

30
269



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADOS COHERENTES GENERALIZADOS
DE SISTEMAS CUANTICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A :

ELIZABETH PADILLA RODAL



MEXICO, D. F.

1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: ESTADOS COHERENTES
GENERALIZADOS DE SISTEMAS CUANTICOS.

realizado por PADILLA RODAL ELIZABETH

con número de cuenta 8805791-5 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. OCTAVIO CASTAÑOS GARZA
Propietario	DR. ELPIDIO CHACON ESPONDA
Propietario	DR. ALEJANDRO FRANK HOEFLICH
Suplente	DR. SAHÉN HACYAN SALERYAN
Suplente	DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANTEVICH

Ostiaños
Echaco
Alejandro
Sahén
JHG

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORCA
Coordinador de Licenciatura

Ruelas

A mis padres

Quiero expresar mi mas profundo agradecimiento a todas aquellas personas que me ayudaron y apoyaron durante la elaboraci3n de esta tesis. En especial a mi asesor el Dr. Octavio Casta1os, que pacientemente trabajo conmigo durante todo este tiempo y a quien adem1s doy gracias por todas las facilidades que me ha brindado y la confianza que ha tenido en mi. A mis sinodales, por sus amables comentarios y sugerencias que me sirvieron para aclarar y enriquecer este trabajo. A la DGAPA por el apoyo econ3mico que me otorg3 a trav3s del proyecto IN-102094 y al Instituto de Ciencias Nucleares por permitirme el libre uso de sus instalaciones.

Indice

1	Introducción	1
2	Teorema de Noether	5
2.1	Introducción	5
2.2	Formulación Lagrangiana	6
2.3	Formulación Hamiltoniana	19
2.4	Teorema de Noether en teoría de campos	28
	Bibliografía	32
3	Estados Coherentes	33
3.1	Introducción	33
3.2	Cuantización del campo electromagnético	34
3.3	Oscilador armónico	39
3.4	Correlación y coherencia	45
3.5	Propiedades de los estados coherentes	50
	Bibliografía	51
4	Invariantes lineales dependientes del tiempo	52
4.1	Introducción	52
4.2	Constantes de movimiento	55
4.3	Estados coherentes generalizados	64
4.4	Operador de evolución	71
4.5	Funciones de Wigner y Husimi	79
	Bibliografía	90

5 Oscilador paramétrico	92
5.1 Introducción	92
5.2 Estados coherentes en sistemas estacionarios	98
5.3 Estados coherentes en sistemas no-estacionarios	103
Bibliografía	129
6 Conclusiones	131
Apéndice A	134
Apéndice B	140
Apéndice C	145

1

Introducción

El teorema de Emmy Noether ha tenido un papel sobresaliente en el desarrollo de muchas ramas de la física teórica, porque establece una conexión directa entre las leyes de conservación de una teoría física y los invariantes de las ecuaciones de movimiento. El teorema de Noether ha sido aplicado tanto en el campo de la física clásica como de la cuántica. En el primer caso se utiliza en Lagrangianos de sistemas de masas puntuales, o a densidades Lagrangianas de teorías de campo clásicas, tales como la teoría electromagnética. En el caso cuántico se ha aplicado a teorías de primera y segunda cuantización. En ambas se debe tener que la transformación de simetría deje invariante las relaciones de conmutación o anticonmutación. Es bien conocido que el teorema de Noether es una pieza clave en formulaciones Lagrangianas; sin embargo en este trabajo se muestra como se aplica para formulaciones Hamiltonianas y estudios de esta formulación a sistemas simples han sido realizados.

En este trabajo el teorema de Noether es utilizado para establecer una justificación variacional al formalismo de constantes de movimiento cuánticas que son lineales en las coordenadas de posición y de momento y que dependen explícitamente del tiempo. En este formalismo para sistemas cuadráticos multidimensionales, el concepto de estado coherente tiene gran relevancia. Este concepto en Mecánica Cuántica no es tan nuevo como podría pensarse, de hecho fue introducido por E. Schrödinger dentro del desarrollo de su teoría ondulatoria hacia 1926. Sin embargo, cobró relativa importancia hasta aproximadamente el año de 1960 cuando se presentaron evidencias concretas de su utilidad en la descripción de sistemas relacionados con la teoría de coherencia óptica y el campo electromagnético. La idea básica detrás de este concepto es el interés por comprender dentro del formalismo cuántico la transición desde un sistema en el cual los resultados de la aproximación clásica son suficientes, al caso en el que los efectos cuánticos predominan.

Desde 1960 cuando se inventó el laser aparecieron nuevos campos de investigación en la óptica cuántica. Entre los mayores logros se cuenta con el desarrollo de la teoría de coherencia cuántica, en la que se mostró la relevancia de los estados coherentes en problemas ópticos. La teoría cuántica de la luz se inició con los estudios de Planck sobre la radiación del cuerpo negro y Einstein del efecto fotoeléctrico a principios de siglo. Posteriormente se desarrolló la Electrodinámica Cuántica para describir la interacción entre fotones y electrones. Entre las predicciones más notables de esta teoría destaca que la emisión de luz de un átomo experimenta un corrimiento de la energía de resonancia del átomo (efecto Lamb).

Sin embargo, para muchos experimentos de óptica física el esquema clásico de la luz, como ondas viajeras de radiación electromagnética, es adecuado para describir las observaciones. Las primeras evidencias de la naturaleza cuántica de la luz se iniciaron con los experimentos sobre correlación de fotones. Estos experimentos involucran la interferencia entre fotones diferentes y están en el campo de la óptica no-lineal. En estos es posible obtener funciones de correlación de segundo orden menores que la unidad y a este efecto se le conoce con el nombre de antiacumulación de fotones ("photon antibunching"). Desde entonces se ha realizado mucho trabajo experimental y teórico sobre las propiedades estadísticas de la luz y su conexión con la medición del número de fotones. Esto ha permitido dividir los estudios en dos categorías, los que se refieren a un haz de luz y aquellos en los que participan dos haces diferentes. Otro ejemplo

de luz no-clásica es la detección de estados cuánticos del campo electromagnético que tienen menor incertidumbre en una cuadratura que la de un estado coherente. Estos estados comprimidos tienen varias aplicaciones como las siguientes: en el campo de las comunicaciones transmitiendo señales en la cuadratura del campo que tiene fluctuaciones cuánticas reducidas y para la detección de fuerzas muy débiles tales como la gravitacional.

En los estudios realizados hasta la fecha sobre el campo electromagnético, en muchos casos se encuentran efectos que no pueden ser descritos clásicamente, pero que pueden explicarse mediante la teoría cuántica de la luz.

Una de las propiedades que caracteriza a los estados coherentes ó estados semi-clásicos del oscilador armónico y la cual en realidad puede tomarse como definición es el hecho de que estos estados son los eigenestados del operador de aniquilación del sistema. Los sistemas cuadráticos tienen integrales de movimiento que son lineales en la posición y el momento. Por lo tanto se puede construir invariantes que tienen las mismas relaciones de conmutación que los operadores de creación y aniquilación y entonces construir los eigenestados del operador de aniquilación de tal manera que sean solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del sistema que se está estudiando. Por lo antes mencionado a estos eigenestados se les llama estados coherentes generalizados, aunque no tienen las propiedades de coherencia óptica de los estados introducidos por Schrödinger en 1926.

Este trabajo tiene por objetivo presentar un procedimiento para construir y estudiar las propiedades de los estados coherentes generalizados en la descripción de sistemas cuadráticos no estacionarios. En particular se estudia exhaustivamente el oscilador paramétrico en una dimensión para varias dependencias temporales del parámetro de la frecuencia, encontrándose que sus eigenestados describen estados no-clásicos de la luz que presentan los fenómenos de compresión, correlación y funciones de distribución del número de fotones no-clásicas. Al mismo tiempo se construyen funciones cuasiprobabilísticas de Wigner y Husimi que son de utilidad para determinar el comportamiento de sistemas físicos. Se destaca en esta contribución que el estudio del oscilador paramétrico tiene relevancia para describir el comportamiento de iones en trampas de Paul.

2

Teorema de Noether

2.1 Introducción

El interés por encontrar las leyes de conservación de un sistema físico, radica en que cada cantidad conservada restringe el movimiento del sistema y por tanto puede utilizarse para reducir en uno el número de grados de libertad del mismo, facilitando así la resolución del problema considerado [1].

Este capítulo tiene como objetivo revisar un resultado que actualmente es una de las principales herramientas en el estudio de las leyes de conservación de sistemas físico. Dicho resultado se conoce como teorema de Noether y la razón por la que se desea introducirlo aquí, es que constituye una pieza central para comprender desde un formalismo variacional la teoría de invariantes lineales dependientes del tiempo que se estudiará posteriormente [2].

1

Introducción

El teorema de Emmy Noether ha tenido un papel sobresaliente en el desarrollo de muchas ramas de la física teórica, porque establece una conexión directa entre las leyes de conservación de una teoría física y los invariantes de las ecuaciones de movimiento. El teorema de Noether ha sido aplicado tanto en el campo de la física clásica como de la cuántica. En el primer caso se utiliza en Lagrangianos de sistemas de masas puntuales, o a densidades Lagrangianas de teorías de campo clásicas, tales como la teoría electromagnética. En el caso cuántico se ha aplicado a teorías de primera y segunda cuantización. En ambas se debe tener que la transformación de simetría deje invariante las relaciones de conmutación o anticonmutación. Es bien conocido que el teorema de Noether es una pieza clave en formulaciones Lagrangianas; sin embargo en este trabajo se muestra como se aplica para formulaciones Hamiltonianas y estudios de esta formulación a sistemas simples han sido realizados.

En este trabajo el teorema de Noether es utilizado para establecer una justificación variacional al formalismo de constantes de movimiento cuánticas que son lineales en las coordenadas de posición y de momento y que dependen explícitamente del tiempo. En este formalismo para sistemas cuadráticos multidimensionales, el concepto de estado coherente tiene gran relevancia. Este concepto en Mecánica Cuántica no es tan nuevo como podría pensarse, de hecho fue introducido por E. Schrödinger dentro del desarrollo de su teoría ondulatoria hacia 1926. Sin embargo, cobró relativa importancia hasta aproximadamente el año de 1960 cuando se presentaron evidencias concretas de su utilidad en la descripción de sistemas relacionados con la teoría de coherencia óptica y el campo electromagnético. La idea básica detrás de este concepto es el interés por comprender dentro del formalismo cuántico la transición desde un sistema en el cual los resultados de la aproximación clásica son suficientes, al caso en el que los efectos cuánticos predominan.

Desde 1960 cuando se inventó el laser aparecieron nuevos campos de investigación en la óptica cuántica. Entre los mayores logros se cuenta con el desarrollo de la teoría de coherencia cuántica, en la que se mostró la relevancia de los estados coherentes en problemas ópticos. La teoría cuántica de la luz se inició con los estudios de Planck sobre la radiación del cuerpo negro y Einstein del efecto fotoeléctrico a principios de siglo. Posteriormente se desarrolló la Electrodinámica Cuántica para describir la interacción entre fotones y electrones. Entre las predicciones más notables de ésta teoría destaca que la emisión de luz de un átomo experimenta un corrimiento de la energía de resonancia del átomo (efecto Lamb).

Sin embargo, para muchos experimentos de óptica física el esquema clásico de la luz, como ondas viajeras de radiación electromagnética, es adecuado para describir las observaciones. Las primeras evidencias de la naturaleza cuántica de la luz se iniciaron con los experimentos sobre correlación de fotones. Estos experimentos involucran la interferencia entre fotones diferentes y están en el campo de la óptica no-lineal. En estos es posible obtener funciones de correlación de segundo orden menores que la unidad y a este efecto se le conoce con el nombre de antiacumulación de fotones ("photon antibunching"). Desde entonces se ha realizado mucho trabajo experimental y teórico sobre las propiedades estadísticas de la luz y su conexión con la medición del número de fotones. Esto ha permitido dividir los estudios en dos categorías, los que se refieren a un haz de luz y aquellos en los que participan dos haces diferentes. Otro ejemplo

de luz no-clásica es la detección de estados cuánticos del campo electromagnético que tienen menor incertidumbre en una cuadratura que la de un estado coherente. Estos estados comprimidos tienen varias aplicaciones como las siguientes: en el campo de las comunicaciones transmitiendo señales en la cuadratura del campo que tiene fluctuaciones cuánticas reducidas y para la detección de fuerzas muy débiles tales como la gravitacional.

En los estudios realizados hasta la fecha sobre el campo electromagnético, en muchos casos se encuentran efectos que no pueden ser descritos clásicamente, pero que pueden explicarse mediante la teoría cuántica de la luz.

Una de las propiedades que caracteriza a los estados coherentes ó estados semi-clásicos del oscilador armónico y la cual en realidad puede tomarse como definición es el hecho de que estos estados son los eigenestados del operador de aniquilación del sistema. Los sistemas cuadráticos tienen integrales de movimiento que son lineales en la posición y el momento. Por lo tanto se puede construir invariantes que tienen las mismas relaciones de conmutación que los operadores de creación y aniquilación y entonces construir los eigenestados del operador de aniquilación de tal manera que sean solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del sistema que se está estudiando. Por lo antes mencionado a estos eigenestados se les llama estados coherentes generalizados, aunque no tienen las propiedades de coherencia óptica de los estados introducidos por Schrödinger en 1926.

Este trabajo tiene por objetivo presentar un procedimiento para construir y estudiar las propiedades de los estados coherentes generalizados en la descripción de sistemas cuadráticos no estacionarios. En particular se estudia exhaustivamente el oscilador paramétrico en una dimensión para varias dependencias temporales del parámetro de la frecuencia, encontrándose que sus eigenestados describen estados no-clásicos de la luz que presentan los fenómenos de compresión, correlación y funciones de distribución del número de fotones no-clásicas. Al mismo tiempo se construyen funciones cuasiprobabilísticas de Wigner y Husimi que son de utilidad para determinar el comportamiento de sistemas físicos. Se destaca en esta contribución que el estudio del oscilador paramétrico tiene relevancia para describir el comportamiento de iones en trampas de Paul.

El Capítulo 2 del presente trabajo ha sido dedicado a presentar una revisión del teorema de Noether en sus formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana, y a destacar su utilidad en la obtención de constantes de movimiento para sistemas físicos concretos. En el Capítulo 3 se discute el concepto de estados coherentes desde el punto de vista de la Mecánica Cuántica así como de su aplicación en la descripción de los estados del campo electromagnético, resaltando sus propiedades de coherencia óptica. Los estados coherentes del campo electromagnético no tienen un número definido de fotones, por lo que se discuten sus propiedades estadísticas como son: las dispersiones de las amplitudes de los campos, las correlaciones y la función de distribución de número de fotones. Además se indica que son estados que minimizan las relaciones de incertidumbre de Heisenberg.

En el Capítulo 4 se establece el procedimiento para encontrar los invariantes lineales dependientes del tiempo para el caso general de sistemas cuadráticos unidimensionales. Se construyen los estados coherentes generalizados para cualquier sistema cuadrático unidimensional en términos de las soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento. Se analizan sus propiedades estadísticas, se calculan las correspondientes funciones cuasiprobabilísticas de Wigner y Husimi y se muestra que los estados coherentes generalizados minimizan la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson. En el Capítulo 5 se presentan aplicaciones del formalismo desarrollado para estudiar el oscilador paramétrico para varias dependencias temporales del parámetro de la frecuencia. Finalmente, en las conclusiones se presenta un resumen de las principales contribuciones de este trabajo.

2

Teorema de Noether

2.1 Introducción

El interés por encontrar las leyes de conservación de un sistema físico, radica en que cada cantidad conservada restringe el movimiento del sistema y por tanto puede utilizarse para reducir en uno el número de grados de libertad del mismo, facilitando así la resolución del problema considerado [1].

Este capítulo tiene como objetivo revisar un resultado que actualmente es una de las principales herramientas en el estudio de las leyes de conservación de sistemas físico. Dicho resultado se conoce como teorema de Noether y la razón por la que se desea introducirlo aquí, es que constituye una pieza central para comprender desde un formalismo variacional la teoría de invariantes lineales dependientes del tiempo que se estudiará posteriormente [2].

El resultado al que se ha hecho referencia, fue dado a conocer por Emmy Noether en el año 1918, lo cual históricamente lo sitúa inmediatamente después de que Einstein completara la teoría de la relatividad y Hilbert derivara las ecuaciones de la teoría de campos a partir de un principio variacional [3]. La motivación inicial de este teorema fue dar a conocer una demostración, en términos de la teoría de grupos, de la ley de conservación de la energía para la teoría general de la relatividad que parecía no ser válida, de acuerdo a los estudios que Hilbert había realizado al respecto. Cabe mencionar sin embargo, que los resultados presentados por Emmy Noether no se limitan a iluminar solo esta cuestión, sino que poseen la suficiente generalidad como para aclarar y enriquecer el entendimiento de muchas leyes de conservación de importancia en la física.

Noether demostró que para toda transformación infinitesimal de simetría de un sistema Lagrangiano, se puede encontrar una ley de conservación. Por ejemplo, la conservación del momento angular está relacionada a la invariancia rotacional. Tales transformaciones dejan las ecuaciones de Euler-Lagrange invariantes y pueden ser dependientes de \dot{q}_k , \ddot{q}_k , y derivadas de orden mayor. Es por este motivo que el teorema de Noether considera transformaciones más generales que las correspondientes al método de Lie.

2.2 Formulación Lagrangiana

Cuando se estudia un sistema, resulta útil en ocasiones realizar alguna transformación en las variables que lo describen inicialmente, de forma que simplifiquen la resolución del problema en el que se está interesado. Por lo general, casi cualquier transformación que se llegue a considerar, está asociada a una alteración en la forma funcional de las ecuaciones que describen al sistema. Sin embargo, en algunas ocasiones puede llegar a encontrarse transformaciones que presenten la propiedad de dejar invariante la forma de dichas ecuaciones, en el sentido de que las ecuaciones de Euler para el Lagrangiano original y el transformado sean las mismas. Este tipo peculiar de transformaciones suelen designarse con el nombre de transformaciones de simetría que dejan invariante el Lagrangiano y ocupan un lugar de singular importancia dentro de la Mecánica, ya que poseen la característica de transformar una solución arbitraria de las ecuaciones de movimiento, a otra solución del mismo sistema.

En particular, este tipo de transformaciones resultan importantes para propósitos del presente trabajo, porque cuando las ecuaciones de movimiento son derivables de un principio variacional (como es el caso de las ecuaciones generales de la Mecánica) el teorema de Noether reduce la búsqueda de leyes de conservación al estudio sistemático de simetrías y viceversa.

Con el fin de tener una idea de este resultado, la presente sección será dedicada a revisar los aspectos fundamentales asociados a la formulación Lagrangiana del teorema de Noether en Mecánica Clásica.

Considerese un sistema físico descrito por un Lagrangiano $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ que es función del tiempo t , de las coordenadas generalizadas q_k y de sus velocidades \dot{q}_k . Conocida la forma analítica de L se sabe por el principio de Hamilton, que las cantidades $q_k(t)$ que determinan la configuración del sistema al tiempo t , están dadas por aquellas funciones $q_k(t)$ para las cuales la integral de acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt, \quad (2.2.1)$$

alcanza un valor estacionario. Aplicando los métodos del cálculo de variaciones se tiene que las $q_k(t)$ y con ello el estado del sistema se encuentra determinado por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$E_k^{(1)} L \equiv \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.2.2)$$

En donde se supone que el Lagrangiano es no singular, i.e.,

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} \right\| \neq 0,$$

lo que permite despejar las aceleraciones en las ecuaciones (2.2.2) y escribirlas en la forma:

$$\ddot{q}_k = f_k(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Un aspecto que es importante destacar es que la elección del Lagrangiano como aquella función que conduce a un conjunto dado de ecuaciones de movimiento no es única. Se puede por ejemplo multiplicar L por una cantidad distinta de cero, que

no dependa ni de las variables independientes, ni de las coordenadas generalizadas (*transformación de escala*), o bien considerar una transformación

$$L' = L + \frac{d\Omega(q_k, t)}{dt}, \quad (2.2.3)$$

que lleve a L en $L + \frac{d\Omega}{dt}$ (donde Ω se supone una función clase C^2 dependiente del tiempo y de las coordenadas generalizadas, pero no de las derivadas de estas últimas), y seguir obteniendo las mismas ecuaciones de movimiento [4]. A las transformaciones de este tipo se les llama *transformaciones de simetría de Noether*, y son una consecuencia del teorema siguiente [1]:

Teorema 1.

Una función $F(q_k, \dot{q}_k, t)$ cumple las ecuaciones (2.2.2) si, y solo si, F puede expresarse como la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo (no de las velocidades), es decir

$$F(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{d\Omega(q_k, t)}{dt}.$$

La demostración de este teorema se presenta en el Apéndice A. de este trabajo.

Dado que la información sobre el comportamiento del sistema físico está concentrada en las ecuaciones de Euler-Lagrange, uno podría esperar obtener las leyes de conservación del estudio directo de dichas ecuaciones. Sin embargo, Emmy Noether mostró que con tal propósito es más fructífero estudiar las transformaciones que dejan invariante la integral de acción S [5]. En este trabajo se prestará especial atención a la parte del estudio de Noether relacionada con la construcción de las constantes de movimiento, análisis que para la Mecánica Clásica se reduce a lo siguiente.

Considerese primeramente el caso de transformaciones infinitesimales ¹ puntuales, esto es aquellas que mapean un punto del espacio compuesto por el espacio de configuraciones del sistema y el eje del tiempo, en otro punto del mismo espacio. Supongase

¹ Las transformaciones más importantes en el estudio de los teoremas de conservación son aquellas que se obtienen de la iteración de transformaciones infinitesimales, en el desarrollo siguiente únicamente se estudiarán este tipo de transformaciones.

entonces que existe un mapeo continuo

$$\delta t = t' - t = \epsilon \tau(t), \quad (2.2.4a)$$

$$\bar{\delta} q_k(t) = q'_k(t') - q_k(t) = \epsilon \eta_k(q, t), \quad (2.2.4b)$$

en donde $\tau(t), \eta_k(q, t)$ denotan funciones arbitrarias, y ϵ representa un parámetro infinitesimal positivo.

Utilizando estas expresiones y despreciando términos cuadráticos en las variaciones, se encuentra como se transforman las velocidades,

$$\begin{aligned} \dot{q}'_k(t') &= \frac{dq'_k}{dt'} = \frac{dq'_k}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ &= \left(\dot{q}_k + \frac{d\bar{\delta} q_k}{dt} \right) \left(1 - \frac{d\delta t}{dt} \right) \\ &= \dot{q}_k + \frac{d\bar{\delta} q_k}{dt} - \frac{d\delta t}{dt} \dot{q}_k, \end{aligned} \quad (2.2.5a)$$

de donde

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \dot{q}_k &\equiv \dot{q}'_k(t') - \dot{q}_k(t) \\ &= \frac{d\bar{\delta} q_k}{dt} - \frac{d\delta t}{dt} \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (2.2.5b)$$

Es importante señalar que el intercambio de la variación δ con la derivación no es equivalente, debido a que se están considerando variaciones en el tiempo.

Para que las transformaciones (2.2.4) sean transformaciones de simetría, de acuerdo a Noether, debe cumplirse que

$$\delta S = 0,$$

esto es, la variación que inducen dichas transformación sobre la integral de la acción es cero,

$$\int_{t'_1}^{t'_2} L'(q'_k, \dot{q}'_k, t') dt' = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt.$$

Efectuando el cambio de variable de t' a t , en la expresión anterior, se consigue

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[L'(q'_k, \dot{q}'_k, t') \frac{dt'}{dt} - L(q_k, \dot{q}_k, t) \right] dt = 0. \quad (2.2.6)$$

Observese, que la expresión (2.2.6) se satisface si el término entre paréntesis vale cero. Sin embargo, utilizando el Teorema 1 se tiene que este resultado también es cierto si dicho término puede escribirse como la derivada total con respecto al tiempo de una función $\delta\tilde{\Omega}(q_k, t) = \epsilon\Omega(q_k, t)$ es decir

$$\begin{aligned}\delta L &= L'(q'_k, \dot{q}'_k, t') \frac{dt'}{dt} - L(q_k, \dot{q}_k, t) \\ &= \epsilon \frac{d\Omega(q_k, t)}{dt},\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

lo cual corresponde a que la variación inducida en la acción sea $\delta S = \epsilon(\Omega(2) - \Omega(1))$. Por lo tanto las transformaciones (2.2.4) son de simetría si dejan el Lagrangiano invariante o difieren del original por una derivada total con respecto al tiempo de una función $\Omega(q_k, t)$.

Desarrollando L' en serie de Taylor

$$\begin{aligned}L'(q'_k, \dot{q}'_k, t') &= L(q_k + \epsilon\eta_k, \dot{q}_k + \epsilon(\dot{\eta}_k - \dot{\tau}\dot{q}_k), t + \epsilon\tau) \\ &= L(q_k, \dot{q}_k, t) + \epsilon\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \epsilon(\dot{\eta}_k - \dot{\tau}\dot{q}_k) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \epsilon\tau \frac{\partial L}{\partial t},\end{aligned}$$

y substituyendo en (2.2.7) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\tilde{\Omega}}{dt} &= \left(1 + \epsilon \frac{d\tau}{dt}\right) L' - L \\ &= L + \epsilon\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \epsilon(\dot{\eta}_k - \dot{\tau}\dot{q}_k) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \epsilon\tau \frac{\partial L}{\partial t} + \epsilon L\dot{\tau} - L \\ &= \epsilon \left[\dot{\tau} \left(L - \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \tau \frac{\partial L}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right].\end{aligned}\quad (2.2.8)$$

Entonces, en forma explícita la condición sobre $\tau(t)$ y $\eta(q_k, t)$ para que (2.2.4) sean transformaciones de simetría es

$$\dot{\tau} \left[L - \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] + \tau \frac{\partial L}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d\Omega(q_k, t)}{dt}.\quad (2.2.9)$$

Para encontrar las constantes de movimiento asociadas a dichas transformaciones de simetría, se hace notar que

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{d}{dt} \left(\eta_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \eta_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right), \\ \dot{q}_k \dot{\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{d}{dt} \left(\tau \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \tau \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \tau \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right), \\ L\dot{\tau} &= \frac{d}{dt} (\tau L) - \tau \dot{L}.\end{aligned}$$

Substituyendo estas expresiones en (2.2.9) y simplificando

$$\frac{d}{dt} \left[\tau \left(L - \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \eta_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \Omega \right] + (\eta_k - \tau \dot{q}_k) \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] = 0, \quad (2.2.10)$$

donde, como L satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2.2), la igualdad anterior se reduce a

$$\frac{d}{dt} \left[\tau \left(L - \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \eta_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \Omega \right] = 0. \quad (2.2.11)$$

Se define entonces

$$K \equiv \left[\tau \left(L - \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \eta_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \Omega \right], \quad (2.2.12)$$

que es la cantidad conservada durante el movimiento.

Es importante señalar que la expresión (2.2.9) ha sido denotada en la literatura [1] por la relación

$$\hat{U} L + L \dot{\tau} = \frac{d\Omega(q_k, t)}{dt}, \quad (2.2.13)$$

donde \hat{U} esta definido por

$$\hat{U} = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial}{\partial q_k} + (\dot{q}_k - \dot{\tau} q_k) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}, \quad (2.2.14)$$

y tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \hat{U} t &= \tau = \delta t, \\ \hat{U} q_k &= \eta_k = \delta q_k, \\ \hat{U} \dot{q}_k &= \dot{q}_k - \dot{\tau} q_k = \delta \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Adoptando esta notación se puede entonces enunciar el teorema de Noether para transformaciones puntuales infinitesimales en la forma siguiente:

Teorema 2. (*Versión pasiva del teorema de Noether*)

Considere un sistema físico descrito por el Lagrangiano $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ con $k = 1, \dots, n$; las variaciones: $\delta t = \epsilon \tau(t)$ y $\delta q_k = \epsilon \eta_k(q_j, t)$, con $\tau(t)$ y $\eta_k(q_j, t)$ funciones arbitrarias, constituyen una transformación de simetría si

$$\dot{L} + \hat{U}L = \frac{d\Omega(q_k, t)}{dt}.$$

En tal caso, la correspondiente constante de movimiento del sistema estará dada por

$$K \equiv \left[\tau \left(L - \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \eta_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \Omega \right].$$

Es interesante mencionar la reformulación de este teorema en lo que se conoce como su versión activa.

Teorema 3. (*Versión activa del teorema de Noether*)

Considere un sistema físico descrito por el Lagrangiano $L(q_k, \dot{q}_k, t)$, donde $k = 1, \dots, n$. Las variaciones $\delta q_k = \epsilon \eta_k(q_j, t) - \epsilon \tau(t) \dot{q}_k$, con $\eta_k(q_j, t)$ y $\tau(t)$ funciones arbitrarias, son transformaciones de simetría que dejan invariante el Lagrangiano si la variación inducida sobre dicha función puede escribirse como la derivada total con respecto al tiempo de una función $\delta\tilde{\Omega}(q_k, \dot{q}_k, t)$, es decir

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\delta \dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial q_k} (\delta q_k) = \frac{d\delta\tilde{\Omega}(q_k, \dot{q}_k, t)}{dt}.$$

Entonces la constante de movimiento del sistema está dada por

$$\delta K = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta \dot{q}_k - \delta\tilde{\Omega}.$$

La demostración de este teorema es directa, tomando la derivada con respecto al tiempo de δK y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La equivalencia entre estas dos formulaciones se basa en la reformulación del teo-

rema de Noether presentada por Boyer en 1967 [6], donde se reconoce que la aparente generalidad de las transformaciones consideradas por E. Noether, quien propone variaciones para las variables independientes y para las dependientes dadas por funciones arbitrarias que dependen de las derivadas de las variables dependientes hasta n -ésimo orden, es más bien superflua, en el sentido de que el mismo resultado puede obtenerse considerando una transformación de forma mucho más sencilla. En nuestro caso tal demostración se reduce a reconocer lo siguiente ².

Considerese las transformaciones puntuales infinitesimales de la versión pasiva

$$\delta t = \epsilon \tau(t), \quad \bar{\delta} q_k = \epsilon \eta_k(q_j, t). \quad (2.2.4a, b)$$

Para examinar cómo es transformada una función arbitraria $q_k = f_k(t)$ bajo la acción de estos mapeos, se reemplaza q_k por $f_k(t)$ en las expresiones explícitas (2.2.4a, b), es decir

$$t' = t + \epsilon \tau(t), \quad (2.2.15a)$$

$$q'_k(t') = f_k(t) + \epsilon \eta_k(f_j(t), t). \quad (2.2.15b)$$

Para obtener ahora $f'_k(t')$, esto es la imagen de la función $f_k(t)$, es necesario encontrar la dependencia que presenta q'_k de t' . Despejando t de (2.2.15a) a orden ϵ se obtiene

$$t = t' - \epsilon \tau(t'), \quad (2.2.16)$$

y substituyendo (2.2.16) en (2.2.15b)

$$f'_k(t') = f_k(t') - \epsilon \tau(t') \dot{f}_k(t') + \epsilon \eta_k(f_j(t'), t'). \quad (2.2.17)$$

Reemplazando finalmente t' por t en (2.2.17) se tiene que la imagen de $f_k(t)$ está dada por

$$f'_k(t) = f_k(t) - \epsilon \tau(t) \dot{f}_k(t) + \epsilon \eta_k(f_j(t), t), \quad (2.2.18)$$

que es la misma imagen que se obtendría bajo la transformación

$$\delta t = t' - t = 0, \quad (2.2.19a)$$

$$\begin{aligned} \delta q_k &= q'_k(t) - q_k(t) \\ &= -\epsilon \tau(t) \dot{q}_k + \epsilon \eta_k(q_j, t). \end{aligned} \quad (2.2.19b)$$

² Consultar [1] para un tratamiento más general

Por este motivo en la versión activa del teorema de Noether se consideran variaciones dependientes de las velocidades, esto es transformaciones no-puntuales. En resumen, si se quiere tener una transformación infinitesimal que no modifique la parte temporal pero que represente la misma transformación de simetría que (2.2.4), debe tener la forma (2.2.19).

Observe además, que el considerar variaciones dependientes de las velocidades implica que $\delta\tilde{\Omega}$ sea función de las velocidades, lo cual permite introducir nuevos Lagrangianos que dependan en forma implícita de las aceleraciones.

Una formulación análoga a la presentada en el Teorema 2, puede darse para la versión activa del teorema de Noether. Para ello, basta escribir explícitamente la variación que las transformaciones en las variables (2.2.19) inducen en el Lagrangiano, de lo cual se obtiene

$$\hat{U}_a = (\eta_k - \tau \dot{q}_k) \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} (\eta_k - \tau \dot{q}_k) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}.$$

Es inmediato mostrar que al actuar \hat{U}_a sobre las variables t , q_k , y \dot{q}_k se obtienen en efecto, las variaciones propuestas (2.2.19).

Considerese a continuación la versión activa del teorema de Noether y transformaciones no-puntuales

$$\delta q_k = q'_k(t) - q_k(t) = \epsilon \eta_k(q_j, \dot{q}_j, t). \quad (2.2.20)$$

Nuevamente se obtienen los cambios en las velocidades

$$\dot{q}'_k(t) = \frac{dq'_k}{dt} = \dot{q}_k + \epsilon \dot{\eta}_k(q_j, \dot{q}_j, t), \quad (2.2.21)$$

observando que en este caso la variación y la derivación conmutan, es decir $\delta \dot{q}_k = \frac{d\delta q_k}{dt}$.

El nuevo Lagrangiano quedará determinado por

$$\begin{aligned} L'(q'_k, \dot{q}'_k, t) &= L(q_k + \epsilon \eta_k, \dot{q}_k + \epsilon \dot{\eta}_k, t) \\ &= L(q_k, \dot{q}_k, t) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \epsilon \eta_k + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \epsilon \dot{\eta}_k, \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

donde se utilizaron las expresiones (2.2.20) y (2.2.21), y su desarrollo en serie de Taylor. Finalmente, es conveniente notar que el nuevo Lagrangiano (2.2.22) es una función de las aceleraciones. Por lo tanto sus ecuaciones de movimiento son:

$$E_k^{(2)} L' = \frac{\partial L'}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L'}{\partial \ddot{q}_k} = 0, \quad (2.2.23)$$

y la generalización del Teorema 1. mencionado anteriormente es inmediata

Teorema 4.

Una función $F(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, t)$ cumple con las ecuaciones (2.2.23) si, y solo si, F puede expresarse como la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas, velocidades y el tiempo, es decir

$$F(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, t) = \frac{d\tilde{\Omega}(q_k, \dot{q}_k, t)}{dt}.$$

La demostración de este hecho, se da en el Apéndice A de este trabajo.

En consecuencia, las transformaciones infinitesimales (2.2.20) son de simetría si la correspondiente variación inducida en el Lagrangiano puede escribirse como la derivada total con respecto al tiempo de una función $\delta\tilde{\Omega} = \delta\tilde{\Omega}(q_k, \dot{q}_k, t)$, esto es

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{d}{dt} \delta\tilde{\Omega}(q_k, \dot{q}_k, t), \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\delta \dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k, \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

con la constante de movimiento del sistema determinada por

$$\delta K = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k - \delta\tilde{\Omega}(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (2.2.25)$$

En este caso se cumple que

$$L' = L + \frac{d}{dt} \Omega(q_k, \dot{q}_k, t), \quad (2.2.26a)$$

y por lo tanto

$$E_k^{(2)} L' = E_k^{(2)} L = E_k^{(1)} L = 0. \quad (2.2.26b)$$

Ejemplos

1. Conservación de la energía.

Considere el caso general de un sistema físico de una partícula de masa m que esta descrito por un Lagrangiano de la forma [7]

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}_k^2 - V(q_k),$$

donde se supone que la energía potencial es una función arbitraria que depende unicamente de las coordenadas generalizadas de la partícula.

En el estudio clásico de este tipo de Lagrangianos, suele enfatizarse la conexión que existe entre la conservación de la energía y la invariancia del Lagrangiano ante traslaciones temporales [7]. Supongase entonces que las funciones arbitrarias que determinan las transformaciones en las variables se toman como traslaciones temporales; utilizando la versión activa del teorema de Noether se observa sin embargo que tales transformaciones resultan ser equivalentes a proponer $\delta q_k = \epsilon \dot{q}_k$. Escribiendo la forma explicita de la variación sobre el Lagrangiano que induce esta transformación infinitesimal, se tiene que

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\delta \dot{q}_k) \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} \dot{q}_k \epsilon + m \dot{q}_k \ddot{q}_k \epsilon.\end{aligned}$$

Pero, de acuerdo a lo discutido anteriormente, la transformación propuesta será de simetría si $\delta L = \epsilon \frac{d\Omega(q_j, \dot{q}_j)}{dt}$, esto es

$$-\frac{\partial V}{\partial q_k} \dot{q}_k + m \dot{q}_k \ddot{q}_k = \frac{\partial \Omega}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k.$$

Igualando los coeficientes de las velocidades \dot{q}_k y aceleraciones \ddot{q}_k se determina el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k.$$

De la primera ecuación de este sistema se tiene $\Omega(q_j, \dot{q}_j) = -V(q_j) + f(\dot{q}_j)$; substituyendo dicho resultado en la segunda relación se concluye que $f(\dot{q}_k) = \frac{1}{2}m\dot{q}_k^2$. Por lo tanto

$$\Omega(q_k, \dot{q}_k) = \frac{1}{2}m\dot{q}_k^2 - V(q_k).$$

Regresando finalmente al teorema de Noether (en su versión activa), se tiene que la constante de movimiento asociada a la variación propuesta es

$$\begin{aligned}\delta K &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\delta q_k) - \delta \Omega \\ &= \epsilon \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_k^2 + V(q_k) \right) \equiv \epsilon H ,\end{aligned}$$

donde H denota la energía total y define la función Hamiltoniana del sistema. Aun cuando esta forma de presentar la conservación de la energía para este tipo de sistemas resulta indiscutiblemente más elaborada que los métodos de coordenadas ignorables ó de la integral de Jacobi que se estudian en Mecánica Clásica, la forma presentada anteriormente tiene la ventaja de poder generalizarse en forma directa a sistemas de partículas con Lagrangianos de la forma $L = T - V(q_j)$, donde $q_{j,s} = |q_j - q_s|$ e inclusive a sistemas con potenciales generalizados o dependientes de las velocidades, como el de una partícula cargada en un campo electromagnético.

2. Conservación del momento lineal.

Considere ahora un sistema de N partículas con masas m_s , con $s = 1, \dots, N$, que se mueven en el espacio tridimensional. Si las fuerzas de interacción entre dichas partículas son derivables de una función potencial V que depende unicamente de la distancia entre ellas, el Lagrangiano del sistema tendrá la forma

$$L(q_s, \dot{q}_s, t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \dot{q}_s^2 - \frac{1}{2} \sum_{s,t=1}^N V(|q_s - q_t|) ,$$

donde q_s denota el vector posición en coordenadas cartesianas de la s -ésima partícula con respecto a un origen de coordenadas dado. Propongase

$$\delta q_s = b ,$$

siendo b un vector infinitesimal constante y arbitrario . La variación que induce sobre el Lagrangiano esta transformación esta dada por

$$\begin{aligned}\delta L &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{sk}} (\delta \dot{q}_{sk}) + \frac{\partial L}{\partial q_{sk}} (\delta q_{sk}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} b_{sk} \sum_{s',t'=1}^N \frac{\partial V(|q_{s'} - q_{t'}|)}{\partial q_{sk}} .\end{aligned}$$

Definiendo $q_{s't} = |q_s - q_t|$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(q_{s't})}{\partial q_{s,k}} &= \frac{\partial V}{\partial q_{s't}} \left(\frac{q_{s't,k}}{q_{s't}} \right) (\delta_{s't} - \delta_{t's}) \\ &= -(F_{s't})_k (\delta_{s't} - \delta_{t's}).\end{aligned}$$

Substituyendo esta relación en la variación del Lagrangiano

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{1}{2} b_k \sum_{s,s',t=1}^N (F_{s't})_k (\delta_{s't} - \delta_{t's}) \\ &= b_k \sum_{s,s'=1}^N (F_{ss'})_k \\ &= 0,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó la ley de acción y reacción. Por lo tanto

$$0 = \delta L = \epsilon \frac{d\Omega(q_s, \dot{q}_s, t)}{dt},$$

lo cual implica, por simplicidad, $\Omega(q_k, \dot{q}_k, t) = 0$. Entonces por el teorema de Noether, la integral de movimiento del sistema estará dada por

$$\begin{aligned}\delta K &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{s,k}} \right) \delta q_{s,k} - \delta \Omega \\ &= \sum_{s=1}^N b \cdot (m \dot{q}_s) = b \cdot P,\end{aligned}$$

es decir la componente del momento total del sistema en la dirección del vector infinitesimal b es constante, pero dada la arbitrariedad de b se concluye que el momento lineal total del sistema P se conserva.

3. Conservación del momento angular.

Considerese el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central, es decir

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q_i),$$

donde q_i con $i = 1, 2, 3$, denotan las coordenadas generalizadas de la partícula. Propongase las transformaciones

$$\delta q_i = \epsilon_{ijk} b_j q_k,$$

donde b , es un vector infinitesimal constante, arbitrario y

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la permutación de los índices es par,} \\ -1 & \text{si la permutación de los índices es impar,} \\ 0 & \text{si se repite algún índice.} \end{cases}$$

La variación correspondiente del Lagrangiano es

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\delta \dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial q_i} (\delta q_i) \\ &= -m \dot{q}_i (\epsilon_{ijk} b_j \dot{q}_k) - \frac{\partial V}{\partial q_i} (\epsilon_{ijk} b_j q_k) \\ &= \epsilon_{jki} b_j q_k \frac{\partial V}{\partial q_i} = b_j (q \times F)_j = 0 = \epsilon \frac{d\Omega(q_i, \dot{q}_i, t)}{dt} \end{aligned}$$

lo cual implica que $\Omega(q_i, \dot{q}_i, t) = ctv \equiv 0$. Por el teorema de Noether se sabe que la integral de movimiento del sistema es

$$\begin{aligned} \delta K &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i - \delta \Omega \\ &= m \dot{q}_i (-\epsilon_{ijk} b_j q_k) \\ &= b_j (q \times p)_j = b_j L_j \end{aligned}$$

por lo que dada la arbitrariedad de b se concluye que cada una de las componentes del momento angular orbital del sistema se conserva.

2.3 Formulación Hamiltoniana

Al enunciar sus resultados bajo un formalismo Lagrangiano, puede decirse en cierto modo que Emmy Noether colocó la formulación Lagrangiana en una posición de primacía. Se sabe sin embargo, que el uso de este formalismo no es conveniente en todos los casos, en el sentido de que existen problemas que toman una forma más compacta ó que pueden interpretarse con mayor claridad si se trabaja en el espacio fase (q_k, p_k) , donde q_k denota a las coordenadas generalizadas del sistema y p_k los correspondientes momentos canónicamente conjugados y son variables independientes.

Es por ello que se desea dedicar la siguiente sección a presentar los resultados análogos a los obtenidos en la sección anterior pero ahora bajo el formalismo canónico.

Con tal fin, es necesario recordar esencialmente la definición del Hamiltoniano de un sistema que se hace en Mecánica Clásica, partiendo de la formulación Lagrangiana, utilizando la transformación de Legendre [8]

$$H(q_i, p_i, t) = p_k \dot{q}_k - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (2.3.1a)$$

las ecuaciones de movimiento estarán dadas entonces por

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.3.1b, c, d)$$

Siguiendo la discusión presentada en párrafos anteriores acerca de la equivalencia entre la versión pasiva y activa del teorema de Noether, en la formulación de los resultados de esta sección, nos bastará considerar únicamente el caso en el que las ecuaciones de transformaciones correspondan a transformaciones puntuales infinitesimales que no involucren explícitamente variaciones en el tiempo (2.2.20), sin que ello represente alguna limitación

$$\delta q_k = q'_k(t) - q_k(t), \quad (2.3.2a)$$

$$\delta p_k = p'_k(t) - p_k(t), \quad (2.3.2b)$$

$$\delta t = 0. \quad (2.3.2c)$$

Utilizando (2.3.1a), se puede escribir la integral de acción S como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} J(q_k, \dot{q}_k, p_k, t) dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} [p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t)] dt.$$

Si se considera las transformaciones (2.3.2), por el Teorema 4 de la sección anterior se tiene que dichas transformaciones son de simetría si $\delta J = \frac{d\delta\Omega_H}{dt} dt$, donde se define $\delta\Omega_H = \epsilon\Omega_H(q_k, p_k, t)$ y en tal caso, la constante de movimiento asociada a la transformación de simetría está dada por

$$\delta K = p_k \delta q_k - \delta\Omega_H. \quad (2.3.3)$$

Dado que

$$(\delta q_k)' = \frac{\partial(\delta q_k)}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial(\delta q_k)}{\partial p_l} \dot{p}_l + \frac{\partial(\delta q_k)}{\partial t}, \quad (2.3.4)$$

efectuando el desarrollo en serie de Taylor de J se obtiene la correspondiente variación en J

$$\begin{aligned} \delta J &= J(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k + (\delta \dot{q}_k), p_k + \delta p_k, t) - J(q_k, \dot{q}_k, p_k, t) \\ &= \left[\frac{\partial(\delta q_k)}{\partial q_l} p_k + \delta p_l \right] \dot{q}_l + \left[\frac{\partial(\delta q_k)}{\partial p_l} p_k \right] \dot{p}_l + \left[-\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \frac{\partial(\delta q_k)}{\partial t} p_k \right] \\ &= \frac{d\delta\Omega}{dt}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

donde por simplicidad se eliminará de aquí en adelante el subíndice H en la función Ω .

Substituyendo la expresión

$$\frac{d\delta\Omega}{dt} = \frac{\partial\delta\Omega}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial\delta\Omega}{\partial p_l} \dot{p}_l + \frac{\partial\delta\Omega}{\partial t},$$

en la ecuación (2.3.5) e igualando los coeficientes de \dot{p}_l y \dot{q}_l , se tiene el sistema de ecuaciones

$$p_k \frac{\partial(\delta q_k)}{\partial p_l} = \frac{\partial\delta\Omega}{\partial p_l}, \quad (2.3.6a)$$

$$p_k \frac{\partial(\delta q_k)}{\partial q_l} + \delta p_l = \frac{\partial\delta\Omega}{\partial q_l}, \quad (2.3.6b)$$

$$-\delta q_k \frac{\partial H}{\partial q_k} - \delta p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial(\delta q_k)}{\partial t} p_k = \frac{\partial\delta\Omega}{\partial t}. \quad (2.3.6c)$$

Es conveniente recordar además, que para garantizar la existencia de $\delta\Omega$ es necesario exigir que Ω satisfaga ciertas condiciones de integrabilidad, las cuales se puede agrupar en

- i) Aquellas que dan lugar a ecuaciones de las variaciones que son independientes de la forma específica del Hamiltoniano, i.e.

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_k \partial q_l} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial q_l \partial q_k}, \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial p_k \partial p_l} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial p_l \partial p_k}, \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial q_l \partial p_k} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial p_k \partial q_l}. \quad (2.3.7a, b, c)$$

- ii) Las condiciones de integrabilidad que dan lugar a ecuaciones de las variaciones dependientes del Hamiltoniano considerado

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial p_l \partial t} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial t \partial p_l}, \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial q_l \partial t} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial t \partial q_l}. \quad (2.3.8a, b)$$

Las ecuaciones (2.3.6), (2.3.7) y (2.3.8) pueden combinarse de forma que expresen (en analogía con (2.2.10) de la sección anterior) las condiciones que deben satisfacer las transformaciones para que sean de simetría. Tal expresión se consigue escribiendo la expresión (2.3.6a) para las componentes i y j , y derivando con respecto a p_j y p_i , respectivamente; exigiendo que se cumpla (2.3.7a) se obtiene

$$\frac{\partial(\delta q_i)}{\partial p_j} = \frac{\partial(\delta q_j)}{\partial p_i} \quad (2.3.9a)$$

En forma similar utilizando las expresiones (2.3.6a,b) y efectuando las derivaciones necesarias para construir las igualdades (2.3.7b,c) resultan las ecuaciones siguientes

$$\frac{\partial(\delta q_i)}{\partial q_j} = -\frac{\partial(\delta p_j)}{\partial p_i} \quad (2.3.10a)$$

$$\frac{\partial(\delta p_i)}{\partial q_k} = \frac{\partial(\delta p_k)}{\partial q_i} \quad (2.3.10b)$$

Procediendo de la misma forma, pero combinando ahora las parejas de ecuaciones ((2.3.6a), (2.3.6c)) y ((2.3.6b), (2.3.6c)) junto con los resultados (2.3.10) se encuentra las expresiones

$$\left[\hat{O} + \frac{\partial}{\partial t} \right] (\delta q_i) - (\delta q_k) \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k} - (\delta p_k) \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} = 0, \quad (2.3.11a)$$

$$\left[\hat{O} + \frac{\partial}{\partial t} \right] (\delta p_i) + (\delta q_k) \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k} + (\delta p_k) \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k} = 0, \quad (2.3.11b)$$

donde el operador \hat{O} se define como

$$\hat{O} \equiv -\{H, \} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (2.3.12)$$

Con estos resultados se puede enunciar el teorema de Noether en el formalismo Hamiltoniano como sigue

Teorema 5. (Teorema de Noether en el formalismo Hamiltoniano)

Considerese un sistema físico descrito por el Hamiltoniano $H(q_k, p_k, t)$ donde $k = 1, \dots, n$; las variaciones δq_k y δp_k son transformaciones de simetría del sistema si cumplen con las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \left[\hat{O} + \frac{\partial}{\partial t} \right] (\delta q_l) - (\delta q_k) \frac{\partial^2 H}{\partial p_l \partial q_k} - (\delta p_k) \frac{\partial^2 H}{\partial p_l \partial p_k} = 0, \\ \left[\hat{O} + \frac{\partial}{\partial t} \right] (\delta p_l) + (\delta q_k) \frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial q_k} + (\delta p_k) \frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial p_k} = 0, \end{cases}$$

donde

$$\hat{O} \equiv -\{H, \cdot\} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Entonces asociada a esta transformación de simetría existe la cantidad conservada

$$\delta K = p_k \delta q_k - \delta \Omega,$$

donde $\delta \Omega$ esta definida por el conjunto de ecuaciones (2.3.6).

Una observación final respecto a la formulación del teorema de Noether bajo este formalismo es la siguiente. Dado que las transformaciones de simetría que se han manejado hasta el momento corresponden a aquellas que en la formulación Lagrangiana tienen la propiedad de dejar invariante la acción, es posible establecer una correspondencia unívoca entre las cantidades conservadas y las transformaciones de simetría [6][9] en la forma siguiente: Si $K(q_i, p_j, t)$ es una función tal que de acuerdo al teorema anterior es una constante de movimiento, entonces el teorema inverso de Noether [10] establece que, dicha función genera una transformación de simetría, la cual está definida por las relaciones

$$\delta q_i = \epsilon \{q_i, K\} = \epsilon \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = \epsilon \{p_i, K\} = -\epsilon \frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad (2.3.13a, b)$$

donde $\{ \cdot, \cdot \}$ denota al paréntesis de Poisson de las cantidades indicadas. Substituyendo estas variaciones en (2.3.10) se encuentran las condiciones necesarias para garantizar la existencia de la función K a la cual se le da el nombre de función generadora de la transformación de simetría. Es necesario notar que la expresión (2.3.13) satisface, como debe de ser, la relación (2.3.11).

Ejemplos

1. Oscilador Armónico.

Considerese una partícula de masa $m = 1$, bajo una interacción armónica de frecuencia $\omega = 1$ en un espacio de tres dimensiones; entonces el Hamiltoniano del sistema esta dado por

$$H = \frac{1}{2} (p_k^2 + q_k^2) \quad k = 1, 2, 3.$$

Propongase las variaciones lineales en las coordenadas y momentos

$$\delta q_k = f_{kl} p_l + g_{kl} q_l + h_k,$$

$$\delta p_k = \bar{f}_{kl} p_l + \bar{g}_{kl} q_l + \bar{h}_k,$$

donde $f_{kl}, g_{kl}, h_k, \bar{f}_{kl}, \bar{g}_{kl}, \bar{h}_k$, son matrices y vectores formados con parámetros constantes infinitesimales. Substituyendo las expresiones anteriores en (2.3.10), se obtienen las condiciones necesarias para que estas transformaciones sean de simetría y dichas condiciones quedan dadas por : i) $f_{ij} = f_{ji}$, ii) $g_{ij} = -\bar{f}_{ji}$, y iii) $\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ji}$. Esto significa que las matrices f y \bar{g} deben ser simétricas y que las matrices \bar{f} y g^l no son independientes sino que $\bar{f} = -g^l$. Utilizando estos resultados en las variaciones y substituyendolas en (2.3.11) se tiene las condiciones

$$\begin{aligned} f_{kl} p_l + g_{kl}^* q_l + h_k &= p_l g_{kl} - q_l f_{kl}^* \\ -f_{kl}^* p_l - g_{kl} q_l - h_k &= p_l \bar{g}_{kl}^* - q_l \bar{f}_{kl} \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de p_l, q_l en las relaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} h_k &= 0, & \bar{h}_k &= 0, \\ -f_{kl}^* &= g_{kl}^*, & g_{kl} &= \bar{f}_{kl}. \end{aligned}$$

En resumen, las variaciones en las coordenadas y momentos propuestas inicialmente son transformaciones de simetría si son de la forma

$$\begin{aligned} \delta q_k &= f_{kl}^* p_l + g_{kl}^* q_l, \\ \delta p_k &= g_{kl}^* p_l - f_{kl}^* q_l. \end{aligned}$$

Observese que el número de parámetros independientes que aparecen en la expresión anterior es nueve, por lo tanto se espera encontrar nueve constantes de movimiento.

Para verificar esta afirmación, se utilizan las ecuaciones (2.3.6). Específicamente, de la ecuación (2.3.6a) se tiene que

$$\frac{\partial \delta \Omega}{\partial p_k} = p_j f_{jk}^*$$

cuya solución es

$$\delta \Omega(q, p, t) = \frac{1}{2} f_{jl}^* p_j p_l + \delta \Omega_1(q).$$

Para determinar $\delta \Omega_1(q)$ se substituye el resultado anterior en (2.3.6b)

$$\frac{\partial \delta \Omega_1}{\partial q_k} = g_{kl}^a p_l - f_{kl}^* q_l + p_l g_{lk}^a,$$

y usando las propiedades de la matriz g^a se obtiene

$$\delta \Omega_1(q) = -\frac{1}{2} f_{jl}^* q_j q_l.$$

Con lo que se muestra finalmente que la Ω así obtenida es consistente con (2.3.6c) y esta determinada por la relación

$$\delta \Omega(q, p, t) = \frac{1}{2} f_{jl}^* p_j p_l - \frac{1}{2} f_{jl}^* q_j q_l.$$

Substituyendo entonces en (2.3.3) se encuentra que las integrales de movimiento del sistema están dadas por

$$Q_{kl} = \frac{1}{2} (p_k p_l + q_k q_l),$$

$$L_{kl} = \frac{1}{2} (q_l p_k - p_l q_k).$$

De estas expresiones se observa que los Q_{kl} son simétricos ante el intercambio de los índices k y l , por lo que en realidad se tiene seis constantes de movimiento independientes. Por su parte, las L_{kl} son únicamente tres cantidades conservadas independientes. Físicamente las constantes Q_{kl} representan las componentes cartesianas de los tensores cuadrupolar y monopolar, mientras que las L_{kl} están asociadas a las componentes del momento angular de la partícula. Es importante señalar finalmente, que estas nueve constantes de movimiento satisfacen bajo la operación de paréntesis de Poisson las propiedades de una álgebra $\mathfrak{u}(3)$ [11].

2. Potencial de Coulomb

Considere un sistema descrito por el Hamiltoniano clásico de Kepler en coordenadas relativas

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{\kappa}{r},$$

donde μ es la masa reducida y κ es una constante positiva (por ejemplo para el átomo de hidrógeno se tiene $\kappa = Ze^2$).

A diferencia del ejemplo anterior, en este caso se tiene interés en ilustrar el teorema inverso de Noether, de forma que haciendo uso del conocimiento previo de las cantidades conservadas que caracterizan a este sistema, se describirá el procedimiento mediante el cual se determina la forma de las variaciones a las cuales dan lugar dichas cantidades conservadas [12]. Del estudio clásico del problema [8] se sabe que las cantidades conservadas son el momento angular L y el vector de Runge-Lenz A . Dado que en la sección anterior se observó que el momento angular está asociado a rotaciones infinitesimales, el interés central de este ejemplo será estudiar el vector de Runge-Lenz. Considere entonces la cantidad conservada $\delta K = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}$; utilizando el teorema inverso de Noether se tiene que las variaciones en las coordenadas y momentos asociadas a esta constante de movimiento, están dadas por

$$\begin{aligned} \delta q_i &= \left\{ q_i, a_j \left[\frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{L})_j}{\mu} - \frac{\kappa}{r} q_j \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\mu} [2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})p_i - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})q_i - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})a_i], \\ \delta p_i &= \left\{ p_i, a_j \left[\frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{L})_j}{\mu} - \frac{\kappa}{r} q_j \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\mu} [(a \cdot \mathbf{p})p_i - p^2 a_i] + \frac{\kappa}{r} a_i - \frac{\kappa}{r^3} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})q_i. \end{aligned}$$

Substituyendo directamente estas expresiones puede mostrarse que satisfacen idénticamente las ecuaciones (2.3.9) y (2.3.10). Luego, para determinar $\Omega(q, p, t)$ se utilizan las ecuaciones (2.3.6a)

$$\frac{\partial \delta \Omega}{\partial p_m} = \frac{1}{\mu} (2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})p_m - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})a_m - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})q_m),$$

cuya solución está dada por

$$\delta \Omega = \frac{1}{\mu} [(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})p^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})] + \delta \Omega_1(q).$$

Por (2.3.6b) se tiene que

$$\frac{\partial \delta \Omega_1}{\partial q_m} = \frac{\kappa}{r} a_m - \frac{\kappa}{r^3} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q}) q_m,$$

lo cual puede resolverse nuevamente y obtener

$$\delta \Omega_1 = \frac{\kappa(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})}{r}.$$

Entonces se tiene que la función $\delta \Omega$ esta dada por,

$$\delta \Omega = \frac{1}{\mu} [(q \cdot a)p^2 - (q \cdot p)(a \cdot p)] + \frac{\kappa(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})}{r}.$$

Usando finalmente esta expresión y la relación (2.3.3) puede verificarse que en efecto las constantes de movimiento estan dadas por

$$\delta K = \frac{1}{\mu} [(q \cdot a)p^2 - (p \cdot q)(p \cdot a)] - \frac{\kappa(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})}{r}.$$

Utilizando

$$\epsilon_{kij} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl},$$

pueden expresarse como

$$\begin{aligned} p^2(q \cdot a) - (q \cdot p)(a \cdot p) &= a_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) p_j q_l p_m \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene por supuesto que la constante de movimiento es

$$\delta K = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}.$$

Es conveniente recordar que si se tiene que la órbita del problema clásico de Kepler es una elipse, físicamente el vector de Runge-Lenz caracteriza la orientación del eje mayor en el plano de la órbita. Es importante señalar además, que el momento angular y el vector de Runge-Lenz bajo la operación de los paréntesis de Poisson tienen la estructura de una álgebra ortogonal en cuatro dimensiones $\mathfrak{o}(4)$ para energías negativas y una álgebra $\mathfrak{o}(3,1)$ si la energía es positiva [11].

2.4 Teorema de Noether en teoría de campos

Hasta aquí, se ha establecido el teorema de Noether para sistemas clásicos de partículas con un número finito de grados de libertad. Sin embargo, la formulación inicial de este teorema y por tanto muchas de sus aplicaciones importantes están relacionadas con sistemas continuos y la teoría de campos. Los resultados obtenidos para sistemas discretos no difieren mucho de los correspondientes para sistemas continuos, razón por la cual a continuación se presentará la formulación del teorema de Noether para este tipo de sistemas.

Para tratar sistemas continuos, resulta necesario extender las ecuaciones fundamentales asociadas a la Mecánica de partículas y el método más directo para ello consiste en aproximar al sistema continuo por un sistema discreto formado por un gran número de partículas y examinar las ecuaciones de movimiento cuando dicho número tiende a infinito y el tamaño de las partículas tiende a cero (límite continuo). Siguiendo esta idea [8], se encuentra que para el caso de un sistema unidimensional de n partículas, descrito por

$$L = \sum_{i=1}^n L_i(q, \dot{q}, t)$$

el Lagrangiano

$$L = \int \mathcal{L}(x, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}) dx$$

describe al sistema en el límite continuo, donde el integrando \mathcal{L} recibe el nombre de densidad Lagrangiana del sistema. Es importante destacar en esta última expresión, que el papel que desempeña x es simplemente el de un índice continuo, en sustitución al índice discreto i . Correspondientemente, dado que asociada a cada valor de i se tenía una coordenada distinta q_i del sistema, para cada valor de x estará asociada una coordenada generalizada ψ , la cual se denotará con mayor precisión como $\psi(x)$.

En secciones anteriores se mostró que cuando las ecuaciones son derivables de un principio variacional el teorema de Noether proporciona un procedimiento sistemático para establecer leyes de conservación. Para un sistema continuo con m coordenadas generalizadas ó funciones de estado, como suelen designarse bajo el formalismo de la teoría de campos, definidas por $\psi^r(x^\mu, t)$, $r = 1, \dots, m$, donde las posiciones en el

espacio están determinadas por x^μ , $\mu = 0, 1, 2, y 3$, la integral variacional del sistema está dada por

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\psi^r, \psi_\mu^r, x^\mu) d^4x \quad (2.4.1)$$

donde se supone que la densidad Lagrangiana depende solo de las primeras derivadas de las funciones de estado, esto es

$$\psi_\mu^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial x^\mu}.$$

Ver [1], [5] para un tratamiento más general.

Considérese un sistema físico descrito por la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\psi^r, \psi_\mu^r, x^\mu)$, entonces la transformación infinitesimal

$$x^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x^\nu, \psi^s, \psi_\nu^s), \quad (2.4.2a)$$

$$\bar{\psi}^r(\bar{x}^\nu) = \psi^r(x^\nu) + \epsilon \eta^r(x^\nu, \psi^s, \psi_\nu^s), \quad (2.4.2b)$$

es una transformación de simetría siempre y cuando se cumpla que

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathcal{L}(\bar{\psi}^r(\bar{x}^\nu), \bar{\psi}_\mu^r(\bar{x}^\nu), \bar{x}^\nu) d^4\bar{x} = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\psi^r(x^\nu), \psi_\mu^r(x^\nu), x^\nu) d^4x,$$

donde Ω representa una región arbitraria y $\bar{\Omega}$ es su imagen bajo el mapeo anterior. Efectuando el cambio de variables de $\bar{x}^\nu \rightarrow x^\mu$ en el lado izquierdo de la ecuación anterior se tiene

$$0 = \int_{\Omega} \{ \mathcal{L}(\psi^r(x^\nu), \psi_\mu^r(x^\nu), x^\nu) - \mathcal{L}(\bar{\psi}^r(\bar{x}^\nu), \bar{\psi}_\mu^r(\bar{x}^\nu), \bar{x}^\nu) \det |D_\mu \bar{x}^\nu| \} d^4x, \quad (2.4.3a)$$

donde $\det |D_\mu \bar{x}^\nu|$ es el Jacobiano de la transformación

$$\det |D_\mu \bar{x}^\nu| = \begin{vmatrix} D_0 \bar{x}^0 & D_0 \bar{x}^1 & D_0 \bar{x}^2 & D_0 \bar{x}^3 \\ D_1 \bar{x}^0 & D_1 \bar{x}^1 & D_1 \bar{x}^2 & D_1 \bar{x}^3 \\ D_2 \bar{x}^0 & D_2 \bar{x}^1 & D_2 \bar{x}^2 & D_2 \bar{x}^3 \\ D_3 \bar{x}^0 & D_3 \bar{x}^1 & D_3 \bar{x}^2 & D_3 \bar{x}^3 \end{vmatrix}, \quad (2.4.3b)$$

y el operador D_μ denota la derivada total con respecto a x^μ , esto es

$$D_\mu F(x^\nu, \psi^s, \psi_\nu^s) = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F}{\partial \psi^r} \psi_\mu^r + \frac{\partial F}{\partial \psi_\nu^r} \left(\frac{\partial \psi_\nu^r}{\partial x^\mu} \right). \quad (2.4.3c)$$

Como el dominio de integración es arbitrario, la transformación infinitesimal (2.4.2) induce en la densidad Lagrangiana la variación

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r} \delta\psi^r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_\mu} \delta\psi^r_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \epsilon \mathcal{L} D_\mu \xi^\mu, \quad (2.4.4)$$

donde se utilizó que $\det |D_\mu \bar{x}^\nu| = 1 + \epsilon D_\mu \xi^\mu$. En analogía con el caso de Mecánica Clásica, utilizando las ecuaciones (2.4.2) se tiene las variaciones

$$\delta x^\mu \equiv \bar{x}^\mu - x^\mu = \epsilon \xi^\mu, \quad (2.4.5a)$$

$$\delta\psi^r \equiv \bar{\psi}^r(\bar{x}^\nu) - \psi^r(x^\nu) = \epsilon \eta^r. \quad (2.4.5b)$$

Para obtener la variación de ψ^r_μ se deriva la Ec. (2.4.2b) con respecto a x^μ , encontrándose

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^r_\mu(\bar{x}^\nu) &\equiv \frac{\partial\bar{\psi}^r}{\partial\bar{x}^\mu} = \frac{\partial\psi^r}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} + \epsilon D_\mu \eta^r, \\ &= \psi^r_\mu(x^\nu) - \epsilon (D_\mu \xi^{\nu'}) \psi^r_{\nu'} + \epsilon D_\mu \eta^r, \end{aligned}$$

donde se utilizó que $\frac{\partial\bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu - \epsilon D_\mu \xi^\nu$. De esta expresión es directo obtener

$$\delta\psi^r_\mu \equiv \bar{\psi}^r_\mu(\bar{x}^\nu) - \psi^r_\mu(x^\nu) = -\epsilon (D_\mu \xi^{\nu'}) \psi^r_{\nu'} + \epsilon D_\mu \eta^r. \quad (2.4.5c)$$

Substituyendo las expresiones (2.4.5) en (2.4.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \epsilon \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r} \eta^r + \left[D_\mu \eta^r - (D_\mu \xi^{\nu'}) \psi^r_{\nu'} \right] \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^r_\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \xi^\mu + \mathcal{L} D_\mu \xi^\mu \right\} \\ &= \epsilon D_\mu \Omega^\mu(\psi^r, x^\nu), \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

donde en la última igualdad se utilizó que dos densidades Lagrangianas que difieren por una divergencia tienen las mismas ecuaciones de movimiento [1]. La expresión (2.4.6) con el lado derecho igual a cero es el resultado original de Noether y la ley de conservación se puede escribir cuando se encuentran funciones ξ y η que la satisfacen. Actualmente se sabe que no es necesario que (2.4.6) sea idénticamente cero para que la conclusión de Noether sea válida, pues es suficiente que dicha expresión sea igual a la divergencia de una función, $\Omega^\mu(\psi^r, x^\nu)$.

Procediendo en forma similar que en secciones anteriores, se substituyen las expresiones

$$\eta^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} = \eta^r (E_r \mathcal{L}) + \eta^r D_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} \right), \quad (2.4.7a)$$

$$(D_\rho \eta^r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} = D_\mu \left(\eta^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} \right) - \eta^r \left(D_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} \right), \quad (2.4.7b)$$

$$\begin{aligned} (D_\mu \xi^\nu) \psi_\nu^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} &= D_\mu \left(\xi^\nu \psi_\nu^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} \right) \\ &- \xi^\nu (D_\mu \psi_\nu^r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} - \xi^\nu \psi_\nu^r \left(D_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} \right), \end{aligned} \quad (2.4.7c)$$

$$\mathcal{L} (D_\mu \xi^\mu) = D_\mu (\mathcal{L} \xi^\mu) - (D_\mu \mathcal{L}) \xi^\mu, \quad (2.4.7d)$$

en (2.4.6), y se obtiene el resultado

$$\begin{aligned} \eta^r (E_r \mathcal{L}) + D_\mu \left\{ (\eta^r - \xi^\nu \psi_\nu^r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} + \mathcal{L} \xi^\mu \right\} \\ - \xi^\mu \left\{ D_\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - (D_\nu \psi_\nu^r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} - \psi_\mu^r \left(D_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\nu^r} \right) \right\} = D_\mu \Omega^\mu. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Utilizando la definición (2.4.3c),

$$D_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\nu^r} \psi_\nu^r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\nu^r} \frac{\partial \psi_\nu^r}{\partial x^\mu}$$

y la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\nu^r} \psi_\nu^r = \psi_\nu^r (E_r \mathcal{L}) + \psi_\nu^r \left(D_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\nu^r} \right),$$

la ecuación (2.4.8) puede simplificarse como sigue

$$(\eta^r - \xi^\nu \psi_\nu^r) (E_r \mathcal{L}) + D_\mu \left\{ (\eta^r - \xi^\nu \psi_\nu^r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} + \mathcal{L} \xi^\mu \right\} = D_\mu \Omega^\mu.$$

Entonces, para cualquier solución de las ecuaciones de Euler $E_r \mathcal{L} = 0$ se tiene la ley de conservación

$$D_\mu \left\{ (\eta^r - \xi^\nu \psi_\nu^r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu^r} + \mathcal{L} \xi^\mu - \Omega^\mu \right\} = 0. \quad (2.4.9)$$

Es importante resaltar finalmente que para utilizar esta ley de conservación es necesario encontrar las transformaciones infinitesimales (2.4.2) que cumplan con la relación (2.4.6).

Bibliografía

- [1] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations* (Springer Verlag, New York, 1989).
- [2] V. V. Dodonov and V. I. Manko, *Invariants and the evolution of nonstationary quantum systems*, Ed. M. A. Markov , Proceedings of the Lebedev Physics Institute, Vol.183,(Nova Science, Commack, New York, 1989).
- [3] N. Byers, *The Life and Times of Emmy Noether*, to be published in the Proceedings of the International Conference: The History of Original ideas and basic discoveries in Particle Physics, (1994).
- [4] E. L. Hill, *Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics*, Rev. of Mod. Phys. (1951), 23, núm 3, pág. 253 .
- [5] M. A. Tavel, *Noether's theorem*, Trans. Theo. and Stat. Phys. (1971), 1 , núm 3, pág.183.
- [6] T. H. Boyer, *Continuous Symmetries and Conserved Currents*, Ann. of Phys. (1967), 42, núm 1, pág. 445.
- [7] O. Castañón and R. López Peña, *Noether's theorem and accidental degeneracy* , J. Phys. A : Math. Gen. (1992), 25 , pág. 6685.
- [8] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, New York, 1980).
- [9] D. E. Neuenschwander and S. R. Starkey, *Adiabatic invariance derived from the Rund-Trautman identity and Noether's theorem*, Amer. J. of Phys. (1993), 61, núm. 11, pág.1008.
- [10] T. H. Boyer, *Derivation of Conserved Quantities from Symmetries of the Lagrangian in Field Theory* , Am. J. of Phys. (1967), 34, núm. 6, pág. 475.
- [11] R. Gilmore, *Lie groups. Lie algebras, and some of their applications* (J. Wiley & Sons, Inc., New York 1974
- [12] E. Candotti, C. Palmieri, B. Vitale . *On the inversion of Noether's theorem in classical dynamical systems* Amer. J. Phys. (1972), 40 , núm. 3, pág. 424.

3

Estados coherentes

3.1 Introducción

El interés por encontrar dentro del formalismo de la mecánica cuántica estados que describieran el movimiento clásico de una partícula en un potencial, fue lo que condujo a E. Schrödinger a introducir por primera vez, en el año de 1926 [1], lo que ahora conocemos como estados coherentes para un sistema de oscilador armónico. Sin embargo, la introducción de éste concepto no despertó interés hasta que en 1963 R. J. Glauber [2] hizo notar que tales estados proporcionan una adecuada descripción del campo electromagnético.

El estudio de las características cuánticas de la luz requiere la cuantización del campo electromagnético. En este capítulo se cuantiza el campo electromagnético y se introducen dos conjuntos de estados base: los estados de Fock o del operador de

número y los estados coherentes. También se introducen las funciones de correlación del campo electromagnético y se describe como se utilizan éstas para definir la coherencia óptica. Finalmente se estudian las características principales de estos estados, como son las cuadraturas de las componentes del campo y la función de distribución de fotones.

Los estados coherentes están asociados a una estructura de grupos de Weyl con un número de dimensiones igual al número de operadores de aniquilación. Después de los trabajos de Glauber y Sudarshan sobre los estados coherentes se han construido nuevos estados "coherentes" asociados a otras estructuras de grupos como son los grupos de Lie, los supergrupos y los grupos cuánticos. Estos estados también han tenido un papel destacado en el desarrollo de la física teórica.

3.2 Cuantización del campo electromagnético

En una región libre de fuentes el campo electromagnético en el vacío está determinado por los vectores $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ de campo eléctrico y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ de campo magnético; los cuales satisfacen las ecuaciones de Maxwell dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2.1a, b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.2.1c, d)$$

donde se han omitido los términos correspondientes a las fuentes, dado que se está interesado en los campos mismos y no en la forma explícita en que son producidos ó detectados.

Si se denota el potencial vectorial por $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ se tiene por definición que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.2.2)$$

substituyendo esto en (3.2.1b) se tiene

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Por lo tanto el campo eléctrico está determinado por la expresión

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (3.2.3)$$

donde ϕ es el potencial escalar. Adoptando la norma de Coulomb, esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (3.2.4)$$

y considerando el potencial escalar $\phi = 0$, la expresión (3.2.1d) toma la forma

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

la cual, utilizando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$$

expresa la condición de que el potencial vectorial \mathbf{A} debe satisfacer la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.2.5)$$

Si se supone que el potencial vectorial es separable, esto es $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r})\alpha(t)$ entonces por (3.2.5) se tiene que

$$\alpha \nabla^2 \mathbf{A}_0 - \frac{1}{c^2} \ddot{\alpha} \mathbf{A}_0 = 0,$$

y separando la dependencia temporal de la espacial

$$\frac{\nabla^2 A_{0j}}{A_{0j}} = \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -k^2, \quad j = 1, 2, 3$$

siendo el número de onda k^2 una constante. Entonces

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0 + k^2 \mathbf{A}_0 = 0, \quad (3.2.6a)$$

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad (3.2.6b)$$

donde $\omega^2 = c^2 k^2$ es el cuadrado de la frecuencia del modo de oscilación de la cavidad; de ésta forma se tiene que la separación $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r})\alpha(t)$ da lugar a soluciones monocromáticas las cuales se acostumbra escribir en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \alpha(t)\mathbf{A}_0 + \alpha^*(t)\mathbf{A}_0^* \\ &= A^{(+)}(\mathbf{r}, t) + A^{(-)}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

donde \mathbf{A}_0 y \mathbf{A}_0^* son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Helmholtz (3.2.6a) y $\alpha(t)$ es la solución de (3.2.6b) dada por

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}. \quad (3.2.8)$$

Utilizando entonces (3.2.2) y (3.2.3) se tienen las siguientes expresiones para los campos eléctrico y magnético

$$\mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c}(\alpha^*(t)\mathbf{A}_0^* - \alpha(t)\mathbf{A}_0), \quad (3.2.9a)$$

$$\mathbf{B} = \alpha^*(t)(\nabla \times \mathbf{A}_0^*) + \alpha(t)(\nabla \times \mathbf{A}_0). \quad (3.2.9b)$$

Por medio de (3.2.9a) y (3.2.9b) es posible expresar

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \\ &= [-k^2\alpha^2(t)\mathbf{A}_0^2 + 2k^2|\alpha(t)|^2|\mathbf{A}_0|^2 - k^2\alpha^*(t)\mathbf{A}_0^{*2}], \\ \mathbf{B}^2 &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \\ &= [\alpha^2(t)(\nabla \times \mathbf{A}_0)^2 + 2|\alpha(t)|^2|\nabla \times \mathbf{A}_0|^2 + \alpha^{*2}(t)(\nabla \times \mathbf{A}_0^*)^2]. \end{aligned}$$

Al substituir estas cantidades en la expresión para la energía del campo electromagnético

$$H = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{r}, \quad (3.2.10)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8\pi} \int [-k^2\alpha^2(t)\mathbf{A}_0^2 + 2k^2|\alpha(t)|^2|\mathbf{A}_0|^2 - k^2\alpha^*(t)\mathbf{A}_0^{*2} \\ &\quad + \alpha^2(t)(\nabla \times \mathbf{A}_0)^2 + \alpha^{*2}(t)(\nabla \times \mathbf{A}_0^*)^2] d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Utilizando las expresiones

$$\begin{aligned} \alpha^2(t) \int [\nabla \times \mathbf{A}_0]^2 d\mathbf{r} &= k^2\alpha^2(t) \int \mathbf{A}_0^2 d\mathbf{r}, \\ \alpha^{*2}(t) \int [\nabla \times \mathbf{A}_0^*]^2 d\mathbf{r} &= k^2\alpha^{*2}(t) \int \mathbf{A}_0^{*2} d\mathbf{r}, \\ |\alpha(t)|^2 \int |\nabla \times \mathbf{A}_0|^2 d\mathbf{r} &= k^2|\alpha(t)|^2 \int |\mathbf{A}_0|^2 d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

H se reduce a

$$H = \frac{k^2}{2\pi} |\alpha|^2 \int |\mathbf{A}_0|^2 d\mathbf{r}. \quad (3.2.11)$$

Si se elige la amplitud del modo de oscilación igual a uno, es decir

$$\int |\Lambda_0|^2 dr \equiv 1$$

el Hamiltoniano H queda dado por

$$H = \frac{k^2}{2\pi} |\alpha|^2. \quad (3.2.12)$$

Definiendo

$$q(t) = -\frac{1}{c\sqrt{4\pi}} (\alpha(t) + \alpha^*(t)), \quad p(t) = \frac{ik}{\sqrt{4\pi}} (\alpha(t) - \alpha^*(t)), \quad (3.2.13a, b)$$

la ecuación (3.2.12) toma la forma

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2, \quad (3.2.14)$$

ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p^2 &= -\frac{k^2}{8\pi} (\alpha^2(t) - 2|\alpha(t)|^2 + \alpha^{*2}(t)), \\ \frac{\omega^2}{2} q^2 &= \frac{k^2}{8\pi} (\alpha^2(t) + 2|\alpha(t)|^2 + \alpha^{*2}(t)). \end{aligned}$$

De este modo, matemáticamente la energía del campo electromagnético en el vacío sin fuentes es análoga al Hamiltoniano de un sistema de oscilador armónico de masa $m = 1$. Es importante destacar que la identificación de las variables $q(t)$ y $p(t)$ definidas anteriormente por las ecuaciones (3.2.13), con la coordenada generalizada y el momento canónicamente conjugado de un oscilador armónico, respectivamente, no sería correcta si dichas variables no son canónicamente conjugadas. La verificación de que tal asociación es válida en éste caso es directa. Derivando la expresión (3.2.13a) y (3.2.13b) se obtiene

$$\dot{q} = \frac{i\omega}{c\sqrt{4\pi}} (\alpha(t) - \alpha^*(t)), \quad \dot{p} = \frac{k\omega}{\sqrt{4\pi}} (\alpha(t) + \alpha^*(t)), \quad (3.2.15a, b)$$

que son consistentes con las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2 q. \quad (3.2.16a, b)$$

Entonces la identificación de (3.2.12) bajo (3.2.13) con un oscilador armónico es apropiada. Por tanto, para cuantizar el campo electromagnético basta saber cuantizar el

oscilador armónico, lo cual se hace introduciendo los operadores de creación y aniquilación

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{q}}{\ell} + i \frac{\ell}{h} \hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{q}}{\ell} - i \frac{\ell}{h} \hat{p} \right), \quad (3.2.17a, b)$$

donde $\ell = \sqrt{\frac{h}{m\omega}}$, y \hat{q} , \hat{p} denotan a los operadores Hermitianos de posición y momento del modo de oscilación, respectivamente ($[\hat{q}, \hat{p}] = ih$). De (3.2.17) se tiene entonces que

$$\hat{q} = \frac{\ell}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = i \frac{h}{\ell\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (3.2.18a, b)$$

Comparando estas expresiones con las ecuaciones (3.2.13), se ve que efectuar la cuantización es equivalente a reemplazar las variables clásicas $\alpha(t)$ y $\alpha^*(t)$ por los operadores

$$\alpha(t) \mapsto -c\ell\sqrt{2\pi}\hat{a}(t), \quad \alpha^*(t) \mapsto -c\ell\sqrt{2\pi}\hat{a}^\dagger(t). \quad (3.2.19a, b)$$

Excepto por constantes triviales que dependen de la normalización arbitraria escogida para la función modal, para cuantizar el campo electromagnético basta reemplazar $\alpha(t)$ y $\alpha^*(t)$ de la teoría clásica por los operadores de descenso $\hat{a}(t)$ y ascenso $\hat{a}^\dagger(t)$, respectivamente. De esta forma se tendrá que el operador Hamiltoniano asociado a (3.2.14) es equivalente a

$$H = \frac{h\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger). \quad (3.2.20)$$

Analogamente, el potencial vectorial clásico $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ dado por (3.2.7) es reemplazado por el operador

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{r}, t) = -c\ell\sqrt{2\pi} [\hat{a}(t)\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \hat{a}^\dagger(t)\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})] \quad (3.2.21)$$

y los operadores de campo eléctrico y magnético están dados por las relaciones

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -i\sqrt{2\pi}\ell\omega [\hat{a}(t)\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) - \hat{a}^\dagger(t)\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})], \quad (3.2.22a)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{2\pi}\ell c [\hat{a}(t)(\nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r})) + \hat{a}^\dagger(t)(\nabla \times \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}))]. \quad (3.2.22b)$$

Es interesante observar que si $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})$ entonces (3.2.22) implica que los campos eléctrico y magnético son proporcionales a los operadores \hat{p} y \hat{q} , respectivamente. De la misma forma si $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ fuera puramente imaginario, esto es, $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})$, entonces se intercambian los papeles, es decir $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \propto \hat{q}$ y $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \propto \hat{p}$. Es por esta razón que en la literatura suele hacerse referencia a éstas variables como *componentes de las cuadraturas*.

En resumen, se ha demostrado que un campo electromagnético de un solo modo (de un vector de polarización) es matemáticamente equivalente a un oscilador armónico de la misma frecuencia, hecho que sirve como motivación para presentar a continuación una revisión del tratamiento cuántico del oscilador armónico.

3.3 Oscilador armónico

Una de las primeras observaciones importantes que conviene hacer cuando se estudia el oscilador armónico en mecánica cuántica es que el operador Hamiltoniano de dicho sistema tiene la misma forma que en mecánica clásica

$$H = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2), \quad (3.3.1)$$

donde como ya se ha mencionado \hat{q} y \hat{p} son operadores en un espacio de Hilbert que satisfacen las relaciones de conmutación $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ y en correspondencia con la sección anterior se considera de aquí en adelante la masa del sistema igual a la unidad. En términos de los operadores de creación y aniquilación definidos en (3.2.17), el Hamiltoniano (3.3.1) se reescribe como [3]

$$H = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}), \quad (3.3.2)$$

donde se utilizaron las relaciones de conmutación de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger , esto es

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}. \quad (3.3.3)$$

En las expresiones anteriores se definió el operador de número $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

Se observa también por (3.3.3), que los niveles de energía del oscilador armónico quedan determinados por los eigenvalores del operador de número. Si se denota por n y $|n\rangle$ a los eigenvalores y eigenestados normalizados de \hat{N} , respectivamente, es decir

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.3.4)$$

y como $\langle n|\hat{N}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle$ es el producto escalar del vector $\hat{a}|n\rangle$ consigo mismo, se concluye que n es un número real y positivo

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle,$$

lo cual implica que $\hat{a}|n\rangle$ es un eigenestado de \hat{N} con eigenvalor $(n - 1)$, es decir $\hat{a}|n\rangle = C|n - 1\rangle$, donde al tomar el producto escalar de éste vector consigo mismo se concluye que $C = \sqrt{n}$ y así

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle, \quad (3.3.5)$$

en forma similar se encuentra

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle. \quad (3.3.6)$$

Las propiedades (3.3.5) y (3.3.6) explican porqué \hat{a}^\dagger y \hat{a} reciben el nombre de operadores de ascenso y descenso, respectivamente. De la expresión (3.3.5) y debido a que como se mencionó anteriormente los eigenvalores n deben ser reales y positivos, se encuentra en forma directa que

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad (3.3.7)$$

donde $|0\rangle$ es el estado de vacío. Por lo tanto, los eigenvalores n pueden ser cero o enteros positivos. Entonces por (3.3.2) y (3.3.4) los niveles de energía del oscilador armónico están determinados por

$$E_n = h\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.8)$$

y sus correspondientes eigenestados coinciden con los del operador de número y son también llamados eigenestados de Fock [3]. Dichos estados forman además un conjunto completo y son ortogonales, es decir

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.9a, b)$$

Finalmente es conveniente observar que al igual que $|0\rangle$ queda completamente definido por (3.3.7), los estados excitados $|n\rangle$, se obtienen de la aplicación de potencias enteras del operador \hat{a}^\dagger al estado de vacío $|0\rangle$, concretamente

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.10)$$

Otra base de interés para el sistema de oscilador armónico la constituyen los eigenestados del operador \hat{a} , también llamados estados coherentes (Cf. Sección 3.4) y que se denotarán por

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.3.11)$$

donde α es un número complejo. Con el fin de tener una idea clara del significado de estos estados [3] considerese el producto escalar del vector definido en la expresión (3.3.11) con el bra correspondiente al n -ésimo estado excitado, esto es $\langle n|$, y utilizando entonces la forma adjunta de (3.3.6) se deduce la relación de recurrencia

$$\sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle. \quad (3.3.12)$$

Esta relación puede resolverse en forma inmediata y obtener

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle, \quad (3.3.13)$$

pero como el producto escalar $\langle n|\alpha\rangle$ es un coeficiente en el desarrollo del estado $|\alpha\rangle$ en términos de los estados de Fock, esto es

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle \\ &= \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Utilizando éste resultado, la magnitud al cuadrado del estados $|\alpha\rangle$ es

$$\begin{aligned} \langle \alpha|\alpha\rangle &= |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \langle n|n\rangle \\ &= |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Por lo cual al normalizar $|\alpha\rangle$ a la unidad, es decir $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$, se fija el coeficiente

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (3.3.16)$$

De esta forma, los eigenestados del operador a , pueden expresarse como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (3.3.17)$$

que constituyen un conjunto sobrecompleto no ortogonal.

Una forma equivalente de introducir el concepto de estados coherentes es introducir un operador unitario

$$D(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \quad (3.3.18)$$

el cual actúa como un operador de desplazamiento sobre los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger , y definir el estado coherente $|\alpha\rangle$ como

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (3.3.19)$$

La equivalencia entre estas dos definiciones, puede establecerse utilizando el teorema de Baker-Campbell-Hausdorff (B.C.H.) [4] para la multiplicación de funciones exponenciales de operadores, el cual establece que si \hat{A} y \hat{B} son dos operadores arbitrarios, tales que

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0 \quad (3.3.20)$$

entonces

$$\exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right). \quad (3.3.21)$$

Tomando $\hat{A} = \hat{a}^\dagger$ y $\hat{B} = \hat{a}$, en (3.3.21), el teorema anterior permite separar el operador desplazamiento (3.3.18) en la forma siguiente

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha \hat{a}}, \quad (3.3.22)$$

donde se ordenaron los términos de forma que el operador de aniquilación se encuentre a la derecha del operador de creación. Entonces, como por definición

$$\exp(-\alpha \hat{a}) |0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} \hat{a}^k |0\rangle,$$

(3.3.7), implica que

$$\exp(-\alpha \hat{a}) |0\rangle = |0\rangle$$

y el estado coherente puede expresarse como

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= D(\alpha)|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Esto permite, utilizando la definición (3.3.10) del estado de Fock, obtener nuevamente la relación (3.3.17) y concluir la equivalencia entre ambas definiciones.

El producto escalar entre dos estados coherentes es determinado en forma directa utilizando la expresión (3.3.21) y resulta

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp(\alpha^* \beta - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}). \quad (3.3.24)$$

Es importante observar sin embargo, que dado que la magnitud al cuadrado

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp\{-|\alpha - \beta|^2\}$$

tiende exponencialmente a cero con forme $|\alpha - \beta|^2$ tiende a infinito, los estados coherentes tienden a ser aproximadamente ortogonales para valores grandes de $|\alpha - \beta|$.

A continuación se encuentra la representación de un estado coherente arbitrario en el espacio de coordenadas y de momentos. Para ello, considere primeramente el vacío, $|\alpha\rangle = |0\rangle$, utilizando (3.3.7) y la representación del operador de momento en el espacio de coordenadas

$$\langle q | \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dq} \langle q |,$$

se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q | \hat{a} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle q | \left(\frac{\hat{q}}{\ell} + i \frac{\ell}{\hbar} \hat{p} \right) | 0 \rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{q}{\ell} \phi_0(q) + \ell \frac{d\phi_0(q)}{dq} \right), \end{aligned}$$

donde se definió $\phi_0(q) \equiv \langle q | 0 \rangle$. Resolviendo la ecuación diferencial anterior se obtiene

$$\phi_0(q) = C \exp\left(-\frac{q^2}{2\ell^2}\right). \quad (3.3.25a)$$

La constante C sirve para garantizar que la solución ϕ_0 esté normalizada, y está dada por

$$C = (\pi\ell^2)^{-\frac{1}{4}}, \quad (3.3.25b)$$

valor que se encuentra fácilmente utilizando la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-aq^2 + bq) dq = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \quad \text{con } \Re a > 0. \quad (3.3.26)$$

En forma similar la representación de coordenadas del estado coherente (3.3.23) esta dada por

$$\begin{aligned}
 \langle q|\alpha\rangle &\equiv \phi_\alpha(q) \\
 &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \langle q|\exp(\alpha\hat{a}^\dagger)|0\rangle \\
 &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \langle q|\exp\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{q}}{\ell} - \frac{i\ell\hat{p}}{h}\right)\right]|0\rangle. \quad (3.3.27)
 \end{aligned}$$

Ahora se utiliza el resultado (3.3.21) del teorema B.C.H., para factorizar el operador exponencial de (3.3.27) como

$$\exp\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{q}}{\ell} - \frac{i\ell\hat{p}}{h}\right)\right] = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right) \exp\left(\frac{\alpha}{\ell\sqrt{2}}\hat{q}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha\ell}{\sqrt{2}h}\hat{p}\right),$$

y al substituir esta expresión en (3.3.27) se obtiene

$$\phi_\alpha(q) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\ell}q\right) \phi_0\left(q - \frac{\ell\alpha}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.3.28)$$

En forma completamente análoga se encuentra la representación en el espacio de momentos del estado coherente $|\alpha\rangle$, notando que en este caso en vez de (3.3.24) se utiliza

$$\langle p|\hat{q} = ih\frac{d}{dp}\langle p|. \quad (3.3.29)$$

La función de onda queda determinada por

$$\begin{aligned}
 \phi_\alpha(p) &= \left(\frac{\ell^2}{\pi h^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha\ell}{\sqrt{2}h}p\right) \\
 &\quad \exp\left(-\frac{\ell^2}{2h^2\omega}\left(p + i\alpha\frac{h}{\sqrt{2}\ell}\right)^2\right). \quad (3.3.30)
 \end{aligned}$$

Finalmente se observa por medio de las ecuaciones (3.3.28) y (3.3.30) que las funciones de onda del estado coherente $|\alpha\rangle$ en las representaciones de coordenadas y momentos son soluciones de un oscilador armónico desplazado.

3.4 Correlación y coherencia

Continuando con el estudio de los estados coherentes, en ésta sección se introducen las funciones de correlación para el campo electromagnético a través de las cuales se da una definición precisa de coherencia. También se demuestra que los estados coherentes poseen coherencia óptica de n -ésimo orden, resultado que es precisamente el origen de su nombre.

En los años sesentas se desarrollaron nuevas técnicas experimentales en la generación y detección de la correlación de los campos utilizados comúnmente en óptica [2]. Estas técnicas condujeron a la obtención de resultados clásicamente inesperados, los cuales motivaron la necesidad de discutir el significado de conceptos fundamentales, entre ellos la coherencia, con vistas a desarrollar una nueva teoría cuántica consistente, no solo aproximada, de la óptica.

Dentro de las aportaciones más importantes a dicho desarrollo se encuentran los trabajos de R. J. Glauber, quien no solo definió el concepto de coherencia como lo conocemos hoy en día, sino que además desarrolló una aproximación enteramente cuántica al problema de la estadística de fotones.

En la Sección 1 se discutió la cuantización del campo electromagnético y se vió que bajo ciertas condiciones resulta natural escribir los campos electromagnéticos como una combinación de los operadores de creación y aniquilación (3.2.22). En particular, para el campo eléctrico se encontró

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t), \quad (3.4.1)$$

donde $\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t)$ es proporcional al operador de aniquilación y $\mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t)$, al operador de creación. Restringiendo por simplicidad la presente discusión a,

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (3.4.2a)$$

$$E^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}^* \cdot \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (3.4.2b)$$

esto es las proyecciones de los campos complejos $\mathbf{E}^{(+)}$ y $\mathbf{E}^{(-)}$ sobre los vectores

unitarios \hat{e} y \hat{e}^* , respectivamente ¹. Experimentalmente se sabe que si $|i\rangle$ representa el estado inicial y $|f\rangle$ el estado final del campo electromagnético, la probabilidad de transición de un detector para observar un fotón en la posición r al tiempo t es proporcional a

$$T_{if} = \langle f | E^{(+)}(r, t) | i \rangle|^2. \quad (3.4.3)$$

De esta forma, para obtener la razón de conteo total o la intensidad promedio total del campo en el detector, es preciso sumar sobre todos los estados del campo que se pueden alcanzar desde el estado inicial al absorberse un fotón, es decir

$$\begin{aligned} I(r, t) &= \sum_f T_{if} \\ &= \sum_f \langle f | E^{(+)}(r, t) | i \rangle \langle i | E^{(-)}(r, t) | f \rangle \\ &= \langle i | E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t) | i \rangle, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

donde en el último paso se utilizó la relación de completéz $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$. Es importante señalar que la expresión (3.4.4), puede generalizarse utilizando el operador densidad para incluir casos en los que el campo es una mezcla estadística, y para este caso la expresión de la intensidad promedio total está definida por

$$I(r, t) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t) \right\}. \quad (3.4.5)$$

De la expresión anterior es inmediato mostrar que la razón de conteo total para detectar fotones en el vacío es cero, ya que el operador densidad es $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$, pero $E^{(+)}$ es proporcional al operador de aniquilación. La expresión (3.4.5) es sin embargo sólo un caso particular de una función más general de los campos $E^{(-)}$ y $E^{(+)}$ a saber

$$G^{(1)}(r, t; r', t') \equiv \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r', t') \right\}, \quad (3.4.6)$$

que es evaluada en dos puntos del espacio tiempo distintos, y que recibe el nombre de *función de correlación de primer orden* ya que por definición (ver (3.4.6)) $G^{(1)}$

¹ Esta restricción tiene un significado físico bien definido, pues experimentalmente corresponde a suponer que el detector con el que se está trabajando ha sido adaptado con un polarizador que registra únicamente aquellos fotones que tienen una dirección de polarización paralela al vector unitario complejo \hat{e}

es un promedio estadístico que proporciona una medida de la correlación del campo electromagnético en dos puntos distintos del espacio tiempo.

Dado que el registro de las intensidades de fotones en un único detector no agota de ninguna forma las mediciones que pueden realizarse sobre el campo², pues por ejemplo podría realizarse una medición que consistiera en colocar dos detectores en dos puntos r y r' , y registrar las coincidencias de dichas mediciones, se tiene entonces la posibilidad de definir una nueva función de correlación la cual se conoce como *función de correlación de segundo orden*, y está dada por

$$G^{(2)}(r_1, t_1; r_2, t_2; r_3, t_3; r_4, t_4) \equiv \text{Tr}\{\hat{\rho} E^{(-)}(r_1, t_1) E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_3, t_3) E^{(+)}(r_4, t_4)\}, \quad (3.4.7)$$

esta función es proporcional al cuadrado de la probabilidad por unidad del tiempo de registrar un fotón en r_1 al instante t_1 y otro en r_3 al instante t_3 , siempre que $(r_1, t_1) = (r_2, t_2)$ y $(r_3, t_3) = (r_4, t_4)$.

En principio se podría imaginar una extensión para detectar la coincidencia de n fotones siendo n arbitrario; en tal caso se tendría también una extensión de la función de correlación (3.4.7) a la *función de correlación de n -ésimo orden* dada por

$$G^{(n)}(x_1; \dots; x_{2n}) \equiv \text{Tr}\{\hat{\rho} E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{2n})\}, \quad (3.4.8)$$

donde se ha denotado $x_j = (r_j, t_j)$ para $j = 1, \dots, 2n$. Antes de seguir adelante con algunas propiedades de las funciones de correlación, es conveniente hacer notar que puesto que no se han impuesto restricciones sobre la dependencia temporal ni espacial de los campos, en principio las propiedades de correlación de los mismos podrían extenderse a distancias ó en intervalos de tiempo arbitrariamente grandes, lo cual constituye la idea básica de la coherencia de un campo.

² Aunque en principio tales mediciones incluyen virtualmente todos los experimentos de la óptica clásica es bueno recordar que uno de los aspectos esenciales en los cuales la teoría cuántica del campo electromagnético difiere de la clásica es el hecho de que dos valores de los operadores de campo, en general no conmutan uno con otro.

Las propiedades más importantes que caracterizan a las funciones de correlación son las siguientes:

1. El intercambio de los argumentos de la función de correlación conduce al complejo conjugado de la función, es decir

$$G^{(n)}(x_2, \dots, x_1) = [G^{(n)}(x_1, \dots, x_2)]^* \quad \forall n$$

2. La función de correlación $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ es invariante ante las permutaciones de sus argumentos (x_1, \dots, x_n) ó de sus argumentos (x_{n+1}, \dots, x_{2n}) .

3. La función de correlación de orden n , $G^{(n)}$ satisface $2n$ ecuaciones de onda distintas, a saber una para cada uno de sus argumentos x_j , donde $j = 1, \dots, 2n$.

4. Todas las funciones de correlación $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ son reales y positivas definidas, es decir

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \geq 0.$$

5. Para n arbitrario se tiene que

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) G^{(n)}(x_{n+1}, \dots, x_{2n}, x_1, \dots, x_n) \geq [G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})]^2$$

Todos estos elementos permiten dar finalmente una definición cuantitativa del concepto de coherencia. Para ello, es conveniente introducir la forma normalizada de las funciones de correlación, así, para la función de correlación de primer orden se define,

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{G^{(1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{[G^{(1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t) G^{(1)}(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}', t')]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.4.9)$$

y en general para las funciones de correlación de orden superior

$$g^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})}{\prod_{j=1}^{2n} [G^{(1)}(x_j, x_j)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.4.10)$$

Con estas definiciones y utilizando 5. es inmediato ver que

$$|g^{(1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')| \leq 1.$$

en particular para $r = r'$ y $t = t'$ se tiene que $g^{(1)} \equiv 1$, cabe señalar sin embargo que para $n > 1$, en general $g^{(n)}$ no está restringida en valor absoluto.

Utilizando los resultados anteriores se establece entonces que una condición necesaria para que un campo eléctrico tenga coherencia de orden n es que

$$|g^{(j)}(x_1, \dots, x_{2j})| = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

lo cual es equivalente, dada la definición de $g^{(n)}$, a pedir que las funciones $|G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})|$ se factoricen en un producto de $2n$ funciones de la misma forma, cada una de las cuales depende de una única variable espacio tiempo, esto es

$$|G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})| = \prod_{j=1}^{2n} |G^{(1)}(x_j, x_j)|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4.11)$$

Estas condiciones necesarias para tener coherencia sugieren entonces la definición de coherencia como una propiedad de factorización de las funciones de correlación. En forma más precisa, si la función de correlación puede escribirse como

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \mathcal{E}^*(x_1) \dots \mathcal{E}^*(x_n) \mathcal{E}(x_{n+1}) \dots \mathcal{E}(x_{2n}), \quad (3.4.12)$$

entonces se cumplen las condiciones necesarias y suficientes para que el campo sea coherente. De la definición de la función de correlación (3.4.8) se tiene que si un campo está descrito por los eigenestados $\{ \}$ de $E^{(+)}$, entonces las funciones de correlación se factorizan inmediatamente en la forma deseada. Para ver esto claramente, basta observar que

$$E^{(+)}(r, t) \{ \} = \mathcal{E}(r, t) \{ \}, \quad (3.4.13)$$

donde $\mathcal{E}(r, t)$ es un eigenvalor complejo, entonces el Hermitiano conjugado de (3.4.13) es

$$\{ \{ E^{(-)}(r, t) = \mathcal{E}^*(r, t) \{ \}. \quad (3.4.14)$$

De las expresiones (3.4.13) y (3.4.14) se deduce directamente que las funciones de correlación $G^{(n)}$ se factorizan en la forma (3.4.12). En otras palabras el estado del campo $\{ \}$ es completamente coherente. Por lo tanto como $E^{(+)} \propto a$, se tiene que los estados coherentes definidos en la sección anterior son los eigenestados de un campo completamente coherente.

3.5 Propiedades de los estados coherentes

Los estados coherentes representan eigenestados del campo electromagnético y por lo tanto es de interés el estudiar sus propiedades estadísticas. El primer resultado al respecto se obtiene al utilizar las relaciones (3.3.13) y (3.3.16) entre los estados coherentes y los estados de Fock. Estas relaciones sirven para encontrar la probabilidad de que en una medición del operador de número de fotones se encuentre el resultado n

$$P_n(\alpha) \equiv |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (3.5.1)$$

esta expresión define una función de distribución de Poisson con valor medio $|\alpha|^2$.

Los valores esperados y las dispersiones asociadas a los operadores de posición y momento en los estados coherentes se obtienen directamente al usar las relaciones (3.2.18) y están dados por

$$\langle \hat{q} \rangle_\alpha \equiv \langle \alpha | \hat{q} | \alpha \rangle = \ell \sqrt{2} \Re \alpha, \quad (3.5.3a)$$

$$\langle \hat{p} \rangle_\alpha \equiv \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle = \sqrt{2} \frac{\hbar}{\ell} \Im \alpha, \quad (3.5.3b)$$

donde $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}}$. Los operadores de posición y momento también reciben el nombre de cuadraturas por su relación con los campos eléctrico y magnético. Por ello las dispersiones de las cuadraturas están definidas por las expresiones

$$\sigma_q \equiv \langle \hat{q}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{q} \rangle_\alpha^2 = \frac{\ell^2}{2}, \quad (3.5.4a)$$

$$\sigma_p \equiv \langle \hat{p}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{p} \rangle_\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{2\ell^2}, \quad (3.5.4b)$$

$$\sigma_{\hat{p}\hat{q}} \equiv \left\langle \frac{\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}}{2} \right\rangle_\alpha - \langle \hat{p} \rangle_\alpha \langle \hat{q} \rangle_\alpha = 0. \quad (3.5.4c)$$

De lo anterior es inmediato deducir que los estados coherentes no son correlacionados y minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg, es decir

$$\sigma_p \sigma_q = \frac{1}{4} \hbar^2. \quad (3.5.5)$$

A este tipo de estados del campo electromagnético de la luz se les llama estados clásicos de la luz. Para terminar esta sección se quiere señalar cómo pueden generarse los estados coherentes. Se conoce que un campo electromagnético definido por

un potencial vectorial $\hat{A}(\mathbf{r}, t)$ que está interactuando con una distribución de corriente clásica, aquella que no se ve afectada en forma notable por su interacción con el campo siempre produce un campo electromagnético en un estado coherente.

Bibliografía

- [1] E. Schrödinger, *Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip*. Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, (1930), pág. 296.
- [2] R. J. Glauber, *The Quantum Theory of Optical Coherence* Phys. Rev. (1963), 130, núm. 6, pág. 2529.
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics* Vol 1. (J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1977).
- [4] A. Messiah, *Quantum Mechanics* , Vol. 1. (J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1958) pág. 442.

4

Invariantes lineales dependientes del tiempo

4.1 Introducción

La principal motivación para el estudio de las simetrías de sistemas cuánticos (esto es, el conjunto de operadores que transforman una solución de la ecuación de Schrödinger en otro estado que también es solución de dicha ecuación), es la conexión entre una simetría particular y la resolución de la ecuación de Schrödinger.

La simetría del Hamiltoniano de un sistema físico está íntimamente relacionada con las integrales de movimiento del sistema. Para problemas con Hamiltonianos independientes del tiempo el Hamiltoniano en si mismo se toma como el invariante central

en la búsqueda del conjunto de constantes de movimiento que conforman el grupo ó el álgebra de simetría del sistema. Para el caso de Hamiltonianos dependientes del tiempo se tiene por el contrario (dado que la energía no se conserva) la necesidad de determinar las constantes básicas de movimiento que lo caracterizan.

El encontrar tales constantes de movimiento no es un problema sencillo y ha sido objeto de importantes estudios [1]. En años recientes se ha considerado con especial interés, dada sus aplicaciones, el estudio de problemas caracterizados por Hamiltonianos que pueden reducirse a un sistema cuadrático en las coordenadas y momentos. Siguiendo ésta tendencia es que I. A. Malkin y V. I. Man'ko [2] han desarrollado la teoría de invariantes lineales dependientes del tiempo, esto es integrales de movimiento que además de presentar una dependencia temporal están caracterizadas por una dependencia lineal de los operadores de posición y momento.

La existencia de tales invariantes ha demostrado tener una doble aplicación, por una parte conduce a la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, y por otra ayuda a obtener los generadores del álgebra de simetría dinámica del sistema que se está estudiando.

En Mecánica Clásica el desarrollo temporal del estado de una partícula está determinado por dos números, su posición y su velocidad, siendo el tiempo un parámetro real continuo. Las ecuaciones de movimiento de Newton permiten, si se conoce el estado al tiempo t_0 , conocerlo en cualquier tiempo subsecuente o anterior. La descripción de la evolución de los estados es equivalente por tanto, a determinar la trayectoria de la partícula, $q(t)$.

En contraste con ello, el concepto de estado de un sistema en Mecánica Cuántica, se entiende como la función de onda compleja $\psi(q)$, es decir, para determinar el estado del sistema en un instante dado t_0 se requiere especificar una infinidad de números. Vista como una generalización del concepto clásico, dicha función puede considerarse como el conjunto de coordenadas del vector, $|x\rangle$, en un espacio de dimensión infinita. La evolución del estado de un sistema cuántico está determinada por las coordenadas del vector, $\psi_q(t) \equiv \psi(q, t)$ en el espacio de estados, y define por tanto una trayectoria en el mismo. La ecuación de Schrödinger permite conocer $\psi(q, t)$ si se conoce al tiempo t_0 , siendo $t > t_0$ o $t < t_0$. Es importante señalar que si el sistema es influido por otros objetos (una partícula en un baño térmico por ejemplo), su estado se determina por la

matriz de densidad $\rho(x, y)$ que es una función compleja de dos variables. En la notación de Dirac

$$\rho(x, y) = \langle x | \hat{\rho} | y \rangle,$$

este operador, satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}, H(t)]. \quad (4.1.1)$$

donde H representa el operador Hamiltoniano del sistema. Como en el caso de la función de onda, si se conoce la matriz de densidad $\rho(x, y, t)$ en una representación particular, a un tiempo t_0 , se pueden predecir los estados a tiempos subsecuentes $t > t_0$ o anteriores $t < t_0$. En resumen, el estado cuántico de una partícula está descrito por un vector columna de dimensión infinita, llamado función de onda, para los estados puros y por una función de dos variables para los estados mixtos [3].

En este capítulo se mostrará que las integrales cuánticas de movimiento determinan la evolución del sistema, de la misma manera como ayudan a determinar la trayectoria de la partícula en el caso clásico. Es importante señalar que la evolución del sistema cuántico que se discutirá más adelante corresponde al esquema de Schrödinger, donde el vector de estado varía con el tiempo describiendo una trayectoria en el espacio de Hilbert, mientras que las observables como el momento y la posición no dependen de el tiempo.

También se discutirá la conexión entre el formalismo de invariantes lineales y la teoría de grupos o simetrías del sistema con base en el concepto de álgebra dinámica de simetría, concepto introducido en la década de los setentas [2], [4] como una generalización de lo que hasta entonces se entendía por álgebra de simetría, es decir, el conjunto de generadores que transforman soluciones de la ecuación estacionaria de Schrödinger con una energía en soluciones independientes con la misma energía. La simetría dinámica en cambio unifica multipletes de estados pertenecientes a diferentes energías, razón por la cual sus generadores pueden o no conmutar con el Hamiltoniano que describe al sistema.

Para sistemas no-estacionarios no se puede generalizar formalmente el concepto anterior porque dichos sistemas no tienen niveles de energía. Sin embargo, para estos casos se llamará simetría dinámica al conjunto de integrales de movimiento que permitan encontrar todas las funciones de onda de los estados no-estacionarios del sistema, es

decir, si inicialmente se conoce un estado no-estacionario, mediante la acción de los generadores del álgebra dinámica de simetría sobre él se pueden construir todos los estados no-estacionarios restantes.

La idea básica de la Teoría de Invariantes Lineales aplicada a sistemas cuadráticos no estacionarios, es emplear la teoría de transformaciones lineales canónicas dependientes del tiempo para obtener integrales de movimiento que presenten las mismas relaciones de conmutación que los operadores de creación y aniquilación del sistema de oscilador armónico, y obtener a partir de tales invariantes los generadores del álgebra dinámica de simetría del sistema, la cual para este tipo particular de sistemas tiene la particularidad de coincidir con el álgebra dinámica del oscilador armónico, lo que a su vez permite utilizar el método de construcción de soluciones del oscilador armónico sin cambios esenciales para construir las soluciones del sistema no estacionario.

En el presente capítulo se aplicará la teoría de invariantes lineales para resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el caso general de Hamiltonianos de la forma

$$H = \frac{a(t)}{2}\hat{p}^2 + \frac{b(t)}{2}(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) + \frac{c(t)}{2}\hat{q}^2. \quad (4.1.2)$$

donde $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ son funciones arbitrarias del tiempo, con la variante de que en vez de utilizar la teoría de transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo para obtener los invariantes, se empleará la versión Hamiltoniana del teorema de Noether que fue presentada en el Capítulo 2.

4.2 Constantes de movimiento

Aun cuando no se tiene interés en resolver el problema clásico de movimiento asociado al Hamiltoniano

$$H = \frac{a(t)}{2}p^2 + \frac{b(t)}{2}(pq + qp) + \frac{c(t)}{2}q^2, \quad (4.2.1)$$

con el fin de ganar claridad en la obtención e interpretación de las integrales de movimiento que permiten resolver el problema cuántico, se analizarán primeramente los resultados que se obtienen bajo el formalismo clásico al utilizar el teorema de Noether (ver Capítulo 2) para encontrar los invariantes asociados a variaciones en las coordenadas y momentos del sistema, que son funciones dependientes del tiempo únicamente.

Por (4.2.1) se tiene directamente que las ecuaciones de movimiento de Hamilton son

$$\dot{p} = -c(t)q - b(t)p, \quad (4.2.2a)$$

$$\dot{q} = b(t)q + a(t)p. \quad (4.2.2b)$$

Luego, como se mencionó con anterioridad, se consideran las transformaciones siguientes

$$\delta q = \epsilon h(t), \quad \delta p = \epsilon g(t), \quad (4.2.3a, b)$$

donde ϵ es un parámetro infinitesimal positivo.

Por medio de las expresiones (2.3.6) del Capítulo 2, las transformaciones anteriores son de simetría si satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p} = 0, \quad (4.2.4a)$$

$$g(t) = \frac{\partial \Omega}{\partial q}, \quad (4.2.4b)$$

$$-h(t)[b(t)p + c(t)q] - g(t)[a(t)p + b(t)q] + p \frac{dh(t)}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \quad (4.2.4c)$$

donde se utilizó que

$$\delta \Omega = \epsilon \Omega(p, q, t). \quad (4.2.5a)$$

Entonces, por (4.2.4a) y (4.2.4b) se tiene

$$\Omega(q, t) = g(t)q + \Omega_0(t), \quad (4.2.5b)$$

y substituyendo ésta expresión en la ecuación (4.2.4c) se obtiene

$$[-h(t)c(t) - g(t)b(t)]q + [\dot{h}(t) - g(t)a(t) - h(t)b(t)]p = \dot{g}(t)q + \dot{\Omega}_0. \quad (4.2.5c)$$

Igualando los coeficientes que acompañan a p y q en la expresión anterior se concluye que, las variaciones propuestas dan origen a una transformación de simetría si

$$\dot{g}(t) + g(t)b(t) + h(t)c(t) = 0, \quad (4.2.6a)$$

$$\dot{h}(t) - h(t)b(t) - g(t)a(t) = 0. \quad (4.2.6b)$$

$$\dot{\Omega}_0(t) = 0. \quad (4.2.6c)$$

Analizando estos resultados se tiene directamente por (4.2.6c) que $\Omega_0(t) = \text{cte.} \equiv 0$. Comparando (4.2.6a,b) con (4.2.2a,b) se observa que dichas expresiones son equivalentes si se identifica $h(t) \rightarrow q$ y $g(t) \rightarrow p$. En otras palabras, requerir que las transformaciones (4.2.3) sean de simetría equivale a pedir que h y g sean soluciones de las ecuaciones de movimiento del sistema. La forma explícita de dichas ecuaciones se encuentra derivando (4.2.6a) ((4.2.6b)) y substituyendo en (4.2.6b) ((4.2.6a)), obteniéndose

$$\ddot{h}(t) - \dot{h}(t) \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] - h(t) \left[\dot{b}(t) - a(t)c(t) + b^2(t) - b(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] = 0, \quad (4.2.7a)$$

$$\ddot{g}(t) - \dot{g}(t) \left[\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \right] + g(t) \left[\dot{b}(t) + a(t)c(t) - b^2(t) - b(t) \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \right] = 0, \quad (4.2.7b)$$

Las constantes de movimiento del Hamiltoniano (4.2.1) están determinadas por la relación

$$\delta K = p(\delta q) - \delta \Omega \quad \Rightarrow \quad K = p h(t) - q g(t), \quad (4.2.8)$$

donde las funciones $h(t)$ y $g(t)$ son soluciones arbitrarias de las ecuaciones de segundo orden (4.2.7). Entonces (4.2.8) representa en realidad un conjunto infinito de constantes de movimiento, el cual es generado únicamente por dos integrales de movimiento independientes, que se denotan como

$$p_0(t) = p h_1(t) - q g_1(t), \quad q_0(t) = p h_2(t) - q g_2(t). \quad (4.2.9a, b)$$

Las funciones $h_1(t)$ y $h_2(t)$ representan dos soluciones linealmente independientes de (4.2.7a), las cuales una vez fijadas determinan las soluciones $g_1(t)$ y $g_2(t)$ por medio de la ecuación (4.2.6b).

Las expresiones (4.2.9) pueden reescribirse en forma matricial como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ q_0(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1(t) & -g_1(t) \\ h_2(t) & -g_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t) & \frac{1}{a(t)} [h_1(t)h(t) - \dot{h}_1(t)] \\ h_2(t) & \frac{1}{a(t)} [h_2(t)h(t) - \dot{h}_2(t)] \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

donde q y p son la coordenada generalizada y el momento canónicamente conjugado del sistema, y en la última igualdad se utilizó la ecuación (4.2.6b). Si se elige p_0 y q_0

como la posición y el momento iniciales (en $t = 0$), es decir

$$\left(\begin{matrix} p_0(t=0) \\ q_0(t=0) \end{matrix} \right) \quad (v) \quad 11)$$

entonces las soluciones $h_1(t), h_2(t)$
por las condiciones iniciales

$$h_1(t=0) \quad a)$$

$$h_2(t=0) \quad b)$$

Usando (4.2.10), las condiciones son

$$\dot{h}_1(t=0) = h(0), \quad c)$$

Analizando la relación (4.2.10), se pueden escribir las integrales de movimiento (p_0, q_0) con (h_1, h_2) canónicamente conjugado del sistema, observando que $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son soluciones

$$\ddot{h}_1(t) - \dot{h}_1(t) \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] + h_1(t) \left[-\frac{a''(t)}{a(t)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] = 0$$

$$\ddot{h}_2(t) - \dot{h}_2(t) \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] + h_2(t) \left[-\frac{a''(t)}{a(t)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] = 0$$

Multiplicando (4.2.14a) por $h_2(t)$ y (4.2.14b) por $h_1(t)$ y restando se obtiene

$$\frac{d}{dt} \ln(W[h_2(t), h_1(t)]) = \frac{d}{dt} \ln(a(t)), \quad (4.2.15)$$

donde $W[h_2(t), h_1(t)] \equiv h_2(t)\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t)h_1(t)$ es el Wronskiano de $h_2(t)$ y $h_1(t)$. Resolviendo (4.2.15) se tiene

$$\frac{W[h_2(t), h_1(t)]}{a(t)} = k, \quad (4.2.16)$$

donde k es una constante de integración, la cual puede determinarse de las condiciones iniciales (4.2.12). Concretamente se encuentra que $k = 1$, por lo que el Wronskiano toma el valor

$$W[h_2(t), h_1(t)] = a(t). \quad (4.2.17)$$

como la posición y el momento iniciales (en $t = 0$), es decir

$$\begin{pmatrix} p_0(t=0) \\ q_0(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (4.2.11)$$

entonces las soluciones $h_1(t)$, $h_2(t)$, $g_1(t)$ y $g_2(t)$ quedan completamente determinadas por las condiciones iniciales

$$h_1(t=0) \equiv 1, \quad g_1(t=0) \equiv 0, \quad (4.2.12a)$$

$$h_2(t=0) \equiv 0, \quad g_2(t=0) \equiv -1. \quad (4.2.12b)$$

Usando (4.2.10), las condiciones sobre las funciones g implican

$$\dot{h}_1(t=0) = h(0), \quad \dot{h}_2(t=0) = -a(0). \quad (4.2.13a, b)$$

Analizando la relación (4.2.10), se puede demostrar que Λ , la matriz que relaciona a las integrales de movimiento (p_0, q_0) con (p, q) la coordenada generalizada y el momento canónicamente conjugado del sistema, es una matriz simpléctica. Esto puede probarse observando que $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son soluciones de la ecuación (4.2.7a), esto es

$$\ddot{h}_1(t) - \dot{h}_1(t) \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] + h_1(t) \left[-\dot{h}(t) + a(t)c(t) - b^2(t) + b(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] = 0, \quad (4.2.14a)$$

$$\ddot{h}_2(t) - \dot{h}_2(t) \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] + h_2(t) \left[-\dot{h}(t) + a(t)c(t) - b^2(t) + b(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] = 0. \quad (4.2.14b)$$

Multiplicando (4.2.14a) por $h_2(t)$ y (4.2.14b) por $h_1(t)$ y restando las ecuaciones resultantes se obtiene

$$\frac{d}{dt} \ln(W[h_2(t), h_1(t)]) = \frac{d}{dt} \ln(a(t)), \quad (4.2.15)$$

donde $W[h_2(t), h_1(t)] \equiv h_2(t)\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t)h_1(t)$ es el Wronskiano de $h_2(t)$ y $h_1(t)$. Resolviendo (4.2.15) se tiene

$$\frac{W[h_2(t), h_1(t)]}{a(t)} = k, \quad (4.2.16)$$

donde k es una constante de integración, la cual puede determinarse de las condiciones iniciales (4.2.12). Concretamente se encuentra que $k = 1$, por lo que el Wronskiano toma el valor

$$W[h_2(t), h_1(t)] = a(t). \quad (4.2.17)$$

Por medio de este resultado se muestra que

$$\det \Lambda = \frac{1}{a(t)} W[h_2(t), h_1(t)] \Rightarrow \det \Lambda \equiv 1. \quad (4.2.18)$$

Además, si se define

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.19)$$

es directo comprobar que la matriz Λ presenta la propiedad

$$\Lambda \Sigma \Lambda' = \Sigma. \quad (4.2.20)$$

donde Λ' denota la matriz transpuesta de Λ . Toda matriz 2×2 que satisface (4.2.20) bajo (4.2.19), es por definición una matriz simpléctica.

En resumen, hasta aquí se ha utilizado el teorema de Noether para encontrar las constantes de movimiento del problema clásico (4.2.1), asociadas a las variaciones (4.2.3), y se ha visto que dicho conjunto de invariantes dependientes del tiempo está relacionado linealmente con la coordenada generalizada y el momento canónicamente conjugado del sistema a través de una matriz simpléctica Λ . A continuación se mostrará como pueden utilizarse estos resultados para resolver el problema cuántico (4.1.2) correspondiente.

Debe observarse que dada la dependencia lineal en p y q que presentan los invariantes p_0 y q_0 , sus correspondientes operadores cuánticos están dados sin ambigüedad por las ecuaciones (4.2.10), reemplazando $p \rightarrow \hat{p}$ y $q \rightarrow \hat{q}$, esto es

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= h_1(t)\hat{p} - \frac{1}{a(t)}(\dot{h}_1(t) - h_1(t)h(t))\hat{q}, \\ \hat{q}_0 &= h_2(t)\hat{p} - \frac{1}{a(t)}(\dot{h}_2(t) - h_2(t)h(t))\hat{q}. \end{aligned}$$

los cuales, como puede comprobarse directamente, continúan siendo constantes de movimiento. Entonces, si $|\psi(t)\rangle$ denota el estado del sistema al tiempo t , se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \hat{p}_0(t) | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(0) | \hat{p}_0(0) | \psi(0) \rangle \\ &\equiv \langle \psi(0) | \hat{p} | \psi(0) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \hat{q}_0(t) | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(0) | \hat{q}_0(0) | \psi(0) \rangle \\ &\equiv \langle \psi(0) | \hat{q} | \psi(0) \rangle, \end{aligned}$$

donde se utilizaron las condiciones iniciales (4.2.12) y (4.2.13). De ésta forma, se concluye que físicamente los operadores \hat{q}_0 y \hat{p}_0 representan el valor medio inicial de los operadores de posición y momento del sistema respectivamente.

Por otra parte, utilizando la matriz inversa de Λ , los operadores de posición y momento se pueden expresar en términos de las integrales de movimiento p_0 , q_0 y corresponden también a las soluciones clásicas del sistema, en la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} [h_2(t)b(t) - \dot{h}_2(t)] & -\frac{1}{a(t)} [h_1(t)b(t) - \dot{h}_1(t)] \\ -h_2(t) & h_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_0(t) \\ \hat{q}_0(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2.21)$$

Otra forma de expresar las constantes de movimiento independientes del sistema cuántico (4.1.1), es en términos de los operadores de creación y aniquilación generalizados, esto es

$$\hat{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_0 + i\hat{p}_0), \quad \hat{A}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_0 - i\hat{p}_0). \quad (4.2.22a, b)$$

Estos dos invariantes también pueden representarse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(t) \\ \hat{A}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_0(t) \\ \hat{q}_0(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix}. \quad (4.2.23)$$

Utilizando la expresión de Λ en términos de $h_1(t)$ y $h_2(t)$ dada por (4.2.10) se encuentra

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(t) \\ \hat{A}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} h_2 + ih_1 & \frac{1}{a(t)} [b(t)(h_2 + ih_1) - (\dot{h}_2 + i\dot{h}_1)] \\ h_2 - ih_1 & \frac{1}{a(t)} [b(t)(h_2 - ih_1) - (\dot{h}_2 - i\dot{h}_1)] \end{pmatrix}}_{\Lambda_{pt}} \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix}. \quad (4.2.24)$$

Con la notación

$$\lambda_p = \frac{1}{\sqrt{2}} [h_2 + ih_1], \quad (4.2.25a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_q &= \frac{1}{\sqrt{2}a(t)} [b(t)(h_2 + ih_1) - (\dot{h}_2 + i\dot{h}_1)] \\ &= \frac{1}{a(t)} [h(t)\lambda_p - \dot{\lambda}_p], \end{aligned} \quad (4.2.25b)$$

la ecuación (4.2.24) puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(t) \\ \hat{A}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_p & \lambda_q \\ \lambda_p^* & \lambda_q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix}. \quad (4.2.26)$$

Usando entonces (4.2.23) se puede demostrar en forma directa que $\det \Lambda_{pq} = i$ y por lo tanto los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger satisfacen

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] &= [\lambda_p \hat{p} + \lambda_q \hat{q}, \lambda_p^* \hat{p} + \lambda_q^* \hat{q}] \\ &= -i \det \Lambda_{pq} \equiv 1. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Así, los operadores \hat{A}, \hat{A}^\dagger tienen la misma relación de conmutación que los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico. En relación con ello se observa que las integrales de movimiento (4.2.24) pueden expresarse en términos de los operadores de creación y aniquilación, esto es

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{A}^\dagger \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_q - i\lambda_p & \lambda_q + i\lambda_p \\ \lambda_q^* - i\lambda_p^* & \lambda_q^* + i\lambda_p^* \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (4.2.28)$$

Evaluando el determinante de la matriz M se encuentra

$$\det M = \frac{1}{2} \det \Lambda_{pq} \det \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1. \quad (4.2.29)$$

Es conveniente, como se verá más adelante, definir la matriz

$$M \equiv \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^* & M_1^* \end{pmatrix}, \quad (4.2.30)$$

donde

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_q - i\lambda_p), \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_q + i\lambda_p). \quad (4.2.31a, b)$$

De la misma forma que en el caso de la matriz Λ , usando (4.2.28) puede mostrarse fácilmente que M es una matriz simpléctica, es decir

$$M \Sigma M^t = \Sigma.$$

Grupos Dinámicos

En esta sección se introducen dos conceptos que son fundamentales en el estudio de sistemas cuánticos: El álgebra de simetría y el álgebra dinámica de simetría. Para sistemas estacionarios, es decir aquellos que están caracterizados por un Hamiltoniano independiente del tiempo, la definición de estos dos conceptos es la siguiente.

Los generadores del álgebra de simetría son operadores Hermitianos que no presentan dependencia temporal explícita y satisfacen las siguientes condiciones:

1. Conmutan con el Hamiltoniano del sistema, es decir son constantes de movimiento.
2. Forman un álgebra de Lie bajo la conmutación.
3. El álgebra de simetría es máxima en el sentido de que dado cualquier eigenvalor el espacio de todos los eigenestados degenerados es irreducible bajo el álgebra.
4. El álgebra de simetría es mínima en el sentido de que no existe un subálgebra con las mismas propiedades.

De ésta forma, si se conoce un eigenestado de la energía y el álgebra de simetría del problema, se puede generar el espacio completo de estados que tienen el mismo eigenvalor de la energía al cual está asociado el estado que se conoce inicialmente.

La definición del álgebra dinámica de simetría es por su parte una generalización de la definición anterior. Los generadores del álgebra dinámica de simetría son operadores Hermitianos, que son constantes de movimiento, los cuales pueden presentar dependencia temporal explícita y están caracterizados por las siguientes propiedades:

1. Forman un álgebra de Lie bajo la operación de conmutación.
2. El Hamiltoniano mapea por conmutación al álgebra dinámica de simetría. Por lo tanto el álgebra de simetría queda contenida en el subálgebra de operadores que conmutan con el Hamiltoniano.
3. Dado un conjunto de eigenestados del Hamiltoniano, el álgebra dinámica de simetría es máxima relativa a dicho conjunto, en el sentido que el espacio lineal generado por estos estados es irreducible bajo el álgebra.
4. El álgebra dinámica de simetría es mínima en el sentido que no posee un subálgebra propia con las mismas características.

De ésta forma, si se conoce un eigenestado de la energía y el álgebra dinámica de simetría del problema, es posible generar el espectro completo de energía del sistema (es decir, incluye estados que no tienen el mismo eigenvalor de la energía que el estado inicial) mediante la acción de los generadores del álgebra sobre el eigenestado conocido.

A pesar de que para sistemas cuánticos con parámetros dependientes explícitamente del tiempo, el hablar de la energía haciendo referencia a su definición usual carece de sentido, el concepto de álgebra dinámica de simetría puede generalizarse [2] dando a entender esencialmente, que si se conoce una solución arbitraria de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, y el álgebra dinámica de simetría, es posible generar todas las soluciones restantes de dicha ecuación, actuando con los generadores del álgebra sobre la solución conocida inicialmente.

Es precisamente en este sentido en el que queda justificado el interés en encontrar los invariantes lineales, pues resultan ser nada menos que los generadores del álgebra dinámica de simetría del problema: $w(1) \wedge sp(2, R)$, es decir el producto semi-directo de el álgebra de Heisenberg-Weyl $w(1)$ y el álgebra simpléctica $sp(2, R)$.

Concretamente, se tiene que dado el conjunto de operadores

$$\{ \hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t), I \}, \quad (4.2.32)$$

y de acuerdo con la relación de conmutación (4.2.27) que caracteriza a los invariantes $\hat{A}(t)$ y $\hat{A}^\dagger(t)$ el conjunto (4.2.32) está caracterizado por las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{A}, I] = 0, \quad [\hat{A}^\dagger, I] = 0, \quad [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1, \quad (4.2.33)$$

que definen las relaciones de conmutación de una álgebra de Heisenberg-Weyl en una dimensión, $w(1)$.

Por otra parte, si se consideran los productos

$$K_+ = \frac{1}{2} \hat{A}^\dagger \hat{A}^\dagger, \quad (4.2.34a)$$

$$K_0 = \frac{1}{2} (\hat{A} \hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger \hat{A}), \quad (4.2.34b)$$

$$K_- = \frac{1}{2} \hat{A} \hat{A}, \quad (4.2.34c)$$

se encuentra fácilmente que satisfacen las propiedades de conmutación siguientes:

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \quad [K_+, K_-] = K_0. \quad (4.2.35)$$

que son las relaciones de conmutación que definen los generadores de una álgebra de Lie $sp(2, R)$. Es importante hacer notar que el operador Hamiltoniano (4.1.2) puede reescribirse como una combinación lineal de los operadores $\{K_+, K_-, K_0\}$, lo que justifica la denominación de $w_1 \wedge sp(2, R)$ como el álgebra dinámica de simetrías del sistema.

4.3 Estados coherentes generalizados

En el Capítulo 3 se estudiaron los estados coherentes del campo electromagnético y se investigaron sus propiedades estadísticas. Estos estados se identifican ahora con el comportamiento clásico de la luz y se llaman estados clásicos que minimizan el principio de incertidumbre de Heisenberg, que tienen el menor ruido cuántico $\sigma_p = \sigma_q = 1/2$. Las constantes de movimiento \hat{A} y \hat{A}^\dagger satisfacen las mismas relaciones de conmutación que los operadores a y a^\dagger que cuantizan el campo electromagnético en el vacío (ver la ecuación (4.2.27)), y como la determinación de los eigenestados del operador de número y por tanto los estados del sistema de oscilador armónico dependen únicamente de las relaciones de conmutación de los operadores a^\dagger de creación y a de aniquilación, se puede definir estados que son eigenfunciones del operador \hat{A} y que por lo tanto se denominarán estados coherentes generalizados, a pesar de que no satisfacen las propiedades de coherencia indicadas en el Capítulo 3.

Considerese primeramente el estado vacío, esto es

$$\hat{A}(t)|0\rangle = 0, \quad (4.3.1)$$

donde $\hat{A}(t)$ está definido por la relación (4.2.24). Para obtener la representación en el espacio de coordenadas se toma entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q | \hat{A} | 0 \rangle \\ &= \lambda_p \langle q | \hat{p} | 0 \rangle + \lambda_q \langle q | \hat{q} | 0 \rangle \\ &= -i\lambda_p \frac{\partial}{\partial q} \langle q | 0 \rangle + \lambda_q q \langle q | 0 \rangle \\ &= -i\lambda_p \frac{\partial \psi_0}{\partial q} + \lambda_q q \psi_0. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Resolviendo ésta ecuación se encuentra que

$$\psi_0(q, t) = k(t) \exp \left\{ -\frac{i\lambda_q}{2\lambda_p} q^2 \right\}, \quad (4.3.3)$$

donde $k(t)$ se determina pidiendo que $\psi_0(q, t)$ satisfaga la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, es decir

$$i \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = -\frac{a}{2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial q^2} - \frac{ib}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q} (q \psi_0) + q \frac{\partial \psi_0}{\partial q} \right) + \frac{c}{2} q^2 \psi_0. \quad (4.3.4)$$

Usando la forma de λ_q en terminos de λ_p y $\dot{\lambda}_p$ dada por (4.2.25b), la expresión (4.3.4) se puede expresar como

$$\psi_0 = k(t) \exp \left\{ i \frac{\dot{\lambda}_p - b \lambda_p}{2a \lambda_p} q^2 \right\}. \quad (4.3.5)$$

Calculando entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial q} &= i \left(\frac{\dot{\lambda}_p - b \lambda_p}{a \lambda_p} \right) q \psi_0, \\ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial q^2} &= \left[-q^2 \left(\frac{\dot{\lambda}_p - b \lambda_p}{a \lambda_p} \right)^2 + i \left(\frac{\dot{\lambda}_p - b \lambda_p}{a \lambda_p} \right) \right] \psi_0, \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial t} &= \left[\frac{\dot{k}}{k} + \frac{iq^2}{2(a\lambda_p)^2} (a\lambda_p \ddot{\lambda}_p - \dot{a}\lambda_p \dot{\lambda}_p - a\dot{\lambda}_p^2 + \lambda_p^2(\dot{a}b - a\dot{b})) \right] \psi_0, \end{aligned}$$

y substituyendo en (4.3.4) se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[2i \frac{\dot{k}}{k} - \frac{q^2}{(a\lambda_p)^2} (a\lambda_p \ddot{\lambda}_p - \dot{a}\lambda_p \dot{\lambda}_p - a\dot{\lambda}_p^2 + \lambda_p^2(\dot{a}b - a\dot{b})) \right] \psi_0 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{a} \left[\left(\frac{\dot{\lambda}_p - b\lambda_p}{\lambda_p} \right)^2 + 2b \left(\frac{\dot{\lambda}_p - b\lambda_p}{\lambda_p} \right) + ac \right] - i \left[b + \frac{\dot{\lambda}_p - b\lambda_p}{\lambda_p} \right] \right\} \psi_0. \quad (4.3.6) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las distintas potencias de q en ambos lados de (4.3.6) se obtienen las relaciones

$$-\lambda_p \left[\ddot{\lambda}_p - \dot{\lambda}_p \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \lambda_p \left(-\dot{b} + ac - b^2 + b \frac{\dot{a}}{a} \right) \right] = 0, \quad (4.3.7a)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\lambda}_p}{\lambda_p}. \quad (4.3.7b)$$

Comparando con (4.2.14) se observa que la condición que establece (4.3.7a) no es otra cosa que requerir que λ_p sea solución de (4.2.14), pero como por definición λ_p es

una combinación lineal de $h_1(t)$ y $h_2(t)$, dicha condición se satisface automáticamente. Resolviendo entonces (4.3.7b) se encuentra que

$$k(t) = (N^2 \lambda_p)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.3.8)$$

por lo que

$$\psi_0(q, t) = \frac{1}{N \lambda_p^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{i \lambda_q}{2 \lambda_p} q^2 \right\}, \quad (4.3.9)$$

donde N se fija requiriendo que ψ_0 esté normalizada a la unidad,

$$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(q, t) \psi_0(q, t) dq \equiv 1, \quad (4.3.10)$$

resultando

$$N = (2\pi)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.3.11)$$

hasta una fase arbitraria.

Por analogía con los estados coherentes se define

$$|\alpha, t\rangle = D(\alpha, t)|0\rangle, \quad (4.3.12)$$

donde

$$D(\alpha, t) = \exp \left(\alpha \hat{A}^\dagger - \alpha^* \hat{A} \right). \quad (4.3.13)$$

Utilizando (4.3.1) y el teorema de B.C.H. (3.3.21) se tiene

$$|\alpha, t\rangle = \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \exp \{ \alpha \hat{A}^\dagger \} |0\rangle. \quad (4.3.14)$$

Expresando \hat{A}^\dagger en términos de \hat{p} y \hat{q} , el estado coherente generalizado $\psi_\alpha(q, t)$ en la representación de coordenadas es

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(q, t) &= \langle q | \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{i\alpha^2}{2} \lambda_q^* \lambda_p^* \right) \exp \{ \alpha \lambda_q^* \hat{q} \} \exp \{ \alpha \lambda_p^* \hat{p} \} |0\rangle \\ &= \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{i\alpha^2}{2} \lambda_q^* \lambda_p^* \right) \exp \{ \alpha \lambda_q^* q \} \exp \left\{ -i\alpha \lambda_p^* \frac{\partial}{\partial q} \right\} \langle q | 0 \rangle \\ &= \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{i\alpha^2}{2} \lambda_q^* \lambda_p^* \right) \exp \{ \alpha \lambda_q^* q \} \psi_0(q - i\lambda_p^* \alpha). \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Substituyendo la forma explícita de $\psi_0(q, t)$ en la expresión anterior, se puede reescribir como

$$\psi_\alpha(q, t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}i\alpha t}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \lambda_p^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{i}{2\lambda_p} (\lambda_q q^2 - 2\alpha q + i\alpha^2 \lambda_p^*) \right\}, \quad (4.3.16)$$

por lo que

$$\psi_\alpha(q, t) \psi_\alpha^*(q, t) = \frac{1}{(2\pi\sigma_q)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(q - \langle \hat{q} \rangle_{\alpha, t})^2}{2\sigma_q} \right\}. \quad (4.3.17)$$

Es decir, la densidad de probabilidad en el espacio de coordenadas está expresada por una función de distribución normal determinada por los parámetros σ_q y $\langle \hat{q} \rangle_{\alpha, t}$, cuya interpretación probabilística es que $\langle \hat{q} \rangle_{\alpha, t}$ es la esperanza matemática y σ_q es el cuadrado de la desviación cuadrática media. Estas cantidades se determinan más adelante.

Propiedades de los estados coherentes generalizados

En analogía al caso del oscilador armónico, a continuación se obtendrán las expresiones para los valores esperados y las dispersiones en los operadores de posición y de momento con respecto a los estados $\psi_\alpha(q, t)$

Utilizando la matriz inversa de Λ_{pq} para expresar \hat{A}^\dagger y \hat{A} en términos de \hat{p} y \hat{q}

$$\Lambda_{pq}^{-1} = -i \begin{pmatrix} \lambda_q^* & -\lambda_q \\ -\lambda_p^* & \lambda_p \end{pmatrix}, \quad (4.3.18)$$

se tiene que

$$\hat{p} = i\{\lambda_q \hat{A}^\dagger - \lambda_q^* \hat{A}\}, \quad \hat{q} = i\{\lambda_p^* \hat{A} - \lambda_p \hat{A}^\dagger\}. \quad (4.3.19a, b)$$

Para obtener los valores esperados de \hat{p} y \hat{q} se utilizan los resultados

$$\hat{A}|\alpha, t\rangle = \alpha|\alpha, t\rangle, \quad \langle \alpha, t | \hat{A}^\dagger = \alpha^* \langle \alpha, t |, \quad (4.3.20a, b)$$

encontrándose

$$\begin{aligned} \langle \hat{q} \rangle_{\alpha, t} &= \langle \alpha, t | \hat{q} | \alpha, t \rangle \\ &= i(\lambda_p^* \alpha - \lambda_p \alpha^*), \end{aligned} \quad (4.3.21a)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle_{\alpha, t} &= \langle \alpha, t | \hat{p} | \alpha, t \rangle \\ &= -i(\lambda_q^* \alpha - \lambda_q \alpha^*). \end{aligned} \quad (4.3.21b)$$

En forma similar, tomando el cuadrado de las expresiones (4.3.19) y utilizando las relaciones de conmutación entre \hat{A} y \hat{A}^\dagger se determinan los valores esperados de q^2 y p^2 .

$$\begin{aligned}\langle \hat{q}^2 \rangle_{\alpha,t} &= \langle \alpha, t | \hat{q}^2 | \alpha, t \rangle \\ &= -\langle \alpha, t | \lambda_p^{*2} \hat{A}^2 - |\lambda_p|^2 (2\hat{A}^\dagger \hat{A} + 1) + \lambda_p^2 \hat{A}^{\dagger 2} | \alpha, t \rangle \\ &= -[\alpha^2 \lambda_p^{*2} + \alpha^{*2} \lambda_p^2 - |\lambda_p|^2 (1 + 2|\alpha|^2)] ,\end{aligned}\quad (4.3.22a)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{p}^2 \rangle_{\alpha,t} &= \langle \alpha, t | \hat{p}^2 | \alpha, t \rangle \\ &= -\langle \alpha, t | \lambda_q^{*2} \hat{A}^2 - |\lambda_q|^2 (2\hat{A}^\dagger \hat{A} + 1) + \lambda_q^2 \hat{A}^{\dagger 2} | \alpha, t \rangle \\ &= -[\alpha^2 \lambda_q^{*2} + \alpha^{*2} \lambda_q^2 - |\lambda_q|^2 (1 + 2|\alpha|^2)] .\end{aligned}\quad (4.3.22b)$$

Por medio de las expresiones (4.3.21) y (4.3.22) es directo evaluar las dispersiones en las posiciones y momentos, esto es

$$\sigma_q \equiv \langle \hat{q}^2 \rangle_{\alpha,t} - \langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t}^2 = |\lambda_p|^2 , \quad \sigma_p \equiv \langle \hat{p}^2 \rangle_{\alpha,t} - \langle \hat{p} \rangle_{\alpha,t}^2 = |\lambda_q|^2 . \quad (4.3.23a, b)$$

Por otra parte, el producto simetrizado de los operadores de posición y momento está dado por

$$\frac{1}{2} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) = \lambda_q^* \lambda_p^* \hat{A}^2 + \lambda_q \lambda_p \hat{A}^{\dagger 2} - (\lambda_q^* \lambda_p + \lambda_p^* \lambda_q) \left(\frac{1}{2} + \hat{A}^\dagger \hat{A} \right) .$$

En esta forma, el valor esperado de la expresión anterior sera

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}}{2} \right\rangle_{\alpha,t} &= \langle \alpha, t | \frac{1}{2} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) | \alpha, t \rangle \\ &= \lambda_q^* \lambda_p^* \alpha^2 + \lambda_q \lambda_p \alpha^{*2} - (\lambda_q^* \lambda_p + \lambda_p^* \lambda_q) \left(\frac{1}{2} + |\alpha|^2 \right) .\end{aligned}\quad (4.3.24)$$

Utilizando los resultados (4.3.21) se tiene que

$$\langle \hat{p} \rangle_{\alpha,t} \langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t} = \lambda_p^* \lambda_q^* \alpha^2 + \lambda_p \lambda_q \alpha^{*2} - (\lambda_p^* \lambda_q + \lambda_p \lambda_q^*) |\alpha|^2 , \quad (4.3.25)$$

por lo que la dispersión en el producto de los operadores de posición y momento, que da una medida de la correlación entre \hat{q} y \hat{p} , está definida por la expresión

$$\begin{aligned}\sigma_{pq} &\equiv \left\langle \frac{\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}}{2} \right\rangle_{\alpha,t} - \langle \hat{p} \rangle_{\alpha,t} \langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t} \\ &= -\frac{(\lambda_q^* \lambda_p + \lambda_p^* \lambda_q)}{2} ,\end{aligned}\quad (4.3.26)$$

donde para obtener la última expresión se utilizaron las ecuaciones (4.3.24) y (4.3.25).

Principio de Incertidumbre.

Como se señaló brevemente en el Capítulo 3, una propiedad importante que caracteriza a los estados coherentes es que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg. Los estados que se han denominado aquí estados coherentes generalizados (también conocidos como estados coherentes correlacionados ver [2]), resultan estar caracterizados por una propiedad similar. Concretamente, son los estados que minimizan la llamada relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson, la cual constituye una generalización de la relación debida a Heisenberg. Dicha generalización fue introducida por E. Schrödinger [5] y H. P. Robertson [6] para el caso en que se consideran operadores Hermitianos y el estado del sistema sea un estado puro. La extensión de estos resultados para operadores arbitrarios y sistemas cuánticos abiertos, fue presentada por V. V. Dodonov, E. V. Kurmyshev y V. I. Man'ko [7] y consiste en lo siguiente:

Sean \hat{A} y \hat{B} dos operadores arbitrarios, no necesariamente Hermitianos, y $\hat{\rho}$ una matriz de densidad también arbitraria. Considerese ahora

$$\hat{F} = \alpha \Delta \hat{A} + i \Delta \hat{B}, \quad (4.3.27)$$

donde $\alpha \equiv \alpha_1 + i\alpha_2$ es un número complejo arbitrario y por definición

$$\Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \quad (4.3.28)$$

con $\langle \hat{A} \rangle \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})$. Como el operador $\hat{F}^\dagger \hat{F}$ es Hermitiano y positivo semidefinido, al igual que $\hat{\rho}$, se cumple la desigualdad

$$\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{F}^\dagger \hat{F}) \geq 0. \quad (4.3.29)$$

Por la definición (4.3.27), la expresión (4.3.29) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{F}^\dagger \hat{F}) &= \alpha_1^2 \langle \Delta \hat{A}^\dagger \Delta \hat{A} \rangle + i\alpha_1 (\langle \Delta \hat{A}^\dagger \Delta \hat{B} \rangle - \langle \Delta \hat{B}^\dagger \Delta \hat{A} \rangle) \\ &+ \alpha_2^2 \langle \Delta \hat{A}^\dagger \Delta \hat{A} \rangle + \alpha_2 (\langle \Delta \hat{A}^\dagger \Delta \hat{B} \rangle + \langle \Delta \hat{B}^\dagger \Delta \hat{A} \rangle) \\ &+ \langle \Delta \hat{B}^\dagger \Delta \hat{B} \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho \hat{F}^1 \hat{F}) &= \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{A} \rangle \left(\alpha_1 + i \frac{\langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{B} - \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{A} \rangle}{2 \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{A} \rangle} \right)^2 \\ &+ \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{A} \rangle \left(\alpha_2 + \frac{\langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{B} + \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{A} \rangle}{2 \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{A} \rangle} \right)^2 \\ &+ \langle \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{B} \rangle - \frac{(i \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{B} - \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{A} \rangle)^2}{4 \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{A} \rangle} \\ &- \frac{(\langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{B} + \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{A} \rangle)^2}{4 \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{A} \rangle} \geq 0. \end{aligned}$$

Eligiendo los números reales α_1 y α_2 en tal forma que se cancelen los primeros dos términos se observa que necesariamente $\langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{B} - \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{A} \rangle$ es un número puramente imaginario, por lo cual se concluye que

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{A} \rangle \langle \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{B} \rangle &\geq \frac{1}{4} \left| \langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{B} - \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{A} \rangle \right|^2 \\ &+ \frac{1}{4} \left[\langle \Delta \hat{A}^1 \Delta \hat{B} + \Delta \hat{B}^1 \Delta \hat{A} \rangle \right]^2. \quad (4.3.30) \end{aligned}$$

Introduciendo las dispersiones

$$\sigma_A = \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle, \quad \sigma_B = \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle, \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} + \Delta \hat{B} \Delta \hat{A} \rangle,$$

la ecuación (4.3.30), para operadores Hermitianos, queda expresada en la forma

$$\sigma_A \sigma_B - \sigma_{AB}^2 \equiv \sigma_A \sigma_B (1 - r^2) \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2, \quad (4.3.31)$$

donde se substituyó $\langle \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} - \Delta \hat{B} \Delta \hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle$ y se definió

$$r \equiv \frac{|\sigma_{AB}|}{\sqrt{\sigma_A \sigma_B}}. \quad (4.3.32)$$

De lo anterior se observa entonces que si no se tiene información sobre el sistema que se estudia, lo más que se puede decir es que $\sigma_p \sigma_q \geq \frac{\hbar^2}{4}$. Sin embargo, si se sabe que el coeficiente de correlación definido por (4.3.32) es distinto de cero, además puede decirse que la cota inferior del producto $\sigma_p \sigma_q$ es mayor que la correspondiente

a un sistema con $r = 0$ y está dada por $\frac{\hbar^2}{4(1-r^2)}$. En otras palabras, las fluctuaciones cuánticas de un estado con $r \neq 0$ serán mayores que las de un estado con $r = 0$.

Para el caso particular que se está tratando, es fácil ver con ayuda de las expresiones (4.3.23), (4.3.26) y el hecho de que $\det \Lambda_{pq} = i$

$$1 - r^2 = \frac{1}{4\sigma_p\sigma_q},$$

es decir

$$\sigma_p\sigma_q - \sigma_{pq}^2 = \frac{1}{4}, \quad (4.3.33)$$

lo cual implica que los estados coherentes generalizados minimizan la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson.

4.4 Operador de evolución

Considerese un sistema descrito por el Hamiltoniano $H(t)$, entonces la ecuación de evolución del sistema está definida por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t}. \quad (4.4.1)$$

El operador de evolución se define como

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle. \quad (4.4.2)$$

lo que implica que $U(0) = I$.

Substituyendo la expresión anterior en la ecuación (4.4.1) se determina la ecuación que debe satisfacer el operador de evolución, esto es

$$i\frac{dU}{dt} = HU, \quad (4.4.3a)$$

$$-i\frac{dU^\dagger}{dt} = U^\dagger H, \quad (4.4.3b)$$

donde la última expresión se obtiene al tomar el Hermitiano conjugado de la primera. Multiplicando (4.4.3a) por la izquierda con U^\dagger y la expresión (4.4.3b) con U por la derecha, al abstraer las igualdades resultantes se obtiene

$$\frac{dU^\dagger U}{dt} = 0 \quad \text{y usando que} \quad U(0) = I$$

$$\Rightarrow \quad U^\dagger U = I. \quad (4.4.4)$$

esto es el operador de evolución es un operador unitario.

Una integral de movimiento cuántica es un operador que actúa en el espacio de estados del sistema físico cuyo valor promedio no cambia durante la evolución del sistema, esto es

$$\langle \psi(t) | I(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | I(0) | \psi(0) \rangle. \quad (4.4.5)$$

Substituyendo (4.4.2) en (4.4.5) se obtiene

$$\langle \psi(0) | U^\dagger I(t) U | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | I(0) | \psi(0) \rangle, \quad (4.4.6)$$

como la expresión anterior es cierta para todo bra $\langle \psi(0) |$ y ket $|\psi(0)\rangle$ debe cumplirse que

$$U^\dagger I(t) U = I(0) \quad \Rightarrow \quad I(t) = U I(0) U^\dagger. \quad (4.4.7)$$

Función de Green

A los elementos de matriz del operador de evolución en una representación determinada (ejemplos comunmente utilizados son la representación de coordenadas, la de momentos, y la de estados coherentes) se les llama función de Green. En ésta sección se determinará la función de Green en la representación de estados coherentes asociada al Hamiltoniano (4.1.2), y se verá como de ella resulta directo encontrar la probabilidad de que un estado coherente generalizado tenga un número definido de cuantos ó fotones.

Por lo dicho anteriormente, la función de Green está determinada por la expresión

$$\begin{aligned} G(\alpha^*, \beta, t) &= \langle \alpha | U(t) | \beta \rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right) \bar{G}(\alpha^*, \beta, t), \end{aligned} \quad (4.4.8a)$$

donde se utilizaron los estados coherentes normalizados de la ecuación (3.3.23) y se definió la función

$$\bar{G}(\alpha^*, \beta, t) \equiv \{ \alpha | U(t) | \beta \}, \quad (4.4.8b)$$

en términos de los estados coherentes no-normalizados

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle.$$

Estos estados reciben el nombre de estados generadores, ya que su desarrollo en serie de Taylor genera los estados de un oscilador armónico, y a su producto escalar se le denomina núcleo reproductor.

Tomando el elemento de matriz de la ecuación (4.4.7) con respecto a los estados coherentes no-normalizados, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \alpha | I(t) U(t) | \beta \rangle &= \langle \alpha | U(t) I(0) | \beta \rangle \\ \Rightarrow \int \langle \alpha | I(t) | \gamma \rangle \langle \gamma | U(t) | \beta \rangle d\gamma &= \int \langle \alpha | U(t) | \gamma \rangle \langle \gamma | I(0) | \beta \rangle d\gamma \quad (4.4.9) \end{aligned}$$

donde en la última expresión se utilizó que los estados generadores forman un conjunto completo de estados. Por medio de la definición (4.4.8b) y la representación de las constantes de movimiento en el espacio de estados coherentes no-normalizados, se determina la ecuación diferencial que satisface la función de Green

$$\begin{aligned} \int I_{\alpha^*}(t) \langle \alpha | \gamma \rangle \tilde{G}(\gamma^*, \beta, t) d\gamma &= \int I_{\beta}(0) \langle \gamma | \beta \rangle \tilde{G}(\alpha^*, \gamma, t) d\gamma \\ \Rightarrow I_{\alpha^*}(t) G(\alpha^*, \beta, t) &= I_{\beta}(0) G(\alpha^*, \beta, t). \quad (4.4.10) \end{aligned}$$

Para encontrar la forma explícita de $\tilde{G}(\alpha^*, \beta, t)$ ó equivalentemente de su forma normalizada $G(\alpha^*, \beta, t)$, es conveniente observar que utilizando la relación de conmutación para los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico (3.3.3) y la identidad

$$\exp(\alpha^* \hat{a}) \hat{O} \exp(-\alpha^* \hat{a}) = \hat{O} + [\alpha^* \hat{a}, \hat{O}] + \frac{1}{2!} [\alpha^* \hat{a}, [\alpha^* \hat{a}, \hat{O}]] + \dots \quad (4.4.11)$$

se obtienen las dos expresiones

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{a} | \psi \rangle &= \langle 0 | \exp(\alpha^* \hat{a}) \hat{a} \exp(-\alpha^* \hat{a}) \exp(\alpha^* \hat{a}) | \psi \rangle \\ &= \langle 0 | \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (\exp(\alpha^* \hat{a})) | \psi \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \langle 0 | \exp(\alpha^* \hat{a}) | \psi \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \langle \alpha | \psi \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \psi \rangle &= \langle 0 | \exp(\alpha^* \hat{a}) \hat{a}^\dagger \exp(-\alpha^* \hat{a}) \exp(\alpha^* \hat{a}) | \psi \rangle \\ &= \langle 0 | (\hat{a}^\dagger + \alpha^*) \exp(\alpha^* \hat{a}) | \psi \rangle \\ &= \alpha^* \langle \alpha | \psi \rangle. \end{aligned}$$

Dada entonces la arbitrariedad del ket $|\psi\rangle$ se concluye que

$$\{\alpha|\hat{n} = \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\{\alpha\}, \quad (4.4.12a)$$

$$\{\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\{\alpha\}. \quad (4.4.12b)$$

En forma completamente análoga se obtiene la representación para los operadores de creación y aniquilación cuando actúan a la derecha de un estado coherente no normalizado

$$\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle, \quad (4.4.13a)$$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (4.4.13b)$$

Utilizando entonces la expresión de los operadores $\hat{A}(t)$ y $\hat{A}^\dagger(t)$ en términos de los operadores de creación y aniquilación dada por (4.2.28) y las relaciones (4.4.12) y (4.4.13), la ecuación (4.4.10) con $I(t) = \hat{A}(t)$ está dada por

$$\left(M_1 \frac{\partial}{\partial\alpha^*} + M_2 \alpha^*\right) \tilde{G}(\alpha^*, \beta, t) = \beta \tilde{G}(\alpha^*, \beta, t), \quad (4.4.14a)$$

de la misma forma si $I(t) = \hat{A}^\dagger(t)$ y se utiliza (4.4.12) y (4.4.13), la ecuación (4.4.10) se reduce a

$$\left(M_2^* \frac{\partial}{\partial\alpha^*} + M_1^* \alpha^*\right) \tilde{G}(\alpha^*, \beta, t) = \frac{\partial}{\partial\beta} \tilde{G}(\alpha^*, \beta, t). \quad (4.4.14b)$$

Así $\tilde{G}(\alpha^*, \beta, t)$ está determinada por el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (4.4.14).

Resolviendo (4.4.14a) se tiene

$$\tilde{G}(\alpha^*, \beta, t) = g(\beta, t) \exp\left\{\frac{\beta\alpha^*}{M_1} - \frac{M_2}{2M_1}\alpha^{*2}\right\}.$$

Substituyendo esta expresión en (4.4.14b) se encuentra que

$$g(\beta, t) = g_0(t) \exp\left\{\frac{M_2^*\beta^2}{2M_1} + \left(M_1^*\alpha^* - \frac{\alpha^*}{M_1} - \frac{|M_2|^2}{M_1}\alpha^*\right)\beta\right\},$$

donde utilizando las propiedades de la matriz simpléctica M se tiene que el término entre paréntesis redondos vale cero. Por medio de las expresiones anteriores la ecuación (4.4.8a) puede escribirse como

$$G(\alpha^*, \beta, t) = g_0(t) \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} \right) \times \exp \left\{ \frac{M_2^*}{2M_1} \beta^2 - \frac{M_2}{2M_1} \alpha^{*2} + \frac{1}{M_1} \alpha^* \beta \right\}. \quad (4.4.15)$$

Para encontrar $g_0(t)$, se observa que dado que el operador de evolución queda completamente determinado por (4.4.3a), entonces $G(\alpha^*, \beta, t)$ debe satisfacer la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en la representación de estados coherentes normalizados, es decir

$$i \frac{\partial G(\alpha^*, \beta, t)}{\partial t} = \mathcal{H}(\alpha^*) G(\alpha^*, \beta, t), \quad (4.4.16)$$

con el operador $\mathcal{H}(\alpha^*)$ dado por la expresión ¹

$$\mathcal{H}(\alpha^*) = \left[-\frac{a(t)}{4} + \frac{b(t)}{2i} + \frac{c(t)}{4} \right] \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} + \left[\frac{a(t)}{2} + \frac{c(t)}{2} \right] \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \left[-\frac{a(t)}{4} + \frac{ib(t)}{2} + \frac{c(t)}{4} \right] \alpha^{*2} + \left[\frac{a(t)}{4} + \frac{c(t)}{4} \right]. \quad (4.4.17)$$

Utilizando (4.4.15), se calculan las derivadas $\frac{\partial G}{\partial \alpha^*}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^{*2}}$ y $\frac{\partial G}{\partial t}$ de la función G

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha^*} = \left[-\frac{\alpha}{2} - \frac{M_2}{M_1} \alpha^* + \frac{1}{M_1} \beta \right] G, \quad (4.4.18a)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^{*2}} = \left[-\frac{\alpha}{2} - \frac{M_2}{M_1} \alpha^* + \frac{1}{M_1} \beta \right]^2 G - \frac{M_2}{M_1} G, \quad (4.4.18b)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \dot{g}_0 G + \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^* \alpha^{*2} + \beta \alpha \left(\frac{1}{M_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{M_2^*}{M_1} \right) \beta^2 \right] G, \quad (4.4.18c)$$

donde $(\dot{\quad})^*$ indica la derivada total con respecto al tiempo. Como lo que interesa es encontrar $g_0(t)$, que es evidentemente independiente de α y β , basta resolver (4.4.16) para valores fijos de dichos parámetros, los cuales se eligen por simplicidad como

¹ En el Apéndice B se deduce esta relación.

$\alpha = 0 = \beta$. Utilizando (4.4.18) se tiene entonces que

$$\left[\mathcal{H}(\alpha^*) G(\alpha^*, \beta, t) \right]_{\alpha=\beta=0} = \left[\frac{a(t)}{4} - \frac{b(t)}{2i} - \frac{c(t)}{4} \right] \frac{M_2}{M_1} g_0(t) + \left[\frac{a(t)}{4} + \frac{c(t)}{4} \right] g_0(t),$$

$$\left[i \frac{\partial G(\alpha^*, \beta, t)}{\partial t} \right]_{\alpha=\beta=0} = i \dot{g}_0(t).$$

Substituyendo en (4.4.15), la ecuación diferencial que determina a $g_0(t)$ es

$$i \dot{g}_0(t) = \frac{g_0}{2M_1} \left\{ \frac{a(t)}{2} (M_1 + M_2) + ib(t)M_2 + \frac{c(t)}{2} (M_1 - M_2) \right\}. \quad (4.4.19)$$

Recordando las ecuaciones de movimiento que satisfacen las constantes de movimiento del sistema

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{p}_0 = \{H, \hat{p}\}, \quad i \frac{\partial}{\partial t} \hat{q}_0 = \{H, \hat{q}\},$$

se deduce, de acuerdo al Apéndice B, que

$$\dot{\Lambda} = \Lambda \Sigma B,$$

donde Λ y Σ fueron definidas en las expresiones (4.2.10) y (4.2.19), respectivamente. La matriz B está dada en términos de los coeficientes $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ que aparecen en el Hamiltoniano (4.1.2)

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Utilizando la relación entre las matrices simplécticas Λ y M , es decir

$$M = y \Lambda y^{-1},$$

con

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene que

$$\dot{M} = M (y \Sigma B y^{-1}).$$

Con la expresión anterior, es directo encontrar que el término entre paréntesis de llave en (4.4.19) es igual a $-i \dot{M}_1$ y dicha ecuación se reduce a

$$i \frac{\dot{g}_0}{g_0} = -i \frac{\dot{M}_1}{2M_1}. \quad (4.4.20)$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior se obtiene

$$g_0(t) = g_0(0)M_1^{-\frac{1}{2}},$$

y utilizando el hecho de que en $t = 0$ la función de Green satisface la relación

$$G(\alpha^*, \beta, 0) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta\right) \Rightarrow g_0(0) = 1.$$

Finalmente, por medio de los resultados anteriores se obtiene la función de Green asociada al Hamiltoniano (4.1.2),

$$G(\alpha^*, \beta, t) = M_1^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right) \exp\left\{\frac{M_2^*}{2M_1} \beta^2 - \frac{M_2}{2M_1} \alpha^{*2} + \frac{1}{M_1} \alpha^* \beta\right\}. \quad (4.4.21)$$

Función de distribución del número de fotones

En el caso del oscilador armónico, partiendo de

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned}$$

se identificó la función de distribución del número de fotones como el coeficiente del desarrollo en los estados de Fock, esto es

$$\langle n|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}.$$

Para el caso de estados coherentes generalizados, utilizando la definición (4.4.8a) se tiene que

$$\begin{aligned} G(\alpha^*, \beta, t) &= \langle \alpha|U(t)|\beta\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \alpha|n\rangle \langle n|U(t)|\beta\rangle. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Denotando

$$\mu = \alpha^* \left(\frac{M_2}{2M_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = \frac{\beta}{\sqrt{2M_1M_2}},$$

y utilizando (4.4.21) se tiene que

$$\begin{aligned} G(\alpha^*, \beta, t) &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right) M_1^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{M_2^* \beta^2}{2M_1}\right) \exp(-\mu^2 + 2\mu x), \\ &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right) M_1^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{M_2^* \beta^2}{2M_1}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} H_n(x), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó la función generadora, $\exp(-\mu^2 + 2\mu x)$, de los polinomios de Hermite. Identificando $\langle \alpha | n \rangle$ en la última igualdad de la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} G(\alpha^*, \beta, t) &= \frac{1}{M_1^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2} + \frac{M_2^* \beta^2}{2M_1}\right) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{M_2}{2M_1}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2M_1M_2}}\right) \left[e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \right], \end{aligned}$$

y comparando con la expresión (4.4.22) se determina la función de distribución del número de fotones asociada al estado coherente generalizado, que es solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del Hamiltoniano (4.1.2)

$$\langle n | U(t) | \beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{n! M_1}} \left(\frac{M_2}{2M_1}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2} + \frac{M_2^* \beta^2}{2M_1}\right) H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2M_1M_2}}\right). \quad (4.4.23)$$

La probabilidad de que el estado coherente β tenga n fotones al tiempo t es entonces

$$\mathcal{P}_n(\beta) = |\langle n | U(t) | \beta \rangle|^2.$$

la cual utilizando la relación entre M_1 , M_2 y las funciones λ_p y λ_q (4.2.31), junto con las relaciones (4.3.21) y (4.3.23), queda expresada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(\beta, t) &= \frac{1}{n!} \left[\frac{2}{\sigma_p + \sigma_q + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sigma_p + \sigma_q - 1}{4(\sigma_p + \sigma_q + 1)} \right]^{\frac{n}{2}} e^{-|\beta|^2} \\ &\quad \times \exp\left\{ \frac{2|\beta|^2(\sigma_p + \sigma_q) - \langle \hat{p} \rangle_{\beta, t}^2 - \langle \hat{q} \rangle_{\beta, t}^2}{2(\sigma_p + \sigma_q + 1)} \right\} \\ &\quad \times \left| H_n \left(\beta \left[\frac{\lambda_q^{*2} + \lambda_p^{*2}}{(\sigma_p + \sigma_q)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Para $t = 0$ la expresión anterior es una distribución de Poisson, lo que se deduce de (4.4.21) tomando en cuenta que (en $t = 0$), $M_2 \equiv 0^2$. Para este valor de t puede verificarse también de la expresión (4.4.24) que la probabilidad de encontrar un número impar de fotones para el estado vacío ($n = 0$) de cualquier Hamiltoniano cuadrático es cero y solamente pueden tenerse números pares. Este comportamiento es similar al encontrado recientemente para los estados de gato de Schrödinger [8].

4.5 Funciones cuasiprobabilísticas de Wigner y Husimi

Función de Wigner

La función de Wigner representa uno de los ejemplos más importantes de lo que se conoce como funciones de cuasi-probabilidad. La noción de éstas funciones fue introducida por primera vez por E.P. Wigner [9] ante la imposibilidad, derivada del principio de incertidumbre, de obtener dentro del formalismo de la mecánica cuántica la posibilidad de que una partícula tenga una posición y un momento bien definidos simultáneamente. Esto ocasiona que el concepto de espacio fase y por tanto la definición misma de una función de distribución de probabilidades en dicho espacio se torne problemática.

El uso de las funciones de cuasi-probabilidad constituye más que una herramienta matemática una completa reformulación de la mecánica cuántica no relativista de Schrödinger (en la que se describen los estados en términos de funciones en el espacio de configuraciones), por un formalismo en términos de conceptos clásicos, en el cual la matriz densidad del sistema es substituida por la función de cuasi-probabilidad.

Para apreciar esto es ilustrativo hacer la siguiente comparación. Considerese por ejemplo una partícula clásica descrita por una función de distribución en el espacio fase $\mathcal{P}_{cl}(q, p)$. El promedio de una función $A(q, p)$ de la posición y del momento está dado por

$$\langle A \rangle_{\text{clásico}} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp A(q, p) \mathcal{P}_{cl}(q, p). \quad (4.5.1)$$

Cuánticamente, por el contrario, se tiene que si una partícula está descrita por un operador densidad $\hat{\rho}$, el promedio de una función de los operadores de posición y momento

² Confrontar con la ecuación (5.2.20).

$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ es

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{cuántico}} = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) \quad (4.5.2)$$

Es importante notar que dada una cantidad clásica $A(q, p)$, su correspondiente operador cuántico \hat{A} no está definido de forma única, y lo que es más, no resulta claro en todos los casos el significado de dicha definición. En este sentido se puede apreciar también la utilidad de introducir las funciones de cuasi-probabilidad, pues es solo con ayuda de dichas funciones que la identificación mencionada llega a ser consistente si se define el promedio de una cantidad \hat{A} como

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{cuántico}} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp A(q, p) \mathcal{P}_q(q, p), \quad (4.5.3)$$

que es muy similar a la definición clásica (4.5.1). En la expresión anterior, se utilizó $\mathcal{P}_q(q, p)$ para denotar a la función de distribución de cuasi-probabilidades y la función $A(q, p)$ es derivada de $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ mediante un procedimiento específico. En particular si $\mathcal{P}_q(q, p) = W(q, p)$, la función de cuasi-probabilidad de Wigner, la cual se define por

$$W(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q + \frac{u}{2} \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{u}{2} \right\rangle e^{-ipu} du, \quad (4.5.4)$$

$A(q, p)$ queda determinada por

$$A(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q + \frac{u}{2} \left| \hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) \right| q - \frac{u}{2} \right\rangle e^{-ipu} du. \quad (4.5.5)$$

Si el sistema en el que se está interesado se encuentra descrito por un estado cuántico puro, es decir $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, la unicidad de $W(q, p)$ está garantizada por un conjunto de propiedades [10] de las cuales, para propósitos del presente trabajo, conviene destacar las siguientes

1. La reducción de (4.5.4) a

$$W(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q + \frac{u}{2}) \psi(q - \frac{u}{2}) e^{-ip u} du. \quad (4.5.6)$$

2. $W(q, p)$ es real, aunque no siempre positiva.
 3. La función de Wigner permite obtener las distribuciones de probabilidad en las representaciones de coordenadas y momentos a través de las ecuaciones siguientes

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp = |\psi(q)|^2, \quad (4.5.7a)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq = |\psi(p)|^2. \quad (4.5.7b)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp = 1, \quad (4.5.7c)$$

donde la última expresión es una consecuencia de las primeras.

4. Si $W_\psi(q, p)$ y $W_\phi(q, p)$ corresponden a las distribuciones de los estados $\psi(q)$ y $\phi(q)$ respectivamente entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q) \phi(q) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W_\psi(q, p) W_\phi(q, p). \quad (4.5.8a)$$

De la expresión anterior, si $\psi(q) = \phi(q)$ se deduce

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp [W_\psi(q, p)]^2 = 2\pi; \quad (4.5.8b)$$

y si $\psi(q)$ y $\phi(q)$ son ortogonales entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W_\psi(q, p) W_\phi(q, p) = 0. \quad (4.5.8c)$$

5. Si $A(q, p)$ y $B(q, p)$ son las funciones clásicas, dadas por (4.5.5), correspondientes a $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ y $\hat{B}(\hat{q}, \hat{p})$ respectivamente, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp A(q, p) B(q, p) = 2\pi \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}). \quad (4.5.9a)$$

Se observa que si $A(q, p) = \hat{p}$ y $\hat{B} = 1$, la expresión (4.5.7c) es inmediata. En forma similar, si $\hat{B} = \hat{p}$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp A(q, p) W(q, p) = 2\pi \text{Tr}(\hat{p}\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})). \quad (4.5.9b)$$

Como ejemplo de la utilización de éstas ideas considerese los operadores de posición \hat{q} y momento \hat{p} . De acuerdo a lo anterior se tiene que las funciones clásicas correspondientes a estos operadores son $\hat{q} \rightarrow q$ y $\hat{p} \rightarrow p$. Esto se demuestra como sigue: Para el operador de posición

$$\begin{aligned} q &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{u}{2} | \hat{q} | q - \frac{u}{2} \rangle e^{-ip u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{u}{2} | q - \frac{u}{2} \rangle \left(q - \frac{u}{2} \right) e^{-ip u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(q - \frac{u}{2} \right) \delta(u) e^{-ip u} du = q, \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

mientras que para el momento se tiene

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{u}{2} | \hat{p} | q - \frac{u}{2} \rangle e^{-ip u} du \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial (q + \frac{u}{2})} \left[\langle q + \frac{u}{2} | q - \frac{u}{2} \rangle \right] e^{-ip u} du. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Efectuando los cambios de variable

$$\eta = q + \frac{u}{2}, \quad \xi = q - \frac{u}{2},$$

y utilizando la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right). \end{aligned}$$

o la relación inversa

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial u}.$$

Substituyendo los resultados anteriores en la expresión (4.5.11) resulta

$$p = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u} \right) \delta(u) e^{-ipu} du,$$

donde el primer término da cero y el segundo se integra por partes, esto es

$$p = i \int_{-\infty}^{\infty} (-ip) \delta(u) e^{-ipu} du = p.$$

Hasta aquí se ha hecho énfasis en la correspondencia entre un operador cuántico y una cantidad clásica. Historicamente el estudio de la conexión inversa, es decir entre una cantidad clásica de q y p y su operador cuántico correspondiente, ha sido también objeto de importantes estudios entre los que conviene destacar los realizados por Weyl, pues se ha demostrado [11] que están en concordancia con el formalismo de Wigner.

De acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica referentes a la medición de cantidades físicas³, se sabe que si $|\psi\rangle$ denota el vector de estado normalizado de un sistema y \hat{A} representa al operador asociado a una cantidad física A , entonces el único resultado posible al medir A es la obtención de uno de los eigenvalores a_n de \hat{A} , y la probabilidad de obtener cada uno de dichos eigenvalores está dada por la magnitud al cuadrado del producto escalar entre el estado inicial del sistema y $|u_n\rangle$ el eigenvector normalizado asociado al eigenvalor en el cual se está interesado i.e.

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2.$$

Ante la ausencia de un postulado similar referente a la medición de una función clásica de p y q , Weyl propuso la asociación de un operador cuántico a toda función de q y p y definió la medición de dicha cantidad clásica en forma idéntica a la descrita anteriormente. Lo notable de ésta proposición es su conexión con la función de Wigner,

³ Una amplia discusión de este postulado y su extensión para los casos de un espectro continuo y no degenerado es realizada en [3].

ya que en particular si el estado del sistema es ψ , el valor esperado de la medición de un operador \hat{A} , al cual Weyl asocia la función clásica $A(q, p)$, está dado por

$$\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p) A(q, p),$$

donde $W(q, p)$ resulta ser la función de distribución de Wigner asociada a la matriz de densidad $\hat{\rho}$ que describe al sistema.

En resumen se tiene entonces que la posibilidad de asociación entre cantidades cuánticas y clásicas define una regla de cuantización distinta, la cual se conoce como la *regla de cuantización de Weyl* y consiste en lo siguiente. Si $A(q, p)$ es una cantidad física clásica dada por

$$A(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \alpha(\sigma, \tau) e^{i(\sigma q + \tau p)}, \quad (4.5.12a)$$

su operador cuántico correspondiente es determinado por

$$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \alpha(\sigma, \tau) e^{i(\sigma \hat{q} + \tau \hat{p})}. \quad (4.5.12b)$$

Si las relaciones (4.5.12) son satisfechas entonces la expresión de Wigner (4.5.5) que relaciona la función clásica $A(q, p)$ con el operador $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ también se cumple. Otra función que es de gran utilidad para calcular valores esperados de productos de potencias de los operadores de posición y momento es la función característica, que suele denotarse por $C(\sigma, \tau)$

$$C(\sigma, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{i(\sigma q + \tau p)} W(q, p) dq, \quad (4.5.13)$$

es decir $C(\sigma, \tau)$ es la doble transformada de Fourier de la función de Wigner.

A continuación se va a determinar, la función de Wigner asociada a los estados coherentes generalizados. Considerese entonces el operador de densidad,

$$\hat{\rho} = |\alpha, t\rangle \langle \alpha, t|. \quad (4.5.14)$$

De acuerdo a (4.3.20), el operador anterior satisface las relaciones

$$\hat{A}(t) \hat{\rho} = \alpha \hat{\rho}, \quad \hat{\rho} \hat{A}^\dagger(t) = \alpha^* \hat{\rho}. \quad (4.5.15a, b)$$

Por medio de la expresión (4.5.5) es inmediato encontrar las transformadas de Weyl de los operadores siguientes:

$$\hat{\rho} \rightarrow W(q, p), \quad (4.5.16a)$$

$$\hat{p}\hat{\rho} \rightarrow \left(p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) W(q, p), \quad (4.5.16b)$$

$$\hat{q}\hat{\rho} \rightarrow \left(q + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) W(q, p), \quad (4.5.16c)$$

$$\hat{\rho}\hat{\rho} \rightarrow \left(\mu + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) W(q, p), \quad (4.5.16d)$$

$$\hat{\rho}\hat{q} \rightarrow \left(q - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) W(q, p). \quad (4.5.16e)$$

Con estos resultados es directo encontrar las ecuaciones (4.5.15) en la representación de Weyl-Wigner

$$\left[(\lambda_p p + \lambda_q q) + \frac{i}{2} \left(\lambda_q \frac{\partial}{\partial p} - \lambda_p \frac{\partial}{\partial q}\right)\right] W(q, p) = \alpha W(q, p), \quad (4.5.17a)$$

$$\left[(\lambda_p^* p + \lambda_q^* q) + \frac{i}{2} \left(\lambda_p^* \frac{\partial}{\partial q} - \lambda_q^* \frac{\partial}{\partial p}\right)\right] W(q, p) = \alpha^* W(q, p), \quad (4.5.17b)$$

donde fueron utilizadas las expresiones (4.2.26). Para resolver las ecuaciones anteriores es conveniente definir la función compleja

$$z = \lambda_p p + \lambda_q q, \quad (4.5.18)$$

y su complejo conjugada. Con estas definiciones se encuentra

$$\lambda_q \frac{\partial}{\partial p} - \lambda_p \frac{\partial}{\partial q} = -i \frac{\partial}{\partial z^*}, \quad \lambda_q^* \frac{\partial}{\partial p} - \lambda_p^* \frac{\partial}{\partial q} = i \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.5.19)$$

Substituyendo (4.5.18) y su complejo conjugado, junto con las expresiones (4.5.19) en (4.5.17), se puede reescribir el sistema de ecuaciones como sigue

$$\left[z + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z^*}\right] W(z, z^*) = \alpha W(z, z^*), \quad (4.5.20a)$$

$$\left[z^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}\right] W(z, z^*) = \alpha^* W(z, z^*). \quad (4.5.20b)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se integra (4.5.20a) obteniendose

$$W(z, z^*) = F(z, t) \exp\{2z^*(\alpha - z)\}.$$

Al substituir esta expresión en (4.5.20b) se obtiene una ecuación diferencial para la $F(z, t)$, que puede resolverse fácilmente con lo que la función de Wigner queda dada por

$$W(z, z^*) = k(t) \exp \{ 2(\alpha^* z + z^* \alpha - z^* z) \}. \quad (4.5.21)$$

La función $k(t)$ se determina de pedir que la función de Wigner cumpla con la condición de normalización, (4.5.7c)⁴, con lo cual

$$k(t) = 2e^{-2|\alpha|^2}. \quad (4.5.22)$$

Por lo tanto se ha construido la función de cuasiprobabilidad de Wigner para el Hamiltoniano (4.1.2), y la expresión de dicha función es

$$W(z, z^*, t) = 2 \exp \{ 2(\alpha z^* - z z^* + \alpha^* z - |\alpha|^2) \}. \quad (4.5.23)$$

Esta función puede reescribirse en el espacio fase, esto es en términos de las posiciones y momentos. Para ello se substituye en (4.3.23) la expresión (4.5.18) de z y la correspondiente para z^* , y se utilizan los valores esperados de \hat{q} y de \hat{p} , dados en (4.3.21), así como sus respectivas dispersiones, determinadas por (4.3.23) y (4.3.26). Así se obtiene

$$W(p, q, t) = 2 \exp \{ -2(\sigma_q \hat{p}^2 + \sigma_p \hat{q}^2 - 2\sigma_{pq} \hat{p} \hat{q}) \}, \quad (4.5.24)$$

donde se ha denotado

$$\hat{q} \equiv q - \langle \hat{q} \rangle_{\alpha, t}, \quad (4.5.25a)$$

$$\hat{p} \equiv p - \langle \hat{p} \rangle_{\alpha, t}. \quad (4.5.25b)$$

Nótese que si se define la expresión (4.5.24) en términos de \hat{q} y \hat{p} , se tiene una función de Wigner que no se traslada, sino que únicamente rota, como se verá más adelante. Todavía la expresión (4.5.24) para la función de Wigner puede reescribirse en una forma físicamente más atractiva, y esto requiere la definición del coeficiente de correlación (4.3.32)

$$W(p, q, t) = \frac{1}{[(1-r^2)\sigma_q\sigma_p]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-r^2)} \left[\frac{\hat{q}^2}{\sigma_q} + \frac{\hat{p}^2}{\sigma_p} - 2r \frac{\hat{q}}{\sigma_q^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\hat{p}}{\sigma_p^{\frac{1}{2}}} \right] \right\}. \quad (4.5.26)$$

⁴ consultar Apendice C.

Teniendo en cuenta la normalización elegida, la forma (4.5.26) de la función de Wigner se identifica como una ley normal de distribución en el espacio fase pq . El sentido probabilístico de los parámetros que determinan dicha distribución es el siguiente: $\langle q \rangle_t$ y $\langle p \rangle_t$ son las esperanzas matemáticas; σ_q y σ_p son los cuadrados de las desviaciones cuadráticas medias, y r es el coeficiente de correlación. Esta forma de la función de Wigner permite identificar la forma asociada al estado coherente ($r = 0$), esto es, el producto de dos gaussianas, una en las posiciones y la otra en los momentos. Al dejar evolucionar a la función de Wigner con el Hamiltoniano (4.1.2), aparece una interferencia por la correlación de la posición y momento. Desde un punto de vista geométrico, se observa que dada la dependencia temporal de los parámetros antes mencionados, la simetría Gaussiana que caracteriza a la función de Wigner al instante $t = 0$ se pierde conforme transcurre el tiempo. Concretamente, dado que el último sumando de la exponencial acopla la posición y el momento, se concluye que dicha estructura antisimétrica está rotada respecto a los ejes del espacio fase. Siguiendo el método descrito en [12], se introducen las cantidades q' y p' dadas por

$$\tilde{q} = q' \cos \theta - p' \sin \theta, \quad (4.5.27a)$$

$$\tilde{p} = q' \sin \theta + p' \cos \theta, \quad (4.5.27b)$$

con

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\sigma_{pq}}{\sigma_q - \sigma_p} \right) + \theta_0, \quad (4.5.27c)$$

donde θ_0 se elige para cumplir la condición inicial $\theta(t = 0) = 0$.⁵ La función de Wigner queda expresada como

$$W(p, q, t) = 2 \exp \{ -(\sigma_p + |\lambda_p^2 + \lambda_q^2 + \sigma_q|)p'^2 - (\sigma_p - |\lambda_p^2 + \lambda_q^2 + \sigma_q|)q'^2 \}. \quad (4.5.28)$$

En resumen, el Hamiltoniano (4.1.2) traslada la función de Wigner de un estado coherente normal, de acuerdo a (4.5.25) y la rota siguiendo las expresiones (4.5.27), además de modificar las desviaciones cuadráticas medias como se indica en la última expresión.

⁵ Es conveniente señalar que para $t = 0$ existe una indeterminación en la expresión (4.5.27c), por lo que para determinar θ_0 es necesario utilizar el teorema de L'Hôpital. Procediendo de esta forma se encuentra que el comportamiento de la función $\theta - \theta_0$ está determinado por las funciones $a(t)$, $b(t)$, y $c(t)$ del Hamiltoniano.

Función de Husimi

La función $Q(z)$, al igual que la función de Wigner es un caso particular de función de distribución de cuasi-probabilidad. Fue introducida por primera vez por K. Husimi [13] y tiene importantes aplicaciones en óptica cuántica, particularmente cuando se trabaja con operadores caracterizados por un orden anti-normal, es decir aquellos que pueden expresarse como productos de los operadores a y a^\dagger en los cuales se coloca el operador de aniquilación a la izquierda del de creación (por ejemplo : $a^n a^{\dagger m}$).

La función Q está definida esencialmente como el valor esperado del operador densidad del sistema con respecto a los eigenestados del operador de aniquilación del oscilador armónico, (los cuales en ésta sección se denotan por $|z\rangle$)

$$Q = \langle z | \hat{\rho} | z \rangle. \quad (4.5.20)$$

La función Q es no singular, en el sentido de que no está expresada en términos de la función delta ni de sus derivadas (para mayor información respecto a este tipo de singularidades ver [14]), además de ser no negativa [15] .

Una forma de ver que en efecto la función Q contiene la misma información que el operador densidad del sistema $\hat{\rho}$ es la siguiente. Nótese que

$$Q(z) \equiv \langle z | \hat{\rho} | z \rangle = \sum_{n,m} \rho(n,m) e^{-|z|^2} \frac{z^{*n} z^m}{(n!m!)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.5.30)$$

siendo $\rho(n,m) = \langle n | \hat{\rho} | m \rangle$ el valor esperado de $\hat{\rho}$ en los estados de Fock. Si se utiliza la forma polar de z es decir $z = |z|e^{i\varphi}$, multiplicando ambos lados de (4.5.30) por z^λ e integrando respecto a φ , se tiene que

$$\int_0^{2\pi} Q(z) z^\lambda d\varphi = 2\pi \sum_m \rho(m+\lambda, m) e^{-|z|^2} \frac{|z|^{2(m+\lambda)}}{[(m+\lambda)!m!]^{\frac{1}{2}}}.$$

Si se multiplica nuevamente la igualdad anterior por $e^{|z|^2}$ y se denota $|z|^2 = x$, entonces

$$F(x) = 2\pi \sum_m \rho(m+\lambda, m) \frac{x^{(m+\lambda)}}{[(m+\lambda)!m!]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.5.31)$$

donde

$$F(x) \equiv e^x \int_0^{2\pi} Q(z) z^\lambda d\varphi.$$

Derivando (4.5.31) $(m + \lambda)$ -veces con respecto de x y evaluando el resultado final en $x = 0$ se obtiene

$$\left[\frac{d^{m+\lambda}}{dx^{m+\lambda}} F(x) \right]_{x=0} = 2\pi \rho(m + \lambda, m) \left(\frac{(m + \lambda)!}{m!} \right)^{\frac{1}{2}},$$

es decir

$$\rho(m + \lambda, m) = \frac{1}{2} \left(\frac{m!}{(m + \lambda)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{d^{m+\lambda}}{dx^{m+\lambda}} F(x) \right]_{x=0}. \quad (4.5.32)$$

En otras palabras, la expresión anterior determina completamente los elementos de la matriz densidad del sistema a partir del conocimiento de $Q(z)$.

Para obtener la forma de la función $Q(z)$ para los estados coherentes generalizados, se supone que el estado del sistema se encuentra completamente descrito por $|\alpha, t\rangle$, es decir (4.5.14). Entonces se calcula el valor esperado del operador densidad con respecto a estados coherentes

$$\begin{aligned} Q &= \langle z | \alpha, t \rangle \langle \alpha, t | z \rangle \\ &= \langle z | \alpha, t \rangle \langle z | \alpha, t \rangle^* \\ &= |\langle z | \alpha, t \rangle|^2. \end{aligned}$$

Recordando que

$$|\alpha, t\rangle = U(t) |\alpha, 0\rangle,$$

la función Q está dada por

$$\begin{aligned} Q &= |\langle z | U(t) |\alpha\rangle|^2 \\ &= |G(z^*, \alpha, t)|^2. \end{aligned}$$

Utilizando la expresión (4.4.21) para la función de Green y su complejo conjugado, se obtiene

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{|M_1|^2} \exp(-|\alpha|^2 - |z|^2) \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{|M_1|^2} \operatorname{Re} \left[M_2^* M_1^* \alpha^2 - M_2 M_1 z^{*2} + 2z^* M_1^* \alpha \right] \right\}. \quad (4.5.33) \end{aligned}$$

Substituyendo $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$ y utilizando las expresiones (4.2.31) para los elementos de la matriz M , así como las ecuaciones (4.3.21) para los valores esperados de la posición y momento y (4.3.23) para sus dispersiones, la función Q se expresa en la forma

$$Q = \left[\frac{2}{1 + \sigma_p + \sigma_q} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{1 + \sigma_p + \sigma_q} \left(-|\alpha|^2 - \sigma_p q^2 - \sigma_q p^2 + 2\sigma_{pq} pq \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2}(q - \langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t})^2 - \frac{1}{2}(p - \langle \hat{p} \rangle_{\alpha,t})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + q(\alpha \lambda_q^* + \alpha^* \lambda_q) + p(\alpha \lambda_p^* + \alpha^* \lambda_p) \right) \right\}. \quad (4.5.34)$$

Se quiere indicar que los estados coherentes generalizados son equivalentes al concepto introducido en óptica cuántica de estado coherente de dos fotones. Estos estados son generados de los estados coherentes por medio de una transformación de Bogoliubov sobre los cuantos de creación y aniquilación de fotones. Físicamente son los estados de radiación de láseres de dos fotones [16]

Bibliografía

- [1] V. P. Ermakov. Univ. Izv. Kiev, (1880), 20, núm. 9, pág. 1.
- [2] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko. *Invariants and the evolution of nonstationary quantum systems*. Ed. M. A. Markov, Proceedings of the Lebedev Physics Institute, Vol. 183 (Nova Science, Commack, New York, 1989).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë. *Quantum Mechanics*. Vol 1. (John Wiley & Sons, New York, 1977)
- [4] Y. Dothan. *Finite-Dimensional Spectrum-Generating Algebras*. Phys. Rev. D, (1970), 2, núm. 12, pág. 2944.
- [5] E. Schrödinger. *Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip*. Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, (1930) pág. 296.
- [6] H. P. Robertson. *A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation*. Phy. Rev. A, (1930), 35, núm. 5, pág. 667.
- [7] V. V. Dodonov, E. V. Kurmyshev, V. I. Man'ko. *Generalized uncertainty relation and correlated coherent states*. Phy. Lett. A ,(1980), 79, núm. 2/3, pág. 150.

- [8] O. Castaños, R. López Peña and V.I. Man'ko. *Schrödinger cat states of non-stationary generalized oscillator* J. Phys. A : Math. Gen. (1994), 29, pág. 2091.
- [9] E.P. Wigner . *On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium.* Phys. Rev. A. (1932), 40, núm. 5, pág. 794.
- [10] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner . *Distribution Functions in Physics : Fundamentals* . Phys. Rep. (1984), 106, núm. 3, pág. 121.
- [11] J. E. Moyal *Quantum Mechanics as a Statistical Theory* . Proc. Cambridge Phil. Soc. (1949), 45, núm. 1, pág. 99.
- [12] G. Schrade, V.I. Man'ko, W.P. Schleich, y R. J. Glauber . *Wigner functions in Pauli trap.* Quantum and Semiclass. Opt. (1995), 7, pág. 307.
- [13] Husimi, K. . Proc. Phys. Math. Soc. Japan (1940) 22 , pág. 264.
- [14] E. C. G. Sudarshan. *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams.* Phys. Rev. Lett. (1963), 10, núm. 7, pág. 277.
- [15] Y. Kano. *A New Phase-Space Distribution Function in the Statistical Theory of the Electromagnetic Field.* J. Math. Phys. (1965), 6, núm. 12, pág. 1913.
- [16] *Key papers in physics. Nonclassical effects in Quantum Optics.* Ed. Pierre Meystre and Daniel F. Walls. Vol. 4, pág. 144 y 162, (American Institute of Physics, New York, 1991).

5

Oscilador Paramétrico

5.1 Introducción

Los estados coherentes generalizados pueden obtenerse, por ejemplo, de todos aquellos procesos en los cuales los operadores de creación y aniquilación en el esquema de Heisenberg se expresen en términos de valores de dichos operadores en el instante inicial usando una transformación canónica lineal [1]. Ejemplos de tales sistemas han sido estudiados ampliamente en óptica cuántica, en donde por ejemplo una fuente de luz correlacionada se obtiene del llamado efecto Kerr [1], el cual consiste en utilizar un medio con permitividad eléctrica dependiente del tiempo como transductor de luz clásica a luz correlacionada, o bien generar luz correlacionada desde el vacío utilizando el efecto Casimir no estacionario [1], [2].

Existen varias aplicaciones en el campo de la óptica cuántica del oscilador paramétrico, las más notables relacionadas con la generación de luz correlacionada y estados comprimidos [3]. Sin embargo en este trabajo, se quiere destacar la asociada con el estudio mecánico cuántico de un ión en una trampa de Paul [4], fuertemente enfriada por un laser. La trampa de Paul está basada en el uso de un campo cuadrupolar eléctrico que oscila en el tiempo. Esta técnica de confinamiento de partículas tiene importantes aplicaciones en espectroscopía de alta precisión, ya que brinda la posibilidad de controlar el estado de movimiento de los iones y minimiza con ello las relaciones de incertidumbre asociadas al movimiento. También ofrece la posibilidad de congelar los iones muy cerca de su estado de reposo, eliminando efectos no deseados en espectroscopía tales como el efecto Doppler.

Trampas de Paul

Para el caso de la trampa de Paul se emplea un campo cuadrupolar eléctrico que varía periódicamente con el tiempo. La necesidad de este tipo de variación resulta intuitiva si se estudia primeramente el comportamiento de la partícula cuando el campo es cuadrupolar eléctrico pero estático. En tal caso, la función potencial en coordenadas cartesianas está dada por

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2),$$

lo que implica que la fuerza que mantiene confinada a la partícula se incrementa linealmente con la distancia. La ecuación de Laplace $\Delta\Phi = 0$ establece la condición

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (5.1.1)$$

sobre los parámetros de la ecuación anterior. Existen dos formas simples de satisfacer la ecuación (5.1.1):

i) En la primera de ellas se utiliza una configuración bidimensional que se obtiene si $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$, es decir

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2} (x^2 - z^2).$$

Este potencial se genera experimentalmente con un dispositivo de cuatro electrodos de forma hiperbólica sobre el plano vertical XZ , que se extienden en la dirección Y . El campo de fuerza está dado por

$$E_x = -\frac{\Phi_0}{r_0^2} x, \quad E_z = \frac{\Phi_0}{r_0^2} z, \quad E_y = 0.$$

Si se inyectan iones en la dirección Y , las ecuaciones de movimiento permiten ver que para un voltaje constante Φ_0 los iones realizan oscilaciones armónicas en el plano XY . Sin embargo, debido al signo positivo de la componente Z del campo, la amplitud en la dirección Z de dichas oscilaciones se incrementará exponencialmente y los iones se perderán golpeando los electrodos.

ii) La segunda forma de cumplir (5.1.1) es elegir $\alpha = -1, \beta = -1, \gamma = 2$, es decir

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{r_0^2} \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right),$$

donde r_0 caracteriza las dimensiones de la trampa en el plano XY y la dirección más cercana en el eje Z está definida por la cantidad $z_0 = r_0/\sqrt{2}$. Experimentalmente este potencial se obtiene utilizando un dispositivo constituido por los cuatro electrodos de forma hiperbólica mencionados en el caso anterior pero con simetría de rotación en el eje Z .

Es importante señalar que si a éste tipo de dispositivo se le aplica únicamente un voltaje de corriente directa, los iones realizan oscilaciones inestables en el plano XY . Sin embargo, si se combina el campo anterior con un campo magnético en la dirección del eje Z , el movimiento en ésta dirección permanecerá inalterado, y por efecto de la fuerza de Lorentz los iones realizarán un movimiento ciclotrónico en el plano XY , consiguiéndose de éste modo la estabilidad de las partículas. Este dispositivo se conoce como la Trampa de Penning [5] y tiene importantes aplicaciones en espectroscopía, transiciones Zeeman y en general en la medición de propiedades magnéticas de partículas como el momento magnético anómalo del electrón.

Otra manera de evitar la pérdida de los iones en los dos dispositivos anteriores, es aplicar un voltaje periódico entre los pares de electrodos en el caso (i) y entre el electrodo anular y los electrodos en forma de tapas superior e inferior en el caso (ii) que tenga la forma

$$\Phi_0 = -U - V \cos \Omega t,$$

donde U es un voltaje de corriente directa y V un voltaje de radio-frecuencia. El cambio periódico del signo de la fuerza eléctrica provoca un enfoque y desenfoque alternante

en el tiempo de las partículas en las direcciones anteriormente inestables.

El Hamiltoniano para las trampas de Paul tridimensionales en la representación de coordenadas está dado por la expresión

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e}{r_0^2} (U + V \cos \Omega t) \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right). \quad (5.1.2)$$

Estableciendo la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo se observa que su solución es separable, esto es, la función de onda puede escribirse como el producto $\Phi(x, y, z, t) = G(x, y, t)F(z, t)$, dando lugar al sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G + \frac{e}{2r_0^2} (U + V \cos \Omega t) (x^2 + y^2) G - i\hbar \frac{\partial G}{\partial t} = \Theta(t)G, \quad (5.1.3a)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F - \frac{e}{2r_0^2} (U + V \cos \Omega t) z^2 F - i\hbar \frac{\partial F}{\partial t} = \Theta(t)F, \quad (5.1.3b)$$

donde $\Theta(t)$ es una función del tiempo que aparece al efectuar la separación de variables. Esta función puede cancelarse efectuando una transformación de fase dependiente del tiempo que no tiene importancia física. Así se obtiene que las ecuaciones diferenciales (5.1.3) pueden escribirse como las ecuaciones de Schrödinger dependientes del tiempo siguientes:

$$H_\rho g(x, y, t) = i\hbar \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (5.1.4a)$$

$$H_z f(z, t) = i\hbar \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (5.1.4b)$$

donde se definieron los operadores

$$H_z = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega_z^2(t) z^2, \quad (5.1.5a)$$

$$H_\rho = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega_\rho^2(t) (x^2 + y^2), \quad (5.1.5b)$$

y las frecuencias dependientes del tiempo

$$\Omega_z^2(t) = \frac{\Omega^2}{4} (a_z - 2b_z \cos \Omega t), \quad (5.1.6a)$$

$$\Omega_\rho^2(t) = \frac{\Omega^2}{4} (a_\rho - 2b_\rho \cos \Omega t). \quad (5.1.6b)$$

Por conveniencia en la expresión del Hamiltoniano (5.1.2) se introdujeron los parámetros sin dimensiones

$$a_z = -\frac{8eU}{mr_0^2\Omega^2} = -2a_p, \quad (5.1.7a)$$

$$b_z = \frac{4eV}{mr_0^2\Omega^2} = -2b_p. \quad (5.1.7b)$$

Los Hamiltonianos (5.1.5) tienen la estructura de un oscilador paramétrico, y en este capítulo se aplica el formalismo desarrollado en el Capítulo 4 para estudiarlo. Esto significa un sistema descrito por

$$H' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega'^2(t)q'^2. \quad (5.1.8)$$

Introduciendo las coordenadas de posición, los momentos y el tiempo sin dimensiones por medio de las relaciones

$$q = \sqrt{\frac{h}{m\omega'(0)}} q', \quad p = \sqrt{hm\omega'(0)} p', \quad t = \omega'(0)t',$$

la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del Hamiltoniano (5.1.8) se reduce a

$$h\omega'(0) \left(\frac{1}{2}p'^2 + \frac{1}{2}\omega'^2(t)q'^2 \right) \Psi = ih\omega'(0) \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (5.1.9)$$

donde $\omega(t) \equiv \omega'(t)/\omega'(0)$. Entonces comparando la expresión del Hamiltoniano (5.1.9) con (4.1.2), se tiene que constituye un caso particular con los valores

$$a(t) = 1, \quad b(t) = 0, \quad \text{y} \quad c(t) = \omega^2(t). \quad (5.1.10)$$

De la discusión presentada arriba es inmediato que los Hamiltonianos (5.1.5) pueden escribirse en la forma dada en (5.1.9), con las definiciones siguientes

$$\omega_z^2(t) = \frac{a_z - 2b_z \cos \tilde{\Omega}t}{a_z - 2b_z} \equiv a_z - 2\tilde{b}_z \cos \tilde{\Omega}t, \quad (5.1.11a)$$

$$\omega_p^2(t) = \frac{a_p - 2b_p \cos \tilde{\Omega}t}{a_p - 2b_p} \equiv a_p - 2\tilde{b}_p \cos \tilde{\Omega}t, \quad (5.1.11b)$$

donde $\tilde{\Omega} \equiv \frac{\Omega}{\omega'(0)}$. En las dos direcciones las ecuaciones de movimiento de los iones son de la forma

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + (a - 2b \cos 2\tau)q = 0, \quad (5.1.12)$$

conocida como la ecuación de Mathieu y en donde las constantes a y b representan los parámetros (a_z ó a_ρ) y (b_z ó b_ρ) definidos en (5.1.7), respectivamente. En la expresión anterior se hizo el cambio de variable $\tau = \Omega t/2$.

Es importante destacar que si bien la utilización de potenciales dependientes del tiempo es un factor necesario para el confinamiento de partículas en la trampa de Paul, no es suficiente y tal propósito se alcanza sólo si la dependencia temporal del campo eléctrico se combina con la estabilidad dinámica de las soluciones de la ecuación (5.1.12) que han sido estudiadas en forma detallada en [6] y [7], además de que también debe ocurrir el confinamiento cuántico, esto es, la integral de la densidad de probabilidad $|\psi(x, y, z, t)|^2$ para cualquier estado inicial ($U(t)|\psi(0)\rangle$) debe ser cero, para una región de integración mayor que un cierto radio. Resulta interesante señalar que la estabilidad dinámica en la trampa para un ión se determina variando la frecuencia de oscilación, Ω , dados los parámetros e, r_0, m, U y V .

Aún cuando en este trabajo no se profundizará más en el estudio de las trampas, es importante mencionar que las ecuaciones de movimiento del sistema cuántico, pueden resolverse utilizando la teoría de invariantes lineales dependientes del tiempo desarrollado en el Capítulo 4 y que las funciones de onda que se obtienen como resultado, a pesar de tener un carácter no estacionario, tienen una correspondencia uno a uno con los estados estacionarios del sistema de oscilador armónico. Concretamente, los estados del sistema no estacionario poseen un ordenamiento único con respecto a una variable dinámica denominada cuasienergía, y dicho ordenamiento coincide con el ordenamiento respecto a la energía que caracteriza a los estados estacionarios del sistema de oscilador armónico [8].

En éste capítulo, se presentan los resultados obtenidos al aplicar la teoría de invariantes lineales dependientes del tiempo, en la forma que se ha discutido hasta el momento, a cuatro casos específicos de sistemas de oscilador paramétrico que admiten soluciones analíticas, concretamente se consideran las siguientes dependencias temporales: $\omega^2(t) \equiv 0$ (el caso de una partícula libre), $\omega^2(t) = \text{cte}$ (el oscilador armónico), $\omega^2(t) = at + b$ y $\omega^2(t) = ct^2 + d$, donde a, b, c, d son constantes. Estos últimos casos pueden considerarse como soluciones asintóticas de las ecuaciones de Mathieu.

5.2 Estados coherentes en sistemas estacionarios

La búsqueda de soluciones a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el Hamiltoniano (4.1.2) se ha planteado hasta el momento como un problema esencialmente matemático y se ha resuelto utilizando la teoría de invariantes lineales formulada en términos variacionales usando el teorema de Noether. Aunque se ha dejado implícito en el desarrollo del caso antes citado, es importante destacar que físicamente la idea central de este problema es determinar la evolución temporal de un estado coherente en sistemas estacionarios y no-estacionarios, aunque estos últimos son estudiados en la siguiente sección.

Utilizando los resultados del Capítulo 4 se observa que el elemento fundamental para determinar la evolución de un estado coherente en un potencial de la forma $V(q, t) = \omega^2(t)\hat{q}^2$ es conocer la solución clásica del problema, concretamente la solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{h}(t) + \omega^2(t)h(t) = 0. \quad (5.2.1)$$

Conociendo la solución clásica se obtiene además de la trayectoria del sistema: la densidad de probabilidad (4.3.17), los valores esperados de las posiciones y momentos (4.3.21), sus dispersiones y medidas de la correlación, (4.3.23) y (4.3.26), la función de distribución del número de fotones (4.4.24), la función de Wigner (4.5.21) y la función de Husimi (4.5.34). Todas estas cantidades nos dan información sobre el comportamiento cuántico del oscilador paramétrico.

Partícula Libre

Si se elige $\omega^2(t) \equiv 0$, se tiene el Hamiltoniano de una partícula libre. La ecuación clásica de movimiento, cuyas soluciones determinan a los invariantes lineales del sistema es

$$\ddot{h} = 0. \quad (5.2.2)$$

Dos soluciones de esta ecuación diferencial que satisfacen las condiciones iniciales (4.2.12), son

$$h_1(t) = 1, \quad h_2(t) = -t. \quad (5.2.3a, b)$$

En términos de estas funciones, las matrices simplécticas Λ , y M ; junto con la matriz

Λ_{pq} están determinadas por las expresiones

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.2.4a)$$

$$\lambda_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(-t + i), \quad \lambda_q = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.2.4b, c)$$

$$M_1 = 1 + \frac{it}{2}, \quad M_2 = -\frac{it}{2}, \quad (5.2.4d, e)$$

y con ellas todas las expresiones mencionadas arriba.

De acuerdo con (4.3.16), la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para este sistema está dada por la función de onda

$$\psi_\alpha(q, t) = \frac{e^{-\frac{t\omega q^2}{2}}}{[\pi(1+t^2)]^{\frac{1}{4}}} \exp\left\{\frac{i}{2} \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \exp\left\{\frac{-1+it}{2(t^2+1)} \left(q^2 - 2\sqrt{2}\alpha q + (1-it)\alpha^2\right)\right\}. \quad (5.2.5)$$

Utilizando la forma polar de α , es decir $\alpha = \rho e^{i\phi}$ y substituyendo (5.2.4b,c) en las relaciones (4.3.21), (4.3.23) y (4.3.26) se tiene

$$\langle \hat{q} \rangle_{\alpha, t} = \sqrt{2}\rho(\cos \phi + t \sin \phi), \quad \langle \hat{p} \rangle_{\alpha, t} = \sqrt{2}\rho \sin \phi, \quad (5.2.6a, b)$$

$$\sigma_q = \frac{1}{2}(1+t^2), \quad \sigma_p = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{pq} = \frac{t}{2}, \quad (5.2.6c, d, e)$$

y por (4.3.32) el coeficiente de correlación está definido por la expresión

$$r = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \quad (5.2.7)$$

De este modo la evolución libre de un estado coherente da lugar a un estado coherente correlacionado. Esto se muestra calculando la densidad de probabilidad en el espacio de coordenadas, es decir

$$\psi_\alpha \psi_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \exp\left\{-\frac{(q - \sqrt{2}\rho(\cos \phi + t \sin \phi))^2}{(1+t^2)}\right\}. \quad (5.2.8)$$

que es una función de distribución normal representada geoméricamente por una curva Gaussiana, que al tiempo t alcanza su máximo, $1/\sqrt{\pi(1+t^2)}$, en $\langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t}$. La desviación cuadrática media que caracteriza a esta distribución, es la raíz cuadrada de la dispersión en el operador de posición \hat{q} por lo que si $t \rightarrow \infty$ el ancho del paquete Gaussiano tenderá a infinito, y su altura a cero.

Realizando manipulaciones algebraicas análogas se obtiene la probabilidad de que el estado coherente generalizado tenga n fotones al tiempo t ,

$$\mathcal{P}_n(\alpha, t) = \frac{t^n e^{-|\alpha|^2}}{n! 2^{n-1} (4+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} \left| H_n \left(\alpha \left[\frac{2(t+2i)}{t(t^2+4)} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right|^2 \times \exp \left\{ \frac{1}{4+t^2} [|\alpha|^2(2+t^2) - 2\rho^2(1+2t \cos \phi \sin \phi + t^2 \sin^2 \phi)] \right\}. \quad (5.2.9)$$

Utilizando la ecuación (4.5.24), las función de Wigner se reduce a

$$W(p, q, t) = 2 \exp \left\{ -\hat{q}^2 - (1+t^2)\hat{p}^2 + 2t\hat{p}\hat{q} \right\}, \quad (5.2.10a)$$

con

$$\hat{p} = p - \sqrt{2}\rho \sin \phi, \quad \hat{q} = q - \sqrt{2}\rho(\cos \phi + t \sin \phi). \quad (5.2.10b)$$

En forma equivalente puede reescribirse

$$W(p, q, t) = 2 \exp \left\{ - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} \sqrt{t^2+4} + 1 \right) p'^2 - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \sqrt{t^2+4} + 1 \right) q'^2 \right\}, \quad (5.2.11)$$

con p' y q' definidos en las ecuaciones (4.5.27) y

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2}{t} \right) - \frac{\pi}{4}. \quad (5.2.12)$$

Entonces la función de Wigner (5.2.10) es un paquete Gaussiano en el espacio fase que alcanza su máximo valor de 2 cuando \hat{q} y \hat{p} son cero, es decir en la trayectoria del espacio fase determinada por $(\langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t}, \langle \hat{p} \rangle_{\alpha,t})$.

Para la función de cuasiprobabilidad de Husimi se tiene la expresión

$$Q = \left[\frac{4}{4+t^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{4+t^2} \left[-2|\alpha|^2 - \left(q - \sqrt{2}\rho(\cos\phi + t\sin\phi) \right)^2 - \left(p - \sqrt{2}\rho\sin\phi \right)^2 - q^2 - (1+t^2)p^2 + 2tpq + 2\sqrt{2}\rho\cos\phi q - 2\sqrt{2}\rho(t\cos\phi - \sin\phi)p \right] \right\}. \quad (5.2.13)$$

Oscilador Armónico

Considérese ahora el caso en que $\omega^2(t) = 1$, es decir el Hamiltoniano asociado al movimiento de una partícula que realiza oscilaciones armónicas. Este sistema satisface la ecuación clásica de movimiento

$$\ddot{h} + h = 0. \quad (5.2.14)$$

Dos soluciones de la ecuación anterior que cumplen las condiciones iniciales (4.2.12) están dadas por

$$h_1(t) = \cos t, \quad h_2(t) = -\sin t. \quad (5.2.15a, b)$$

Con estas soluciones es directo construir las matrices Λ , Λ_{pq} y M

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad (5.2.16a)$$

$$\lambda_p = \frac{1}{\sqrt{2}} i e^{it}, \quad \lambda_q = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{it}, \quad (5.2.16b)$$

$$M_1 = e^{it}, \quad M_2 = 0, \quad (5.2.16c)$$

mediante las cuales se pueden obtener los invariantes lineales del sistema. La ecuación (4.3.16), que da la función de onda del sistema al tiempo t , está dada en este caso por

$$\psi_{\alpha}(q, t) = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{i}{2}(t+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2\pi^{\frac{1}{4}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(q^2 - 2\sqrt{2}\alpha q e^{-it} + \alpha^2 e^{-2it} \right) \right\}. \quad (5.2.17)$$

Substituyendo $\alpha = \rho e^{i\phi}$ en (4.3.21), (4.3.23) y (4.3.26) se tiene

$$\langle \hat{q} \rangle_{\alpha, t} = -\sqrt{2}\rho \cos(\phi - t), \quad \langle \hat{p} \rangle_{\alpha, t} = \sqrt{2}\rho \sin(\phi - t), \quad (5.2.18a, b)$$

$$\sigma_q = \frac{1}{2}, \quad \sigma_p = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{pq} = 0, \quad (5.2.18c, d)$$

por lo que las soluciones no estacionarias minimizan el principio de incertidumbre de Heisenberg y son no correlacionados. Esto se ve reflejado en la forma funcional de la densidad de probabilidad determinada por la expresión (4.3.17)

$$\psi_n \psi_n^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \left(q + \sqrt{2} \rho \cos(\phi - t) \right)^2 \right\}. \quad (5.2.19)$$

La curva Gaussiana que representa la densidad de probabilidad del sistema al tiempo t alcanza su valor máximo $\pi^{-\frac{1}{2}}$ cuando q es igual al valor esperado de \hat{q} . Como en este caso la desviación cuadrática media de esta distribución es igual a $2^{-\frac{1}{2}}$, el ancho y la altura del paquete Gaussiano no dependen del tiempo.

Para calcular la probabilidad de que el estado coherente generalizado $|\alpha, t\rangle$ tenga n fotones al tiempo t , debe observarse que como en este caso $M_2 \equiv 0$, la ecuación (4.4.23) no es válida y se requiere por lo tanto usar la expresión (4.4.21). Concretamente se tiene

$$\begin{aligned} G(\alpha^*, \beta, t) &= \frac{1}{\sqrt{M_1}} \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} \right) \exp \left\{ \frac{\alpha^* \beta}{M_1} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{M_1}} \exp \left(-\frac{|\beta|^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{\beta}{M_1} \right)^n \left[\exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \right], \end{aligned}$$

que permite identificar la función de distribución de fotones

$$\langle n | \rho(t) | n \rangle = M_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{\beta}{M_1} \right)^n.$$

Substituyendo (5.2.16c) se tiene

$$\mathcal{P}_n(\beta) = \frac{e^{-|\beta|^2}}{n!} |\beta|^{2n}, \quad (5.2.20)$$

que es la forma de una función de distribución de Poisson.

Para este caso, la función de cuasiprobabilidad de Wigner puede reescribirse como el producto de dos funciones normales de distribución independientes entre sí

$$\begin{aligned} W(p, q, t) &= 2 \exp \left\{ - (q - \sqrt{2} \rho \cos(\phi - t))^2 \right\} \\ &\quad \exp \left\{ - (p - \sqrt{2} \rho \sin(\phi - t))^2 \right\}. \quad (5.2.21) \end{aligned}$$

Esta separación es consecuencia de que la correlación entre \hat{p} y \hat{q} vale cero.

El máximo del paquete Gaussiano que representa a dicha función se encuentra en $(\langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t}, \langle \hat{p} \rangle_{\alpha,t})$ es decir, conforme transcurre el tiempo describe un círculo en dirección contraria a las manecillas del reloj en el espacio fase (q, p) .

La expresión de la función de cuasiprobabilidad de Husimi se obtiene directamente de (4.5.33) recordando que $M_2 = 0$, y $|M_1| = 1$, y está dada por

$$Q = \exp \left\{ -\rho^2 - \frac{q^2 + p^2}{2} \right\} \exp \left\{ \sqrt{2}\rho[q \cos(\phi - t) - p \sin(\phi - t)] \right\}. \quad (5.2.22)$$

5.3 Estados coherentes en sistemas no-estacionarios

En esta sección se estudia el oscilador paramétrico cuando la frecuencia es una función del tiempo. Como se señaló anteriormente este tipo de sistemas tienen una gran variedad de aplicaciones.

Dependencia temporal lineal

Considérese ahora el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} [\hat{p}^2 + (at + b)\hat{q}^2]. \quad (5.3.1)$$

Como se mencionó en la sección anterior, si se eligen adecuadamente los parámetros a y b este Hamiltoniano podría representar un caso límite del Hamiltoniano asociado al movimiento de iones en una trampa de Paul.

Los invariantes lineales que caracterizan a este sistema están determinados por h_1 y h_2 , dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$\ddot{h}(t) + (at + b)h(t) = 0. \quad (5.3.2)$$

Realizando el cambio de variable $z = at + b$ la ecuación (5.3.2) se reduce a

$$\frac{d^2 h}{dz^2} + \frac{z}{a^2} h = 0, \quad (5.3.3)$$

conocida como la ecuación de Airy en la variable $z/a^{\frac{2}{3}}$. Esta ecuación y sus soluciones han sido estudiadas ampliamente [6], por lo que sin presentar mayores detalles al respecto se establece que un conjunto linealmente independiente de soluciones está dado por

$$\left\{ \text{Ai} \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right), \text{Bi} \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right) \right\}.$$

Las funciones Ai y Bi están definidas por las relaciones siguientes

$$\text{Ai} \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right) = c_1 f \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right) - c_2 g \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right), \quad (5.3.4a)$$

$$\text{Bi} \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right) = \sqrt{3} \left[c_1 f \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right) + c_2 g \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right) \right], \quad (5.3.4b)$$

con

$$f \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3n)!} \left(\frac{1}{3} \right)_n \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right)^{3n}, \quad (5.3.5a)$$

$$g \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+1)!} \left(\frac{2}{3} \right)_n \left(-\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}} \right)^{3n+1}. \quad (5.3.5b)$$

donde las constantes c_1 y c_2 están dadas en términos de los valores de Ai y Bi y sus derivadas Ai' y Bi' en $z = 0$ como

$$c_1 = \text{Ai}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Bi}(0), \quad c_2 = -\text{Ai}'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Bi}'(0). \quad (5.3.6a, b)$$

Se proponen entonces las funciones

$$h_1(t) = c \text{Ai} \left(-\frac{at+b}{a^{\frac{2}{3}}} \right) + d \text{Bi} \left(-\frac{at+b}{a^{\frac{2}{3}}} \right), \quad (5.3.7a)$$

$$h_2(t) = e \text{Ai} \left(-\frac{at+b}{a^{\frac{2}{3}}} \right) + f \text{Bi} \left(-\frac{at+b}{a^{\frac{2}{3}}} \right), \quad (5.3.7b)$$

como soluciones de (5.3.2), para c, d, e y f constantes, las cuales se determinan utilizando las condiciones iniciales (4.2.12) en la forma siguiente

$$h_1(0) = c \text{Ai}(k) + d \text{Bi}(k) \equiv 1, \quad (5.3.8a)$$

$$\dot{h}_1(0) = -a^{\frac{1}{3}} [c \text{Ai}'(k) + d \text{Bi}'(k)] \equiv 0, \quad (5.3.8b)$$

donde se ha denotado $k \equiv -ba^{-\frac{2}{3}}$. Utilizando el valor del Wronskiano $W[Ai(x), Bi(x)] = \pi^{-1}$, se resuelve el sistema (5.3.8) para c, d y se tiene

$$c = \pi Bi'(-ba^{-\frac{2}{3}}), \quad d = -\pi Ai'(-ba^{-\frac{2}{3}}). \quad (5.3.9a, b)$$

Análogamente, del sistema

$$h_2(0) = c Ai(k) + f Bi(k) \equiv 0, \quad (5.3.10a)$$

$$h_2'(0) = -a^{\frac{1}{3}} [c Ai'(k) + f Bi'(k)] \equiv -1, \quad (5.3.10b)$$

se encuentra

$$c = \pi a^{-\frac{1}{3}} Ai\left(-\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}}\right), \quad f = -\pi a^{-\frac{1}{3}} Bi\left(-\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}}\right). \quad (5.3.11a, b)$$

Por lo tanto, dos soluciones linealmente independientes de (5.3.2) que cumplen las condiciones iniciales requeridas por (4.2.12) son

$$h_1(t) = \pi \left[Bi'\left(-\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}}\right) Ai\left(-\frac{at+b}{a^{\frac{2}{3}}}\right) - Ai'\left(-\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}}\right) Bi\left(-\frac{at+b}{a^{\frac{2}{3}}}\right) \right], \quad (5.3.12a)$$

$$h_2(t) = \frac{\pi}{a^{\frac{1}{2}}} \left[Ai\left(-\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}}\right) Bi\left(-\frac{at+b}{a^{\frac{2}{3}}}\right) - Bi\left(-\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}}\right) Ai\left(-\frac{at+b}{a^{\frac{2}{3}}}\right) \right]. \quad (5.3.12b)$$

Con estas soluciones es inmediato obtener las posiciones y momentos del sistema clásico como funciones del tiempo. Utilizando la inversa de la ecuación (4.2.10) se tiene que

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_2 & h_1 \\ -h_2 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.13)$$

Con el fin de ilustrar el comportamiento de este tipo de sistemas, de aquí en adelante se considera el caso especial de las soluciones (5.3.12) para los valores de los parámetros del potencial $a = b = 1$. Las trayectorias clásicas de este sistema se ilustran en la Figura 1.

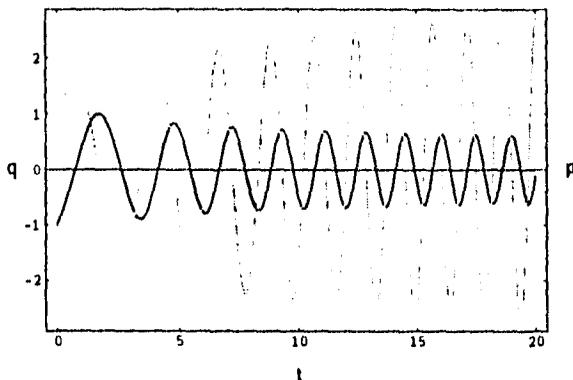


Fig. 1. Valores esperados de la posición y el momento en función del tiempo. La línea clara indica el comportamiento del momento y la línea oscura el de la posición, para el estado inicial $|\alpha\rangle = \exp(3i\pi/4)$.

Con el propósito de identificar dichas funciones con los valores esperados de los operadores de momento y posición, fué conveniente definir las condiciones iniciales $q_0 = \sqrt{2}\Re\alpha$ y $p_0 = \sqrt{2}\Im\alpha$. En la gráfica, donde se utilizó $\alpha = \exp(3i\pi/4)$, se observa un comportamiento oscilatorio creciente para el momento, mientras que para la posición uno oscilatorio decreciente. Para otros valores de la amplitud del campo, α , el comportamiento es similar, con la única diferencia en la amplitud de las oscilaciones.

Es importante señalar que la coincidencia de las trayectorias clásicas con la evolución de los valores esperados de la posición y el momento es una consecuencia del teorema de Ehrenfest, y para los casos que se están considerando se sigue inmediatamente de las expresiones (4.3.21). También es de interés ilustrar, como se hace en la Fig. 2, la trayectoria del sistema clásico en el espacio fase (p, q) . En dicha figura se puede apreciar que el movimiento está confinado a una región relativamente pequeña, aunque el momento de la partícula es una función oscilatoria creciente. Se hace notar que cuando $t \gg 1$, el valor de q se aproxima a cero mientras que el de p toma un valor muy grande, acercándose la trayectoria en el espacio fase al eje p .

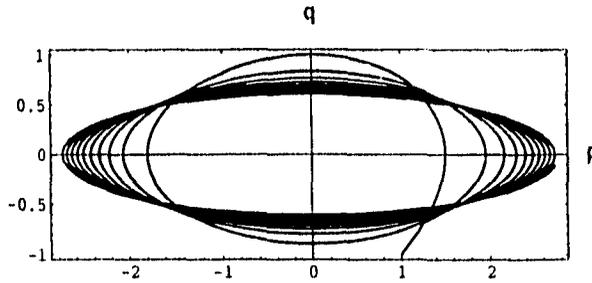


Fig. 2. Trayectoria del sistema en el espacio fase (p, q) , cuando el tiempo varía en el intervalo $t \in [0, 20]$, con las condiciones iniciales $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

A diferencia de los valores esperados $\langle \hat{q} \rangle_{\alpha, t}$ y $\langle \hat{p} \rangle_{\alpha, t}$, la dispersión en los operadores de posición y momento, así como el coeficiente de correlación no dependen de α , como puede verse en las expresiones (4.3.23) y (4.3.32), por lo que en este caso para un estado coherente inicial arbitrario dichas cantidades varían en el tiempo en la forma que se muestra en las Figs. 3 y 4.

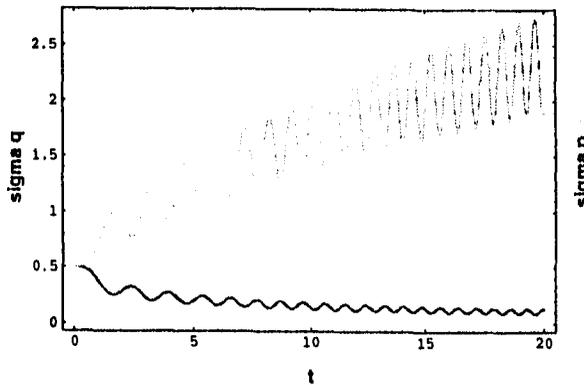


Fig. 3. Dispersiones de los operadores de posición σ_q y momento σ_p del sistema como función del tiempo. La línea clara ilustra σ_p , mientras que la línea oscura σ_q .

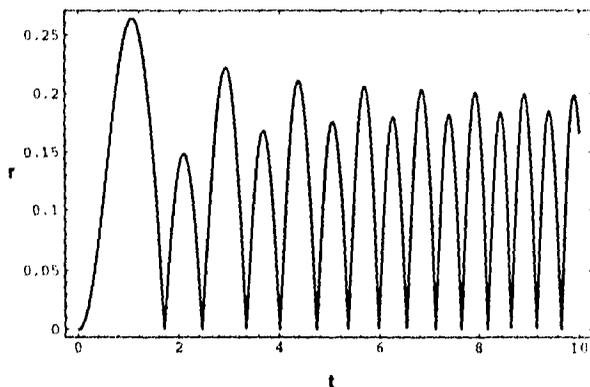


Fig. 4. Gráfica del coeficiente de correlación r de los operadores \hat{q} y \hat{p} como función del tiempo.

En la Fig. 3 se observa que las dispersiones σ_q y σ_p valen $1/2$ en $t = 0$, lo cual recuerda nuevamente que el estado inicial del sistema es un estado coherente y por lo tanto minimiza la relación de incertidumbre de Heisenberg. Al dejar evolucionar el sistema se observa que la dispersión en la posición es una función oscilatoria y decreciente del tiempo y la dispersión en el momento es también una función oscilatoria pero ahora creciente. En particular se encuentra que la dispersión en el operador de posición para tiempos mayores que cero siempre es menor que $1/2$, lo que significa que el estado del sistema presenta el fenómeno de compresión o *squeezing* en esta cuadratura. La dispersión del momento siempre es mayor que $1/2$, lo que debe ocurrir para que se cumpla el principio de incertidumbre de Heisenberg. En la Fig. 4 se exhibe el coeficiente de correlación, que también es una función oscilatoria y tiene un rango de variación entre cero y 0.3. Como se demostró en el Capítulo 4 existe una relación entre las dispersiones y el coeficiente de correlación dada por la expresión (4.3.33) y se quiere señalar que para todo tiempo los valores calculados de σ_q , σ_p y r la satisfacen. Por lo tanto el estado del sistema pasa de ser un estado coherente en $t = 0$, a ser un estado comprimido en tiempos posteriores y generalmente correlacionado.

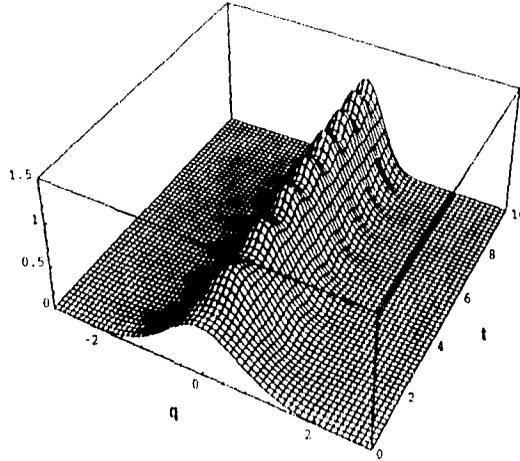


Fig. 5. Densidad de Probabilidad para el vacío correlacionado en función de la posición y el tiempo.

Ahora se estudia el comportamiento de la densidad de probabilidad del sistema, que está definida en la ecuación (4.3.17). Esta densidad de probabilidad está representada por una curva Gaussiana que está centrada en el valor esperado de \hat{q} y tiene una dispersión $\sqrt{\pi\sigma_q}$. En la Fig. 5 se grafica la densidad de probabilidad en función de la posición y el tiempo para el estado de vacío correlacionado, esto es tomando $\alpha = 0$, por lo que los valores esperados de \hat{p} y \hat{q} son cero. Además se observa claramente que la distribución de probabilidades está localizada. En la Fig. 6, se presenta el comportamiento del estado con amplitud $\alpha = \exp(3i\pi/4)$, donde también se aprecia una mayor localización del sistema y que el máximo de la distribución tiene un comportamiento oscilatorio alrededor del cero. Este comportamiento es idéntico al mostrado por el valor esperado de \hat{q} en la Fig. 1. La mayor localización del sistema para estos estados concuerda con el resultado encontrado para σ_q . La densidad de probabilidad, para tiempos muy grandes ($t \rightarrow \infty$), se comporta como la función delta de Dirac, centrada en el valor esperado de $\langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t} \rightarrow 0$.

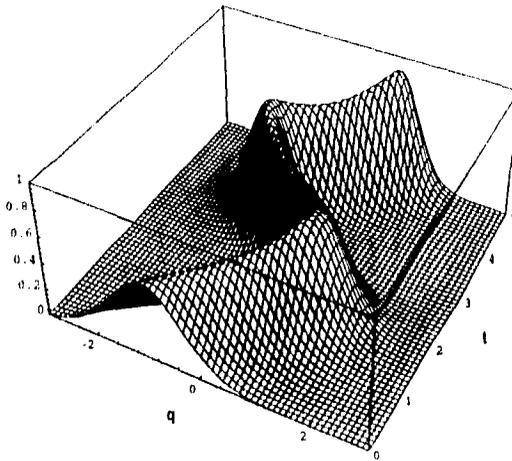


Fig. 6. Densidad de Probabilidad para el estado coherente generalizado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$ en función de la posición y el tiempo.

Los estados coherentes constituyen una adecuada descripción del campo electromagnético y en el Capítulo 3 se describieron sus propiedades (estados clásicos de la luz). Los estados coherentes generalizados pueden representar estados no clásicos de la luz y es interesante conocer entre otras cosas la distribución del número de fotones asociada al potencial $(1+t)\hat{q}^2$. Por lo tanto a continuación se encuentra la probabilidad, $\mathcal{P}_n(\alpha, t)$, de que el sistema físico tenga n fotones al tiempo t . De acuerdo con lo discutido hasta el momento, para $t = 0$ dicha probabilidad está caracterizada por la función de distribución de Poisson, y para $t > 0$ está determinada por la ecuación (4.4.24). El comportamiento de la función de distribución de fotones para el vacío correlacionado se muestra en la Fig. 7 en términos del número de fotones y el tiempo. En esta gráfica se observa que el vacío correlacionado tiene un número máximo de fotones para $n = 0$; y contrario al caso clásico la probabilidad de encontrar un número impar de fotones es cero. Este potencial lineal dependiente del tiempo es capaz de generar estados (vacío correlacionado) llamados de gato de Schrödinger [9]. También de las gráficas se encuentra que los máximos secundarios, asociados a números de fotones $n = 2k$, con $k = 1, 2, \dots$, aumentan su tamaño al evolucionar el sistema.

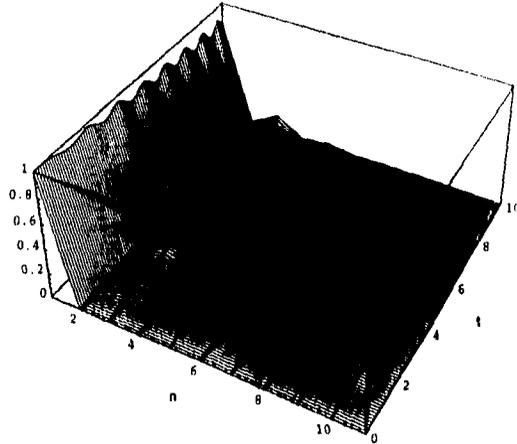


Fig. 7. Distribución de fotones para el vacío correlacionado.

En forma similar, en la Fig. 8 se exhibe el comportamiento de la distribución del número de fotones para el estado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$. Esta distribución presenta un comportamiento completamente distinto a la del vacío correlacionado. Por ejemplo, se tiene una probabilidad diferente de cero de que el estado tenga un número impar de fotones. Sin embargo, esta distribución aún continúa concentrándose en los valores pequeños de n . También se quiere señalar que las distribuciones presentadas en las Fig. 7 y 8 tienen un carácter oscilatorio que recuerda el fenómeno de los colapsos y resurgimientos que aparecen en modelos que estudian interacciones resonantes.

La correspondiente función de Wigner se calcula utilizando las expresiones (4.5.24) y (4.5.25), junto con las formulas correspondientes para las dispersiones y valores esperados de los operadores de posición y momento. A continuación se ilustra la evolución en el tiempo de estas funciones para los estados de vacío en la Fig. 9 y $\alpha = \exp(3i\pi/4)$ en la Fig. 10.

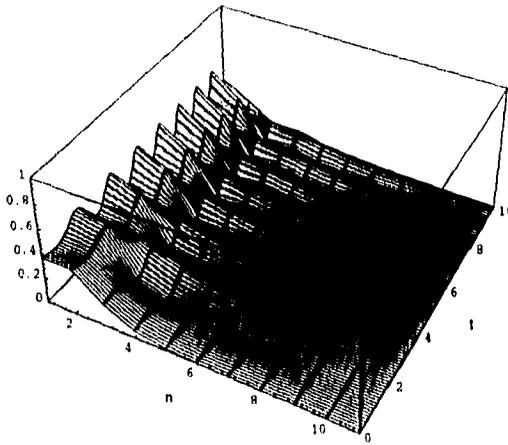


Fig. 8. Distribución de fotones para el estado coherente generalizado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

En las Figs. 9 y 10 se grafican las funciones de Wigner mencionadas arriba para los los tiempos $t = 0, 3, 8, 14, 20$, y 25 . Se observa que el máximo de dichas funciones está trasladado en q y en p por el valor esperado del operador de posición y momento, respectivamente (ver (4.5.25)). Por lo tanto, en el primer caso este máximo no sufre desplazamiento y en el segundo se tiene el comportamiento mostrado en la Fig.2. También de los resultado obtenidos en el capítulo anterior, concretamente de (4.5.27c), se observa que la función de Wigner está rotando en el espacio fase (q, p) . Sin embargo, evaluando el ángulo de rotación $\theta(t)$ para este sistema, se encuentra que $\theta_0 = -\pi/4$ y que el valor de la función oscila alrededor de cero y es independiente de α . Una forma intuitiva de entender la función de Wigner es a través de las propiedades generales dadas en las ecuaciones (4.5.7a,b), de acuerdo a las cuales la densidad de probabilidad evaluada en el punto q del espacio de coordenadas se obtiene integrando la función de Wigner a lo largo de una trayectoria paralela al eje de momento. De forma análoga, al integrar la función de Wigner a lo largo de una trayectoria paralela al eje q que pasa por p se obtiene la densidad de probabilidad de que el sistema tenga un momento p .

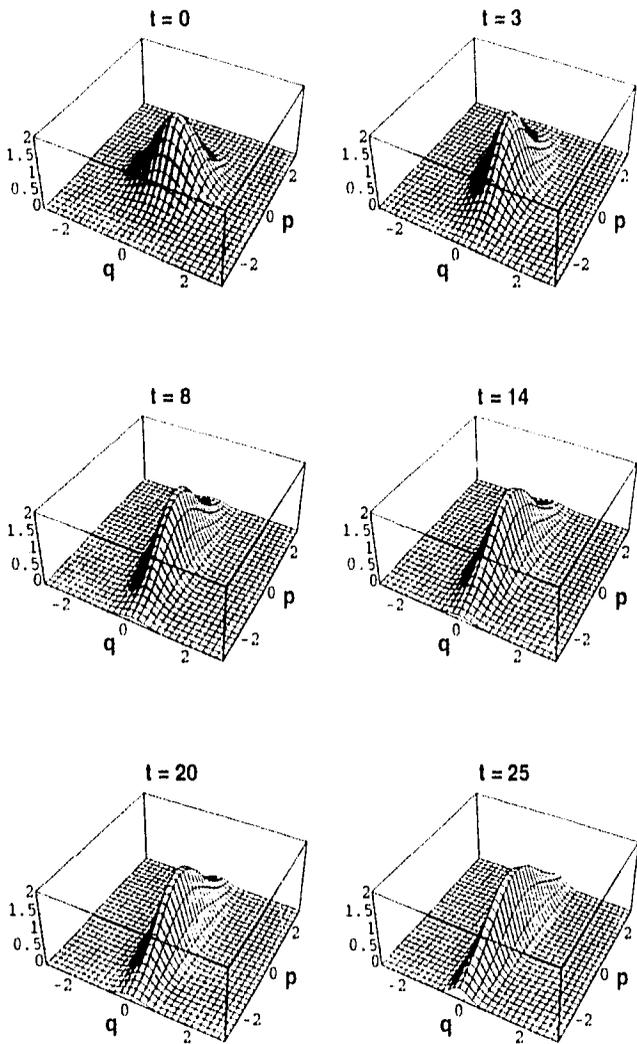


Fig. 9. Función de Wigner para el vacío correlacionado.

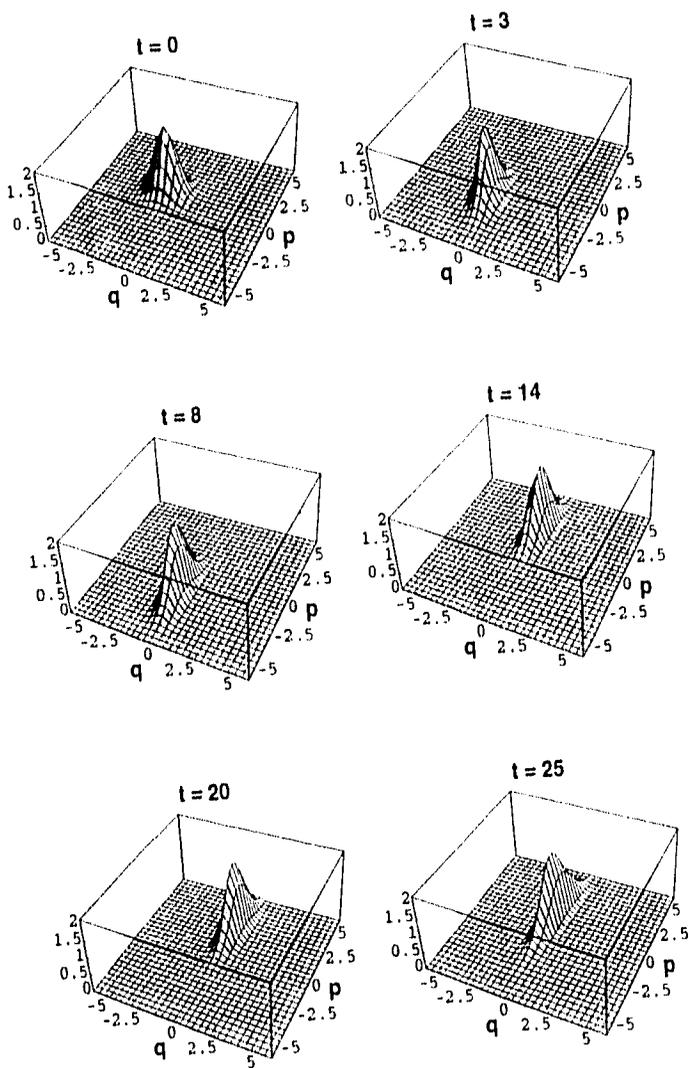


Fig. 10. Función de Wigner para el estado coherente generalizado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

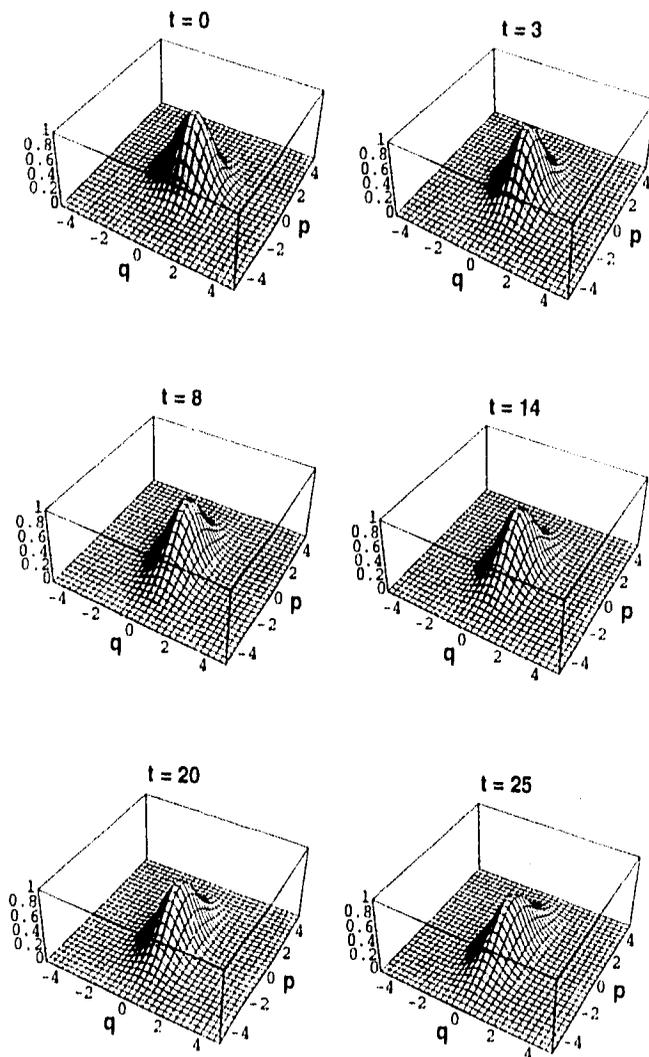


Fig. 11. Función Q para el vacío correlacionado.

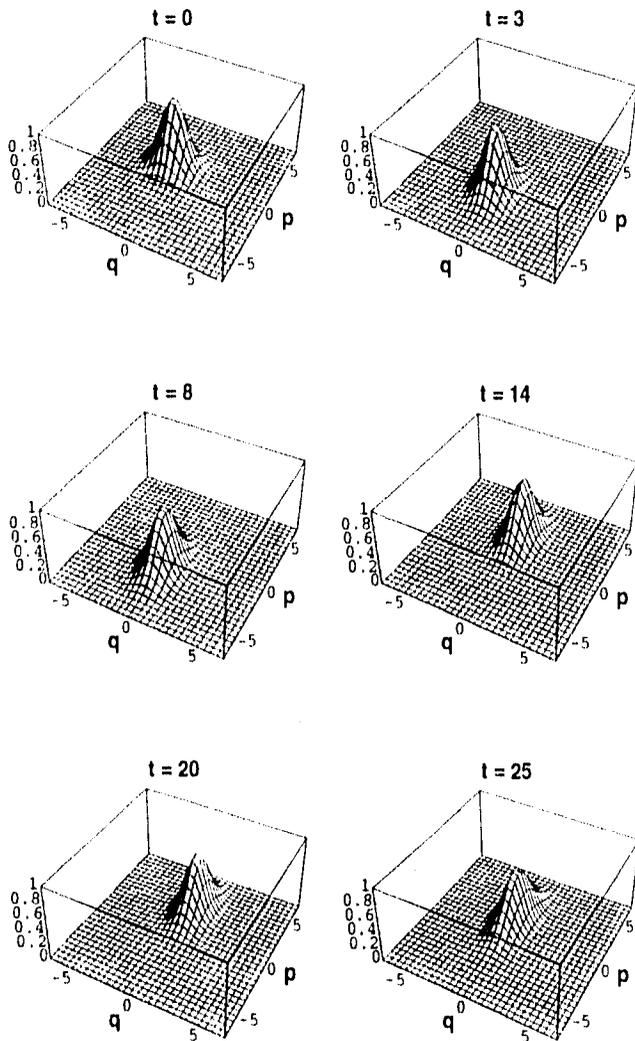


Fig. 12. Función Q para el estado coherente generalizado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

La correspondiente función Q se calcula utilizando las expresiones (4.5.34), junto con las formulas correspondientes para las dispersiones, λ_p , λ_q y los valores esperados de los operadores de posición y momento. A continuación se grafica esta función para los estados de vacío en la Fig. 11 y $\alpha = \exp(3i\pi/4)$ en la Fig. 12. En estas figuras se aprecia la evolución de las funciones Q mencionadas arriba para los tiempos $t = 0, 3, 8, 14, 20$, y 25. La función Q al igual que la función de Wigner está representada por un paquete Gaussiano trasladado y rotado. Un detalle interesante, es que el ángulo de rotación es el mismo para ambas funciones, pero no así las cantidades que trasladan al paquete y la amplitud del mismo, que son funciones complicadas del tiempo.

Dependencia temporal cuadrática

Considérese ahora el caso de un sistema de oscilador paramétrico con una frecuencia angular $\omega^2(t) = ct^2 + d$. El álgebra dinámica de simetría del sistema está generada por las integrales de movimiento \hat{p}_0, \hat{q}_0 definidas por la ecuación (4.2.10), donde $h_1(t)$ y $h_2(t)$ representan dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de movimiento del sistema clásico, esto es

$$\ddot{h}(t) + (ct^2 + d)h(t) = 0. \quad (5.3.14)$$

Si se hace el cambio de variable

$$t = \sqrt{\frac{i}{2c}} z$$

la ecuación (5.3.14) toma la forma estandar de la ecuación de Weber

$$\frac{d^2 h}{dz^2} + \left(2k - \frac{1}{4}z^2\right)h = 0. \quad (5.3.15)$$

donde se definió $k \equiv id/(4\sqrt{c})$. Las soluciones independientes de la ecuación anterior son las funciones parabólico-cilíndricas. Sin embargo para propósitos de cálculo es más conveniente realizar la transformación $h = z^{-1/2}W(z^2/2)$ en la ecuación (5.3.15); encontrándose la ecuación diferencial de las funciones de Whittaker [7]

$$\frac{d^2 W}{dw^2} + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{k}{w} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{w^2} \right\} W = 0. \quad (5.3.16)$$

con $m = -\frac{1}{4}$ y la variable $w \equiv z^2/2$ ¹.

¹ Las funciones $\{W_{k,m}, M_{k,m}\}$ forman un sistema fundamental de soluciones de (5.3.16) y están relacionadas por $W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} M_{k,-m}(z)$

Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (5.3.15) está dado por

$$\left\{ z^{-\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}+1, -\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} z^2 \right), z^{-\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}+1, \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} z^2 \right) \right\}, \quad (5.3.17)$$

donde las funciones de Whittaker $M_{\mu, \nu}$ pueden expresarse en términos de la función hipergeométrica confluyente, ${}_1F_1\{\alpha; \gamma; z\}$ (en la notación de Kummer, también denotada como $\Phi(\alpha, \beta, z)$ [10]) la cual está definida por la serie

$${}_1F_1\{\alpha; \gamma; z\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < \infty, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots,$$

con el símbolo de Pochhammer

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

La relación entre la función de Whittaker y la hipergeométrica confluyente es la siguiente

$$M_{k, m} = z^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{1}{2}z} {}_1F_1 \left\{ \frac{1}{2} + m - k; 2m + 1; z \right\}, \quad (5.3.18)$$

con lo cual el conjunto (5.3.17) se reescribe como

$$\left\{ 2^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} {}_1F_1 \left\{ \frac{1}{4} - k; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} z^2 \right\}, 2^{-\frac{3}{2}} z e^{-\frac{1}{2}z^2} {}_1F_1 \left\{ \frac{3}{4} - k; \frac{3}{2}; \frac{1}{2} z^2 \right\} \right\}. \quad (5.3.19)$$

Utilizando las propiedades

$${}_1F_1\{\alpha; \gamma; 0\} = 1, \quad \text{y} \quad \frac{d^n}{dz^n} {}_1F_1\{\alpha; \gamma; z\} = \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} {}_1F_1\{\alpha + n; \gamma + n; z\},$$

se construyen dos soluciones linealmente independientes de (5.3.15) que satisfacen las condiciones iniciales (4.2.12)

$$H_1(t) = e^{\frac{i\sqrt{c}}{2}t^2} {}_1F_1 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{id}{4c^{\frac{1}{2}}}; \frac{1}{2}; -i\sqrt{c}t^2 \right\}, \quad (5.3.20a)$$

$$H_2(t) = -te^{\frac{i\sqrt{c}}{2}t^2} {}_1F_1 \left\{ \frac{3}{4} - \frac{id}{4c^{\frac{1}{2}}}; \frac{3}{2}; -i\sqrt{c}t^2 \right\}. \quad (5.3.20b)$$

En el formalismo desarrollado en el capítulo anterior se consideró que las soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento eran funciones reales. Sin embargo, en este

Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (5.3.15) está dado por

$$\left\{ z^{-\frac{1}{2}} M_{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} z^2 \right), z^{-\frac{1}{2}} M_{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} z^2 \right) \right\}, \quad (5.3.17)$$

donde las funciones de Whittaker $M_{\mu, \nu}$ pueden expresarse en términos de la función hipergeométrica confluyente, ${}_1F_1\{\alpha; \gamma; z\}$ (en la notación de Kummer, también denotada como $\Phi(\alpha, \beta, z)$ [10]) la cual está definida por la serie

$${}_1F_1\{\alpha; \gamma; z\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{(\gamma)_k k!}, \quad |z| < \infty, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots,$$

con el símbolo de Pochhammer

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

La relación entre la función de Whittaker y la hipergeométrica confluyente es la siguiente

$$M_{k, m} = z^{\frac{1}{2} + m} e^{-\frac{1}{2}z} {}_1F_1 \left\{ \frac{1}{2} + m - k; 2m + 1; z \right\}, \quad (5.3.18)$$

con lo cual el conjunto (5.3.17) se reescribe como

$$\left\{ 2^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}z^2} {}_1F_1 \left\{ \frac{1}{4} - k; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}z^2 \right\}, 2^{-\frac{3}{4}} z e^{-\frac{1}{2}z^2} {}_1F_1 \left\{ \frac{3}{4} - k; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}z^2 \right\} \right\}. \quad (5.3.19)$$

Utilizando las propiedades

$${}_1F_1\{\alpha; \gamma; 0\} = 1, \quad y \quad \frac{d^n}{dz^n} {}_1F_1\{\alpha; \gamma; z\} = \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} {}_1F_1\{\alpha + n; \gamma + n; z\},$$

se construyen dos soluciones linealmente independientes de (5.3.15) que satisfacen las condiciones iniciales (4.2.12)

$$H_1(t) = e^{\frac{i\sqrt{c}}{2}t^2} {}_1F_1 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{id}{4c^{\frac{1}{4}}}; \frac{1}{2}; -i\sqrt{c}t^2 \right\}, \quad (5.3.20a)$$

$$H_2(t) = -te^{\frac{i\sqrt{c}}{2}t^2} {}_1F_1 \left\{ \frac{3}{4} - \frac{id}{4c^{\frac{1}{4}}}; \frac{3}{2}; -i\sqrt{c}t^2 \right\}. \quad (5.3.20b)$$

En el formalismo desarrollado en el capítulo anterior se consideró que las soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento eran funciones reales. Sin embargo, en este

caso para c y d arbitrarias, dichas soluciones (dadas en (5.3.20)) son complejas. Es inmediato probar que las funciones conjugadas, $H_1^*(t)$ y $H_2^*(t)$ también satisfacen la ecuación diferencial (5.3.15) con las condiciones iniciales (4.2.12). En consecuencia, las soluciones reales h_1 y h_2 del capítulo anterior estarán dadas a través de las expresiones

$$h_1(t) = \frac{1}{2} (H_1(t) + H_1^*(t)) , \quad (5.3.21a)$$

$$h_2(t) = \frac{1}{2} (H_2(t) + H_2^*(t)) . \quad (5.3.21b)$$

En la discusión siguiente se considera el caso especial de las soluciones (5.3.20) y (5.3.21) cuando los parámetros de la frecuencia del oscilador paramétrico toman los valores $c = 1$ y $d = -1$. De acuerdo a lo presentado para el caso no estacionario anterior las trayectorias clásicas de movimiento y el comportamiento de los valores esperados de la posición y momento coinciden. Por lo tanto a continuación se ilustran las trayectorias clásicas del sistema en la Fig. 13, para las condiciones iniciales $q_0 = -1$ y $p_0 = 1$. En la figura se observan dos comportamientos, uno para $t < 2$ en el que la p es decreciente y la q creciente y el segundo $t > 2$ en el que presentan un comportamiento oscilatorio creciente para el momento y decreciente para la posición.

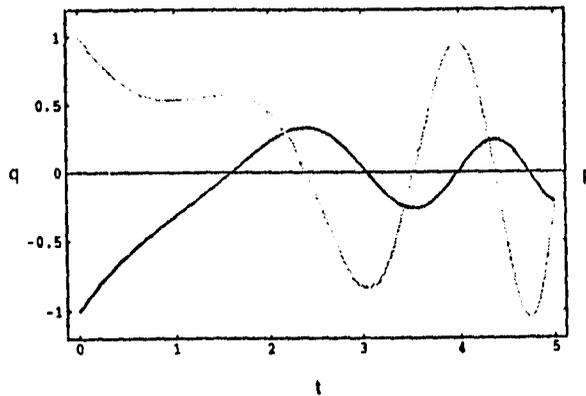


Fig. 13. Valores esperados de la posición y el momento en función del tiempo. La línea clara indica el comportamiento del momento y la línea oscura el de la posición, con las condiciones iniciales $q_0 = -1$ y $p_0 = 1$.

La trayectoria en el espacio fase se muestra en la Fig. 14 para las mismas condiciones iniciales. Es evidente que el movimiento del sistema está localizado y describe un movimiento elíptico, que se aproxima al eje p al aumentar el tiempo. Las gráficas fueron obtenidas por medio de los valores esperados de los operadores de posición y momento utilizando $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

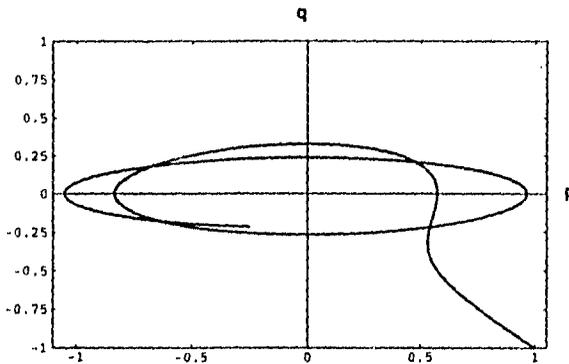


Fig. 14. Trayectoria del sistema en el espacio fase (p, q) , cuando el tiempo varía en el intervalo $t \in [0, 10]$, con las condiciones iniciales $q_0 = -1$ y $p_0 = 1$.

Las dispersiones en los operadores de posición y momento como funciones del tiempo se grafican en la Fig. 15 para el intervalo de tiempo $t \in [0, 1]$. En esta figura se muestra un comportamiento oscilatorio decreciente para la dispersión en la posición, mientras que para la dispersión del momento es oscilatorio creciente. Estos resultados concuerdan con el comportamiento indicado en las trayectorias clásicas, con una mayor localización en la posición y lo opuesto para el momento. Además es importante señalar que para este sistema de oscilador paramétrico se presenta el fenómeno de compresión en forma alternada en las dos cuadraturas. En la Fig. 16 se grafica el coeficiente de correlación en función del tiempo, mostrándose que el sistema aumenta la correlación entre la coordenada de posición y el momento al transcurrir el tiempo. Por lo tanto, el estado coherente que se tiene al tiempo $t = 0$, se convierte al evolucionar en un estado comprimido y completamente correlacionado.

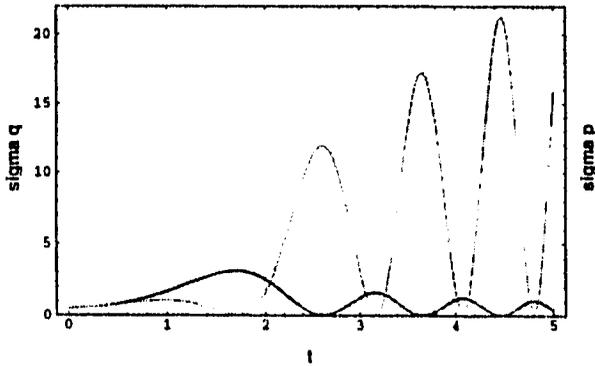


Fig. 15. Dispersiones de los operadores de posición σ_q y momento σ_p del sistema como función del tiempo. La línea clara ilustra σ_p , mientras que la línea oscura corresponde a σ_q .

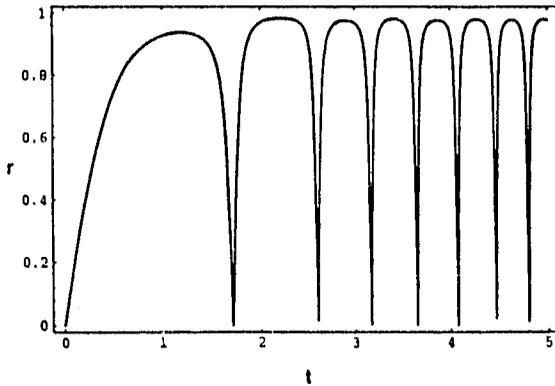


Fig. 16. Gráfica del coeficiente de correlación r de los operadores \hat{q} y \hat{p} como función del tiempo.

Si se conoce el valor esperado del operador \hat{q} y su dispersión σ_q , se determina el estado del sistema, concretamente la densidad de probabilidad en el espacio de coordenadas, Ec. (4.3.17). Existe una expresión análoga para la densidad de probabilidad

en el espacio del momento, la que queda completamente determinada si se conoce el valor esperado de \hat{p} y su dispersión σ_p .

La densidad de probabilidad del sistema en el espacio de las coordenadas es una función normal de distribución que alcanza su máximo en $\langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t}$ y está caracterizada por una dispersión cuadrática media $\sqrt{\sigma_q}$. Este comportamiento se exhibe en la Fig. 17 para el vacío correlacionado y en la Fig. 18 para el estado con una amplitud $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

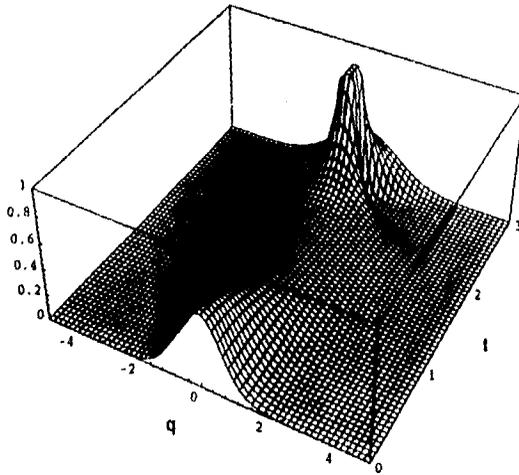


Fig. 17. Densidad de Probabilidad en el espacio de coordenadas para el vacío correlacionado en función de la posición y el tiempo.

En la Fig. 17 se observa que el paquete gaussiano aumenta su dispersión alrededor del cero hasta un tiempo $t = 2$, para posteriormente disminuirla en forma continua. En la Fig. 18 el estado coherente inicial ya no está centrado en el origen de coordenadas y el máximo tiene un movimiento bien definido por el valor esperado de \hat{q} con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$. La dispersión del paquete tiene un comportamiento similar al mencionado anteriormente para el vacío correlacionado.

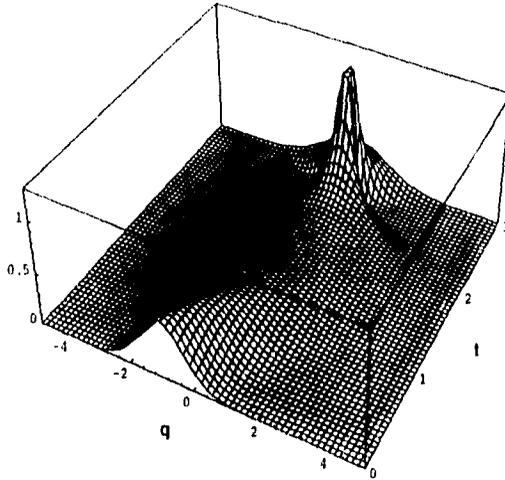


Fig. 18. Densidad de Probabilidad en el espacio de coordenadas para el estado coherente generalizado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$ en función de la posición y el tiempo.

Cuando el oscilador paramétrico describe un sistema óptico, la función de distribución del número de fotones puede utilizarse para detectar efectos no clásicos de la luz. Las Figs. 19 y 20 muestran las distribuciones de fotones para el vacío correlacionado y el estado coherente generalizado $|e^{i\frac{3\pi}{4}}, t\rangle$ en función del número de fotones y el tiempo. Además se presentan cortes de la gráfica tridimensional de la función de distribución de fotones. También en la Fig. 19 se nota claramente que el vacío correlacionado tiene una probabilidad cero de tener un número impar de fotones, así como la aparición de colapsos y resurgimientos. En la Fig. 20 el estado coherente $|e^{i\frac{3\pi}{4}}, t\rangle$ si puede tener un número impar de fotones y también exhibe colapsos y resurgimientos.

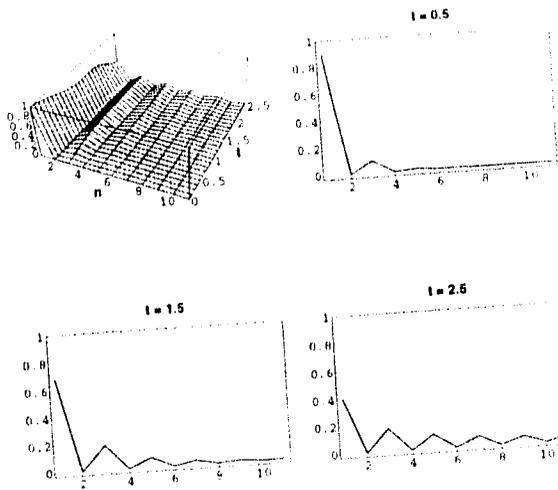


Fig. 19. Distribución de fotones para el vacío correlacionado.

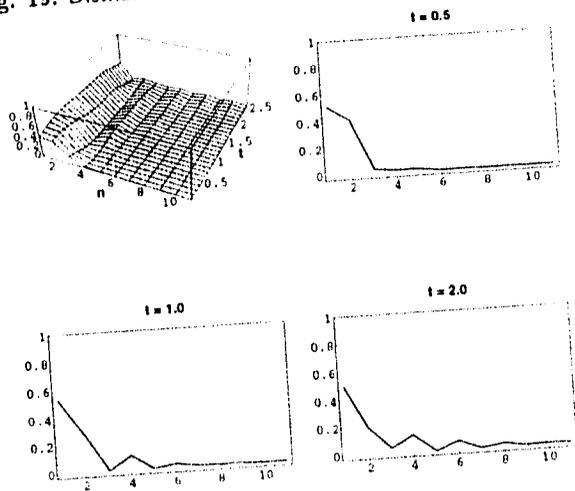


Fig. 20. Distribución de fotones para el estado coherente generalizado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

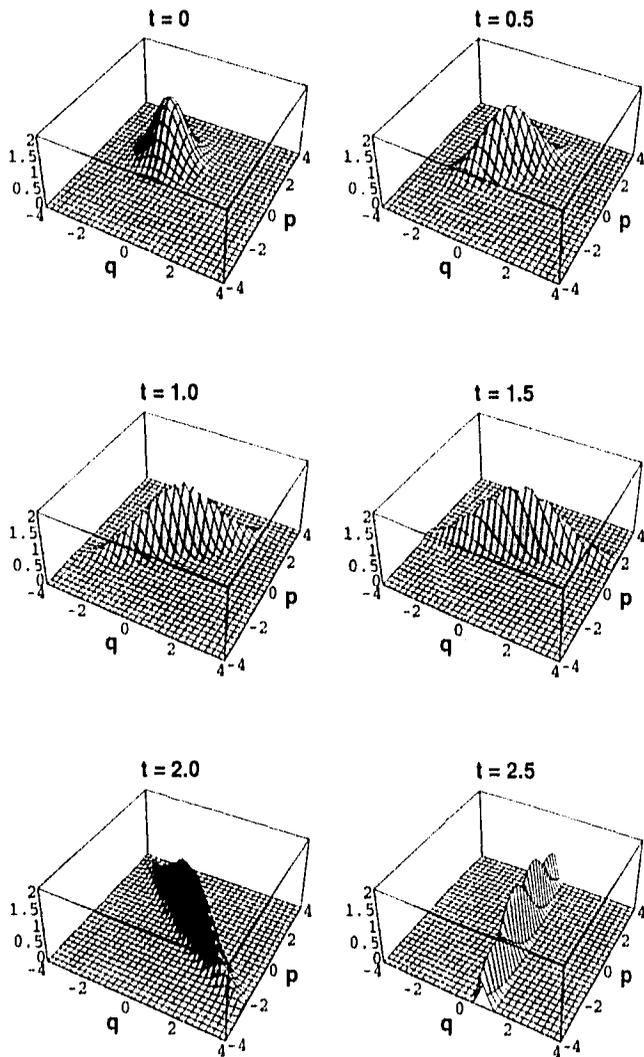


Fig. 21. Función de Wigner para el vacío correlacionado.

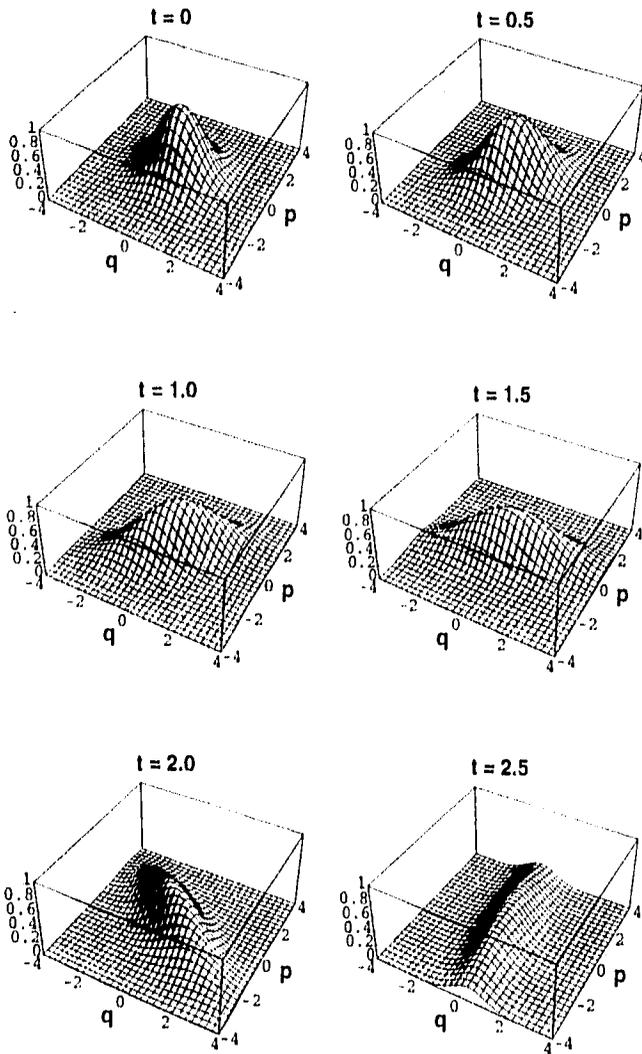


Fig. 22. Función de Wigner para el estado coherente generalizado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

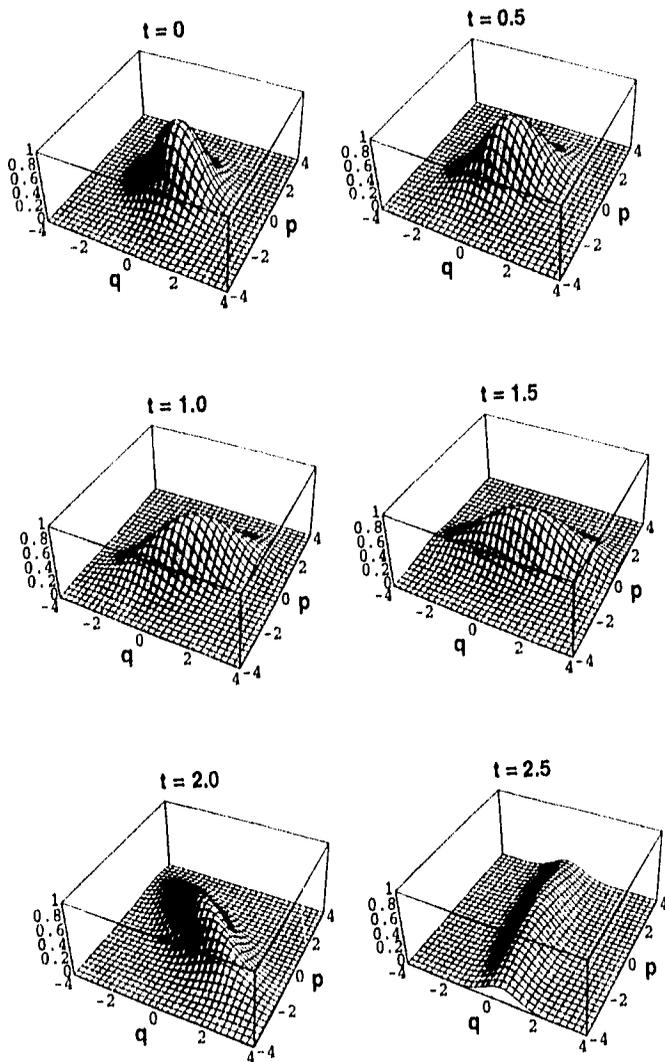


Fig. 23. Función Q para el vacío correlacionado.

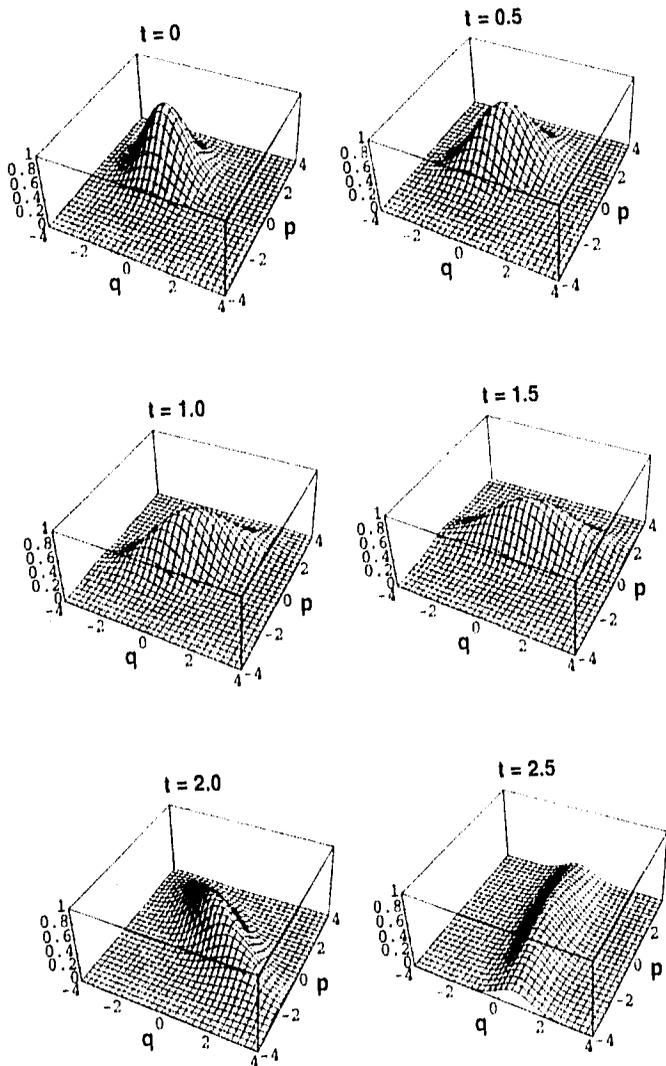


Fig. 24. Función Q para el estado coherente generalizado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$.

La descripción del sistema que corresponde a las funciones de distribución de cuasiprobabilidad se representa gráficamente en las Figs. 21 a 24. Las Figs. 21 y 22 muestran las funciones de cuasiprobabilidad de Wigner para valores fijos de los parámetros α y t . La forma de la función de Wigner corresponde a una ley normal de distribución en el plano que alcanza su máximo en $(\langle \hat{q} \rangle_{\alpha,t}, \langle \hat{p} \rangle_{\alpha,t})$. En las Figs. 23 y 24 se representa las funciones Q de cuasiprobabilidad para los mismos valores de los parámetros α y t considerados en las figuras anteriores. Aún cuando en nuestro caso la forma analítica de la distribución de Husimi es más complicada que la función de Wigner, su representación en el espacio fase es al igual que esta última una superficie Gaussiana.

En ambos casos se observa una rotación del paquete Gaussiano, que es consecuencia de la correlación distinta de cero que existe entre los operadores de posición y momento del sistema. Una de las diferencias entre las gráficas de las funciones de cuasiprobabilidad para el vacío correlacionado y el estado con $\alpha = \exp(3i\pi/4)$ es que para el último estado las funciones además de rotar se trasladan de acuerdo con las expresiones analíticas encontradas en el capítulo anterior. Tanto en las funciones de Wigner como en las de Husimi se aprecia el fenómeno de compresión en las cuadraturas del sistema.

Bibliografía

- [1] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, *Invariants and the evolution of nonstationary quantum systems*. Ed. M. A. Markov, Proceedings of the Lebedev Physics Institute, Vol. 183 (Nova Science, Commack, New York, 1989).
- [2] C. Villareal, S. Hacyan, R. Jáuregui, *Generation of particles and squeezed states between moving conductors* Phys. Rev. A, (1995), 52, núm. 1, pág. 594.
- [3] A. Heidman, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, *Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams* Phys. Rev. Lett., (1987), 65, núm. 3, pág. 2555.
- [4] W. Paul, *Electromagnetic traps for charged and neutral particles* Rev. of Mod.

Phys.(1990), 62, núm. 3, pág. 531.

- [5] L.S. Brown, G. Gabrielse, *Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap* Rev. of Mod. Phys. (1986), 58, núm. 1, pág. 233.
- [6] Ed. M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (Dover Publications, Inc., New York).
- [7] E.T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis* (Cambridge University Press, 1992) pág.404.
- [8] R.J. Glauber *Quantum measurements in quantum optics* Proc. Nato Advanced Research Workshop (Cortina d'Ampezzo ,Ed. P. Tombesi, D. F. Walls (New York, 1991)
- [9] O. Castañós, R. López Peña and V.I. Man'ko. *Schrödinger cat states of non-stationary generalized oscillator* J. Phys. A : Math. Gen. (1994), 29, pág. 2091.
- [10] N. N. Lebedev *Special functions and their applications* Ed. R. A. Silverman (Dover Publications, Inc., New York) pág. 260.

6

Conclusiones

En este trabajo, se ha presentado un procedimiento sistemático desarrollado sobre la base del teorema de Noether y la teoría de invariantes lineales dependientes del tiempo, para resolver en forma exacta la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para sistemas descritos por Hamiltonianos cuadráticos no estacionarios.

La meta principal de esta contribución fue construir y determinar las propiedades de los estados coherentes generalizados asociados a sistemas Hamiltonianos que son cuadráticos en las posiciones y momentos.

Para lograr lo anterior fue necesario determinar las constantes de movimiento dependientes del tiempo que son lineales en las coordenadas de posición y momento. Estas invariantes se encontraron a través del teorema de Noether, realizando variaciones que están asociadas con transformaciones de simetría a lo largo de la trayectoria del sistema en el espacio fase. Este conjunto de invariantes constituyen los generadores fundamen-

tales con los cuales se puede construir el álgebra de simetrías $w(1) \wedge sp(2, R)$ de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo asociada con sistemas Hamiltonianos cuadráticos. Se denota con $w(1)$ al álgebra de Weyl en una dimensión y $sp(2, R)$ es el álgebra simpléctica de dos dimensiones.

Con las constantes de movimiento se pueden construir operadores $A(t)$ y $A^\dagger(t)$ que satisfacen las mismas relaciones de conmutación que los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico. A las eigenfunciones de α se les llama estados coherentes, los que fueron introducidos por Schrödinger en 1926 y han tenido desde 1963, cuando Glauber desarrolló la teoría de coherencia óptica, gran importancia y utilidad en la descripción del campo electromagnético.

A las eigenfunciones de la constante de movimiento $A(t)$ se les ha denotado por estados coherentes generalizados y son soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del sistema Hamiltoniano cuadrático bajo estudio. Para determinar sus propiedades, se calcularon las dispersiones de la posición y momento, el coeficiente de correlación, la función de distribución del número de fotones y las funciones de cuasiprobabilidad (Wigner y Husimi) que tienen asociadas. Uno de los aspectos de mayor relevancia de estos estados es que minimizan la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson que ha sido discutida en este trabajo.

Todas estas expresiones y el estado coherente generalizado se obtuvieron en forma analítica para un Hamiltoniano cuadrático general con coeficientes arbitrarios y dependientes del tiempo. Estas expresiones se conocen explícitamente si es posible resolver las ecuaciones clásicas de movimiento del sistema Hamiltoniano cuadrático.

Como ejemplo se estudió al oscilador paramétrico con una frecuencia dependiente del tiempo. En particular se consideró la partícula libre, el oscilador armónico y sistemas con funciones lineales y cuadráticas en el tiempo de la frecuencia del oscilador, encontrándose para estos casos los estados coherentes generalizados y determinándose sus propiedades. Es importante resaltar que dichos estados muestran propiedades completamente distintas a las de los estados coherentes como son los fenómenos de correlación y funciones de distribución no clásicas de número de fotones. Estos fenómenos son importantes en Óptica Cuántica para la generación de estados no-clásicos de la luz.

En algunos casos se obtuvieron resultados que han sido observados en sistema

atómicos resonantes como son los colapsos y resurgimientos, además de características en las funciones de distribución de número de fotones que tienen los estados pares de gato de Schrödinger.

Se espera que este trabajo sirva para estudiar la evolución de paquetes gaussianos en sistemas cuánticos estacionarios y no-estacionarios, además de ser una base para realizar aplicaciones a sistemas físicos en varias ramas de la física teórica que están caracterizados por Hamiltonianos cuadráticos. Como ejemplo se discutieron las trampas de Paul, que son muy importantes en la física involucrada en el almacenamiento de partículas de baja energía. Estas trampas ha sido utilizadas para realizar mediciones de precisión en sistemas atómicos ya que permiten tiempos grandes de interacción entre las partículas confinadas y los campos de radiación.

En estudios recientes de optica de las comunicaciones, se encontraron estados de dos fotones que satisfacen la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson. Como se vió en este trabajo, estos estados tienen propiedades estadísticas diferentes a las de los estados coherentes normales ¹. Experimentalmente, la generación de estos estados puede lograrse mediante la superposición de cuatro ondas de la misma frecuencia en un medio no-lineal ². También son los estados de un laser de dos fotones, que consiste en la absorción de dos fotones de la misma frecuencia en una transición entre dos niveles. Será un propósito subsecuente, el estudio de Hamiltonianos cuadráticos que representen la interacción de radiación materia de transición de dos fotones.

¹ ver la referencia [14] del Capítulo 4, pág 144.

² un estudio detallado al respecto se presenta en la referencia [14] del Capítulo 4, pág 162

Apéndice A

En este Apéndice se presentan las demostraciones de los Teoremas 1 y 4 de la primera Sección del Capítulo 2.

Teorema 1.

Primero se considera que $F(\dot{q}_k, q_k, t) = \frac{d\Omega(q_k, t)}{dt}$ y se va a probar que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, $E_k^{(1)} \frac{d\Omega(q_k, t)}{dt} = 0$.

Sea $\Omega = \Omega(q_k, t)$ una función de clase C^2 , entonces la derivada total con respecto al tiempo

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\Omega}{\partial q_l} \dot{q}_l. \quad (A.1)$$

De la expresión anterior es inmediato que al tomar la derivada con respecto q_k se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \right), \end{aligned} \quad (A.2)$$

donde se intercambiaron las derivadas parciales.

Tomando la derivada de (A.1) con respecto a \dot{q}_k se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_l} \delta_{k,l} = \frac{\partial\Omega}{\partial q_k},$$

donde se utilizó que la función Ω es independiente de \dot{q}_k y $\delta_{k,l}$ es la función delta de Kronecker. Entonces evaluando la derivada total con respecto al tiempo de la expresión

anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (A.3)$$

Finalmente aplicando el operador de Euler-Lagrange se encuentra

$$\begin{aligned} E_k^{(1)} \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] \right), \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \end{aligned} \quad (A.4)$$

donde en la última igualdad se utilizaron los resultados (A.2) y (A.3).

Ahora se considera que $E_k^{(1)} F(\dot{q}_i, q_i, t) = 0$, que al desarrollar la derivada total da lugar al sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad (A.5a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0. \quad (A.5b)$$

De la expresión (A.5a) se concluye que la función F depende linealmente de las \dot{q}_i y entonces puede escribirse como sigue

$$F = G(q_i, t) + \dot{q}_j G_j(q_i, t).$$

Substituyendo ésta en la Ec. (A.5b) se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial q_k} + \dot{q}_i \frac{\partial G_i}{\partial q_k} - \dot{q}_i \left[\delta_{jk} \frac{\partial G_j}{\partial q_i} \right] - \frac{\partial G_k}{\partial t} = 0,$$

dando lugar al sistema de ecuaciones siguiente

$$\frac{\partial G_i}{\partial q_k} = \frac{\partial G_k}{\partial q_i}, \quad (A.6a)$$

$$\frac{\partial G_k}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial q_k}. \quad (A.6b)$$

Entonces si se define $G_k = \frac{\partial G}{\partial q_k}$ y $G = \frac{\partial G}{\partial t}$, de las expresiones anteriores se prueba que F es la derivada total con respecto del tiempo de una función $\Omega(q_k, t)$, que es lo que se quería demostrar.

Teorema 4.

La demostración es análoga a la anterior. Considerese $F(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{d\Omega}{dt}$ donde $\Omega = \Omega(q_k, \dot{q}_k, t)$ una función de clase C^2 , y se quiere probar que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange $E_k^{(2)}F = 0$, entonces

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (A.7)$$

Por lo cual tomando las derivadas parciales con respecto a q_k y \dot{q}_k se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \right) \ddot{q}_i, \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \right), \end{aligned} \quad (A.8a)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \delta_{k,i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) \ddot{q}_i, \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial\Omega}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (A.8b)$$

Tomando la derivada total de (A.8b) con respecto del tiempo se obtiene la expresión

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \right). \quad (A.9)$$

Dado que Ω no depende de \ddot{q}_k resulta

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \delta_{k,i},$$

la cual al tomar la segunda derivada con respecto al tiempo se escribe como sigue

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_k} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k} \right). \quad (\text{A.10})$$

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} E_k^{(2)} [F(q_k, \dot{q}_k, t)] &= E_k^{(2)} \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_k} \left[\frac{d\Omega}{dt} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_k} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde se utilizaron las expresiones (A.8a), (A.9) y (A.10); obteniéndose lo que se quería demostrar.

Para demostrar el regreso de este teorema, considerese $F(\ddot{q}_k, \dot{q}_k, q_k, t)$ una función tal que $E^{(2)}[F] = 0$ es decir

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k} \right) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Las derivadas totales con respecto del tiempo que aparecen en la expresión anterior están dadas en forma explícita por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) \ddot{q}_i - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) q_i - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k} \right) \ddot{q}_i + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k} \right) q_i \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_{i_m}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \ddot{q}_i \partial \ddot{q}_k} \right) \ddot{q}_i \ddot{q}_m + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{i_m}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \ddot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_m \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_{i_m}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_i q_m + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \ddot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_i \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_{i_m}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_i \ddot{q}_m + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{i_m}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_l \partial \ddot{q}_k} \right) \ddot{q}_l \dot{q}_m + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_l \partial \ddot{q}_k} \right) \ddot{q}_l \\
& + \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_l \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_l \ddot{q}_m + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_l \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_m \\
& + \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_l \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_m + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_l \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_l \\
& + \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_l \ddot{q}_m + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_m \\
& + \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_m + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \ddot{q}_k} \right) \dot{q}_l
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Substituyendo las relaciones (A.12) y (A.13) en (A.11), y reagrupando los coeficientes que multiplican a las distintas derivadas con respecto del tiempo de las coordenadas generalizadas, se observa que los términos asociados a la tercera y cuarta derivada de q_k deben ser cero. En el caso de \ddot{q}_k se tiene por tanto que

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_l \partial \ddot{q}_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = g_s(\dot{q}_i, q_i, t) \ddot{q}_s + G(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{A.14}$$

Utilizando esta forma de F , el coeficiente de \ddot{q}_k igualado a cero implica la condición

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l \partial \ddot{q}_k} - \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_l \partial \dot{q}_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_k}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k} \tag{A.15}$$

los términos restantes pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial G}{\partial q_k} - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_l + \frac{\partial^2 G}{\partial q_l \partial \dot{q}_k} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial \dot{q}_k} \right] \\
& + \left[\frac{\partial g_l}{\partial q_k} + \frac{\partial g_k}{\partial q_l} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_s + \frac{\partial^2 g_k}{\partial \dot{q}_m \partial \dot{q}_l} \ddot{q}_m - \frac{\partial^2 g_l}{\partial q_m \partial \dot{q}_k} \dot{q}_m \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 g_k}{\partial q_m \partial \dot{q}_l} \dot{q}_m - \frac{\partial^2 g_l}{\partial t \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial^2 g_k}{\partial t \partial \dot{q}_l} + \frac{\partial^2 g_k}{\partial \dot{q}_l \partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 g_k}{\partial \dot{q}_l \partial t} \right] \ddot{q}_l \\
& + \frac{\partial^2 g_k}{\partial q_m \partial q_l} \dot{q}_m \dot{q}_l + \frac{\partial^2 g_k}{\partial t \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 g_k}{\partial q_m \partial t} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 g_k}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{A.16}$$

utilizando la ecuación (A.14) la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} \right) \\
& + \left[\frac{\partial g_l}{\partial q_k} + \frac{\partial g_k}{\partial q_l} + \frac{\partial^2 g_k}{\partial \dot{q}_l \partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 g_k}{\partial \dot{q}_l \partial t} \right] \ddot{q}_l \\
& + \frac{\partial^2 g_k}{\partial q_m \partial q_l} \dot{q}_m \dot{q}_l + \frac{\partial^2 g_k}{\partial t \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 g_k}{\partial q_m \partial t} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 g_k}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Si se elige

$$g_k = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_k}, \quad (\text{A.18})$$

donde $\Omega = \Omega(\dot{q}_i, q_i, t)$ es una función clase C^3 , (suposición que es consistente con (A.14)), la ecuación (A.16) implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} \right) = & - \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_k \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \dot{q}_i \partial q_m \partial \dot{q}_k} \dot{q}_m + \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \dot{q}_i \partial t \partial \dot{q}_k} \right] \ddot{q}_i \\ & - \frac{\partial^3 \Omega}{\partial q_m \partial q_i \partial \dot{q}_i} \dot{q}_m \dot{q}_i - \frac{\partial^3 \Omega}{\partial t \partial q_i \partial \dot{q}_k} \dot{q}_i - \frac{\partial^3 \Omega}{\partial q_m \partial t \partial \dot{q}_k} \dot{q}_m - \frac{\partial^3 \Omega}{\partial t^2 \partial \dot{q}_k}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

sumando y restando

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial q_k}$$

al lado derecho de la igualdad (A.8), e intercambiando el orden de derivación parcial, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} \right) = & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_k \partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial q_m} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_k \partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \Omega}{\partial q_m} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_k \partial t} \right) \\ = & \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

es decir

$$G(\dot{q}_i, q_i, t) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (\text{A.21})$$

Entonces, al substituir los resultados (A.18) y (A.21) en la relación (A.12) se tiene finalmente que

$$F(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t) = \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_s} \right] \ddot{q}_s + \left[\frac{\partial \Omega}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right], \quad (\text{A.22})$$

en otras palabras, F , una solución arbitraria de las ecuaciones de Euler-Lagrange $E^{(2)}$, puede expresarse como la derivada total con respecto del tiempo de una función $\Omega(\dot{q}_i, q_i, t)$ clase C^3 , como se quería demostrar.

Apéndice B

Parte 1

En esta parte del apéndice se encontrará el operador Hamiltoniano (4.1.2) en la representación de estados coherentes. Utilizando la relación de conmutación de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico, es conveniente observar que

$$\begin{aligned} \exp(\alpha^* \hat{a}) \hat{a}^{\dagger 2} \exp(-\alpha^* \hat{a}) &= \hat{a}^{\dagger 2} + [\alpha^* \hat{a}, \hat{a}^{\dagger 2}] + \frac{1}{2!} [\alpha^* \hat{a}, [\alpha^* \hat{a}, \hat{a}^{\dagger 2}]] + \dots \\ &= \hat{a}^{\dagger 2} + 2\alpha^* \hat{a}^{\dagger} + \alpha^{*2}. \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} \exp(\alpha^* \hat{a}) \hat{a}^2 \exp(-\alpha^* \hat{a}) &= \hat{a}^2 + [\alpha^* \hat{a}, \hat{a}^2] + \frac{1}{2!} [\alpha^* \hat{a}, [\alpha^* \hat{a}, \hat{a}^2]] + \dots \\ &= \hat{a}^2. \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} \exp(\alpha^* \hat{a}) \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \exp(-\alpha^* \hat{a}) &= \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + [\alpha^* \hat{a}, \hat{a}^{\dagger} \hat{a}] + \frac{1}{2!} [\alpha^* \hat{a}, [\alpha^* \hat{a}, \hat{a}^{\dagger} \hat{a}]] + \dots \\ &= \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \alpha^* \hat{a}, \end{aligned} \quad (B.3)$$

y como por (4.4.12), se sabe que

$$\langle \alpha | \hat{a} = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \langle \alpha | \quad (B.1a)$$

$$\langle \alpha | \hat{a}^{\dagger} = \alpha^* \langle \alpha |. \quad (B.1b)$$

Para obtener la representación en estados coherentes de \hat{p}^2 , \hat{q}^2 y $(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})$, basta

expresar dichos operadores en términos de \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Utilizando las relaciones

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger),$$

$$\hat{p} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

se tiene que

$$\hat{p}^2 = -\frac{1}{2}(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1), \quad (B.5)$$

entonces

$$\langle \alpha | \hat{p}^2 | \psi \rangle = \left(-\frac{1}{2}\alpha^{*2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} + \frac{1}{2} + \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \langle \alpha | \psi \rangle, \quad (B.6)$$

analogamente

$$\hat{q}^2 = \frac{1}{2}(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1), \quad (B.7)$$

implica que

$$\langle \alpha | \hat{q}^2 | \psi \rangle = \left(\frac{1}{2}\alpha^{*2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} + \frac{1}{2} + \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \langle \alpha | \psi \rangle, \quad (B.8)$$

y como

$$(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) = -i(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}), \quad (B.9)$$

se tiene que

$$\langle \alpha | \hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q} | \psi \rangle = \left(-i\frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} + i\alpha^{*2} \right) \langle \alpha | \psi \rangle. \quad (B.10)$$

Entonces, por la arbitrariedad de $|\psi\rangle$ la representación en el espacio de estados coherentes del operador Hamiltoniano (4.1.2) es

$$\mathcal{H}(\alpha^*) = \left[-\frac{a(t)}{4} + \frac{b(t)}{2i} + \frac{c(t)}{4} \right] \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} + \left[\frac{a(t)}{2} + \frac{c(t)}{2} \right] \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \left[-\frac{a(t)}{4} + \frac{ib(t)}{2} + \frac{c(t)}{4} \right] \alpha^{*2} + \left[\frac{a(t)}{4} + \frac{c(t)}{4} \right], \quad (B.11)$$

Parte 2

Esta parte está dedicada a presentar en detalle las relaciones que se utilizaron en el Capítulo 4 para encontrar la función $g_0(t)$ de la ecuación (4.4.15).

Partiendo de la ecuación (4.4.19), se tiene que el factor que multiplica a g_0 en el lado derecho de dicha relación puede expresarse en términos de λ_q y λ_p como

$$\frac{1}{2M_1} \left(\frac{a}{2} (M_2 + M_1) + i b M_2 + \frac{c}{2} (M_1 - M_2) \right) \\ = \frac{1}{2(\lambda_q - i\lambda_p)} \left[-i(c\lambda_p - b\lambda_q) - (b\lambda_p - a\lambda_q) \right]. \quad (B.12)$$

Esta forma es particularmente útil, ya que los términos se pueden identificar directamente con los elementos de la matriz \hat{M} . Para encontrar las expresiones de dicha derivada, es conveniente observar lo siguiente:

Dado que \hat{q}_0 y \hat{p}_0 son constantes de movimiento, deben satisfacer las ecuaciones

$$i \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial t} = \{H, \hat{p}_0\}, \quad (B.13a)$$

$$i \frac{\partial \hat{q}_0}{\partial t} = \{H, \hat{q}_0\}, \quad (B.13b)$$

donde H está dado por la ecuación (4.1.2). Utilizando notación matricial, esto es denotando

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{q}_0 \end{pmatrix},$$

el Hamiltoniano (4.1.2) puede escribirse en la forma

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}, \quad (B.14)$$

donde \mathbf{B} es la matriz real simétrica

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}. \quad (B.15)$$

Con lo cual, las relaciones (B.13) pueden reescribirse en la forma

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}_0 = \{H, \mathbf{Q}_0\}, \quad (B.16)$$

pero como de acuerdo a (4.2.10)

$$\mathbf{Q}_0 = \Lambda \mathbf{Q}, \quad (B.17)$$

y Q no depende explícitamente del tiempo, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_0 = \dot{\Lambda} Q. \quad (B.18)$$

Por otra parte, el lado derecho de (B.16) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} [H, Q_{0\alpha}] &= \frac{1}{2} [Q_{\beta} B_{\beta\gamma} Q_{\gamma}, \Lambda_{\alpha\delta} Q_{\delta}], \\ &= \frac{1}{2} \Lambda_{\alpha\delta} (Q_{\beta} B_{\beta\gamma} [Q_{\gamma}, Q_{\delta}] + [Q_{\beta}, Q_{\delta}] B_{\beta\gamma} Q_{\gamma}), \\ &= -\frac{i}{2} \Lambda_{\alpha\delta} (Q_{\beta} B_{\beta\gamma} \Sigma_{\gamma\delta} + \Sigma_{\beta\delta} B_{\beta\gamma} Q_{\gamma}), \end{aligned} \quad (B.19)$$

si se utiliza que

$$[Q_{\alpha}, Q_{\beta}] = -i \Sigma_{\alpha\beta}, \quad (B.20)$$

donde, Σ , es la matriz simpléctica definida en (4.2.19). Usando las propiedades de Σ y la simetría de B , (B.19) se reduce a

$$\begin{aligned} [H, Q_{0\alpha}] &= -\frac{i}{2} \Lambda_{\alpha\delta} (-\Sigma_{\delta\gamma} B_{\beta\gamma} Q_{\beta} + \Sigma_{\delta\beta} B_{\beta\gamma} Q_{\gamma}), \\ &= i \Lambda \Sigma B Q, \end{aligned} \quad (B.21)$$

substituyendo (B.18) y (B.21) en (B.16) se tiene que

$$\dot{\Lambda} = \Lambda \Sigma B. \quad (B.22)$$

Entonces dado que

$$M = g \Lambda g^{-1}, \quad (B.23)$$

con

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (B.24)$$

la derivada con respecto del tiempo de M sera

$$\dot{M} = g \dot{\Lambda} g^{-1} = g \Lambda \Sigma B g^{-1}, \quad (B.25)$$

pero como $\Lambda_{pq} = g_p \Lambda$, entonces

$$\dot{M} = \Lambda_{pq} \Sigma B g^{-1}. \quad (B.26)$$

Escribiendo lo anterior en términos de λ_p y λ_q se tiene que

$$\dot{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (c\lambda_p - b\lambda_q) + i(a\lambda_q - b\lambda_p) & (c\lambda_p - b\lambda_q) - i(a\lambda_q - b\lambda_p) \\ (c\lambda_p^* - b\lambda_q^*) + i(a\lambda_q^* - b\lambda_p^*) & (c\lambda_p^* - b\lambda_q^*) - i(a\lambda_q^* - b\lambda_p^*) \end{pmatrix}, \quad (B.27)$$

por lo cual, (B.12) puede expresarse como

$$\frac{1}{2(\lambda_q - i\lambda_p)} \left((a\lambda_q - b\lambda_p) - i(c\lambda_p - b\lambda_q) \right) = -\frac{i\dot{M}_1}{2M_1}. \quad (B.28)$$

Al substituir este resultado en (4.4.19) se obtiene (4.4.20), la ecuación que define a q_0 .

... y q de la expresión así obtenida.

Apéndice C

Parte 1

En esta parte del apéndice se obtendrá la función $k(t)$ que aparece en la expresión (4.5.21) de la función de Wigner.

Haciendo el cambio de variable $(q, p) \rightarrow (z, z^*)$, con z definida por la ecuación (4.5.18), y utilizando que

$$dq dp = \left| \frac{\partial(q, p)}{\partial(z, z^*)} \right| dz dz^* = i dz dz^*, \quad (C.1)$$

la integral de la función de Wigner en el espacio fase puede expresarse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp dq = i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(t) \exp\{2(\alpha z^* - z z^* + \alpha^* z)\} dz dz^*. \quad (C.2)$$

En términos de z_1 , la parte real y z_2 la parte imaginaria de z se tiene que

$$dz dz^* = \left| \frac{\partial(z, z^*)}{\partial(z_1, z_2)} \right| dz_1 dz_2 = -2i dz_1 dz_2, \quad (C.3)$$

Apéndice C

Parte 1

En esta parte del apéndice se obtendrá la función $k(t)$ que aparece en la expresión (4.5.21) de la función de Wigner.

Haciendo el cambio de variable $(q, p) \rightarrow (z, z^*)$, con z definida por la ecuación (4.5.18), y utilizando que

$$dq dp = \left| \frac{\partial(q, p)}{\partial(z, z^*)} \right| dz dz^* = i dz dz^*, \quad (C.1)$$

la integral de la función de Wigner en el espacio fase puede expresarse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp dq = i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(t) \exp\{2(\alpha z^* - z z^* + \alpha^* z)\} dz dz^*. \quad (C.2)$$

En términos de z_1 , la parte real y z_2 la parte imaginaria de z se tiene que

$$dz dz^* = \left| \frac{\partial(z, z^*)}{\partial(z_1, z_2)} \right| dz_1 dz_2 = -2i dz_1 dz_2, \quad (C.3)$$

por lo que (C.2) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp dq \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(t) \exp\{2(-z_1^2 - z_2^2 + z_1(\alpha^* + \alpha) + iz_2(\alpha^* - \alpha))\} dz_1 dz_2 \\
 &= 2k(t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2(-z_2^2 + iz_2(\alpha^* - \alpha))\} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2(-z_1^2 + iz_1(\alpha^* + \alpha))\} dz_1 \\
 &= \pi k(t) \exp\left\{\frac{1}{2}((\alpha^* - \alpha)^2(\alpha^* + \alpha)^2)\right\} \\
 &= \pi e^{2|\alpha|^2} k(t).
 \end{aligned}$$

Pero de acuerdo con (4.5.7c) se tiene la expresión (4.5.22).

Parte 2

En esta parte se presenta la simplificación de la ecuación (4.5.23) a las expresiones (4.5.24) y (4.5.29).

De acuerdo con (4.5.23) la función de Wigner está dada por

$$W(z, z^*, t) = 2 \exp\{2(\alpha z^* - z z^* + \alpha^* z - |\alpha|^2)\}, \quad (4.5.23)$$

donde z está definida por (4.5.18). En términos de q y p , el argumento de la exponencial puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \alpha z^* - z z^* + \alpha^* z - |\alpha|^2 &= -\sigma_q p^2 - \sigma_p q^2 - (\lambda_q \lambda_p^* + \lambda_p \lambda_q^*) p q \\
 &\quad + (\alpha \lambda_p^* + \alpha^* \lambda_p) p + (\alpha \lambda_q^* + \alpha^* \lambda_q) q - |\alpha|^2. \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

Lo que se quiere entonces es encontrar x y y tales que en la expresión anterior se agrupen los términos lineales, esto es que tenga la forma

$$-\sigma_q (p - y)^2 - \sigma_p (q - x)^2 - (\lambda_q \lambda_p^* + \lambda_p \lambda_q^*) (p - y)(q - x). \quad (C.6)$$

Desarrollando (C.6) e igualando los coeficientes de p y q de la expresión así obtenida, con los de (C.5) se encuentra el sistema siguiente

$$\begin{cases} 2\sigma_q y + (\lambda_q \lambda_p^* + \lambda_p \lambda_q^*) x = \alpha \lambda_p^* + \alpha^* \lambda_p, \\ 2\sigma_p x + (\lambda_q \lambda_p^* + \lambda_p \lambda_q^*) y = \alpha \lambda_q^* + \alpha^* \lambda_q, \end{cases}$$

resolviendo las ecuaciones anteriores para x y y , y desarrollando el resultado en términos de λ_p , λ_q y sus complejos conjugados, se encuentra que

$$x = (\hat{q})_{\alpha, t}, \quad (C.8a)$$

$$y = (\hat{p})_{\alpha, t}. \quad (C.8b)$$

donde se utilizó que $\det \Lambda_{pq} = i$. Regresando a (C.6) se tiene finalmente la expresión (4.5.23).

Como se ha señalado en el Capítulo 4, es conveniente encontrar para la función de Wigner una forma análoga a la que tiene dicha función al tiempo $t = 0$ es decir

$$W(q, p, t = 0) = \exp\{-i(q^2 + p^2)\}.$$

Para ello, considerese la expresión (4.5.23). Si se propone la rotación

$$\hat{q} = q' \cos \theta - p' \sin \theta, \quad (4.5.27a)$$

$$\hat{p} = q' \sin \theta + p' \cos \theta, \quad (4.5.27b)$$

al substituir directamente en el argumento de la exponencial se tiene que

$$\begin{aligned} -2[\sigma_q \hat{q}^2 + \sigma_p \hat{p}^2 - 2\sigma_{pq} \hat{p} \hat{q}] &= -2[q'^2(\sigma_q \sin^2 \theta + \sigma_p \cos^2 \theta - 2\sigma_{pq} \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + p'^2(\sigma_q \cos^2 \theta + \sigma_p \sin^2 \theta + 2\sigma_{pq} \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + p' q' ((\sigma_q - \sigma_p) \sin 2\theta - 2\sigma_{pq} \cos 2\theta)], \end{aligned}$$

por lo cual, al requerir que el coeficiente del término cruzado $p' q'$ se anule, es decir

$$(\sigma_q - \sigma_p) \sin 2\theta = 2\sigma_{pq} \cos 2\theta,$$

el ángulo θ de rotación de la función de Wigner queda determinado por

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\sigma_{pq}}{\sigma_q - \sigma_p}\right). \quad (C.9)$$

De lo anterior se tiene que si

$$h^2 = 4\sigma_{pq}^2 + (\sigma_p - \sigma_q)^2 = |\lambda_p^2 + \lambda_q^2|^2, \quad (C.10)$$

entonces

$$\sin \theta = \left[\frac{h - \sigma_q + \sigma_p}{2h} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (C.11a)$$

$$\cos \theta = \left[\frac{h + \sigma_q - \sigma_p}{2h} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (C.11b)$$

por lo cual el coeficiente de q'^2 se reduce a

$$\begin{aligned} \sigma_q \sin^2 \theta + \sigma_p \cos^2 \theta - 2\sigma_{pq} \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2}(\sigma_p + \sigma_q - h) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_p - |\lambda_p^2 + \lambda_q^2| + \sigma_q). \end{aligned} \quad (C.12)$$

De forma análoga el coeficiente de p'^2 está dado por

$$\begin{aligned} \sigma_q \cos^2 \theta + \sigma_p \sin^2 \theta + 2\sigma_{pq} \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2}(\sigma_p + \sigma_q + h) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_p + |\lambda_p^2 + \lambda_q^2| + \sigma_q), \end{aligned} \quad (C.13)$$

y la expresión (4.5.24) se puede escribir en la forma (4.5.28).