63
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

" CAOS EN ALGUNOS MODELOS ECONOMICOS "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

MONTER ESPINOSA MARIA DEL ROSARIO CRISTINA

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. GUILLERMO GOMEZ ALCARAZ

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Caos en algunos Modelos Económicos"

realizado por Monter Espinosa Ma. del Rosario Cristina.

con número de cuenta 9251638-4 , pasante de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz.	
Propietario	M. en C. Virginia Abrín Batule.	Virginia Abrín Batule
Propietario	M. en D. Alejandro Mina Valdés.	
Suplente	Act. Martha Martínez Juárez.	
Suplente	Act. Mauricio Aguilar González.	Mauricio Aguilar

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica.

Caos en algunos Modelos Económicos.

Monter Espinosa Ma. del Rosario C.

Junio, 1996.

Gracias porque me has dado todo
porque sin ti nada soy
porque basta mirar hacia arriba
para sentirte presente.

Gracias porque soy producto de su amor, por todo su cariño, por sus enseñanzas, por su comprensión porque gracias a ustedes soy lo que soy.

Gracias porque juntos
hemos compartido nuestras vidas,
Porque somos más que amigos,
porque somos hermanos.

Y gracias a todos mis amigos, a los que se han ido y a los que aún quedan. Gracias por acompañarme en este viaje que es la vida.

Solemos dejarle al tiempo el destino
para depositarlo en los vientos y en los mares
para que nuestro ser se disperse en las
líneas marcadas por las horas sin darnos cuenta
de la muerte que se acerca.
Solemos respirar sin probar el aire
y abrazamos sin darnos cuenta
de la despedida que hay en cada caricia.
Solemos ser humanos y partimos...

Quiero dedicar este pequeño trabajo, este gran esfuerzo a todas las personas que no encuentran sentido a su vida, a todos aquellos que cada amanecer es un día más, a los que han perdido toda esperanza.

Dedico este trabajo a todos los idealistas, a todos los soñadores, a los que luchan por un ideal, a los que buscan un mundo mejor. A los revolucionarios de ideas, a los constructores de paz, a los que buscan libertad.

Porque lo que se necesita no es un sistema de ecuaciones o toda una teoría económica, porque lo que se necesita es sensibilidad; reconocer a los demás como seres humanos, tener voluntad de querer cambiar las cosas, voluntad de salir de uno mismo para encontrarse en los demás, para darse a los demás.

Rosario Monter.

Índice

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La economía resulta ser un tema demasiado complejo como para ser tratado fácilmente.

Muchos de los procedimientos matemáticos que son utilizados en la economía son tan solo adaptaciones de fenómenos físicos ya conocidos, es por ello que en sí misma, la economía no posee una matemática propia.

¿Por qué estudiar la economía desde un punto de vista dinámico?

La respuesta está en que el tiempo es un factor demasiado importante si queremos modelar un fenómeno que va cambiando. Así por ejemplo en economía, si queremos modelar la dinámica de los precios para conocer su comportamiento ante diversos eventos o en situaciones futuras, es necesario conocer cómo varían éstos a través del tiempo.

Pensemos en un juego de ajedrez: las estrategias son comparadas para poder decidir la jugada siguiente, sin embargo no es posible analizar todos los movimientos, tan solo los más próximos entre sí, así como las repercusiones que pudieran producir.

La idea de la tesis es la de presentar a manera de divulgación, algunos modelos económicos dinámicos que bajo ciertas condiciones presentan comportamientos caóticos:

En el primer capítulo analizaremos los conceptos tales como puntos fijos, ciclos, ciclos atractores y repulsores, así como también veremos bajo qué condiciones podemos hablar de caos y cómo éste se presenta. En otra sección del mismo capítulo analizaremos el modelo de Crecimiento Económico planteado por Solow, uno de los modelos más sencillos en economía que bajo ciertas circunstancias presenta comportamientos caóticos.

En el segundo capítulo analizaremos un tipo de economía llamada de intercambio puro,en donde las mercancías se intercambian sin dar lugar a la producción.

Dados los precios de todas las mercancías, el agente económico intercambiará siempre y cuando al hacerlo mejore su situación anterior.

Dentro de este modelo, al actuar de esta forma se generará una dinámica de precios, pues dado un intercambio de mercancías, el exceso de demanda propiciará que el sistema de precios cambie, ajustándose nuevamente los precios y así sucesivamente. De aquí surge la pregunta de si el sistema de precios tiende a un equilibrio o por el contrario presenta comportamientos caóticos.

En este capítulo estudiaremos la dinámica que se presenta en esta economía y analizaremos dos teoremas que dan respuesta a las preguntas anteriores.

De alguna manera el objetivo de la tesis es el de difundir algunas nociones de lo que es la Teoría del Caos aplicada a la economía, pues considero que es un área relativamente nueva que está en desarrollo, teniendo un gran campo abierto para nuevas investigaciones.

Capítulo 2

SISTEMAS DINÁMICOS EN ECONOMÍA.

2.1 INTRODUCCIÓN.

Muchos fenómenos económicos dependen del tiempo de manera directa. Podemos ver por ejemplo cómo varían los precios de las acciones en un mercado financiero conforme transcurre el tiempo, el cambio de los niveles de producción, la variación de los precios del petróleo, etc.

Un **sistema dinámico** es una forma de estudiar un fenómeno por medio de ecuaciones que puedan describir la evolución de dicho fenómeno respecto al tiempo t en donde actúa una cierta fuerza F_t, la cual a su vez explícitamente respecto al tiempo t no depende.

En la mayoría de los casos el fenómeno es idealizado a través de ciertas variables $x_i\,(t)$, que describen al sistema.

En algunas ocasiones son considerados también algunos factores externos (parámetros) $\omega(t)$, a los que se les conoce como "**ruido**", que de forma muy pequeña perturban al sistema.

Matemáticamente la forma en que el sistema evoluciona está dada, o bien por la **ecuación diferencial** continua $\frac{d}{dt}x(t) = F\left(x(t), \omega(t)\right)$, o de manera discreta o en intervalos por la **ecuación en diferencias** $x_{t+1} = f(x_t, \omega_t)$

En la medida en que podamos conocer y estudiar las características de estas ecuaciones, podremos comprender cómo funciona el sistema dinámico.

Nosotros estaremos interesados en estudiar los fenómenos de manera discreta ya que las decisiones que puedan tomar los agentes que participan en una economía no son continuas, sino discretas, además de ser respuestas a la información que conocen los agentes también en forma discreta o discontinua.

Muchos economistas han estudiado la economía utilizando ecuaciones diferenciales. pero más que por aproximarse a la realidad, por tradición lo hacen así, ya que actualmente se cuenta con herramientas matemáticas alternativas para intentar estudiar dichos problemas.

El término de "**Dinámica Económica**" aún no está muy claro, pero los economistas de alguna manera se han enfrentado con problemas de tipo "dinámico".

En física está muy bien diferenciada la dinámica de la estática. En muchos problemas económicos se puede hacer abstracción del tiempo para resolverlos, lo que se le conoce como "**Economía Estática**". Sin embargo, existen diversos problemas económicos que no tienen sentido si no los consideramos dentro de un espacio que evoluciona con el tiempo y éstos, de manera general, diremos que pertenecen al tipo de "**Economía Dinámica**".

La forma más sencilla de introducir la dinámica es comparar dos situaciones estáticas en distintos tiempos. A este método en Economía se le conoce como "**Estática comparativa**", método introducido por los economistas clásicos.

Parece ser que Samuelson fue el primero en introducir los métodos dinámicos utilizados en física a la economía, pues para él las variables económicas están relacionadas en diferentes puntos por medio de funciones, de tal modo que el sistema dinámico genera su propia conducta en el tiempo.

Su definición de sistema dinámico es la siguiente: "...un sistema es dinámico cuando su comportamiento en el tiempo se encuentra determinado por ecuaciones funcionales en las cuales están contenidas, de una forma esencial, variables en diferentes instantes temporales..." [1]

La dificultad que se ha tenido al transladar los resultados en la dinámica de la física a la dinámica de la economía es que las herramientas han sugerido los supuestos y las hipótesis del problema en lugar de ser al revés. Sin embargo el hecho de poder representar los fenómenos económicos como ecuaciones similares a las que se estudian en física, ha constituido un éxito parcial para este siglo.

Economistas tales como Walras y Pareto sentaron las bases de la economía matemática puesto que fueron los primeros en describir fenómenos económicos proponiendo modelos matemáticos.

El poder matematizar las principales teorías económicas a través de ecuaciones ha sido uno de los más importantes logros y actualmente ha sido un factor importante para aspirar al Nobel.

En un sistema dinámico económico se pretende establecer cuáles son las fuerzas internas que intervienen en el sistema así como la forma en que éstas interactúan.

[1] Samuelson. *Dynamic Process Analysis.* MIT Press, 1966 Vol.1 pp. 612.

Por ejemplo, si consideramos el espacio de precios y cantidades de mercancías, las situaciones económicas quedarán representadas por puntos de ese espacio y las fuerzas se aplicarán a puntos de ese mismo espacio, de tal forma que el movimiento de estos puntos representará un cambio de la situación económica. En este ejemplo la fuerza, que es la forma en que actúan los agentes, se ha expresado tradicionalmente a través de la oferta y la demanda.

En un problema, en cuanto se determinen las fuerzas que actúan en un fenómeno a través del tiempo y se determinen de qué forma interactúan éstas entre sí, se podrá hablar de dinámica. De este modo podremos comprender el fenómeno en cuestión y dar explicaciones de por qué sucede así y no de otra manera, en algunos casos quizá hasta se podría tratar de hacer predicciones.

2.2 ELEMENTOS DE CAOS.

En esta sección estaremos interesados en dar los principales conceptos e ideas básicas de lo que significa la Teoría del Caos.

En la primera parte veremos por qué estamos interesados en estudiar los modelos bajo un punto de vista discreto y no continuo; posteriormente veremos algunos elementos de la Teoría del Caos, conceptos como puntos fijos, puntos periódicos, bifurcación, etc., así como algunas de las interpretaciones que pudieran tener en economía y finanzas, para luego, en la siguiente sección, poder estudiar un modelo económico, en particular el Modelo de Crecimiento Económico, en donde aplicaremos los conceptos y resultados de esta sección.

2.2.1 Ecuaciones en Diferencias.

Ya hemos dicho que es usual encontrar en economía modelos que utilizan ecuaciones diferenciales en lugar de ecuaciones en diferencias.

La razón principal de ello era que tradicionalmente se cuenta con herramientas matemáticas para su solución, pero señalábamos que en la economía, las decisiones que pudieran tomar los agentes económicos en alguna situación dada no eran de tipo continuo, ni tampoco así la información con la que ellos pudieran contar. Decíamos por eso que nuestro enfoque sería el discreto, pues es el que más se aproxima a nuestra realidad.

Matemáticamente tenemos una razón más para utilizar modelos discretos y no continuos:

La dinámica que podemos encontrar en ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, por ejemplo, solamente nos puede presentar crecimientos exponenciales, decrecimientos a cero y soluciones constantes; mientras que la dinámica de las correspondientes ecuaciones en diferencias son más ricas ya que además de haber puntos fijos atractores y puntos fijos repulsores de tipo estable e inestable correspondientes a los comportamientos de las ecuaciones diferenciales, también encontramos ciclos, éstos últimos imposibles de aparecer en las ecuaciones diferenciales lineales.

Otra razón suficiente es considerar lo que algunos autores llaman la **"paradoja de la estabilidad"**:

Aunque el término de estabilidad lo estudiaremos más adelante, baste decir por ahora que la estabilidad se refiere, en términos comunes, a la permanencia en el tiempo del comportamiento de un sistema dinámico ante los cambios que puedan sufrir los diversos elementos que componen dicho sistema.

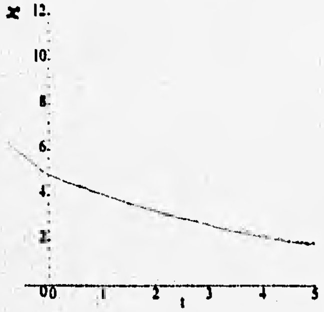
Podemos ver que aunque una ecuación diferencial sea estable, la ecuación en diferencias puede no serlo. Esto se debe a que un sistema diferencial tiende muy rápido al equilibrio, mientras que si se intenta resolver por medio de una ecuación en diferencias, es decir a intervalos de tiempo, puede ocurrir que cerca del equilibrio los saltos de la variable hagan que nunca llegue a éste o que incluso se aleje.

Veamos un ejemplo:

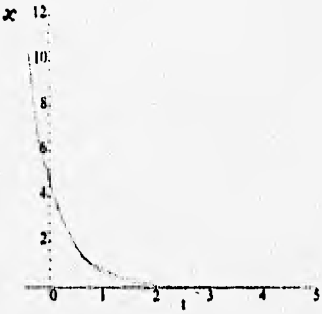
Una ecuación diferencial muy sencilla es: $x' = -ax$, con $a > 0$

La solución de esta ecuación, como es sabido es $x = Ae^{-ax}$; donde A es una constante que depende de las condiciones iniciales del problema.

Si a es mayor que cero el sistema es estable. Nótese que si a es grande entonces tenderá rápidamente al equilibrio $x = 0$ por ser una función exponencial, pero si a es un valor muy pequeño tardará bastante en acercarse al valor de equilibrio como se puede ver gráficamente:



$x = 5e^{-0.2t}$

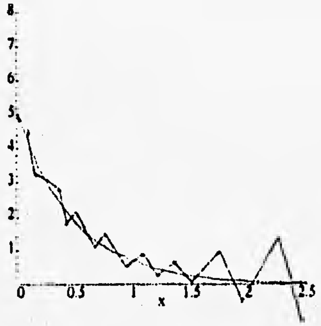


$x = 5e^{-2t}$

Si lo vemos desde un punto de vista económico, para que el equilibrio tenga significado nos interesa que éste se alcance rápidamente, ya que si tardase mucho en alcanzarlo seguramente cambiarían las circunstancias económicas originales y el equilibrio que queríamos establecer ya no está donde lo habíamos previsto. En este sentido nos interesa encontrar equilibrios que se alcancen rápidamente.

Si consideramos nuevamente el ejemplo de la ecuación $x' = -ax$, pero con una aproximación discreta: $\frac{x_{t+h}-x_t}{h} = -ax_t$, tendríamos la ecuación en diferencias $x_{t+h} = x_t - ahx_t = (1-ah)x_t$, la cual será estable si $|1-ah| < 1$

Una representación gráfica de lo que hemos visto que puede suceder al considerar ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias, es la siguiente:



Los ejemplos correspondientes para el caso creciente serían $x' = ax$, con $a > 0$ y en diferencias $x_{t+h} = (1 + ah)x_t$, que con la restricción adicional de que $t = n \in N$, $h = 1$ y $x_n \in R$, se reduce a $x_{n+1} = (1 + a)x_n$, es decir $y = mx$, que bajo iteraciones nos genera una dinámica que coincide cualitativamente con la dinámica original de la solución $x(t) = Ae^{at}$. Pero digamos que para el caso $y = -x$, bajo iteraciones tendremos un comportamiento imposible de darse para el modelo continuo $x' = ax$.

2.2.2 Iteración de funciones.

La Teoría del Caos puede ser introducida de manera muy sencilla a través de iteración de funciones:

Iterar una función significa componerla consigo misma, es decir, evaluarla una y otra vez usando como valor de entrada el valor obtenido en el paso anterior.

Una técnica ilustradora muy sencilla es gráficamente componer dicha función de la siguiente forma: "... tomamos un valor inicial y lo evaluamos en la gráfica de la función, transladamos este valor horizontalmente hasta cruzar con la recta de la función identidad, y luego a este valor nuevamente de manera vertical lo transladamos a la gráfica de la función para luego llevarlo horizontalmente a la función identidad y así sucesivamente..." [2]

Para ver este procedimiento tomemos como ejemplo un **modelo de interés simple**:

Supongamos que contamos con un capital inicial C_0, el cual después de invertirlo durante un año nos dará un cierto rendimiento a una tasa r de interés simple.

La pregunta es: ¿cuánto dinero tendremos al término de n años?

Al cabo de un año, nuestro capital será $C_1 = C_0 + rC_0$,

[2] Ver: Gómez Guillermo. *Caos, Billares y Nudos en el Nivel Medio Superior*. Mimiografeado. Facultad de Ciencias. U.N.A.M.

Para el segundo año nuestro capital estará formado por el capital que tuvimos en el primer año C_1 más los intereses generados por el capital inicial rC_0. de tal forma que nos quedaría como capital:

$$C_2 = C_1 + rC_0 = C_0 + rC_0 + rC_0 = C_0(1 + 2r)$$

Procediendo de igual forma los años siguientes tendríamos:

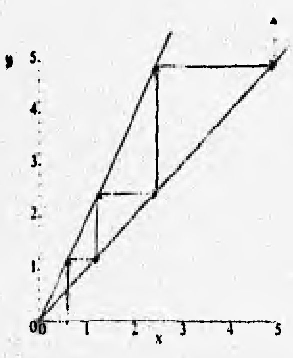
$$C_3 = C_2 + rC_0 = C_0(1 + 2r) + rC_0 = C_0(1 + 3r)$$
$$C_4 = C_3 + rC_0 = C_0(1 + 3r) + rC_0 = C_0(1 + 4r)$$
$$\vdots$$
$$C_n = C_{n-1} + rC_0 = C_0\,(1 + (n - 1)\,r) + rC_0 = C_0(1 + nr)$$

Con lo que la solución a nuestro modelo lineal será $C_n = C_0(1 + nr)$, donde C_0 es la condición inicial a nuestro problema.

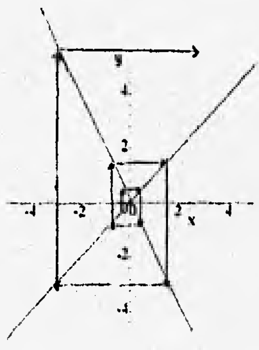
La dinámica que se obtiene con funciones lineales de este tipo son "escaleras " y "caracoles" que pueden converger o diverger y que corresponden a puntos de equilibrio estables o inestables.

También se pueden obtener "cuadrados" que corresponden a puntos periódicos o ciclos.

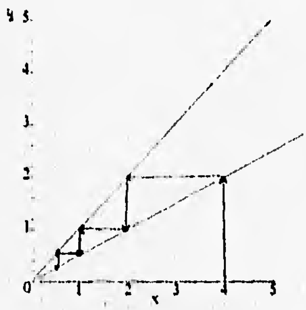
Este tipo de iteraciones nos llevarán a gráficas como las siguientes:



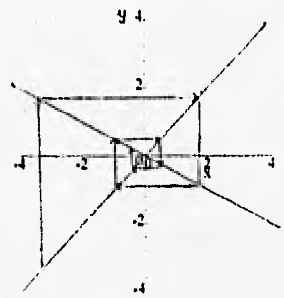
PUNTO FIJO REPULSOR



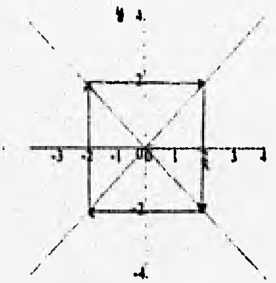
PUNTO FIJO REPULSOR



PUNTO FIJO ATRACTOR



PUNTO FIJO ATRACTOR



CICLOS

De manera análoga podemos analizar funciones no lineales mediante procesos de iteración, ejemplo de ello es el **modelo de interés compuesto**:

Supongamos que depositamos una cantidad inicial C_0 en un instrumento de inversión que nos da un rendimiento constante con una tasa de interés r anual.

Al inicio nuestro capital es C_0, transcurrido un año tendremos $C_1 = C_0 + rC_0 = C_0(1+r)$, al segundo año nuestro capital será $C_2 = C_1(1+r)$.

Sucesivamente tendríamos:

$$C_3 = C_2(1+r)$$
$$C_4 = C_3(1+r)$$
$$\vdots$$
$$C_n = C_{n-1}(1+r)$$

Podemos determinar el valor de C_n conociendo el resultado del año anterior, es decir, de forma recursiva. Esta ecuación es un ejemplo de una **ecuación en diferencias de primer orden.**

Para resolver esta ecuación definamos la función $f(x) = (1+r)x$, así que tendremos:

$$C_1 = f(C_0) = (1+r)C_0$$
$$C_2 = f(C_1) = f(f(C_0)) = (1+r)^2C_0$$
$$C_3 = f(C_2) = f(f(f(C_0))) = (1+r)^3C_0$$
$$\vdots$$
$$C_n = f(C_{n-1}) = \underbrace{f(f(f...(C_0)...))}_{n-veces} = (1+r)^nC_0$$

Por lo que la solución a nuestra ecuación en diferencias será $C_n = (1+r)^nC_0$, donde C_0 es la condición inicial a nuestro problema.

En este mismo contexto veamos lo que pasa si los intereses son pagados no cada año, sino 2 veces al año, 4 veces, 365 veces al año, ó instantaneamente:

Con interés una vez al año obtuvimos $C_1 = C_0 + rC_0 = C_0(1+r)$

Con intereses 2 veces al año durante un año tendremos $C_1 = C_0+\frac{1}{2}rC_0+\frac{1}{2}r\left(C_0 + \frac{1}{2}rC_0\right) = \left(C_0 + \frac{1}{2}rC_0\right)(1+\frac{1}{2}r) = C_0(1+\frac{1}{2}r)(1+\frac{1}{2}r) = C_0(1+\frac{1}{2}r)^2$

Con pago de intereses m veces al año durante un año: $C_1 = C_0(1+\frac{1}{m}r)^m$

Con pago de intereses m veces al año durante n años: $C_n = C_0\left[(1+\frac{1}{m}r)^m\right]^n$

Con pago de intereses instantáneo durante n años:

$\lim_{m\to\infty} C_n = \lim_{m\to\infty} C_0\left[(1+\frac{1}{m}r)^m\right]^n$, lo que implica que

$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0\left[(1+\frac{1}{\frac{m}{r}})^{\frac{m}{r}}\right]^{rn} = C_0\left[\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{m}{r}})^{\frac{m}{r}}\right]^{rn} = C_0e^{rn}$

Si ahora consideramos que la variable natural n es sustituida por la variable real t, obtenemos la suma acumulada de $C_t = C_0e^{rt}$.

Durante un intervalo pequeño de tiempo dt la suma se incrementará en:

$$dC_t = d(C_0e^{rt}) = C_0e^{rt}rdt = C_trdt$$

Es decir, el modelo que está detrás del interés compuesto continuo es:

$$\frac{dC_t}{dt} = rC_t.$$

Despreciando el paso al límite en $\lim_{h\to 0}\frac{C_{t+h}-C_t}{h} = rC_t$ y restringiéndonos a $t = n \in N$ y $h = 1$, obtenemos : $C_{n+1} = C_n + rC_n$, o sea que si $C_n \in R$ tenemos una ecuación del tipo $y = (1+r)x$ que iterada nos lleva a los comportamientos descritos en las figuras anteriores.

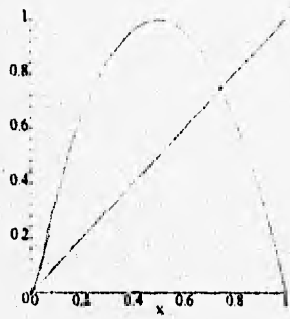
2.2.3 Órbitas.

Un tipo de ecuaciones que se nos presentará en el modelo de crecimiento económico que analizaremos más adelante es la siguiente:

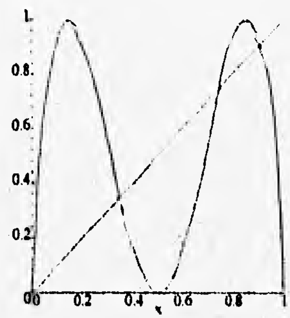
$$x_{t+1} = f(x_t), \text{ donde } f(x_t) = 4x_t(1 - x_t).$$

Nos interesa conocer las propiedades que la caracterizan, así que tomemos por ejemplo la ecuación $f(x_t) = 4x_t(1 - x_t)$ con $x \in [0, 1]$.

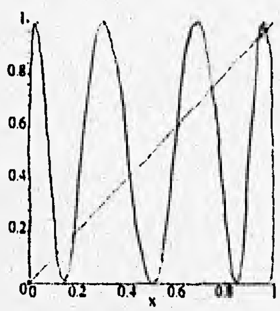
El proceso de iteración de esta ecuación nos llevará a gráficas como las siguientes:



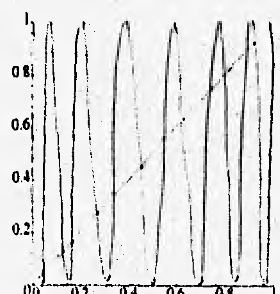
$f(x) = 4x(1 - x) = x_1$



$f^2(x) = 4x_1(1 - x_1) = x_2$



$f^3(x) = 4x_2(1 - x_2) = x_3$



$f^4(x) = 4x_3(1 - x_3) = x_4$

Para estudiar las características de estas funciones, veamos las siguientes definiciones:

Dado un $x_0 \in R$ definimos la **órbita de x_0 bajo f** como la sucesión de los valores obtenidos de la función f y sus iteraciones: $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, con $x_0 \in [0, 1]$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$,...,$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$,...

Por ejemplo, la órbita de $x_0 = 0.2$ bajo la función $f(x) = 4x(1 - x)$ será:

$x_0 = 0.2$

$x_1 = f(x_0) = 4(0.2)(1 - 0.2) = 0.64$
$x_2 = f(x_1) = 4(0.64)(1 - 0.64) = 0.9216$, etc.
Mientras que la órbita de $x_0 = 0.75$ será:
$x_0 = 0.75$
$x_1 = f(x_0) = 4(0.75)(1 - 0.75) = 0.75$
$x_2 = f(x_1) = 4(0.75)(1 - 0.75) = 0.75$, etc.

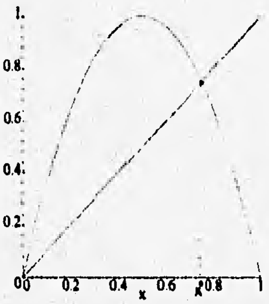
Como hemos mencionado anteriormente, existen diversos tipos de órbitas en un sistema dinámico: **puntos fijos, órbitas periódicas y puntos eventualmente periódicos.**

El más importante es el **punto fijo,** también llamado **punto de equilibrio del sistema.** Este es un punto x^* tal que $f(x^*) = x^*$.

En la ecuación que nos interesa, $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$, encontramos sus puntos fijos al **igualar** $x_t = Ax_t(1 - x_t)$. De donde nos queda que $x_t = 0$, o bien $x_t = \frac{A-1}{A}$, siendo éstos **puntos fijos.**

Gráficamente lo podemos obtener al intersectar la gráfica de la función con la recta identidad.

Por ejemplo, en la función $f(x) = 4x(1 - x)$ podemos ver por medio de su gráfica que esta función tiene como punto fijo a $x^* = \frac{3}{4}$, ya que $f(x^*) = f(\frac{3}{4}) = 4\left(\frac{3}{4}\right) - 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} = x^*$, aunque obviamente $x^* = 0$ también lo es:



PUNTOS FIJOS DE $f(x) = 4x(1 - x)$

Un punto x_0 es **periódico de período n** si existe $n \in N$ tal que $f^n(x_0) = x_0$, pero $f^k(x_0) \neq x_0$ para las $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

A n se le llama el **período de la órbita.**

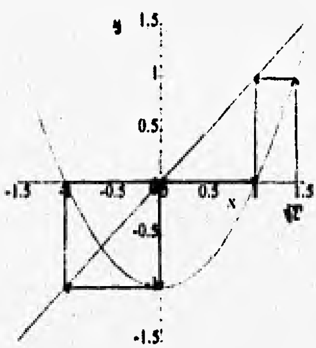
Como podemos darnos cuenta, la órbita de x_0, si x_0 es periódico de período n, es tan solo una sucesión con un cierto número n de términos que se repiten:

$\{x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0); x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0); ...\}$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - 1$, el punto $x_0 = 0$ cae en un ciclo $\{0, -1; 0, -1; ...\}$, por lo que 0 y -1 forman un 2-ciclo.

Un punto x_0 es **eventualmente fijo o eventualmente periódico** si x_0 no es periódico, pero algún punto de la órbita de x_0 sí lo es.

En el ejemplo anterior, $x_0 = \sqrt{2}$ nos genera la órbita $\left\{\sqrt{2}, 1, 0, -1; 0, -1; 0, -1; ...\right\}$, así que $\sqrt{2}$ es un punto eventualmente periódico ya que a partir del tercer término, el cero es un punto periódico de período 2.



CICLO DE PERÍODO DOS DE $f(x) = x^2 - 1$

A continuación daremos un teorema que nos dice bajo qué condiciones está garantizado el encontrar al menos un punto fijo:

Teorema del punto fijo de Brower.
Sea f una función continua que va de un intervalo cerrado en sí mismo $f : [a, b] \to [a, b]$. Entonces existe al menos un punto fijo para la función f en el intervalo $[a, b]$.

Este teorema bajo hipótesis muy simples nos garantiza la existencia de al menos un punto fijo para la función continua f en el intervalo cerrado $[a, b]$, aunque también podemos encontrar muchos más, por ejemplo, todos los puntos en el intervalo $[a, b]$ son puntos fijos para la función identidad $f(x) = x$.
La demostración de este teorema es un resultado inmediato del teorema del valor intermedio aplicado a una función $h(x) = f(x) - x$.
Esta función es continua y cumple que:
$h(a) = f(a) - a \geq 0$
$h(b) = f(b) - b \leq 0$

Por el teorema del valor intermedio existe un $c \in [a,b]$ tal que $h(c) = 0$, por lo que $h(c) = f(c) - c = 0$, de donde se obtiene que $f(c) = c$ y por ende c es un punto fijo.

Ya hemos visto que podemos encontrar gráficamente puntos fijos atractores y puntos fijos repulsores. Ahora veamos su definición formal:

Supongamos que x_0 es un punto fijo de f; el punto x_0 es un **punto atractor** si $|f'(x_0)| < 1$ y es un **punto repulsor** si $|f'(x_0)| > 1$. Cuando $|f'(x_0)| = 1$ se le llama **punto fijo neutro.**

Por otro lado, una **contracción** es una aplicación f de un espacio métrico (X, d) en sí mismo $f : (X, d) \to (X, d)$ tal que existe $k < 1$, y tal que para cada dos puntos x y y del espacio (X, d), se cumple que $d[f(x), f(y)] \leq kd[x, y]$.

Una **dilatación** es una aplicación f de un espacio métrico (X, d) en sí mismo $f : (X, d) \to (X, d)$, tal que existe $k > 1$, y tal que para cada dos puntos x y y del espacio (X, d) se cumple que $d[f(x), f(y)] \geq kd[x, y]$.

2.2.4 Estabilidad.

Como vimos anteriormente la idea de **estabilidad** de un sistema dinámico se refiere a que los elementos que componen dicho sistema permanezcan sin sufrir cambios conforme transcurra el tiempo.

En general, en un sistema dinámico los cambios pueden presentarse de dos formas:
a) Cambios en los valores iniciales los cuales, si no se presentan, al sistema se le llama simplemente **estable** y
b) Cambios en la ley o fuerza que gobierna el sistema dinámico. En este caso, si no se presentan al sistema se le llama **estable estructuralmente** o también **estable globalmente.**

Diremos que un punto de equilibrio es estable si la sucesión $f^t(c)$ no se aleja del equilibrio para valores de c cercanos al equilibrio. Es **atractivo** si tiende hacia el equilibrio también para valores próximos y es **globalmente atractivo** si tiende hacia el equilibrio para cualquier valor de c.

En un lenguaje formal, consideremos un sistema dinámico discreto y autónomo definido por la función $f : W \to W$ expresado por la ecuación en diferencias: $x_{t+1} = f(x_t)$, $x_0 = c$ con W subconjunto de R^n.

Supongamos que la función f tiene un punto fijo en el origen, es decir $f(0) = 0$.
Decimos que este punto es:

a) **estable** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un valor $\delta > 0$ tal que siempre que $|c| < \delta$, se cumple que $|x_t| < \varepsilon$, siendo $x_t = f^t(c)$

b) **atractivo** si existe un valor $b > 0$ tal que si $|c| < b$, siendo $x_t = f^t(c)$, se cumple que $\lim_{t\to\infty} x_t = 0$

c) **es asintóticamente estable** si es estable y atractivo.

d)**es globalmente atractivo** si es atractivo para todos los puntos en que está definida la función f.

Un sistema puede ser globalmente atractivo e inestable al mismo tiempo, esto es porque aunque todos los puntos tiendan al equilibrio, los que estén muy cercanos al punto de equilibrio, la función los hace dar un rodeo antes de llevarlos al punto fijo.

La idea de estabilidad es utilizada ampliamente en la economía. Los economistas están interesados en conocer si existen puntos de equilibrio en sus modelos económicos, pero no solo eso, también les interesa conocer si esos puntos de equilibrio, si es que existen, son estables o inestables, así como tratar de determinar todas las características del fenómeno económico.

Parte de ello lo podemos ver en el modelo económico del Equilibrio General. Este modelo trata precisamente de encontrar un sistema de precios de mercancías con los cuales se pueda igualar la oferta y la demanda de todas las mercancías.

La Teoría del Equilibrio General nos dice que siempre es posible hallar un sistema de precios para los cuales se iguale la oferta y la demanda, es decir, existe el equilibrio, pero la pregunta natural que surge es determinar si ese equilibrio es estable o es inestable en la medida en que transcurra el tiempo.

En el último capítulo de la tesis profundizaremos en la Teoría General del Equilibrio y veremos algunos resultados que nos ayudarán a comprender cómo es la dinámica de los precios.

2.2.5 La función logística $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$.

Retomemos el análisis de la ecuación que nos interesa $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$ como el modelo no lineal más simple que propiciará dinámicas nada simples comparado con el modelo continuo $x' = Ax(1 - x)$. Este modelo, al discretizarlo obtendremos:

$\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = Ax(1 - x)$

$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \approx Ax(1 - x)$

$x(t + h) \approx x(t) + hAx(t)[1 - x(t)]$,

de donde si $t = n \in N$ y $h = 1$, tenemos:

Supongamos que la función f tiene un punto fijo en el origen, es decir $f(0) = 0$.

Decimos que este punto es:

a) **estable** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un valor $\delta > 0$ tal que siempre que $|c| < \delta$, se cumple que $|x_t| < \varepsilon$, siendo $x_t = f^t(c)$

b) **atractivo** si existe un valor $b > 0$ tal que si $|c| < b$, siendo $x_t = f^t(c)$, se cumple que $\lim_{t\to\infty} x_t = 0$

c) es asintóticamente estable si es estable y atractivo.

d)es globalmente atractivo si es atractivo para todos los puntos en que está definida la función f.

Un sistema puede ser globalmente atractivo e inestable al mismo tiempo, esto es porque aunque todos los puntos tiendan al equilibrio, los que estén muy cercanos al punto de equilibrio, la función los hace dar un rodeo antes de llevarlos al punto fijo.

La idea de estabilidad es utilizada ampliamente en la economía. Los economistas están interesados en conocer si existen puntos de equilibrio en sus modelos económicos, pero no solo eso, también les interesa conocer si esos puntos de equilibrio, si es que existen, son estables o inestables, así como tratar de determinar todas las características del fenómeno económico.

Parte de ello lo podemos ver en el modelo económico del Equilibrio General. Este modelo trata precisamente de encontrar un sistema de precios de mercancías con los cuales se pueda igualar la oferta y la demanda de todas las mercancías.

La Teoría del Equilibrio General nos dice que siempre es posible hallar un sistema de precios para los cuales se iguale la oferta y la demanda, es decir, existe el equilibrio, pero la pregunta natural que surge es determinar si ese equilibrio es estable o es inestable en la medida en que transcurra el tiempo.

En el último capítulo de la tesis profundizaremos en la Teoría General del Equilibrio y veremos algunos resultados que nos ayudarán a comprender cómo es la dinámica de los precios.

2.2.5 La función logística $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$.

Retomemos el análisis de la ecuación que nos interesa $x_{t+1} = Ax_t(1-x_t)$ como el modelo no lineal más simple que propiciará dinámicas nada simples comparado con el modelo continuo $x' = Ax(1-x)$. Este modelo, al discretizarlo obtendremos:

$\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = Ax(1-x)$

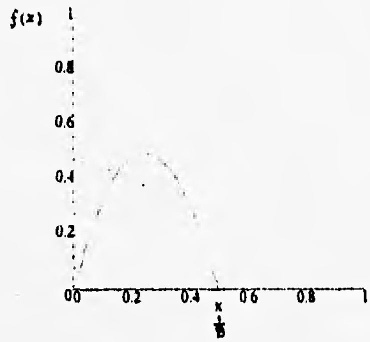
$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \approx Ax(1-x)$

$x(t+h) \approx x(t) + hAx(t)[1-x(t)]$,

de donde si $t = n \in N$ y $h = 1$, tenemos:

$x(n+1) = x(n)[1+A] - Ax^2(n)$
$x_{n+1} = (1+A)x_n - Ax^2(n) = (1+A)x_n\left[1 - \frac{A}{1+A}x_n\right]$, es decir,
$x_{n+1} = Ax_n[1 - Bx_n]$ con $A, B > 0$ y $x_n \in \left[0, \frac{1}{B}\right]$.

Siendo $f(x_n) = Ax_n[1 - Bx_n]$, para $x_n \in \left(0, \frac{1}{B}\right)$se tendrá $f(x_n) > 0$ y $f(0) = f(\frac{1}{B}) = 0$ como podemos ver en la gráfica:



Por lo tanto existe un punto máximo de la función $f(x_n)$, $x_n \in \left[0, \frac{1}{B}\right]$

$\frac{df(x_n)}{dx_n} = Ax_n[-B] + [1 - Bx_n]A = -ABx_n + A - ABx_n = A - 2ABx_n = 0$

$x_n = \frac{A}{2AB} = \frac{1}{2B}$, por lo tanto max $f(x_n) = f\left(\frac{1}{2B}\right) = A\left(\frac{1}{2B}\right)\left[1 - \frac{1}{2B}\right] = \frac{A}{4B}$, pero obligamos a que f sea una función del intervalo $\left[0, \frac{1}{B}\right]$ en sí mismo, por lo cual $f : \left[0, \frac{1}{B}\right] \to \left[0, \frac{1}{B}\right]$, es decir: $f\left(\left[0, \frac{1}{B}\right]\right) \subseteq \left[0, \frac{1}{B}\right]$, lo cual significa que el max $f(x_n) = \frac{A}{4B} < \frac{1}{B}$, de donde $A < \frac{4B}{B}$, esto es $A < 4$.

Como ya tenemos la restricción de que $A > 0$, entonces resulta que basta con analizar los valores de A entre 0 y 4, o sea $0 < A \leq 4$ y en la última desigualdad se vió que el proceso de acotar al parámetro A no depende de B, entonces podemos tomar a B como el valor no trivial más simple: $B = 1$.

Es así que podemos analizar la función $f(x_n) = Ax_n(1 - x_n)$ con $0 < A \leq 4$ y $x_t \in [0, 1]$.

En la medida en que el parámetro A cambie, el comportamiento cualitativo de la trayectoria de x también cambiará.

Tomando como condiciones iniciales el intervalo $[0, 1]$ analicemos como influye en el comportamiento de las órbitas la variación del parámetro A.

A) Cuando $0 < A \leq 1$

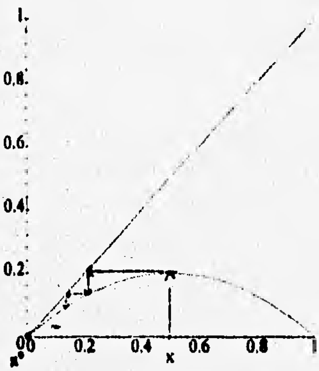
Si x^* es un punto fijo, entonces $f(x^*) = x^*$.

Para encontrar los puntos fijos de la ecuación $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$ hacemos $x_t = Ax_t(1 - x_t)$, lo que nos lleva a obtener como punto fijo a $x_t = \frac{A-1}{A}$. Como $0 < A \leq 1$, el único punto fijo que tiene esta ecuación es el trivial, $x^* = 0$.

Habíamos visto anteriormente que si el punto x^* es un punto fijo de una función f, decimos que x^* es un **punto atractor** si $|f'(x^*)| < 1$ y es un **punto repulsor** si $|f'(x^*)| > 1$

Si aplicamos ese criterio a la función $f(x) = Ax(1-x)$ con $0 < A < 1$, el único punto fijo $x^* = 0$ es un **punto fijo atractor** ya que: $|f'(x^*)| = |A - 2Ax^*| = |A| < 1$, por lo que tenemos una **contracción convergente** a $x^* = 0$ para $0 < A < 1$; esto es el $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^* = 0$, para todo $x \in (0,1)$, ya que para todo $x \in (0,1)$, $f(x) < x$ y así cualquiera que sea $x_0 \in (0,1)$ el $\lim_{t\to\infty} x_t = x^* = 0$

Veamos por ejemplo que la gráfica de la ecuación $x_{t+1} = 0.8x_t(1 - x_t)$ con $x_t \in [0,1]$ intersecta a la recta de la función idéntica únicamente en el origen:



CONTRACCIÓN CONVERGENTE A $x = 0$

B) Cuando $1 < A < 3$

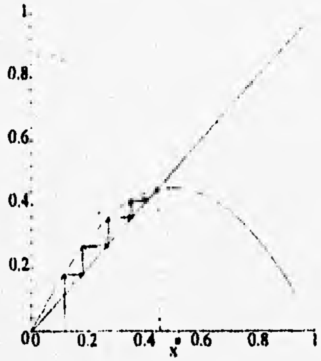
Para $A > 1$, el único punto fijo $x^* = 0$ de $f(x) = Ax(1-x)$ que antes era atractor, **ahora resulta ser repulsor,** ya que $|f'(0)| = |A - 2A \cdot 0| = |A| > 1$, apareciendo un nuevo punto fijo, que está dado por $x_t = \frac{A-1}{A}$.

Este nuevo punto fijo es un **punto atractor** para cuando $1 < A < 3$ como podemos ver si hacemos:

$|f'(x)| = |A - 2Ax^*| = \left|A - 2A\left(\frac{A-1}{A}\right)\right| = |2 - A| < 1$, es decir para todo $x_0 \in (0,1)$ el $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \frac{A-1}{A}$

Cuando $1 < A < 2$ tenemos una **contracción monótona convergente a** $\frac{A-1}{A}$

Por ejemplo en la ecuación $x_{t+1} = 1.8x_t(1 - x_t)$ con $x_0 \in [0,1]$, el $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$ converge monótonamente sin oscilaciones a $\frac{A-1}{A} = \frac{1.8-1}{1.8} = 0.4444$

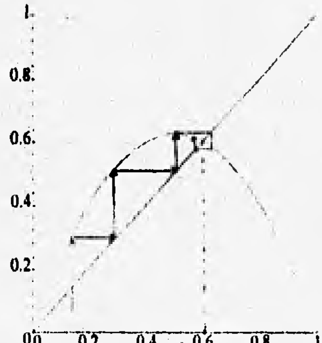


CONTRACCIÓN MONÓTONA CONVERGENTE A $x^* = \frac{A-1}{A}$

Cuando $2 < A < 3$ tenemos **oscilaciones convergentes a** $\frac{A-1}{A}$

La trayectoria $f^n(x_0)$ se aproxima oscilando alrededor de $\frac{A-1}{A}$, tomando sucesivamente valores mayores y menores de $\frac{A-1}{A}$.

Por ejemplo la ecuación $x_{t+1} = 2.5x_t(1 - x_t)$ con $x_t \in [0,1]$ tiene dos puntos fijos: uno en $x^* = \frac{A-1}{A} = \frac{2.5-1}{2.5} = 0.6$, que es un **punto fijo atractor** como podemos ver al hacer $|f'(x)| = |A - 2Ax^*| = |2.5 - 2\,(2.5)\,(0.6)| = 0.5 < 1$, y el otro en $x^* = 0$, que es un **punto fijo repulsor.** Su gráfica es la siguiente:



OSCILACIONES CONVERGENTES A $x^* = \frac{A-1}{A}$

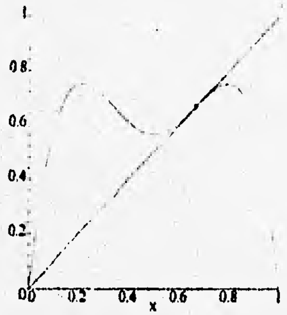
C) Cuando $A = 3$, nace una bifurcación.

Cuando evaluamos el punto fijo $x^* = \frac{A-1}{A}$ en $|f'(x)|$ vimos que

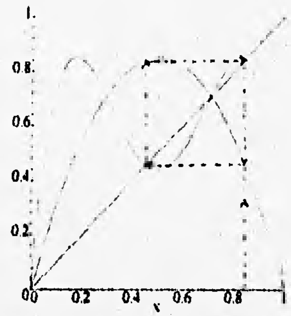
$|f'(x^*)| = |A - 2Ax^*| = \left|A - 2A(\frac{A-1}{A})\right| = |2 - A|$

Cuando $A = 3$, el punto fijo es $x^* = \frac{A-1}{A} = \frac{2}{3}$ y de atractor que era se transforma en repulsor dándose una nueva bifurcación.

De este punto fijo $x^* = \frac{2}{3}$ nace un **ciclo de período dos**, o sea que la recta de la función idéntica intersectará a la gráfica de la función ya no dos veces, sino cuatro veces, lo que corresponde a tener ahora cuatro puntos de intersección: dos puntos fijos y dos puntos correspondientes al ciclo de período dos, como podemos ver en las gráficas siguientes:



$f^2(x) = 3x_1(1 - x_1)$



$f^2(x) = 3.4x_1(1 - x_1)$

Al buscar un **ciclo de período dos** estamos buscando un punto x tal que al evaluarlo en la segunda iteración nos dé el mismo punto. Es decir, el punto x formará un **ciclo de período dos** si: $f^2(x) = x$.

Busquemos los puntos que nos generen un **ciclo de período dos** en la ecuación $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$:

Sea $f(x) = Ax_t(1 - x_t)$, entonces:

$f^2(x_t) = f(f(x_t)) = A\left(Ax_t(1 - x_t)\right)\left(1 - Ax_t(1 - x_t)\right) = -A^2x_t(-1 + x_t)(1 - Ax_t + Ax_t^2)$.

Como queremos que $f^2(x) = x$, tenemos que encontrar para qué valores de x_t se satisface: $-A^2x_t(-1 + x_t)(1 - Ax_t + Ax_t^2) = x_t$, de donde nos queda el polinomio: $A^2x_t - A^3x_t^2 + 2A^3x_t^3 - A^2x_t^2 - A^3x_t^4 - x_t = 0$, cuyas raíces son:

$x_2^1 = 0$

$x_2^2 = \frac{A-1}{A}$

$x_2^3 = \frac{1}{2A^2}\left(A^2 + A + \sqrt{A^4 - 2A^3 - 3A^2}\right) = \frac{1}{2A}\left(A + 1 + \sqrt{A^2 - 2A - 3}\right)$

$x_2^4 = \frac{1}{2A^2}\left(A^2 + A - \sqrt{A^4 - 2A^3 - 3A^2}\right) = \frac{1}{2A}\left(A + 1 - \sqrt{A^2 - 2A - 3}\right)$

Las primeras dos raíces x_2^1, x_2^2 son puntos fijos de la función, mientras que las raíces x_2^3, x_2^4 corresponden a los puntos que generan un ciclo de período dos.

Veamos como ejemplo la ecuación $x_{t+1} = 3.4x_t(1 - x_t)$

Los puntos $x_2^1 = 0$ y $x_2^2 = \frac{3.4-1}{3.4} = 0.70588$ son puntos fijos para esta ecuación.

Si evaluamos las otras dos raíces obtendremos los puntos que generan un ciclo de período dos:

$x_2^3 = \frac{1}{2(3.4)^2}\left(3.4^2 + 3.4 + \sqrt{3.4^4 - 2(3.4)^3 - 3(3.4)^2}\right) = 0.84215$

y

$x_2^4 = \frac{1}{2(3.4)^2}\left(3.4^2 + 3.4 - \sqrt{3.4^4 - 2(3.4)^3 - 3(3.4)^2}\right) = 0.45196$

Como podemos comprobar:

primera iteración, $3.4(0.84215)(1 - 0.84215) = 0.45196$

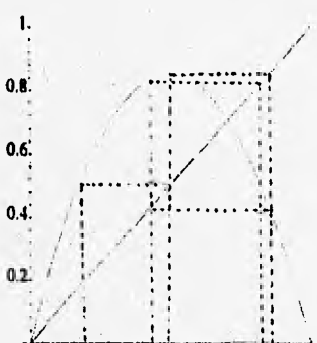
segunda iteración, $3.4(0.45196)(1 - 0.45196) = 0.84215$

tercera iteración, $3.4(0.84215)(1 - 0.84215) = 0.45196$

y así sucesivamente.

Vemos que la trayectoria $f^n(x_0)$ es atraída a los puntos x_2^3 y x_2^4.

En particular $f^{2n}(x_0)$ tiende a uno de estos puntos y la sucesión $f^{2n+1}(x_0)$ al otro.



$f(x) = 3.4x(1 - x)$

Los ciclos pueden ser **ciclos atractores o ciclos repulsores.**

Un criterio para determinar de qué tipo son, es evaluar nuevamente la pendiente de la recta tangente a la función iterada en el ciclo correspondiente.

Supongamos que un sistema dinámico tiene un ciclo de período dos a partir de los puntos x_1 y $x_2 = f(x_1)$. Este ciclo es :

Atractor si $|(f^2(x_1))'| < 1$, lo cual por la regla de la cadena equivale a $|f'(x_1)f'(x_2)| < 1$ y es

Repulsor si $|(f^2(x_1))'| > 1$, lo cual nuevamente por la regla de la cadena equivale a $|f'(x_1)f'(x_2)| > 1$

Analicemos para qué valores de A el sistema dinámico $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$ tiene un **ciclo de período dos atractor** a partir de los puntos:

$$x_1 = \tfrac{1}{2A}\left(A + 1 + \sqrt{A^2 - 2A - 3}\right)$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2A}\left(A + 1 - \sqrt{A^2 - 2A - 3}\right)$$

Hagamos $f(x) = Ax(1-x)$, tomemos su derivada $f'(x) = A - 2Ax$.

Aplicando el criterio tenemos que $|f'(x_1) \cdot f'(x_2)| = |(A - 2Ax_1)(A - 2Ax_2)|$ que simplificando nos queda:

$|f'(x_1) \cdot f'(x_2)| = \left|\left(1 + \sqrt{(A^2 - 2A - 3)}\right)\left(-1 + \sqrt{(A^2 - 2A - 3)}\right)\right|$

Observemos que para que $|f'(x_1) \cdot f'(x_2)|$tome valores en los reales, necesitamos que $A^2 - 2A - 3 > 0$, lo cual nos lleva a que $A \geq 3$

Por otro lado, si $\left|\left(1 + \sqrt{(A^2 - 2A - 3)}\right)\left(-1 + \sqrt{(A^2 - 2A - 3)}\right)\right| < 1$, tendríamos un **ciclo atractor,** así que si buscamos para qué valores de A esto se cumple, el problema se reduce a encontrar las raíces del polinomio $A^2 - 2A - 5 = 0$

La única raíz positiva de este polinomio es $A = 1 + \sqrt{6} = 3.4494...$

Por lo tanto, **para** $3 < A < 1 + \sqrt{6}$ **el ciclo generado es atractor,** mientras que para $A > 1 + \sqrt{6}$**, el ciclo generado ya es repulsor.**

En el ejemplo que estamos considerando $x_{t+1} = 3.4x_t(1 - x_t)$, los puntos $x_1 = 0.45196$ y $x_2 = 0.84215$ generan un **ciclo atractor de período dos** como podemos comprobar:

Sea $f(x) = 3.4x(1-x)$, entonces $f'(x) = 3.4 - 6.8x$, así que

$|(f^2(x^*))'| = |f'(x_1) \cdot f'(x_2)| = |(3.4 - 6.8x_1)(3.4 - 6.8x_2)| = 0.76004 < 1$

D) Cuando $A > 3.4494...$

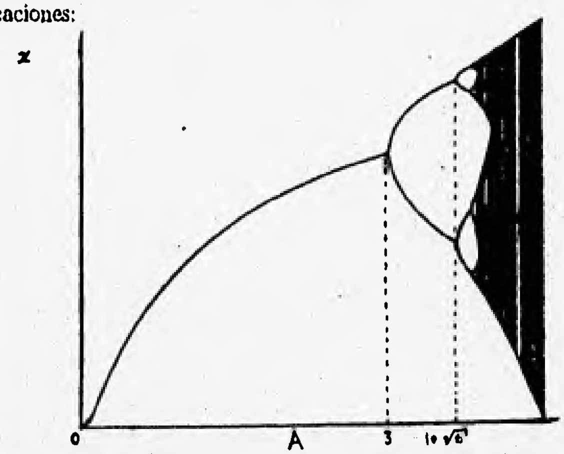
En este caso al pasar por el valor $A = 1 + \sqrt{6} = 3.4494...$ tenemos nuevamente una **bifurcación.**

El ciclo atractor que teníamos $\{x_2^1, x_2^2\}$ se transforma en repulsor, generándose un **nuevo ciclo atractor de período cuatro.**

De esta forma, si el parámetro A sigue creciendo, el 4-ciclo también se convierte en repulsor y de él nace un nuevo 8-ciclo atractor.

En la ecuación $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$ con $1 \leq A \leq 4$ y $0 \leq x \leq 1$, si graficamos en el eje horizontal el parámetro A y en el eje vertical el valor de x obtenemos lo que se llama **diagrama de órbita o diagrama de bifurcación** de la **función logística** $f(x) = Ax(1 - x)$

Este diagrama nos indica cómo es la dinámica de nuestro sistema, mostrándonos cómo surgen las bifurcaciones:



Esta sucesión de doblamiento de períodos de ciclos atractores cuando A aumenta, ocurre hasta el valor de $A = A_\infty = 3.5699456...$

Este valor fue obtenido por Feigenbaum en 1975[3] con base en cálculos hechos con la ayuda de una calculadora.

Ya para el valor $A = 3.57$, la transformación $f(x) = Ax(1 - x)$ admite todos los 2^n $(n = 0, 1, 2, ...)$ ciclos, siendo todos ellos repulsores, sin contener ciclos de otros períodos.

Para casi todos los puntos $x_0 \in (0, 1)$ y $A = 3.57$ la trayectoria $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ es atraída por el **conjunto de Cantor** perfecto, denso en ninguna parte[4].

Este conjunto está formado por un continuo de trayectorias, cada una de las cuales es densa en este conjunto.

Si se continúa aumentando A aparecerán nuevos ciclos, incluso de períodos distintos a 2^n para toda $n \in N$. Por ejemplo para $A = 3.83...$ la transformación $f(x) = Ax(1-x)$ ya admite ciclos de todos los períodos naturales, etc.

---

[3]Ver Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison Wesley. 1989. pp 129.
[4]Idem.

Sharkovskii ordenó los números naturales de la siguiente forma:

$$\begin{gathered}
3, 5, 7, 9, \ldots \\
2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \ldots \\
2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, \ldots \\
2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, \ldots \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\ldots, 2^n, \ldots, 2^3, 2^2, 2^1, 1.
\end{gathered}$$

En 1964 probó el siguiente teorema[5]:

Teorema de Sharkovskii.

Sea $F : R \to R$ una función continua. Supongamos que F tiene un punto periódico de período k y que k está antes que l en el orden de Sarkoskii que hemos mencionado. Entonces F también tiene un punto periódico de período l.

Este teorema, con hipótesis muy sencillas nos da un resultado muy poderoso:

Por ejemplo, si la función tiene un punto periódico de período 8, entonces la función también tiene puntos periódicos de periodos 2^2, 2 y 1. O por ejemplo, si la función tiene un punto periódico de período 6, entonces la función tiene todos los puntos de períodos de potencias de 2^n y además puntos periódicos de períodos $2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \ldots, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, \ldots$

Un caso particular de este teorema es el resultado de Li y Yorke que publicaron bajo el título **"Período tres implica caos"**[6], el cual nos da las condiciones suficientes para generar caos.

2.2.6 Condiciones suficientes de Li y Yorke.

Teorema de Li y Yorke.

Sea J un intervalo y sea $\theta : J \to J$ una función continua.

Supongamos que hay un punto $a \in J$ para el cual los puntos $b = \theta(a)$, $c = \theta^2(a)$, y $d = \theta^3(a)$ satisfacen que $d \leq a < b < c$ ó $d \geq a > b > c$, entonces:

1) Para toda $k = 1, 2, \ldots$ hay un punto periódico en J con período k.

2) Existe un conjunto no numerable $S \subset J$, (S no contiene ningún punto periódico), que satisface las condiciones siguientes:

2.1) Para toda p y $q \in S$ con $p \neq q$ tenemos que :

[5]Sharkovskii A. N. *Coexistencia de ciclos de una transformación continua de la recta en sí misma.* Ukr. Mat. Zhur. Vol. 16, 1, 1964. pp. 61-71. (Existe traducción al castellano en la Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación, Vol. IV. 15. Enero 1988)

[6]Li,T-Y and Yorke James. *Period Three Implies Chaos.* American Mathematical Monthly, December 1975. 82, 985-992.

$$\limsup_{n\to\infty} |\theta^n(p) - \theta^n(q)| > 0$$
y
$$\liminf_{n\to\infty} |\theta^n(p) - \theta^n(q)| = 0$$

2.2) Para todo $p \in S$ y $q \in J$ punto periódico tenemos que:

$$\limsup_{n\to\infty} |\theta^n(p) - \theta^n(q)| > 0$$

En otras palabras, lo que nos está diciendo este teorema es que a partir de una función θ continua tal que para un punto x^c tenemos un ciclo de período tres: $\theta^3(x^c) \leq x^c < \theta(x^c) < \theta^2(x^c)$, entonces:

1) Esta funcion tiene puntos periódicos de todos los períodos, incluyendo los que no son potencias de dos.

2) Existe un conjunto S no numerable en J, (S no contiene puntos periódicos) tal que todas las trayectorias que empezaron sin tener puntos periódicos permanecen en todo momento sin tener puntos periódicos y además:

2.1) Existen trayectorias en S que pasan arbitrariamente cerca de todas las demás, así como también existen trayectorias en S tales que, no importando qué tan cercanas estén, éstas tendrán que alejarse.

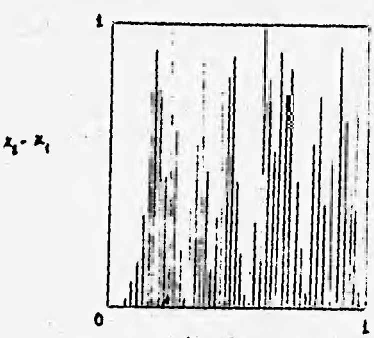
2.2) Toda trayectoria en S camina alejándose de un ciclo de cualquier orden en J. Es decir, nunca llega a parecerse a ningún ciclo de ningún orden.

Podemos ver más fácilmente cómo varían las distancias de las trayectorias mediante el siguiente ejemplo:

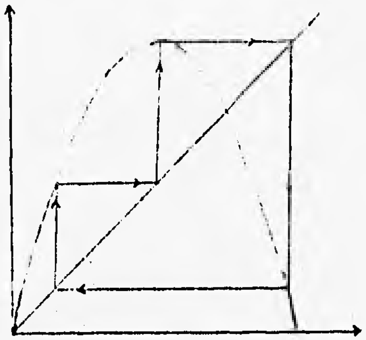
Sea la función $f(x) = 4x(1-x)$.

Tomemos dos puntos al azar, x_1y $x_2 \in (0,1)$ tales que la distancia entre ellos inicialmente sea un millonésimo: $x_2 - x_1 = 0.000001$.

Iteremos la función con estos puntos iniciales cincuenta veces. Si graficamos en el eje horizontal el número de iteraciones y en el eje vertical la distancia entre las iteraciones que vayamos teniendo, el resultado es una gráfica como la siguiente:



Las **condiciones suficientes de caos** dadas por la desigualdad $\theta^3(x^c) \leq x^c < \theta(x^c) < \theta^2(x^c)$ pueden verse gráficamente como sigue:



$f(x) = 3.839x(1-x)$

Cuando se satisfacen las condiciones anteriores diremos que **hay caos según Li y Yorke.**

Cabe mencionar que existen otras definiciones de caos, por ejemplo, la más conocida es la **definición de caos según Devaney** que da en su libro "A First Course in Chaotic Dynamical Systems"[7]

Intuitivamente lo que se le pide a una función $f : M \to M$, con M espacio métrico y completo, para que tenga comportamiento caótico es:

1) Que tenga **sensibilidad a las condiciones iniciales,** lo cual significa que partiendo de dos puntos por muy cercanos que estos se encuentren en el inicio, estos podrán alejarse conforme transcurra el tiempo, pudiendo ser su evolución totalmente distinta.

2) Que **sea topológicamente transitiva,** lo que quiere decir que el sistema, comience donde comience, pasará cerca de cualquier posible estado en algún momento y,

3) Que el conjunto de **puntos periódicos de f sean densos en X** , es decir, cerca de cualquier estado posible hay puntos periódicos.

Por otro lado, cabe mencionar que la definición de caos según Devaney implica la definición de caos según Li y Yorke, pero no al revés.

[7]Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems.* Addison Wesley. 1992. Cap.10

2.3 EL MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO.

2.3.1 El modelo.

Los estudios de la función de producción agregada se remontan a la década de 1920 con Paul Douglas. Posteriormente, en los años sesentas Robert Solow, John Kendrick y Edward Denison retomaron el tema con el objetivo de analizar de qué manera el crecimiento económico depende del crecimiento del capital, del trabajo y de la productividad.

La teoría económica neoclásica nos dice que la acumulación de capitales depende de la propensión que se tenga de ahorrar, así como de la productividad que se obtenga al explotar un cierto capital.

En cuanto a la producción, se considera que una parte del volúmen de ésta es consumida mientras que otra parte es destinada al ahorro.

Para esta teoría, el insumo de la producción está formado por el capital k que se tenga para producir y por la mano de obra L_t, así que podemos escribir la función de producción como $f(k_t, L_t)$

La inversión neta, que es la tasa de incremento de capital en un período dado, según la teoría neoclásica, depende de la función de ahorro $s(k_t)$ y de la función de producción $f(k_t, L_t)$ que se tenga, de tal forma que el incremento del capital queda determinado por la ecuación:

$$k_{t+1} = s(k_t) \cdot f(k_t, L_t)$$

Para determinar el empleo total, tenemos la ecuación $L_t = L_0 e^{nt}$ donde L_0 es el empleo total inicial y la fuerza de trabajo aumenta a una tasa relativa constante n, la cual, si no hay cambios tecnológicos es la tasa natural de crecimiento.

Diversos economistas tales como Harrord, Johnson y Kahn , plantearon algunos modelos de este tipo. Finalmente, Robert Solow[8], en 1956 plantea el crecimiento de capitales con la siguiente ecuación en forma discreta:

$$k_{t+1} = \frac{s(k_t)\cdot f(k_t)}{1+\lambda}$$

donde:

k_t es el **capital** que se tiene al tiempo t,

$s(k_t)$ es la **función de ahorro** que depende del capital k_t que se tenga al tiempo t,

$f(k_t)$ es la **función de producción** que depende del capital k_t al tiempo t indicándonos cuánto se obtiene después de invertir un cierto capital k al tiempo t y

[8] Solow, Robert. *A Contribution to the theory of economic growth.* Quartely Journal of Economics. Vol 70, 1956. pp.65-94

λ es la **tasa "natural" de crecimiento** de la población.

El crecimiento balanceado que se pueda tener entre el capital acumulado y el crecimiento de la población estará asociado con los estados estacionarios de la ecuación anterior: es decir, dependiendo del comportamiento del ahorro y de la productivad que se tenga del capital, el crecimiento económico puede ser estable u oscilar alrededor de un punto convergiendo a éste o formar un ciclo.

Bajo este modelo de crecimiento económico, Day[9] muestra que existen valores de los parámetros de las funciones de ahorro y de producción para los cuales las condiciones establecidas en el Teorema de Li-Yorke se satisfacen. Con esto, el crecimiento económico no solo puede ser estable u oscilar convergiendo a un punto o formar ciclos, sino que también, bajo estas circunstancias, el crecimiento económico puede ser caótico en el sentido de Li y Yorke.

Reescribamos las condiciones dadas por Li y Yorke utilizando las variables del modelo de crecimiento económico de Solow:

Sea k^* el capital que maximiza el producto de las funciones de ahorro y de producción: $s(k)\cdot f(k)$ y sea k^m la cantidad que se obtiene al invertir k^*, es decir $k^m = \frac{s(k^*)\cdot f(k^*)}{1+\lambda}$

Si suponemos que hay un crecimiento económico al invertir el capital k^*, entonces tenemos que $k^m > k^*$.

Llamémosle k^c al capital mínimo que al evaluarlo en nuestro modelo de crecimiento nos produce el capital k^*que maximiza el ahorro y la producción.

Es decir, k^c es la raíz más pequeña que obtenemos en la ecuación $\frac{s(k)\cdot f(k)}{1+\lambda} = k^*$.

Con esto, la condición suficiente de caos establecida por el teorema de Li-Yorke se convierte en encontrar un k^mque satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\frac{s(k^m)\cdot f(k^m)}{1+\lambda} \leq k^c < k^* < k^m$$

El Teorema de Li y Yorke nos dice que si se satisface esa desigualdad, entonces existen ciclos de cualquier orden. Es decir, para todo n con $n = 1, 2, 3, \ldots$ existen puntos tales que $\theta^n(k) = k$, donde $\theta(k) = \frac{s(k)\cdot f(k)}{1+\lambda}$

En la secciones siguientes analizaremos dos casos del modelo de crecimiento económico y veremos si se satisface o no la desigualdad anterior y bajo qué condiciones.

2.3.2 Ahorro constante con una función de producción Cobb-Douglas.

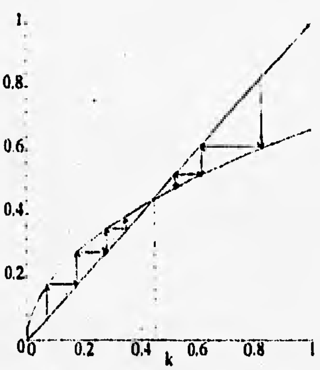
Retomando la ecuación que nos interesa, $k_{t+1} = \frac{s(k_t)\cdot f(k_t)}{1+\lambda}$, consideremos el ahorro constante $s(k) = \sigma$ y una función de producción Cobb-Douglas, es decir, una función de producción tipo potencial $f(k) = Bk^{\beta}$, con $0 \leq \beta < 1$

[9] Day Richard. *Irregular Growth Cycles.* The American Economic Review. Junio 1982. pp. 406- 414.

De esta forma, el modelo neoclásico de crecimiento económico se convierte en la ecuación:

$$k_{t+1} = \frac{\sigma B k_t^{\beta}}{1+\lambda}$$

Veamos como ejemplo cuando $\sigma = 1$, $B = 1$, $\beta = 0.5$, $\lambda = 0.5$, tenemos que $k_{t+1} = \frac{k_t^{0.5}}{1+0.5}$, cuya gráfica es como la siguiente:



$$k_{t+1} = \frac{k_t^{0.5}}{1+0.5}$$

Como β toma valores positivos menores que uno, la función es monótona estríctamente creciente. Con esto tenemos que todas las trayectorias convergen al punto de equilibrio determinado por:

$$k = \frac{\sigma B k^{\beta}}{1+\lambda}$$
$$\frac{k}{k^{\beta}} = \frac{\sigma B}{1+\lambda}$$
$$k^{(1-\beta)} = \frac{\sigma B}{1+\lambda}$$
$$k = \left(\frac{\sigma B}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Que en nuestro ejemplo sería $k = \left(\frac{1}{1+0.5}\right)^{\frac{1}{1-0.5}} = 0.44444...$

El capital acumulado bajo este modelo económico siempre convergerá a un equilibrio. Este modelo no presenta ninguna dinámica complicada ni mucho menos comportamientos caóticos.

En términos económicos, la dinámica que representa es la de un desarrollo económico creciente que tiende a un equilibrio conforme transcurre el tiempo.

2.3.3 Ahorro constante con Inhibición en la función de Productividad.

Supongamos ahora que la productividad se ve reducida por un "efecto de inhibición" o de "contaminación" causado por el incremento de concentraciones de capital de acuerdo a un término multiplicativo $(m-k)^\gamma$.

La función de producción Cobb Douglas bajo este esquema sería $f(k) = Bk^\beta(m-k)^\gamma$ con $0 \leq \beta < 1$ y $0 \leq \gamma < 1$.

Si mantenemos constante el radio de ahorro σ, la ecuación en diferencias que obtendremos para el modelo de crecimiento económico será:

$$k_{t+1} = \frac{\sigma B k_t^\beta (m-k_t)^\gamma}{1+\lambda}$$

Para ver por qué en este modelo hay caos según Li y Yorke, tenemos que ver que esta ecuación tiene ciclos de todos los períodos. Si encontramos valores en la ecuación del modelo para los cuales se genera un ciclo de período tres, habremos probado que la ecuación del modelo es caótica en el sentido de Li y Yorke.

Busquemos el valor k^* para el cual se maximiza $k_{t+1} = \frac{\sigma B k_t^\beta (m-k_t)^\gamma}{1+\lambda}$
Sea $a = \frac{\sigma B}{1+\lambda}$ y sea $y = \frac{\sigma B k^\beta (m-k)^\gamma}{1+\lambda} = ak^\beta(m-k)^\gamma$
derivando y con respecto a k tenemos:
$y' = a\beta k^{\beta-1}(m-k)^\gamma - ak^\beta\gamma(m-k)^{\gamma-1}$, si igualamos a cero:
$a\beta k^{\beta-1}(m-k)^\gamma - ak^\beta\gamma(m-k)^{\gamma-1} = 0$
De donde se obtiene que $k^* = (\frac{\beta}{\beta+\gamma})m$

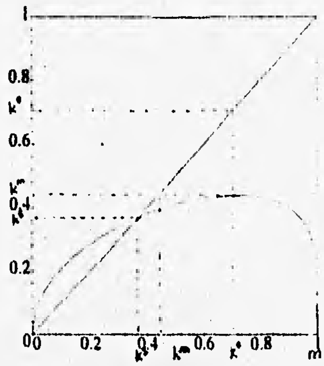
Para obtener k^m evaluamos en k^* la ecuación $k_{t+1} = \frac{\sigma B k_t^\beta (m-k_t)^\gamma}{1+\lambda}$, así que
$k^m = \frac{\sigma B (k^*)^\beta (m-k^*)^\gamma}{1+\lambda} = \frac{\sigma B}{1+\lambda}\left((\frac{\beta}{\beta+\gamma})m\right)^\beta \left(m - (\frac{\beta}{\beta+\gamma})m\right)^\gamma = \frac{\sigma B}{1+\lambda}\beta^\beta\gamma^\gamma(\frac{m}{\beta+\gamma})^{\beta+\gamma}$
Por lo tanto $k^m = \frac{\sigma B}{1+\lambda}\beta^\beta\gamma^\gamma(\frac{m}{\beta+\gamma})^{\beta+\gamma}$

Nótese que k^m depende del parámetro B, pero no de k^*. Esto significa que la gráfica de la ecuación en diferencias que obtuvimos puede crecer tanto como B crezca sin que haya cambios en el valor de k^*.

Cuando k se aproxima a cero la pendiente de la función de producción $f(k) = Bk^\beta(m-k)^\gamma$ crece indefinidamente pues crece como k^β. Consecuentemente, para condiciones iniciales suficientemente pequeñas, el crecimiento deberá ser positivo para cualquier valor positivo de B.

Para valores suficientemente pequeños de B el comportamiento es como el de la gráfica siguiente, teniendo un punto fijo k^sal cual convergen todos los puntos.

Veamos por ejemplo cuando $\sigma = 1$, $B = 1$. $m = 1$, $\beta = 0.5$ y $\gamma = 0.2$
La ecuación de nuestro modelo es $k_{t+1} = \frac{k_t^{0.5}(1-k_t)^{0.2}}{1+0.5}$
Este alcanza un máximo en $k^* = (\frac{\beta}{\beta+\gamma})m = (\frac{0.5}{0.5+0.2}) = 0.71429$
Obtenemos el valor de
$k^m = \frac{\sigma B}{1+\lambda}\beta^\beta\gamma^\gamma(\frac{m}{\beta+\gamma})^{\beta+\gamma} = \frac{1}{1+0.5}0.5^{0.5}0.2^{0.2}(\frac{1}{0.5+0.2})^{0.5+0.2} = 0.43856$
Como podemos ver en la gráfica:



$$k_{t+1} = \frac{k_t^{0.5}(1-k_t)^{0.2}}{1+0.5}$$

Cuando el parámetro de producción B crece, el estado estable del capital crece hasta tender a que $k^m = k^* = k^s$

Este es un punto de bifurcación cuyas oscilaciones en el capital-trabajo deben surgir para valores grandes de B .

Si los valores de nuestros parámetros satisfacen $k^* < k^m \leq m$, esto es:

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma}m < \frac{\sigma B}{1+\lambda}\beta^\beta\gamma^\gamma\left(\frac{m}{\beta+\gamma}\right)^{\beta+\gamma} \leq m,$$

el capital-trabajo mostrará eventualmente oscilaciones, quizá después de tener un período de crecimiento.

Para ver si estos ciclos pueden ser caóticos necesitamos ver si existen valores de los parámetros que satisfagan las condiciones de caos que establecimos en un principio.

Queremos evitar valores negativos en k que es nuestro capital. Como la función se hace cero cuando $k = 0$ y cuando $k = m$, entonces tenemos que tomar $k^m \leq m$.

Busquemos un valor de B, digamos B'' que satisfaga $k^m = m$.

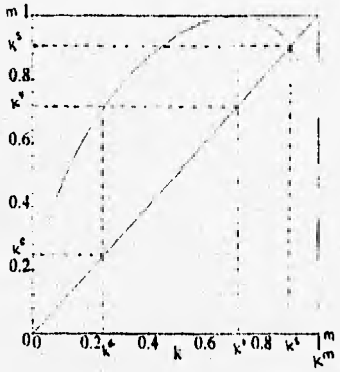
$$k^m = \frac{\sigma B''}{1+\lambda}\beta^\beta\gamma^\gamma\left(\frac{m}{\beta+\gamma}\right)^{\beta+\gamma} = m\ .$$

Despejando tenemos que $B'' = \frac{m(1+\lambda)}{\sigma\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\left(\frac{m}{\beta+\gamma}\right)^{\beta+\gamma}}$

De $k^* = (\frac{\beta}{\beta+\gamma})m$ se observa que $k^* < k^m$

Veamos el ejemplo anterior. La ecuación del modelo que estabamos considerando era $k_{t+1} = \frac{Bk_t^{0.5}(1-k_t)^{0.2}}{1+0.5}$. Sustituyendo en $B'' = \frac{m(1+\lambda)}{\sigma\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\left(\frac{m}{\beta+\gamma}\right)^{\beta+\gamma}}$ encontramos el valor de $B'' = 2.2802$.

Al sustituir el valor de B'' en la ecuación $k_{t+1} = \frac{\sigma B'' k_t^{\beta}(m-k_t)^{\gamma}}{1+\lambda}$, tenemos la siguiente gráfica:



$$k_{t+1} = \frac{2.2802k_t^{0.5}(1-k_t)^{0.2}}{1+0.5}$$

En este ejemplo tenemos:

$k^* = \left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}\right) m = \left(\frac{0.5}{0.5+0.2}\right) = 0.71429$

$k^m = \frac{\sigma B''(k^*)^{\beta}(m-k^*)^{\gamma}}{1+\lambda} = \frac{2.2802(0.71429)^{0.5}(1-0.71429)^{0.2}}{1+0.5} = 1 = m$

Existen dos raíces positivas de la ecuación $k^* = \frac{\sigma B''}{1+\lambda}k^{\beta}(m-k)^{\gamma}$.

Llamémosle k^c a la raíz más pequeña.

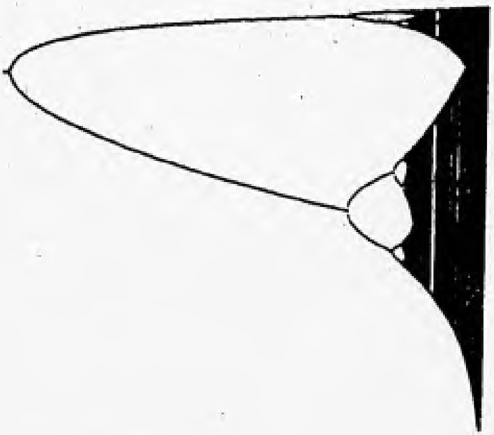
Tenemos que $0 < k^c < k^* < k^m$, donde k^c genera k^*; k^* genera k^m y k^m al evaluarla en la función toma el valor de cero como se ve en la gráfica anterior.

Nuestra función mapea el intervalo $[0, m]$ en sí mismo, así que todas las condiciones del teorema Li-Yorke descritas anteriormente se cumplen.

En nuestro ejemplo, tomemos el valor de $k = 0.71429$ que obtuvimos anteriormente.

Veamos su **diagrama de bifucación**[10]:

[10]Este diagrama fue hecho mediante un programa de cómputo con la ayuda de Hugo Jiménez.



Como nuestro diagrama fase puede crecer continuamente, existe un valor mínimo de B, digamos B' tal que para cualquier B en el intervalo $[B', B'']$ existe un punto k^c que depende de B y que satisface la ecuación $k^* = \frac{\sigma B}{1+\lambda} k^\beta (m-k)^\gamma$ cumpliéndose la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \frac{\sigma B}{1+\lambda} k^{m\beta}(m - k^m)^\gamma \leq k^c < k^* < k^m.$$

Para el caso particular en que $\beta = \gamma = m = 1$, la ecuación en diferencias $k_{t+1} = \frac{\sigma B k_t^\beta (m-k_t)^\gamma}{1+\lambda}$ se puede reducir a la ecuación logística que ya hemos visto anteriormente $x_{t+1} = Ax_t(1 - x_t)$, con $A = \frac{\sigma B}{1+\lambda}$.

Así que para combinaciones de parámetros tales que $3.5699456... \leq \frac{\sigma B}{1+\lambda} \leq 4$ existen ciclos de todos los períodos[11], presentándose el caos que definimos como "Caos según Li y Yorke"

[11]Ver sección 2.2.5 y 2.2.6 de la tesis.

Capítulo 3

DIFICULTADES EN LA TEORÍA DEL EQUILIBRIO GENERAL

3.1 EL MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL.

Uno de los orígenes de la Teoría del Equilibrio se remonta al siglo pasado con el planteamiento de "la mano invisible" de Adam Smith.

Esta teoría plantea *grosso modo*, que si dejáramos actuar libremente a todos los agentes que intervienen en una economía de tal forma que cada quien busque lo mejor para sí mismo, llegará un momento en que cada uno se encontrará realizando la actividad que le represente mayor rendimiento y mayor satisfacción, por lo que se tendería hacia una libre economía regida únicamente por la ley de la oferta y la demanda, sin la necesidad de tener políticas reguladoras.

Este planteamiento ha captado poderosamente la atención de diversos economistas en distintas épocas.

Con el fin de determinar la veracidad o no de ésta teoría, economistas tales como Walras y Debreu, entre otros, han introducido modelos económicos. haciendo uso de herramientas matemáticas para intentar estudiar y "comprobar científicamente " tales teorías.

De alguna manera, en todo lo que va del siglo, la economía ha tendido a matematizarse corriendo el riesgo de que los modelos matemáticos sugieran las hipótesis del modelo económico en lugar de ser al revés.

En este capítulo estaremos interesados en estudiar la dinámica de la Teoría General del Equilibrio. Esta teoría corresponde a la Microeconomía, que es la parte de la economía que se encarga de estudiar el comportamiento de los agentes económicos así como la forma en que estos interactúan entre sí.

En términos generales, el análisis del equilibrio es considerado como el estudio del comportamiento de un sistema económico cuando las acciones que toman los agentes económicos son compatibles entre sí.

Como nos interesa estudiar el comportamiento de los agentes económicos, si suponemos que cada uno de ellos busca lo mejor para sí mismo, podemos modelar su comportamiento mediante la optimización de los beneficios individuales que estos pudieran obtener al actuar de una u otra forma.

Aceptando el modelo de comportamiento optimizador y restringiéndonos al estudio de estados de equilibrio, la finalidad de la microeconomía será la de buscar los estados tales en que cada agente económico haya obtenido lo más y mejor posible para él, es decir, buscar situaciones en las que ya no le sea posible mejorar, ni aún modificando su comportamiento.

En otras palabras, en un equilibrio económico, cada agente elige su forma de actuar que, dadas las acciones de los demás agentes, considera óptima y factible para si mismo.

Bajo este esquema de optimización es necesario especificar las acciones que el agente económico pueda realizar y reconocer sus limitaciones. Por ejemplo, para el consumidor debemos considerar sus limitaciones de presupuesto, para la empresa limitaciones de tecnología, etc.

En este capítulo nos interesará estudiar en particular el comportamiento de la oferta y la demanda.

Un agente económico decide la cantidad que quiere demandar de cierto bien en función de su precio y en función a la cantidad que el posea. Se supone que su forma de actuar corresponde a un proceso de optimización de los beneficios que puedan representarle el adquirir ciertas mercancías.

De igual forma, otro agente económico mediante un proceso de maximización determina la cantidad del bien en cuestion que quiera ofertar. Si partimos de un sistema de precios dados, no parece que lleguen a ser compatibles en primera instancia la cantidad ofrecida y la cantidad demandada del bien en cuestion. En este caso, decimos que el mercado se encuentra en desequilibrio.

Aunque en principio hablamos de desequilibrio, resultaría interesante estudiar cómo se comportan los mercados bajo esas circunstancias.

Pudiera suceder que algunas transacciones se llevan a cabo al precio dado, mientras que quizá otras mercancías a un precio no sean demandadas, aunque por otro lado también puede ser que los oferentes bajen sus precios para captar más consumidores.

Los precios de las mercancías son determinados por las acciones de los agentes económicos. Si partimos de un sistema de precios dado, los agentes intercambiarán entre sí sus mercancías tratando de satisfacer sus demandas y ofertas; si la demanda u oferta de alguna mercancía no es satisfecha a ese sistema de precios dados, los precios tenderán a modificarse y así sucesivamente tratando de satisfacer todos sus necesidades de demanda y de oferta. Este proceso define la dinámica de los precios.

De aquí surgen preguntas muy interesantes:

¿Puede darse el caso de que el precio se "ajusta" conforme transcurre el tiempo para equilibrar el mercado?, si es así, ¿bajo qué condiciones se logra?

Quizá se empiece con un sistema de precios que sea incapaz de ser compatible con los deseos de demanda y de oferta de los agentes economicos, pero conforme transcurre el tiempo, este sistema de precios se va modificando, ¿tenderá al equilibrio? o por el contrario, ¿se alejará de éste?

La primera pregunta a contestar es conocer si realmente las condiciones de equilibrio pueden satisfacerse. A este problema se le conoce como la Existencia del Equilibrio y ya está probado que dicho equilibrio siempre existe. Para quien esté interesado en ello podría revisar cualquier libro de Microeconomía[1].

Partiendo de la existencia del equilibrio a nosostros nos interesará conocer cómo responderá este equilibrio a ciertos cambios del entorno económico.

En la primera sección describiremos el modelo económico al cual nos estamos refiriendo, para luego, en la segunda sección analizar dos teoremas que nos dicen cómo es la dinámica de esta economía, sus complejidades y la posibilidad de que presenten comportamientos caóticos.

3.1.1 Los Precios en el Intercambio Puro.

Nos limitaremos a analizar el caso particular del modelo de equilibrio general en una economía, donde todos los agentes son consumidores, es decir, no hay producción.

A este tipo de economía se le conoce como **economía de intercambio puro.**

En este modelo cada agente económico va a intercambiar sus mercancías de acuerdo a sus necesidades, gustos y preferencias, así como también de acuerdo a la cantidad de mercancías que posea inicialmente.

Consideremos $n \geq 2$ tipos de mercancías cuyo precio está dado de antemano.

Sea p_j el precio correspondiente a la j-ésima mercancía, de tal forma que el costo de x unidades de la mercancía j será el producto $p_j \cdot x_j$

[1]Recomiendo ver Varian. *Análisis Microeconómico.* Antoni Bosch Editor. 1982. Capit.VI.

Podemos representar el sistema de precios de las mercancías que hay en la economía mediante un **vector de precios**. Este vector tiene n entradas que corresponden a los precios de las n mercancías de nuestra economía.

Diremos que el **vector de precios** de nuestra economía es $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$

Representaremos una cierta combinación de mercancías mediante el vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, donde cada entrada representa la cantidad x_j que se adquiere de la j-ésima mercancía. A este vector le llamaremos una **canasta de mercancías**.

El **costo de una canasta de mercancías** estará dado por el producto interno $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$, ya que éste es la suma del costo de cada mercancía.

Cada agente económico, digamos el k-ésimo agente, posee ciertas cantidades iniciales de mercancías, las cuales representaremos por un vector que llamaremos **vector de dotaciones iniciales** $\mathbf{w}^k = (w_1, \ldots, w_n)$, que representa la cantidad que posee de cada mercancía, aunque por supuesto, este vector puede tener ceros en algunas entradas, pero no cantidades negativas.

Este vector que representa los bienes que posee el agente, lo lleva a tener una riqueza r^k que está dada por $r^k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}^k$

Cada uno de los agentes podrá adquirir diversas canastas de mercancías con la condición de que el costo de dichas canastas no sobrepase la riqueza que el agente posee.

En términos matemáticos denotemos por X al conjunto de canastas de mercancías que puede adquirir el agente bajo su restricción presupuestaria:

$$X = \left\{\mathbf{x}^k \in R^n_+ \mid \mathbf{p}\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k\right) \leq 0\right\}$$

Este conjunto nos denota lo que llamaremos la **Región Factible.**

Veamos por ejemplo una economía con dos mercancías x_1 y x_2 a precios p_1 y p_2 respectivamente.

Si el agente tiene un cierta riqueza inicial r, entonces puede adquirir una cierta canasta de mercancía $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq r$

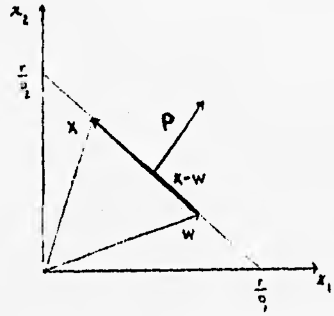
A partir de esta restricción podemos encontrar la región factible:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq r$$
$$(p_1, p_2)(x_1, x_2) \leq r$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq r$$

por lo que resulta

$$x_2 \leq \frac{r}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$
$$x_1 \leq \frac{r}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} x_2$$

Esta región está delimitada por lo que llamaremos el **plano presupuestal**, obteniendo la gráfica siguiente:



Nótese que el vector de precios **p** resulta ser ortogonal al plano presupuestal.

Esto se deriva de la restricción presupuestaria de cada agente:

$\mathbf{p}\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k\right) \leq 0$, si el agente consume toda su dotación inicial, la restricción se convierte en la igualdad $\mathbf{p}\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k\right) = 0$.

3.1.2 La Función de Utilidad.

Cada agente económico tiene diversos intereses y preferencias particulares sobre las posibles mercancías que pueda adquirir. Habíamos dicho que cada uno de ellos iba a adoptar una conducta optimizadora, es decir, cada uno va a buscar lo mejor para sí mismo optimizando sus recursos.

Antes que nada, debemos caracterizar matemáticamente cómo son las preferencias de los agentes económicos. Para ello introducimos una cierta función que llamaremos **Función de Utilidad:**

Definición: Sea la función $u_k : B \subset R^n_+ \rightarrow R$ donde B es un conjunto abierto[2], una función continua tal que $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ si el agente económico k prefiere la canasta de mercancías **x** a la canasta de mercancías **y**, es decir si $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Decimos que u es una **función de utilidad.**

Tradicionalmente los economistas parten de ciertos supuestos que le piden a la función de utilidad para que sea más manejable matematicamente, estos supuestos son:

a) Que sea una función de clase C^1, lo que significa que existan las derivadas parciales de la función y que además éstas sean continuas.

[2]El concepto de derivada tiene sentido si el conjunto del dominio es abierto, es decir, si todos los puntos de dicho conjunto son puntos interiores, por ello hacemos uso de B

Este supuesto es de gran utilidad para cuando queramos optimizar, pues podemos utilizar las técnicas de Lagrange.

b)Que la función de utilidad sea una función cóncava y que las derivadas parciales sean positivas.

Intuitivamente la idea de este supuesto es la siguiente:

La función de utilidad nos indica precisamente el beneficio que representa para el agente el adquirir ciertas cantidades de mercancías; bajo este esquema, es lógico suponer que mientras mayor cantidad de mercancías tenga, esto le representará una mayor utilidad. Así que la función de utilidad debe ser creciente, es por ello que se le pide a la función que sus derivadas parciales sean positivas.

Por otro lado, si observamos cómo crece la utilidad con respecto al incremento de mercancías, vemos que a mayor cantidad de mercancías mayor utilidad nos representará, pero no en forma exponencial, veamos por ejemplo que si el agente adquiere un par de zapatos y lo compara con adquirir tres pares de zapatos, seguramente la utilidad que le representa entre una adquisición y la otra serán muy diferentes, no así en cambio si comparamos la utilidad que le representa entre adquirir trece pares de zapatos con respecto a adquirir quince pares. Intuitivamente, al no haber un orden natural en R^n, esto nos lleva a pedir que la función que sea cóncava.

Otra forma de denotar las preferencias de los agentes económicos es mediante una **Relación de Preferencias** ($\succeq$) que definimos sobre el espacio factible X .

Escribiremos:

$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ cuando la canasta de mercancías $\mathbf{x}$ sea estrictamente preferida a la canasta de mercancías $\mathbf{y}$.

$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ cuando la canasta de mercancías $\mathbf{x}$ sea al menos tan preferible que la canasta de mercancías $\mathbf{y}$.

$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ cuando la canasta de mercancías $\mathbf{x}$ sea idénticamente preferible a la canasta de mercancías $\mathbf{y}$.

Los supuestos que se tienen de la **Relación de Preferencias** son los siguientes:

1) Completez: para todo par de canastas factibles $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} \in X$, se cumple que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ ó $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$.

2) Reflexividad: para toda canasta de mercancías $\mathbf{x} \in X$, se cumple que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$.

3) Transitividad: para toda canasta factible $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \in X$, si $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$, entonces $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$

4) Continuidad: para toda canasta factible $\mathbf{y} \in X$, los conjuntos $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$ y $\{\mathbf{x} : \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\}$ son cerrados, de donde se sigue que los conjuntos $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$ y $\{\mathbf{x} : \mathbf{y} \succ \mathbf{x}\}$ son abiertos.

Por otro lado, otros supuestos que se manejan de la función de utilidad y de las relaciones de preferencias son:

1) Monotonicidad fuerte: si $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ .Este supuesto afirma que siempre preferiremos tener más.

2) Insaciabilidad local: dados un $\mathbf{x} \in X$ y un $\varepsilon > 0$, existe $\mathbf{y} \in X$ con $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon$ tal que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. En términos económicos, este supuesto nos dice que siempre es posible mejorar ligeramente aún cuando sólo se permitan pequeñas variaciones de la combinación de consumo.

3) Convexidad estricta: dados $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in X$, si $\mathbf{x}\mathbf{z}$ y $\mathbf{y}$ $\mathbf{z} \Rightarrow t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ para toda $t \in (0,1)$. Este supuesto implica que el agente prefiere poseer combinaciones de dos mercancías que poseer una sola.

Por último, en cuanto a las relaciones de preferencia, mencionaremos un teorema que dice "...si el orden de preferencias es completo, reflexivo, transitivo, contínuo y cumple el supuesto de monotonicidad fuerte, entonces éste se puede representar por medio de una función de utilidad..."[3]

Nosotros estaremos interesados en definir las preferencias de los agentes a través de su función de utilidad porque mediante ésta es más fácil aplicar herramientas de Cálculo para resolver el problema de optimización.

Habiendo definido la función de utilidad para un agente económico, vemos que puede existir una serie de canastas de mercancías que podrían representar la misma utilidad para el agente, así que definimos una **curva de indiferencia** como el conjunto de todas las combinaciones de consumo indiferentes entre sí. Estas curvas corresponden precisamente a las curvas de nivel de la función de utilidad u.

3.1.3 El problema de maximización y su solución.

Una vez definidas las limitaciones presupuestarias del agente económico y habiendo definido sus preferencias mediante una función de utilidad, el problema al que se enfrenta el agente económico es el de maximizar los beneficios que pueda obtener, es decir, maximizar su función de utilidad con la restricción de limitarse a su presupuesto.

En otras palabras, cada agente deberá:

$$\text{maximizar } u_k(\mathbf{x})$$
$$\text{sujeta a } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq r^k$$

[3]Ver Varian. *Análisis Microeconómico*. Antoni Bosch Editor. 1982. pp.134

Se nos presentan los siguientes casos:

a) Cuando $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ el problema no tiene solución ya que al ser cero los precios de todas las mercancías, cualquier canasta de mercancías $\mathbf{x}$ satisface la restricción pero no podemos hallar una canasta de mercancías $\mathbf{x}$ que maximice nuestra función puesto que la región factible es no acotada. Lo mismo sucede si el precio de alguna mercancía es cero, es decir si $p_j = 0$ para algún j .

b)Cuando el agente económico no posee dotación inical, es decir $r = 0$, el problema tiene como única solución el adquirir cero mercancías, así que la solución trivial es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

c) Cuando al agente posee una riqueza $r > 0$ y los precios de las mercancías son mayores que cero, $\mathbf{p} > \mathbf{0}$.

En este caso la solución existe y lo vemos al aplicar el teorema de Weierstrass:

Tomemos a u_k como una función de utilidad, $u_k(\mathbf{x}) : X \to R$. Aplicando el Teorema de Weierstrass, tenemos que al ser X un compacto y por ser u_k una función continua, entonces $u_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X$, alcanza su máximo y su mínimo.

Recordemos que X es la región factible dada por el conjunto $X = \left\{\mathbf{x}^k \in R^n_+ \mid \mathbf{p}\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k\right) \leq 0\right\}$, el cual es cerrado y acotado.

Llamémosle $\mathbf{x}^*$ a la canasta de mercancías que obtenemos al maximizar la función de utilidad.

Bajo el supuesto de insaciabilidad local, que nos decía que a partir de una canasta dada siempre podemos hallar otra que nos permita mejorar nuestra utilidad, vemos que la canasta óptima $\mathbf{x}^*$, debe ser tal que satisfaga la restricción presupuestaria con la igualdad.

El razonamiento es el siguiente: (por contradicción)

Supongamos que se satisface el principio de insaciabilidad local. Supongamos que existe $\mathbf{x}^*$ óptimo tal que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* < r$. Como $\mathbf{x}^*$cuesta estríctamente menos que la cantidad r , todas las combinaciones pertenecientes a X que esten suficientemente cerca a $\mathbf{x}^*$ costaran menos que r y por lo tanto serán factibles. Pero por la hipótesis de insaciabilidad local tiene que existir un $\mathbf{x}$ cercano a $\mathbf{x}^*$ tal que sea preferido a $\mathbf{x}^*$, lo que nos lleva a que $\mathbf{x}^*$ no es óptimo !

Por lo tanto, una combinación $\mathbf{x}^*$que maximice la utilidad debe de cumplir con $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = r$

Podemos replantear el problema como

$$\text{maximizar } u_k(\mathbf{x})$$
$$\text{sujeta a } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = r$$

Este problema de maximización lo podemos resolver con la ayuda del teorema de multiplicadores de Lagrange:

Teorema de Multiplicadores de Lagrange:

Sean $f : U \subset R^n \to R$ y $g : U \subset R^n \to R$ funciones suaves dadas.

Sea $x_0 \in U$ y $g(x_0) = c$ y sea S el conjunto de nivel para g con valor c, donde $\{x \in R^n \mid g(x) = c\}$. Supongamos que $\nabla g(x_0) \neq 0$.

Si $f \mid S$ que denota "f restringida a S" tiene un máximo o un mínimo en x_0 de S, entonces existe un numero real λ tal que $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$.

Queremos maximizar la función de utilidad $u_k : R^n_+ \to R$ sujeta a la condición $g : X \subset R^n_+ \to R$ con $g(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = r$ es decir, $g(\mathbf{x}) = p_1 x_1 + ... + p_n x_n = r$.

Si aplicamos el teorema de Lagrange tenemos que existe un λ tal que $\nabla U_k(x) = \lambda \nabla g(x)$

donde $\nabla u(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right)$ y $\nabla g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial g(x)}{\partial x_n}\right) = (p_1, ..., p_n) = \mathbf{p}$

así que $\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right) = \lambda(p_1, ..., p_n) = \lambda \mathbf{p}$

$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \lambda p_i$ o bien $\nabla u_k(\mathbf{x}(\mathbf{p})) = \lambda \mathbf{p}$

Veamos un ejemplo:

Supongamos un espacio de $n = 2$ mercancías x_1, x_2 cuyo vector de precios es $\mathbf{p} = (1, 2)$ respectivamente.

El agente k dispone de una riqueza $r = 10$ y sus preferencias están definidas por una función de utilidad $u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$.

¿Qué canasta $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria?

El problema que se nos plantea es el de

maximizar la función $u(\mathbf{x}) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$

sujeta a $x_1 + 2x_2 = 10$

así que

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}\right) = (1, 2)$$

como $\nabla u(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \lambda$$

$$\frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = 2\lambda$$

lo que nos lleva a que

$$\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = 2\lambda$$

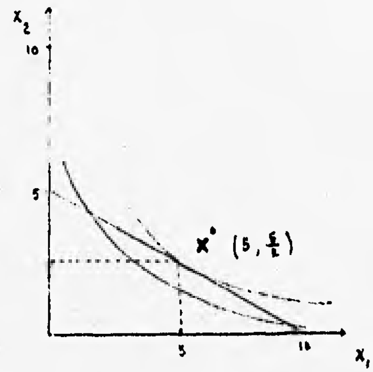
$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = 4\lambda$$

de donde $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ y $x_1 = 2x_2$

por lo tanto $x_1 = 5$ y $x_2 = \frac{5}{2}$

Así que el agente deberá adquirir cinco unidades de la mercancía uno y cinco medios de la mercancía dos, de tal forma que esta combinación le representa la mayor utilidad posible y no sobrepasa su presupuesto.

Su representación gráfica es la siguiente:



3.1.4 La Función Agregada de Exceso de Demanda $\xi(\mathbf{p})$

Recordemos que originalmente estamos interesados en determinar si es posible que los agentes actúen, ofreciendo y demandando mercancías de una forma óptima de tal manera que sus acciones sean compatibles con la de los demás agentes económicos.

Ya hemos visto que las preferencias de los agentes pueden quedar representadas matemáticamente por lo que llamamos función de utilidad, a la que pudimos maximizar fácilmente.

Pues bien, ahora definiremos una nueva función que nos va a permitir medir de qué forma se da esa "compatibilidad" de la que hemos estado hablando.

Diremos que las acciones de los agentes económicos son compatibles cuando todos estén satisfechos, lo que corresponderá a que todos los agentes que deseaban ofrecer ciertas mercancías hayan encontrado agentes que las adquieran y también, todos los agentes que demandaban ciertas mercancías hayan podido satisfacer su demanda.

Precisamente cuando se da esa situación en que la oferta iguala a la demanda diremos que el mercado está en equilibrio.

Para medir en una economía qué tanto un agente está alejado del equilibrio definimos la **función de exceso de demanda del k-ésimo agente** $\xi^k(\mathbf{p})$ como la diferencia entre lo que demanda el agente k, $\mathbf{x}^k(\mathbf{p})$ y lo que ofrece, $\mathbf{w}^k$, es decir, su vector de dotaciones iniciales.

Así que la función de exceso de demanda del agente k será: $\xi^k(\mathbf{p}) = \mathbf{x}^k(\mathbf{p}) - \mathbf{w}^k$

De igual forma para medir en una economía qué tanto ésta se encuentra alejada del equilibrio definimos la **función agregada de exceso de demanda** $\xi(p)$ como la suma de los excesos de demanda de todos los agentes, es decir, $\xi(\mathbf{p}) = \Sigma_{k=1}^{n}\xi^k(\mathbf{p}) = \Sigma_{k=1}^{n}\mathbf{x}^k(\mathbf{p}) - \Sigma_{k=1}^{n}\mathbf{w}^k$

Esta última función que acabamos de definir tiene tres propiedades importantes y son las que tradicionalmente se conocen:

1) La función $\xi(\mathbf{p})$, es una función bien definida y suave. Lo cual se debe a que la función de demanda y de oferta tienen esta propiedad.

2) Es una función homogénea de grado cero.

Si todos los precios los multiplicamos por alguna constante, ni la demanda ni la oferta de las mercancías variará, así que el conjunto presupuestario permanecerá constante. Por ello decimos que las funciones de oferta y de demanda son homogéneas de grado cero. Como la función agregada de exceso de demanda es la diferencia de las funciones de oferta y demanda, ésta seguirá siendo homogenea de grado cero.

Matemáticamente definimos una función homogénea de grado p como sigue:

Sea f una función definida en un conjunto abierto S en R^n. Decimos que f es homogénea de grado p sobre S si $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ para toda $\lambda \in R$ y para toda $x \in S$ tal que $\lambda x \in S$.

3) Otra propiedad importante de la función $\xi(\mathbf{p})$ es la que se conoce como la **Ley de Walras**, la cual dice que la función agragada de exceso de demanda $\xi(\mathbf{p})$ es ortogonal al vector de precios $\mathbf{p}$.

Esto se debe, como podemos ver al evaluar $\mathbf{p}\cdot\xi(\mathbf{p})$ como sigue:

$\mathbf{p}\cdot\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\cdot\left(\Sigma_{k=1}^{n}\xi^k(\mathbf{p})\right) = \mathbf{p}\cdot\left(\Sigma_{k=1}^{n}(\mathbf{x}^k(\mathbf{p}) - \mathbf{w}^k)\right) = \mathbf{p}\cdot\left(\Sigma_{k=1}^{n}\mathbf{x}^k(\mathbf{p}) - \Sigma_{k=1}^{n}\mathbf{w}^k\right) = \Sigma_{k=1}^{n}\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^k(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{w}^k\right) = 0$ ya que $\mathbf{x}^k(\mathbf{p})$ debe ser tal que $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^k(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{w}^k = r^k$, por lo tanto, $\mathbf{p}\cdot\xi(\mathbf{p}) = 0$, es decir, el vector de precios $\mathbf{p}$ es ortogonal al exceso de la demanda $\xi(\mathbf{p})$.

Nos interesa estudiar y caracterizar la función agregada de exceso de demanda porque esta función nos dice cómo se comporta en términos generales el mercado. A partir de esta función podemos inferir si las acciones de los agentes económicos además de ser optimizadores, son compatibles entre sí.

A simple vista, las propiedades mencionadas sólo nos hablan de una función con "buenos comportamientos" que en ningún momento parecieran ser caóticos; para verificar lo anterior, estudiemos más a fondo cómo se comporta esta función ubicando los precios en un modelo dinámico.

3.1.5 El Modelo Dinámico.

Cuando una mercancía tiene un exceso de demanda, la fuerza del mercado producirá un aumento en su precio. Los precios al tiempo $t+1$ estarán en función de cómo son los precios al momento t más un cierto incremento h proporcional al exceso de demanda de las mercancías que se haya tenido al momento t. De esta manera, la dinámica de los precios en forma de ecuación en diferencias estará dada por: $\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{p}_t + h\xi(\mathbf{p}_t)$ donde h es una constante positiva.

Esta dinámica estará gobernada por las propiedades que presente la función $\xi(\mathbf{p})$

Sonnenschein fue el primero en preguntarse si la función agregada de exceso de demanda cuenta con más propiedades que las que ya conocemos[4], Mantel probó un resultado parcial[5] y finalmente fue Debreu[6] quien probó el teorema que veremos en la siguiente sección.

Antes de ver ese teorema, como lo que nos interesa es caracterizar la función $\xi(\mathbf{p})$, ubiquemos el problema en un contexto matemático más conveniente. Para ello, hagamos uso de la propiedad de ser una función homogenea de grado cero, lo que nos permite normalizar los precios y así ubicar la dinámica de éstos en la superficie de la parte positiva de la esfera unitaria:

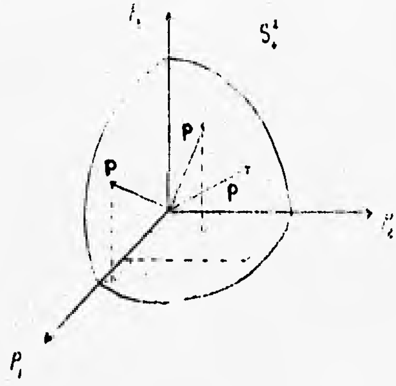
Si $\mathbf{p}' = (p'_1, ..., p'_n)$ y hacemos $p_i = \sqrt{\frac{p'_i}{\Sigma p'_i}}$ entonces el vector de precios $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ es tal que $\Sigma_{i=1}^n p_i^2 = 1$.

Geométricamente, los precios se encuentran en el simplejo $S_+^{n-1} = \left\{\mathbf{p} \in R_+^n \mid \Sigma_{i=1}^n p_i^2 = 1\right\}$.

Al normalizar los precios de esta forma, nuestro estudio de la dinámica de precios se concentrará en estudiar la dinámica generada en el simplejo S_+^{n-1}.

Por ejemplo, para una economía con tres mercancías, los precios se encuentran en la parte positiva de la esfera unitaria $S^2 = \{\mathbf{p} \mid p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\}$, como podemos ver gráficamente:

[4] Sonnenschein H. *Market Excess Demand Functions*. *Econometrica* 40. 1972. pp. 649-663.
[5] Mantel R. *On the Characterization of Aggregate Excess Demand*. J.Econom Theory 7. 1972. pp.348-353.
[6] G. Debreu. *Excess Demand Functions*. Journal of Mathematical Economics 1. 1974. pp. 15-21.



p_3
S^2_+
P
P
P
p_2
p_1

3.2 DOS TEOREMAS.

Nos interesa determinar todas las características que tenga la función agragada de exceso de demanda $\xi(\mathbf{p})$ aparte de las que ya conocemos, es decir, queremos saber si la ecuacion en diferencias que nos describen la dinámica de los precios converge a algún equilibrio o si presenta comportamientos caóticos.

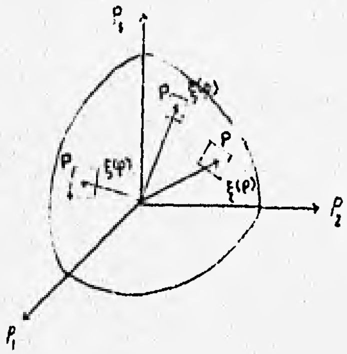
Por la propiedad que tiene la función $\xi(\mathbf{p})$ de ser homogénea de grado cero, pudimos normalizar los precios de manera que quedaran dentro del ortante positivo de la esfera unitaria S_+^{n-1}.

Como nos interesan únicamente los precios estríctamente positivos, consideremos el ortante positivo de la esfera unitaria recortada como $S_{+,\varepsilon}^{n-1} = \left\{ \mathbf{p} \in R_+^n \mid p_j \geq \varepsilon \right\}$ para toda $j = \{1, ..., n\}$, con esto, estamos quitando los precios cero.

A cada vector de precios $\mathbf{p}$ que esté en dicha esfera, le corresponde de manera natural su respectivo exceso de demanda $\xi(\mathbf{p})$.

En la esfera recortada, cada punto que esté sobre ésta representa un sistema de precios, de tal forma que al considerar la superficie de la esfera tenemos contemplados todos los posibles sistemas de precios.

Esta forma de asociar los vectores de precios con su respectivo exceso de demanda nos genera un campo vectorial como podemos ver en la gráfica:



Definimos a $\Xi_\varepsilon(n)$ como el conjunto de todos los campos vectoriales tangentes y continuos sobre la esfera $S_{+,\varepsilon}^{n-1}$. Es decir, $\Xi_\varepsilon(n)$ es el conjunto de todos los excesos de demandas que corresponden a todos los diferentes sistemas de precios positivos.

Denotemos por U al conjunto de las funciones de utilidad estrictamente convexas y continuas y sea R_{+}^{n} el espacio de las dotaciones iniciales.

Con a agentes que participan en la economía, consideremos la transformación

$$F : [U \times R_{+}^{n}]^{a} \rightarrow \Xi_{\varepsilon}(n) .$$

Queremos caracterizar la imágen de la transformación $\Xi_{\varepsilon}(n)$, ya que ésta nos diría cómo se comporta nuestra dinámica de precios.

A este respecto, el Teorema SMD (Sonnenschein, Mantel y Debreu) nos da una respuesta.

3.2.1 El teorema SMD

Habíamos mencionado que Sonnenschein[7] fue el primero en preguntarse sobre las propiedades que pudiera tener la función $\xi(\mathbf{p})$, Mantel[8] presentó un resultado parcial y finalmente fue Debreu[9] quien probó el teorema que llamaremos SMD.

Teorema SMD.
Para $n \geq 2$ y $\varepsilon > 0$, la transformación de precios: $F_{\varepsilon} : [U \times R_{+}^{n}]^{a} \rightarrow \Xi\varepsilon(n)$ es suprayectiva si y solo si $a \geq n$.

Es decir, con al menos tantos agentes como mercancías, a todo elemento del contradominio $\Xi\varepsilon(n)$, que es el conjunto de excesos de demanda de cada sistema de precios no nulos, le corresponde un elemento del dominio $[U \times R_{+}^{n}]^{a}$ que son el espacio de dotaciones iniciales de cada agente con su respectiva función de utilidad, tales que bajo esta transformación le corresponde el exceso de demanda seleccionado inicialmente.

La demostración de este teorema resulta ser demasiado compleja. En el apéndice de la tesis se presentan algunos elementos que sirven para darnos una idea de esta demostración.

3.2.2 Implicaciones del teorema.

En términos de Saari, con al menos tantos agentes como mercancías ¡cualquier cosa puede pasar!

A pesar de que este teorema fue probado por Debreu, parece ser que en ese momento no estaba claro lo que este teorema podía significar.

Fue Saari[10] quien interpretó el teorema de la siguiente forma: "...cualquier dinámica que se contemple en el simplejo de precios $S_{+,\varepsilon}^{n-1}$, no importando lo complicado que sea o

[7]Sonnenschein H. *Market Excess Demand Functions. Econometrica* 40. 1972. pp. 649-663.

[8]Mantel R. *On the Characterization of Aggregate Excess Demand.* J.Econom Theory 7. 1972. pp.348-353.

[9]G. Debreu, *Excess Demand Functions,* Journal of Mathematical Economics 1. 1974. pp. 15-21.

[10]Saari D. *Mathematical Complexity of Simple Economics.* Notices of the AMS 42, 2 1995 pp. 222-230.

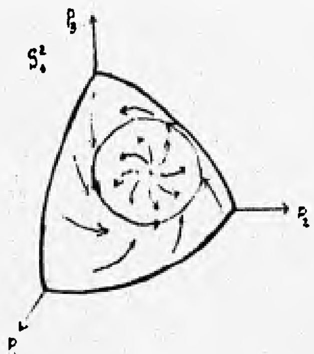
cómo ella imite a un ejemplo clásico de la física o a la forma más reciente de caos dinámico. el teorema SMD asegura que existen dotaciones iniciales y preferencias para todos los agentes de tal manera que, al menos en el simplejo de precios recortado. la función agregada de exceso de demanda es el campo vectorial que seleccionemos de antemano."

El exceso de demanda es un campo vectorial tal que a cada vector de precios le asocia su correspondiente exceso de demanda.

Para descartar la teoría de Adam Smith utilizando el teorema SMD. solo tenemos que escoger un campo vectorial que presente un equilibrio aislado e inestable o escoger un campo vectorial que admita comportamiento caótico.

Un ejemplo propuesto por Scarf[11], que descarta la teoría de Adam Smith es el de una economía que admita un equilibrio inestable de tal forma que los precios tiendan a alejarse del mismo.

La dinámica de este ejemplo la podemos ver representada en la siguiente figura:



3.2.3 El teorema de Saari.

Nos interesa conocer el comportamiento de la función agregada de exceso de demanda $\xi(p)$ porque resume el comportamiento de los mercados así como la compatibilidad de las acciones que tomen los agentes bajo una conducta optimizadora.

Hay un área en economía llamada "exceso del consumidor", la cual calcula la función de exceso de demanda para cada mercancía: primero mide tanto la demanda como la oferta que tuvo cada mercancía y luego calcula su diferencia, obteniendo así el exceso de demanda de cada mercanía.

Una vez calculado el exceso de demanda de cada mercancía, si se sumaran cada una de éstas, se obtendría la función agregada de exceso de demanda total y a partir de ésta, sería posible inferir el comportamiento del mercado.

[11] Scarf H. *Some Examples of Global Inestability of the Competitive Equilibrium.* Internat. Econom. Rev. 1 1960 pp. 157-172.

Esta podría ser una opción de cómo calcular la función que nos interesa, pero para ser realistas tenemos que considerar que existen más de diez millones de mercancías, por lo que requeriríamos una cantidad enorme de información.

Otra opción sería utilizar métodos estadísticos de tal forma que escojamos algunas mercancías, no todas, de tal manera que sean representativas y a partir de éstas inferir cómo es el comportamiento de la función agregada de exceso de demanda total.

El seleccionar ciertas mercancías para inferir a partir de éstas el comportamiento global, parte del supuesto de que las diferentes economías están relacionadas entre sí, lo que significaría que si tenemos una economía con, digamos diez mercancías que tiene un equilibrio estable, seguirá teniendo un equilibrio estable si quitamos o aumentamos una mercancía.

Aquí cabe la pregunta de que si ese supuesto es válido, es decir, preguntarse si realmente están relacionadas entre sí las distintas economías de tal forma que no presentarán cambios en su estabilidad o por el contrario, presentarán comportamientos caóticos.

El teorema de Saari que citaremos a continuación responde a la pregunta anterior:

Teorema de Saari.
Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para un número de mercancías $n \geq 2$, la transformación

$$F_\varepsilon : \left[U \times R^n_+\right]^a \rightarrow \Pi_{j=1}^{2^n-(n+1)} \Xi_\varepsilon(C_j)$$

es suprayectiva si y sólo si $a \geq n$.
Ahora $\Xi_\varepsilon(C_j)$ es el conjunto de excesos de demanda de cada subconjunto C_j de sistemas de precios no nulos.

La idea de este teorema es analizar cómo es la dinámica de los precios considerando todas las distintas combinaciones de mercancías que pudieramos tener.

Etiquetemos los subconjuntos de 2 o más mercancías haciendo $2^n - (n+1)$ subconjuntos que denotaremos como $C_1, ..., C_{2^n-(n+1)}$ y denotaremos por $|C_j|$ la cardinalidad del conjunto j, es decir, el número de mercancías o elementos del subconjunto.

Por ejemplo, si tenemos tres mercancías a,b y c, los subconjuntos a considerar serán $C_1 = \{a, b\}$, $C_2 = \{a, c\}$, $C_3 = \{b, c\}$ y $C_4 = \{a, b, c\}$.

O por ejemplo si tenemos cuatro mercancías: a, b, c y d, los subconjuntos de dos o más mercancías serán $C_1 = \{a,b\}, \ldots, C_6 = \{c,d\}, C_7 = \{a,b,c\}, \ldots, C_{10} = \{a,c,d\}$ y $C_{11} = \{a,b,c,d\}$.

De igual forma que en el teorema anterior, la función agregada de exceso de demanda para cada conjunto de mercancías C_j, que denotaremos por $\Xi_\varepsilon(C_j)$ es el conjunto de todos los campos vectoriales tangentes y continuos en su simplejo de precios recortado correspondiente $S_{+,\varepsilon}^{|C_j|}$

Por ejemplo, para el conjunto de mercancías C_1, la función de exceso de demanda de todas las selecciones correspondientes a este conjunto de mercancías $\Xi_\varepsilon(C_1)$, está formada por todos los campos vectoriales que están asociados a su vez a los respectivos vectores de precios $C_1 \rightarrow \Xi_\varepsilon(C_1)$.

Con esto, estamos ubicando nuestro modelo en una dinámica donde se están considerando los diferentes sistemas de precios que pudieramos tener, así como también las diferentes economías al considerar todos los subconjuntos de mercancías posibles.

El considerar todas las posibles combinaciones nos genera un diagrama de árbol que comienza con una cantidad no numerable de elecciones de $\Xi(C_1)$, que emergen del nodo C_1, (no numerable porque representan todos los puntos del simplejo $S_{+,\varepsilon}^{|C_j|}$)

Nuevamente, este teorema nos garantiza la existencia de dotaciones iniciales y preferencias de los agentes consumidores tales que su función de exceso de demanda asociado sea el campo vectorial que seleccionemos de antemano para todo subconjunto de mercancías.

Consecuentemente basta seleccionar un campo vectorial tal que al eliminar ciertas ramas del árbol nos genere comportamientos caóticos, descartando así la posibilidad de emplear métodos estadísticos como una herramienta para inferir el comportamiento del mercado a través de la función agregada de exceso de demanda.

Concluyendo, el teorema SMD garantiza la existencia de preferencias y dotaciones iniciales que satisfagan el exceso de demanda que queramos, mientras que el teorema de Saari extiende la conclusión a todos los subconjuntos del total de mercancías.

Si bien es cierto que existe un sistema de precios para los cuales se garantice el equilibrio, es decir, para los cuales la función agregada de exceso de demanda se anule, estos teoremas nos garantizan que tal equilibrio no necesariamente puede ser alcanzado.

Una conclusión parcial al respecto es que resulta inadecuado utilizar la función agregada de exceso de demanda $\xi(p)$ como fundamental para definir las políticas económicas.

La explicación que da Saari sobre la complejidad de esta función, es que una función sencilla puede tener una imágen complicada si su dominio tiene una dimensión considerablemente más grande que su imagen.

Como la función de exceso de demanda se basa en procesos de agregación, esto nos lleva a tener una función, donde el dominio es demasiado grande pues está caracterizado por la amplia gama de las preferencias individuales que tengan los agentes económicos, pudiendo generar toda clase de comportamientos patológicos posibles.

Recientemente Saari escribió un artículo[12] en donde la argumentación de la complejidad que se presenta en las ciencias sociales, está basada en los procesos de agregación de las preferencias de los individuos. Parece ser que la forma de analizar estos fenómenos es mediante la llamada "Geometría del Voto"[13], la cual es un área relativamente nueva en donde se considera que las preferencias no son transitivas.

---

[12] Saari D. *The Ease of Generating Chaotic Behavior in Economics*. Por aparecer en Chaos, Solitons and Fractals.

[13] Saari D. *Geometry of Voting*. Springer Verlang. New York, 1994.

3.3 APÉNDICE

3.3.1 Algunos elementos para la demostración del Teorema SMD.

La versión original demostrada por Debreu[14] consta de un teorema y una proposición y son las siguientes:

Teorema:

Sea f una función de exceso de demanda.

Para toda $\varepsilon > 0$ existen l consumidores (aquí l representa también el número de mercancías) cuyas funciones de exceso de demanda individuales suman la función f en la esfera de precios recortados S_ε.

Proposición:

Existen funciones de exceso de demanda f y $\varepsilon > 0$, tal que f no puede ser expresada como una suma de menos de l funciones de exceso de demanda individuales en S_ε.

ALGUNOS ELEMENTOS DE LA DEMOSTRACIÓN.

Queremos caracterizar a la función exceso de demanda de una economía de intercambio de l ,mercancías.

Definimos como $S = \left\{\mathbf{p} \in R^l \mid \mathbf{p} > 0, \|\mathbf{p}\| = 1\right\}$ al conjunto de vectores-precio estríctamente positivos con norma euclidiana.

En términos de relaciones de preferencias, definimos a un **consumidor** como un par $(\succeq, e)$, donde $\succeq$ es la relación de preferencias que es estríctamente convexa, monótona, continua y es un preorden completo en R^l_+ y e es un vector de dotaciones iniciales en R^l_+

Definimos una **Función Individual de Exceso de Demanda** del consumidor $(\succeq, e)$ como la función $f : S \to R^l$, si para todo vector de precios $\mathbf{p} \in S$, el elemento $e + f(\mathbf{p})$ es el mayor elemento de la relación de preferencias $\succeq$ del conjunto factible $X = \left\{\mathbf{x} \in R^l_+ \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}\right\}$.

La función f es continua y además como hemos visto satisface la Ley de Walras, $\mathbf{p} \cdot f(\mathbf{p}) = 0$

Definimos una **Función de Exceso de Demanda** $f : S \to R^l$ continua, si para todo vector de precios $\mathrm{p} \in S$, se cumple que $\mathbf{p} \cdot f(\mathbf{p}) = 0$, es decir, si satisface la Ley de Walras.

[14] Debreu G. *Excess Demand Functions.* Journal of Mathematical Economics 1. 1974 pp. 15-21.

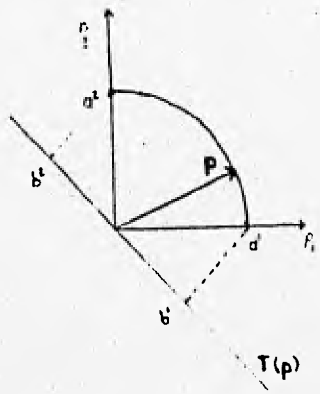
En gran parte la idea de la demostración se basa en ciertas construcciones geométricas que haremos. Sean:

$T(\mathbf{p})$ el hiperplano que pasa por el origen y es ortogonal al vector de precios $\mathbf{p}$.

a^i el vector unitario positivo con la i-ésima coordenada uno.

$b^i(\mathbf{p})$ la proyección ortogonal de a^i en el hiperplano $T(\mathbf{p})$

Si consideramos dos mercancías, la representación geométrica es la siguiente:



Definamos lo siguiente:

Sea $\theta^0(\mathbf{p})$ una función que va del espacio de precios a los reales $\theta^0(\mathbf{p}) : S \to R$, tal que a todo vector de precios $\mathbf{p}$ en la esfera S, la función le asigna el mínimo real t tal que el exceso de demanda más el vector de precios multiplicado por el valor real t sea positivo; es decir

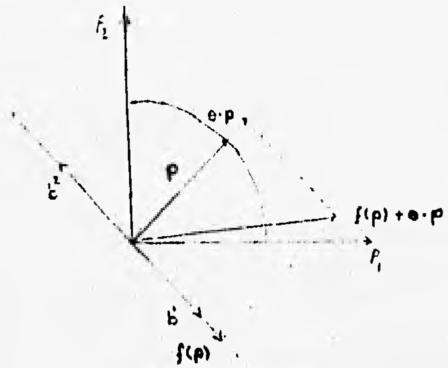
$$\theta^0(\mathbf{p}) = min\,\{t \in R \mid f(\mathbf{p}) + t\mathbf{p} \geq 0\}$$

Sea θ una función continua $\theta : S \to R$ tal que para todo vector de precios $\mathbf{p}$ en la esfera de precios S, se cumpla que $\theta(\mathbf{p}) > \theta^0(\mathbf{p})$

De aquí obtenemos que $f(\mathbf{p}) + \theta(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{l} \beta_i(\mathbf{p}) \cdot a^i$.

También podemos ver que $f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{l} \beta_i(\mathbf{p}) \cdot b^i(\mathbf{p})$, donde $\beta_i(\mathbf{p})$ es continua y positiva.

Gráficamente:



Definamos una función que va del espacio de precios a los reales $f^i : S \to R^l$ tal que $f^i(\mathbf{p}) = \beta_i b^i(\mathbf{p})$

Por la construcción geométrica que hemos hecho, el demostrar el teorema se **reduce a probar que la función $f^i(\mathbf{p})$ es una función individual de exceso de demanda en S_ϵ,** lo que se reduce a probar:

a) $f^i(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0$ lo cual se cumple sencillamente por la construcción que hemos hecho, ya que $f^i(p)$ está sobre el hiperplano $T(\mathbf{p})$ y este hiperplano lo escogimos ortogonal al vector de precios $\mathbf{p}$.

b) Probar que $e^i + f^i(\mathbf{p})$ es el mayor elemento del conjunto $\left\{\mathbf{x} \in R^l_+ \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i\right\}$, es decir, que las funciones individuales de exceso de demanda provienen de haber maximizado la función de utilidad.

c) $f^i(\mathbf{p})$ es continua.

Considerando solamente el i-ésimo consumidor, basta probar los incisos b) y c).

Esto nos llevará a haber construido un vector de dotaciones iniciales e^i y una relación de preferencias $\succeq^i$ para cada agente i, de tal forma que maximice su utilidad y de que su función individual de exceso de demanda sume la función agregada de exceso de demanda que demos de antemano.

3.3.2 Contrargumentos del teorema SMD.

A pesar de que el teorema SMD garantiza la existencia de economías que puedan presentar comportamientos caóticos, Saari[15] analiza la posibilidad de que existan contrargumentos de éstas implicaciones.

En este apéndice solo mencionaremos cuáles son los contrargumentos con la finalidad de ampliar el panorama sin pretender profundizar en ellos.

A) Solo funciones de utilidad patológicas admiten caos.

Una opción para descartar las implicaciones del teorema sería preguntarse si el caos proviene de preferencias patológicas o extrañas de tal forma que los economistas las rechazaren por ser poco realistas.

Para Saari, lo que se necesita para construir una dinámica compleja y caótica es que la función sea lo suficientemente expansiva para que la imágen bajo ella de una región específica cubra otras varias regiones.

El teorema SMD garantiza por medio de la suprayectividad que esa expansión se da, así que analiza si esto proviene de preferencias de los consumidores extrañas o patológicas.

A partir del análisis de la ecuación obtenida al maximizar por multiplicadores de Lagrange, resulta que la expansividad de las demandas corresponde a funciones de utilidad para las cuales sus conjuntos de nivel son casi planos, características que se presentan comúnmente en las funciones de utilidad que usan los economistas, por lo que este contrargumento no descarta las implicaciones del teorema SMD.

B) Ver si el sistema dinámico es muy sencillo.

Otra forma de descartar las implicaciones del teorema es preguntarse si la ecuación en diferencias $\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{p}_t + h\xi(\mathbf{p})$ o la ecuación diferencial $\mathbf{p}' = \xi(\mathbf{p})$ son muy sencillas como para explicar el comportamiento de la economía.

Si esto fuese así, entonces ¿cuál es lo forma más indicada para modelar la dinámica de los precios?

En su artículo Saari nos platica que existe un método MGN (Método Global de Newton) el cual es una extensión del teorema de punto fijo de Brower. Utilizando este método, llega a una forma en donde es posible hallar un cero de la función, es decir un equilibrio. Esto se lograría si se resuelve cierta ecuación diferencial, pero nuevamente hay problemas.

El utilizar este método (MGN) nos garantiza el encontrar un equilibrio, pero se puede descartar porque:

1) No podemos justificar que el mercado se comporte así, y

2) Requiere de muchísima informacion, ya que para su cálculo se necesita el jacobiano $D_p(\xi)$, lo cual implica conocer las variaciones de la demanda de cada mercancía con respecto al precio de todas las demás, por ejemplo cómo varía la demanda del acero con

[15] Saari D. *Mathematical Complexity of Simple Economics.* Notices of the AMS. 42, 2. 1995. pp. 222-230

respecto al precio de la goma de mascar, así que el MGN se convierte en un modelo impráctico.

CONCLUSIONES

Los temas tratados en esta tesis tan sólo son un esbozo de lo que significa la teoría del caos y como se presentan en algunos modelos económicos.

Nos hemos inclinado hacia la divulgación con la finalidad de presentar a los economistas las bases de lo que es el caos. Para ello partimos de un modelo muy elemental como lo es el modelo de crecimiento económico con funciones de producción Cobb-Douglas, el cual a pesar de su sencillez, presenta comportamientos caóticos.

Continuando con un enfoque de divulgación, abordamos unos resultados más sofisticados como son el teorema SMD y el teorema de Saari.

Dentro de la tesis se intentó dar una pequeña visión de los elementos que pudieran encaminar hacia la demostración del teorema SMD. Cabe mencionar que la demostración como tal requiere de herramientas matemáticas muy sofisticadas tales como topología y geometría diferencial. Dicho por el propio Dr. Saari[1], tan solo cinco o seis personas en el mundo comprenden completamente la demostración.

Finalmente, al ser la teoría del caos relativamente nueva, el campo en la investigación queda abierto hacia nuevas investigaciones, en este sentido, los economistas que trabajen de una forma más del tipo cualitativo que cuantitativo, habrán encontrado una nueva herramienta valiosísima para estudiar y comprender los fenómenos económicos quizá de una forma más cercana a la realidad.

[1]Plática que tuvimos en su visita a México en Enero del1996.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

LIBROS

Anderson, Arrow y Pines. *The Economy as an Envolving Complex System.* Addisson Wesley.1988.

Arrow y Hahn. *Análisis General Competitivo.* Fondo de Cultura Económica. 1977.

Devaney. *An Introduction To Chaotic Dynamical Systems.* Addison Wesley. 1989.

Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems.* Addison Wesley. 1992.

Sanderfur. *Discrete Dynamical Systems.* Clarendon Press. 1990.

Galera. *Modelos Económicos de Dinámica Compleja.* Ediciones Internac.Universitarias. 1992.

Mas Collel. *The Theory of General Economic Equilibrium . A differentiable approach.*1982.

Saari. *Geometry of Voting.* Springer Verlang. New York. 1994.

Sen Amartia. *Economía del Crecimiento.* Fondo de Cultura Económica. 1989. Cuarta parte: Solow R. *Un modelo de crecimiento.* pp. 151-182.

Varian. *Análisis Microeconómico.* Antoni Bosch Editor. 1982.

ARTÍCULOS

Day. *Irregular Growth Cycles.* The American Economic Rev. Junio 1982. pp. 406-414.

Debreu. *Excess Demand Functions.* Journal of Mathematical Economics 1. 1974. pp. 15-21.

Gómez G. *Caos, Billares y Nudos en el Nivel Medio Superior.* Mimiografeado en la Fac. de Ciencias. UNAM.

Li, T-Y. and Yorke J. *Period Three Implies Chaos.* American Mathematical Monthly. Dec. 1975. 82 pp. 985-992.

Mantel. *On the Characterization of Aggregate Excess Demand.* J. Econom. Theory 7. 1972. pp. 348-353.

Saari. *Mathematical Complexity of Simple Economics.* Notices of the AMS 42, 2. 1995. pp. 222-230.

Saari. *The Ease of Generating Chaotic Behavior in Economics.* Por aparecer en Chaos. Solitons and Fractals.

Samuelson. *Dynamic Process* Analysis. MIT Press, 1966 Vol.1 pp.612.

Scarf. *Some examples of Global Inestability of the Competitive Equilibrium.* Int. Econom. Rev. 1. 1960 pp. 157-172.

Sharkovskii A.N. *Coexistencia de ciclos de una transformación continua de la recta en sí misma.* Ukr. Mat. Zhur. Vol. 16, 1. pp. 61-71. 1964. (Existe traducción al castellano en la Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación. Vol. IV, 15. Enero 1988.)

Solow. *A Contribution to the theory of Economic Growth.* Quartely Journal of Economics. Vol. 70 1956. pp. 65-94.

Sonnenschein. *Market Excess Demand Functions.* Econometrica 40. 1972. pp. 649-663.