

17  
2EJ



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**PROPIEDADES DINAMICO-ESTADISTICAS  
DE AUTOMATAS CELULARES  
ELEMENTALES LEGALES MINIMOS Y  
TOTALISTICOS LEGALES DE  
ALCANCE 2**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**M A T E M A T I C O**  
CON ESPECIALIDAD EN CIENCIAS  
DE LA COMPUTACION  
**P R E S E N T A :**

**CARLOS RAMON MONTAÑO ESPINOSA**

**DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES**



**MEXICO, D. F. FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**

**1996**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**EL PRESENTE TRABAJO SE IMPRIMIÓ CON EL APOYO DE  
LA COMESIÓN NACIONAL DEL AGUA**



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:  
"Propiedades dinámico-estadísticas de autómatas celulares elementales legales mínimos  
y totalísticos legales de alcance 2"

realizado por Carlos Raúl Montaña Espinoza

con número de cuenta 8033558-2 , pasante de la carrera de Matemático.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Dra. Arceli Reyes Guerrero

Propietario Dr. Pablo Barrera Sánchez

Propietario Fis. Víctor Pedro Mantilla Caballero

Suplente Mat. Mónica Leñero Padierna

Suplente Mat. José Galaviz Casas

Consejo Departamental de Matemáticas

***A mis padres, Lic. Carlos Raúl Montaña Hernández y Lucila Espinosa de Montaña, quienes siempre me han dado el apoyo y cariño necesarios para enfrentar cualquier reto.***

***A mi esposa, Angélica Isabel Jover de Montaña, quien siempre ha estado a mi lado brindándome amor y fortaleza para lograr mis objetivos.***

***A mi hermano, Roberto y mis hermanas, Lilian y Gisela, gracias por su apoyo y su amor fraternal.***

***Agradezco a la Dra. Araceli Reyes Guerrero, su invaluable ayuda en la dirección de este trabajo y su gran apoyo para verlo culminado.***

***Agradezco a la Dra. Ma. del Carmen Reyes Guerrero, su gran apoyo para la finalización de la tesis.***

***Agradezco al Dr. Pablo Barrera Sánchez, al Fis. Víctor Mantilla Caballero, a la Mat. Mónica Leñero Paderna y al Mat. José Galavíz Casas sus comentarios y correcciones al contenido de este trabajo.***

***El orden que imagina nuestra mente es como una red, o una escalera, que se construye para llegar hasta algo. Pero después hay que arrojar la escalera, porque se descubre que, aunque haya servido carecía de sentido...***

**U. Eco**

## ÍNDICE

Resumen .....	1
Introducción .....	2
<b>Capítulo 1. INTRODUCCIÓN A LOS AUTÓMATAS CELULARES.</b>	
1.1. Definiciones .....	6
1.2. Automata celular elemental (ACE).....	8
1.3. Automata celular totalístico (ACT) .....	15
1.4. Algunas propiedades estadísticas de autómatas celulares .....	17
1.5. Clasificación de autómatas celulares .....	21
<b>Capítulo 2. ESTADÍSTICA DE AUTÓMATAS CELULARES ELEMENTALES     LEGALES MÍNIMOS (ACELM).</b>	
2.1. Densidad a tiempos largos .....	24
2.2. Teoría de campo medio.....	28
2.3. Función de correlación espacial.....	32
2.4. Crecimiento de los defectos .....	34
2.5. Entropía de bloque .....	39
<b>Capítulo 3. ESTADÍSTICA DE AUTÓMATAS CELULARES TOTALÍSTICOS     LEGALES DE ALCANCE 2 (ACT).</b>	
3.1. Densidad a tiempos largos .....	43
3.2. Teoría de campo medio.....	49
3.3. Función de correlación espacial.....	53
3.4. Crecimiento de los defectos .....	55
3.5. Entropía de bloque .....	57



**Capítulo 4. CRECIMIENTO DE DEFECTOS Y EXPONENTES DE LYAPUNOV  
MÁXIMOS EN AUTÓMATAS CELULARES DE ALCANCE 1 Y 2.**

4.1. Definiciones.....	61
4.2. Exponentes de Lyapunov máximos para ACELMs.....	62
4.2.1. Crecimiento de defectos en términos de la derivada Booleana .....	62
4.3. Relación de los exponentes de Lyapunov máximos con la percolación de enlaces.....	64
<b>CONCLUSIONES GENERALES.....</b>	<b>69</b>
<b>APÉNDICES</b>	
A) Derivadas Booleanas.....	74
B) Programa en EUREKA para teoría de campo medio .....	77
C) Técnica de Multi-Spin (MSC).....	80
D) Cuadro comparativo de cantidades estadísticas para ACELMs clase 3 .....	84
E) Cuadro comparativo de cantidades estadísticas para ACTs clase 3.....	85
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>86</b>

## Resumen

Los autómatas celulares (ACs) son mapeos de un espacio discreto en sí mismo parametrizado por un tiempo discreto.<sup>[15]</sup>

Los autómatas celulares son fáciles de definir y también de programar en una computadora pero pueden mostrar un comportamiento extremadamente complejo. Es éste su principal atractivo, pues pueden ser usados como modelos simples de sistemas complejos.<sup>[12]</sup> En este trabajo, se estudian algunas propiedades estadísticas de los ACs unidimensionales con el objeto de entender ó clasificar su complejidad y, en particular, se presenta una condición necesaria para poder decir si un AC es caótico.

Para introducir al tema, en el capítulo 1, se dan las definiciones de autómatas celulares en general, para posteriormente particularizar a los autómatas celulares elementales legales mínimos y totalísticos legales.

En el capítulo 2, se presentan algunos de los principales parámetros estadísticos usados para caracterizar a los autómatas celulares elementales legales mínimos, medidos en su espacio de configuraciones, como la densidad promedio de sitios no-nulos sobre un conjunto representativo a tiempos de evolución largos, la correlación espacial de sitios, la distancia de Hamming y la entropía de bloques. En este mismo capítulo, se comparan resultados experimentales para las densidades de autómatas celulares elementales mínimos clase 3 con los valores obtenidos de una teoría de campo medio.

En el capítulo 3, se realiza un análisis de los mismos parámetros estadísticos para autómatas celulares unidimensionales totalísticos legales de alcance 2.

Usando el concepto de derivada Booleana es posible estudiar el crecimiento de un defecto en el autómata celular y definir el exponente de Lyapunov máximo siguiendo la definición para sistemas dinámicos continuos. En el capítulo 4, se presenta esto y se calculan los exponentes de Lyapunov máximos de autómatas celulares elementales mínimos legales y totalísticos legales de alcance 2. También se muestra una relación con el problema de percolación dirigida.

## Introducción

Los autómatas celulares (ACs) se han utilizado como instrumentos sencillos para modelar sistemas complejos como fluidos fuera de equilibrio, ferromagnéticos, difusión, percolación, sistemas biológicos y otros. Esto se debe a que los ACs son simples en cuanto a su formulación y, así mismo, pueden exhibir un comportamiento complejo.

Los ACs son sistemas dinámicos discretos parametrizados recursiva y discretamente por el tiempo, que presentan una evolución espacio-temporal de una gran complejidad.<sup>[15]</sup> Por ello, son utilizados como modelos matemáticos para sistemas naturales constituidos por un gran número de componentes idénticos simples que interactúan localmente.<sup>[22]</sup>

El objetivo de esta introducción, es exponer algunos ejemplos de la aplicación de los autómatas celulares en varias ramas del conocimiento.

Un AC puede servir para modelar sistemas que contienen muchos elementos discretos con interacciones locales. De hecho algunos sistemas físicos que satisfacen ecuaciones diferenciales pueden ser modelados por un AC mediante la introducción de diferencias finitas y variables discretas.<sup>[26]</sup> Podemos ilustrar esto con un ejemplo, conocido como modelo de Ising, el cual desarrollaremos en los siguientes párrafos.

El modelo de Ising de un ferromagneto, es un sistema formado por  $N$  átomos en el cual al  $i$ -ésimo se le asocia con una variable de spin  $x_i$  que puede tomar valores  $1$  y  $-1$ ; ó  $0$  y  $1$  haciendo una transformación sencilla. Este modelo considera espines ordenados en un arreglo regular, en una o dos dimensiones, los cuales ocupan posiciones fijas y únicamente varía la orientación de los espines en el espacio. Por simplicidad restringiremos el modelo a una dimensión para el caso en el cual solo tiene dos orientaciones, denotadas convencionalmente por *arriba* ( $\uparrow$ )( $1$ ) y *abajo* ( $\downarrow$ )( $0$ ). Se pueden imaginar los ejes orientados perpendicularmente al plano del arreglo. Una posible configuración del sistema podría ser la que se muestra en la fig. (a).

...  $\uparrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow \downarrow \dots$

Fig. (a). Configuración para un sistema unidimensional de espines en el modelo de Ising.

El estado del sistema es entonces  $\vec{x}$  con

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

donde cada  $x_i$  toma valores  $0$  ó  $1$ . Imponiendo una dinámica como puede ser la de Monte Carlo, la de Glauber o la Q2R el estado  $\vec{x}$  evoluciona en el tiempo y tenemos un AC.<sup>[19]</sup>

Dos espines se dice que son paralelos si apuntan en la misma dirección ( $\uparrow\uparrow$ ) y antiparalelos si apuntan en direcciones opuestas ( $\uparrow\downarrow$ ). En forma similar al efecto producido en los magnetos, los espines tienen efecto uno sobre otro dependiendo de su orientación relativa, la distancia entre ellos y la naturaleza del medio en el cual se encuentran; sin embargo, en el modelo de Ising, los detalles de acoplamiento, que en el caso real involucran efectos cuánticos, se desarrolla sobre la base de consideraciones más

simples en las cuales solo se tienen en cuenta interacciones con los espines inmediatamente adyacentes.

Considérese, por simplicidad, el caso de un sistema de espines en el cual las fuerzas de interacción entre vecinos tienden a alinearlos. La frontera entre dos espines puede ser visualizada como un resorte, el cual está en reposo cuando los espines son paralelos y se encuentra tenso cuando son antiparalelos. Cada resorte bajo tensión almacena una cantidad de energía. En la fig. (b) se muestra explícitamente la energía de acoplamiento mediante 0 ó 1.

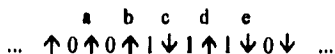


Fig. (b). Energía de acoplamiento para un sistema unidimensional de espines.

En la fig. (b) el espín *a* está alineado con sus dos vecinos. Si se tratara de cambiar la orientación de este espín de  $\uparrow$  a  $\downarrow$ , se obtendría entonces la configuración que se muestra en la fig. (c).

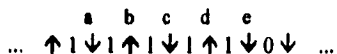


Fig. (c). Cambio de orientación de un espín para un sistema unidimensional.

Así, se observa que se tensan 2 resortes al mismo tiempo, uno a la derecha y uno a la izquierda de *a*, obteniéndose una ganancia de 2 unidades de energía. Por otro lado, el espín *b* está en situación indiferente de energía; i.e., si se invierte, el resorte a la derecha es puesto bajo tensión y el de la izquierda se relaja, la energía total del sistema permanece igual.

Supóngase, que se actualiza un espín a la vez elegido al azar. Si se procede a modificar el estado del espín, los espines inmediatamente modificados serán los vecinos del espín seleccionado. Entonces, la ley de conservación de la energía, solo permitirá cambiar de estado a los espines que se encuentren en una situación de energía indiferente, como en el espín *b* según se muestra en la fig. (d)



Fig. (d). Cambio de estado a los espines que se encuentran en una situación de energía indiferente.

Tan pronto como *b* cambia de estado, el espín *a* se convierte en un buen candidato para modificarse. Entonces, un cambio puede llevar a otro después del cual el sistema evoluciona substancialmente. Ahora supóngase que se requiere que el sistema evolucione tan rápido como sea posible. Obsérvese que siempre que un espín es elegido; por consideraciones energéticas, invariablemente se invierte. Entonces se necesita la ayuda de un "asistente" que trabaje sobre un espín mientras se trabaja con otro, obviamente ambos en situaciones de energía indiferente. Todo funciona adecuadamente para valores de separación mayores a una distancia mínima; sin embargo supóngase que se eligen simultáneamente los espines *c* y *d*, el resultado se muestra en la fig. (e)

a   b   c   d   e  
 ... ↑ 0 ↑ 0 ↑ 0 ↑ 0 ↑ 0 ↑ 0 ↑ 1 ↓ ...

Fig. (e). Elección simultánea de los espines *c* y *d*.

Entonces se tiene que la energía total ha cambiado de 3 a 1. Un espín, desde el punto de vista energético es indiferente solamente bajo la suposición que cuando se modifique a sus vecinos este permanezca en la misma orientación. Si se desea actuar en forma local, se deben actualizar en paralelo tantos espines como sea posible y conservar la energía; una idea adecuada, para tal efecto, es actualizar todos los impares en un tiempo y luego los pares en el siguiente paso temporal.

Otro ejemplo, es la modelación de un fluido con un AC, en éste tipo de modelos las partículas son indistinguibles y se mueven en una red en pasos discretos. Cuando 2 ó más se encuentran en un nodo de la red cambian su velocidad pero de manera que en la colisión se conserve la masa, la cantidad de movimiento y la energía.<sup>[9]</sup>

Como veremos más adelante, en el capítulo 4, el problema de percolación dirigida es un AC probabilístico.

En general podemos decir, que un modelo discreto con una evolución temporal discreta es un AC.

Muchos sistemas en biología han sido modelados por ACs. El desarrollo de estructuras y patrones en el crecimiento de los organismos muchas veces parece estar gobernado por muchas reglas locales simples y está, por lo tanto, potencialmente bien descrito por un modelo de un AC.<sup>[20]</sup> Algunos ejemplos incluyen arreglos producidos en las hojas de las ramas de los árboles, la formación de esqueletos radiales y muchos más. El comportamiento y funciones de variados organismos pueden ser modelados por ACs con valores por cada sitio que representen estados de células o grupos de ellas. Los ACs son utilizados también para describir poblaciones de organismos inmóviles, como las plantas, con valores por sitio correspondientes a la presencia o ausencia de individuos en cada punto de la red, con interacciones ecológicas locales.<sup>[20]</sup>

En matemáticas, los ACs se han usado para estudiar problemas en teoría de números.<sup>[18]</sup> En computación, los ACs pueden ser considerados como computadoras de proceso en paralelo<sup>[13]</sup>. Como tales, han sido usados, por ejemplo, como multiplicadores altamente paralelos, clasificadores (sorteadores) y filtros de números primos.<sup>[14]</sup> En forma particular, en dos dimensiones han sido utilizados extensivamente para procesamiento de imágenes y reconocimiento visual de patrones.<sup>[17]</sup> Las características computacionales de los ACs han sido estudiadas exhaustivamente y esto ha permitido demostrar que algunos ACs pueden ser utilizados como computadoras de propósito general y pueden, por lo tanto, ser usados como paradigmas para la computación en paralelo.

Como se indicó en las líneas anteriores, la aplicación de los ACs es importante para la simulación de una extensa gama de fenómenos permitiendo un análisis de estos mediante el uso de computadoras. Por ello resulta interesante efectuar un estudio sistemático del comportamiento de los ACs pues, por una parte, se espera poder desarrollar modelos para

sistemas particulares, y por otra, buscar principios generales aplicables a una gran variedad de sistemas complejos.

El objetivo de este trabajo es el de presentar y discutir cantidades estadísticas que pueden asociarse a los ACs como la densidad de sitios con valor 1, la distancia de Hamming, la entropía y los exponentes de Lyapunov. A partir del comportamiento de estas cantidades intentamos clasificar a los ACs. La clasificación de ACs más usada y también más criticada es la presentada por Wolfram en 1984. <sup>[26]</sup> Esta separa a los ACs en cuatro clases como se menciona en el cap. 1. Si  $\xi$  denota a una cualquiera de las cantidades mencionadas quisieramos poder establecer empíricamente una aseveración como la siguiente:

Si para el AC,  $R$ ,  $\xi$  tiene una cierta propiedad  $\xi_j$ , entonces  $R \in C_j$ , donde  $C_j$  es la clase  $j$  de Wolfram con  $j = 1, \dots, 4$

Esto sería muy útil pues nos daría una manera de caracterizar el comportamiento de un AC. Lo más importante, es poder decir bajo que consideraciones un autómatas celular elemental o totalístico es clase 3 (ver Cap. 1.5), debido a que los ACs de este tipo presentan un comportamiento con mayor grado de complejidad que las otras clases y por lo tanto su estudio es más interesante.

## Capítulo 1.

### Introducción a los autómatas celulares.

Para la mejor comprensión de los ACs, en primer lugar, deben ser definidos estos entes, así como los elementos esenciales que los constituyen. Esta es una de las finalidades de este capítulo introductorio, donde se establecen las bases conceptuales para su futura caracterización estadística.

El capítulo se divide en cuatro secciones. En las tres primeras, se presentan las definiciones, para el caso unidimensional de espacio de configuraciones, vecindad, alcance, autómata celular elemental, condiciones periódicas a la frontera, formas canónicas, reglas mínimas y autómata celular totalístico Booleano; los cuales son conceptos fundamentales en la posterior realización del trabajo. La cuarta, muestra una posible clasificación de los ACs y las principales propiedades estadísticas mediante las cuales se puedan caracterizar cuantitativamente.

### 1.1 Definiciones.

#### Definición

Sea  $B_k = (0, \dots, k-1)$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Un AC es un mapeo<sup>1</sup>  $F$  parametrizado recursiva y discretamente por el tiempo  $t$ , de la forma

$$F: B_k^L \rightarrow B_k^L$$

de manera que

$$\bar{x}(t+1) = F(\bar{x}(t)) \quad (1)$$

y

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_L(t)) \quad x_i(t) \in B_k, i = 1, \dots, L$$

El espacio  $B_k^L$  es el producto cartesiano de  $B_k$  consigo mismo  $L$ -veces y se conoce como espacio de configuración. Como ejemplo, en la figura 1, se muestra el espacio de configuración y un cierto flujo  $F$ , en el caso en que  $k = 2$  y  $L = 3$ .

---

<sup>1</sup> Un mapeo, en sistemas dinámicos, se define como un sistema el cual está caracterizado por una función  $F$  univaleada, como la descrita en la ec. (1), donde el tiempo  $t$  evoluciona en pasos discretos.<sup>171</sup>

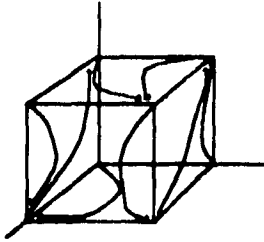


Figura 1. Espacio de configuración en el caso en que  $k = 2$  y  $L = 3$ . Se muestra el ejemplo de un flujo.

Es útil, para poder usar a los ACs como un modelo, asociar al espacio de configuraciones una red de  $L$  sitios, la cual puede ser regular o irregular, en una o más dimensiones. En la figura 2 se muestran algunos ejemplos. En cada sitio se coloca una variable de estado  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, L$  que toma valores en  $B_i$ . Esta variable puede representar el spin en el sitio, la presencia de partículas de distintas especies químicas, velocidades de partículas, etc.

La función  $F$  puede estar definida localmente, es decir

$$x_i(t+1) = f_i(x_j(t))_{j \in V_i} \quad i = 1, \dots, L$$

donde  $V_i$  es una vecindad del  $i$ -ésimo sitio. Es necesario mencionar, que las funciones  $f_i$  y la vecindad  $V_i$  no tienen que ser las mismas en todos los sitios, sin embargo en lo que sigue, nos ocuparemos de ACs definidos por reglas locales que no dependen del sitio. La vecindad  $V_i$  puede estar determinada por la geometría de la red, como se muestra en la figura 2.

En este trabajo sólo se considerarán ACs Booleanos, es decir con valores 0 ó 1 en cada sitio, correspondiendo a  $k = 2$  y redes unidimensionales.

En una dimensión, es usual utilizar una vecindad simétrica de alcance  $r$ , esto es  $r$  sitios a la derecha e izquierda de cada sitio. En este caso, la regla local  $f$  que define al AC es de la forma

$$x_i(t+1) = f(x_{i-r}(t), x_{i-r+1}(t), \dots, x_i(t), \dots, x_{i+1}(t), \dots, x_{i+r}(t)) \quad (2)$$



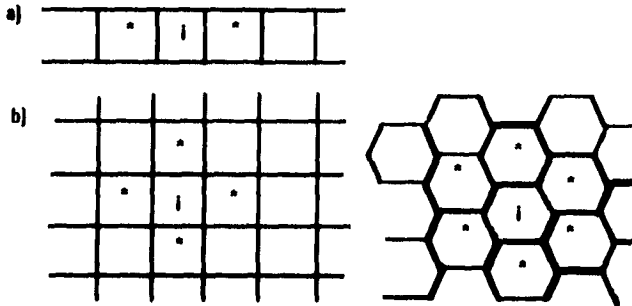


Figura 2. a) Red unidimensional. b) redes bidimensionales. La vecindad  $V_l$  puede estar determinada por la geometría de la red. Los asteriscos alrededor del sitio- $l$  forman parte de la vecindad  $V_l$ .

## 1.2 Autómatas celulares elementales (ACE)

### Definición

Los ACs unidimensionales con  $k = 2$  y  $r = 1$  se conocen como autómatas celulares elementales (ACE).

La función local  $f$ , que se indica en la ec. 2, puede definirse por su tabla de verdad donde al valor 0 le llamamos falso y al 1 verdadero. En la tabla 1 se muestra un ejemplo. Es posible, entonces encontrar la expresión lógica de cualquier regla según se verá más adelante. Como se puede observar, la tabla de verdad contiene  $2^3 = 8$  renglones y para cada renglón existen dos posibilidades, por lo que hay  $2^{2^3} = 2^8 = 256$  ACEs distintos.

Wolfram numeró las 256 reglas de la siguiente forma<sup>[26]</sup>. Cada regla tiene una tabla de verdad distinta y el número asociado a cada regla es la expresión en base 10 del número binario que forma la última columna de la tabla; de arriba, dígito menos significativo; a abajo, dígito más significativo. Así, por ejemplo, al ACE de la tabla 1, se le asocia el número  $R_9 = 90$  y se habla de la regla  $90^{[9]}$ .

Tabla 1: Función de asignación para el ACE 90

$x_{l-1}(t)$	$x_l(t)$	$x_{l+1}(t)$	$f$	Regla
0	0	0	0	$2^0$
0	0	1	1	$2^1$
0	1	0	0	$2^2$
0	1	1	1	$2^3$
1	0	0	1	$2^4$
1	0	1	0	$2^5$
1	1	0	1	$2^6$
1	1	1	0	$2^7$

Los ACEs evolucionan en pasos discretos con el valor de una variable en cada sitio afectado por los valores de sitios en su vecindad en el paso previo. Esto indica que una posible representación de la red es mediante un arreglo en el cual todas las celdas tengan "vecinos"; sin embargo en los extremos de la red, es decir para  $i = 1$  e  $i = L$ , no se da el caso. Una solución posible es la de imponer *condiciones periódicas a la frontera que consisten en juntar los dos extremos de la red para que forme un cilindro*. Esto es

$$x_{L+1}(t) = x_1(t) \text{ y } x_0(t) = x_L(t) \quad (3)$$

También se pueden imponer *condiciones antiperiódicas a la frontera, bajo las cuales los sitios que pertenecen a los extremos mantienen valores inversos al de los extremos mismos*, i.e.

$$x_{L+1}(t) = -x_1(t) \text{ y } x_0(t) = -x_L(t)$$

donde  $\neg$  indica la negación Booleana de valores (NOT) y *condiciones periódicas nulas*, es decir

$$x_{L+1} = x_0 = 0$$

pudiendo, de la misma forma, igualar a 1 ó dar condiciones aleatorias. En lo que sigue usaremos condiciones periódicas a la frontera, como las indicadas en la ec. (3).

Una de las formas más eficientes de simulación de la evolución de un AC Booleano es utilizando la técnica de Multi-Spín M.S.C. (c.f. apéndice C)

## **Definición**

*La región afectada por un sitio dado crece a lo sumo  $r$  sitios en cada dirección en cada paso temporal, determinando una vecindad de  $2r+1$  sitios, este crecimiento es conocido como cono de luz del autómata celular.*

Así, después de  $t$  pasos temporales, una región de  $2rt+1$  sitios, puede ser afectada por el valor de una celda específica dada en la configuración inicial obtenida en el tiempo  $t = 0$ . En la figura 3 se muestra la evolución en el espacio de configuraciones del ACE 90 a partir de una red en la cual sólo un sitio tiene valor 1 y los demás 0 al tiempo  $t = 0$ , y otra estructura generada desde una configuración inicial aleatoria, para el mismo ACE, donde en cada sitio  $x_i = 1$  con probabilidad 1/2. Estos *diagramas espacio temporales* generados representan en la dirección horizontal el espacio de configuración del AC para un tiempo  $t$  cualquiera y en la dirección vertical se indica la evolución temporal. En la ref. [26], están los diagramas de las 88 reglas mínimas de ACEs, las cuales se definen más adelante.

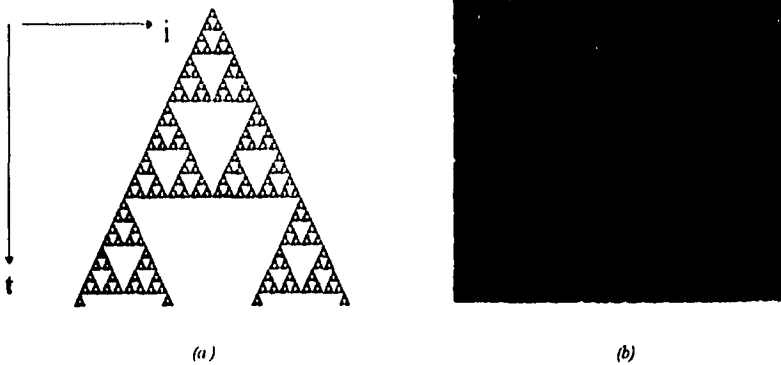


Figura 3. Evolución del ACE regla 90. a) Desde una configuración inicial en la que el estado del sitio central es 1 y los demás 0 (cono de luz). b) Desde una configuración inicial desordenada donde el estado en cada sitio  $x_i = 1$  con probabilidad  $1/2$ . En ambos casos la red tiene una longitud de 640 sitios, para 200 pasos temporales.

Podemos encontrar una expresión lógica para cualquier AC a partir de su tabla de verdad. Aquí mostramos con un ejemplo, como obtener dos expresiones lógicas, las llamadas *formas canónicas disyuntiva y conjuntiva*<sup>91</sup>.

Una función de asignación, para cualquier AC, se puede construir dando todos los resultados posibles para las  $2^{2^{r+1}}$  configuraciones de sus argumentos, mediante su tabla de verdad. A partir de ésta, es posible obtener una expresión lógica para  $f$ , la cual solamente esté formada por operaciones binarias AND( $\wedge$ ), OR( $\vee$ ) y la operación unaria NOT( $\neg$ ).

La conjunción AND, trabaja con dos operandos, da 1 si ambos argumentos son 1 y 0 en cualquier otro caso. La disyunción OR, al igual que la anterior, utiliza dos argumentos y da 1 si uno de ellos es 1. La disyunción exclusiva XOR, da el valor 0 cuando ambos argumentos son 1 ó 0 y da 1 en caso que sean diferentes; esta operación corresponde a la suma módulo 2. La negación NOT, actúa sobre un solo argumento, dándole valor inverso.

Considérese la tabla 1. En la columna correspondiente a  $f$ , se tienen valores 1 ó 0. Se pueden seleccionar los renglones que tienen 1, términos mínimos, ó las casillas que tienen 0, términos máximos. La forma canónica disyuntiva se obtiene a partir de los términos mínimos y se construye como sigue. Se toma el primer término mínimo y se hace la conjunción de las 3 variables  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ , tomando la negación de la variable correspondiente, si ésta aparece con 0, es decir, el primer término mínimo de la tabla 1 nos da la expresión lógica  $\neg x_{i-1} \wedge \neg x_i \wedge x_{i+1}$  que es verdadera en ese renglón y falsa en todos los demás. La forma canónica disyuntiva se obtiene como la disyunción de las expresiones construidas para cada término mínimo. En el caso que se muestra en la tabla 1 se obtiene la expresión

$$f_{90} = (\neg x_{i-1} \wedge \neg x_i \wedge x_{i+1}) \vee (\neg x_{i-1} \wedge x_i \wedge x_{i+1}) \vee (x_{i-1} \wedge \neg x_i \wedge \neg x_{i+1}) \vee (x_{i-1} \wedge x_i \wedge \neg x_{i+1})$$

Para construir la forma canónica conjuntiva, ahora seleccionamos los términos máximos efectuando la disyunción de las 3 variables, tomando la negación si alguna de ellas aparece con 1. El primer término máximo de la tabla 1 da la expresión lógica  $x_{i-1} \vee x_i \vee x_{i+1}$  que es verdadera en éste renglón y falsa en los restantes. La forma canónica conjuntiva se obtiene como la conjunción de las expresiones construidas para cada término máximo. Así de la tabla 1 se obtiene

$$f_{90} = (x_{i-1} \vee x_i \vee x_{i+1}) \wedge (x_{i-1} \vee \neg x_i \vee x_{i+1}) \wedge (\neg x_{i-1} \vee x_i \vee \neg x_{i+1}) \wedge (\neg x_{i-1} \vee \neg x_i \vee \neg x_{i+1})$$

En resumen, las funciones de Boole expresadas como una suma ( $\vee$ ) de términos mínimos o producto ( $\wedge$ ) de términos máximos se dice que están en *forma canónica*<sup>[9]</sup>. Es claro que estos métodos se pueden extender a ACs booleanos con más vecinos.

Estas formas canónicas, son el punto de partida para el problema de minimización del número de operaciones requeridas para especificar una función y, por lo tanto, para su implementación práctica mediante un proceso serial, en una computadora (c.f. apéndice C).

Las formas canónicas pueden ser simplificadas mediante el uso de identidades obtenidas del álgebra de Boole. La primera ecuación de asignación para la función de la regla 90,  $f_{90}$ , puede simplificarse de la siguiente forma, teniendo presente que  $x \oplus y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$ ,  $(\neg x \vee x) = 1$  y que  $(1 \wedge x) = x$

$$f_{90} = (\neg x_{i-1} \wedge \neg x_i \wedge x_{i+1}) \vee (\neg x_{i-1} \wedge x_i \wedge x_{i+1}) \vee (x_{i-1} \wedge \neg x_i \wedge \neg x_{i+1}) \vee (x_{i-1} \wedge x_i \wedge \neg x_{i+1})$$

$$f_{90} = (\neg x_{i-1} \wedge x_{i+1}) \vee (x_{i-1} \wedge \neg x_{i+1})$$

finalmente

$$f_{90} = x_{i-1} \oplus x_{i+1} \quad (4)$$

Por esto a la regla 90 se le llama la regla de suma módulo 2 de los vecinos.

Otro método, que es en general muy bueno, para simplificar estas funciones es el que provee el desarrollo en serie de MacLaurin que se explica en el apéndice A. En el apéndice de la ref. [26], se muestran los homomorfismos Booleanos simplificados de los 256 ACEs.

*Una regla es aditiva si se cumple que*

$$F(\bar{x} \oplus \bar{y}) = F(\bar{x}) \oplus F(\bar{y}) \quad (5)$$

En la ec. (5),  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son vectores de  $B_2^t$ . La regla 90 es aditiva, esto se puede demostrar fácilmente. De la ec. (4)

$$f(\bar{x}) = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = x_{i-1} \oplus x_{i+1}$$

$$f(\bar{y}) = f(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = y_{i-1} \oplus y_{i+1}$$

Así que

$$f(\bar{x}) \oplus f(\bar{y}) = x_{i-1} \oplus x_{i+1} \oplus y_{i-1} \oplus y_{i+1}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(\bar{x} \oplus \bar{y}) &= f(x_{i-1} \oplus y_{i-1}, x_i \oplus y_i, x_{i+1} \oplus y_{i+1}) \\ &= x_{i-1} \oplus x_{i+1} \oplus y_{i-1} \oplus y_{i+1}. \end{aligned}$$

De todos los ACEs las reglas de esta clase son la 0, 90, 150 y 204, además de sus reglas conjuntivas, reflexivas y conjuntivo-reflexivas mencionadas más adelante. Las reglas 0 y 204 son triviales. El ACE 0 elimina cualquier configuración inicial y la 204 la mantiene inmutable. La regla 90 es la suma módulo 2 de los vecinos de los extremos en el paso temporal previo y la 150 es la suma módulo dos de los 3 vecinos.

Estas reglas son importantes, en sí mismas, pues la evolución de cualquier configuración inicial es una superposición de la configuración generada al evolucionar un AC desde un sólo estado no nulo de estos ACs.<sup>[24]</sup>

## **Definición**

Considérense las siguientes transformaciones simples: la *conjugación* (C), la cual intercambia 0 por 1 y viceversa, i.e.

$$C(f(x, y, z)) = \neg f(\neg x, \neg y, \neg z)$$

La *reflexión* (R)

$$R(f(x, y, z)) = f(z, y, x)$$

y la *combinación de ambas* (CR ó RC). La aplicación de la combinación de las transformaciones *conjugación* y *reflexión*, a una función Booleana, produce el mismo resultado sin importar el orden de precedencia de cada una de ellas<sup>[24]</sup> como puede comprobarse fácilmente, según se observa en la tabla 2.

En la tabla 2, se muestra como ejemplo, el caso particular de la regla 30, de la cual se determina su tabla de verdad y la aplicación de las transformaciones simples. Nótese la igualdad de los valores en cada una de las entradas en las columnas marcadas con CR y RC.

En la figura 4, se muestra la evolución, para 200 pasos temporales, iniciando desde un estado aleatorio donde cada sitio toma el valor 1 con probabilidad  $\frac{1}{2}$ , para los ACE 30, 86, 135 y 149. Nótese la semejanza en las estructuras espacio-temporal generadas.

Tabla 2. Tabla de verdad asociada al ACE 30 y reglas elementales equivalentes mediante operaciones simples

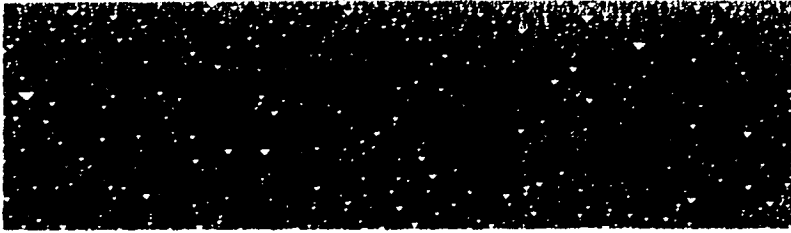
$x_{t-1}(t)$	$x_t(t)$	$x_{t+1}(t)$	f	R(f)	C(f)	CR(f)	RC(f)
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1
Reglas Equivalentes			$R_f = 30$	$R_f = 86$	$R_f = 135$	$R_f = 149$	$R_f = 149$

Las operaciones anteriores imponen una partición en 88 clases del conjunto de ACEs. Es conveniente considerar solamente las reglas con un número en base 10 asociado más pequeño representativas de cada clase<sup>[24]</sup>. Dichas reglas se conocen como las 88 reglas mínimas.

## Definiciones

- Una ACE es legal si su función de asignación es simétrica y  $f(0,0,0) = 0$ .
- Una regla f es simétrica si  $f(1,0,0) = f(0,0,1)$  y  $f(1,1,0) = f(0,1,1)$ .

En lo que sigue, el estudio de los ACEs se restringirá a los autómatas celulares elementales legales mínimos (ACELM).



**REGLA 30**



**REGLA 86**



**REGLA 135**



**REGLA 149**

Figura 4. Evolución espacio temporal para los ACEs reglas 30, 86, 135 y 149 desde un estado inicial al azar donde el estado  $x_i$  en cada sitio toma valor 1 con probabilidad  $1/2$ , para 200 pasos temporales, en una red de 640 sitios. El tiempo evoluciona en la dirección vertical.

### 1.3 Autómatas celulares totalísticos (ACT)

Se pueden considerar ACs unidimensionales donde la vecindad que define la evolución sea un poco mayor, digamos que contiene al sitio mismo y a 2 sitios a la derecha y 2 sitios a la izquierda, es decir  $r = 2$ . En tal caso el número total de reglas que se pueden construir es de  $2^5$ , con lo cual se tienen más de 4,290,000,000 reglas. Es debido a esta cantidad de reglas que se hace necesario restringir su estudio. Así, se pueden definir los *autómatas celulares totalísticos (ACT)*.

#### Definición

Los ACT son un caso particular de AC, en los que *el valor de cada sitio depende de la suma de los valores de sus vecinos en el paso temporal previo pero no de su posición.*

Los ACTs son utilizados como modelos de sistemas que involucran cantidades localmente aditivas, tales como concentraciones químicas.

Un ACT está definido por una función local  $f$  de la forma

$$x_i(t+1) = f(S(x_i)) \quad (6)$$

donde

$$S(x_i) = \sum_{j \in V_i} x_j(t).$$

Dado que  $0 \leq S_i \leq 2r+1$ , se puede representar a  $f$  por una tabla de verdad. En la tabla 3 se muestra un ejemplo. Igual que en el caso de los ACEs, se asigna un número en base 10 a cada código. A manera de ejemplo, se muestra el caso particular del ACT código 20.

Tabla 3. Función de asignación para el ACT 20

$S(x_i)$	$f(S)$	Código
0	0	0
1	0	0
2	1	$2^2$
3	0	0
4	1	$2^4$
5	0	0
		20



---

## Definición

Un ACT es legal si  $f(0) = 0$ . Vemos de la tabla anterior que hay  $2^5 = 32$  ACTs de este tipo y el código asociado de la tabla 3 es un número par entre 0 y 62.

En la figura 5, se muestra la evolución espacio-temporal del ACT código 20, desde un estado inicial al azar donde cada sitio  $x$ , toma el valor 1 con probabilidad  $\frac{1}{2}$ , para 200 pasos temporales, en una red de 640 sitios.

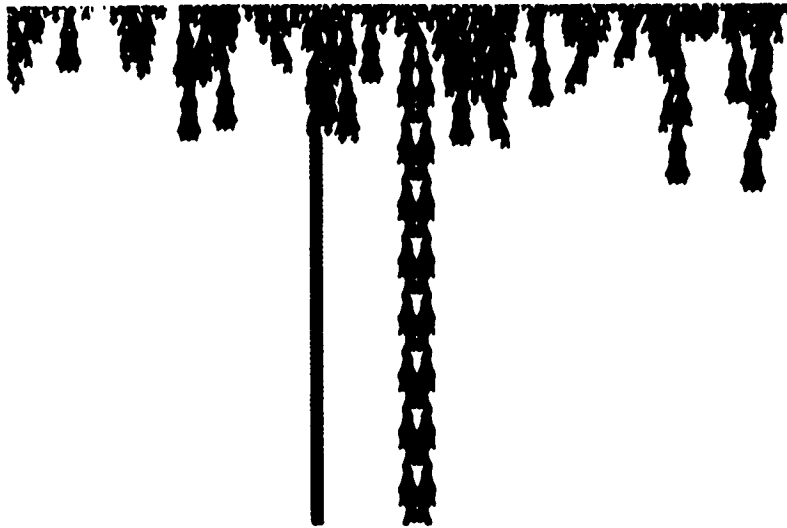


Figura 5. Evolución espacio temporal del ACT código 20, en una red de 640 sitios, a partir de un estado inicial al azar, donde cada sitio  $x$ , toma valor 1 con probabilidad  $\frac{1}{2}$ , durante 200 pasos temporales.

## 1.4 Algunas propiedades estadísticas de ACs.

Algunas de las cantidades, más importantes,<sup>[24]</sup> utilizadas para la caracterización cuantitativa de las configuraciones generadas por los autómatas celulares Booleanos, las cuales se estudiarán a lo largo de este trabajo, son:

- a) La densidad de sitios con valor 1.
- b) La función de correlación espacial entre dos puntos.
- c) La distancia de Hamming.
- d) La entropía de bloque.
- e) Los exponentes de Lyapunov máximos.

### Definición

La densidad de sitios con valor 1, se define como

$$\rho(t) = (\#_1(\vec{x}(t)) / L) \quad L = \#_1(\vec{x}(t)) + \#_0(\vec{x}(t)) \quad (7)$$

donde  $\#_d(\vec{x}(t))$  representa el número de dígitos  $d = 0, 1$  que hay en un estado  $\vec{x}(t)$  del sistema a un tiempo  $t$  y  $L$  es la longitud de la red. La función  $\#_d(\vec{x}(t))$  representa el "peso" del vector  $\vec{x}(t)$  a un tiempo  $t$  específico<sup>[10]</sup>. En la figura 6, se muestra la evolución de la densidad en el tiempo para los ACEs 18, 90 y 182. Nótese que conforme el tiempo aumenta las densidades se aproximan a una densidad media específica.

### Definición

Se pueden definir varias funciones de correlación, empero siguiendo a Wolfram<sup>[24]</sup>, la función de correlación espacial entre dos puntos  $C_c(r)$ , se define como

$$C_c(r) = \langle S(m)S(m+r) \rangle - \langle S(m) \rangle \langle S(m+r) \rangle \quad (8)$$

donde  $0 \leq m \leq L$ ,  $L$  es la longitud de la red y  $S(m)$  toma valores  $-1$  ó  $+1$  cuando  $x(m)$  toma los valores  $0$  ó  $1$  respectivamente y la media es tomada sobre todos los sitios  $m$  de la red a un tiempo  $t$  fijo. En la ec. (8)

$$\langle S(m) \rangle = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L S(m) \quad (9)$$

La función de correlación describe la dependencia estadística de los valores de los sitios separados una distancia  $r^{[16]}$ . Si las variables son independientes, el coeficiente de correlación debe ser igual a cero.

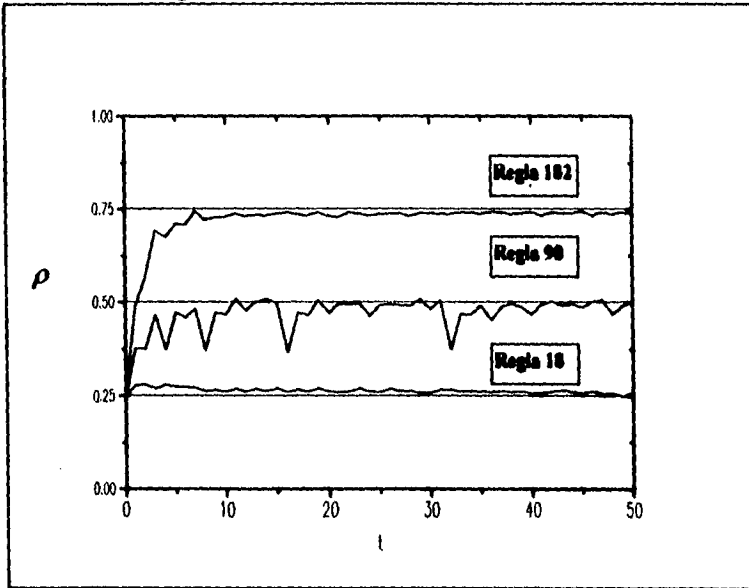


Figura 6: Densidad de sitios con valor 1 obtenida mediante evolución temporal de acuerdo a los ACE 18, 90 y 182 iniciando en un estado desordenado con densidad  $\rho(0) = 0.2$ , para 50 pasos temporales, en una red de 8192 sitios. Los datos se promediaron para 15 repeticiones del experimento computacional.

La forma de  $C_r(r)$ , a tiempos largos, para el ACE regla 22 se muestra en la figura 7.

Una propiedad de los ACs es su inestabilidad bajo pequeñas perturbaciones<sup>[20]</sup> en las condiciones iniciales. Sean  $\vec{x}(0), \vec{y}(0) \in B_n^L$ , dos configuraciones las cuales difieren entre sí en el estado del sitio  $i$ , el cual es llamado sitio central. Se dice que hay un defecto o daño en el sitio  $i$  al tiempo  $t = 0$  y se desea saber si éste se propaga a lo largo de la evolución espacio-temporal del AC.

### Definición

La distancia de Hamming  $H$ , determina el número de dígitos (bits) en los cuales difieren las secuencias binarias  $\vec{x}(t)$  y  $\vec{y}(t)$  que evolucionan a partir de condiciones iniciales  $\vec{x}(0), \vec{y}(0)^{[10]}$ . Esta se define como

$$H(t) = \sum_i (x_i(t) \oplus y_i(t)) \quad (10)$$

donde la  $\sum$  es una suma algebraica.

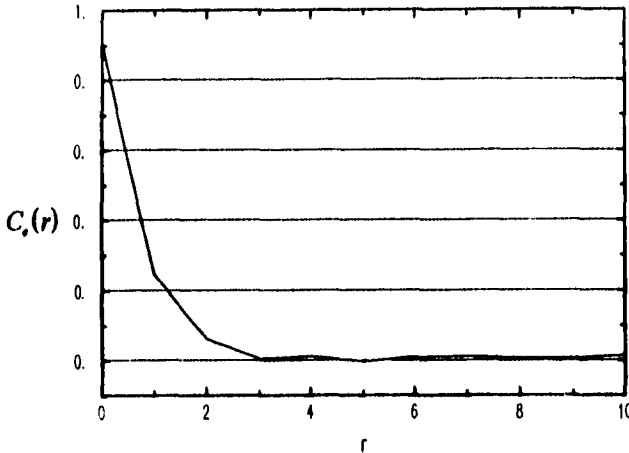


Figura 7. Función de correlación espacial entre 2 puntos para el ACE 22 desde una configuración inicial desordenada con  $\rho(0) = 0.5$ , en una red de 8192 sitios y 10 pasos temporales.

La figura 8 muestra el patrón generado por un defecto en un solo sitio en la configuración inicial del ACE regla 150 para  $t \leq 2$ , se señalan los sitios que son afectados por el daño en cada paso temporal.

### Definición

Para un bloque de  $b$  sitios hay  $2^b$  posibles secuencias binarias que pueden numerarse con un índice  $j$  tal que  $0 \leq j < 2^b$ . Sea  $p_s(j)$  la probabilidad de la secuencia  $j$  en una configuración cualquiera. La entropía de bloque  $b$ ,  $S_b$ , está dada por la media del logaritmo de la probabilidad  $p_s(j)$ , es decir

$$S_b(\bar{x}) = \left(\frac{1}{b}\right) \sum_j p_s(\bar{x}) \log p_s(\bar{x}) \quad (11)$$

donde  $\sum_j p_s(j) = 1$ .

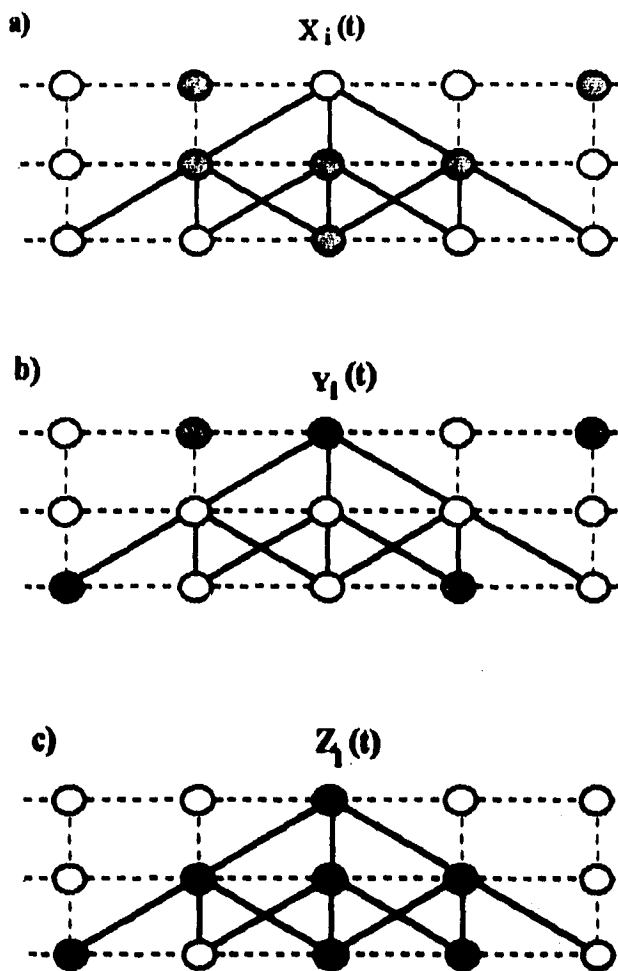


Figura 8. Patrón generado por un defecto en un solo sitio en la configuración inicial al azar, para 3 pasos temporales, del ACE 130. Los círculos blancos son sitios de la red con valor 0 y los grises tienen valor 1. En la figura a) se muestra la evolución de la red sin el defecto  $\bar{X}(t)$ . En b) se muestra la evolución del defecto  $\bar{Y}(t)$ . En c) se observa la evolución de la distancia de Manning II.

En la práctica,  $p_b(j)$  se evalúa como la fracción de veces que aparece la secuencia  $j$  en una configuración  $\bar{x}$ . El factor de normalización escogido hace que el valor máximo de  $S_b$  sea 1. Este valor máximo se alcanza cuando un sistema es completamente desorganizado.<sup>[28]</sup>

Como mostraremos en el capítulo 4, puede extenderse el concepto *exponentes de Lyapunov* de sistemas dinámicos continuos a los ACs. Sea  $\bar{N} = (N_1, \dots, N_L)$  con  $N_j \in N^+$ ,  $j = 1, \dots, L$  para un sitio fijo  $i$  y defínase el siguiente mapeo

$$N(t+1) = F^i(t)N(t) \quad (12)$$

donde  $F^i$  es la matriz Jacobiana Booleana cuyos elementos son las derivadas Booleanas (c.f. Apéndice A) parciales del flujo  $F$  definido en la ecuación 1 (c.f. apéndice A),  $N^+$  representa a los enteros positivos. El producto efectuado en la ec. (12), es el usualmente usado para la multiplicación de un vector por una matriz.

### Definición

Los exponentes máximos de Lyapunov (EML)  $\lambda$ , de sistemas dinámicos continuos, aplicados a ACs se pueden definir mediante la siguiente ecuación

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum \ln \left( \frac{|N(t)|}{|N(t-1)|} \right) \quad (13)$$

donde  $|N(t)|$  es la norma de  $N$ .<sup>[21]</sup> Estos conceptos se desarrollan con mayor detalle en el capítulo 4.

## 1.5 Clasificación de autómatas celulares de Wolfram

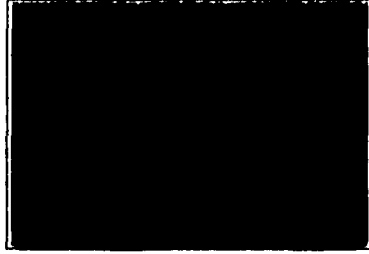
Una de las clasificaciones más conocida, se debe a los experimentos realizados por Stephen Wolfram.<sup>[27]</sup> Esta clasificación sugiere que los patrones generados por ACTs legales unidimensionales con  $k=2$  y  $r=2$  generados desde un estado inicial desordenado, pueden agruparse en las siguientes 4 CLASES (figura 9). Se muestra entre paréntesis una analogía con sistemas dinámicos continuos:

- 1) Evolucionan a un estado homogéneo (puntos límite).
- 2) Evolucionan a un estado estable o periódico (conjunto límite que contiene unas cuantas configuraciones (ciclos límite)).
- 3) Evolucionan a un estado aperiódico (comportamiento caótico análogo al encontrado en los atractores extraños).
- 4) Evolucionan a estructuras localizadas complejas que pueden.

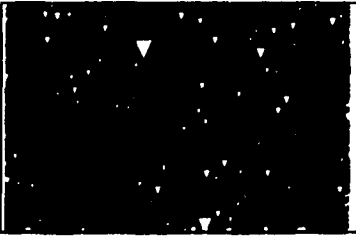
Esta clasificación es generalizada, por el mismo Wolfram, para autómatas celulares elementales mínimos en el apéndice de la ref. [24]; en la cual señala una clasificación



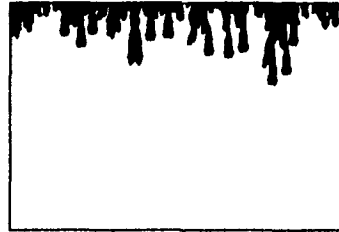
REGLA 32



REGLA 50



REGLA 22



CÓDIGO 20

Figura 9. Ejemplo de las 4 clases cualitativas (definidas por Wolfram) de comportamiento observadas en la evolución de ACs unidimensionales desde un estado inicial desordenado con una densidad inicial  $\rho(0) = 0.5$ , en una red de 640 sitios para 200 pasos temporales. Es evidente un comportamiento complejo y desordenado. Los ejemplos son los ACEs 32, 50, 22 y el ACT 20.

La clasificación es en principio cualitativa empero, hay varios caminos para hacerla cuantitativa y de formular, por ende, definiciones más precisas de su clasificación. Hay reglas que caen en la frontera entre una clase y otra con lo que las definiciones no coinciden en su totalidad con los resultados experimentales. Cabe mencionar que esta clasificación sólo vale para ACEs y ACTs ambos legales.

En los capítulos siguientes, se efectúa un estudio sistemático de las principales propiedades estadísticas que caracterizan a los *autómatas celulares elementales legales mínimos (ACELM)* y los *autómatas celulares totalísticos legales (ACTL)* de alcance 2 para los cuales es válida la clasificación anterior, con la finalidad de desarrollar criterios de clasificación más precisos. Los ACs que pertenecen a la clase 3 son usualmente denominados como autómatas caóticos sin haber una definición de caos<sup>[9]</sup>, pero basados en su comportamiento espacio-temporal como el mostrado para la regla 22 en la fig. 9. En lo que sigue presentaremos algunas cantidades que pueden hacer cuantitativa la noción de caos en autómatas celulares, en particular podemos definir exponentes de Lyapunov siguiendo la definición de estos para sistemas dinámicos continuos.

## Capítulo 2.

### Estadística de Automatas Celulares Elementales Legales Mínimos.

El objetivo de este capítulo es estudiar las propiedades estadísticas mencionadas en la sección 1.4 del capítulo anterior, mediante las cuales se pueda caracterizar cuantitativamente el comportamiento que se observa en el espacio de configuraciones de cada una de las 25 reglas de los autómatas celulares elementales legales mínimos (ACELM).

En la primera sección se analiza la densidad a tiempos largos, para las 25 reglas de ACELMs. En la segunda sección, se desarrolla un análisis teórico de las densidades obtenidas, mediante una aproximación de campo medio para ACELMs clase 3.

Otra de las propiedades estadísticas importantes, es la función de correlación entre dos puntos, la cual se analiza en la sección 2.4. En ésta, se realiza un estudio del comportamiento de ésta función para las reglas de clase 3 para estados iniciales tomados al azar; en redes de 8192 sitios y tiempos de 500 pasos, a partir, en todos los casos de una densidad inicial de 0.5.

En la sección 2.5, se estudia la evolución de un defecto. Este análisis se efectúa con la finalidad de describir la estabilidad o inestabilidad, en su caso, de la presencia de una modificación introducida en el espacio de configuraciones de un ACELM. Este proceso queda medido por la distancia de Hamming.

Finalmente, en la sección 2.6, se desarrolla un análisis de una de las principales cantidades estadísticas que caracterizan el espacio de configuraciones de un ACELM, la entropía de bloque  $S_b$ . En esta misma sección se efectúa un análisis teórico de esta cantidad estadística mediante una aproximación de campo medio.

La clasificación de los ACELMs, de acuerdo a Wolfram<sup>(27)</sup> se divide en 3 clases:

1. Evolucionan a un estado homogéneo (0, 4, 32, 128 y 160).
2. Evolucionan a un estado de estructuras periódicas simples aisladas (36, 50, 72, 76, 94, 104, 108, 132, 164, 178, 200, 204 y 232).
3. Evolucionan a un patrón desordenado (18, 22, 54, 90, 122, 126, 146 y 150).

En lo que sigue, cuando se indique *tiempos largos* se estará haciendo referencia a 5000 pasos temporales y *redes grandes* se referirá a 8192 sitios. En todos los experimentos computacionales se hace uso de condiciones periódicas a la frontera.



## 2.1 Densidad a tiempos largos.

Una configuración al azar se puede caracterizar estadísticamente por la densidad de unos, definida en la ec. (7).

Sea  $\bar{x}(0)$  una configuración inicial desordenada al tiempo  $t=0$ , con una densidad de unos en la red  $\rho(0)$ . Considérese el comportamiento de  $\rho(t)$ , la densidad obtenida después de  $t$  pasos temporales en el límite para  $t$  lo suficientemente grande. Esta densidad se representará por  $\rho_\infty$ .

En la ref. [24], se muestra la evolución espacio-temporal de las 88 reglas mínimas de autómatas celulares elementales para una configuración inicial al azar, de las cuales sólo nos ocuparemos de las legales. Estas sugieren que para las reglas clase 1, como la 0, 32, 72, etc., cualquier configuración inicial evoluciona hacia un estado estacionario con  $\rho_\infty = 0$ , aunque el tiempo de relajamiento varía. Para la regla 0 es muy claro que  $\rho(t) = 0$  para todo  $t > 0$ , puesto que la función de asignación envía cualquier triada al 0. Para los ACELMs 72 y 32  $\rho(t) = 0$  para un valor de  $t > 1$ . La regla 204 es la regla "identidad", la cual propaga cualquier configuración inicial sin cambio, es decir se tiene que  $\rho_\infty = \rho(0)$  para todo  $t$ .

Es necesario un análisis estadístico para la evolución desde estados iniciales desordenados de ACELMs no triviales, mediante el estudio de cantidades que reflejen las propiedades generales de todo el conjunto espacio-temporal en cuanto a su evolución a largo plazo. Para tal efecto se realizaron experimentos computacionales estadísticos partiendo desde estados iniciales al azar, los cuales tenían densidades iniciales variables  $\rho(0)$ , las cuales se eligieron en el intervalo  $[0,1]$  incrementándose a razón de 0.1. Estas configuraciones al azar se dejan evolucionar bajo una determinada regla de un ACELM. Una vez alcanzado el tiempo de evolución largo, mayor al de relajamiento, se determina la densidad de sitios con valor 1, según la definición dada en la ec. (7).

El experimento computacional se repitió 15 veces en todos los casos. Esta densidad es tomada para el mismo valor de  $t$ .

En la tabla 12 del apéndice D, se muestra un reporte comparativo de valores de  $\rho_\infty$  cuando  $\rho(0) = 0.5$  y la desviación estándar asociada a cada experimento computacional, para cada una de las 8 reglas de ACELM clase 3 a partir de un estado inicial al azar.

La existencia de una densidad  $\rho_\infty$  con el mismo valor para cualquier valor de la densidad inicial  $\rho(0)$ , es una característica típica de los ACELMs clase 3. Ejemplos de ello son las reglas 18 y 150 para las cuales se obtienen densidades claramente acotadas por los valores  $\rho_\infty = 0.255 \pm 0.00$  y  $\rho_\infty = 0.5059$  respectivamente (c.f. figura 10).

Las gráficas de densidad al infinito  $\rho_\infty$  contra densidad inicial, para tiempos largos, mantienen una distribución que no depende del valor de  $\rho(0)$  siempre y cuando ésta no sea muy chica ni muy grande, es decir tiene la misma  $\rho_\infty$  para cualquier  $\rho(0)$  en el intervalo  $0.1 < \rho(0) < 0.9$  aproximadamente, como se muestra en la figura 11 para el caso particular del ACELM 22.

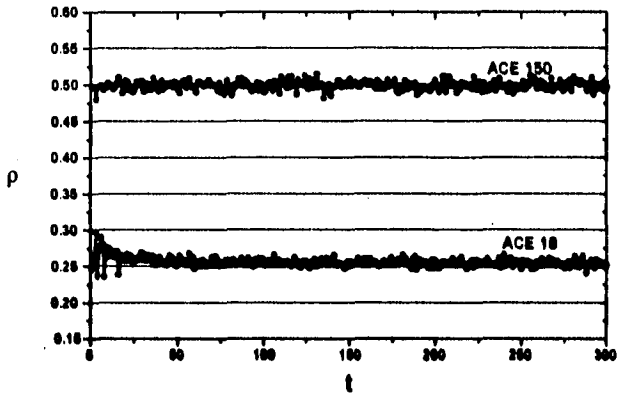


Figura 10. Gráfica de  $\rho(t)$  contra  $t$  para 300 pasos temporales en una red grande a partir de una densidad inicial  $\rho(0) = 0.5$  para sitios tomados al azar de los ACELMs 18 y 150. Se efectuaron 15 repeticiones del experimento computacional

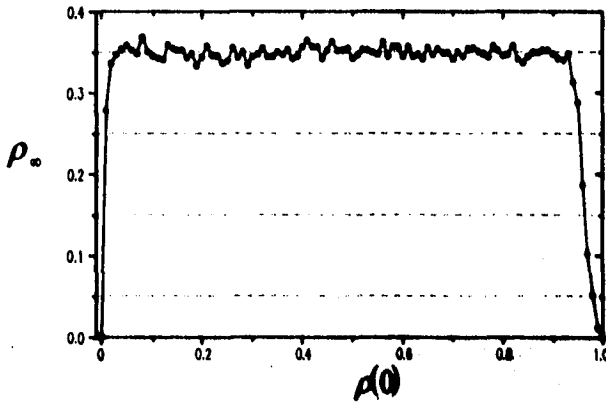
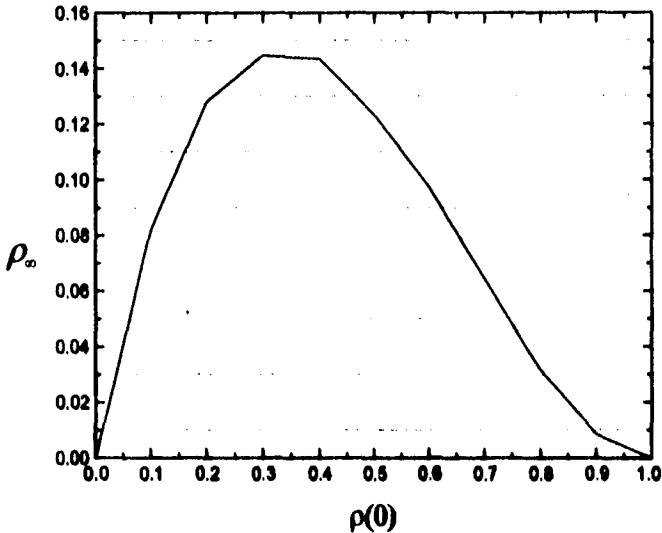


Figura 11. Gráfica de densidad al infinito  $\rho_\infty$  contra densidad inicial  $\rho(0)$  para el ACELM 23, caso 3, a partir de estados iniciales tomados al azar. El experimento se realizó en una red grande y un tiempo de evaluación largo con 15 repeticiones del experimento computacional. La densidad inicial se incrementó a razón de 0.01. La línea mostrada es una ayuda para el lector y no indica puntos experimentales.

Para la regla 4, clase 1, se obtiene un comportamiento evolutivo donde la densidad al infinito, evoluciona en forma parecida a una campana conforme la densidad inicial  $\rho(0)$  crece con sesgo negativo, según se muestra en la fig. 12.

Una característica de los ACELMs clase 2 es que el valor de la densidad al infinito toma diferentes valores promedio para pasos temporales pares que para impares dando valores cíclicos de periodicidad 2 o mayor. Es por esta razón que no es posible hacer un análisis preciso como para las clases 1 y 3. Así que la densidad al infinito, para estos ACs debe ser redefinida en términos de su periodicidad quizá mediante un cociente de la densidad definida en la ec. (7) y su periodicidad. Esto podría representar un tema de una futura investigación.



**Figura 12.** Gráfica de densidad al infinito contra densidad inicial para el ACELM 4, a partir de estados iniciales tomados al azar. El experimento se realizó en una red grande, un tiempo de evolución largo y 15 repeticiones del experimento computacional.

Del análisis de los experimentos computacionales, se puede obtener una clasificación de los ACELMs basada en el comportamiento de su densidad a tiempos largos. Esta clasificación es la siguiente:

- Las densidades al infinito se comporta como una campana con sesgo negativo. Este comportamiento se observa en la regla 4, clase 1.

- La densidad al infinito no depende del valor de la densidad inicial, manteniendo un comportamiento que tiene la misma  $\rho_\infty$  para cualquier  $\rho(0)$ . Este tipo de curvas se observa en todas las reglas clase 3 (18, 22, 54, 90, 122, 126, 146, 150) (fig. 11).
- La densidad al infinito tiene un valor nulo. Esto se observa en algunas reglas clase I (32, 128 y 160).

En resumen, podemos afirmar que si algún ACELM es clase 3 entonces su densidad al infinito no depende de la densidad inicial para densidades iniciales en el intervalo  $[0.1, 0.9]$  aproximadamente.

Si una regla es clase I entonces su densidad al infinito tiene un comportamiento de una campana con sesgo negativo, excepto las reglas 0, 32, 128 y 160 las cuales evolucionan a un estado estacionario nulo.

Otra manera de obtener algunos resultados para el análisis de densidades a tiempos largos de ACELMs es haciendo uso de la teoría de campo medio solamente válida para ACELMs clase 3 según se explica en el siguiente tema de este trabajo.

## 2.2. Teoría de Campo Medio

La evolución temporal de los ACELMs puede generar correlaciones. Sin embargo, como una primera aproximación, se pueden ignorar estas correlaciones y parametrizar todas las configuraciones mediante su densidad inicial o equivalentemente por las probabilidades  $p$  y  $q=1-p$ , de que un sitio tome el valor 1 ó 0 respectivamente. Es evidente que, con estas restricciones las configuraciones a caracterizar deben ser lo suficientemente "desordenadas" como para eliminar las correlaciones inducidas, así que esta teoría es válida solamente para la clase 3 definida por Wolfram.

Con estas aproximaciones la evolución temporal de la densidad está dada por

$$\frac{dp}{dt} = \Gamma(0 \rightarrow 1) - \Gamma(1 \rightarrow 0) \quad (14)$$

donde  $\Gamma(0 \rightarrow 1)$  y  $\Gamma(1 \rightarrow 0)$  representan la fracción promedio de sitios que cambian de 0 a 1 y de 1 a 0 en cada paso temporal, respectivamente.

Podemos escribir

$$\begin{aligned} \Gamma(0 \rightarrow 1) &= \bar{P} \circ (\bar{A} \wedge \bar{R}) \quad \text{donde} \quad \bar{A} = (0,0,1,1,0,0,1,1) \\ \Gamma(1 \rightarrow 0) &= \bar{P} \circ (\neg \bar{A} \wedge \neg \bar{R}) \end{aligned} \quad (15)$$

con

$$\bar{P} = (p^3, p^2q, p^2q, pq^2, p^2q, pq^2, pq^2, q^3)$$

En la ec. (15),  $\bar{R}$  es un vector cuyas componentes son la especificación binaria de la regla del ACELM. La operación  $\circ$  denota el producto escalar. El vector binario  $\bar{A}$  caracteriza a las 8 vecindades, asignando un 1 a aquellas que tienen un 0 en el sitio central y que por ello pueden pasar a un 1 en el siguiente paso temporal. Al realizar la operación de conjunción vectorial con  $\bar{R}$ , se seleccionan los valores locales para vecindades de 3 sitios con el adecuado valor del sitio central. En el vector  $\bar{P}$ , sus 8 coordenadas indican las probabilidades para las 8 posibles vecindades de 3 sitios, suponiendo cada sitio independiente de tomar valores 1 con probabilidad  $p = p$  y de tener valor 0 con probabilidad  $q = 1 - p$ .

La densidad en el equilibrio se obtiene cuando

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad (16)$$

esta condición da una ecuación polinomial para  $p$  cuya raíz será el valor de la densidad al infinito  $p_\infty$ .

Considérese el siguiente ejemplo para la regla 150. El algoritmo relacionado a la teoría de campo medio, se implementó mediante el uso de un paquete especializado de cómputo para matemáticas, Eureka the Solver versión 1.0. Dicho algoritmo se presenta en el apéndice B. Los resultados obtenidos al correr el programa para cada una de las 8 reglas de los ACELMs clase 3, se presenta en el apéndice D.

Tabla 4. Construcción de la regla 150 en campo medio.

$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$\bar{P}$	$\bar{A}$	$\neg\bar{A}$	$\bar{R}_{150}$	$\neg\bar{R}_{150}$	$\bar{A} \wedge \bar{R}_{150}$	$\neg\bar{A} \wedge \neg\bar{R}_{150}$
0	0	0	$q^3$	1	0	0	1	0	0
0	0	1	$pq^2$	1	0	1	0	1	0
0	1	0	$pq^2$	0	1	1	0	0	0
0	1	1	$p^2q$	0	1	0	1	0	1
1	0	0	$pq^2$	1	0	1	0	1	0
1	0	1	$p^2q$	1	0	0	1	0	0
1	1	0	$p^2q$	0	1	0	1	0	1
1	1	1	$p^3$	0	1	1	0	0	0

Varios hechos quedan claros de la tabla 4.

1) La columna  $\bar{A} \wedge \bar{R}_{150}$  contiene un 1 para aquellas vecindades que tienen un 0 en el centro y que bajo la regla evolucionan a un 1 y 0 en todos los demás sitios. Así, se observa que se seleccionan aquellas vecindades que tienen un 0 en el centro y evolucionan a 1. Si ahora se hace el producto escalar de  $\bar{A} \wedge \bar{R}_{150}$  con  $\bar{P}$  se obtiene la probabilidad de pasar de 0 a 1. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \Gamma(0 \rightarrow 1) &= \bar{P} \circ (01001000) \\ &= pq^2 + pq^2 \\ &= 2pq^2 \end{aligned}$$

2) Aquí el argumento es similar.  $\neg\bar{A}$  selecciona las vecindades que tienen 1 en el centro.  $\neg\bar{R}_{150}$  contiene 1 en los sitios en que la regla da 0. Así, en este caso

$$\begin{aligned} \Gamma(1 \rightarrow 0) &= \bar{P} \circ (00010010) \\ &= p^2q + p^2q \\ &= 2p^2q \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene la ecuación de evolución, de la ec. (16) y por la condición de normalización  $p + q = 1$ , se obtiene que

$$\frac{d p}{d t} = 2pq^2 - 2p^2q = 2pq(q - p) = 0$$

$$\Rightarrow 2pq = 0 \text{ ó } q = p = \frac{1}{2}$$

La solución de esta ecuación es

$$p = \frac{1}{2}$$

El resultado experimental para la regla 150 es  $\rho_e = 0.5059 \pm 0.006$ , el cual se obtuvo a partir de los experimentos computacionales reportados en la tabla 12 del apéndice D. En el cual se muestran los valores previstos por esta teoría para las 8 reglas clase 3.

La figura 13 muestra a  $p$  como función del tiempo, para el ACELM 150 y se observa que el resultado final corresponde para algunas reglas al valor obtenido a partir de la teoría de campo medio.

De los resultados comparativos reportados en el apéndice D, se observa que la teoría de campo medio aproxima muy bien al valor de  $\rho_e$  para los ACELMs clase 3: 90 y 150. Los resultados eran de esperarse, puesto que estos ACELMs presentan un comportamiento lo suficientemente desordenado, presentando patrones con muchos triángulos sin una estructura continua, como para eliminar las correlaciones inducidas entre sitios. Para el resto de los ACELMs clase 3, se tienen valores que son mayores que el experimental. En general, se observa que la teoría de campo medio sobrestima el valor de la densidad al infinito, con un error porcentual mínimo de 4.6% para el ACELM 54 y máximo del 33.4% para la regla 126.

Los resultados para la densidad a tiempos largos obtenidos con la teoría de campo medio corresponden a los resultados experimentales para las reglas aditivas de ACELMs clase 3. Esto nos permite hacer predicciones para ellas. Sin embargo, en el resto de las reglas de esta clase, las pequeñas discrepancias son el reflejo de la presencia de correlaciones inducidas en la evolución del ACELM. El estudio de estas correlaciones, se presenta en el siguiente apartado.

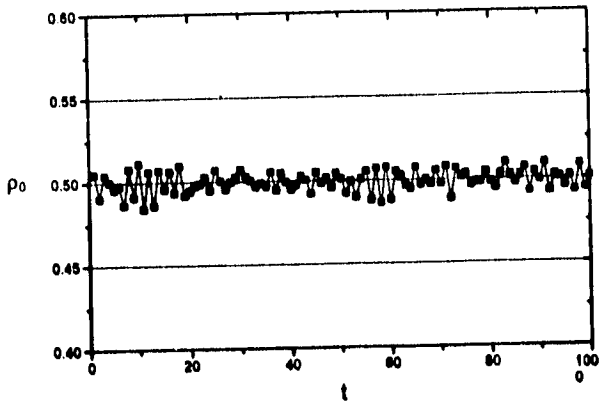


Figura 13. Densidad contra tiempo para el ACELM 150. El experimento se realizó para una densidad inicial  $\rho(0) = 0.5$ , en una red grande.



### 2.3. Función de correlación espacial.

Los patrones espacio-temporales que generan los ACELMs pueden ser complejos como se evidencia en el apéndice de la referencia [24]. Sin embargo, no son patrones aleatorios como veremos en esta sección, pues generan correlaciones espaciales.

La figura 14, presenta la función de correlación espacial definida en la ec. (8) con  $r \in [0,40]$  y  $t = 500$ , para el ACELM 18. Obsérvese como al ACELM alcanza una correlación de rango corto.

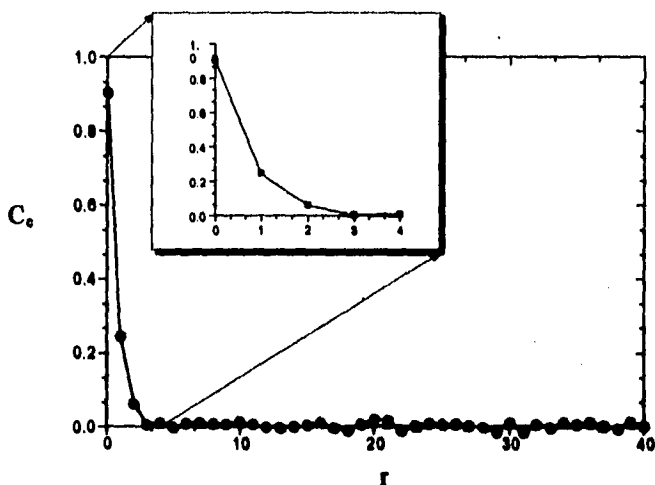


Figura 14. Función de correlación espacial en el intervalo  $[0,40]$  y  $t=500$  pasos temporales para el ACELM 18 a partir de un estado inicial al azar con una densidad  $\rho(0) = 0.5$ , en una red grande.

Para los ACELMs *activos*, por ejemplo las reglas 90 y 150, la función de correlación espacial, obtenida por evolución desde una configuración inicial desordenada *siempre* tiende rápidamente a cero. Para reglas *no activas*, se alcanza una correlación de corto rango, i.e. para  $r \leq 5$  se tiene que  $C_e(r) \neq 0$ . La existencia de una longitud de correlación no nula, en estos casos, es el primer indicador de la generación de un "orden" en la evolución de estos ACs.

De las gráficas de la función de correlación espacial a periodos largos para los ACELMs clase 3 no *activos* se observa que la función decrece rápidamente. Como ejemplo, en la figura 15 se muestra el caso específico de la regla 22.

La evolución de los ACELMs genera patrones espacio-temporales muy complejos, así la función de correlación entre dos puntos resulta ser un poco "burda" como medida estadística, pues configuraciones individuales parecen tener secuencias de sitios correlacionados, en un rango corto; puntualizados por regiones desordenadas. En este

sentido, no es factible una caracterización específica solamente a partir del comportamiento de la función de correlación. Para las 3 clases la función de correlación oscila alrededor del cero para valores más allá de una distancia crítica  $r > 5$ .

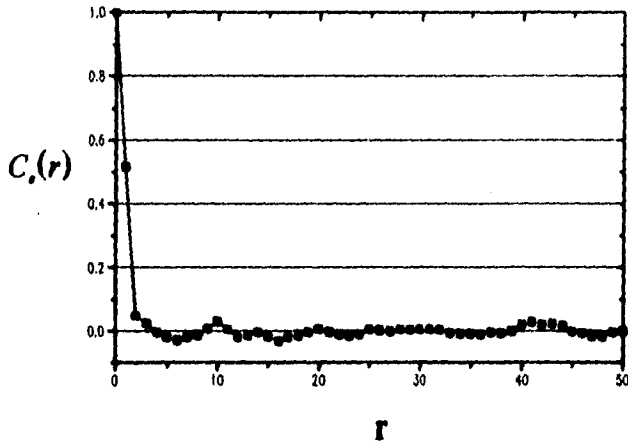


Figura 15. Función de correlación especial  $C_s(r)$  para  $r \in [0, 50]$  y  $t$  fijo con valor 500, para el ACELM 22 clase  $\Delta$ , a partir de un estado inicial al azar con una densidad  $\rho(0) = 0.5$ . El experimento se realizó en una red grande.

## 2.4. Crecimiento de los defectos

El comportamiento de la distancia entre dos configuraciones sometidas a la misma dinámica (crecimiento de un daño) es considerada como una herramienta adecuada para investigar las propiedades de la dinámica de modelos estadísticos discretos. Sin embargo la relación entre estas propiedades y el comportamiento "caótico" todavía no está clara. Por un lado existe una conexión intuitiva entre caos y el crecimiento de un daño y, por otro, atractores periódicos y colapso del daño.

A fin de analizar la estabilidad o inestabilidad, en su caso, de trayectorias en el espacio de configuraciones de un ACELM, se estudiará la distancia de Hamming sobre un conjunto representativo, definida en la ec. (10), la cual mide el esparcimiento de un daño en  $B_1^t$ , definido en el capítulo 1.

Sean  $\bar{x}, \bar{y} \in B_1^t$  dos configuraciones con las siguientes características, la primera una configuración aleatoria y la segunda cercana a la primera de manera que  $y_i = x_i \forall i \neq c, y_c = x_c \oplus 1, i = \dots, -1, 0, 1, \dots$  donde el sitio  $c$  es el sitio central, como se muestra en la figura 16, este sitio puede ser cualquiera ya que estamos considerando condiciones periódicas a la frontera. Entonces se dice que hay un *defecto o daño* en el lugar  $c$ , del cual se desea saber si se propaga o no en el tiempo. Sea  $z$  la diferencia entre  $\bar{x}(t)$  y  $\bar{y}(t)$  definida como  $\bar{z} = \bar{x} \oplus \bar{y}$  donde la operación  $\oplus$  es la disyunción exclusiva sitio a sitio. En otras palabras,  $z_i$  toma el valor 1 si y solo si  $x_i \neq y_i$ . La distancia de Hamming,  $H$ , entre dos configuraciones  $\bar{x}(t)$  y  $\bar{y}(t)$  a un tiempo  $t$  cualquiera, es entonces

$$H(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{z}| \quad (17)$$

donde  $|\bar{z}(t)| = \sum_{i=1}^t z_i(t)$ .

La distancia de Hamming al tiempo  $t=0$  es 1 y al tiempo  $t$  puede calcularse usando la ec. (17). Sin embargo, hacerlo así es dispendioso ya que hay que computar tanto  $\bar{x}(t)$  como  $\bar{y}(t)$ . Usando la expansión de la función  $f$  en serie de Taylor (c.f. apéndice A) es posible conocer la distancia de Hamming siguiendo la evolución temporal de  $\bar{x}(0)$  y además es posible definir exponentes de Lyapunov como veremos en el capítulo 4.

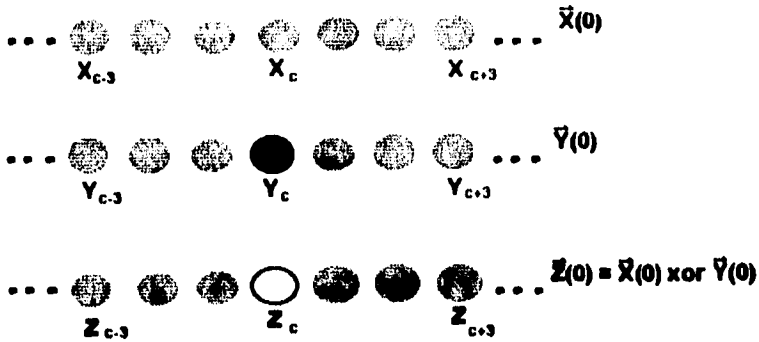


Figura 16. Configuraciones  $\bar{x}(0)$  y  $\tilde{y}(0)$  al tiempo  $t = 0$ , ésta última difiere de la primera sólo en el sitio central  $c$  y configuración  $\bar{z}(0)$  obtenida al aplicar  $\bar{x}(0) \oplus \tilde{y}(0)$ . Los círculos grises son sitios sin afectar y que no cambian, el negro representa la negación del valor del sitio  $c$ ; es decir, el daño. Los blancos representan sitios con valor 1.

Para ACEs tenemos que

$$x_i(t+1) = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

y expandiendo en serie de Taylor alrededor de  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$

$$\begin{aligned} x_i(t+1) = & f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \oplus [f_{-1} \wedge (x_{i-1} \oplus y_{i-1})] \oplus [f_0 \wedge (x_i \oplus y_i)] \oplus [f_1 \wedge (x_{i+1} \oplus y_{i+1})] \oplus \\ & [f_{-0} \wedge (x_{i-1} \oplus y_{i-1}) \wedge (x_i \oplus y_i)] \oplus [f_{-1} \wedge (x_{i-1} \oplus y_{i-1}) \wedge (x_{i+1} \oplus y_{i+1})] \oplus \\ & [f_{0+} \wedge (x_i \oplus y_i) \wedge (x_{i+1} \oplus y_{i+1})] \oplus [f_{-0+} \wedge (x_{i-1} \oplus y_{i-1}) \wedge (x_i \oplus y_i) \wedge (x_{i+1} \oplus y_{i+1})] \end{aligned} \quad (18)$$

En la expresión anterior las literales  $f_{-1}, f_0, f_1$  representan las derivadas Booleanas de primer orden respecto a las variables izquierda, centro y derecha respectivamente (c.f. apéndice A). La cantidad  $f_{-0}$  es la segunda derivada booleana de  $f$  respecto a las variables de la izquierda y del centro evaluada en  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  definida como la primera derivada respecto a  $x_{i-1}$  de la primera derivada de  $f$  respecto a  $x_i$ . El orden de derivación es irrelevante. Las otras dos segundas derivadas booleanas  $f_{-1}$  y  $f_{0+}$  se definen de la misma manera. La tercera derivada booleana que aparece,  $f_{-0+}$  es la primera derivada respecto a  $x_{i-1}$  de la primera

derivada respecto a  $x_i$  de la primera derivada de  $x_{i-1}$  de  $f$  evaluada en  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ . Esta es la única tercera derivada parcial de  $f$  que puede ser distinta de 0 dado que el orden de la derivación es irrelevante y la segunda derivada de  $f$  respecto a la misma variable es 0. Por la misma razón todas las derivadas de  $f$  de orden superior son 0 y la expresión en serie de Taylor de la ec. (18) es exacta. La expansión en serie de Taylor de un AC booleano unidimensional de alcance  $r$  contiene las primeras  $2r+1$  derivadas parciales y en general, si la vecindad contiene  $m$  sitios, la expansión en serie de Taylor termina en la  $m$ -ésima derivada parcial. Por otra parte, también es posible encontrar la fórmula de MacLaurin de un AC y es muy económico usarla en los experimentos.

Usando las ecs. (17) y (18) tenemos que

$$\begin{aligned}
 z_i(t+1) &= x_i(t+1) \oplus y_i(t+1) \\
 &= [f'_0 \wedge z_{i-1}] \oplus [f'_0 \wedge z_i] \oplus [f'_i \wedge z_{i+1}] \oplus \\
 &\quad [f''_0 \wedge (z_{i-1} \oplus z_i)] \oplus [f''_i \wedge (z_{i-1} \oplus z_{i+1})] \oplus \\
 &\quad [f'''_0 \wedge (z_i \oplus z_{i+1})] \oplus [f'''_i \wedge (z_{i-1} \oplus z_i \oplus z_{i+1})]
 \end{aligned} \tag{19}$$

Vemos de la última ecuación que basta con conocer  $\bar{x}(t)$  para  $\bar{z}(t)$  conocer y también la distancia de Hamming, ec. (17). En la figura 17, se muestra la evolución de un daño en el espacio de configuraciones de un ACELM, es decir la evolución de  $\bar{z}(t)$ , donde se observa el patrón generado por el daño, para los 250 primeros pasos temporales de la regla 22.

Es claro que para un AC de alcance  $r$ ,  $H$  puede a lo sumo crecer linealmente con el tiempo, debido al rango de interacción y número de estados de las variables los cuales son finitos, es decir

$$0 \leq H \leq (2r + 1)t \tag{20}$$



Figura 17. Evolución espacio-temporal de un daño en el espacio de configuraciones del ACELM 22, para 250 pasos temporales. En una red de 512 sitios y una densidad inicial  $\rho(0) = 0.5$ .

Se ha propuesto llamar a la tasa de crecimiento de  $H$  como el exponente de Lyapunov<sup>[24]</sup>, que se estudiará en el capítulo 4. Siendo un poco más específicos, se repite el

Se ha propuesto llamar a la tasa de crecimiento de  $H$  como el exponente de Lyapunov <sup>[24]</sup>, que se estudiará en el capítulo 4. Siendo un poco más específicos, se repite el cálculo de  $\bar{z}(t)$  un gran número de veces, se grafica el resultado promedio, que será algo parecido a un triángulo con bordes un poco irregulares, como se muestra en la fig. 17, y se define el exponente de Lyapunov por la izquierda (derecha) como la pendiente del lado izquierdo (derecho) del triángulo. En el apéndice de la ref. [24] aparecen los valores de estas cantidades para los 88 ACEs mínimos. Sin embargo, esta definición no toma en cuenta la estructura diferencial de los ACELMs y expresa la tasa de crecimiento lineal de una cierta distancia y no la tasa de crecimiento exponencial.

De los resultados experimentales se tiene que para los ACELMs, la distancia de Hamming muestra alguno de los siguientes comportamientos:

- La diferencia obtenida después de  $t$  pasos temporales,  $\bar{z}(t)$ , está dada por la evolución del mismo ACELM, pero como si éste evolucionara desde un estado inicial de un solo sitio con valor 1. Así, la distancia de Hamming en el paso temporal  $t$  está dada por el número de sitios diferentes de cero en dicha configuración. Esta característica solamente se observa en los ACELMs clase 3 *aditivos* y se debe a que son lineales, en el sentido de que la serie de Taylor de la función  $\bar{z} = \bar{x} \oplus \bar{y}$  termina en el primer orden. En la figura 18 se observa la gráfica de  $H$  para el ACELM aditivo 90. Los ACELMs cuya distancia de Hamming se comporta así son 90 y 150.
- Crecimiento, a lo sumo, lineal en el tiempo. Un cambio en el valor del estado en un sitio en el vector inicial es amplificado por la evolución de estos ACELMs lo que se ve reflejado en el comportamiento de su distancia de Hamming. Se puede apreciar de los resultados experimentales que, salvo pequeñas fluctuaciones,  $H$  tiende a tiempos largos a la forma

$$H \approx t \quad (21)$$

Los ACELMs que presentan este comportamiento son 18, 22, 54, 146 clase 3, según se muestra en la figura 19. Cambios en sitios individuales pueden, algunas veces, ser erradicados después de algunos pasos temporales. Este comportamiento especial es característico de los ACELMs 32, 128 y 160 para los cuales  $H = 0$  para  $t \geq 4$ .

En la tabla 12 del apéndice D, se muestran los valores ajustados por regresión lineal para la pendiente  $m$  de las gráficas de  $H$  contra  $t$ ,  $H(t) = mt$ , para los ACELMs 18, 22, 54, 122, 126 y 146, clase 3, cuya distancia de Hamming presentan un comportamiento como el de la figura 19.

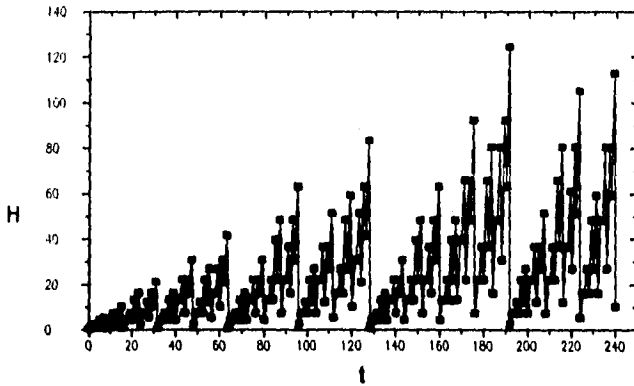


Figura 18. Distancia de Hamming para 240 pasos temporales para un ACELM *aditivo*, la regla 90, desde un estado inicial al azar con una densidad  $\rho(0) = 0.5$  en una red grande.

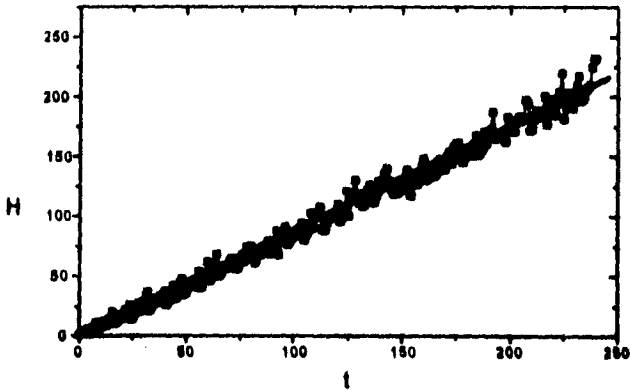


Figura 19. Distancia de Hamming para 250 pasos temporales para el ACELM 22, desde un estado inicial al azar con una densidad  $\rho(0) = 0.5$  en una red grande. En la gráfica se muestra una línea recta ajustada por regresión lineal para los datos experimentales.

## 2.5. Entropía de bloque.

En un sistema *irreversible*, el número de posibles configuraciones puede crecer con el tiempo. Por otro lado, en un sistema *reversible* cada estado tiene un descendiente único y un antecesor también único. Este comportamiento hace posible la *auto-organización*, pues permite que algunas configuraciones ocurran con mayor probabilidad que otras, aún en tiempos de evolución largos.

La entropía de bloque  $S_b$  queda especificada por la ec. (11). En general, la entropía de bloque da el promedio "del contenido de información" por sitio computado mediante la obtención de correlaciones en bloques de longitud  $b^{(22)}$ .

De la definición dada en la ec. (11), se tiene que

$$0 \leq S_b \leq 1 \quad (22)$$

La definición implica que  $S_b = 1$  solamente cuando todas las posibles secuencias de sitios ocurren con igual probabilidad. El valor de  $S_b = 0$  si solo si el valor de  $p_j = 0$  para todo  $j$ .

A efecto de analizar el comportamiento de la entropía de bloque en los ACELMs, se realizaron simulaciones del proceso evolutivo de las 8 reglas clase 3, promediando sobre un conjunto representativo. Las condiciones iniciales impuestas a cada uno de los ACELMs simulados fueron: densidades iniciales  $\rho(0) = 0.5$  para un estado al azar, en redes grandes, tiempos de evolución largos y longitudes de bloque  $3 \leq b \leq 8$ .

Para ACELMs clase 3, la entropía decrece asintóticamente, aproximadamente en forma exponencial, conforme aumenta el tamaño del bloque, después de un período largo, permitiendo identificar algunas cotas superiores para  $S$  como una generalización para el análisis finito; para posteriormente alcanzar valores de "equilibrio" los cuales son independientes de la densidad del estado inicial. Esto se muestra en la figura 20 donde se observa un espectro de entropía de bloque para 7 de los 8 ACELMs clase 3. Sin embargo, para algunos ACELMs los valores de la entropía de bloque se comportan como una constante, ejemplo de ellos son las reglas 90 y 150, clase 3 según se muestra en la figura 20 para los cuales el valor de la entropía es aproximadamente 1. En la figura 21, se muestra un espectro de entropías de bloque como una función de la densidad inicial para 7 ACELMs clase 3 para un bloque de longitud 8.



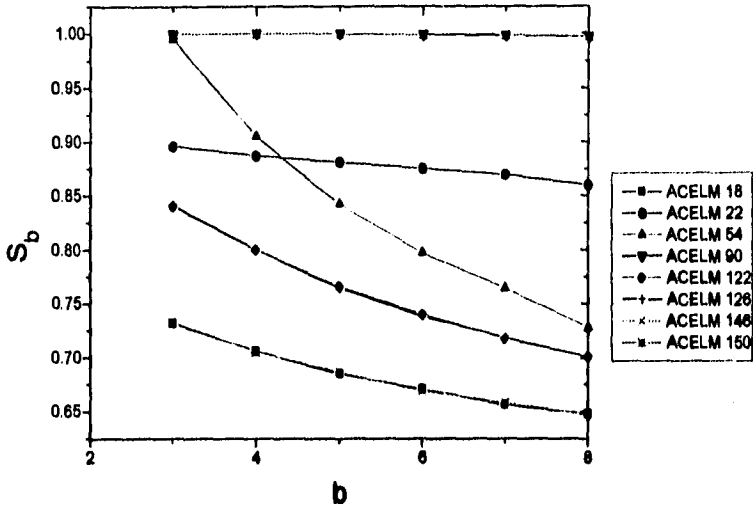


Figura 20. Espectro de entropías de bloque para los ACELMs clase 3. El experimento se desarrolló con redes grandes, tiempos de evolución largos y 15 repeticiones del experimento computacional; para longitudes de bloque  $3 \leq b \leq 8$ .

Como una aproximación teórica al valor experimental de la entropía, se puede efectuar un análisis de campo medio de esta cantidad estadística. A partir de los resultados obtenidos de la sección 2.2, es factible un estudio similar de la entropía de bloque. Esta teoría se desarrolla de la siguiente forma. De la tabla 4, en la columna marcada con  $\bar{P}$  se tienen las probabilidades para las 8 posibles vecindades de 3 sitios, suponiendo cada sitio independiente de tomar valores 1 con probabilidad  $p$  y de tener valor 0 con una probabilidad  $q = 1-p$  y de la definición de entropía de bloque, ec. (11), se tiene:

$$S_b = -\frac{1}{b} \ln 2^S$$

donde, para efectos de cálculo se define a

$$S^* = \sum_{i=0}^{2^b-1} p_i \ln p_i$$

de la definición anterior, para un bloque  $b = 3$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
S' &= q^3 \ln q^3 + 3q^2 p \ln q^2 p + 3p^2 q \ln p^2 q + p^3 \ln p^3 \\
&= 3q^3 \ln q + 3q^2 p \ln q^2 + 3q^2 p \ln p + 3p^2 q \ln p^2 + 3p^2 q \ln q + 3p^3 \ln p \\
&= \ln q [3q^3 + 6q^2 p + 3p^2 q] + \ln p [3p^3 + 6p^2 q + 3q^2 p] \\
&= 3q [q^2 + 2qp + p^2] \ln q + 3p [p^2 + 2pq + q^2] \ln p
\end{aligned}$$

pero

$$(p + q)^2 = 1$$

Así que

$$\begin{aligned}
S' &= 3q \ln q + 3p \ln p \\
&= 3[q \ln q + p \ln p]
\end{aligned}$$

Finalmente se tiene el valor de la entropía de bloque

$$S_b = -\frac{1}{b \ln 2} S' = -\frac{3}{31 \ln 2} [q \ln q + p \ln p] = -\frac{1}{\ln 2} [q \ln q + p \ln p] \quad (23)$$

En la tabla 5 se muestran, en forma comparativa, los valores de la entropía obtenidos a partir de la teoría de campo medio y los obtenidos en forma experimental, para una longitud de bloque 3.

**Tabla 5. Entropía de campo medio para ACELMS Clase 3 (b = 3).**

ACELM (Clase 3)	Valor Experimental	Campo Medio	Error relativo (%)
18	0.7319	0.8723	19.2
22	0.8962	0.9826	9.6
54	0.9953	1.0000	0.5
90	0.9999	1.0000	0.0
122	0.8402	0.9594	14.2
126	0.8417	0.9106	8.2
146	0.7325	0	53.6
150	0.9999	1.0000	0.0

El valor de  $S_b$  es independiente de la densidad inicial, dando los mismos valores sin importar el estado inicial. En la figura 21, se muestra un espectro de entropías de bloque para los ACELMS clase 3 en función de la densidad inicial.

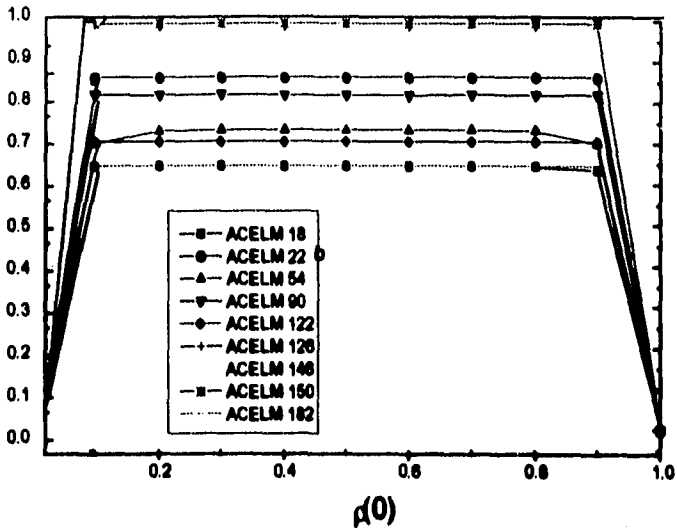


Figura 21. Espectro de entropías de bloques contra densidad inicial para los ACELMs clase 3. El experimento se desarrolló en redes grandes y tiempos de evolución largos, para una longitud de bloques  $b = 8$ .

## Capítulo 3.

### **Autómatas celulares totalísticos de alcance 2.**

El objetivo de esta sección es retomar las propiedades estadísticas mediante las cuales se caracteriza cuantitativamente el comportamiento que se observa en el espacio de configuraciones de cualquiera de las estructuras geométricas producidas por la evolución de un ACELM, para caracterizar cuantitativamente la evolución del espacio de configuraciones de los ACT's.

La primera de estas cantidades estadísticas en estudio es la densidad de sitios con valor 1 a tiempos largos, promediada sobre un conjunto representativo, la cual se estudia en la sección 3.1.

En la segunda sección, se desarrolla un análisis teórico de las densidades límites para las 16 reglas totalísticas legales clase 3, mediante una teoría de campo medio; con la finalidad de comparar los resultados obtenidos de los experimentos computacionales de la sección previa, con los que se tienen a partir de ésta aproximación teórica.

Otra de las propiedades estadísticas importantes en la caracterización cuantitativa del espacio de configuraciones de los ACTs, es la función de correlación entre dos puntos, la cual se analiza en la sección 3.3, dónde se realiza un estudio del comportamiento de esta función para las 16 reglas legales clase 3, de los ACTs para estados iniciales tomados al azar; en redes grandes y tiempos largos.

En la sección 3.4, se estudia la evolución de un daño, o diferencia entre dos configuraciones, a través del tiempo en el espacio de configuraciones de las 32 reglas totalísticas de los ACTs. Este análisis se efectúa con la finalidad de describir la estabilidad o inestabilidad, en su caso, de la presencia de una modificación introducida en el espacio de configuraciones de un ACT. Este proceso queda medido por la distancia de Hamming.

Finalmente, en la sección 3.5, se desarrolla un análisis de una de las principales cantidades estadísticas que caracterizan el espacio de configuraciones de un AC; la entropía de bloque  $S_b$ .

La clasificación de los ACTs legales, de acuerdo a Wolfram<sup>[27]</sup> se divide en 4 clases:

1. Evolucionan a un estado homogéneo (0, 4, 16, 32, 36, 48, 54, 60 y 62).
2. Evolucionan a un estado de estructuras periódicas simples aisladas (8, 24, 40, 56 y 58).
3. Evolucionan a un patrón desordenado (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30, 34, 38, 42, 44, 46 y 50).
4. Evolucionan a estructuras localizadas complejas de periodo largo (20 y 52).

En todo el capítulo, cuando se indique *tiempos largos* se estará haciendo referencia a 5000 pasos temporales y *redes grandes* se referirá a 8192 sitios, para 15 repeticiones del experimento, a menos que se indiquen otras características experimentales. En todos los experimentos computacionales se hace uso de condiciones periódicas a la frontera.

Con base en las definiciones dadas en el capítulo 1, al igual que para ACELMs, es posible realizar un análisis del estado del espacio de configuraciones en la evolución de un ACT partiendo desde una densidad inicial de sitios con valor 1, colocados al azar en la red.

En lo que sigue se procederá a estimar la densidad para estados de "equilibrio" promediando los resultados para varios experimentos sobre toda la red estudiando el comportamiento de  $\rho(t)$ , la densidad obtenida después de  $t$  pasos temporales para  $t$  lo suficientemente grande.

En la ref. [27], se muestra la evolución espacio-temporal de las 32 reglas totalísticas legales partiendo desde una configuración inicial al azar. En éstas se observa que para los ACTs clase 1, códigos 0, 4, 8, 16, 32, 36 y 48, cualquier configuración inicial evoluciona hacia un estado estacionario con  $\rho(t) = 0 \forall t \geq 10$ , aunque la longitud del tiempo transitorio<sup>2</sup> varíe, o bien tienen densidades al infinito que crecen rápidamente a 1 para  $0.1 \leq \rho(0) \leq 1$ . Así se observan dos estados absorbentes el 00...00 y el 11...11, tal es el caso de los ACTs 54, 60 y 62, según se muestra para el caso particular del ACELM 54, en la figura 22.

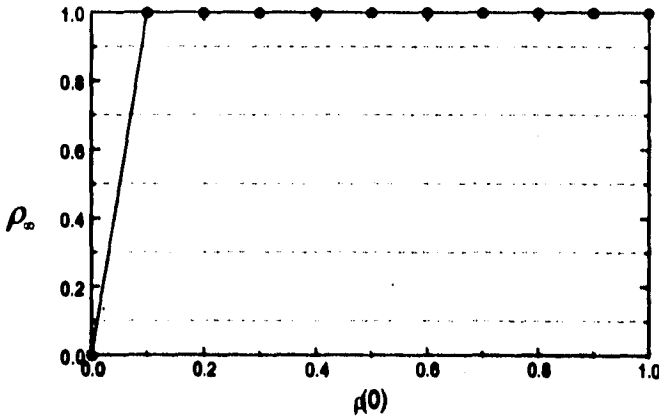


Figura 22. Gráfica de densidad al infinito  $\rho_\infty$  contra densidad inicial  $\rho_0 \in [0,1]$ , para el ACT 54. El experimento se realizó en una red grande para un tiempo de evolución largo. Nótese el comportamiento característico de la densidad para este ACT clase 1, el cual evoluciona a un estado absorbente. Este mismo comportamiento se observa en los ACTs 60 y 62. La línea continua no representa estrictamente la distribución de los puntos experimentales, sin embargo es indicó para una mejor visualización.

Para el código 0 es muy claro que  $\rho(t) = 0 \forall t > 0$  puesto que la regla de asignación envía cualquier quintupla al 0.

<sup>2</sup> El tiempo transitorio es el periodo mínimo necesario para que un sistema pueda mostrar su comportamiento característico una vez eliminadas las variaciones iniciales.

En la tabla 13, del apéndice E, se muestra un reporte comparativo de valores de  $\rho_\infty$  cuando  $\rho(0) = 0.5$  y la desviación estándar asociada a cada experimento computacional, para cada uno de los 16 ACT legales clase 3 a partir de un estado inicial al azar.

De los experimentos computacionales para las densidades al infinito, se obtiene que en general para cualquier ACT clase 3, la gráfica de densidad al infinito  $\rho_\infty$  contra la densidad inicial  $\rho(0)$ , para tiempos largos, tiene una distribución que crece rápidamente para densidades iniciales  $\rho(0) > 0$ . Es decir, para densidades pequeñas  $\rho_\infty$  tiende a crecer hasta un valor máximo, el cual permanece constante; posteriormente, la cantidad de unos en la red tiende a decrecer hasta anularse para la densidad inicial  $\rho(0) = 1$ , según se muestra en la figura 23 para el caso particular del ACT 30.

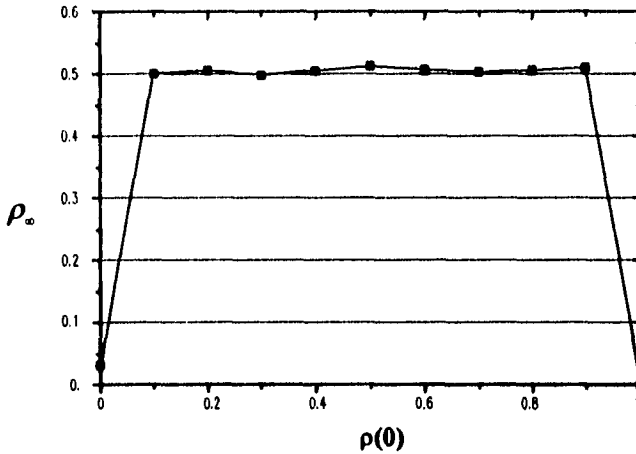


Figura 23. Gráfica de densidad al infinito  $\rho_\infty$  contra densidad inicial  $\rho_0 \in [0,1]$ , para el ACT 30. El experimento se realizó en una red grande para un tiempo de evolución larga. Nótese el comportamiento característico de la densidad para este ACT clase 3. Este mismo comportamiento se observa en los ACTs 2, 6, 10, 12, 14, 22, 26 y 28. La línea continua no representa estrictamente la distribución de los puntos experimentales, sin embargo se incluyó para una mejor visualización.

La existencia de una densidad  $\rho_\infty$  independiente de la densidad inicial  $\rho(0)$ , es una característica típica de todos ACTs legales mínimos clase 3. Los ACTs que presentan este comportamiento en su densidad son el 2, 6, 10, 12, 14, 22, 26, 28 y 30. Para los ACTs 34, 38, 42, 44, 46 y 50 la densidad al infinito crece muy rápidamente hasta un valor constante el cual se mantiene así en  $0.1 \leq \rho(0) \leq 0.9$  para luego crecer nuevamente hasta 1 para

$\rho(0) = 1$ . Es decir, para densidades pequeñas  $\rho_0$ , tiende a crecer hasta un valor máximo, el cual permanece constante y después la cantidad de unos en la red tiende a crecer hasta 1 para la densidad inicial  $\rho(0) = 1$ , según se muestra en la figura 24.

El problema que presentan los ACTs clase 2, al igual que con los ACELMs de la misma clase, es que tienen un comportamiento en el cual las configuraciones se repiten cíclicamente con periodicidad 3 o mayor. Así se hace necesario redefinir la densidad en términos de estos periodos. Tales investigaciones se deberán efectuar en el futuro.

Podemos afirmar que, ya sea que se observe un comportamiento de la densidad al infinito como el de la figura 23 o de la fig. 24 siempre es posible afirmar que si un ACT es clase 3 entonces su densidad al infinito no depende del valor de la densidad inicial, siempre y cuando  $a \leq \rho(0) \leq b$  con  $0 < a < 0.1$  y  $0.9 < b < 1$ .

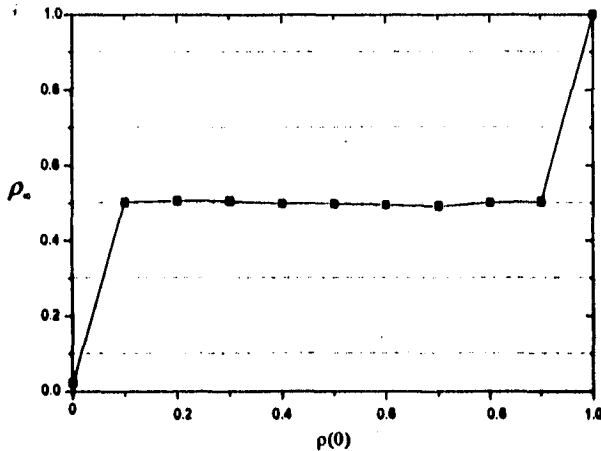


Figura 24. Gráfica de densidad al infinito  $\rho_\infty$  contra densidad inicial  $\rho_0 \in [0,1]$ , para el ACT 39. El experimento se realizó en una red grande para un tiempo de evolución larga. Nótese el comportamiento característico de la densidad para este ACT clase 3. Este mismo comportamiento se observa en los ACTs 34, 36, 42, 44, 46 y 58, todos ellos clase 3. La línea continua no representa estrictamente la distribución de los puntos experimentales, sin embargo es incluido para una mejor visualización.

Para los ACT códigos 20 y 52 clase 4; su densidad a tiempos largos tienen un comportamiento monótono creciente, según nuestra definición de densidad dada en la ec. (7), i.e. a mayor densidad inicial mayor densidad al infinito con crecimiento de la densidad en intervalos pequeños. La curva que describe la densidad al infinito crece hasta un punto central medio, el cual es reportado en el apéndice E; para posteriormente evolucionar hasta una densidad  $\rho_\infty=1$  para una  $\rho(0)=1$ . Los ACT 18 y 22 ,clase 3, muestran un valor constante en la densidad al infinito para cualquier  $\rho(0) \neq 1$ , como se muestra en la gráfica de la figura 24.

Otra manera de obtener algunos resultados para el análisis de densidades a tiempos largos de ACT es haciendo uso de la teoría de campo medio, desarrollada en el siguiente apartado de este trabajo.

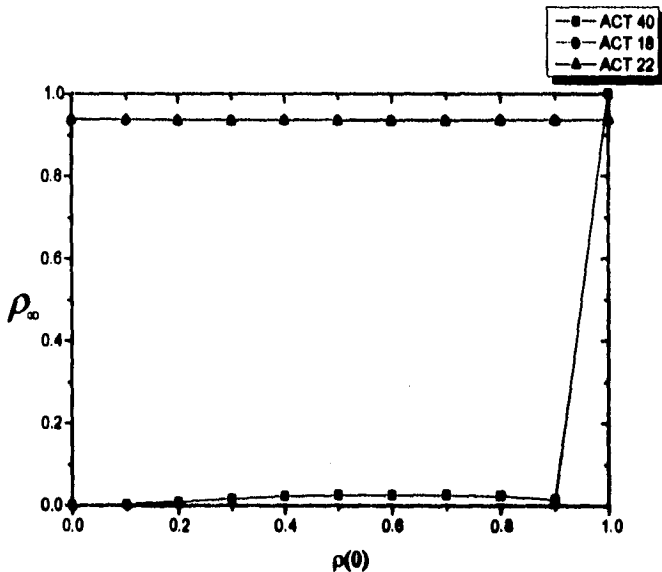


Figura 25. Gráfica de densidad al infinito  $\rho_\infty$  contra densidad inicial  $\rho_0 \in [0,1]$ , para los ACTs 18, 22 y 40. Las densidades al infinito tienden a un estado estacionario con un valor constante. El experimento se realizó en una red de 8192 sitios y 500 pasos temporales.

De lo anteriormente expuesto, se puede obtener una clasificación de los ACT en base al comportamiento de su densidad a tiempos largos. Esta clasificación es la siguiente:



- Las densidades al infinito decrecen rápidamente a cero y presentan un tiempo transitorio grande. Este comportamiento se observa en algunos ACTs legales clase 1 (0, 4, 16, 32, 36 y 48).
- La densidad al infinito tiene un comportamiento absolutamente creciente. La curva crece hasta un estado absorbente, el 11...11 evolucionando hasta una densidad  $\rho_{\infty} = 1$  para una  $\rho(0) = 1$ . Tal es el caso de algunos ACTs clase 1 (54, 60 y 62).
- La densidad al infinito oscila alrededor de un valor  $\rho_{\infty}$  constante para cualquier  $\rho(0)$ , es decir el valor de la densidad al infinito no depende del valor de la densidad inicial. Este comportamiento de la densidad se observa en todos los ACTs clase 3 (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30, 34, 38, 42, 44, 46 y 50).

En síntesis podemos afirmar que si la densidad al infinito es monótona con crecimiento o decrecimiento rápido a 1 o 0 respectivamente, entonces el ACT pertenece a la clase 1.

Si el ACT es clase 3 entonces su densidad al infinito no depende de la densidad del estado inicial.

Si el ACT es clase 4, entonces no tiene sentido hablar de su densidad pues se debería definir en función de un periodo totalmente aleatorio pues sus configuraciones, en algunos casos se anulan después de algunos pasos temporales.

De la clase 2 no se puede enunciar nada específico pues esta clase presenta todos los tipos de comportamiento anteriormente señalados, por un lado y por otro, muestran densidades que varían según si el período par o impar. Es debido a esta razón que no es posible hacer una aseveración como las anteriores para las clase 1 y 3. Así que la densidad al infinito, para estos ACs debe ser redefinida en términos de su periodicidad quizá mediante un cociente de la densidad definida en la ec. (7) y su periodicidad.

- Las densidades al infinito decrecen rápidamente a cero y presentan un tiempo transitorio grande. Este comportamiento se observa en algunos ACTs legales clase 1 (0, 4, 16, 32, 36 y 48).
- La densidad al infinito tiene un comportamiento absolutamente creciente. La curva crece hasta un estado absorbente, el 11...11 evolucionando hasta una densidad  $\rho_{\infty} = 1$  para una  $\rho(0) = 1$ . Tal es el caso de algunos ACTs clase 1 (54, 60 y 62).
- La densidad al infinito oscila alrededor de un valor  $\rho_{\infty}$  constante para cualquier  $\rho(0)$ , es decir el valor de la densidad al infinito no depende del valor de la densidad inicial. Este comportamiento de la densidad se observa en todos los ACTs clase 3 (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30, 34, 38, 42, 44, 46 y 50).

En síntesis podemos afirmar que si la densidad al infinito es monótona con crecimiento o decrecimiento rápido a 1 o 0 respectivamente, entonces el ACT pertenece a la clase 1.

Si el ACT es clase 3 entonces su densidad al infinito no depende de la densidad del estado inicial.

Si el ACT es clase 4, entonces no tiene sentido hablar de su densidad pues se debería definir en función de un periodo totalmente aleatorio pues sus configuraciones, en algunos casos se anulan después de algunos pasos temporales.

De la clase 2 no se puede enunciar nada específico pues esta clase presenta todos los tipos de comportamiento anteriormente señalados, por un lado y por otro, muestran densidades que varían según si el período par o impar. Es debido a esta razón que no es posible hacer una aseveración como las anteriores para las clase 1 y 3. Así que la densidad al infinito, para estos ACs debe ser redefinida en términos de su periodicidad quizá mediante un cociente de la densidad definida en la ec. (7) y su periodicidad.

### 3.2. Teoría de campo medio

Las características del análisis de la teoría de campo medio aplicadas a los ACTs son semejantes a las impuestas a los ACELMs, sólo difieren en el número de vecinos y de la función de asignación en sí misma. De igual forma que en el capítulo 1, sección 1.3, la densidad promedio se caracteriza, en forma equivalente por las probabilidades  $p$  y  $q = 1-p$ , de que un sitio tome el valor 1 o 0 respectivamente, las cuales se suponen independientes.

De la ecuación 19, se obtiene para estos ACs,

$$\Gamma(0 \rightarrow 1) = \bar{P} \circ (\bar{A} \wedge C) \text{ donde}$$

$$\bar{A} = 00001111000011110000111100001111$$

$$\Gamma(1 \rightarrow 0) = \bar{P} \circ (\neg \bar{A} \wedge \neg C)$$

en ambas ecuaciones el vector

$$\bar{P} = \left( \begin{array}{l} p^5, p^4q, p^4qp^3q^2, p^4qp^3q^2, p^3q^2, p^2q^3, p^4qp^3q^2, p^3q^2, p^2q^3, p^3q^2, p^2q^3 \\ p^2q^3, pq^4, p^4qp^3q^2, p^3q^2, p^2q^3, p^3q^2, p^2q^3, p^2q^3, pq^4, p^3q^2, p^2q^3, p^2q^3 \\ pq^4, p^2q^3, pq^4, pq^4, q^5 \end{array} \right)$$

El vector binario  $\bar{A}$  caracteriza ahora a las 32 combinaciones posibles de ceros y unos, asignando un 1 a aquellas que tienen un 0 en el sitio central y que por lo tanto pueden ser modificadas dependiendo del valor de sus vecinos en el paso temporal anterior. Al realizar la operación de conjunción con C, el número de código del ACT, se seleccionan sólo los valores locales para vecindades de 5 sitios con el adecuado valor del sitio central.

El vector  $\bar{P}$  tiene 32 componentes, las cuales indican las probabilidades para las 32 posibles vecindades de 5 sitios, suponiendo cada sitio independiente de tomar valores 1 con probabilidad  $p = \rho$  y de tener valor 0 con probabilidad  $q = 1 - p$ .

La densidad en el equilibrio se obtiene de la ecuación 20, donde resulta una ecuación polinomial, de 5o. grado como máximo, en  $\rho$  cuya raíz será el valor de la densidad al infinito.

Considérese el siguiente ejemplo para el código 10. Los resultados experimentales se encuentran reportados en el *apéndice F*.

Constrúyanse las siguientes tablas.

Tabla 6. Función de asignación para el ACT código 10

$S(x_i)$	$f(S(x_i))$
0	0
1	1
2	0
3	1
4	0
5	0

Tabla 7. Construcción del ACT código 10 en campo medio

$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$	$\bar{P}$	$\bar{A}$	$\bar{A}$	$f(S)$	$\bar{f}(S)$	$\bar{A} \wedge f$	$\bar{A} \wedge \bar{f}$
0	0	0	0	0	$q^5$	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	$pq^4$	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	$pq^4$	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	$p^2q^3$	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	$pq^4$	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	$p^2q^3$	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	$p^2q^3$	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	$p^3q^2$	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	$pq^4$	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	$p^2q^3$	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	$p^2q^3$	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	$p^3q^2$	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	$p^2q^3$	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	$p^3q^2$	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	$p^3q^2$	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	$p^4q$	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	$pq^4$	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	$p^2q^3$	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	$p^2q^3$	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	$p^3q^2$	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	$p^2q^3$	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	$p^3q^2$	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	$p^3q^2$	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	$p^4q$	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	$p^2q^3$	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	$p^3q^2$	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	$p^3q^2$	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	$p^4q$	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	$p^3q^2$	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	$p^4q$	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	$p^4q$	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	$p^5$	0	1	0	1	0	1

La *tabla 6* muestra la función de asignación para el ACT código 10 donde se asigna a cada renglón de la tabla, un 0 ó 1 según la descomposición binaria del número de código (de arriba, dígito menos significativo, a abajo dígito más significativo); para el cual representa la suma aritmética de los unos en cada vecindad dada.

De la *tabla 7* se observa que:

- La columna  $\vec{A}$  contiene un 1 para aquellas vecindades que tienen un 0 en el centro y que bajo el código evolucionan a un 1 y 0 en todos los demás sitios. Así, se observa que se seleccionan aquellas vecindades que tienen un 0 en el centro y evolucionan a 1. Si, ahora, se hace el producto escalar de  $\vec{A} \wedge f$  con  $\vec{P}$  se obtiene la probabilidad de pasar de 0 a 1. Entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(0 \rightarrow 1) &= \vec{P} \circ (01100000100100001001001000001000) \\ &= pq^4 + pq^4 + pq^4 + p^3q^2 + pq^4 + p^3q^2 + p^3q^2 + p^3q^2 \\ &= 4pq^4 + 4p^3q^2\end{aligned}$$

- El vector  $-\vec{A}$  selecciona las vecindades que tienen 1 en el centro,  $-f$  contiene 1 en los sitios en que el código da 0. Así, en este caso

$$\begin{aligned}\Gamma(1 \rightarrow 0) &= \vec{P} \circ (00000110000010010000110100000101) \\ &= p^2q^3 + p^2q^3 + p^2q^3 + p^4q + p^2q^3 + p^3q^2 + p^4q + p^4q + p^5 \\ &= 4p^2q^3 + 3p^4q + p^3q^2 + p^5\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene la ecuación de evolución

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= 4pq^4 + 4p^3q^2 - (4p^2q^3 + 3p^4q + p^3q^2 + p^5) \\ &= 4pq^4 + 4p^3q^2 - 4p^2q^3 - 3p^4q - p^3q^2 - p^5 = 0\end{aligned}\tag{31}$$

La densidad en equilibrio se obtiene a partir de la *ecuación 31*. Resolviendo esta ecuación<sup>3</sup>, teniendo en cuenta la condición de normalización  $p+q=1$  se obtiene el valor  $p = 0.4738$ .

El resultado experimental para el ACT 10 es  $\rho_e = 0.4662 \pm 0.0139$  el cual, dentro de la incertidumbre experimental, concuerda con el resultado.

La gráfica de la *figura 26*, muestra a  $\rho_e$  como función de la densidad inicial, para este ACT y se observa que el resultado final está de acuerdo al resultado previsto por la teoría de campo medio.

<sup>3</sup> La solución de las ecuaciones de quinto grado se obtuvo mediante un método numérico implementado en el programa computacional para matemáticas EUREKA. En el apéndice D se muestra el programa y el resultado correspondiente al ACT 10.

Los valores previstos por esta teoría para los 16 códigos legales clase 3 se muestran en el *apéndice F*, en el cual se observa que los ACT's 10, 12 y 18 coinciden con los resultados obtenidos en forma experimental.

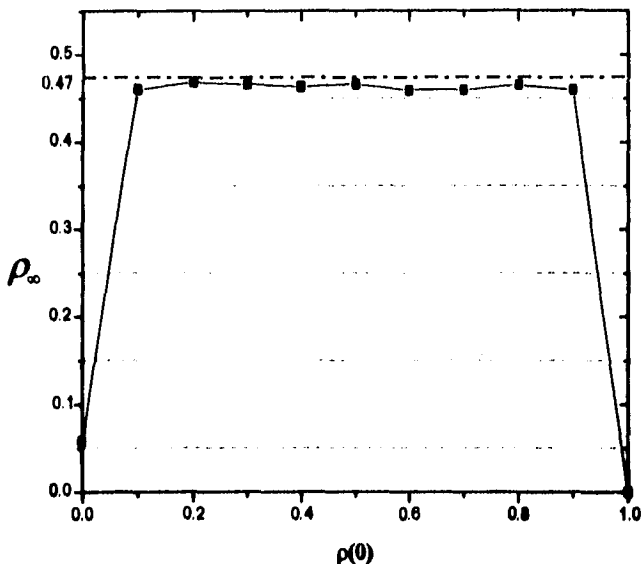


Figura 26. Gráfica de densidad al infinito contra densidad inicial  $\rho(0)$ , para el ACT 10. El experimento se efectuó en una red de 8192 sitios para 300 pasos temporales. La línea punteada representa al valor obtenido mediante la aplicación de la teoría de campo medio, adáese la aproximación al valor experimental.

El análisis de resultados para las densidades, corresponde a los resultados experimentales para algunos códigos de ACT esto nos permite hacer predicciones para estos ACT's clase 3. Las discrepancias observadas en el resto de los valores de las densidades de campo medio para el resto de los ACT's clase 3, son el reflejo de la presencia de correlaciones inducidas en la evolución del ACT. El estudio de las correlaciones, se presenta en el siguiente apartado.

### 3.3. Función de correlación

La evolución espacio-temporal de los ACTs produce correlación entre valores en diferentes sitios. La más simple de estas correlaciones es la espacial entre 2 puntos definida en la ec. (8).

La figura 27 muestra la función de correlación espacial  $C_e(r)$  con  $r \in [0,40]$  y  $t=500$ , para el ACT 18 a partir de un estado inicial al azar con una densidad de 0.5 en una red de 8192 celdas.

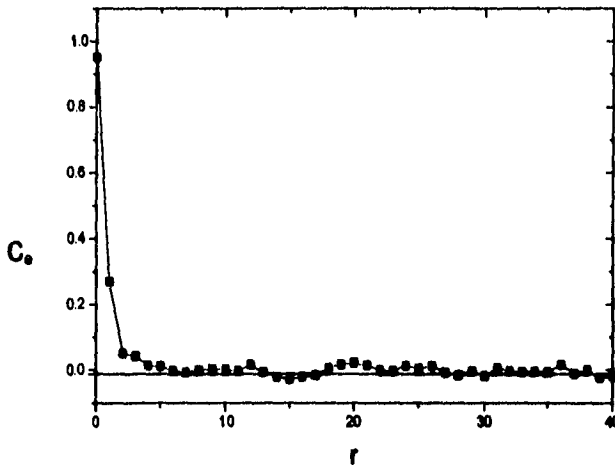


Figura 27. Función de correlación espacial  $C_e$  para el ACT 18 con  $r \in [0,40]$  y  $t=500$ , a partir de un estado inicial al azar. Con una densidad de 0.5. En una red de 8192 celdas

A partir de un estado inicial de sitios con valor 1 colocados al azar en la red en el paso  $t=0$ , la evolución de los ACTs clase 3, dan como resultado configuraciones con una función de correlación espacial la cual siempre tiende rápidamente a cero; tal es el caso de los ACTs 14 y 28. Para códigos clase 1 y 2, se alcanza una correlación de corto rango, i.e. para  $r \leq 5$ , la función de correlación espacial  $C_e(r) \neq 0$ , pero invariabilmente todas ellas oscilan para  $r > 5$ , en un intervalo muy pequeño alrededor del cero. En la figura 28 se muestra en la gráfica de la función de correlación espacial para el ACT 2 con  $r \in [0,40]$  y  $t = 500$  pasos temporales, con una densidad inicial de 0.5.

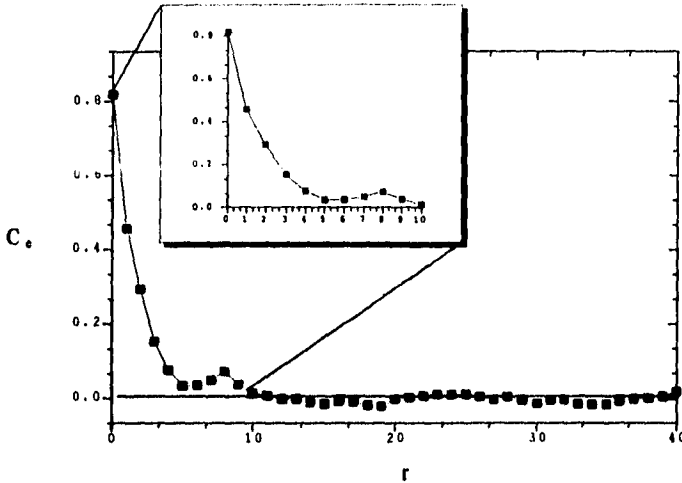


Figura 28. Gráfica de la función de correlación espacial para el ACT 2 con  $r \in [0,40]$  y  $t = 500$  pasos temporales, con una densidad inicial de 0.5.

La existencia de una longitud de correlación no nula, aunque de rango pequeño en algunos de estos autómatas, es un indicador de la generación de "orden" a partir de una configuración inicial al azar a través de su evolución espacio-temporal.

La evolución de los ACTs genera patrones espacio-temporales sumamente complejos con estructuras distintivas; así la densidad promedio a tiempos largos y la función de correlación entre 2 puntos resultan ser, como elementos de cuantificación de las características estadísticas del espacio de configuraciones, un poco "burdas", dado que configuraciones individuales parecen tener secuencias largas de sitios correlacionados; puntualizados por regiones desordenadas.

Al igual que para los ACELMs, se obtienen resultados específicos para cada una de las 4 clases definidas por Wolfram.

- Para las clases 1 y 2, la función de correlación espacial se hace cero más allá de una distancia crítica  $r \geq 5$ .
- En la clase 3, las funciones de correlación, tienen un decrecimiento que tiende a cero muy rápidamente, con la distancia  $r$ , salvo el caso especial del ACT 2 para el cual la distancia crítica es  $r \geq 10$ .
- Para la clase 4, la correlación a gran distancia se caracteriza por estructuras que se propagan en forma persistente las cuales decrecen lentamente.



### 3.4. Crecimiento de los defectos.

En la ref. [24], se muestran los patrones experimentales generados por la evolución de un daño en el espacio de configuraciones de los ACTs a partir de estados al azar, obtenidas mediante evolución. La falta de simetría, en algunos de los patrones, es el reflejo de la dependencia o correlación de los valores de múltiples sitios iniciales.

En éstos ACs se observa cualquiera de los siguientes comportamientos, en su distancia de Hamming:

- Para ACTs clases 1 y 2 (0, 4, 16, 32, 36, 48, 54, 60 y 62), las diferencias parecen localizadas en unos cuantos sitios y la distancia de Hamming tiende rápidamente a cero.
- Para ACTs clase 3 (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 34, 38, 44, 46 y 50) y algunos ACTs clase 2 (56, 24 y 40), la diferencia entre configuraciones sólo depende de la diferencia entre las condiciones iniciales. Un cambio en el valor de un pequeño número de sitios iniciales es amplificado por la evolución de un ACT y tiende a configuraciones con un incremento lineal, salvo de pequeñas fluctuaciones, en el número de sitios esencialmente incorrelacionados; tendiendo a tiempos largos a la forma

$$H \approx mt \quad (25)$$

lo cual era de esperarse, puesto que de las definiciones del vector  $\vec{z}(t)$  (c.f. cap. 2. sec. 2.4.) se observa que

$$0 \leq H \leq 2rt + 1$$

En la figura 29, se muestra un ajuste de una recta a la gráfica de la distancia de Hamming contra  $t$  para el ACT código 2. El valor para la pendiente de la recta, resultado de la aplicación de una regresión lineal a los datos, es de 0.6223 el cual es reportado como  $m$  en la tabla 13, del apéndice E.

Dos casos especiales son las gráficas de las distancias de Hamming para los ACTs 30 y 42 dado que tienen un comportamiento semejante a las de los ACELMs aditivos, las cuales muestran picos que se repiten a intervalos regulares, indicando que forman estructuras autosimilares. En la figura 30 se muestra la gráfica de la distancia de Hamming contra tiempo para el ACT 30. El experimento se efectuó en una red grande a partir de una densidad de 0.5. En el apéndice E, se muestran los resultados para el cálculo de las pendientes de los ajustes a las gráficas de los ACT Clase 3, de esta misma clase, los cuales se reportan como distancia de Hamming.

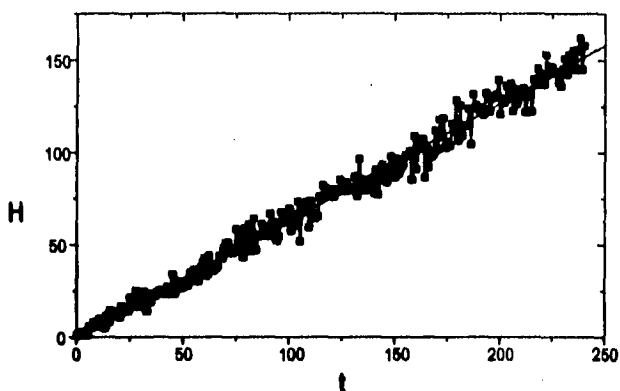


Figura 29. Ajuste de una recta a la gráfica de la distancia de Hamming para el ACT código 2. El valor para la pendiente de la curva, a la cual se le aplicó una regresión lineal, es de 0.6223. El experimento se realizó en una red grande a partir de una densidad de 0.5 y 15 repeticiones del experimento computacional.

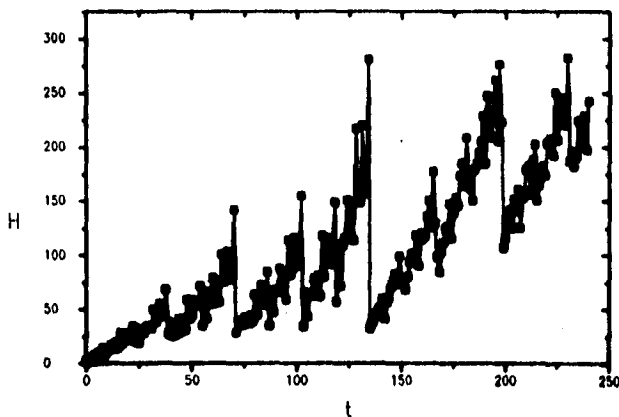


Figura 30. La gráfica de las distancia de Hamming para el ACT 20, clase 2, tiene un comportamiento semejante a lo de un ACELMI aditivo, lo cual muestra picos que se repiten a intervalos regulares. El experimento se efectuó en una red grande a partir de una densidad de 0.5 y 15 repeticiones del experimento computacional.

### 3.5. Entropía de bloque

La entropía de un sistema mide el grado de desorden del mismo. Si la entropía es baja el desorden está concentrado en unos pocos bloques de sitios. Este puede, sin embargo, estar por otro lado, concentrado en varios conjuntos (bloques) alejados unos de otros.

La entropía de bloque queda especificada por la ec. (11). En general, la entropía de bloque da el promedio "del contenido de información" por sitio computado mediante la obtención de correlaciones en bloques de longitud  $b^{(26)}$ .

A efecto de analizar el comportamiento de la entropía de bloque en los ACT, se realizaron simulaciones del proceso evolutivo de los 16 códigos clase 3, efectuando el experimento para 50 repeticiones y posteriormente promediar sobre el conjunto representativo. Las condiciones iniciales impuestas a cada uno de los ACT fueron:

1. Densidades iniciales, para sitios con valor 1 tomados aleatoriamente, con valor  $\rho(0) = 0.5$ .
2. Redes de 4096 sitios.
3. Tiempos de evolución de 2000 pasos.
4. Longitudes de bloque en el intervalo  $b \in [3, 16]$  con  $b \in \mathcal{N}$ .

Conforme aumenta el tamaño del bloque, la entropía decrece rápidamente para todas las configuraciones de los ACT clase 3, los cuales posteriormente, suponemos, alcanzan valores de "equilibrio", según se muestra en la figura 31 para el caso particular del ACT 30. Este decrecimiento de la entropía con el tiempo, es un reflejo de la naturaleza irreversible de la evolución del ACT.

Los valores de  $S_b$ , decrecen aproximadamente en forma exponencial, con el tamaño de  $b$ , permitiendo identificar algunas cotas superiores para  $S$  conforme  $b$  aumenta (c.f. apéndice E). La definición de  $S_b$  implica que su máximo valor de 1, se da solamente cuando todas las posibles secuencias de sitios ocurren con igual probabilidad y  $S = 0$  si y solo si un número finito de configuraciones completas ocurre. En la figura 32, se muestra un espectro para las entropías para 6 ACTs clase 3. El experimento se efectuó en redes de 4096 sitios y tiempos de evolución de 2000 pasos, a partir de estados iniciales con densidades de 0.5. Al igual que para los ACELMs el valor de la entropía no se ve afectado por los cambios en la densidad inicial, mostrando, aproximadamente, el mismo valor de  $S_b$  para cualquier densidad inicial.

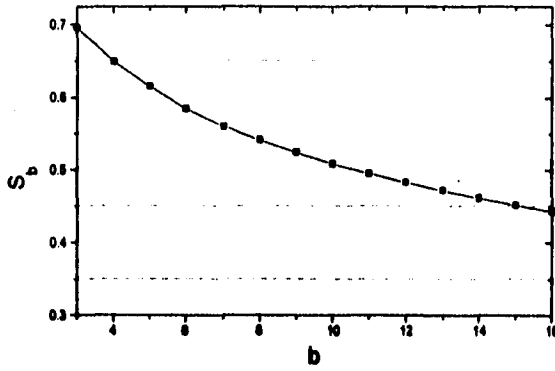


Figura 31. Decremento asintótico de la entropía de bloques para los ACTs clase 3. En la figura se muestra la gráfica de entropía contra longitud de bloques para el ACT código 30. El experimento se efectuó en una red de 4096 sitios para un tiempo de evolución de 2000 pasos temporales y a partir de una densidad inicial de 0.5.

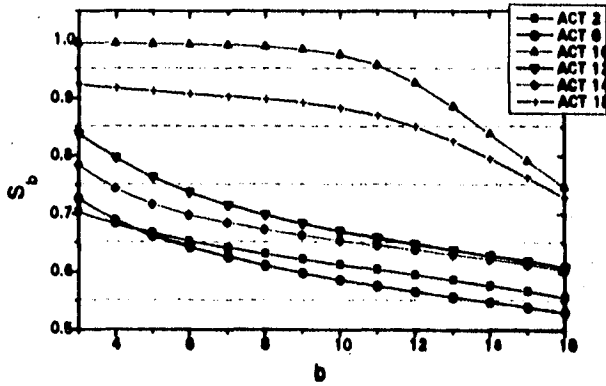


Figura 32. Espectro para las entropías de los ACTs 2, 6, 10, 12, 14 Y 16 clase 3. El experimento se efectuó en redes grandes y tiempos de evolución largos a partir de estados iniciales con densidades de 0.5. Todos los ACTs clase 3 presentan un comportamiento decreciente.

Como una aproximación teórica al valor experimental de la entropía, se puede efectuar un análisis de campo medio. Esta teoría se desarrolla de la siguiente forma. De la tabla 7, en la columna marcada con  $\bar{P}$  se tienen las probabilidades para las 32 posibles vecindades de 5 sitios, suponiendo cada sitio independiente de tomar valores 1 con probabilidad  $p$  y de tener valor 0 con una probabilidad  $q = 1 - p$  y de la definición de entropía de bloque, ec. (11), se tiene:

$$S_b = -\frac{1}{b \ln 2} S'$$

donde, para efectos de cálculo se define a

$$S' = \sum_{i=0}^{2^b-1} p_i \ln p_i$$

de la definición anterior, para un bloque  $b = 5$ , se tiene que

$$\begin{aligned} S' &= q^5 \ln q^5 + 5q^4 p \ln q^4 p + 10q^3 p^2 \ln q^3 p^2 + 10q^2 p^3 \ln q^2 p^3 + 5q p^4 \ln q p^4 + p^5 \ln p^5 \\ &= 5q^4 \ln q + 20q^4 p \ln q + 5q^4 p^2 \ln p + 30q^3 p^2 \ln q + 20q^3 p^3 \ln p + 20q^2 p^3 \ln q + \\ &\quad 30q^2 p^4 \ln p + 5q p^4 \ln q + 20q p^4 \ln p + 25p^4 \ln p \\ &= \ln q [5q^4 + 20q^4 p + 30q^3 p^2 + 20q^2 p^3 + 5q p^4] + \ln p [5q^4 p + 20q^3 p^2 + 30q^2 p^3 + 20q p^4 + 5p^5] \\ &= 5q [q^4 + 4q^3 p + 6q^2 p^2 + 4q p^3 + p^4] \ln q + 5p [q^4 + 4q^3 p + 6q^2 p^2 + 4q p^3 + p^4] \ln p \end{aligned}$$

pero

$$(p + q)^4 = 1$$

Así que

$$\begin{aligned} S' &= 5q \ln q + 5p \ln p \\ &= 5[q \ln q + p \ln p] \end{aligned}$$

Finalmente se tiene el valor de la entropía de bloque

$$S_b = -\frac{1}{b \ln 2} S' = -\frac{5}{5 \ln 2} [q \ln q + p \ln p] = -\frac{1}{\ln 2} [q \ln q + p \ln p]$$

Como se puede observar, se obtiene el mismo resultado que en la ec. (23), para el caso de los ACELMs.

En la tabla 9 se muestran, en forma comparativa, los valores de la entropía de bloque obtenidos a partir de la teoría de campo medio y los obtenidos en forma experimental, para una longitud de bloque 5.

**Tabla 9. Entropía de campo medio para ACT Clase 3 (b = 5).**

ACT (Clase 3)	Valor Experimental	Campo Medio	Error relativo (%)
2	0.666988	0.916147	37.36
6	0.661635	0.999563	51.07
10	0.992777	0.988333	0.45
12	0.762036	0.984864	29.24
14	0.715741	0.958112	33.86
18	0.911234	0.895582	1.72
22	0.960074	0.982327	2.32
26	0.924403	0.901642	2.46
28	0.711532	0.813332	14.31
30	0.615106	0.809370	31.58
34	0.666959		
38	0.662569		
42	0.992814		
44	0.76281		
46	0.716262		
50	0.909816		

Las celdas vacías, indican casos en los que no es posible obtener mediante la teoría de campo medio un valor determinado debido a que el valor obtenido, para p es 1.

## CAPITULO 4

### CRECIMIENTO DE DEFECTOS Y EXPONENTES DE LYAPUNOV MÁXIMOS EN ACs DE ALCANCE 1 Y 2

En la primera sección, del presente capítulo, se da una definición de exponentes de Lyapunov máximos evaluándolos para ACELMs y ACTs. En esta misma sección, se describe la caracterización del crecimiento de un defecto introducido en un punto en la red de ACELMs y ACTs mediante el análisis de las derivadas Booleanas. Finalmente se muestra una analogía en la forma en como un defecto se propaga con una clase de problema de percolación dirigida

#### 4.1 Definiciones

En el contexto espacio-temporal de un AC y sus variables dinámicas, no es posible extender directamente la definición de exponentes de Lyapunov debido al rango de interacción  $r$  y al número de estados de las variables  $x_i$  los cuales son discretos.

En lugar de investigar el comportamiento a tiempos largos entre dos configuraciones, se hace uso de la teoría de sistemas dinámicos y se analiza la estabilidad local de una sola trayectoria con respecto a una pequeña perturbación en la configuración.

En sistemas dinámicos continuos, el exponente de Lyapunov máximo (ELM) indica la tasa de separación exponencial entre dos trayectorias inicialmente muy cercanas donde la distancia se mide en el espacio tangente. El valor del ELM es el mismo para cualquier estado sobre la misma trayectoria, pero puede ser diferente para trayectorias distintas.

Las características cualitativas de las propiedades de estabilidad local asintótica se pueden resumir en el signo de cada exponente de Lyapunov. Si  $\lambda > 0$  indica una dirección inestable, en este caso se dice que hay sensibilidad respecto a las condiciones iniciales y puede haber caos. Si  $\lambda < 0$ , indica una dirección estable. Estos conceptos se discuten enseguida.

---

#### Definición

*Estabilidad es una palabra genérica que se relaciona a la respuesta, de un sistema, a una perturbación. Si la perturbación es amplificada, dando como resultado un cambio considerable en el sistema, i.e. el daño se disemina, se dice que el sistema es inestable. Por otro lado, si la perturbación es abatida, dando como resultado un decrecimiento exponencial a cero, entonces se dice que el sistema es estable. El caso intermedio, donde la*

perturbación persiste aproximadamente como se introdujo inicialmente al sistema, se habla entonces de estabilidad marginal<sup>[7]</sup>.

La palabra estabilidad se usa en diferentes contextos:

- Primero, la estabilidad bajo todas las perturbaciones posibles, de cualquier tamaño, aplicables al sistema; se denomina estabilidad absoluta. La estabilidad es, por lo general, analizada vía expansión de términos de una serie de Taylor<sup>[7]</sup>. La estabilidad lineal es analizada cuando se rechazan los términos de orden mayor al primero.
- Segundo, la estabilidad es aplicable a varios aspectos de un sistema dinámico. Esta se puede referir a puntos individuales (estabilidad local), a trayectorias (estabilidad local asintótica), a familias de trayectorias (atractores) ó a un sistema dinámico completo.

En sistemas dinámicos, en muchas ocasiones, es de interés conocer que es lo que sucede, en el sistema, después de que ha transcurrido un tiempo suficientemente largo, es decir cuando dejan de existir tiempo transitorio de corto plazo de forma tal que el sistema exhiba su comportamiento "típico".

## 4.2 Exponentes de Lyapunov máximos para ACELMs

En el estudio de la sensibilidad respecto a las condiciones iniciales, considerando la evolución temporal de dos configuraciones cercanas, está determinado por la distancia de Hamming; en la cual se cortó la serie de Taylor ec. (18) a primer orden por lo que se podía escribir

$$z(t+1) \approx F'(t)z(t) \quad (26)$$

donde  $F'$  es la matriz Jacobiana de  $F$  cuyos elementos son las primeras derivadas booleanas parciales, c.f. apéndice A. Para ACEs la matriz Jacobiana es una matriz de Jacobi con

$$F'_{i,j} = 0 \quad \text{si } |i - j| > 1 \text{ .y}$$

$$F'_{i,i} = f'_i(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

$$F'_{i,j} = f'_0(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \quad (27)$$

$$F'_{i,i+1} = f'_1(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \text{ con } i = 0, \dots, L-1$$

En la ec. (26) la multiplicación del vector  $z(0)$  por la matriz  $F'$  es booleana (la suma y producto usuales entre un vector y una matriz son reemplazados por la conjunción y la disyunción exclusiva respectivamente). La norma de  $z$  usada en la ec. (26) está acotada por  $(2r+1)$ .

### 4.2.1 Crecimiento de defectos en términos de la derivada booleana



perturbación persiste aproximadamente como se introdujo inicialmente al sistema, se habla entonces de estabilidad marginal<sup>[7]</sup>.

La palabra estabilidad se usa en diferentes contextos:

- Primero, la estabilidad bajo todas las perturbaciones posibles, de cualquier tamaño, aplicables al sistema; se denomina estabilidad absoluta. La estabilidad es, por lo general, analizada vía expansión de términos de una serie de Taylor<sup>[7]</sup>. La estabilidad lineal es analizada cuando se rechazan los términos de orden mayor al primero.
- Segundo, la estabilidad es aplicable a varios aspectos de un sistema dinámico. Esta se puede referir a puntos individuales (estabilidad local), a trayectorias (estabilidad local asintótica), a familias de trayectorias (atractores) ó a un sistema dinámico completo.

En sistemas dinámicos, en muchas ocasiones, es de interés conocer que es lo que sucede, en el sistema, después de que ha transcurrido un tiempo suficientemente largo, es decir cuando dejan de existir tiempo transitorio de corto plazo de forma tal que el sistema exhiba su comportamiento "típico".

## 4.2 Exponentes de Lyapunov máximos para ACELMs

En el estudio de la sensibilidad respecto a las condiciones iniciales, considerando la evolución temporal de dos configuraciones cercanas, está determinado por la distancia de Hamming; en la cual se cortó la serie de Taylor ec. (18) a primer orden por lo que se podía escribir

$$z(t+1) \approx F'(t)z(t) \quad (26)$$

donde  $F'$  es la matriz Jacobiana de  $F$  cuyos elementos son las primeras derivadas booleanas parciales, c.f. apéndice A. Para ACEs la matriz Jacobiana es una matriz de Jacobi con

$$F'_{i,j} = 0 \quad \text{si } |i-j| > 1 \text{ .y}$$

$$F'_{i,i} = f'_-(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

$$F'_{i,i} = f'_0(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \quad (27)$$

$$F'_{i,i+1} = f'_+(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \text{ con } i = 0, \dots, L-1$$

En la ec. (26) la multiplicación del vector  $z(0)$  por la matriz  $F'$  es booleana (la suma y producto usuales entre un vector y una matriz son reemplazados por la conjunción y la disyunción exclusiva respectivamente). La norma de  $z$  usada en la ec. (26) está acotada por  $(2r+1)x$ .

### 4.2.1 Crecimiento de defectos en términos de la derivada booleana

Sean, ahora,  $N_i(t)$  el número de réplicas que contienen el defecto  $Z_i(t)$  al tiempo  $t$ , es decir,  $N_i(t)$  indica de cuantas maneras puede haber un daño en el sitio  $i$  al tiempo  $t$ . Si, por ejemplo, se inicia al tiempo cero con solamente un defecto en algún sitio  $i$  ( $N_i(0) = 1$ ) y la regla permite el espaciamiento de los defectos a los sitios de la vecindad en cada paso temporal; entonces para

$$t = 0 \mapsto \mathbf{N}(0) = (N_1(0), \dots, N_L(0)) \quad \text{con } N_j = d_{ij}, j = 1, \dots, L$$

$$t = 1 \mapsto N_{i-1} = N_i = N_{i+1} = 1$$

$$t = 2 \mapsto N_{i-2} = N_{i+2} = 1, N_{i-1} = N_{i+1} = 2, N_i = 3,$$

⋮

etc.

## **Definición**

La evolución temporal del número de defectos para un sitio fijo  $i$  está dada por el mapeo

$$N_i(t+1) = \sum_j F'_{ij}(t) N_j(t) \quad (28)$$

o en forma matricial

$$\mathbf{N}(t+1) = \mathbf{F}' \mathbf{N}(t) \quad (29)$$

con la multiplicación usual de un vector por una matriz y los elementos de  $\mathbf{F}'$  son interpretados como números enteros.

En la figura 33, se muestra la evolución de  $\mathbf{N}$  para el ACT 150 con  $t \leq 2$ . Las líneas oscuras muestran las derivadas Booleanas. Los números representan las componentes  $N_j(t)$  de  $\mathbf{N}(t)$ . Auxiliándonos por esta figura, notamos que la componente  $N_j(t)$  es el número de trayectorias en el espacio de defectos los cuales alcanza el sitio  $i$  al tiempo  $t$ , i.e. el número de formas en las cuales el sitio  $i$  puede ser dañado al tiempo  $t$  empezando desde cualquier defecto al tiempo  $t = 0$ . Este ejemplo es particularmente simple puesto que las tres primeras derivadas parciales Booleanas son siempre 1 y las segundas y terceras son siempre 0 (la regla 150 es aditiva). Lo que es interesante, es que la norma de  $\mathbf{N}$  puede crecer exponencialmente.

De lo anterior se define el exponente de Lyapunov máximo según la ec. (13). Se observa de la fig. 33 que para el ACELM 150  $\|\mathbf{N}(t)\| = 3^t$  por lo que  $\lambda = \ln(3)$ .

La parte de interés se encuentra al estudiar la evolución de una pequeña perturbación inicial a lo largo de una trayectoria dada.

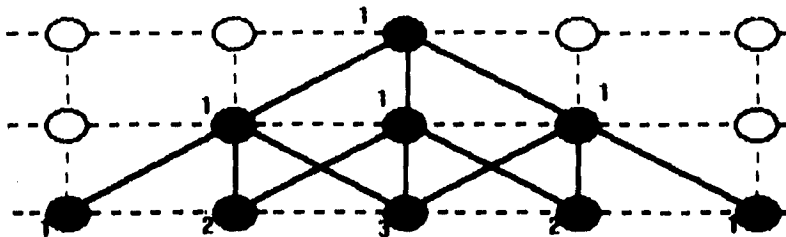


Figura 33. Evolución temporal de un defecto para el ACT 150 para  $t \leq 2$ . Las líneas oscuras muestran los sitios donde las derivadas parciales Booleanas son 1. Los números representan las componentes  $N_j(t)$  de  $N(t)$ .

### 4.3 Relación de los exponentes de Lyapunov máximos con la percolación de enlaces

Se observa que un defecto en un sitio  $i$  se disemina al tiempo  $t+1$  si al menos una de las derivadas parciales booleanas no es cero, así que se puede hacer una cierta analogía con un problema de percolación dirigida acotada de enlaces, en donde el sitio  $i$  "mojado" al tiempo  $t$  puede mojar a cada uno de sus 3 vecinos cercanos al tiempo  $t+1$  con probabilidad  $p$ <sup>[2]</sup>. Esta analogía se puede efectuar en la práctica mediante la sustitución de la matriz Jacobiana determinística  $F^*$  por una matriz aleatoria  $M_p$ , del mismo tipo<sup>[3]</sup>.

#### Definición

El arreglo  $M_p$  es una matriz aleatoria con componentes  $m_{ij}$ , de la forma

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i - j| \leq 1 \text{ con probabilidad } p \\ 0 & \text{si } |i - j| \leq 1 \text{ con probabilidad } 1 - p \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases} \quad (30)$$

Si durante la evolución, aparecen  $m$  defectos, se pueden considerar más réplicas del sistema y asignar uno de los defectos a cada una de ellas<sup>[4]</sup>. Es decir,  $m_{ij}$  es 1 con probabilidad  $p(1 - \rho)$  para  $j = i - r, \dots, i + r$  en donde  $i = 1, \dots, L$  y es cero fuera de las  $2r+1$  diagonales centrales.

Así

$$x_i(t+1) = M_p(t)x_i(t) \quad (31)$$

donde  $x_i(t)$  es 1 ó 0, si el sitio está "mojado" ó "seco" al tiempo  $t$ ,  $i = 1, \dots, L$ . En la ec. (31), las operaciones son Booleanas. Como antes, se puede escribir

$$N(t+1) = M_p N(t)$$

con operaciones algebraicas entre matrices y  $N_j(t)$  es el número de trayectorias que conectan los sitios iniciales "mojados" con el sitio  $j$  al tiempo  $t$ . Por otra parte es fácil ver, de lo anterior, que también es válido decir que un sitio mojado puede mojarse a sí mismo y a cualquiera de sus  $r$  vecinos más cercanos a la derecha y a la izquierda.

Las matrices  $M_p$  son matrices tridiagonales aleatorias que tienen una fracción  $p$  de elementos en las tres diagonales principales iguales a 1. Para poder hacer la analogía entre el crecimiento de los defectos en ACs y la percolación dirigida discutida brevemente, se interpreta a la cantidad  $p$  como la media geométrica  $\mu$ , para tiempos largos  $T$ , de la fracción de 1's en  $F^{(T)}$ , i.e.

### Definición

$$\mu(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \prod_{l=1}^T \frac{1}{(2r+1)L} \sum_{l=1}^L \sum_{k=-r}^r F_{l,l+k}(t) \right)^{1/T} \quad (32)$$

*La evolución del número de defectos en la aproximación mediante la matriz aleatoria define un problema de percolación dirigida acotada con parámetro de control  $p^{[3]}$ .*

Los resultados de la aproximación mediante producto de matrices aleatorias se encuentran reportados en la figura 34, donde la curva muestra la dependencia de  $\lambda$  para el producto de matrices  $M(p)$  como función de  $p$ . Para  $p < p_c$  con  $p_c$  la percolación crítica, la fracción de sitios mojados a tiempos largos es 0, mientras que es positiva para  $p > p_c$ . El valor que se encontró numéricamente es  $p_c = 0.441$ . Analicemos, en principio algunos casos simples. La regla 0, que mapea todas las configuraciones a la configuración  $\{0\}^L$ , tiene  $\lambda = -\infty$  debido a que su matriz Jacobiana tiene todas las entradas nulas. La regla 150 tiene  $\lambda = \log 3$ , debido a que todas sus derivadas Booleanas son iguales a uno. Un caso de estabilidad marginal es la regla 204, para la cual  $F'$  es la matriz identidad y  $\lambda = 0$ .

Para todos los ACELMs, se obtuvo el número medio de unos  $\mu(t)$  en la matriz Jacobiana Booleana y el ELM para un tiempo finito con  $L = 512$  y  $5000 \leq t \leq 15000$  iniciando desde un estado desordenado con una densidad inicial de 0.5. Las cantidades  $\mu(t)$  y  $\lambda(t)$  son casi asintóticas para  $t \approx 500$ ; por otro lado se observa que muestran una dependencia de la densidad para valores  $0.2 \leq \rho(0) \leq 0.8$ . Dada la naturaleza discreta del espacio de configuraciones puede no haber estados "ceranos" que permitan el paso a un estado más estable por lo que la introducción de un daño puede proveer el camino a dicho estado. Notamos que los ACELMs clase 3 se ven afectados por el daño y que los valores encontrados están cerca de los encontrados para el producto de matrices aleatorias. En general se tiene que:

1. Los ACELMs 90, 150 clase 3 y el 204 clase 2 con  $F'$  constante independiente de la configuración, tienen  $\lambda = \log 3 \mu$  con  $\mu = \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}$  respectivamente.

2. Todos los ACELMs clase 1 (4, 32, 128, 160) tienen  $\lambda = -\infty$  para el parámetro de control  $\mu = 0$ .
3. Los ACELMs clase 3 con  $F^0$  no constante (18, 22, 54, 122, 126, 146) tienen un valor de  $\mu > p_c$ ,  $\lambda > 0$  y un esparcimiento del daño.

Los valores de los ELM para los ACELMs de los casos 1 y 3 coinciden con la aproximación de matrices aleatorias, según se muestra en la figura 34, aunque no se muestran los valores para todos los ACELMs clase 3. Esto también se cumple trivialmente para los ACELMs del caso 2.

En resumen, después de la introducción de un defecto en el espacio de configuraciones de los ACELMs, el comportamiento de su ELM puede ser dividido en 3 grupos:

1. El ELM  $\lambda = -\infty$ , dentro de este grupo se encuentran algunos ACELMs clase 2 (50, 72, 104, 178, 200 y 232). Las reglas 50 y 178 presentan un transiente muy largo del orden de 15000 pasos temporales. Estos ACELMs tienen una  $\mu$  pequeña en ausencia de "daño" ( $\mu < 0.373$ ).
2. El ELM  $\lambda > 0$ . Este grupo contiene a todos los ACELMs clase 3 (18, 22, 54, 90, 122, 126, 146, 150) y la regla 94 clase 2. Para estos ACELMs los valores de  $\mu$  y  $\lambda$  son afectados considerablemente por la introducción de un daño en la red. Los ACELMs de este grupo tienen  $\mu > p_c$ , y  $\lambda$  cercana a la curva prevista por la aproximación de la matriz aleatoria.
3. El ELM  $\lambda \approx 0$ , un valor que nunca se encuentra en el producto de matrices aleatorias. Los ACELMs de este grupo muestran un valor intermedio para  $\mu$  ( $0.281 < \mu < 0.54$  con ruido y  $\frac{1}{3} < \mu < p_c$  en ausencia de ruido). Contrariamente a la aproximación hecha mediante matrices aleatorias  $N$  no se anula para tiempos largos. Las reglas que corresponden a estas características son todos los ACELMs clase 1 (4, 32, 128, 160) y algunas reglas clase 2 (36, 76, 108, 132, 164, 204).

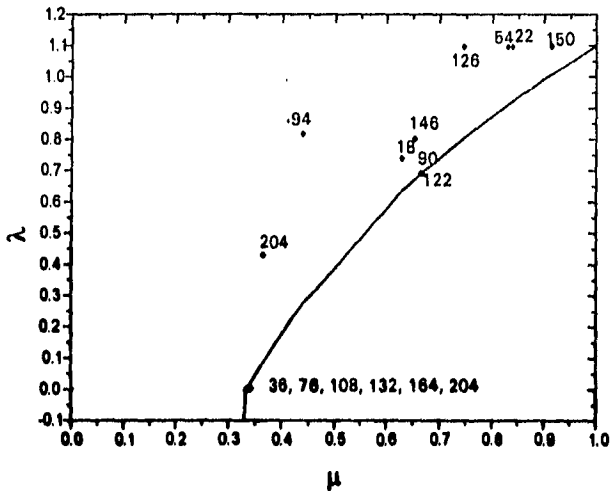


Figura 34. La curva muestra el ELM de una matriz tréngulo superior como una función de  $p$ . Los diamantes muestran el valor absoluto de  $\lambda$  para todos los ACELMs con  $\lambda \geq 0$ . Los resultados fueron obtenidos con  $t = 8000$ ,  $L = 513$  y  $\rho(0) = 0.5$

Para ACTs los resultados de la aproximación mediante producto de matrices aleatorias se encuentran reportados en la figura 35, donde la curva muestra la dependencia de  $\lambda$  para el producto de matrices  $M(p)$  como función de  $p$ . Para  $p < p_c$  con  $p_c$  la percolación crítica, la fracción de sitios "mojados" a tiempos largos es 0, mientras que es positiva para  $p > p_c$ . El valor encontrado numéricamente para  $p_c$  es 0.257. Para todos los ACTs, se obtuvo el número medio de unos  $\mu(t)$  en la matriz Jacobiana booleana y el ELM para un tiempo finito con  $L = 4096$  y  $500 \leq t \leq 1000$  iniciando desde un estado desordenado con una densidad inicial de 0.5. Notamos que los ACTs clase 3 se ven afectados por el daño y que los valores encontrados están cerca de los encontrados para el producto de matrices aleatorias.

En resumen, el comportamiento del ELM para ACTs puede ser dividido en 3 grupos:

1. El ELM  $\lambda = -\infty$ , dentro de este grupo se encuentran algunos ACTs clase 2 (24, 40, 56 y 58). Estos ACTs tienen una  $\mu$  pequeña en ausencia de "daño".
2. El ELM  $\lambda > 0$ . Este grupo contiene a todos los ACTs clase 3 (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30, 34, 38, 42, 44, 46 y 50). Para estos ACTs los valores de  $\mu$  y  $\lambda$  son afectados considerablemente por la introducción de un daño en la red. Los ACTs de este grupo tienen  $\mu > p_c$  y  $\lambda$  cercana a la curva prevista por la aproximación de la matriz aleatoria.

3. El ELM  $\lambda \approx 0$ , un valor que nunca se encuentra en el producto de matrices aleatorias. Los ACTs de este grupo muestran un valor intermedio para  $\mu$ . El valor de  $N$  no se anula para tiempos largos. Las reglas que corresponden a estas características son los ACTs clase 1 (4, 16, 32, 36, 48, 54, 60 y 62), algunas reglas clase 2 (8, 56, 58), y los dos ACTs clase 4 (20 y 52).

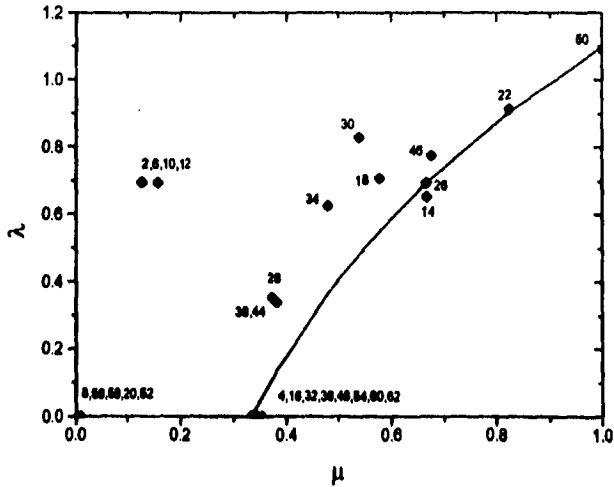


Figura 35. La curva muestra el ELM de una matriz tridiagonal como una función de  $p$ . Los diamantes muestran el valor asintótico de  $\lambda$  para todos los ACTs con  $\lambda \geq 0$ . Los resultados fueron obtenidos con  $t = 1000$ ,  $L = 4096$  y  $\rho(0) = 0.5$

## CONCLUSIONES GENERALES

De acuerdo a los resultados obtenidos a partir del análisis de resultados y aproximaciones de campo medio, de cada una de las cantidades estadísticas medidas, podemos concluir que respecto a la

### DENSIDAD A TIEMPOS LARGOS.

#### ACELMs

- Para ACELMs clase 3 (18, 22, 54, 90, 122, 126, 146, 150); la densidad al infinito oscila alrededor de un valor constante; es decir, para tiempos largos la densidad al infinito no depende del valor de la densidad inicial, manteniendo un comportamiento que tiene la misma  $\rho_{\infty}$  para cualquier  $\rho(0)$ .
- Para los ACELMs 32, 128 y 160; la densidad al infinito tiene un valor nulo.

Los ACELMs clase 3 tienen una  $\rho_{\infty}$  que no depende de  $\rho(0)$ , si  $\rho(0)$  no es muy grande ni muy pequeña. Los ACELMs de clase 1 van a un estado homogéneo y por lo tanto su densidad al infinito es 1 o 0 trivialmente. Para los ACELMs clase 2 no se puede definir la densidad a tiempos largos, nuevas definiciones de la densidad son tema de futuras investigaciones.

#### ACT Legales

- En los ACTs legales clase 1 (0, 4, 16, 32, 36 y 48); las densidades al infinito decrecen rápidamente a cero y presentan un tiempo transitorio grande (c.f. pie de pág. 44).
- Para el ACT 26, clase 3 y los dos ACTs 20 y 52, clase 4; la densidad a tiempos largos, tienen un comportamiento monótono creciente, es decir la curva crece hasta un punto de inflexión central medio, para posteriormente evolucionar hasta una densidad  $\rho_{\infty} = 1$  para una  $\rho(0) = 1$ .
- En todos los ACTs clase 3 (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30, 34, 38, 42, 44, 46 y 50); la densidad al infinito oscila alrededor de un valor  $\rho_{\infty}$  constante para cualquier  $\rho(0)$ , es decir el valor de la densidad al infinito no depende del valor de la densidad inicial.

En síntesis podemos afirmar que si la densidad al infinito es monótona con crecimiento o decrecimiento rápido a 1 o 0 respectivamente, entonces el ACT legal pertenece a la clase 1.

Si el ACT es clase 3 entonces su densidad al infinito no depende de la densidad del estado inicial siempre y cuando  $\rho(0)$  no sea muy grande ni muy pequeña.

Si el ACT es clase 4, entonces su densidad al infinito es absolutamente creciente.

Al igual que para los ACELMs, para los ACTs clase 2 no se puede enunciar nada específico pues esta clase presenta varios tipos de comportamiento, creando la necesidad de redefinir la densidad, lo cual es tema de una futura investigación.



## TEORÍA DE CAMPO MEDIO

### **ACELMs**

La teoría de campo medio aproxima bien, con un error relativo porcentual máximo del 34%, al valor de  $\rho_c$  para casi todos los ACELMs clase 3: 18, 22, 54, 90, 122, 126 y 150. Esto nos permite hacer predicciones para algunas de estas reglas. Sin embargo, las discrepancias son el reflejo de la presencia de correlaciones inducidas en la evolución del ACELM.

### **ACT legales**

El análisis de resultados para las densidades, corresponde a los resultados experimentales para algunos códigos de ACT esto nos permite hacer predicciones para ACTs clase 3 (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30, 44 y 46), para los cuales se obtienen densidades que difieren a lo sumo en un 67% del resultado experimental. Sin embargo para los ACTs clase 3 restantes (34, 38, 42, y 50) la teoría muestra errores relativos porcentuales mayores al 100%; estas discrepancias son el reflejo de la presencia de correlaciones de corto alcance inducidas en la evolución de estos ACTs.

## CORRELACIÓN

### **ACELMs y ACTs legales**

Existe tanto para ACELMs como para ACTs legales una longitud de correlación no nula de corto alcance. Esto indica un "orden" a partir de una configuración al azar a través de la evolución de la estructura espacio temporal generada por estos ACs.

Sin embargo, la función de correlación entre dos puntos resulta ser un poco "burda" como medida estadística, pues configuraciones individuales parecen tener secuencias de sitios correlacionados, en un rango corto; puntualizados por regiones desordenadas. En este sentido, no es factible una caracterización específica solamente a partir del comportamiento de la función de correlación. Para todas las clases, definidas por Wolfram, la función de correlación oscila alrededor del cero en un intervalo muy pequeño para valores más allá de una distancia crítica  $r > 5$ .

## CRECIMIENTO DE DEFECTOS

### **ACELMs**

Se observa que los ACELMs son muy sensibles a una pequeña perturbación en una región localmente limitada. Se distinguen 3 casos mutuamente exclusivos del crecimiento del defecto en la red:

- A. La diferencia obtenida después de  $t$  pasos temporales,  $\bar{z}(t)$ , está dada por la evolución del mismo ACELM, pero como si éste evolucionara desde un estado inicial de un solo sitio con valor 1. Así, la distancia de Hamming en el paso temporal  $t$  está dada por el número de sitios diferentes de cero en dicha configuración. Esta característica es típica en los ACELMs clase 3 *aditivos* y se debe a que por ser lineal la función, la derivada booleana es constante (Caso inestable).
- B. Crecimiento más o menos lineal en el tiempo. Un cambio en el valor del estado en un sitio en el vector inicial es amplificado por la evolución de estos ACELMs lo que se ve reflejado en el comportamiento de su distancia de Hamming. Se puede apreciar de los resultados experimentales que, salvo pequeñas fluctuaciones,  $H$  tiende a tiempos largos a la forma  $H \approx mt$  en los ACELMs 18, 22, 54, 76, 108, 146 y 150. En la ecuación anterior  $m$  es una constante de proporcionalidad (Caso estacionario).
- C. Cambios en sitios individuales pueden, algunas veces, ser erradicados después de algunos pasos temporales. Este comportamiento especial es característico de los ACELMs 4, 32, 126, 128 y 160 para los cuales  $H = 0$  para  $t \geq 4$  (Caso estable).

La clase A representa a los ACELMs caóticos. En la clase B, el número de sitios dañados ni se hace cero ni infinito (donde infinito quiere decir una fracción finita de una red "infinita", i.e. suficientemente grande). De igual forma, para la primera clase el número de sitios dañados no va necesariamente a infinito en este sentido.

## ACT

En éstos ACs se observa cualquiera de los siguientes comportamientos, en su distancia de Hamming:

- A. Los ACTs 30 y 42 tienen un comportamiento semejante al de los ACELMs aditivos, los cuales muestran picos que se repiten a intervalos regulares en sus gráficas de  $H$  vs.  $t$ , indicando que forman estructuras autosimilares (Caso inestable).
- B. Para ACTs clase 3 (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 34, 38, 44, 46 y 50), la diferencia entre configuraciones sólo depende de la diferencia entre las condiciones iniciales. Un cambio en el valor de un pequeño número de sitios iniciales es amplificado por la evolución de un ACT y tiende a configuraciones con un incremento lineal, salvo de pequeñas fluctuaciones, tendiendo a tiempos largos a la forma  $H \approx t$  (Caso estacionario).
- C. Para ACTs clases 1 y 2 (0, 4, 16, 32, 36, 48, 54, 60 y 62), las diferencias parecen localizadas en unos cuantos sitios y la distancia de Hamming tiende rápidamente a cero (Caso estable).

La tabla 10 muestra la distribución de los ACELMs y los ACT en relación a las clases anteriores.

Tabla 10. Porcentaje de reglas de ACELMs y ACTs que caen en cada una de las 3 clases de comportamiento observado en el crecimiento de los defectos.

CLASE	K=1 (%)	K=2 (%)
A	17.1	25.0
B	17.0	12.5
C	65.9	62.5

## ENTROPÍA DE BLOQUE

### **ACELMs**

Los valores de la entropía de bloque decrecen asintóticamente con la longitud de los bloques para todos los ACELMs clase 3, permitiendo identificar cotas superiores para  $S$  conforme  $b$  crece, como una generalización para el análisis finito. Estos valores de la entropía de bloque son independientes de la densidad del estado inicial. Las aproximaciones de campo medio coinciden en forma adecuada con el valor experimental dando errores relativos máximos del 19.2 %. Excepto para la regla 146, para la cual el error porcentual relativo es del 56%.

### **ACT**

Conforme aumenta el tamaño del bloque, la entropía decrece rápidamente para todas las configuraciones de los ACT clase 3, para posteriormente alcanzar valores de "equilibrio", permitiendo identificar algunas cotas superiores para  $S$  conforme  $b$  aumenta. Estos valores de la entropía de bloque son independientes de la densidad del estado inicial. Las aproximaciones de campo medio coinciden con el valor experimental dando errores relativos máximos del 37.4 %. Excepto para las reglas 34, 38, 42, 44, 46 y 50, para las cuales no es posible obtener resultados mediante la teoría de campo medio debido a que el valor obtenido, para la probabilidad  $p$  es 1.

## EXPONENTES DE LYAPUNOV

### **ACELMs y ACTs**

Después de la introducción de un defecto en el espacio de configuraciones de los ACELMs, el comportamiento de su ELM puede ser dividido en 3 grupos:

1. El ELM  $\lambda = -\infty$ ; dentro de este grupo se encuentran algunos ACELMs clase 2 (50, 72, 104, 178, 200 y 232). Las reglas 50 y 178 presentan un tiempo transitorio muy largo, del orden de 15000 pasos temporales. Estos ACELMs tienen una  $\mu$  pequeña en ausencia de "daño" ( $\mu < 0.373$ ).
2. El ELM  $\lambda > 0$ . Este grupo contiene a todos los ACELMs clase 3 (18, 22, 54, 90, 122, 126, 146, 150) y la regla 94 clase 2. Para estos ACELMs los valores de  $\mu$  y  $\lambda$  son afectados considerablemente por la introducción de un daño en la red. Los ACELMs de este grupo tienen  $\mu > p_c$  y  $\lambda$  cercana a la curva prevista por la aproximación de la matriz aleatoria.
3. El ELM  $\lambda \approx 0$ , un valor que nunca se encuentra en el producto de matrices aleatorias. Los ACELMs de este grupo muestran un valor intermedio para  $\mu$  ( $0.281 < \mu < 0.54$  con daño y  $\frac{1}{3} < \mu < p_c$  en ausencia del daño). Contrariamente a la aproximación hecha mediante matrices aleatorias  $N$  no se anula para tiempos largos. Las reglas que corresponden a estas características son todos los ACELMs clase 1 (4, 32, 128, 160) y algunas reglas clase 2 (36, 76, 108, 132, 164, 204).

El comportamiento de los ELMs para ACTs legales, puede ser dividido en 3 grupos:

1. El ELM  $\lambda = -\infty$ ; dentro de este grupo se encuentran algunos ACTs clase 2 (24, 40, 56 y 58). Estos ACTs tienen una  $\mu$  pequeña en ausencia de "daño".
2. El ELM  $\lambda > 0$ . Este grupo contiene a todos los ACTs clase 3 (2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30, 34, 38, 42, 44, 46 y 50). Para estos ACTs los valores de  $\mu$  y  $\lambda$  son afectados considerablemente por la introducción de un daño en la red. Los ACTs de este grupo tienen  $\mu > p_c$  y  $\lambda$  cercana a la curva prevista por la aproximación de la matriz aleatoria.
3. El ELM  $\lambda \approx 0$ . Los ACTs de este grupo muestran un valor intermedio para  $\mu$ . El valor de  $N$  no se anula para tiempos largos. Las reglas que corresponden a estas características son los ACTs clase 1 (4, 16, 32, 36, 48, 54, 60 y 62), algunas reglas clase 2 (8, 56, 58). y los dos ACTs clase 4 (20 y 52).

## APÉNDICE A

### Derivadas Booleanas

Los ACs pueden ser conectados con las herramientas del cálculo mediante las derivadas Booleanas. Las derivadas Booleanas de una función  $f$  son atributos, no-triviales, que pueden ser utilizados para caracterizar a un AC.

La *derivada booleana* de la función  $f$  con respecto a su  $i$ -ésimo argumento  $x_i$ , se define como<sup>[24]</sup>

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, \neg x_i, \dots, x_n) \quad (33)$$

donde  $\neg x_i = x_i \oplus 1$ .

Esta derivada, de primer orden, expresa la dependencia de la función de su  $i$ -ésimo argumento, es decir  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es uno si  $f$  cambia cuando  $x_i$  lo hace.

Es claro que se pueden también definir una derivada  $F'$  de  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  como una matriz Jacobiana con elementos

$$F'_{ij} = \frac{\partial x_i^{l+i}}{\partial x_j^l} \quad (34)$$

La ec. (34) define una matriz  $F'_y$  de banda con valores no-nulos en la banda principal, 1 en los extremos y 0 en los demás sitios.

Considérense estas derivadas desde el punto de vista computacional. Al elemento  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B_n^L$  le corresponde un número  $x_n \in [0, 2^n)$ , i.e.

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot 2^{i-1} \quad (35)$$

e inversamente, a cada número  $x_n \in [0, 2^n)$  le corresponde una  $n$ -ada  $(x_1, \dots, x_n) \in B_n$

$$x_i = \left[ \frac{x}{2^{i-1}} \right] \text{ mod } 2 \quad (36)$$

donde  $[x]$  indica la función máximo entero de  $x$ . Un entero es entonces un conjunto ordenado de números Booleanos ó bits. De esta forma los enteros son representados por un *arreglo de bits*. Se debe introducir un ordenamiento en los arreglos de bits, de forma que se pueda sustituir la expresión  $\xi_n \in [0, 2^n)$  por  $x_n \leq 2^{n-1} - 1$ .

Esta transformación lineal entre números enteros y n-adas Booleanas corresponde a la representación de cualquier entero en una computadora, la división entre una potencia de 2 es equivalente a un corrimiento de bits a la derecha<sup>(1)</sup> y la operación módulo 2 toma los bits extremos a la izquierda.

Estas definiciones son consistentes con lo esperado. La derivada de la función identidad es uno y la derivada de una constante (0 ó 1) es cero. Más aún, la derivada es lineal con respecto a la operación XOR y esta sigue la regla estándar para la derivación de un producto

$$\frac{\partial(f \wedge g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \wedge g \oplus f \wedge \frac{\partial g}{\partial x} \quad (37)$$

## A.2) Derivadas booleanas de orden superior en serie de Maclaurin.

Se puede extender la definición a mayores ordenes de derivación. Por ejemplo una derivada de segundo orden con respecto a  $x_i$  y  $x_j$  se define como

$$\left. \frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_j} \right|_x = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n)$$

Nótese que la definición es consistente con la regla de la cadena para funciones de variable real, i.e.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (38)$$

Obsérvese que, según la definición, una derivada de segundo orden con respecto al mismo argumento es idénticamente cero.

Como una notable consecuencia, se observa que se puede expandir una función empezando en el 0 (el arreglo que tiene todos los bits en cero), obteniendo una serie de Maclaurin. Desarrollemos explícitamente este caso para un autómata celular elemental.

Sea  $x_i(t)$  un sitio cualquiera y  $x_{i-1}(t)$ ,  $x_{i+1}(t)$  sus vecinos más cercanos al tiempo  $t$ . Localmente se tiene

$$x_i(t+1) = f(x_{i-1}(t), x_i(t), x_{i+1}(t)) \quad (39)$$

La expansión en serie de Maclaurin de  $f$ , a tercer orden, está dada por

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= f(0,0,0) \oplus \\
& x_{i-1}(t) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}} \Big|_{(0,0,0)} \oplus x_i(t) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(0,0,0)} \oplus x_{i+1}(t) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}} \Big|_{(0,0,0)} \oplus \\
& x_{i-1}(t) \wedge x_{i+1}(t) \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i-1} \partial x_{i+1}} \Big|_{(0,0,0)} \oplus x_i \wedge x_{i+1} \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i+1}} \Big|_{(0,0,0)} \oplus \\
& x_i(t) \wedge x_{i-1}(t) \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i-1}} \Big|_{(0,0,0)} \oplus x_{i-1}(t) \wedge x_i(t) \wedge x_{i+1}(t) \wedge \frac{\partial^3 f}{\partial x_{i-1} \partial x_i \partial x_{i+1}} \Big|_{(0,0,0)}
\end{aligned}$$

## **APENDICE B**

**En el presente apéndice se muestra el programa para efectuar el cálculo del valor de la densidad a tiempos largos, mediante una teoría de campo medio. El programa se desarrolló en un paquete para matemáticas llamado EUREKA The Solver, ver 1.0. En el ejemplo se muestra una corrida para el ACELM 18 el cual difiere del valor experimental en un 4%.**



\*\*\*\*\*  
Eureka: The Solver, Version 1.0  
\*\*\*\*\*

; TEORIA DE CAMPO MEDIO PARA AUTOMATAS CELULARES ELEMENTALES

; El ejemplo siguiente es para el ACELM 18

; Define la función de cambio de 0 --> 1

$$\text{Gamma1} = (q^3) \cdot \text{AND}(1, R0) + p \cdot (q^2) \cdot \text{AND}(1, R1) + p \cdot (q^2) \cdot \text{AND}(0, R2) + \\ (p^2) \cdot q \cdot \text{AND}(0, R3) + p \cdot (q^2) \cdot \text{AND}(1, R4) + (p^2) \cdot q \cdot \text{AND}(1, R5) + \\ (p^2) \cdot q \cdot \text{AND}(0, R6) + (p^3) \cdot \text{AND}(0, R7)$$

; Define la función de cambio de 1 --> 0

$$\text{Gamma0} = (q^3) \cdot \text{AND}(0, NR0) + p \cdot (q^2) \cdot \text{AND}(0, NR1) + p \cdot (q^2) \cdot \text{AND}(1, NR2) + \\ (p^2) \cdot q \cdot \text{AND}(1, NR3) + p \cdot (q^2) \cdot \text{AND}(0, NR4) + (p^2) \cdot q \cdot \text{AND}(0, NR5) + \\ (p^2) \cdot q \cdot \text{AND}(1, NR6) + (p^3) \cdot \text{AND}(1, NR7)$$

; Condición de equilibrio

$$\text{DeltaRo} = \text{Gamma1} - \text{Gamma0} = 0$$

; Condición de normalización

$$q = 1 - p$$

; Define las funciones NOT y AND

$$\text{NOT}(X) = \text{ABS}(X-1)$$

$$\text{AND}(A,B) = A \cdot B$$

; Inicializaciones

; Inicia el valor de la regla

$$R0 = 0 \quad ; \text{Define la regla en binario del ACE (18 caso particular)}$$

$$R1 = 1$$

$$R2 = 0$$

$$R3 = 0$$

$$R4 = 1$$

$$R5 = 0$$

$$R6 = 0$$

$$R7 = 0$$

$$\text{NR0} = \text{NOT}(R0) \quad ; \text{Define la regla en binario NEGADA del ACE}$$

$$\text{NR1} = \text{NOT}(R1)$$

$$\text{NR2} = \text{NOT}(R2)$$

$$\text{NR3} = \text{NOT}(R3)$$

$$\text{NR4} = \text{NOT}(R4)$$

$$\text{NR5} = \text{NOT}(R5)$$

$$\text{NR6} = \text{NOT}(R6)$$

.....

Solution:

Variables Values

DeltaRo = -1.0737522e-12

Gamma0 = .29289322

Gamma1 = .29289322

p = .29289322

q = .70710678

Maximum error is 1.0737522e-12

.....

## APÉNDICE C

### TÉCNICA DE MULTI-SPÍN (MULTI-SITE CODING MSC)

El estudio de ACs requiere del uso intensivo de computadoras. Se selecciona una regla ó código y una configuración inicial cualquiera y se sigue una evolución temporal en lo que se conoce como un experimento computacional. Este proceso genera una gran cantidad de operaciones Booleanas, lo cual hace lento el proceso para determinar sus propiedades estadísticas. En este sentido, se hace imperante el desarrollo de una técnica que permita un manejo efectivo de la memoria de la computadora. En este apéndice se explica una de estas técnicas.

La técnica de multi-spín (MSC), produce una economía en el uso de memoria y mayor eficiencia pues por un lado, la regla de transición, es expresada solo por operaciones que involucran corrimiento de bits lo cual reditúa en mayor rapidez y por otro, se utilizan todos los bits de la palabra de memoria, evitando desperdicio de espacio en la memoria de la computadora.

La idea fundamental es "empaquetar" un conjunto de variables en una sola palabra de memoria. Una palabra de memoria puede estar formada de 16 a 64 bits (en microcomputadoras), dependiendo de la máquina, y elaborar su valor siguiente como un todo.

Para el caso unidimensional, se puede considerar el espacio de configuraciones del AC, como una red de L sitios o celdas, según se muestra en la figura 35.

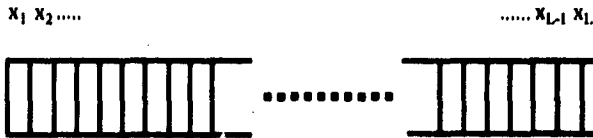


Figura 35: Red unidimensional de L celdas.

Esta red se puede implementar con un arreglo unidimensional de longitud L, donde cada entrada sea de tipo byte, entero o word. Sin embargo, cada celda solo tiene que almacenar un dígito binario; con lo que estarían inutilizados, para una palabra de longitud P, los P-1 bits restantes, lo cual se muestra en la figura 36.

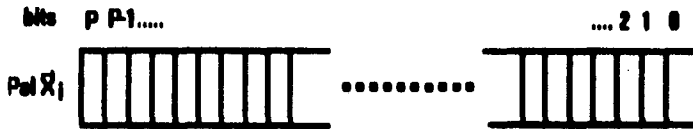


Figura 36: Arreglo unidimensional de longitud L, donde cada entrada sea de tipo byte, entero o word. Sin embargo, cada celda solo tiene que almacenar un dígito binario; con lo que estarían inutilizados, para una palabra de longitud P, los P-1 bits restantes

Así, almacenando el valor de un sitio en un bit de una palabra de memoria, haciendo uso de la descripción de la regla  $f$  mediante una fórmula canónica, c.f. capítulo 1, y usando operaciones de bajo nivel NOT, AND, OR y XOR; la función de asignación de estados actúa sobre el paquete completo de variables logrando una operación más eficiente.

En lo que sigue  $x_i$  indica el valor del  $i$ -ésimo sitio, al tiempo  $t$ , en una red unidimensional de longitud  $L$ .

Los valores que toma cada sitio, para un AC Booleano sólo pueden ser 0 ó 1, así que el valor por sitio puede ser almacenado en un bit. Los bits, en cada palabra son indicados con letras minúsculas; las palabras de memoria se indican con letras mayúsculas y arreglos de palabras con letras mayúsculas con subíndices como  $W_k$ . Todos los arreglos inician en cero.

En relación a lo anterior, una palabra cualquiera puede ser representada por

$$W = (x_{N_b-1}, \dots, x_1, x_0)$$

donde  $N_b$  representa el número de bits en la palabra. Nótese que el orden de los bits en una palabra es el adecuado para leerlos como un número en base 2 en dirección izquierda-derecha.

Si el número de palabras requeridas para almacenar un renglón de la configuración es denotado por  $N_w$  y el número de celdas en un renglón es  $N_c$ , entonces:

$$N_c = (N_b)(N_w) \quad (40)$$

## ALGORITMO

Sea  $P$  la palabra de memoria, que contiene  $N_b$  sitios. Por el momento, no es relevante cual es la correspondencia entre sitios en la palabra  $P$  con su posición en la red, pues esta es uno-a-uno.

El problema se reduce, a construir una estructura en la cual todos los elementos de la red queden colocados en la palabra adecuada para procesarse sincrónicamente, usando solamente operaciones Booleanas para cada uno de los bits y con cada palabra genérica.

Hay muchas formas en las cuales se pueden asignar los sitios  $x_i$  de la red, en cada bit de la palabra  $P_k$ , empero la tarea de construir los sitios vecinos de los sitios almacenados en la palabra central debe ser tan económica como sea posible. El objetivo final es tener los valores de los sitios que pertenecen a la vecindad de los sitios de la palabra  $P_k$  en los bits adecuados de las palabras  $P_{k-1}$  y  $P_{k+1}$ .

Lo indicado anteriormente, se puede lograr mediante la asignación del primer sitio de la red al primer bit de la primera palabra; el segundo sitio, al primer bit de la segunda palabra, y así, para todos los primeros  $N_w$  sitios. Las operaciones anteriores se repiten  $N_b$  veces en orden, para almacenar los  $N_w$  sitios en los primeros bits de las palabras contenidas en un arreglo, los siguientes  $N_w$  sitios en los segundos bits de cada una de las palabras, etc.<sup>(4)</sup>

Para un renglón genérico, se tiene

$$\begin{aligned}
 X_{j,0} &= |X_{j,(Nb-1)Nw}, \dots, X_{j,2Nw}, X_{j,Nw}, X_{j,0}| \\
 X_{j,1} &= |X_{j,(Nb-1)(Nw-1)}, \dots, X_{j,2Nw+1}, X_{j,Nw+1}, X_{j,1}| \\
 &\quad (41) \\
 X_{j,Nw-1} &= |X_{j,0}, \dots, X_{j,2Nw+j}, X_{j,2Nw}, X_{j,Nw}|
 \end{aligned}$$

Considérese, como ejemplo, una red de  $Nc = 32$  celdas. Sea  $P_i$  un arreglo de  $i$  palabras necesarias para almacenar a la red en su totalidad. Si cada una de las palabras cuenta con 8 bits; de la ec.(40) se tiene que  $i = Nw = Nc/Nb = 4$  palabras. En la fig. 37 se muestra esquemáticamente este caso.

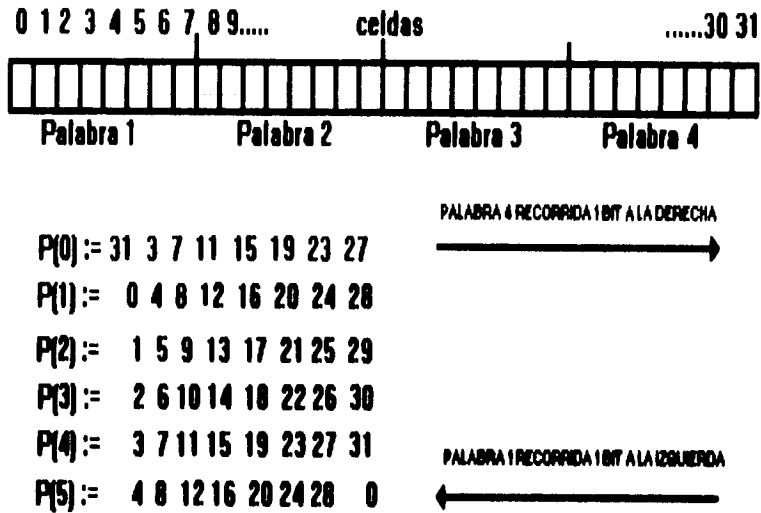


Figura 37. Red de  $Nc = 32$  celdas.  $P_i$  arreglo de  $i$  palabras necesarias para almacenar a la red en su totalidad. Si cada una de las palabras cuenta con 8 bits, se tiene que  $i = Nw = Nc/Nb = 4$  palabras

Obsérvese, de la figura 37, que a fin de implementar las condiciones periódicas a la frontera, los vecinos al oeste de los sitios de la primera palabra,  $X_{j,0} = P(1)$ , están contenidos en la última palabra,  $X_{j,Nw-1} = P(4)$ , un corrimiento circular de un bit a la derecha de esta palabra y un corrimiento circular de un bit a la izquierda de la palabra  $X_{j,0}$ ; pues los vecinos al este de la palabra  $X_{j,Nw-1}$ ; están en  $X_{j,0}$ ; aseguran la condición.

La forma de asignar valores a través del tiempo, es aplicando la ec. (41), a todas y cada una de las palabras que representan la red; i.e. se aplica la función de asignación desde

1 hasta Nw, la cual se establece mediante el desarrollo en serie de Maclaurin de derivadas Booleanas, c.f. apéndice A.

Este esquema de almacenamiento puede ser usado, con algunas modificaciones, en cualquier dimensión; tanto para ACs Booleanos elementales y totalísticos como para los que no lo son. Inclusive, puede ser adaptado para vecindades mucho mayores.

En la tabla 11 se presenta una comparación de los tiempos obtenidos en la actualización por sitios en la técnica estándar y la MSC para los ACE 18 y 90 para redes de 208 sitios, a partir de estados iniciales al azar con densidades de 0.5, con tiempos de evolución de 600 pasos.

**Tabla 11. Comparación de tiempos de actualización por sitio para redes de 208 sitios para los ACEs 18 y 90, haciendo uso de la técnica estándar y la MSC**

AUTÓMATA	T. ESTÁNDAR (seg.)	MSC (seg.)	COMPARACIÓN
90	$2.6 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$	1.1
90	$2.7 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$	1.3
18	$2.6 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-3}$	1.3
18	$2.7 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-3}$	1.4

En la columna marcada con autómata, se presenta la regla con la cual se efectuó el experimento, primero desde un estado al azar, segundo desde un estado con un solo sitio con valor 1. Las columnas con los títulos T. estándar y MSC, representan los tiempos de actualización por sitio. En la columna de la extrema derecha, se presenta la comparación entre ambos tiempos tomado como el cociente de la columna T. estándar entre la MSC.

APENDICE D

TABLA 12. CANTIDADES ESTADÍSTICAS PARA ACELMs CLASE 3

REGLA	$\rho_{\infty} \pm \delta\rho_{\infty}$	$\rho_{\infty} C. M.$	m	$S_s \pm \delta S_s$	$\lambda$
18	<b>0.255 ± 0.006</b>	0.2928	0.524	0.5326 ± 0.006	0.739687
22	<b>0.343 ± 0.00</b>	0.4226	0.710	0.3505 ± 0.003	1.097195
54	<b>0.478 ± 0.004</b>	0.5000	0.326	0.3493 ± 0.002	1.097195
90	<b>0.500 ± 0.003</b>	0.5000	-	0.5016 ± 0.002	0.692277
122	<b>0.504 ± 0.009</b>	0.6180	0.848	0.500 ± 0.002	0.692224
126	<b>0.503 ± 0.009</b>	0.6666	0.916	0.500 ± 0.002	1.097197
146	<b>0.254 ± 0.006</b>	1.0000	0.600	0.5308 ± 0.002	0.802808
150	0.5059	0.5000	-	0.3466 ± 0.002	1.097238

En la tabla 12 se muestran los resultados estadísticos obtenidos a partir de la evolución espacio-temporal de los 8 ACELMs clase 3. En todos los casos, se parte de una configuración inicial al azar donde la probabilidad por sitio de tomar valor 0 ó 1 es de 1/2, salvo las densidades a tiempos largos donde se parte de densidades variables. Los experimentos computacionales se efectuaron en redes de 8192 celdas, con condiciones periódicas a la frontera, tiempos de evolución de 5000 pasos y 15 repeticiones del experimento computacional.

La columna con el título  $\rho_{\infty} \pm \delta\rho_{\infty}$  muestra el valor de la densidad asintótica a tiempos largos de sitios con valor 1 y la incertidumbre asociada a la medición con  $\rho(0) = 0.5$ .

La columna con el título  $\rho_{\infty} C. M.$ , representa los valores de la densidad al infinito obtenidos a partir de la aplicación de una aproximación de campo medio.

La columna etiquetada con **m** muestra los valores de la pendiente de la recta obtenida a partir de un ajuste mediante regresión lineal a las gráficas experimentales de H contra t. Las celdas marcadas con - indican que el ACELM es aditivo lo que produce una gráfica de H contra t en la cual hay picos y por ello no es posible hacer un ajuste por regresión lineal.

La columna etiquetada con  $S_s \pm \delta S_s$ , muestra el valor asintótico de la entropía de bloque S. Esta entropía se obtiene mediante la división en bloques de longitud S, y luego se evalúa la cantidad descrita en la ec. (11). El valor de la entropía parece decrecer asintóticamente con la longitud del bloque, permitiendo localizar algunas cotas para  $S_s$  conforme el tamaño del bloque aumenta.

La columna bajo el título  $\lambda$ , muestra el valor de los exponentes de Lyapunov máximos de ACELMs clase 3 obtenido mediante un producto de matrices Jacobianas tridiagonales aleatorias.

## APENDICE E

**TABLA 13. CANTIDADES ESTADÍSTICAS PARA ACTs CLASE 3**

CODIGO	$\rho_n \pm \delta\rho_n$	$\rho_n C. M$	m	$S_n \pm \delta S_n$	$\lambda$
2	0.270 ± 0.003	0.3312	0.632 ± 0.005	0.67 ± 0.09	0.69977
6	0.355 ± 0.00	0.4877	.119 ± 0.005	0.57 ± 0.08	0.69628
10	0.466 ± 0.00	0.4738	.873 ± 0.004	0.96 ± 0.02	0.69209
12	0.501 ± 0.00	0.5723	0.709 ± 0.009	0.58 ± 0.09	0.69209
14	0.477 ± 0.00	0.6199	.166 ± 0.00	0.54 ± 0.08	0.63651
18	0.394 ± 0.002	0.3121	.156 ± 0.00	0.90 ± 0.02	0.71163
22	0.537 ± 0.00	0.5781	.661 ± 0.004	0.78 ± 0.0	0.91674
26	0.563 ± 0.002	0.6825	.15 ± 0.04	0.73 ± 0.0	0.69628
28	0.522 ± 0.004	0.7487	0.989 ± 0.005	0.49 ± 0.07	0.47512
30	0.513 ± 0.006	0.7512	-	0.40 ± 0.05	0.83023
34	0.350 ± 0.00	1.0	.077 ± 0.004	0.56 ± 0.0	0.63279
38	0.498 ± 0.00	1.0	.925 ± 0.006	0.60 ± 0.09	0.35302
42	0.497 ± 0.00	1.0	-	0.93 ± 0.02	0.72767
44	0.598 ± 0.002	1.0	.399 ± 0.005	0.65 ± 0.0	0.33767
46	0.643 ± 0.00	1.0	0.523 ± 0.003	0.57 ± 0.09	0.7786
50	0.406 ± 0.00	1.0	.468 ± 0.00	0.87 ± 0.02	1.08977

En la tabla 13 se muestran los resultados estadísticos obtenidos a partir de la evolución espacio-temporal de los 16 ACTs Clase 3. En todos los casos, se parte de una configuración inicial al azar donde la probabilidad por sitio de tomar valor 0 ó 1 es de ½. Los experimentos computacionales se efectuaron en redes de 8192 celdas, con condiciones periódicas a la frontera y tiempos de evolución de 5000 pasos.

La columna con el título  $\rho_n \pm \delta\rho_n$  muestra el valor de la densidad asintótica a tiempos largos de sitios con valor 1 y la incertidumbre asociada a la medición.

La columna con el título  $\rho_n C. M.$ , representa los valores de la densidad al infinito obtenidos a partir de la aplicación de una aproximación de campo medio.

La columna etiquetada con m muestra los valores de la pendiente de la recta generada al graficar H contra t para los ACTs clase 3, obtenida a partir de un ajuste mediante regresión lineal a las gráficas experimentales. Las celdas marcadas con - indican que el ACT tiene un comportamiento, en cuanto a la distancia de Hamming se refiere, similar a un ACELM aditivo lo que produce una gráfica de H contra t en la cual hay picos y por ello no es posible hacer un ajuste por regresión lineal.

La columna etiquetada con  $S_n \pm \delta S_n$ , muestra el valor asintótico de la entropía de bloque  $\theta$ . Esta entropía se obtiene mediante la división de la red en bloques de longitud  $\theta$ . El valor de la entropía decrece asintóticamente con la longitud del bloque, permitiendo localizar algunas cotas para  $S_n$  conforme el tamaño del bloque aumenta.

La columna bajo el título  $\lambda$ , muestra al valor de los exponentes de Lyapunov máximos de ACTs clase 3 obtenidos mediante un producto de matrices Jacobianas aleatorias.



## REFERENCIAS

1. Bagnoli F., *Int. Journ. of Modern Phys.* **3** No. 2 (1992) 307-320, "Boolean derivatives and computation of cellular automata".
2. Bagnoli F., Rechtman R., Ruffo S., *Physics Letters* **172** (1992) 34-38, "Damage spreading and Lyapunov exponents in cellular automata".
3. Bagnoli F., Rechtman R., Ruffo S., 1993, "Lyapunov exponents for cellular automata", in press.
4. Bagnoli F., Rechtman R., Ruffo S., *Journal of computational physics* **101** (1992) 176-184, "General algorithm for two-dimensional totalistic cellular automata".
5. Bunde A., Halvin S., *J. Phys. A.*, **26** (1986) 113, "Percolation  $I$ ".
6. Cox J., Griffeath D., *Journal of Statist. Physics*, Vol. **25**, No. 2 (1981) 237-238, "Bond percolation model".
7. Eubank S., Farmer D., *Lectures in complex systems, SFI in the science of complexity*, Lect. Vol. **2**, ed. Addison-Wesley (1990), "An introduction to chaos and randomness".
8. Frisch, U., *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 1505, "Lattice gas automata for the Navier-Stokes equation".
9. Grimaldi R., *Discrete and Combinatorial Mathematics*, ed. Addison-Wesley (1989), "Boolean Algebra and Switching Functions".
10. Grimaldi R., *Discrete and Combinatorial Mathematics*, ed. Addison-Wesley (1989), "Groups, Coding Theory, and Polya's Enumeration".
11. Grinstein G., *Physical Review Letters*, **55**, No. 23 (1985) 451-454, "Statistical mechanics of probabilistic cellular automata".
12. Gutowitz H., MIT Press, *Physica D* (1991), "Cellular automata theory and experiment".
13. Manning F., *I.E.E.E. Trans. Comp* (1977) 26-53, "An approach to highly integrated computer maintained cellular array".
14. Nishio H., Universidad de Kioto (1981), "Real time sorting of binary numbers by 1-dimensional cellular automata". in press.

15. Rechtman R., Rev. Ciencias, No. 24 (1991) 23-29, "Una introducción a autómatas celulares".
16. Reif F., Berkeley Physics Course Vol. 5 (1965), "Statistical Physics".
17. Sternberg S.R., Pattern Recognition in Practice, editado por E.S. Gelesma y N.L. Kanal (North-Holland, Amsterdam) (1980) 35, "Language and architecture for parallel image processing".
18. Sutton C., New. Sci. (1985), 90 209, "Forest and numbers and thinking backwards".
19. Toffoli T., Margolus N., MIT Press in Scientific Computation (1987), "Cellular automata machines. A new environment for modeling".
20. Thomson D.A.W., Cambridge University (1981), "On growth and form".
21. Vichniac G., Physica **D45** (1990) 63-74, "Boolean derivatives on cellular automata".
22. Waterman M., Physica **10D** (1984) 45, "Some applications of information theory to cellular automata".
23. Wolfram S., Commun. Math. Phys., **96** (1984) 15-57, "Computation theory of cellular automata".
24. Wolfram S., World Scientific Publications, Physica **10D** (1986), "Theory and Application of Cellular Automata".
25. Wolfram S., Physica Scripta **19** (1985) 170-183, "Twenty problems in the theory of cellular automata".
26. Wolfram S., Rev. Mod. Phys **55**, 601 (1985) 7-50, "Statistical mechanics of cellular automata". Reimpreso en la ref. 22.
27. Wolfram S., Physica **10D** (1985) 1-35, "Universality and complexity in cellular automata".