840	7699.36	90.358	16.484	7.174400	7756.65	4.0087	30.128
0.244270	7700.63	83.981	17.738	8.049000	7760.20	3.8253	31.293

Tabla 4.1 Continuación

TIEMPO hr.	PRESIÓN psi	TIEMPO HORNER	DERIVADA DE PRESIÓN	TIEMPO hr.	PRESIÓN psi	TIEMPO HORNER	DERIVADA DE PRESIÓN
9.799400	7766.63	3.2713	34.138	23.346	7797.38	1.8682	43.880
10.67500	7769.58	3.0684	34.518	23.532	7797.44	1.8613	23.284
11.54900	7772.30	2.8988	34.391	23.878	7797.88	1.8488	15.514
12.42400	7774.80	2.7551	35.125	24.225	7798.42	1.8367	33.807
13.30000	7777.25	2.6315	36.051	24.571	7798.81	1.8249	32.421
14.17400	7779.55	2.4300	35.667	24.916	7799.30	1.8135	31.353
15.04900	7781.66	2.3469	36.036	25.262	7799.72	1.8023	32.785
15.92400	7783.74	2.2729	36.603	25.608	7800.20	1.7915	39.311
16.80000	7785.69	2.2065	35.838	25.794	7800.50	1.7858	33.052
17.67400	7787.48	2.1468	38.911	25.954	7800.66	1.7809	28.731
17.89300	7787.97	2.1328	33.027	26.299	7801.12	1.7707	33.050
17.99500	7788.14	2.1264	31.093	26.646	7801.53	1.7607	32.357
18.34200	7788.81	2.1051	34.387	27.146	7802.16	1.7467	32.515
18.68800	7789.44	2.0865	37.330	27.510	7802.58	1.7368	31.788
19.03400	7790.19	2.0649	38.969	28.011	7803.16	1.7236	34.172
19.38100	7790.86	2.0458	34.909	28.375	7803.62	1.7143	34.327
19.72700	7791.44	2.0275	34.575	29.240	7804.56	1.6932	25.514
20.07200	7792.07	2.0098	34.244	30.105	7805.14	1.6733	28.714
20.41800	7792.62	1.9927	33.306	30.776	7805.92	1.6586	32.175
20.76500	7793.20	1.9761	35.677	31.641	7806.70	1.6406	28.706
21.11100	7793.81	1.9601	35.002	32.507	7807.49	1.6235	28.532
21.35700	7794.20	1.9491	31.876	33.371	7808.22	1.6074	28.379
21.63000	7794.58	1.9371	31.464	34.236	7808.96	1.5920	27.465
21.97600	7795.11	1.9223	30.115	35.101	7809.61	1.5774	27.002
22.32200	7795.53	1.9080	30.115	35.966	7810.29	1.5658	26.573
22.66800	7796.10	1.8942	32.010	36.831	7810.89	1.5503	25.694
23.01400	7796.64	1.8807	36.346	37.800	7811.57	1.5362	
				40.424	7813.28	1.5014	

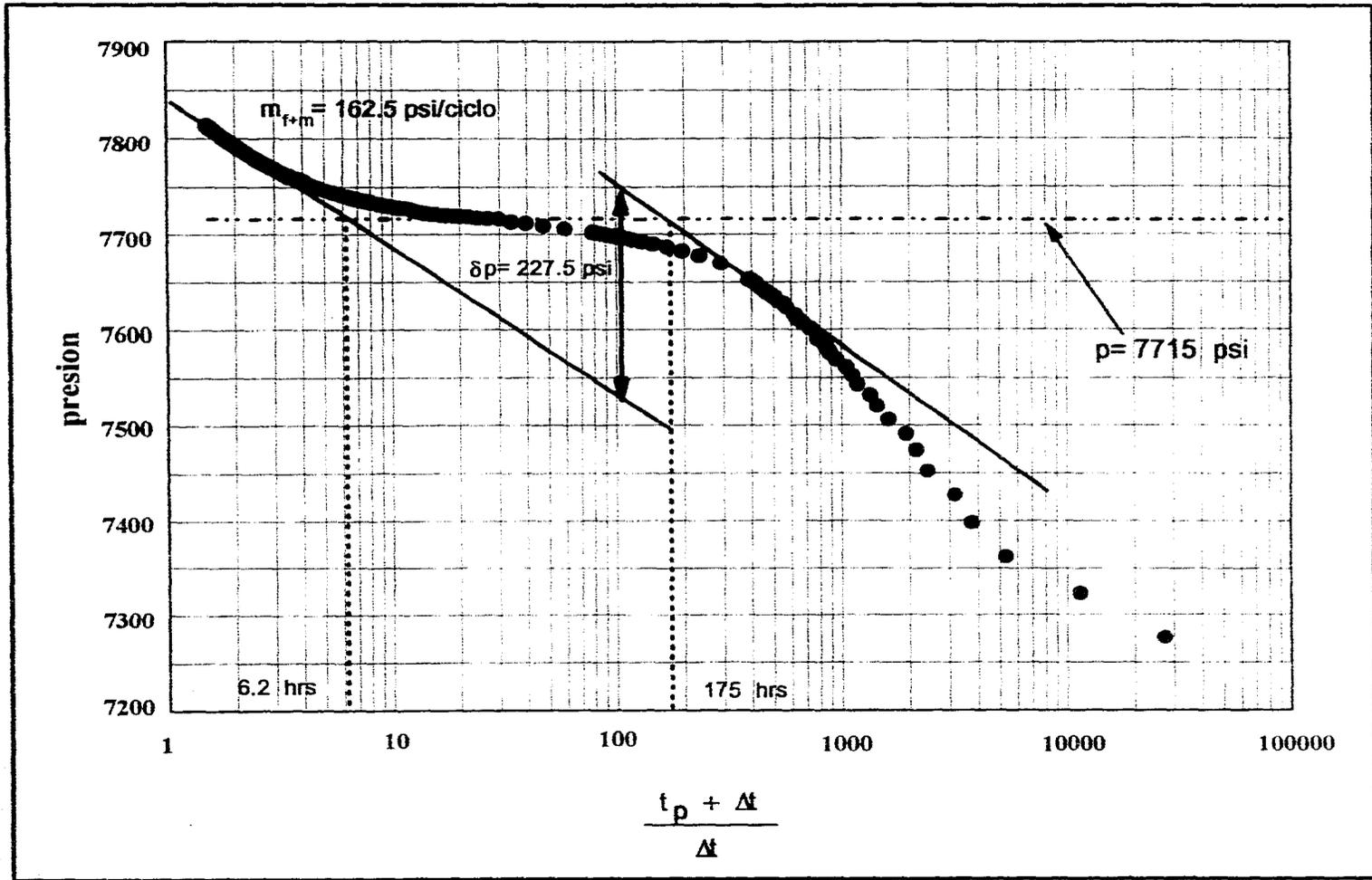


Fig. 4.1 Gráfico de Horner de la prueba de incremento de presión del ejemplo 1.

---


$$k_r/\phi_r = 400.95 \text{ mD/fracción}$$

$$\eta_m \alpha = -3792 \log \left[ 1 - (\sqrt{0.1173} - 0.1173) / (1 - 0.1173) \right] / 0.62$$

$$\eta_m a = 346.28 \text{ mD-psi/ciclo}$$

#### 4.1.2 ANALISIS CON CURVAS TIPO.

##### a) Modelo de flujo interporoso pseudo-estacionario.

Del ajuste de la figura 4.3 a la curva tipo para flujo pseudo-estacionario, se tienen los siguientes datos:

$(C_D e^{2s})_f = 10^4$	punto de ajuste:
$(C_D e^{2s})_{f+m} = 10^2$	$\Delta p = 1000 \text{ psi}, \Delta t = .02 \text{ hrs}$
$\lambda e^{-2s} = 10^{-6}$	$p_D = 14, C_D/t_D = 3.5$
$\lambda C_D / \omega(1-\omega) = 10^{-2}$	
$\lambda C_D / (1-\omega) = 3 \cdot 10^{-3}$	

- Con las ecuaciones 3.27 a 3.34 se obtuvieron los siguientes parámetros:

$$\omega = (10^2/3 \cdot 10^4)$$

$$\omega = 0.33$$

$$kh = 141.2 \cdot 880 \cdot 1.3 \cdot 1.3 \cdot (14/1000)$$

$$kh = 29395 \text{ mD-pie}$$

$$k = 147 \text{ mD}$$

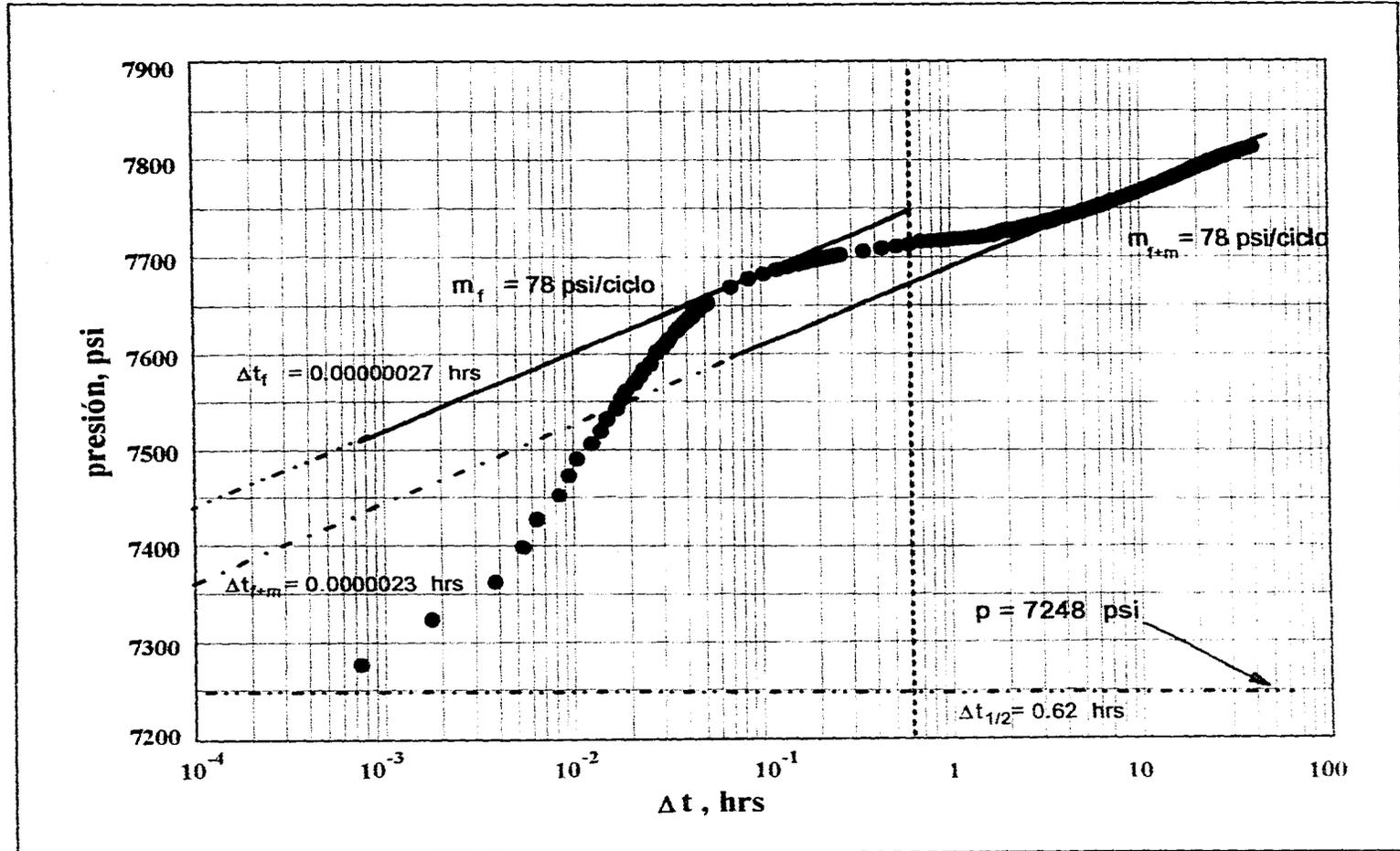


Fig. 4.2 Gráfico de presión contra el logaritmo del tiempo para los datos de incremento de presión del ejemplo 1.

---


$$C = \frac{0.000295 * 147 \left( \frac{10^{-2}}{3.5} \right)}{1.3}$$

$$C = 9.5301 * 10^{-5} \text{ bl/día}$$

$$C_D = \frac{0.893 * (9.5301 * 10^{-5})}{0.08 * (5 * 10^{-6}) * 20 * 0.29^2}$$

$$C_D = 126.57$$

$$s = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{10^2}{126.57} \right)$$

$$s = -0.1178$$

$$\lambda = \frac{10^{-6}}{e^{-2(-0.1178)}}$$

$$\lambda = 7.90033 * 10^{-7}$$

**b) Modelo de flujo interporoso transitorio.**

Se graficaron los datos de presión y derivada de presión contra un grupo adimensional del tiempo, en escala logarítmica con los mismos ciclos establecidos para la curva tipo para flujo transitorio, de la superposición de la curva de datos se obtuvieron los siguientes parámetros de ajuste:

---

$(C_D e^{2s})_f = 10^2$

punto de ajuste:

$(C_D e^{2s})_{f+m} = 3$

$\Delta p = 90 \text{ psi}, \Delta t = 0.9 \text{ hrs}$

$\lambda e^{-2s} = 10^6$

$p_D = 1, C_D / t_D = 90$

$\lambda C_D / (1-\omega)^2 = 3 \cdot 10^{-4}$

- Aplicando las ecuaciones 3.27 a 3.34 se determinaron los siguientes parámetros del sistema pozo-yacimiento:

$\omega = (3 / 100)$

$\omega = 0.33$

$kh = 141.2 \cdot 880 \cdot 1.3 \cdot 1 (1/90)$

$kh = 2333.25 \text{ mD-pie}$

$k = 240.98 \text{ mD}$

$C = \frac{0.000295 \cdot 2333.25 \left( \frac{0.9}{90} \right)}{1.3}$

$C = 0.005294 \text{ bl/día}$

$C_D = \frac{0.893 \cdot (5.2946 \cdot 10^{-3})}{0.08 \cdot (5 \cdot 10^{-6}) \cdot 20 \cdot 0.29^2}$

$C_D = 7548.49$

$s = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3}{7032.29} \right)$

$s = -3.879$

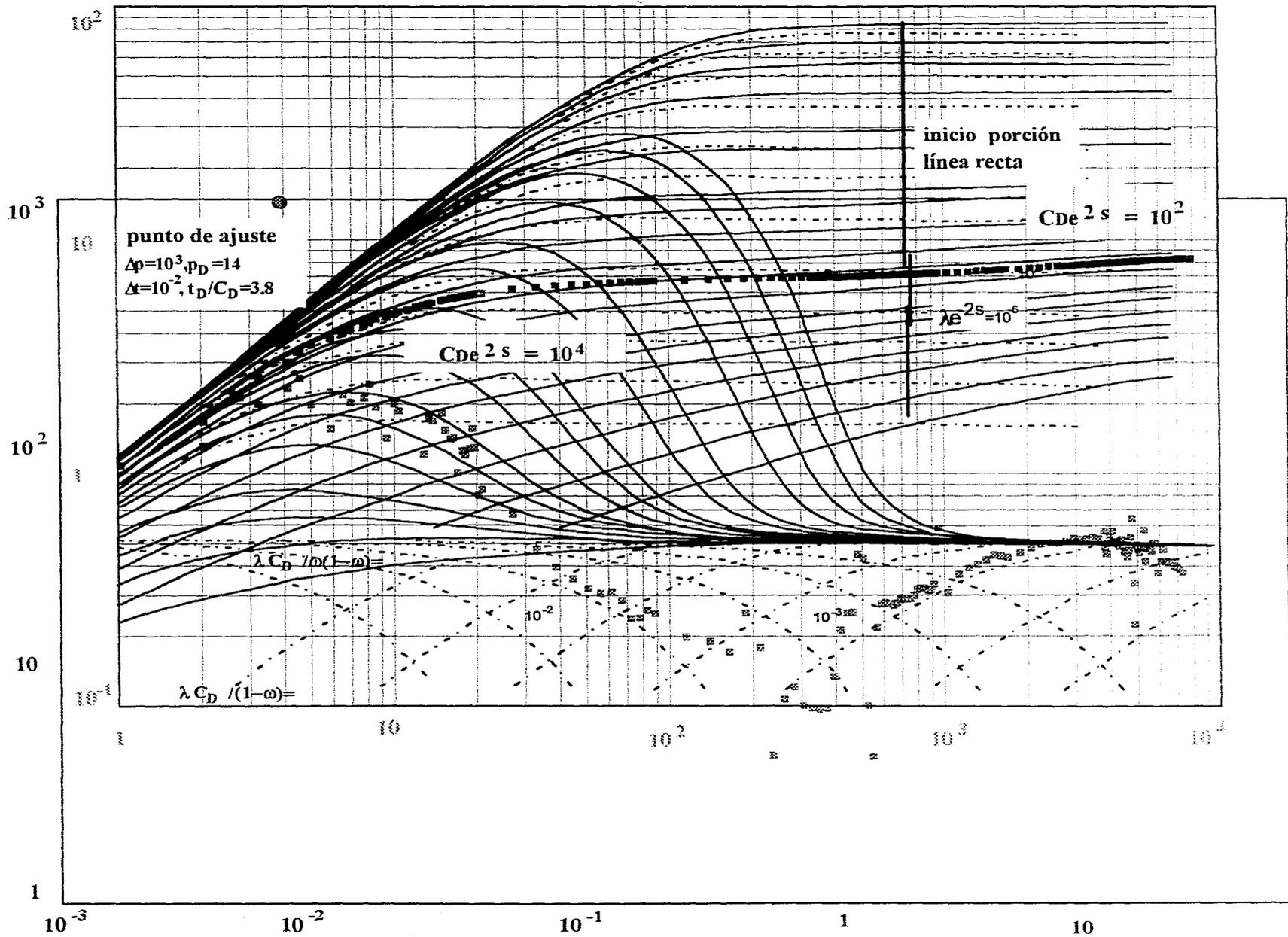


Fig. 4.3 Gráfico del cambio de presión y su respectiva derivada respecto al tiempo, análisis con curvas tipo, ejemplo 1.

$$\lambda = \frac{1.8914 * 1}{30e^{-2(-4.4645)}}$$

$$\lambda = 8.3522 * 10^{-6}, \text{ para estratos}$$

$$\lambda = \frac{1.0508 * 1}{30e^{-2(-4.4645)}}$$

$$\lambda = 4.6402 * 10^{-6}, \text{ para esferas}$$

### 4.1.3 RESULTADOS

Tabla 4.2 Tabla comparativa entre los modelos de Warren-Root, DeSwaan y el análisis con curvas tipo.

PARAMETRO	ANALISIS SEMILOGARITMICO		CURVAS TIPO	
	WARREN Y ROOT	DeSWAAN	PSEUDO-ESTACIONARIO	TRANSITORIO
$\omega$	0.0398	0.1173	0.33	0.33
$\lambda$	$1.7756 * 10^{-10}$	-	$7.9003 * 10^{-7}$	$4.6402 * 10^{-6}$
kh(mD-pie)	1488.11	-	29395	2333.25
$K_f A_f$ (mD-pie)	-	1259.36	-	-
$\eta_m \alpha$	-	346.28	-	-

El análisis semilogarítmico se basa en el trazo de las líneas rectas correspondientes al comportamiento del sistema total y de las fracturas, para este ejemplo se observa que el efecto de almacenamiento interfiere en la formación de la primera línea recta, (manifestación de las fracturas), figuras 4.1 y 4.2.

Del mejor ajuste con curvas tipo, modelo pseudo-estacionario, se confirma que el tiempo correspondiente al final del almacenamiento ocurre aproximadamente 1.5 ciclos después de desaparecer la pendiente unitaria, figura 4.3, valor que para

---

este ejemplo corresponde a  $\Delta t \approx 2$  h o bien  $(t_p + \Delta t / \Delta t) = 13.6$ ; ambos valores en las gráficas 4.1 y 4.2 se localizan después del trazo de la línea recta del sistema de fracturas, con lo cual se observa que los parámetros calculados de esta prueba por medio del análisis semilogarítmico son erróneos. Con base en lo anterior se establece la conveniencia de realizar el análisis de los datos de presión, por medio del ajuste con curvas tipo, utilizando el modelo que a criterio del analista se ajuste correctamente a la respuesta de presión; para este ejemplo el mejor ajuste se obtuvo con la utilización de la curva tipo para flujo interporoso pseudo-estacionario, donde la derivada de presión muestra una característica de transición temprana y tardía, ajustándose a la curvas de  $\lambda C_D/\omega(1-\omega) = 10^{-2}$  y  $\lambda C_D/\omega(1-\omega) = 10^{-3}$ , la estabilización se verifica en  $p'_D(t_p/C_D) = 0.5$ . El parámetro  $\lambda$  se calcula del período de transición tardío ya que los efectos de almacenamiento no influyen en el comportamiento de la presión.

#### 4.2 EJEMPLO 2<sup>29</sup>.

Se realiza una prueba de incremento de presión en un pozo productor de aceite localizado en un yacimiento naturalmente fracturado de donde se conocen los siguientes parámetros:

$q = 960$ bl/día	$c_t = 1.0 \cdot 10^{-5}$ psi-1	$t_p = 50.75$ h
$r_w = 0.29$ pies	$h = 36$ pies	$\mu = 1$ cp
$\phi = 0.07$	$B = 1.28$	

Los datos de  $q$  y  $t_p$  se obtuvieron de los siguientes períodos de flujo:

<b>DURACION</b>	<b>GASTO</b>
<b>hrs</b>	<b>bb/día</b>
1.33	2952
0.31	0
5.05	2952
0.39	0
31.13	960
3.36	0

Los registros de tiempo y cambio de presión así como su equivalente en tiempo de Horner y la respectiva derivada de presión se muestran en la Tabla 4.3

#### **4.2.1 ANALISIS SEMI-LOGARITMICO**

##### **a) Modelo de Warren y Root.**

En la figura 4.4 se muestra el gráfico de Horner para los datos de la Tabla 4.3.

- Para las líneas rectas correspondientes a las fracturas y al sistema total, figura 4.4,  $m = -22.1$  psi/ciclo y para el período de flujo interporoso  $m' = -12$  psi/ciclo.
- De la ecuación 3.18:  
 $kh = 9040.85$  md-pie  
 $k = 251.13$  md

Tabla 4.3 Datos de la prueba de presión correspondiente al ejemplo 2

TIEMPO	PRESIÓN	TIEMPO	DERIVADA	TIEMPO	PRESIÓN	TIEMPO	DERIVADA
hr.	psi	HORNER	DE	hr.	psi	HORNER	DE
			PRESIÓN				PRESIÓN
0.003488	11.095	14547.2	8.56	0.42380	48.791	104.0	8.34
0.009044	20.693	5612.17	11.65	0.54793	49.700	93.66	8.72
0.14600	25.400	3477.03	9.74	0.60349	50.541	85.09	8.44
0.020155	28.105	2518.92	8.31	0.66460	51.305	77.36	8.48
0.25711	29.978	1974.86	7.64	0.71460	51.939	72.02	8.83
0.031266	31.407	1624.14	7.10	0.77015	52.589	66.90	8.93
0.036822	32.499	13779.2	6.56	0.82571	53.208	62.46	9.11
0.042377	33.386	1198.56	6.10	0.88127	53.796	58.59	9.62
0.047933	34.499	1059.76	5.64	0.93682	54.400	55.17	9.26
0.059044	35.288	860.52	5.63	0.99238	54.874	52.14	9.54
0.070155	36.213	724.39	5.36	1.04790	55.447	49.43	9.64
0.081266	36.985	625.49	5.51	1.10350	55.875	46.90	9.26
0.092377	36.718	550.38	5.60	1.21460	56.845	42.78	10.1
0.103490	38.330	491.39	5.39	1.32570	57.686	39.28	9.17
0.125710	39.415	404.71	5.83	1.43680	58.343	36.32	9.10
0.147930	40.385	344.07	5.99	1.54790	59.054	33.79	9.93
0.170160	41.211	299.25	6.11	1.65900	59.726	31.55	9.95
0.192380	41.975	264.80	6.21	1.77020	60.345	29.67	10.0
0.214600	42.640	237.49	6.33	1.88130	60.949	27.98	9.93
0.236820	43.281	215.30	7.12	1.99240	61.476	26.47	9.75
0.259040	43.969	196.92	7.39	2.10350	61.995	25.13	9.87
0.281270	44.542	181.43	7.10	2.21460	62.477	23.92	9.62
0.303490	45.085	168.22	7.67	2.43680	63.363	21.83	9.79
0.325710	45.658	156.81	7.61	2.69240	64.303	19.85	9.55
0.381270	46.804	134.11	7.53	2.91460	64.983	18.41	9.59
0.436820	47.836	117.18	7.88	3.13680	65.686	17.18	9.34
				3.35900	66.229	16.11	39.6

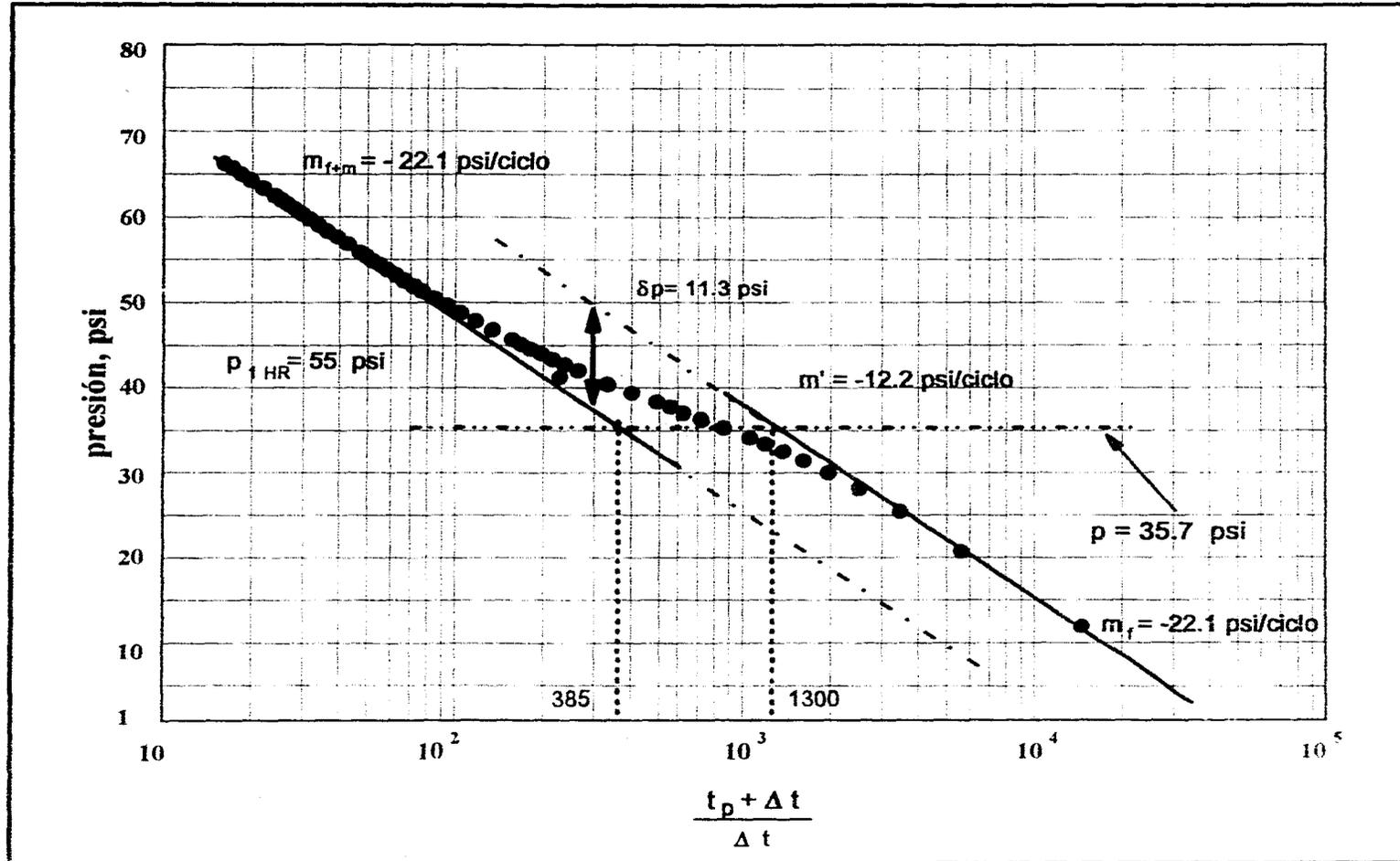


Fig. 4.4 Gráfico de Horner de la prueba de incremento de presión del ejemplo 2.

- 
- Del gráfico de Horner se obtienen los datos siguientes:

$$\delta p = 11.3 \text{ psi}$$

$$\Delta t_1 = 25.61 \text{ h}$$

$$\Delta t_2 = 7.586 \text{ h.}$$

De tal manera que a partir de las ecuaciones 3.19 y 3.20:

$$\omega = 10^{-(11.3/22.1)}$$

$$\omega = 0.3080$$

$$\lambda = \frac{(7 * 10^{-7}) * 1 * 0.29^2}{1.781 * 25.113 * 50.75} = 2.593 * 10^{-12}$$

$$\lambda = \frac{(1.0117 * 10^{-6}) * 1 * 0.29^2}{1.781 * 25.113 * 50.75} = 3.748 * 10^{-11}$$

$$\bar{\lambda} = 1.8272 * 10^{-1}$$

#### b) Modelo de DeSwaan:

En la figura 4.5 se muestran los datos de presión contra tiempo en un gráfico semilogarítmico.

- De la figura se obtiene :  $m = 21.5 \text{ psi/ciclo}$ ,  $\Delta t_f = 0.001 \text{ h}$ ,  $\Delta t_{f+m} = 0.00295 \text{ h}$  y  $\Delta t_{1/2} = 0.084 \text{ hrs.}$

- Aplicando las ecuaciones 3.23 a 3.26:

$$\omega = (0.001)/(0.00295)$$


---

---

$$\omega = 0.3398$$

$$k_f A_f = (1021 \cdot 960 \cdot 1.28 \cdot 0.29) / 21.$$

$$k_f A_f = 16922.57 \text{ mD-pie}^2$$

$$k_f / \phi_f = (1687 \cdot 0.29^2 \cdot 1.0 \cdot 10^{-5}) / 0.001$$

$$k_f / \phi_f = 1.4187 \text{ md/fracción}$$

$$\eta_m \alpha = -3792 \log \left[ 1 - (\sqrt{0.34 - 0.34}) / (1 - 0.34) \right] / 0.084$$

$$\eta_m \alpha = 2649.19 \text{ md-psi/ciclo}$$

### 4.2.3 ANALISIS CON CURVAS TIPO.

#### a) Modelo de flujo interporoso pseudo-estacionario.

La figura 4.6 presenta el ajuste con la curva tipo para flujo interporoso pseudo-estacionario y de donde se obtienen los siguientes datos:

$$(C_D e^{2s})_f = 3 \cdot 10^{-1}$$

punto de ajuste:

$$(C_D e^{2s})_{f+m} = 10^{-1}$$

$$\Delta p = 20 \text{ psi}, \quad \Delta t = 1 \text{ h}$$

$$\lambda e^{-2s} = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$p_D = 1, \quad t_D / C_D = 1100$$

$$\lambda C_D / \omega(1-\omega) = 10^{-2}$$

$$\lambda C_D / (1-\omega) = 3 \cdot 10^{-3}$$

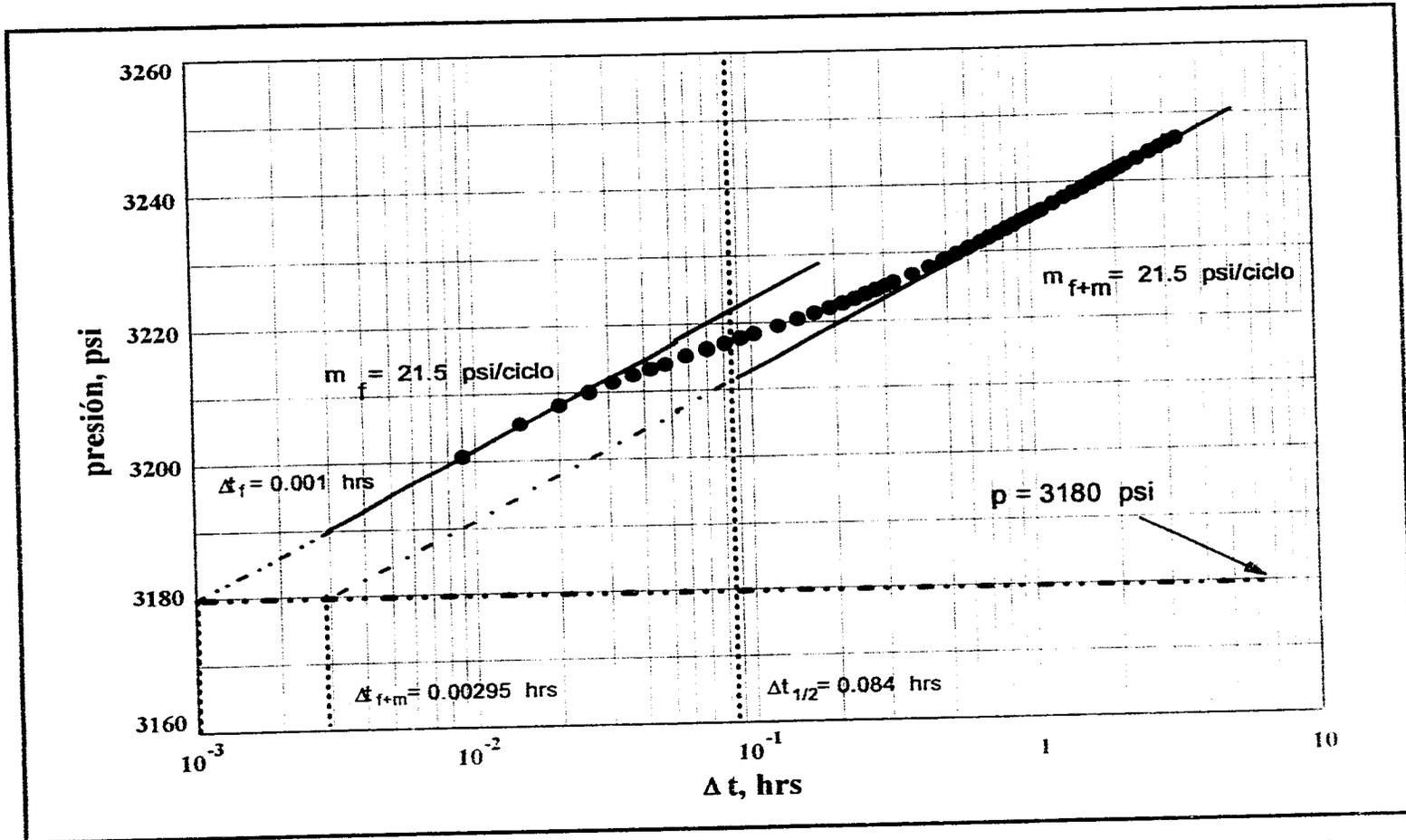


Fig. 4.5 Gráfico de presión contra logaritmo del tiempo de la prueba de incremento de presión del ejemplo 2.

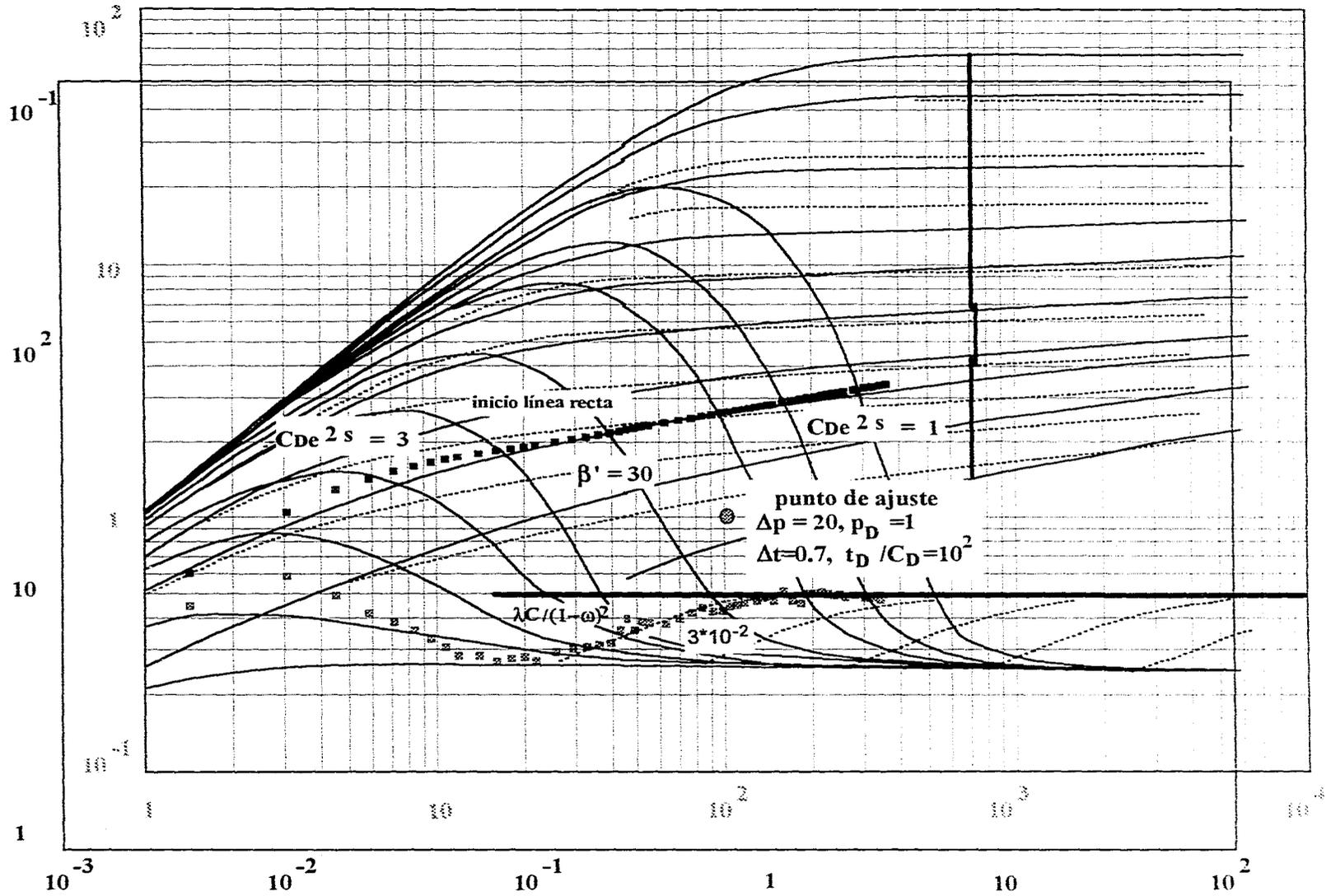


Fig. 4.6 Gráfico del cambio de presión y su respectiva derivada con respecto al tiempo, análisis con curvas tipo, ejemplo 2.

- 
- Con las ecuaciones 3.27 a 3.31 se obtuvieron los siguientes parámetros:

$$\omega = (10^{-1}/3 \cdot 10^{-1})$$

$$\omega = 0.33$$

$$kh = 141.2 \cdot 960 \cdot 1.28 \cdot 1(1/20)$$

$$kh = 8675.35 \text{ md-pie}$$

$$k = 240.98 \text{ md}$$

$$C = \frac{0.000295 \cdot 8675.35}{1} \left( \frac{1}{1100} \right)$$

$$C = 0.0023265 \text{ bbl/día}$$

$$C_D = \frac{0.893 \cdot (0.0023265)}{0.07 \cdot (1 \cdot 10^{-5}) \cdot 36 \cdot 0.29^2}$$

$$C_D = 980.98$$

$$s = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{10^{-1}}{980.98} \right)$$

$$s = -4.59$$

$$\lambda = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{e^{-2(-4.595)}}$$

$$\lambda = 5.1027 \cdot 10^{-6}$$


---

---

$$C = 0.02326 \text{ bbl/día}$$

$$s = -4.59$$

$$\lambda = 5.1027 \cdot 10^{-6}$$

**b) Modelo de flujo interporoso transitorio.**

En la figura 4.6 se muestra el ajuste del comportamiento de la presión y la derivada con la curva tipo que considera flujo interporoso transitorio y se obtuvieron los siguientes parámetros de ajuste:

$$(C_D e^{2s})_f = 3$$

punto de ajuste:

$$(C_D e^{2s})_{f+m} = 1$$

$$\Delta p = 20 \text{ psi}, \Delta t = 0.7 \text{ h}$$

$$\beta' = 30$$

$$p_D = 1, C_D / t_D = 10^2$$

$$\lambda C_D / (1-\omega)^2 = 3 \cdot 10^{-2}$$

- Aplicando las ecuaciones 3.27 a 3.34 se determinaron los siguientes parámetros del sistema pozo-yacimiento:

$$\omega = (1/3)$$

$$\omega = 0.33$$

$$kh = 141.2 \cdot 960 \cdot 1.28 \cdot 1(1/20)$$

$$kh = 8675.32 \text{ md-pie}$$

$$k = 240.98 \text{ md}$$

---

• • • • •

$$C = \frac{0.000295 * 8675.32 \left( \frac{0.7}{10^2} \right)}{1}$$

$$C = 0.017914 \text{ bbl/día}$$

$$C_D = \frac{0.893 * (1.791 * 10^{-2})}{0.07 * (1 * 10^{-5}) * 36 * 0.29^2}$$

$$C_D = 7548.49$$

$$s = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{7548.49} \right)$$

$$s = -4.4645$$

$$\lambda = \frac{1.8914 * 1}{30e^{-2(-4.4645)}}$$

$$\lambda = 8.3522 * 10^{-6}, \text{ para estratos}$$

$$\lambda = \frac{1.0508 * 1}{30e^{-2(-4.4645)}}$$

$$\lambda = 4.6402 * 10^{-6}, \text{ para esferas}$$

### 4.2.3 RESULTADOS

Tabla 4.4 Tabla comparativa entre los modelos Warren - Root, DeSwaan y el análisis con curvas tipo.

PARAMETRO	ANALISIS SEMILOGARITMICO		CURVAS TIPO	
	WARREN Y ROOT	DeSWAAN	PSEUDO-ESTACIONARIO	TRANSITORIO
$\omega$	0.3080	0.3398	0.333	0.333
$\lambda$	$1.8278 \cdot 10^{-11}$	-	$5.1027 \cdot 10^{-6}$	$8.352 \cdot 10^{-6}$
kh(mD-pie)	9040.85	-	8675.3	8675.35
$K_f A_f$ (mD-pie)	-	16922.57	-	-
$\eta_m \alpha$	-	264919	-	-

En los gráficos semilogarítmicos, figuras 4.4 y 4.5, se observa el desarrollo de las dos líneas rectas paralelas características de los yacimientos naturalmente fracturados, donde se manifiesta una rápida respuesta del sistema de fracturas enmascarada por los efectos de almacenamiento, que se refleja por la falta de claridad en la definición de la primera línea recta. El período de transición registrado en este caso es muy corto, esto puede observarse también en el comportamiento de la derivada, figura 4.6; la forma de esta derivada sugiere un comportamiento heterogéneo y después del almacenamiento, la curva muestra un mínimo antes de alcanzar una estabilización a un valor constante de la derivada (flujo radial infinito para el sistema total), este mínimo corresponde a  $p_D(t_D/C_D) = 0.25$  y la estabilización en  $p_D(t_D/C_D) = 0.5$ .

Del ajuste de los datos a la curva tipo, modo transitorio, fig 4.6, se observa que el tiempo para el cual termina el efecto de almacenamiento es  $\Delta t = 0.3$ , valor que se ubica en el inicio del período de transición; en las figuras 4.4 y 4.5 puede observarse que éste valor se localiza, al igual que en ejemplo anterior, después del trazo de la línea recta correspondiente a las fracturas; a partir de esta información

---

se concluye que el análisis semilogarítmico no resulta conveniente para esta prueba, en donde aparentemente, figuras 4.4 y 4.5, se observa la formación de las dos líneas rectas paralelas sin una significativa influencia del efecto de almacenamiento.

Se realizó el ajuste de los datos con el modelo pseudo-estacionario de Warren y Root y con el modelo de flujo transitorio de DeSwaan, Tabla 4.4, en donde se observa que para  $\omega$  no hay variación significativa, pero si la hay en cuanto a la magnitud del parámetro  $\lambda$ .

El mejor ajuste de los datos se logra con el modelo transitorio, dada la forma y comportamiento de la derivada de presión de los datos, figura 4.6.

Para ninguno de los ejercicios anteriores fué posible la cuantificación de las dimensiones del bloque de matriz, para lo cual se necesitan datos adicionales de pruebas de laboratorio tal como la permeabilidad de la matriz.

Los datos de la derivada de presión, para ambos ejemplos, se calcularon con el algoritmo de Bourdet<sup>28-33</sup>.

# Capítulo 5

## *Conclusiones y recomendaciones*

---

## CAPITULO 5

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Los yacimientos naturalmente fracturados han sido representados con el modelo de doble-porosidad, el cual está definido como un sistema que consiste de bloques de matriz separados por un sistema de fracturas. Los bloques representan la roca que conforma al yacimiento. La matriz y las fracturas estan caracterizadas por ser cada uno de ellos sistemas homogéneos con propiedades relacionadas de la manera siguiente:  $k_f \gg k_m$ ,  $\phi_m \gg \phi_f$ .

En el modelo de doble-porosidad la matriz actúa como fuente que aporta fluido a las fracturas.

Los modelos que representan el comportamiento de doble-porosidad difieren entre sí en las condiciones bajo las cuales se realiza el intercambio de fluidos entre la matriz y las fracturas : flujo interporoso pseudo-estacionario ó transitorio.

El comportamiento de la respuesta de presión de un sistema de doble-porosidad se identifica típicamente a través del desarrollo de dos líneas rectas paralelas semilogarítmicas: una a tiempos cortos, correspondiente a la respuesta del flujo radial infinito, sistema de fracturas y la otra, después de un periodo de transición (flujo interporoso de matriz a fracturas), que corresponde al flujo radial infinito del sistema total (matriz + fracturas).

- Además de la permeabilidad y la porosidad, los parámetros  $\omega$  y  $\lambda$  son requeridos para caracterizar a los yacimientos naturalmente fracturados, donde están involucradas las propiedades que caracterizan a los sistemas de matriz y de fracturas, la duración de la primera línea recta en un análisis

---

• • • • •

semilogarítmico, así como la duración y forma del período de transición entre las líneas rectas depende de la magnitud de estos parámetros. De la definición de estos parámetros se tiene que :  $0 < \omega \leq 1$ ; los límites 0 y 1 implican la existencia de un yacimiento compuesto exclusivamente de matriz y un yacimiento compuesto exclusivamente de fracturas, respectivamente.

- El parámetro  $\lambda$  permite evaluar la geometría y dimensión de los bloques de matriz, que debe apoyarse en un modelo geológico. Para determinar esta geometría es necesario conocer otros datos adicionales, tal como la permeabilidad de la matriz, ( $k_m$ ), o el coeficiente de difusividad para cada uno de los medios que actúan en el comportamiento de la presión.
- Pequeños valores de  $\omega$  indican una capacidad pequeña de almacenamiento en las fracturas y buena capacidad de almacenamiento en la matriz. Valores pequeños de  $\lambda$  significan un gran contraste entre las permeabilidades de la matriz y las fracturas.
- El modelo de Warren-Root considera que el flujo de la matriz a las fracturas se realiza bajo condiciones pseudo-estacionarias, es decir,  $\frac{\partial p}{\partial t} = \text{cte.}$  la geometría establecida para los bloques de matriz son paralelepípedos rectangulares y el sistema de fracturas es ortogonal.

La ecuación que representa el comportamiento de la presión está expresado en términos adimensionales, en los cuales están implícitas las características de los sistemas matriz y fracturas; esta ecuación genera las dos rectas paralelas características del modelo de doble-porosidad y también la curva que conecta a estas líneas rectas la cual representa el período en el cual se establece el equilibrio entre matriz y fracturas.

---

El modelo de Warren-Root caracteriza al yacimiento mediante los parámetros  $\omega$  y  $\lambda$ .

- El modelo de DeSwaan implica la existencia de flujo transitorio de la matriz a las fracturas,  $\frac{\partial p}{\partial t} = \text{variable}$ , este modelo considera dos geometrías para los bloques de matriz: esferas y estratos.

La ecuación que representa el comportamiento de la presión es similar a aquella expresada para yacimientos homogéneos, solución línea fuente, con la diferencia que la constante de difusividad para los primeros tiempos de la prueba, es la correspondiente al sistema de fracturas, y para los tiempos largos corresponde a la difusividad para el sistema total (matriz+fracturas). En este modelo no está definido el comportamiento de la presión en el período de transición.

- Las diferencias entre el modelo de Warren-Root y de DeSwaan radican en las condiciones a las cuales la matriz cede fluido a las fracturas,  $\frac{\partial p}{\partial t} = \text{variable}$ , y  $\frac{\partial p}{\partial t} = \text{cte}$ , respectivamente. Esto cual implica que para el flujo pseudo-estacionario hay una restricción al flujo en la cara del bloque de la matriz, lo cual no sucede en el modelo de DeSwaan, esto se traduce en mayores caídas de presión comparadas con las registradas para el modelo de flujo interporoso transitorio.

En un gráfico semi-logarítmico de  $p$  vs  $t$  se observa que la pendiente para el período interporoso, modelo transitorio, es aproximadamente la mitad de la correspondiente para fracturas o para el sistema total del modelo pseudo-estacionario.

---

• • • • •

En el comportamiento de la derivada pueden observarse claramente las diferencias entre los modelos para el pseudo-estacionario la forma del mismo es más pronunciada que para el flujo transitorio, las formas características son " V " para modelo de Warren-Root y " U " para el modelo de DeSwaan.

- Es posible determinar los parámetros  $\omega$  y  $\lambda$  , a partir de un análisis semilogarítmico, siempre y cuando exista una buena definición de las dos líneas rectas paralelas. Sin embargo, con frecuencia el efecto de almacenamiento, el cual enmascara la línea recta que corresponde al efecto de las fracturas y en estos casos el análisis más confiable se lleva a cabo por medio de curvas tipo en donde se incluye el comportamiento de la derivada para cada uno de los modelos pseudo-estacionario y transitorio.
- La identificación del modelo adecuado, representativo del yacimiento, en base a un solo método de análisis puede llevar a errores en la caracterización de los yacimientos; la aplicación de la derivada enfatiza el comportamiento de doble-porosidad y se distingue claramente del comportamiento homogéneo.  
La elección del modelo de interpretación debe ajustarse con base en el modelo geológico, el cual ayuda a definir la geometría de los bloques de matriz y las características de las fracturas que definen al sistema de doble-porosidad.
- Dada la dificultad de que se manifiesten las dos líneas rectas paralelas en un gráfico semilogarítmico, es conveniente que el análisis de los datos de presión se realice por medio del ajuste con curvas tipo en donde se enfatice el uso de la derivada como una poderosa herramienta de diagnóstico.

# ***Nomenclatura***

# N O M E N C L A T U R A

SIMBOLO	DESCRIPCION	UNIDADES
a	Arreglo geométrico del bloque de matriz	cm, pies
A	Area	cm <sup>2</sup> , pies <sup>2</sup>
b	Características geométricas del bloque de matriz	cm, pies
B	Factor de volumen	brl <sub>100</sub> cy/ brl <sub>100</sub> cs
c	Compresibilidad	atm <sup>-1</sup> , psi <sup>-1</sup>
$\phi c_t$	Capacidad de almacenamiento de la formación	atm <sup>-1</sup> , psi <sup>-1</sup>
C	Coefficiente de almacenamiento	brl / psi
C <sub>D</sub>	Coefficiente de almacenamiento adimensional	
e	Constante 2.7118	-
g	Aceleración de la gravedad	cm/s <sup>2</sup> , pies/s <sup>2</sup>
h	Espesor	cm, pies
n	número de direcciones de flujo asociadas al bloque de matriz	-
k	Permeabilidad de la formación	D, mD
k <sub>2</sub>	Permeabilidad efectiva del medio poroso	D, mD

---

SIMBOLO	DESCRIPCION	UNIDADES
K	Grado de anisotropía	D. mD
L	Longitud	cm, pies
p	Presión	atm, psi
$\Delta p$	Caída de presión	atm, psi
q	Gasto de producción	cm <sup>3</sup> /s, pies <sup>3</sup> /h, BPD.
r	Radio	cm, pies
r <sub>w</sub>	Radio del pozo	cm, pies
R	Radio adimensional	-
s	Factor de daño	adimensional
S*	Daño efectivo en el sistema	adimensional
Sd	Daño adimensional en el sistema	adimensional
t	Tiempo	seg,h
t <sub>s</sub>	Tiempo de cierre	seg,h
$\Delta t$	Tiempo de cierre	h
T	Temperatura	° C, ° F

---

---

SIMBOLO	DESCRIPCION	UNIDADES
$z$	Coordenada vertical	cm, pies
$P_{D2}^*$	Solución simétrica	adimensional
$f(s)$	Operador	-
$Ei$	Función integral exponencial	-
$q_{um}$	Gasto causado por decremento unitario de presión en la superficie de los bloques	$cm^3/s$ , $pies^3/s$
$\Delta p_{um}$	Decremento unitario de presión	atm, psi
$\Delta_D$	Diferencia adimensional	adimensional
$C_D e^{2s}$	Grupo adimensional	adimensional
$t_D/C_D$	Grupo adimensional	adimensional
$\lambda e^{-2s}$	Grupo adimensional	adimensional
$p_{wf}$	Presión de fondo fluyendo	atm, psi
$p_{ws}$	Presión estática	atm, psi
$t_f$	Tiempo de intersección de la primera línea recta semilogarítmica con el valor de $p_i$	seg, h
$t_{f+m}$	Tiempo de intersección de la segunda línea recta semilogarítmica con el valor de $p_i$	seg, h

---

---

SIMBOLO	DESCRIPCION	UNIDADES
$t_{1/2}$	Tiempo de intersección de la mitad del período de transición con la línea recta del valor $\pi$	seg,h
$t_1$	Tiempo de intersección de la primera línea recta semilogarítmica con $p = \text{cte}$ que define la mitad del período de transición.	seg,h
$t_2$	Tiempo de intersección de la segunda línea recta semilogarítmica con $p = \text{cte}$ que define la mitad del período de transición.	seg,h
$t_p$	Tiempo de producción	seg,h
$\alpha$	Factor geométrico de los bloques de matriz	$\text{cm}^{-2}$ , $\text{pies}^{-2}$
$\alpha'$	Angulo entre fractura y dirección de flujo	-
$\beta'$	Grupo adimensional del flujo interporoso transitorio	-
$\delta'$	Factor de forma en el flujo interporoso transitorio	-
$\gamma$	Número de Euler, 0.5772	-
$\gamma'$	Exp (g) = 1.78	-
$\lambda$	Coefficiente de flujo interporoso	adimensional
$\mu$	Viscosidad del fluido	cp
$\eta$	Difusividad hidráulica	$\text{cm}^2/\text{s}$ , $\text{pies}^2/\text{h}$
$\pi$	Constante pi, 3.1416....	-

---

---

SIMBOLO	DESCRIPCION	UNIDADES
$\tau$	Parámetro de integración de la convolución	
$\theta$	Coordenada radial	
$\theta_n$	Función teta de orden n	
$\omega$	Capacidad de almacenamiento	adimensional
$\chi$	Dimensión generalizada	cm, pies
$\xi$	Coordenada radial	adimensional

**SUBINDICES:**

- 1 sistema de matriz referido al sistema total
- 2 sistema de fracturas referido al sistema total
- i inicial
- f fracturas
- m matriz
- f+m sistema total
- t total
- o aceite
- p poros
- g gas
- w agua

# ***Referencias***

## REFERENCIAS

1. Van Golf-Racht : Fundamentals of fractured reservoir engineering; Elsevier Publishing Co., New York City, 1982.
2. Garaicochea P.F., Samaniego V.F.: Temas selectos sobre la caracterización y explotación de yacimientos carbonatados, Colegio de Ingenieros Petroleros de México A. C., México, 1988.
3. Reiss L.A.: Reservoir engineering in fractured reservoirs, French Institute of Petroleum, 1976.
4. Reiss L.A. : The reservoir engineering aspects of fractured formations, Gulf Publishing Co, 1980
5. Gómez S.R.: Apuntes de flujo de fluidos en medios porosos, Facultad de Ingeniería, UNAM.
6. Rodríguez N.: Apuntes de principios de mecánica de yacimientos, Facultad de Ingeniería, UNAM.
7. Da Prat : Well test analysis for fractured reservoir evaluation, Elsevier Publishing Co. Houston Tx. 1991
8. Aguilera R. : Naturally fractured reservoirs, Penn Well Books Publishing Co., Tulsa, Oklahoma.
9. Aguilera R., Van Pollen H.K. : "Current status on the study of naturally fractured reservoir", The Log Analysis, May-June, 1977.
10. Sabet A.M. : Well test analysis, Gulf Publishing Co; New York 1989.
11. Saidi A.M. : " Reservoir engineering of fractured reservoirs", Total Edition Presse, Paris, 1987.
12. Sanchez B. J.L.: Analisis de pruebas de presión en yacimientos naturalmente fracturados, Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, UNAM, 1988.
13. Odeh A.S.: "Unsteady-state behavior of naturally fractured reservoirs", SPEJ., March 1965.

• • • • •

- 
14. Warrent J.E., Root P.J. : "The behavior of naturally fractured reservoirs", SPEJ., September 1963.
15. Van Everdingen A.F., Hurst W.: "The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs", Transactions AIME, December, 1949.
16. García M.P., De la Lanza C. : Apuntes de ecuaciones diferenciales y en diferencias, Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
17. Abramowitz M., Handbook of mathematical functions, De B. y Milton Abramowitz; Washington
18. León V.R.; Comunicación personal
19. Kazemi H. : "Pressure transient analysis fractured reservoirs with uniform fracture distribution", SPEJ., y December 1969
20. DeSwaan O. A. : "Soluciones analíticas para determinar las propiedades de yacimientos naturalmente fracturados utilizando pruebas de variación de presión", Revista del Instituto Mexicano del Petróleo, Octubre 1977
21. DeSwaan O.A. : "Pruebas de variación de presión en yacimientos naturalmente fracturados", Revista del Instituto Mexicano del Petróleo, Abril 1988.
22. DeSwaan O.A.: "Influencia de la forma y el daño superficial de los bloques de roca matriz, sobre los transitorios de presión en yacimientos naturalmente fracturados", Revista del Instituto Mexicano del Petróleo; Vol XX no. 2, Abril 1988.
23. DeSwaan D.A.: "Transformada simétrica de Laplace de la función  $(1/s) \exp(-as/(s-b))$ ", Revista del Instituto Mexicano del Petróleo, Enero 1978.
24. Gringarten A.C. : "Type curve analysis what it can and cannot do ", JPT, January 1987.
25. Gringarten A.C.: "How to recognize double-porosity systems from well test", JPT, June, 1987.
26. Mattheews C.S.: "Transient, semisteady-state and steady-state flow", JPT, April 1986.
-

- 
27. Bourdet D., Whittle T.M. : "A new set of type curves simplifies well test analysis", World Oil, May 1983.
28. Bourdet A., "Interpreting well tests in fractured reservoirs", Word Oil, April 1983.
29. Bourdet A., Alagoa J.A. : "New type curves aid analysisi of fissured zone well test", Word Oil, April 1984
30. Economides M.J., ehlig C. : "Use of the pressure derivative for diagnosing pressure transient behavior", JPT, April 1988.
31. Bourdet D., Ayoub J. A. : "Use of pressure derivative in well test interpretation", SPE Formation Evaluation, June 1989.
32. Gutiérrez R. J. A. : Analisis de pruebas de presión utilizando la derivada de la presión, Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, Diciembre 1992.
33. Nieves G.R. : Analisis de algoritmos de cálculo de la derivada para la interpretación de pruebas de presión, Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, Enero 1990.
34. Onur. M. "New Applications of pressure derivative in well test analysis" SPE, Formation Evaluation, September 1989
35. Clark, D. "Pressure derivative approach to transient analysis: a high permeability North Sea: reservoir example" JPT, November 1988
36. Nelson R.A. : "An approach to evaluating fractured reservoirs", JPT, September 1982.
37. Rodriguez N.R., Osorno M., Valderrabano H. : "Apuntes de evaluación de la producción", Facultad de Ingeniería, UNAM.
38. Matthews C.S., Russell D.G. : "Pressure Buildup and flow tests in wells", Monograph series SPE, Texas, 1967 vol. 1.
39. Earlogher R.C. Jr. : "Advances in well test analysis", Monograph series SPE, Texas, 1977 vol. 5.
40. Rollings, J.B. "Well test analysis design and procedures" Texas A & M University, December 1990

- 
41. Crawford G., Hagerdom A.R.: "Analysis of pressure buildup test in a naturally fractured reservoir", SPE 4558 presented at 48th Annual Fall meeting of the SPE of AIME, Las Vegas, Nevada, September 1973.
42. Gringarten A.C.: "Interpretation of test in fissured reservoirs and multilayered reservoirs with double-porosity behavior theory and practice". SPE paper 10044 presented at the International Petroleum Exhibition and Technical Symposium of the Soc. Pet. Eng., Beijing China, March 1982.
43. Bourdet D., Gringarten A.C.: "Determination of fissure volume and block size in fractured reservoirs by type curve analysis", SPE paper 9293 55th Annual Fall Technical Conference and Exhibition of Petroleum Engineers of AIME, San Antonio, Texas, October 1981.
44. Ershaghi, Y. "Problems in characterization naturally fractured reservoirs from well test data" SPE J., June 1985
45. Watson A.T.: "Model selection for well test and production data analysis", SPE Formation Evaluation, March 1988.
46. Gringarten A. C. "Evaluating fissured geometry from well test data: a field example" SPE 10182.

# ***Apéndices***

## A P E N D I C E   A

### TRANSFORMACION DE ECUACIONES A VARIABLES ADIMENSIONALES

#### A.1 TRANSFORMACION DE LA ECUACION 2.32<sup>14-18</sup>

A partir de la ecuación de referencia:

$$\frac{k_{2x}}{\mu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{k_{2y}}{\mu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} - \phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = \phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (2.32)$$

aplicando dos veces la regla de la cadena al término  $\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}$ :

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Desarrollando la expresión que define a  $\xi$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{kr_w^2} + \frac{k_y^2}{r_w^2} \right)^{-1/2} \frac{2x}{kr_w^2}$$

y aplicando la definición:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\frac{x}{kr_w^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{kr_w^2} + \frac{k_y^2}{r_w^2}}} = \frac{x}{kr_w^2 \xi}$$

• • • • •

---


$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{x}{kr_w^2 \xi}$$

Sustituyendo en  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{x}{kr_w^2 \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \frac{x}{kr_w^2 \xi} \right)$

derivando y desarrollando:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{x}{kr_w^2 \xi} \left[ \frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{x}{kr_w^2 \xi} \right) + \frac{x}{kr_w^2 \xi} \frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = -\frac{x}{kr_w^2 \xi} \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \frac{x}{kr_w^2 \xi^2} + \left( \frac{x}{kr_w^2 \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi^2}$$

factorizando:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = -\left( \frac{1}{\xi} \right) \left( \frac{x}{kr_w^2 \xi} \right)^2 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \left( \frac{x}{kr_w^2 \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \left( \frac{x}{kr_w^2 \xi} \right)^2 \left[ \left( -\frac{1}{\xi} \right) \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi^2} \right]$$

Como:  $p_D(\xi, \theta, t_D) = \frac{2\pi \bar{k}_2 h}{q\beta\mu} [ p - p(\xi, \theta, t_D) ]$ ,

$$p_{D2} = \frac{2\pi \bar{k}_2 h}{q\beta\mu} [ p - p_2 ]$$

entonces:

---

---


$$p_2 = p - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} p_{D2}$$

derivando  $p_2$  con respecto a  $\xi$ :

$$\frac{\partial p_2}{\partial \xi} = - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2}$$

sustituyendo la expresión de las derivadas anteriores en  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left(\frac{x}{kr_w^2 \xi}\right) \left[ -\frac{1}{\xi} \left(-\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi}\right) - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right]$$

factorizando:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left(\frac{x}{kr_w^2 \xi}\right)^2 \left(-\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h}\right) \left[ -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right] \quad (A-1)$$

Sustituyendo la  $\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}$  en la ecuación 2.32:

$$\frac{k_{2x}}{\mu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{k_{2x}}{\mu} \left(\frac{x}{kr_w^2 \xi}\right)^2 \left(\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h}\right) \left[ -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right]$$


---

---

De forma similar para  $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

derivando  $\theta$  con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \tan^{-1} \frac{ky}{x} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{k}{x}}{1 + \left( \frac{ky}{x} \right)^2} = \frac{\frac{k}{x}}{\frac{x^2 + k^2 y^2}{x^2}} = \frac{kx}{x^2 + k^2 y^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{kx}{x^2 + k^2 y^2}$$

ahora:  $p_2 = p - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} p_{D2}$ ;  $\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \theta}$

derivando con respecto a  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = -\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2}$$

Sustituyendo y desarrollando:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$


---

---


$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \right) \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \right]$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \left[ \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \right]$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \left[ -\frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} \right]$$

factorizando:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\left( \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \right)^2 \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} \quad (\text{A-2})$$

Sustituyendo el término anterior en la ecuación 2.32:

$$\frac{k_{2y}}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\frac{k_{2y}}{\mu} \left( \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \right)^2 \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} \quad (\text{A-3})$$

Ahora para obtener el término  $\phi_{1c_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}$  en forma adimensional; se procede de la siguiente forma:

$$\phi_{1c_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} = \phi_{1c_1} \frac{\partial p}{\partial p_{D1}} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t}$$


---

---

si  $p_{D1} = \frac{2\pi k_2 h}{q\beta\mu} (p - p_1)$  entonces:

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\phi_1 c_1 \frac{\partial p_{D1}}{\partial t} \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h}$$

derivando con respecto a t:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_{D1}}{\partial t} \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h}$$

entonces:

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\phi_1 c_1 \frac{\partial p_{D1}}{\partial t} \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h}$$

afectando por  $\phi_2 c_2$  y  $-\phi_2 c_2$ :

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} (\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2 - \phi_2 c_2) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t}$$

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) \frac{q\beta}{2\pi k_2 h} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t} + \phi_2 c_2 \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t}$$

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial p_{D1}}{\partial \left( \frac{k_2 t}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)\mu} \right)} + \frac{q\beta}{2\pi h} \frac{\partial p_{D1}}{\partial \left( \frac{k_2 t}{\phi_2 c_2 \mu} \right)}$$

Afectando por el término  $r_w^2$ :

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \frac{1}{\partial\left(\frac{k_2 t}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)\mu r_w^2}\right)} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t} + \frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \frac{\partial p_{D1}}{\partial\left(\frac{k_2 t}{\phi_2 c_2 \mu r_w^2}\right)}$$

si  $t_D = \frac{k_2 t}{\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2 \mu r_w^2}$ :

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} + \frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \frac{\phi_2 c_2 (\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)} \frac{\partial p_{D1}}{\partial\left(\frac{k_2 t}{\mu r_w^2}\right)}$$

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} + \frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \left(\frac{\phi_2 c_2}{\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2}\right) \frac{\partial p_{D1}}{\partial\left(\frac{k_2 t}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)\mu r_w^2}\right)}$$

tomando en cuenta la definición de  $t_D$  y de  $\omega$ , la ecuación anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \left(\frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} - \omega \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}\right)$$

factorizando:

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} (1 - \omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} \tag{A-4}$$

---

Ahora para el término  $\phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial t}$ :

$$\phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} = \phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial p_{D2}} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t}$$

si  $p_{D2} = \frac{2\pi k_2 h}{q\beta\mu} (p - p_2)$ , entonces :  $p_2 = p - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} p_{D2}$

derivando :

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_{D2}} = - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h}$$

Sustituyendo esta expresión en  $\phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial t}$ :

$$\phi_2 c_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial t} = -\phi_2 c_2 \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t}$$

multiplicando y dividiendo por  $\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2$ :

$$\phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{-\phi_2 c_2 (\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)}{\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2} \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t}$$

si  $\omega = \frac{\phi_2 c_2}{\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2}$  entonces:

$$\phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} = -\omega \frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \left( \frac{k_2 t}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2) \mu r_w^2} \right)}$$

$$\phi_2 c_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} = -\omega \frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D} \quad (A-5)$$

Sustituyendo las ecuaciones A-1 a A-5 en la ecuación 2.32:

$$-\frac{k_{2x}}{\mu} \left( \frac{x}{k r_w^2 \xi} \right)^2 \left( \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \right) \left[ -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right] - \frac{k_{2y}}{\mu} \left( \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \right)^2 \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} +$$

$$\frac{q\beta\mu}{2\pi h r_w^2} (1-\omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = -\omega \frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D} \quad (A-6)$$

desarrollando la ecuación y simplificando términos y afectado por  $\frac{2\pi h}{q\beta}$ :

$$-\frac{k_{2x}}{k_2} \left( \frac{x}{k r_w^2 \xi} \right)^2 \left( -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right) - \frac{k_{2y}}{k_2} \left( \frac{k_x}{x^2 + k^2 y^2} \right)^2 \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\omega)}{r_w^2} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = -\frac{\omega}{r_w^2} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D}$$

Simplificando la expresión y tomando en cuenta  $\bar{k}_2$  y k:

---


$$\frac{x^2}{r_w^2 \xi} \frac{1}{\sqrt{k_{2x}}} \left( -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right) + \frac{k_{2y}}{\sqrt{k_{2x} k_{2y}}} \frac{k_x^2}{(x^2 + k^2 y^2)^2} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} -$$

$$\frac{(1-\omega)}{r_w^2} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \frac{\omega}{r_w^2} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D}$$

$$\frac{x^2}{kr_w^2 \xi^2} \left( -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right) + \frac{kr_w^2 x^2}{(x^2 + k^2 y^2)^2} \frac{\partial p_2}{\partial \theta^2} - (1-\omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \omega \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D}$$

si  $\xi^2 = \frac{x^2}{kr_w^2} + \frac{ky^2}{r_w^2}$ ; entonces:  $\frac{x^2}{kr_w^2 \xi^2} = \frac{x^2}{\frac{x^2 + k^2 y^2}{\xi^2}} = \frac{1}{1 + \frac{k^2 y^2}{x^2}} = 1$

y  $kr_w^2 = \frac{x^2 + k^2 y^2}{\xi^2}$  por tanto,  $\frac{x^2}{kr_w^2} \approx 1$  y además:

$$\frac{kr_w^2 x^2}{(x^2 + k^2 y^2)^2} = \frac{1}{\xi^2 (x^2 + k^2 y^2 / x^2)} = \frac{1}{\xi^2}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación A-6 se obtiene finalmente la ecuación 2.32 en parámetros adimensionales:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} - (1-\omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \omega \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D} \quad (2.45)$$

$$\frac{x^2}{r_w^4 \xi} \frac{1}{\sqrt{k_{2x}}} \left( -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right) + \frac{k_{2y}}{\sqrt{k_{2x} k_{2y}}} \frac{k_x^2}{(x^2 + k^2 y^2)^2} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta} - \frac{(1-\omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}}{r_w^2} = \omega \frac{\partial p_{D2}}{r_w^2 \partial t_D}$$

$$\frac{x^2}{kr_w^2 \xi^2} \left( -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right) + \frac{kr_w^2 x^2}{(x^2 + k^2 y^2)^2} \frac{\partial p_2}{\partial \theta^2} - (1-\omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \omega \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D}$$

si  $\xi^2 = \frac{x^2}{kr_w^2} + \frac{ky^2}{r_w^2}$ ; entonces:  $\frac{x^2}{kr_w^2 \xi^2} = \frac{x^2}{\frac{x^2 + k^2 y^2}{\xi^2} \xi^2} = \frac{1}{1 + \frac{k^2 y^2}{x^2}} = 1$

y  $kr_w^2 = \frac{x^2 + k^2 y^2}{\xi^2}$  por tanto,  $\frac{x^2}{kr_w^2} \approx 1$  y además:

$$\frac{kr_w^2 x^2}{(x^2 + k^2 y^2)^2} = \frac{1}{\xi^2 (x^2 + k^2 y^2 / x^2)} = \frac{1}{\xi^2}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación A-6 se obtiene finalmente la ecuación 2.32 en parámetros adimensionales:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} - (1-\omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \omega \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D} \quad (2.45)$$

---

A.2 TRANSFORMACION DE LA ECUACION 2.44<sup>14-18</sup>

Por definición  $p_{D1} = \frac{2\pi k_2 h}{q\beta\mu} (p - p_2)$ , entonces:

$$p_2 = p - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} p_{D2}$$

y  $p_{D2} = \frac{2\pi k_2 h}{q\beta\mu} (p - p_1)$ , entonces:

$$p_1 = p - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} p_{D1}$$

Y realizando la diferencia ( $p_2 - p_1$ ):

$$p_2 - p_1 = \left(p - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} p_{D2}\right) - \left(p - \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} p_{D1}\right)$$

$$p_2 - p_1 = -\frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} (p_{D2} - p_{D1})$$

entonces sustituyendo en la ecuación 2.44:

$$\frac{\alpha k_1}{\mu} (p_2 - p_1) = -\frac{\alpha k_1}{\mu} \frac{q\beta\mu}{2\pi k_2 h} (p_{D2} - p_{D1})$$

---

---

.....

simplificando:

$$\frac{\alpha k_1}{\mu} (p_2 - p_1) = -\alpha k_1 \frac{q\beta}{2\pi k_2 h} (p_{D2} - p_{D1}) \quad (A-7)$$

Sustituyendo A-4 en A-7:

$$-\frac{q\beta}{2\pi h r_w^2} (1 - \omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial \tau} = -\alpha k_1 \frac{q\beta}{2\pi k_2 h} (p_{D2} - p_{D1})$$

Simplificando y sustituyendo la definición de  $\lambda$ , se obtiene finalmente la ecuación 2.44 en parámetros adimensionales:

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \frac{\alpha k_1 r_w^2}{k_2} (p_{D2} - p_{D1})$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \lambda (p_{D2} - p_{D1}) \quad (2.46)$$

## A P E N D I C E   B

**SOLUCION EN VARIABLES ADIMENSIONALES A LA ECUACION QUE DEFINE EL COMPORTAMIENTO DE LA PRESION CONSIDERANDO EL MODELO DE WARREN Y ROOT PARA UN YACIMIENTO FINITO E INFINITO <sup>14-18</sup>.**

Usando la transformada de Laplace y solucionando la ecuación sujeta a las condiciones de frontera, la solución puede ser escrita como sigue:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \theta^2} - \lambda(p_{D2} - p_{D1}) = \omega \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D} \quad (2.47)$$

Aplicando la transformada de Laplace  $\mathcal{L} \{ F(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$  para cada término de la ecuación:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} dt = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} e^{-st} p_{D2} dt, \quad \text{si} \quad \mathcal{L} \{ p_{D2} \} = u_2$$

entonces:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} \right\} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \quad (B-1)$$

.....

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_0^{\infty} e^{-st} p_{D2} dt \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 p_{D2}}{\partial \xi^2} \right\} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} \quad (\text{B-2})$$

$$\mathcal{L} \{ p_{D2} \} = u_2 \quad (\text{B-3})$$

$$\mathcal{L} \{ p_{D1} \} = u_1 \quad (\text{B-4})$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ e^{-st} F'(t) \Big|_0^p + \right.$$

$$\left. \int_0^s e^{-st} F'(t) dt \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ e^{-sp} F(p) - e^0 F(0) + sf(s) \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ e^{-sp} F(p) - F(0) + sf(s) \right\}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial p_{D2}}{\partial \xi} \right\} = 0 - F(0) + sf(s) - F(0) = sf(s) - p_{D2}(0) = sf(s) - 0 \quad (\text{B-5})$$

Sustituyendo las ecuaciones B-1, B-2, B-3, B-4 y B-5 en la ecuación 2.47:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - \lambda(u_2 - u_1) = \omega \sin(s) \quad (I)$$

$$\xi^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - \xi^2 \lambda u_2 = \xi^2 (\lambda u_1 + \omega \sin(s))$$

La ecuación anterior esta clasificada como una ecuación parcial diferencial con coeficientes variables, con dos variables independientes, la ecuación es no homogénea:

Resolviendo la parte homogénea:

$$\xi^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - \xi^2 \lambda u_2 = 0 \quad (II)$$

por medio del método de separación de variables:

$$u_2(\xi, \theta) = \varphi(\xi) P_D(\theta)$$

$$u_{2\xi} = \varphi' P_D, \quad u_{2\xi\xi} = \varphi'' P_D, \quad u_{2\theta\theta} = \varphi P_D''$$

Entonces puede escribirse la siguiente ecuación:

$$\xi^2 \varphi'' P_D + \xi \varphi' P_D + \varphi P_D'' - \xi^2 \lambda \varphi P_D = 0$$

Afectando la ecuación por el término  $\varphi P_D$

---


$$\xi^2 \frac{\varphi''}{\varphi} + \xi \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{P_0''}{P_0} - \xi^2 \lambda = 0$$

$$\frac{\xi^2 \varphi'' + \xi \varphi'}{\varphi} - \xi^2 \lambda = -\frac{P_0''}{P_0}, \text{ si } -\frac{P_0''}{P_0} = \eta$$

Entonces puede escribirse:

$$\frac{\xi^2 \varphi'' + \xi \varphi'}{\varphi} - \xi^2 \lambda = \eta$$

$$\frac{\xi^2 \varphi'' + \xi \varphi'}{\varphi} = \eta + \xi^2 \lambda$$

$$\xi^2 \varphi'' + \xi \varphi' = (\eta + \xi^2 \lambda) \varphi$$

$$\xi^2 \varphi'' + \xi \varphi' - (\xi^2 \lambda + \eta) \varphi = 0 \quad (\text{III})$$

y

$$P_0'' + \eta P_0 = 0 \quad (\text{IV})$$

Las cuales son ecuaciones diferenciales ordinarias.

La ecuación III es una ecuación modificada de Bessel para  $n = \sqrt{\eta}$  cuya solución es una función modificada de Bessel de 2a clase de orden  $n$ .

Entonces:

---


$$k_n(\xi) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2 \sin p\pi} \left\{ I_{-p}(\xi) - I_p(\xi) \right\} ; \text{ si } n = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicando la regla de L'Hopital se tiene :

$$k_n(\xi) = (-1)^{n+1} \left\{ \ln\left(\frac{\xi}{2}\right) + \gamma \right\} I_n(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)! \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-n} + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$$

$$\left\{ \phi(k) + \phi(n+k) \right\} \tag{V}$$

en donde:

$$\phi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$$

Ahora bien la ecuación IV es una ecuación diferencial ordinaria

$P_D'' + \eta P_D = 0$ , cuya solución es :

$$P_D = e^{-\eta t} \tag{VI}$$

La solución de la ecuación homogénea II será una combinación de las soluciones V y VI ; después debe obtenerse la solución complementaria la cual al combinarse con v y VI dará la solución general de la ecuación I :

$$u_2 = \frac{k_0(\sqrt{sf(s)})}{s\sqrt{sf(s)}k_1\sqrt{sf(s)}} \tag{VII}$$

Si  $u_2 = P_{D2}(1, t_0)$ :

---


$$P_{D2}(l, t_D) = \frac{k_0(\sqrt{sf(s)})}{s\sqrt{sf(s)}k_1\sqrt{sf(s)}}$$

en donde:  $f(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda}$

La solución es válida para  $t_D > 100$ , y es obtenida haciendo las sustituciones usuales,  $k_0(v) \equiv (-\gamma + \ln v - \ln 2)$  y  $k_1(v) \equiv \frac{1}{v}$  e invirtiendo.

La condición  $t_D > 100$  es suficiente para todos los valores de  $\lambda$  y  $\omega$  sin embargo; si  $\lambda \ll 1$ , la condición es  $t_D > 100\omega$  o si  $\omega \ll 1$ ;  $t_D > (100\lambda - 1)/\lambda$ .

Desarrollando la ecuación V:

$$k_0(\sqrt{sf(s)}) = - \left\{ \ln\left(\frac{\sqrt{sf(s)}}{2}\right) + \gamma \right\} I_0(\sqrt{sf(s)}) + \frac{(\sqrt{sf(s)})^2}{2} + \frac{(\sqrt{sf(s)})^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) +$$

$$\frac{(\sqrt{sf(s)})^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots$$

donde:

$$I_0(\sqrt{sf(s)}) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots k_0(\sqrt{sf(s)}) \equiv - \left\{ \ln\sqrt{sf(s)} - \ln 2 + \gamma \right\} \quad (\text{VIII})$$

---


$$k_1(\sqrt{sf(s)}) = \left\{ \ln(\sqrt{sf(s)}/2) + \gamma \right\} \left\{ \frac{\sqrt{sf(s)}}{2} + \frac{(\sqrt{sf(s)})^3}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{(\sqrt{sf(s)})^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{sf(s)}} \right) \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{sf(s)}}{2} - \frac{2(\sqrt{sf(s)})^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right\} \cong k_1(\sqrt{sf(s)}) \cong \frac{1}{\sqrt{sf(s)}} \quad (IX)$$

Sustituyendo VIII y IX en la ecuación 2.50:

$$P_{D2}(1, t_D) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\ln(\sqrt{sf(s)} + \ln 2 - \gamma)}{s\sqrt{sf(s)}(1/\sqrt{sf(s)})} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\ln\sqrt{sf(s)} + \ln 2 - \gamma}{s} \right]$$

$$P_{D2}(1, t_D) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\ln\sqrt{s} - \ln\sqrt{f(s)} + \ln 2 - \gamma}{s} \right]$$

multiplicando y dividiendo entre 2:

$$P_{D2}(1, t_D) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{-\ln s - \ln f(s) + 2\ln 2 - 2\gamma}{s} \right) \right]$$

$$P_{D2}(1, t_D) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\gamma - \ln s}{s} - \frac{\gamma}{s} - \frac{\ln f(s)}{s} + \frac{\ln 2^2}{s} \right]$$

---


$$P_{D2}(1, t_D) = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{(\gamma + \ln s)}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\gamma}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln f(s)}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln 4}{s} \right\} \right]$$

$$P_{D2}(1, t_D) = \frac{1}{2} \left[ \ln t_D - \gamma - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln f(s)}{s} \right\} + \ln 4 \right]$$

Sustituyendo la definición de  $f(s)$  en la ecuación anterior:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln f(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln \omega(1-\omega)s + \lambda}{(1+\omega)s + \lambda} \right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln \omega(1-\omega)s + \lambda}{(1+\omega)s + \lambda} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln \omega}{s} + \frac{\ln(s + \frac{\lambda}{\omega(1-\omega)})}{s} - \frac{\ln(s + \frac{\lambda}{1-\omega})}{s} \right\}$$

Entonces:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln f(s)}{s} \right\} \cong -\text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] + \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right]$$

$$\text{si } \text{Ei}(-v) = - \int_v^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

---

Finalmente:

$$P_{D2}(l, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ \ln t_D - \gamma + \ln 4 + \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] - \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right] \right\}$$

$$P_{D2}(l, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ \ln t_D - \gamma + \ln 80908 + \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] - \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right] \right\} \quad (2.52)$$

La anterior es la solución para un yacimiento infinito con presión inicial uniforme y que produce a gasto constante considerando flujo pseudoestacionario.

Ahora bien la solución para el caso de un yacimiento finito puede ser obtenida de una manera similar a la anterior si la condición para un yacimiento infinito es reemplazada por:

$$\left. \frac{\partial p_2}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0$$

$$\partial p_2 = \frac{-q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \partial P_{D2}$$

$$\xi = \frac{r}{r_w} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial P_{D2}}{\partial \xi} = 0; \quad \text{para} \quad t_D > 0, \quad \xi = R \quad \forall \theta.$$

---

Finalmente:

$$P_{D2}(l, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ \ln t_D - \gamma + \ln 4 + \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] - \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right] \right\}$$

$$P_{D2}(l, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ \ln t_D - \gamma + \ln 80908 + \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] - \text{Ei} \left[ \frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right] \right\} \quad (2.52)$$

La anterior es la solución para un yacimiento infinito con presión inicial uniforme y que produce a gasto constante considerando flujo pseudoestacionario.

Ahora bien la solución para el caso de un yacimiento finito puede ser obtenida de una manera similar a la anterior si la condición para un yacimiento infinito es reemplazada por:

$$\left. \frac{\partial p_2}{\partial r} \right|_{r=r_w} = 0$$

$$\partial p_2 = \frac{-q\beta\mu}{2\pi k_2 h} \partial P_{D2}$$

$$\xi = \frac{r}{r_w} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial P_{D2}}{\partial \xi} = 0; \quad \text{para} \quad t_D > 0, \quad \xi = R \quad \forall \theta.$$

---

Si  $R^2 \gg k$  la ecuación 2.49 es válida para este caso

$$P_{Dw}(t_D) = P_{D2}^*(1, t_D) - s$$

donde:

$$s = \ln\left(\frac{k+1}{2\sqrt{k}}\right)$$

Si  $k=1$ ;  $\ln\left(\frac{k+1}{2\sqrt{k}}\right) = \ln\frac{2}{2}$  y  $P_{Dw}(t_D) = P_{D2}^*(1, t_D)$

$P_{D2}^*(1, t_D)$  es la solución simétrica del problema, descrito en las ecuaciones 2.45 y 2.46 con  $k=1$  evaluada en  $\xi=1$ .

y

$$P_{D2}^* \cong \left(\frac{2}{R^2 - 1}\right) \left(\frac{1}{4} + t_D + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda}\right) \left\{ 1 - \exp\left[\frac{-\lambda t_D}{\omega}(1-\omega)\right] \right\} - \left[ \frac{3R^4 - 4R^4 \ln R - 2R^2 - 1}{4(R^2 - 1)^2} \right]$$

La anterior es la ecuación 2.53 y representa el comportamiento de un yacimiento infinito.