31
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECTO DE UN PROGRAMA DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL CON APLICACIONES A LAS CIENCIAS ACTUARIALES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A

N O R A   G A V I R A   D U R O N

DIRECTOR: [illegible] LARA APARICIO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" PROYECTO DE UN PROGRAMA DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL CON APLICACIONES A LAS CIENCIAS ACTUARIALES."

realizado por Nora Gavira Durón,

con número de cuenta 8807855-7 **, pasante de la carrera de** Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Miguel Lara Aparicio.	Miguel Lara Aparicio
Propietario	M. en C. Angel M. Carrillo Hoyo.	
Propietario	M. en C. Sergio Hernández Castañeda.	
Suplente	M. en C. María de la P. Zapata Lillo.	Paloma Zapata
Suplente	Dra. Edith Pacheco Gómez-Muñoz.	Edith Pacheco Gómez

Consejo Departamental de Matemáticas

Claudia Carrillo Q.
ACT. CLAUDIA CARRILLO QUIROZ

A MIS HIJOS Y A MIS PADRES

GRACIAS

A Dios,
por haberme dado el don mas maravilloso del universo, la vida.

A mi madre, Guadalupe Durón Jiménez,
por haberme amado aún antes de nacer y por todos sus esfuerzos.

A mi padre, Rafael Gavira Aristizabal,
por enseñarme el valor del estudio.

A mis hijos, José Luis y Carlos Alberto,
por ser el motor que mueve mi vida.

A mi asesor de tesis, el M. en C. Miguel Lara Aparicio,
por su ayuda, dedicación y paciencia en la elaboración de este trabajo.

Al M. en C. José Antonio Gómez Ortega,
por su ayuda, al facilitarme el acceso al cubículo 204 del departamento de matemáticas.

A mis profesores, a la Facultad de Ciencias y a la UNAM,
por haberme dado la preparación profesional.

A mis amigos de la secundaria, por enseñarme que la amistad existe.

A mis amigas, Norma y Marcela, por estar siempre conmigo.

A aquella olimpiada de matemáticas y a aquel equipo con el que participé, por descubrirm
el amplio mundo de las matemáticas.

Y a todos los demás.

ÍNDICE

CAPITULO IV

MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

CAPITULO V

DIBUJO DE GRÁFICAS.

CAPITULO VI

INTEGRACIÓN

INTRODUCCION

Por lo general, en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral[1] que se imparten en la Facultad de Ciencias de la UNAM, hay estudiantes de las carreras de física, matemáticas, ciencias de la computación y actuaría[2]. Sin embargo, la población estudiantil más grande corresponde a la carrera de actuaría.

El índice de reprobación en dichos cursos es muy alto y si se considera que la mayoría de los estudiantes corresponde a la carrera de actuaría podemos decir que la mayoría de los estudiantes que reprueba cálculo son estudiantes de actuaría; la razón de este alto índice de reprobación se debe a diversas causas, que considerando sólo el lado del estudiante pueden ser: la mala preparación en el nivel medio superior, la falta de estudio de la materia, la falta de interés, el poco tiempo que le dedican a su estudio y la falta de asistencia a las clases.

Al considerar que los cursos de cálculo tradicionales influyen de manera importante en el alto índice de reprobación de la materia, y dado que el enfoque común se da a través de temas de la física o de las matemáticas (lo que es muy natural ya que fueron los problemas físicos, principalmente, los que dieron origen al cálculo), dicha motivación no es suficiente para los estudiantes de actuaría, pues consideran que el cálculo tiene poca aplicación a su disciplina. Es cierto que algunos profesores incluyen en su exposición algunos problemas adecuados para motivar a los estudiantes de actuaría pero, generalmente, no es suficiente ya que la inclusión de tales problemas a veces no es natural o resulta ser tardía y cuando se llega a estos problemas, el interés en los estudiantes por los cursos de cálculo ha decaído.

[1]En la exposición se dirá, en adelante, sólo Cálculo en lugar de Cálculo Diferencial e integral.
[2]En esta disciplina, intervienen las siguientes: matemáticas, seguros, economía, demografía, informática y finanzas.

El presente trabajo tiene por objeto que los estudiantes de actuaría encuentren una motivación más genuina, con base en problemas similares a los de la física que dieron origen al cálculo, pero con otro tipo de lenguaje, y a ejercicios que les ayuden a desarrollar y reafirmar los conceptos básicos del cálculo y, además, que los estudiantes de física y matemáticas también puedan tener un panorama más amplio en cuanto a la aplicación que se le puede dar al cálculo.

En este trabajo se presenta una exposición de cómo se pueden enriquecer algunos temas del cálculo, sin pretender que se impartan cursos dirigidos sólo a esta especialidad, con lo que se espera que el estudiante de actuaría, que lleva un curso clásico de cálculo en la Facultad de Ciencias, cuente con un material propio extra clase que le ayude a entender y fijar los conceptos vistos en el aula, pueda mejorar su rendimiento.

Asimismo, se pretende que el profesor de cálculo tenga un material que le ayude a enriquecer el enfoque de su materia y que, aparte de motivar a sus alumnos de actuaría, brinden más posibilidades de aplicación a los alumnos de otras carreras y así puedan apreciar mejor la potencialidad del cálculo. De esta forma se considera que se ayudaría a abatir el índice de reprobación anteriormente señalado.

El primer capítulo consiste en una sugerencia de como debe ser la estructura de un prorama de estudios, en los siguientes capítulos se muestran diversas aplicaciones de los temas de funciones, derivadas, máximos y mínimos, dibujo de graficas, integración, ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y una introducción a varias variables.

Capítulo 1

PROPUESTA DE UN PROGRAMA DE ESTUDIOS.

El tema de la presente tesis, fue motivado al observar el alto índice de reprobación que se da en los cursos de cálculo diferencial e integral que se imparten en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Si se considera que el mayor número de estudiantes de la Facultad de Ciencias, corresponde a la carrera de actuaría, resulta natural deducir que el mayor número de estudiantes que reprueba dicha materia deben ser los de actuaría.

Como la base de un curso de matemáticas es el programa de estudios, se analizó el que actualmente prevalece en la materia de cálculo y se observó que existe una notable carencia de aplicaciones a todas las disciplinas (matemáticas, física y actuaría), así como una pobre estructura en su contenido. Con respecto a esta última parte se propone que los programas de matemáticas tengan la siguiente estructura:

i) Un contenido de *motivación*, el cual puede estar representado por problemas, de tipo histórico o de aplicación actual, que dan, o podrían dar, origen a la creación de la disciplina en cuestión y que justifican el estudio de la materia.

ii) Desarrollo del *núcleo temático*, que corresponde, propiamente dicho, al contenido de los temas de la materia que se deben aclarar en cada caso.

iii) *Aplicaciones.* Las que deben abarcar a las diferentes ramas del conocimiento humano.

iv) *Desarrollo ulterior.* Donde se plantean las diversas generalizaciones de algunos conceptos, aunque sea de manera *intuitiva.*

v) *Bibliografía* comentada. La cual debe estar actualizada y justificada.

Además, debe sugerir distintas rutas, siempre que sea posible, para la enseñanza de la materia en cuestión. De esta manera se tendrá una guía para el profesor y una ayuda para el estudiante.

En el presente trabajo se muestra las aplicaciones relacionadas con la carrera de actuaría, en las materias de cálculo. Con esto se pretende que el curso de cálculo se enriquezca y ayude a los alumnos de actuaría a mejorar su rendimiento en la materia.

Lo que **NO** se pretende es que haya un curso de cálculo para actuarios. Se creé, además, que los alumnos de física y matemáticas también serán beneficiados al conocer otro tipo de aplicaciones de la materia que estudian.

Los temas que se desarrollan en la tesis son aquéllos que se prestan para dar ejemplos que se relacionan con la carrera de actuaría y son los de funciones, derivadas, dibujo de gráficas, máximos y mínimos, integración, ecuaciones diferenciales de primer orden y una generalización del concepto de derivada en varias dimensiones.

Capítulo 2

FUNCIONES.

El capítulo que se presta, de manera natural, para comenzar a presentar ejemplos relacionados con la materia de actuaría es el de funciones, por lo que es el que aparece en primer lugar.

Cuando se produce un bien o se presta un servicio se genera un *costo* para una organización, que puede ser de tipo comercial, industrial, etc.

2.1 Funciones Costo.

Ahora se considera distintos tipos de costo, que son funciones del siguiente tipo:

2.1.1 Función costo total.

La función *costo total* $Q(x)$ es una relación cuyo dominio es un subintervalo A de R^+ que representa la *cantidad* de producción y cuyo codominio es $R^+ = (0, \infty)$[1], es decir,

$$Q : A \subset \underset{x}{R^+} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{Q(x)}{R^+}$$

Esta función representa el dinero que sale de una organización y se encuentra definida en términos de dos componentes : *costo variable* y *costo fijo*. Donde los costos variables representan los costos de las materias primas y los costos relacionados con la mano de obra, entre otros; los

[1] En la exposición se, expresará $R^+ = (0, \infty)$, en adelante, sólo como R^+.

costos fijos representan los costos en los que se incurre, por ejemplo, por concepto de renta del edificio y manutención de la organización. Ambas componentes deben sumarse para obtener el costo total, así:

$$\text{Costo total} = \text{Costo variable} + \text{Costo fijo}$$

Observación : Es claro que el dominio de la función costo es un subconjunto de los números reales (en la práctica es un conjunto discreto); por esta razón los economistas aproximan las funciones definidas en este conjunto por medio de métodos estadísticos o por extrapolación.

Las funciones costo tratadas en este contexto son polinomiales o exponenciales y sus *propiedades* son:

1.- Cuando la cantidad de unidades producidas x es igual a cero, el costo total es nulo o positivo, es decir $Q(0) \geq 0$. Si $Q(0) \neq 0$, entonces $Q(0)$ representa los costos fijos de producción.

2.- El costo total es no decreciente (se incrementa a medida que aumenta x) y dentro de un intervalo en donde el costo de los insumos es constante, la función costo total es creciente..

3.- Si la función costo total es exponencial o polinomial a lo más de grado dos, entonces, el costo total por producir una cantidad grande de cualquier artículo alcanza un punto a partir del cual si x crece, la función costo total crece con mayor rapidez, sin embargo, para funciones costo total, polinomiales, de grado mayor que dos el comportamiento puede ser distinto, como es el caso de la función costo total cúbica, como se puede ver en la página ( ) de la sección sobre el *dibujo de gráficas*.

Considérese un costo total dado por la siguiente relación

$$Q(x) = (a + b)x + c_f.$$

donde a representa los costos de la materia prima, b los costos de la mano de obra y c_f los costos fijos, así tenemos los siguientes

EJEMPLOS :

1.- Una empresa desea adquirir un auto más, para el reparto de sus productos; el costo de adquisición del nuevo auto es de \$50,000 se ha estimado que el costo por operar el auto es de \$2 por kilómetro recorrido y que puede recorrer 100,000 kilómetros antes del primer ajuste. Determinar la función costo total para este caso, considerando la obtención y operación del nuevo auto.

Solución:

50,000 representa el costo total fijo.

2 representa el costo total variable.

Sea x el número de kilómetros recorridos, entonces :

$$Q(x) = 2x + 50,000 \qquad \text{donde } x \in (0, 100\,000) \subset R^{+}.$$

representa el costo del auto al recorrer x kilómetros.

2.- En una fábrica se desea encontrar la función costo total $Q(x)$ para una máquina que tiene un valor en libros de \$10,000, un costo por combustible de \$5 por semana, un costo por el pago del operador de \$10 por semana y cuenta con garantía de 5 años. Determinar la función costo total que represente el caso anterior.

Solución:

Sea x el número de semanas que va a estar en funcionamiento la máquina, 5 años son 260 semanas, entonces,

$$Q(x) = 15x + 10,000 \qquad \text{donde } x \in (0, 260) \subset R^{+},$$

representa el costo de la máquina si se utiliza x semanas.

2.1.2 Función costo promedio.

Anteriormente se definió la función costo total $Q(x)$. Ahora se define una función $q(x)$ que se llama *función costo promedio*, la cual se refiere al costo por producir una sola unidad, es decir,

$$q : A \subset \underset{x}{R^+} \underset{\to}{\to} \underset{q(x)}{R^+}$$

donde,

$$q(x) = \frac{Q(x)}{x}.$$

Es claro que los valores del dominio no son arbitrariamente grandes ya que representan la cantidad de producción de un artículo, y la cota superior de dicho intervalo está determinada por el productor al tomar en cuenta la cantidad máxima que puede producir.

EJEMPLOS

Determinar la función costo promedio de las funciones vistas en los ejemplos anteriores.

1.- La función costo total está representada por

$$Q(x) = 2x + 50,000$$

la función costo promedio es,

$$Q(x) = 2 + \frac{50,000}{x}, \qquad \text{donde } x \in (0, 100\,000) \subset R^+.$$

que representa el costo del auto por cada kilómetro recorrido.

2.- La función costo total está representada por

$$Q(x) = 15x + 10,000$$

la función costo promedio es,

$$Q(x) = 15 + \frac{10,000}{x}, \qquad \text{donde } x \in (0, 260) \subset R^+,$$

que representa el costo semanal de la máquina.

2.2 FUNCIONES DEMANDA E INGRESO.

2.2.1 Función demanda.

Definimos como *demanda* a la cantidad de un artículo que un individuo está dispuesto a comprar en un precio específico.

La *función demanda* $d = x(p)$ es una relación matemática que expresa la variación de demanda de un producto, que cambia según el precio al que se venda, donde su dominio es un subintervalo B de R^+ que representa el precio del artículo y cuyo codominio es R^+, es decir,

$$x : \underset{p}{B \subset R^+} \underset{\to}{\to} \underset{x(p)}{R^+},$$

donde $x(p)$ es la función demanda que representa la cantidad demandada en función del precio.

Observación : Análogamente a lo que sucede con los costos, el dominio de la función demanda es un subconjunto de los números reales (en la práctica es un conjunto discreto); por esta razón los economistas aproximan las funciones definidas en este conjunto por medio de métodos estadísticos o por extrapolación.

De lo anterior podemos determinar la función inversa (que también es una función demanda $d = p(x)$) que es,

$$x^{-1} : \underset{x}{R^+} \underset{\to}{\to} \underset{p(x)}{B \subset R^+}$$

donde $p(x)$ representa el precio en función del número de unidades demandadas x.

La *ley de demanda* dice que es invariable utilizar el precio en función de la cantidad o utilizar la cantidad en función del precio, por tanto las funciones demanda anteriores son equivalentes.

2.2.2 Función ingreso total.

El *ingreso* de una organización es el dinero que se obtiene por la venta de sus productos o por la prestación de sus servicios.

El *ingreso total* R es una relación cuyo dominio es un subintervalo D de R^+, que representa la cantidad vendida y cuyo codominio es R^+, es decir,

$$\begin{array}{l} \mathrm{R} : D \subset R^+ \rightarrow R^+ \\ \qquad\quad x \;\;\; \mapsto \mathrm{R}(x) \end{array}$$

Para cualquier función demanda $p(x)$, el ingreso total será el producto de x por $p(x)$, esto es:

$$\mathrm{R}(x) = xp(x),$$

donde el precio de venta varía según el número de unidades vendidas.

Propiedades de las funciones ingreso:

1.- La función ingreso total depende de la función demanda que depende del número de unidades vendidas, es decir, el ingreso depende del precio al que se venda las unidades.

2.- Si tenemos una función demanda que sea un polinomio de grado n, la función ingreso total es siempre de grado $n+1$.

3.- Cuando la cantidad demandada x aumenta, el ingreso total es creciente hasta un punto x^*, de la demanda, a partir del cual decrece.

Considérese una función demanda dada por la siguiente relación

$$x(p) = b - ap \qquad \text{donde} \qquad p \in (0, b/a),$$

b representa la demanda total y a es una constante que nos indica cómo cambia la demanda al incrementarse en una unidad el precio, con lo que tenemos los siguientes

EJEMPLOS

1.- Una empresa cuenta con 5,000 artículos disponibles para su venta y calcula que por unidad de cambio en el precio, la demanda varía en 10 unidades, determinar la función demanda que represente el caso anterior.

Solución:

Como la cantidad máxima que se puede vender es 5,000 y como a cada unidad de incremento en el precio la demanda disminuye en 10 unidades, la demanda queda representada por la función

$$x(p) = 5,000 - 10p \qquad \text{donde } p \in (0, 500) \subset R^+.$$

2.- Determinar la función inversa del ejemplo anterior y determinar la función ingreso total.

Solución:

La función inversa es,

$$p(x) = 500 - \frac{x}{10} \qquad \text{donde } x \in (0, 5000) \subset R^+$$

x representa la cantidad de artículos vendidos y $p(x)$ representa el precio del artículo si se vende x unidades.

La función ingreso total es,

$$R(x) = 500x - \frac{x^2}{10}, \qquad \text{donde } x \in (0, 5000) \subset R^+$$

que representa el ingreso obtenido con la venta de x unidades.

3.- El precio de un seguro de vida varía de acuerdo a la siguiente función de demanda, $p(x) = 3,000 - 20x$, donde $x \in R^+$ y representa la cantidad de seguros vendidos, determinar la función ingreso total.

Solución:

El ingreso total queda representado por

$$R(x) = 3,000x - 20x^2, \qquad \text{donde } x \in (0, 150) \subset R^+,$$

representa el ingreso obtenido al vender x seguros de vida.

2.2.3 Función ingreso promedio.

El *ingreso promedio* es el ingreso obtenido por cada unidad vendida y es una función $r(x)$ cuyo dominio es un subintervalo D de R^+ y cuyo codominio es R^+, es decir,

$$r : D \subset \underset{x}{R^+} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{r(x)}{R^+}$$

donde,

$$r(x) = \frac{xp(x)}{x} = p(x),$$

así, el ingreso promedio también representa un precio por unidad. Es claro que la gráfica del ingreso promedio es igual a la gráfica de la demanda.

EJEMPLOS

Determinar la función ingreso promedio de las funciones ingreso total de los ejemplos anteriores.

1.- La función ingreso total es,

$$R(x) = 500x - \frac{x^2}{10}, \qquad \text{donde } x \in (0, 5000) \subset R^+,$$

la función ingreso promedio es,

$$r(x) = 500 - \frac{x}{10}, \qquad \text{donde } p \in (0, 5000) \subset R^+,$$

y representa el ingreso promedio por la venta de un artículo.

2.- La función ingreso total es,

$$R(x) = 3,000x - 20x^2, \qquad \text{donde } x \in (0, 150) \subset R^+,$$

la función ingreso promedio es,

$$r(x) = 3,000 - 20x, \qquad \text{donde } x \in (0, 150) \subset R^+,$$

y representa el ingreso obtenido por la venta de un seguro de vida.

2.3 FUNCION BENEFICIO.

2.3.1 Función beneficio total.

El *beneficio* o *ganancia* de una organización es la cantidad de dinero que se obtiene al producir y vender cierta cantidad de artículos o servicios.

La función beneficio total $G(x)$ es una relación que tiene por dominio un subintervalo $E = A \cap D$ de R^+, donde A es el dominio de la función costo y D es el dominio de la función ingreso, que representa la ganancia obtenida al producir y vender x productos y su codominio es R^+, es decir,

$$G : E \subset \underset{x}{R^+} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{G(x)}{R^+}$$

donde,

$$G(x) = R(x) - Q(x).$$

Cuando el ingreso total es mayor que el costo total, el beneficio será positivo; en este caso se llama *ganancia* o *utilidad neta*. Si el costo total es mayor al ingreso total, entonces se llama *pérdida neta* o *déficit*.

EJEMPLO

Un actuario ha creado un nuevo diseño para los seguros de vida . Según sus estudios realizados, la demanda anual de los seguros de vida dependerá del precio al que se venden. La función de demanda ha sido estimada de la siguiente manera

$$x(p) = 100,000 - 200p \qquad \text{donde } p \in (0, 500) \subset R^+,$$

x es el número de unidades demandadas al año y p representa el precio en pesos. Los estudios realizados indican que el costo total de la produción de x seguros de vida durante un año está representada por la función

$$Q(x) = 150 + 100x + 0.003x^2 \qquad x \in (0, 100) \subset R^+.$$

Se quiere formular la función beneficio $G(x)$ que expresa la ganancia anual en función del número de unidades x que se producen y se venden.

Para obtener la función beneficio total se tiene que desarrollar una función que exprese la ganancia $G(x)$ en términos del número de unidades demandadas x, para lo cual se cuenta con la función costo total $Q(x)$ y, falta determinar la función de ingreso total expresada en términos de x.

El ingreso total queda determinado por

$$R(x) = xp(x),$$

en donde aparece $p(x)$ y, como lo que se tiene es $x(p)$ entonces se procede a determinar $x^{-1}(p)$ para expresar a p como función de x, es decir,

$$x(p) = 100,000 - 200p,$$

por tanto,

$$x^{-1}(p) = p(x) = 500 - 0.005x, \qquad \text{donde } x \in (0, 100\,000) \subset R^{+}.$$

Así, la función ingreso total queda expresada de la siguiente manera,

$$\mathrm{R}(x) = 500x - 0.005x^2, \qquad \text{donde } x \in (0, 100\,000) \subset R^{+},$$

y la función beneficio total es

$$\begin{aligned} G(x) &= R(x) - Q(x) \\ G(x) &= -0.008x^2 + 400x - 150 \qquad \text{donde } x \in (0, 100) \subset R^{+}, \end{aligned}$$

que representa la ganancia total $G(x)$ en función del número de pólizas x demandadas y vendidas en el año.

2.3.2 Función beneficio promedio.

El *beneficio promedio* es una función $g(x)$ que representa la ganancia obtenida al producir y vender una unidad, tiene por dominio un subintervalo E contenido en R^{+} que representa el número de unidades producidas y vendidas, y tiene por codominio a R^{+}, es decir,

$$g : E \subset \underset{x}{R^{+}} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{g(x)}{R^{+}}$$

donde,

$$g(x) = \frac{R(x) - Q(x)}{x}.$$

EJEMPLO

Determinar la función beneficio promedio del ejemplo anterior.

La función beneficio total es,

$$G(x) = -0.008x^2 + 400x - 150,$$

entonces, la función beneficio promedio es,

$$g(x) = -0.008x + 400 - \frac{150}{x} \qquad \text{donde } x \in (0, 100) \subset R^+,$$

lo que representa la ganancia o la pérdida al producir y vender un seguro de vida.

2.4 APLICACIONES A LA DEMOGRAFIA.

2.4.1 Grupos de edad.

En casi todas las funciones que se manejan en demografía, la variable que se emplea es la edad t de las personas, por esta razón es importante analizar los tipos de grupos de edad que se utilizan.

Cuando se presenta información demográfica clasificada por grupos de edad, por ejemplo la información obtenida en un censo, los intervalos de edades suelen presentarse en dos formas distintas.

La más general es la que se muestra a continuación,

Grupos de edades	Población
$0-4$	p_1
$5-9$	p_2

10 – 14	p_3
....	......

En este caso los intervalos se refieren a los años cumplidos por las personas. Es claro que la variable t (edad cumplida) sólo puede tomar valores discretos y los intervalos de edad son cerrados.

Otra forma, menos empleada, es la siguiente:

Grupos de edades	Población
0 – 5	p_1
5 – 10	p_2
10 – 15	p_3
....	......

En este caso los intervalos se refieren a edades exactas. La variable t (edad exacta) es continua y los intervalos son cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha.

En demografía el tipo de funciones que se manejan son aproximaciones de tipo estadístico a los puntos conocidos de las funciones utilizadas ya que sólo se conocen puntos de las funciones por ser datos anuales o decenales y basados en experiencias estadísticas.

El objetivo de este tema consiste en sustituir las sucesiones de magnitudes, como lo son las de la tabla de mortalidad ($\{S_t\}, \{d_t\}, \{q_t\}$) por funciones de significado análogo, pero con todas las propiedades (continuidad, derivabilidad, etc.) que faciliten su manejo y su utilidad.

En demografía muchas funciones presentan un comportamiento esencialmente discontinuo, como por ejemplo, la población total $N(t)$ (entre otras) que sólo puede tomar en el tiempo valores enteros y positivos. No obstante, para trabajar con las herramientas del cálculo se hace la abstracción teórica de que la variación de la población de estas funciones es continua, ya que, aunque los datos son discretos, en la realidad se comportan de manera continua.

2.4.2 Función supervivencia.

El conjunto $\{S_t\}$ determinado por la cantidad de personas de edad t se puede sustituir por la función $S(t)$ definida para todos los valores conocidos de la edad t, generalmente los números enteros de los años en que esta última cantidad queda definida[2]. Desde un punto de vista práctico, lo anterior equivale a ajustar una curva que pase por todos los puntos para los cuales se ha definido S_t.

La función de *supervivencia* $S(t)$ es una relación cuyo dominio es un subintervalo $A \subset R^+$ que consta de la población cuya edad es la que se considera y cuyo dominio es R^+ el que consta de la cantidad de personas de edad t, es decir,

$$S : A \subset \underset{t}{R^+} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{S(t)}{R^+},$$

Esta función representa la población total de edad t que sobrevive de una población inicial $S(0)$, bajo ciertas condiciones de vida.

[2]En actuaría se considera que una persona tiene la edad x si han pasado a lo más 6 meses de su cumpleaños y que tiene la edad $x+1$ si han pasado más de 6 meses después de su cumpleaños número x.

2.4.3 Función defunción.

El conjunto $\{d_t\}$ determinado por la cantidad de personas que fallecen antes de cumplir la edad t se puede sustituir por la función $d(t)$ definida para todos los valores conocidos de la edad t, generalmente los números enteros de los años en que esta última cantidad queda definida.

La función de *defunción* $d(t)$ es una relación cuyo dominio es un subintervalo $A \subset R^+$ cuyos elementos representan la edad de la población que se considera y su dominio es R^+, el que consta de los elementos que representan la cantidad de personas que fallecen antes de cumplir la edad t, es decir,

$$d : A \subset \underset{t}{R^+} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{d(t)}{R^+},$$

Esta función representa la cantidad de gente que fallece antes de cumplir la edad t, bajo el supuesto de que no existe migración y, está dada por,

$$d(t) = S(0) - S(t),$$

es decir, La cantidad de gente que fallece antes de cumplir la edad exacta t es la diferencia de la población inicial y la población total de edad t.

Se han buscado expresiones analíticas satisfactorias para la función $S(t)$, como por ejemplo los ensayos de Bourgeois-Pichat[3] para representar la mortalidad durante el primer año de vida; dicho autor obtuvo la expresión

$$S(0) - S(t) = a + b \log^3(t+1),$$

la que es válida, aproximadamente, de fines del primer mes a fines del primer año (expresando a t en días) y que le ha permitido separar las defunciones endógenas (causa internas del propio individuo que le causan la muerte, como son: problemas de herencia, parto y embarazo) de las

[3] Roland Pressat, *El análisis demográfico*, Fondo de cultura Económica, 1983.

exógenas (causa externas del propio individuo que le causan la muerte, como son las condiciones de vida); a representa las causas endógenas y b las exógenas[4].

2.4.4 Función población total

El conjunto $\{N_t\}$ que consta de la cantidad de personas que integran una población en el tiempo t se puede sustituir por la función $N(t)$ definida para todos los valores conocidos hasta el año t, generalmente, los números enteros de los años en que esta última cantidad queda definida se determina mediante los censos de población y bajo el supuesto de que no existe migración.

La función de *población total* $N(t)$ es una relación cuyo dominio es un subintervalo $B \subset R^+$ en el que los elementos representan los años en que se considera una población y cuyo dominio es R^+ el que consta de la cantidad de personas que sobrevive en la población y los nacimientos ocurridos hasta el año t, es decir,

$$N : B \subset \underset{t}{R^+} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{N(t)}{R^+},$$

esta función representa la cantidad de personas en una población en el año t.

Un modelo simple de población total está dado por

$$N(t) = N(0)(1+i)^t,$$

en donde $N(0)$ es la población inicial que se incrementa a una tasa anual del $i\%$.

EJEMPLO

Si se considera que en una población la población inicial es de 100 habitantes y crece a una tasa anual del 3%, calcular la población total en el año $t = 10$.

[4] Existen estudios más recientes de dicha función pero para su análisis se requiere de herramientas que escapan al tema de funciones.

Solución:

La función de población total es de la forma

$$N(t) = 100(1 + 0.03)^t,$$

y la población total en el año $t = 10$ es,

$$N(10) = 100(1 + 0.03)^{10} = 134.4 \text{ personas},$$

pero, como no puede considerarse fracciones de personas, se considera que la población total en el año $t = 10$ es de 134 habitantes.

Si se considera que la población se incrementa continua y uniformemente en el transcurso del año, entonces la función de sobrervivencia toma la siguiente forma,

$$N(t) = N(0)e^{rt},$$

en donde $N(0)$ es la población inicial, r es la tasa anual de crecimiento de la población y t es el año en que se considera la población.

EJEMPLO

Si una población de 50,000 personas se incrementa continuamente en el tiempo a una tasa anual del 4%, determinar la población total al trancurrir 5 años.

Solución:

La función de población total es de la forma

$$N(t) = 50,000e^{0.04t},$$

y la población total en el año $t = 5$ es,

$$N(10) = 50,000e^{0.04(5)} = 61,070 \quad \text{habitantes.}$$

2.4.5 Función fecundidad.

$$f(x) = c(x-s)(s+n-x)^2; \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq x \leq s+n$$

En donde $f(x)$ es la fecundidad de acuerdo a la edad de las mujeres, x es la edad de la mujer, s el comienzo de la vida reproductiva, n la amplitud del intervalo de reproducción y c un parámetro positivo que depende del nivel de la fecundidad o número de hijos promedio por mujer.

Esta función ha sido utilizada con frecuencia en modelos teóricos, por William Brass[5], para describir en forma aproximada la variación de la fecundidad según la edad de las mujeres.

EJEMPLO

Calcular la variación de la fecundidad de una población entre las edades 25 y 30, si el comienzo de la vida reproductiva es a los 15 años, la amplitud del intervalo de reproducción es de 25 años y el nivel de fecundidad de dicha población es de 0.5.

Solución

Con base en los datos anteriores, se tiene que la fecundidad de la población es de,

$$f(x) = 0.5(x-15)(40-x)^2,$$

la fecundidad de las mujeres de edad 25 es de,

$$f(25) = 1,125 \text{ nacimientos},$$

[5]W., Brass, *The Demography of Tropical Africa*, Princeton University Press, 1968, Capítulo 3, Apéndice A.

la fecundidad de las mujeres de edad 30 es de,

$$f(30) = 750 \text{ nacimientos},$$

y la variación de la fecundidad entre los 25 y 30 añós es de 375 nacimientos, es decir que, la fecundidad disminuye en 375 nacimientos en el intervalo de fecundidad de las edades 25 y 30.

Capítulo 3

DERIVADAS.

Cuando un fabricante tiene una determinada producción de un bien y observa que ésta es menor que la demanda de su producto, entonces requiere incrementar su producción para satisfacer la demanda, pero necesita saber si al incrementar dicha producción no se generan gastos excesivos que disminuyan su ganancia y es así que aparecen los conceptos de costo marginal, ingreso marginal y beneficio marginal.

3.1 Aplicaciones a la economía.

3.1.1 Costo Marginal.

El *costo marginal* es el costo adicional que se genera al producir una unidad adicional de un producto o servicio.

Ahora, supongamos que tenemos una función costo $Q(x)$ que representa el costo por producir x unidades, de tal manera que el costo por producir h unidades adicionales es:

$$Q(x+h)-Q(x).$$

Al cociente

$$\frac{Q(x+h)-Q(x)}{h},$$

se le conoce como el *costo promedio* por producir h unidades adicionales. Cuando existe el límite del cociente anterior al tender h a cero,

$$\lim_{x \to 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h},$$

se le llama *costo marginal* por producir h unidades adicionales, es decir,

$$\text{Costo marginal} = Q'(x)$$

Como se analizó anteriormente, en la práctica solamente se conocen puntos aislados de la gráfica de la función costo, por tanto no es posible, en general, conocer la función que corresponde a tales puntos de la gráfica de la función costo, es por eso que se recurre a utilizar lo que se conoce como el *análisis marginal*, que consiste en determinar el costo por producir la siguiente unidad por medio de los puntos que se conocen en la gráfica, de la siguiente manera:

Al suponer que se tienen algunos puntos de cierta gráfica y que no se conoce la función costo a la que corresponden no se puede calcular el costo marginal al producir h unidades adicionales pero, se puede calcular, por extrapolación, el costo por producir la siguiente unidad, ya que se conoce el costo en el punto $x+1$ (además de conocer el costo en el punto x), entonces, el costo adicional por producir 1 unidad más es :

$$Q(x+1) - Q(x).$$

Si se considera que en la práctica el dominio de la función Q es un subconjunto de los números naturales y por tanto que $x + h \in N$[1], y que además, el punto más próximo a cero es 1, entonces, podemos considerar una aproximación al costo marginal dada por la relación anterior, de la siguiente manera,

$$Q(x+h) - Q(x) \approx Q'(x).$$

[1]Observe que h se encuentra en los naturales.

Cabe mencionar que, para que ésta aproximación se ajuste a la realidad es necesario que la gráfica de la función costo sea una curva suave, (dentro de determinado intervalo el comportamiento de la gráfica no varía mucho) y se requiere considerar, además, que se producen solamente unidades completas (ver ejemplo 3). En el ejemplo 4 se ilustra el caso en que la función costo no es una curva suave.

EJEMPLOS

1.- Un fabricante de autos tiene una producción x y el costo total anual de la producción se describe por medio de la función

$$Q(x) = 100,000 + 1,500x + 0.2x^2$$

El costo cuando se producen 100 autos es de \$252,00. Encontrar el costo marginal cuando se produce 1 auto más y determinar si es conveniente producirlo.

Solución:

Utilizando la definición de costo marginal, se tiene que es

$$Q'(x) = 1,500 + 0.4x,$$

y el costo por producir 1 auto más es,

$$Q'(100) = 1,540 \text{ pesos},$$

esto quiere decir, que si se produce 1 auto más, el costo se incrementa en \$1,540.

La función costo promedio es,

$$q(x) = \frac{100,000}{x} + 1,500 + 0.2x,$$

el costo promedio al producir 100 autos es,

$$q(100) = 2,520 \text{ pesos},$$

como el costo promedio de la producción de 100 autos es mayor al costo generado por producir un auto más, conviene producir la siguiente unidad.

2.- Supóngase que el costo de un artículo depende de la cantidad x producida de acuerdo con la función, $Q(x) = x^2 + 2x + 2$. Así, el costo por producir 300 artículos es de $90,602.

Calcular el costo marginal por producir la siguiente unidad y determinar si es conveniente producirla.

Solución:

La función costo marginal es, en este caso,

$$Q'(x) = 2x + 2,$$

el costo marginal por producir 1 artículo más es de

$$Q'(300) = 602 \text{ pesos},$$

la función costo promedio es, en este caso,

$$q(x) = x + 2 + \frac{2}{x},$$

y el costo promedio al producir 300 artículos es

$$q(300) = 302.01 \text{ pesos},$$

es decir, el costo promedio es menor que el costo de la siguiente unidad, por tanto, no conviene producir la siguiente unidad.

3.- Utilizando el análisis marginal resolver el ejemplo anterior y comparar los resultados.

Solución:

La función costo total es $Q(x) = x^2 + 2x + 2$,

el costo por producir 300 artículos es $Q(300) = 90,602$ pesos,

el costo por producir 301 artículos es $Q(301) = 91,205$ pesos,

y el costo marginal por producir 1 unidad más, después de las 300 unidades iniciales es

$$Q(301) - Q(300) = 603 \text{ pesos},$$

esto quiere decir que el costo adicional al producir una unidad más es de \$603 y como es mayor que el costo promedio por producir 300 unidades, no conviene producir la siguiente unidad.

Comparando con el resultado anterior, $Q(301) - Q(300) = 603 \approx 602 = Q'(300)$, se tiene que la aproximación es buena ya que, la curva de la función costo es una curva suave.

4.- La función costo total por producir un artículo es $Q(x) = 5e^{0.2x}$. El costo por producir 50 artículos es $Q(50) = 110,132.33$ pesos.

Determinar el costo marginal por producir la siguiente unidad, mediante el uso de la definición y mediante el análisis marginal.

Solución:

Por definición de la función costo marginal $Q'(x) = e^{0.2x}$

El costo adicional por producir 1 unidad más es $Q'(50) = 22,026.5$ pesos.

Utilizando el análisis marginal el costo por producir una unidad adicional es $Q(51) - Q(50) = 24,383.6$ pesos.

Al comparar resultados, se tiene que $Q'(50) \neq Q(51) - Q(50)$, así, se tiene que en contraposición a lo obtenido en el ejemplo 3 esta aproximación no es buena, es de esperarse este resultado pues la curva de la función no es una curva suave.

3.- Utilizando el análisis marginal resolver el ejemplo anterior y comparar los resultados.

Solución:

La función costo total es $Q(x) = x^2 + 2x + 2$,

el costo por producir 300 artículos es $Q(300) = 90,602$ pesos,

el costo por producir 301 artículos es $Q(301) = 91,205$ pesos,

y el costo marginal por producir 1 unidad más, después de las 300 unidades iniciales es

$$Q(301) - Q(300) = 603 \text{ pesos},$$

esto quiere decir que el costo adicional al producir una unidad más es de \$603 y como es mayor que el costo promedio por producir 300 unidades, no conviene producir la siguiente unidad.

Comparando con el resultado anterior, $Q(301) - Q(300) = 603 \approx 602 = Q'(300)$, se tiene que la aproximación es buena ya que, la curva de la función costo es una curva suave.

4.- La función costo total por producir un artículo es $Q(x) = 5e^{0.2x}$. El costo por producir 50 artículos es $Q(50) = 110,132.33$ pesos.

Determinar el costo marginal por producir la siguiente unidad, mediante el uso de la definición y mediante el análisis marginal.

Solución:

Por definición de la función costo marginal $Q'(x) = e^{0.2x}$

El costo adicional por producir 1 unidad más es $Q'(50) = 22,026.5$ pesos.

Utilizando el análisis marginal el costo por producir una unidad adicional es $Q(51) - Q(50) = 24,383.6$ pesos.

Al comparar resultados, se tiene que $Q'(50) \neq Q(51) - Q(50)$, así, se tiene que en contraposición a lo obtenido en el ejemplo 3 esta aproximación no es buena, es de esperarse este resultado pues la curva de la función no es una curva suave.

3.1.2 Ingreso Marginal.

De manera análoga a la definición de costo marginal se puede definir el *ingreso marginal*, que es el ingreso adicional obtenido por la venta de una unidad más de un producto o servicio. Observemos que si cada una de las unidades de un producto se vende al mismo precio, entonces, el ingreso marginal siempre es igual al precio.

Ahora, supongamos que tenemos una función ingreso $R(x)$ que representa el ingreso por la venta de x unidades y x es la cantidad vendida, de tal manera que el ingreso por vender h unidades adicionales es,

$$R(x+h) - R(x).$$

Al cociente

$$\frac{R(x+h) - R(x)}{h},$$

se le conoce como el ingreso promedio por vender h unidades adicionales y, si existe el límite del cociente anterior cuando h tiende a cero,

$$\lim_{x \to 0} \frac{R(x+h) - R(x)}{h},$$

entonces, a este límitese le llama *ingreso marginal* por vender h unidades adicionales, es decir,

$$\text{Ingreso marginal} = R'(x).$$

Análogamente, como en la función costo, en la práctica sólo se conocen puntos aislados de la gráfica de la función ingreso, por tanto, no es posible en general, conocer la función que corresponde a tales puntos de la gráfica de la función ingreso total, es por eso que recurrimos (como en el caso de la función costo) al análisis marginal, de la siguiente manera:

Al suponer que se tienen algunos puntos de cierta gráfica y que no se conoce la función ingreso a la que corresponden, no se puede calcular el ingreso marginal por vender h unidades adicionales, pero se puede calcular, por extrapolación, el ingreso por vender la siguiente unidad, ya que se conoce el ingreso en el punto $x+1$, además de conocer el ingreso en el punto x, entonces el ingreso adicional por vender 1 unidad más está dado por

$$R(x+1) - R(x).$$

Si se considera que en la práctica el dominio de la función R es un subconjunto de los números naturales y por tanto que $x + h \in N$, y que, además, el punto más proximo a cero es 1, entonces se puede considerar una aproximación al ingreso marginal dada por la relación anterior, de la siguiente manera,

$$R(x+h) - R(x) \approx R'(x).$$

Cabe mencionar que para que esta aproximación se ajuste a la realidad es necesario que la gráfica de la función ingreso sea una curva suave y se requiere considerar, además, que se venden solamente unidades completas.

Como x (número de unidades vendidas) y p (precio unitario) son variables no negativas, entonces $R(x)$ es no negativa. Sin embargo, $dR(x)/dx$ puede ser positiva o negativa ya que, a medida que se incrementa la demanda, el precio tiende a aumentar, hasta que se llega a un precio en el cual la demanda disminuye y por tanto el ingreso también disminuye; lo que significa, que no obstante que el ingreso total es no negativo, éste puede aumentar o disminuir a medida que se incrementa la cantidad de demanda.

EJEMPLO

Consideremos la función demanda $p(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x$, donde $p(x)$ representa el precio unitario y x el número de unidades.

a) Determinar la función ingreso total.

b) Determinar la función ingreso promedio.

c) Determinar la función ingreso marginal.

d) Analizar las funciones anteriores.

Solución:

a) La función ingreso total es para este caso,

$$R(x) = \frac{5}{2}x - \frac{3}{4}x^2, \qquad \text{donde } x \in (0, 10/3).$$

b) La función ingreso promedio es para este caso,

$$r(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x, \qquad \text{donde } x \in (0, 10/3).$$

c) La función ingreso marginal es para este caso,

$$R'(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x, \qquad \text{donde } x \in (0, 10/3).$$

d) Obsérvese que para las funciones de demanda lineales del tipo $R(x) = a - bx$, a medida que la cantidad de unidades x aumenta, el *ingreso total* también aumenta al principio, y posteriormente disminuye, mientras que el *ingreso medio* y el *ingreso marginal* decrecen linealmente cuando crece la cantidad de unidades x. Así mismo obsérvese que las gráficas del *ingreso medio* y del *ingreso total* se cortan en un punto (como se muestra en la figura 1), y además, con excepción de ese punto, la gráfica del *ingreso marginal* se encuentra por debajo de la gráfica del *ingreso promedio* (Figura 2).

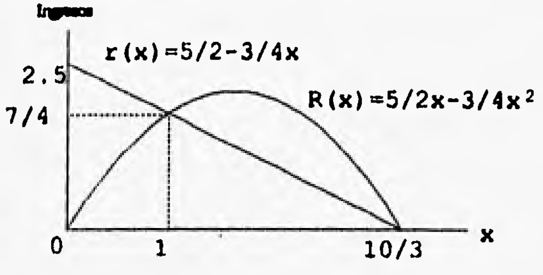


Figura 1

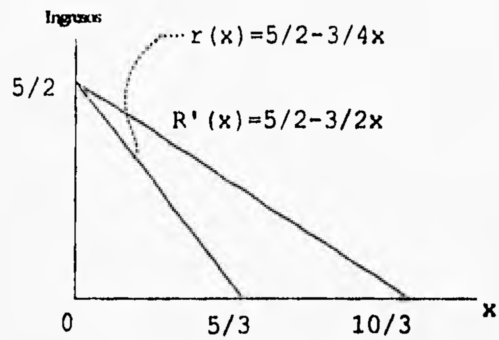


Figura 2

De lo anterior se puede ver que la gráfica del *ingreso marginal* interseca al eje x en un punto que es el valor de la producción total para el cual el *ingreso total* es máximo, mientras que la gráfica del *ingreso promedio* interseca al eje x en un punto que representa el doble de esa producción.

El valor de la pendiente de la función *ingreso medio* es la mitad del valor de la pendiente de la función del *ingreso marginal*, lo que significa que el ingreso medio es la mitad del ingreso marginal al intersectar el eje x.

El comportamiento de todas las funciones ingreso cuadráticas es similar al comportamiento anterior.

3.1.3 Beneficio Marginal,

La *ganancia* o *beneficio marginal* es la diferencia que existe entre el ingreso marginal y el costo marginal.

La regla básica que se utiliza para saber si se produce o no la siguiente unidad es:

a) Si el ingreso marginal es mayor que el costo marginal, entonces, se producirá la siguiente unidad.

b) Si el ingreso marginal es menor que el costo marginal, entonces no se producirá la siguiente unidad, ya que el producirla generaría pérdidas.

c) Si el ingreso marginal es igual al costo marginal, entonces tampoco se producirá la siguiente unidad, debido a que el beneficio ya es máximo, (se demostrará en la página ( ) en la sección sobre máximos y mínimos).

Si no se conocen las funciones ingreso total y costo total, entonces se requiere trabajar directamente con la función beneficio total, y así, se define el *beneficio marginal* como la ganancia que se obtiene al producir y vender una unidad adicional de un producto o servicio.

Ahora, al suponer que se tiene una función beneficio $G(x)$, donde x es la cantidad de unidades producidas y vendidas y $G(x)$ es el beneficio por producir y vender x unidades, de tal manera que el beneficio por producir y vender h unidades adicionales es:

$$G(x+h)-G(x).$$

Al cociente

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h},$$

se le conoce como el *beneficio promedio* por producir y vender h unidades adicionales.

Si existe el límite del cociente anterior cuando h tiende a cero, entonces a

$$\lim_{x \to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h},$$

se le llama *beneficio marginal* por producir y vender h unidades adicionales, es decir,

$$\text{Beneficio marginal} = G'(x).$$

Análogamente, como en las funciones costo e ingreso, se usará el análisis marginal para determinar una aproximación a la función beneficio marginal, de la siguiente manera:

Al suponer que se conocen algunos puntos de cierta gráfica de una función beneficio que no se conoce, por lo que no se puede calcular el beneficio marginal al producir y vender h unidades adicionales, pero si se puede calcular, por extrapolación, el beneficio obtenido por producir y vender la siguiente unidad, ya que se conoce el beneficio en el punto $x+1$ (además de conocer el beneficio en el punto x), entonces, el beneficio adicional por producir y vender 1 unidad más es

$$G(x+1) - G(x).$$

Si se considera que en la práctica el dominio de la función $G(x)$ es un subconjunto de los números naturales y, por tanto, que $x + h \in N$, y que además, el punto más próximo a cero es 1, entonces se puede considerar una aproximación al beneficio marginal dada por la relación anterior, de la siguiente manera

$$G(x+h) - G(x) \approx G'(x).$$

Cabe mencionar que para que esta aproximación se ajuste a la realidad es necesario que la gráfica de la función beneficio sea una curva suave y se requiere considerar además que se producen y se venden solamente unidades completas.

EJEMPLO

Si la función de ingreso total es $R(x) = 500x - 0.005x^2$, $x \in (0, 100\,000)$, y la función costo total es $Q(x) = 150 + 100x + 0.003x^2$, $x \in (0, 500)$. Determinar la función beneficio marginal.

Solución:

La función beneficio total es para este caso,

$$G(x) = -0.008x^2 + 400x - 150, \qquad x \in (0, 500)$$

al derivar la función anterior, obtenemos la función beneficio marginal,

$$G'(x) = -0.016x + 400,$$

que representa la ganancia o pérdida al producir una unidad adicional.

3.2 APLICACIONES A LA DEMOGRAFIA Y A LOS SEGUROS.

Ahora se presentará en forma resumida algunas funciones que se utilizan en demografía, las cuales corresponden conceptualmente a la noción de derivada. Para un análisis más amplio puede verse el artículo de J. Somoza[2].

3.2.1 Incremento anual de la población N'(t).

El incremento anual de la población es la cantidad en la que aumenta la población al transcurrir un año y se define como la diferencia entre la población total en el tiempo $t+1$ y la población total inicial en el tiempo t, dividido entre el intervalo de tiempo transcurrido, es decir,

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = N(t+1) - N(t).$$

Al suponer que la población se incrementa continua y uniformemente[3] durante el transcurso del año, se obtiene el incremento medio anual de la población, que está dado por

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t},$$

al tomar el límite de esta relación y, si existe este límite, se tiene :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{dN(t)}{dt},$$

[2]Jorge Somoza, *Poblaciones teóricas*, CELADE, Serie B, No.20, Santiago de Chile.
[3]La población se incrementa en la misma cantidad a cada instánte.

este límite, en demografía, representa el *incremento anual de la población* en el tiempo t. Esta derivada también recibe el nombre de *densidad anual de incremento* en t.

EJEMPLO

Dada la función de población $N(t) = 6,000 + 234t + 9t^2 + 2t^3$ obtener el incremento anual de la población en el tiempo $t = 1$.

Solución:

La derivada de la función de población es

$$N'(t) = 234 + 18t + 6t^2,$$

al sustituir el valor de $t = 1$ en la expresión anterior, se tiene

$$N'(1) = 258 \text{ personas},$$

es decir, en el transcurso de un año el incremento de la población es de 258 personas.

3.2.2 Tasa anual de crecimiento de la población r(t).

La tasa anual media de crecimiento de la población correspondiente a un intervalo $(t, t + \Delta t)$ es igual al cociente del incremento medio de la población en ese intervalo entre la población total, es decir,

$$\frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{[N(t+\Delta t) - N(t)]/\Delta t}{N(t)},$$

donde

$$r(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)}$$

y si existe el límite del cociente

$$\frac{[N(t+\Delta t) - N(t)]/\Delta t}{N(t)}$$

entonces

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[N(t+\Delta t)-N(t)]/\Delta t}{N(t)} = \frac{N'(t)}{N(t)},$$

que representa la tasa instantánea de crecimiento de la población, en el tiempo t durante el año, conocida como la tasa anual de crecimiento de la población.

EJEMPLO

Calcular la tasa anual de crecimiento en el momento $t = 1$, de la función del ejemplo anterior.

Solución:

Como la función de población es para este caso

$$N(t) = 6,000 + 234t + 9t^2 + 2t^3,$$

y el incremento de la población es,

$$N'(t) = 234 + 18t + 6t^2,$$

la tasa anual de crecimiento de la población es,

$$r(t) = \frac{6,000 + 234t + 9t^2 + 2t^3}{234 + 18t + 6t^2},$$

al sustituir el valor de $t = 1$ en la expresión anterior, se tiene que

$$r(1) = 0.04131,$$

que es el valor de la tasa anual de crecimiento al transcurrir un año, es decir la tasa de incremento de la población es del 4.1% anual.

3.2.3 Densidad anual de nacimientos B'(t).

Dada la función $B(t)$ que representa los nacimientos totales en el tiempo t, $t \in N$, los nacimientos ocurridos durante el intervalo $(t, t+\Delta t)$ están determinados por

$$B(t+\Delta t) - B(t),$$

y así, el número de nacimientos promedio en el transcurso del tiempo $(t, t+\Delta t)$ es

$$\frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t},$$

y si el límite anterior existe, entonces

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} = B'(t),$$

que representa la ***densidad anual de nacimientos*** en el tiempo t. Observe que si $B'(t) \geq 0$ entonces $B(t)$ es una función creciente.

EJEMPLO

Supongase que la función que representa los nacimientos de cierta población es $B(t) = 2x^2 - 3x$, calcular la densidad anual de nacimientos en el tiempo $t = 1$.

Solución:

La derivada de la función de nacimientos es

$$B'(t) = 2x + 2,$$

al sustituir el valor de $t = 1$ en la expresión anterior, se tiene

$$B'(1) = 4 \text{ nacimientos},$$

es decir, en el transcurso del primer año los nacimientos aumentan en 4 personas.

3.2.4 Densidad anual de defunciones D'(t).

Si se considera que la función $D(t)$ representa las defunciones totales en el tiempo t, $t \in N$, entonces las defunciones ocurridas durante el intervalo $(t, t + \Delta t)$ están dadas por

$$D(t + \Delta t) - D(t),$$

el número de defunciones promedio en el transcurso del tiempo $(t, t + \Delta t)$ es

$$\frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t},$$

y si el límite anterior existe, entonces

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t} = D'(t),$$

que representa la *densidad anual de defunciones* en el tiempo t, Observe que $D'(t) \geq 0$,entonces $D(t)$ es una función creciente.

EJEMPLO

Suponga que la función $D(t) = x^2 + 2x + 10$ representa las defunciones de cierta población, calcular la densidad anual de defunciones en el tiempo $t = 1$.

Solución:

La derivada de la función de defunciones es

$$D'(t) = 2x + 2,$$

al sustituir el valor de $t = 1$ en la expresión anterior, se tiene

$$D'(1) = 4 \text{ defunciones},$$

es decir, en el transcurso del primer año se tienen 4 defunciones por lo que la población disminuye en 4 personas.

Capítulo 4

MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

4.1 Función costo.

En el caso de la función costo total $Q(x)$ no se puede encontrar un valor mínimo en el primer cuadrante, ya que al ser creciente y no negativa entonces su primera derivada también es no negativa y, por tanto, no se anula en un valor positivo para x.

Es necesario encontrar una relación entre el costo promedio y el costo marginal, que nos ayude a determinar la producción del mayor número de unidades, de manera que éstas se produzcan con un costo por unidad mínimo; por lo anterior surge la siguiente

Propiedad

Si una función costo es estrictamente creciente, positiva y convexa, entonces el costo marginal $Q'(x)$ es igual al costo promedio $q(x)$ en un punto x en el cual $q(x)$ es mínimo, es decir , en donde se produce un costo por unidad mínimo.

Demostración :

La función costo total se representa por

$$Q(x),$$

la función costo promedio (costo por unidad) se representa por

$$q(x) = \frac{Q(x)}{x},$$

y la función costo marginal se representa por

$$\frac{dQ(x)}{dx} = Q'(x).$$

Es claro que la derivada de la función costo promedio se anula si y sólo si,

$$\frac{Q(x)}{x} = Q'(x).$$

Por lo que hay un punto crítico en donde $q(x) = Q'(x)$.

Es fácil verificar que

$$\frac{d^2q(x)}{dx^2} = \frac{x^3Q''(x)}{x^4} = \frac{Q''(x)}{x} > 0,$$

basándose en que $xQ'(x) = Q(x)$.

Ahora, como $x > 0$ y $Q''(x) > 0$ por hipótesis, entonces existe un mínimo en el punto en donde el costo marginal y el costo promedio son iguales, es decir, las curvas del costo marginal y del costo promedio se cortan en el punto mínimo del costo promedio.

■

EJEMPLO

El costo total de la producción de x unidades de cierto producto se describe por medio de la función $Q(x) = 100,000 + 1,500x + 0.2x^2$, donde $Q(x)$ representa el costo total, expresado en pesos.

a) Determinar cuántas unidades x deberán de fabricarse a fin de minimizar el costo promedio por unidad.

b) Demostrar que el costo promedio y el costo marginal son iguales en ese punto.

c) Graficar la función costo promedio y la función costo marginal.

Solución:

a) El costo promedio está dado por

$$q(x) = \frac{100,000}{x} + 1,500 + 0.2x$$

y la derivada del costo promedio por

$$q'(x) = -\frac{100,000}{x^2} + 0.2,$$

así, $q'(x)$ es igual a cero, si y sólo si,

$$x = \pm 707.11 \text{ productos},$$

pero como x representa producción entonces se considera solamente $x = 707.11$, como punto crítico.

Ahora la segunda derivada del costo promedio es

$$q''(x) = \frac{200,000}{x^3},$$

y al sustituir el valor de x, en esta expresión, se tiene que,

$$q''(707.11) = 0.0005659 > 0,$$

por tanto, existe un costo promedio mínimo cuando se produce 707.11 unidades y, así, el costo por unidad es

$$q(707.11) = 1,782.84 \text{ pesos}$$

es decir, el costo promedio mínimo es igual a $1,782.84 cuando se produce 707.11 unidades.

b) La función costo total está dada por

$$Q(x) = 100,000 + 1,500x + 0.2x^2,$$

y la función costo marginal por

$$Q'(x) = 1,500 + 0.4x,$$

y, así, el costo marginal en 707.11 es igual a

$$Q'(707.11) = 1,782.84 \text{ pesos},$$

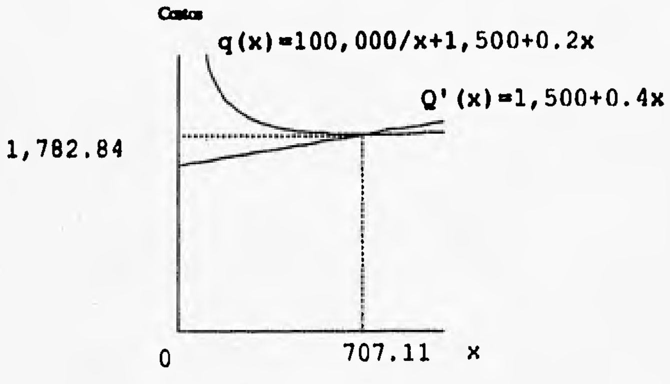
por tanto, el costo marginal es igual al costo promedio en el punto $x = 707.11$, es decir,

$$Q'(707.11) = q(707.11).$$

En la práctica se toma el valor de x =707 unidades ya que no se produce partes de unidades

.

c) La gráfica siguiente muestra el resultado anterior.



4.2 Función ingreso.

En el caso de las funciones ingreso, sí se puede determinar el ingreso máximo esperado, utilizando directamente la función ingreso total como lo muestran los siguientes

EJEMPLOS

1.- La demanda del producto de una compañía varía según el precio que se le fije al producto, de acuerdo con la siguiente función demanda

$$p(x) = 500 - 50x, \qquad x \in (0, 10)$$

donde x es el precio del artículo (en miles de pesos).

a) Determinar la función ingreso total.

b) Determinar el precio que deberá cobrarse con objeto de maximizar el ingreso total.

c) Determinar el valor máximo del ingreso total anual.

d) Graficar la función ingreso total.

Solución:

a) La función ingreso total está dada por

$$R(x) = 500x - 50x^2.$$

b) Para determinar el precio con el que se máximiza el ingreso total, se calcula la primera derivada de la función ingreso total, y es

$$R'(x) = 500 - 100x.$$

La primera derivada de la función ingreso total es cero si y sólo si, $x = 5$, al calcular la segunda derivada se tiene que $R''(x) = -100 < 0$, por tanto, hay un máximo relativo en $x = 5$.

El precio que deberá cobrarse para maximizar el ingreso total es de $5,000 por unidad.

c) El valor máximo del ingreso total anual está dado por

$$R(5) = 1,250 \text{ pesos.}$$

Así, el ingreso total anual se maximiza en $1,250 (miles), es decir, se obtiene $1.25 millones cuando la empresa cobra $5,000 por unidad vendida.

d) La gráfica de la función ingreso total, para este caso aparece en la figura 1, donde el eje x representa el precio en miles de pesos y el eje $R(x)$ representa el ingreso en miles de pesos.

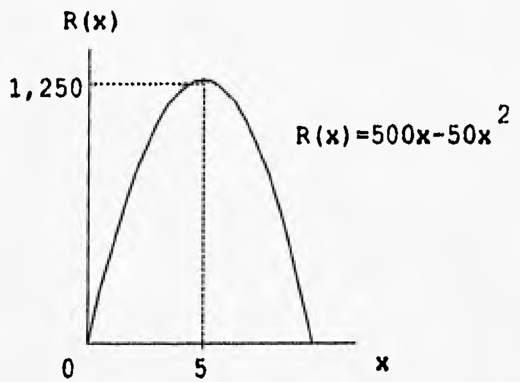


Figura 1

2.- Las autoridades de tránsito han encuestado a los ciudadanos a fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa admitiera distintos importes. Basándose en los resultados de las encuestas, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada para la demanda, la cual expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa.

La función demanda está dada por

$$f(x) = 10{,}000 - 125x, \qquad x \in (0, 80)$$

en donde $f(x)$ representa el número de pasajeros por día y x representa la tarifa en pesos.

a) Determinar la función ingreso total.

b) Determinar la tarifa que se cobraría con objeto de maximizar el ingreso diario por la tarifa de los autobuses.

c) Determinar el ingreso máximo esperado.

d) Determinar el número de pasajeros que se espera con esta tarifa.

e) Graficar la función ingreso total.

Solución:

a) La función ingreso total está dada por

$$R(x) = 10,000x - 125x^2.$$

b) Como la primera derivada de $R(x)$ está dada por

$$R'(x) = 10,000 - 250x,$$

entonces $R'(x)$ será igual a cero si $x = 40$ pesos y como, además, la segunda derivada de la función ingreso total es

$$R''(x) = -250,$$

se tiene que

$$R''(40) = -250 < 0,$$

por tanto, existe un máximo relativo en el punto $x = 40$ pesos.

El ingreso diario se maximizará cuando se cobre una tarifa de $40.

c) El ingreso máximo esperado con esta tarifa es de

$$R(40) = 200,000 \text{ pesos},$$

es decir el máximo ingreso esperado es de $200,000 cuando se cobra una tarifa de $40.

d) El número de pasajeros que se espera con esta tarifa es de

$$f(40) = 5{,}000,$$

pasajeros por día si se cobra una tarifa de \$40.

e) La gráfica de la función ingreso total, para este caso, aparece en la figura 2, en donde el eje x representa la tarifa en pesos y el eje $R(x)$ representa el ingreso diario en pesos.

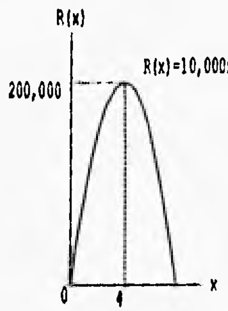


Figura 2

Análogamente, como en el caso de la función costo, se puede determinar el ingreso por unidad máximo, la cual tiene la siguiente

Propiedad

Si una función ingreso es cóncava hacia abajo y positiva, entonces se tiene que la función ingreso marginal $R'(x)$ es igual a la función ingreso promedio $r(x)$, en un punto x en donde el ingreso promedio $r(x)$ es máximo, es decir, donde se produce un ingreso máximo por unidad .

Demostración :

La función ingreso total se representa por

$$R(x),$$

la función ingreso promedio se representa por

$$r(x) = \frac{R(x)}{x},$$

y la función ingreso marginal se representa por

$$R'(x) = \frac{dR(x)}{dx},$$

por tanto, $r'(x)$ se anula si y sólo si,

$$R'(x) = \frac{R(x)}{x} = r(x).$$

Con lo anterior, se encuentra un punto crítico en el punto en donde el ingreso marginal es igual al ingreso promedio por lo que, al usar $xR'(x) = R(x)$, se tiene que

$$\frac{d^2r(x)}{dx^2} = \frac{x^3R''(x)}{x^4} = \frac{R''(x)}{x} < 0,$$

ya que $x > 0$ y $R''(x) < 0$, por hipótesis, y, así cuando x es tal que,

$$R'(x) = r(x),$$

se tiene un valor máximo.

Es decir, las curvas del ingreso total e ingreso promedio se intersecan en un punto en donde el ingreso promedio es máximo.

∎

EJEMPLOS

1.- Dada la función ingreso total $R(x) = 42x + x^2 - x^3$, $x \in (0,7)$, donde x representa el número de artículos (en miles) y $R(x)$ el ingreso obtenido, en miles de pesos, al vender x artículos.

a) Determinar el ingreso máximo esperado y graficar la función ingreso total.

b) Demostrar que el ingreso promedio es igual al ingreso marginal en el punto máximo de la función ingreso promedio y graficar las funciones ingreso marginal e ingreso promedio.

Solución:

a) La función ingreso total está dada por

$$R(x) = 42x + x^2 - x^3,$$

al derivar la función ingreso total se tiene

$$R'(x) = 42 + 2x - 3x^2,$$

y es igual a cero si y sólo si $x = -3.4$ artículos ó $x = 4.1$ artículos. Como x representa el nivel de producción no puede tomar el valor negativo, por tanto, se toma $x = 4.1$ artículos como punto crítico.

La segunda derivada de la función ingreso total es

$$R''(x) = 2 - 6x,$$

y al sustituir el valor de $x = 4.1$,en la expresión anterior se tiene,

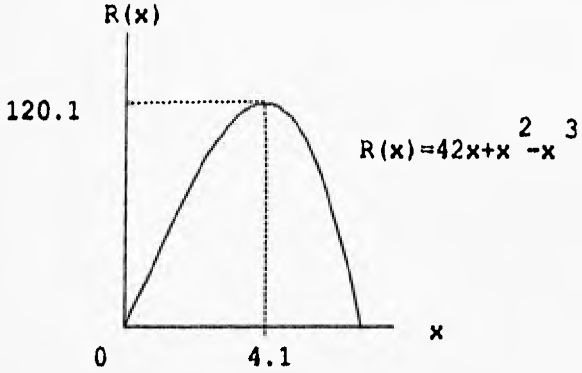
$$R''(4.1) = -22.6 < 0,$$

por tanto, existe un máximo relativo en el punto $x = 4.1$, el cual es

$$R(4.1) = 120.1 \text{ pesos},$$

es decir, el ingreso máximo obtenido es de $120,100 con la venta de 4,100 unidades.

Su gráfica es la siguiente



b) La función ingreso promedio es,

$$r(x) = 42 + x - x^2,$$

la primera derivada de la función ingreso promedio está dada por,

$$r'(x) = 1 - 2x,$$

y es igual a cero si y sólo si $x = 1/2$ artículos.

La segunda derivada de la función ingreso promedio es,

$$r''(x) = -2 < 0,$$

por tanto, existe un máximo relativo en $x = 1/2$.

El ingreso promedio en $x = 1/2$ artículos es,

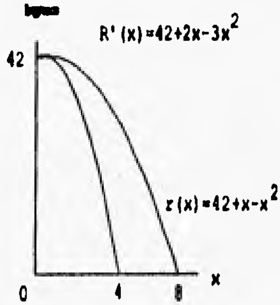
$$r(1/2) = 169/4 \text{ pesos},$$

y el ingreso marginal en $x = 1/2$ está dada por,

$$R'(1/2) = 169/4,$$

es decir, el ingreso marginal es igual al ingreso promedio en el punto máximo de la función ingreso promedio.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior



4.3 Función beneficio.

En el caso de que se conozca las funciones ingreso total y costo total no se utiliza directamente la función beneficio y se utiliza la siguiente

Propiedad

Si se tiene una función costo estrictamente creciente, positiva y convexa y una función ingreso cóncava hacia abajo, entonces el ingreso marginal y el costo marginal son iguales en un punto x; en este punto el beneficio total será máximo.

Demostración:

La función beneficio total está dada por

$$G(x) = R(x) - Q(x),$$

la función beneficio marginal es

$$G'(x) = R'(x) - Q'(x),$$

y es igual a cero, si y sólo si,

$$R'(x) = Q'(x).$$

Con lo anterior tenemos un punto crítico cuando el ingreso total es igual al costo total.

Ahora, la segunda derivada de la función beneficio total es

$$G''(x) = R''(x) - Q''(x).$$

Para poder obtener la máxima utilidad es necesario que

$$G''(x) < 0,$$

es decir,

$$R''(x) < Q''(x),$$

lo que es verdadero, ya que, por hipótesis $R''(x) < 0$ y $Q''(x) > 0$.

Por tanto, existe un beneficio máximo en un punto en donde el ingreso marginal es igual al costo marginal.

■

EJEMPLO

La función costo total por la producción de cierto artículo es $Q(x) = 100x + 0.003x^2$ y la función ingreso total por la venta del mismo artículo está dada por $R(x) = 500x - 0.005x^2$.

Determinar el beneficio máximo y verificar que se encuentra en el punto en donde la función costo marginal es igual a la función ingreso marginal.

Solución:

La función beneficio total está dada por

$$G(x) = 400x - 0.008x^2,$$

al derivar ésta función se tiene que

$$G'(x) = 400 - 0.016x,$$

la que es igual a cero si y sólo si $x = 25,000$ artículos, o sea que $x = 25,000$ es un punto crítico.

Ahora, como

$$G''(x) = -0.0016 < 0,$$

existe un máximo cuando se produce y se vende 25,000 artículos.

Para verificar que el máximo es el punto en donde el ingreso marginal es igual al costo marginal, tenemos que la función ingreso total es

$$R(x) = 500x - 0.005x^2,$$

la función costo total es

$$Q(x) = 100x + 0.003x^2,$$

la función ingreso marginal es

$$R'(x) = 500 - 0.01x,$$

y la función costo marginal etá dada por:

$$Q'(x) = 100 + 0.006x,$$

por tanto,

$$R'(x) = Q'(x),$$

o sea,

$$500 - 0.01x = 100 + 0.006x,$$

lo que implica que

$$x = 25,000 \text{ artículos.}$$

Por lo que tenemos el beneficio máximo cuando se produce y se vende 25,000 unidades.

Capítulo 5

DIBUJO DE GRAFICAS.

Este capítulo es muy importante, sobre todo para los estudiantes de actuaría pues, en la práctica, sucede que su primer enfrentamiento con las matemáticas aplicadas es, generalmente, a través de gráficas. En este capítulo se insistirá en mostrar al alumno en lo posible, la existencia de regiones del dominio de la gráfica donde es probable que ésta carezca de sentido y cómo se compagina la práctica con la teoría.

En el análisis de las siguientes funciones se denota la importancia que tiene considerar sólo la parte que tiene sentido de la gráfica.

5.1 ANALISIS DE LAS FUNCIONES LINEALES DE COSTO.

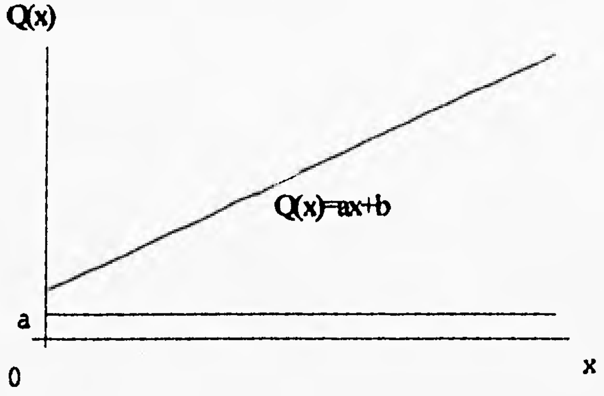
5.1.1 Función costo total.

Dado que $Q(x) = ax + b$ donde $a > 0$ y $b \geq 0$, es claro que la gráfica de la función costo total es una recta con pendiente positiva

5.1.2 Función costo marginal.

Dado que $Q'(x) = a$ es claro que la gráfica de la función costo marginal es la recta constante a.

En las siguientes figuras aparecen las gráficas del costo total y del costo marginal



5.1.3 Costo promedio.

Dado que la función costo promedio está dada por

$$q(x) = a + \frac{b}{x},$$

Si $a > 0$, $x > 0$ y $b = 0$, entonces la gráfica de la función costo promedio es la recta $q(x) = a$.

En el caso que $b > 0$, para deteminar su gráfica se seguirán los siguientes pasos :

1.- $q(x) \neq 0$ para $x > 0$, $a > 0$ y $b > 0$, por tanto, no hay intersección con los ejes en el primer cuadrante.

2.- $q(x)$ es continua en su dominio ya que es la suma de dos funciones continuas en su dominio.

3.- Para toda x real,

$$q'(x) = -\frac{b}{x^2} \neq 0,$$

por tanto, no existen puntos críticos.

4.- $q'(x) < 0$ ya que $b > 0$, por tanto, $q(x)$ es estrictamente decreciente.

5.- para $b \neq 0$,

$$q''(x) = \frac{2b}{x^3} > 0,$$

por tanto, es cóncava hacia arriba.

6.- $\lim_{x \to 0^+} q(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 0^-} q(x) = -\infty$.

7.- $\lim_{x \to \infty} q(x) = 0$.

8.- De acuerdo con el paso 6, se tiene que $x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica $q(x)$. Como

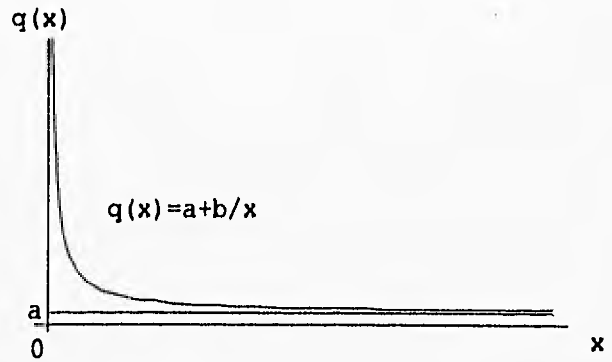
$$\lim_{x \to \infty} \frac{q(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax + b}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right) = 0,$$

y

$$\lim_{x \to \infty} q(x) = \lim_{x \to \infty} \left(a + \frac{b}{x} \right) = a,$$

$q(x) = a$ es una asíntota horizontal.

Por lo anterior, el costo promedio se representa por una rama de una hipérbola equilátera, situada en el primer cuadrante (si $b > 0$), de acuerdo con lo dicho en la introducción de este capítulo, con asíntota $q(x) = a$ y $x = 0$ asíntota vertical o por la recta $q(x) = a$ cuando $b = 0$, como lo muestra la gráfica siguiente,



El costo promedio es, por consiguiente, una función decreciente del número x de unidades producidas; no tiene un valor mínimo, pero se aproxima al costo marginal a , a medida que aumenta el número de unidades producidas.

5.2 ANALISIS DE LAS FUNCIONES CUADRATICAS DE COSTO.

5.2.1 Función costo total.

La función costo total está dada por

$$Q(x) = ax^2 + bx + c, \qquad \text{donde} \qquad a > 0 \ \text{ y } \ b, c \geq 0,$$

para deteminar su gráfica se seguirán los siguientes pasos :

1.- Como $a > 0$ y $b, c, x \geq 0$ la gráfica de la función nunca interseca al eje x en el primer cuadrante.

Si $x = 0$ entonces $Q(0) = c$, por tanto, la gráfica interseca al eje $Q(x)$ en el punto c cuando $x = 0$.

2.- Como $Q(x)$ es una función polinomial, es una función continua en todo R.

3.- $Q'(x) = 2ax + b$ y es igual a cero si,

$$x = -\frac{b}{2a},$$

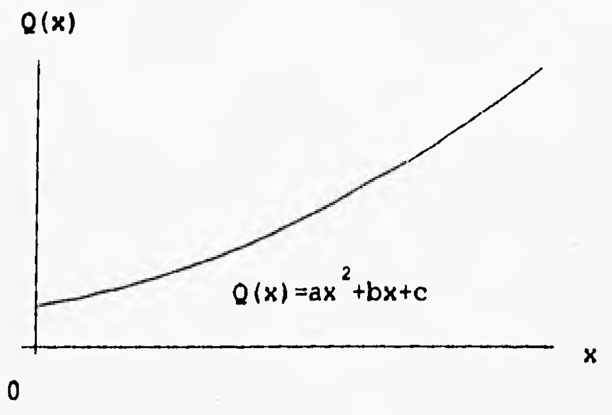
por tanto, tenemos un punto crítico en dicho valor de x que no se encuentra en el primer cuadrante.

4.- Como $Q'(x) > 0$ para toda $x > 0$ y $b \geq 0$, $Q(x)$ es estrictamente creciente.

5.- Como $Q''(x) = 2a > 0$, $Q(x)$ es cóncava hacia arriba y existe un mínimo en el punto crítico

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Con lo anterior, es claro que el costo total se representa por la parte de una parábola correspondiente al primer cuadrante, de acuerdo con lo dicho en la introducción de este capítulo, como lo muestra la gráfica siguiente,



5.2.2 Función costo promedio.

La función costo promedio está dada por

$$q(x) = ax + b + \frac{c}{x},$$

para deteminar su gráfica se seguirán los siguientes pasos :

1.- $q(x) \neq 0$ ya que $a, x > 0$ y $b, c \geq 0$, por tanto, no hay intersección con los ejes en el primer cuadrante.

2.- $q(x)$ es continua en su dominio ya que es la suma de funciones continuas en su dominio.

3.- La primera derivada de la función costo promedio es:

$$q'(x) = a - \frac{c}{x^2},$$

y es igual a cero si:

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}},$$

Pero como sólo nos interesan los puntos positivos ya que las funciones costo son no negativas, tenemos un punto crítico en:

$$x = +\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

4.- En el intervalo $\left(0, \sqrt{\frac{c}{a}}\right)$ la función $q'(x)$ es negativa, por tanto, $q(x)$ es decreciente en dicho intervalo y en el intervalo $(\sqrt{\frac{c}{a}}, \infty)$ la función $q'(x)$ es positiva y por tanto, $q(x)$ es creciente.

5.- Por el paso anterior, $q(x)$ es cóncava hacia arriba y como,

$$q''(x) = \frac{2c}{x^3} > 0,$$

para $x > 0$ y $c \neq 0$, entonces, existe un mínimo en:

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

6.- $\lim\limits_{x\to 0^+} q(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} q(x) = -\infty$

7.- $\lim\limits_{x\to \infty} q(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} q(x) = -\infty$

8.- De acuerdo con el paso 6, se tiene que $x = 0$ es una asíntota vertical y como

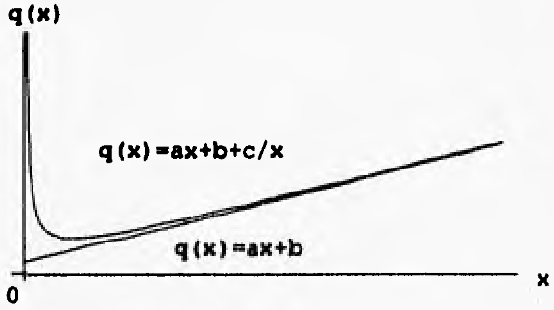
$$\lim_{x\to\infty} \frac{q(x)}{x} = \frac{ax + b + \frac{c}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) = a,$$

y además,

$$\lim_{x\to\infty} (q(x) - ax) = \lim_{x\to\infty}\left(b + \frac{c}{x}\right) = b,$$

una asíntota no vertical es la recta $q(x) = ax + b$.

Por lo anterior, es claro que el costo promedio se representa por la rama de una hipérbola situada en el primer cuadrante, de acuerdo con lo dicho en la introducción de este capítulo, con asíntotas $x = 0$ y $q(x) = ax + b$, como lo muestra la gráfica siguiente



5.2.3 Función costo marginal.

Dado que

$$Q'(x) = \frac{dQ(x)}{dx} = 2ax + b\,,$$

es claro que la gráfica de la función costo marginal, es una recta con pendiente positiva, ya que, $a > 0$.

5.3 ANALISIS DE LAS FUNCIONES CUBICAS DE COSTO.

5.3.1 Función costo total.

La función costo total está dada por

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

donde $a > 0$, $c, d \geq 0$, $b \leq 0$ y $b^2 \leq 3ac$, esta última restricción se aclara más adelante y para deteminar su gráfica se seguirán los siguientes pasos :

1.- $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \neq 0$, por tanto, no hay intersección con el semieje positivo x, cuando $x = 0$ la gráfica interseca al eje $Q(x)$ en el punto d.

2.- $Q(x)$ es continua en todos los reales, ya que es una función polinomial.

3.- $Q'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y es igual a cero, si y sólo si

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a},$$

que es un punto crítico.

Si $b^2 - 3ac < 0$, entonces tenemos una raíz imaginaria, lo cual en las funciones de costo no tiene ningún significado ya que su dominio está en R^+.

Si $b^2 - 3ac = 0$, entonces

$$x = -\frac{b}{3a},$$

y, por tanto,

$$Q\left(-\frac{b}{3a}\right) = \frac{b\,(2b^2 - 9ac)}{27a^2} + d.$$

Como $2b^2 - 9ac < 0$, ya que $b^2 - 3ac = 0$ y además, $a \geq 0$, $b \leq 0$, y $c \geq 0$, entonces

$$\frac{b\,(2b^2 - 9ac)}{27a^2} \geq 0,$$

y

$$\frac{b\,(2b^2 - 9ac)}{27a^2} + d \geq 0,$$

se halla en el primer cuadrante.

La segunda derivada de la función costo total es:

$$Q''(x) = 6ax + 2b,$$

al evaluar en $x = -b/3a$ se tiene que

$$Q''(-\frac{b}{3a}) = 0.$$

Y como

$$Q'''(x) = 6a > 0,$$

existe un punto de inflexión en el punto $x = -b/3a$.

Por tanto, si $b^2 - 3ac = 0$, no existen máximos ni mínimos pero sí un punto de inflexión.

Se elimina el caso $b^2 - 3ac > 0$, ya que esto nos llevaría a que $Q(x)$ tiene dos puntos críticos, a saber:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \quad (x_1 < x_2)$$

y como

$$Q'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3a(x - x_1)(x - x_2),$$

entonces si $x \in (0, x_1)$, se tiene que $Q'(x) > 0$, y si $x \in (x_1, x_2)$ se tiene que $Q'(x) < 0$, por tanto, x_1 es un máximo relativo, por el criterio de la primera derivada.

Si $x \in (x_1, x_2)$, entonces $Q'(x) < 0$, y si $x \in (x_2, \infty)$ entonces $Q'(x) > 0$,por tanto, x_2 es un mnimo relativo por el criterio de la primera derivada.

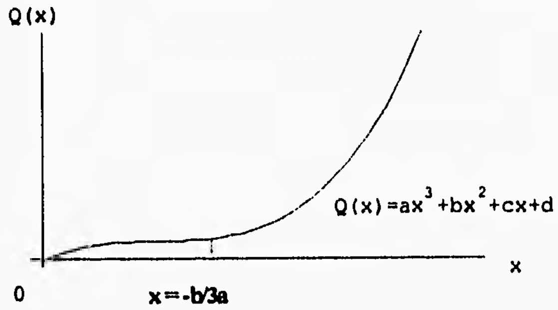
No tienen ningún significado en economía ya que una función costo no puede disminuir su valor a medida que se producen más unidades, por tanto, no es válido considerar el caso en que $b^2 - 3ac > 0$.

Así, no existe un punto maxímo ni mínimo relativo en $x = -b/3a$, pero sí un punto de inflexión en dicho valor de x . Por consiguiente, si $b^2 - 3ac \leq 0$, entonces $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ no tiene máximo ni mínimo relativo en el primer cuadrante, pero sí un punto de inflexión en el punto :

$$x = -\frac{b}{3a},$$

Es claro que el costo total se representa por la parte de una curva cúbica en el primer cuadrante, de acuerdo con lo dicho en la introducción del capítulo.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior,



5.3.2 Función costo marginal.

La función costo marginal está dada por $Q'(x) = 3ax^2+2bx+c$, y para deteminar su gráfica se seguirán los siguientes pasos :

1.- Si $x=0$, entonces $Q'(x)=c$, por tanto, interseca al eje $Q'(x)$ en $x=0$.
$Q'(x)>0$, por tanto, no interseca al eje x.

2.- $Q'(x)$ es continua en todos los reales, ya que es un polinomio.

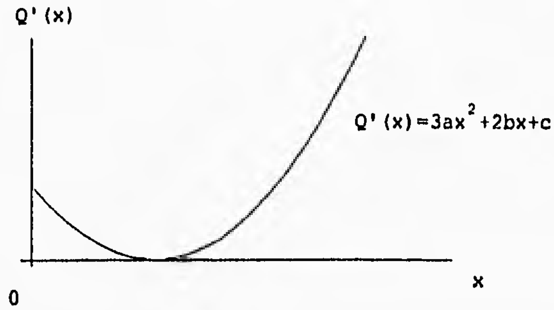
3.- $Q''(x) = 6ax+2b$ y es igual a cero si $x=-b/3a$, que es un punto crítico.

4.- Si $x \in (0,-b/3a)$, entonces $Q''(x)<0$, y si $x \in (-b/3a, \infty)$ entonces $Q''(x) > 0$.

5.- Por el paso 4, la función costo marginal es cóncava hacia arriba y como $Q'''(x) = 6a > 0$, existe un mínimo en el punto $x=-b/3a$.

Por lo anterior, es claro que el costo marginal queda representado por la sección de una parábola en el primer cuadrante, de acuerdo con lo dicho en la introducción del capítulo.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior,



5.4 ANALISIS DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES DE ORDEN SUPERIOR.

5.4.1 Costo total.

El costo total se representa por la función $Q(x) = ax^n + b$, donde $a > 0, b \geq 0$ y n entero > 1, para determinar su gráfica se siguen los siguientes pasos :

1.- Cuando $x = 0$, $Q(0) = b$, por tanto, interseca al eje Q en cero. Como $Q(x) > 0$, no interseca al eje x.

2.- $Q(x)$ es continua en los reales ya que es un polinomio.

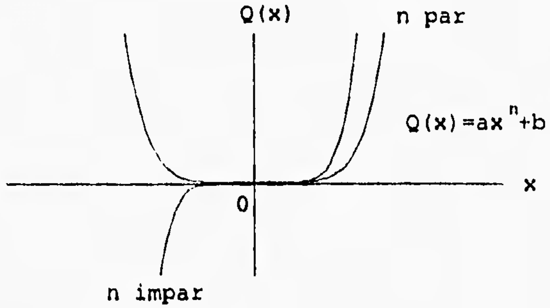
3.- $x = 0$ es un punto crítico.

4.- $Q(x)$ es creciente en $x > 0$ y $Q(x)$ es decreciente si $x < 0$,

5.- Como $Q''(x) > 0$, para $n > 1$, la función costo total es cóncava hacia arriba y por el criterio de la primera derivada existe un mínimo en $x = 0$.

De acuerdo a lo dicho en la introducción de este capítulo, debe ser claro que el costo total se representa por la parte de una curva algebraica de la cual sólo se considera la sección situada en el primer cuadrante.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior,



5.4.2 Costo promedio.

La función costo promedio está dada por

$$q(x) = ax^{n-1} + b/x,$$

donde $a > 0$, $b \geq 0$ y n entero > 1.

Su gráfica se determina mediante los siguientes pasos :

1.- Como $q(x) > 0$ y $x \neq 0$, $q(x)$ no interseca a los ejes.

2.- $q(x)$ es una función continua en su dominio, ya que es la suma de funciones continuas en su dominio.

3.- Como

$$q'(x) = a(n-1)x^{n-2} - \frac{b}{x^2},$$

entonces $q'(x)$ es igual a cero, si y sólo si,

$$a(n-1)x^n = b,$$

es decir si,

$$x = \left(\frac{b}{a(n-1)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

4.- $q'(x)$ es negativa si $x < (b/a(n-1))^{\frac{1}{n}}$ y es positiva si $x > (b/a(n-1))^{\frac{1}{n}}$, por tanto, para $x \in \left(0,\ (b/a(n-1))^{\frac{1}{n}}\right)$, $q(x)$ es decreciente.

Si $x \in \left((b/a(n-1))^{\frac{1}{n}}, \infty\right)$, entonces $q(x)$ es creciente.

5.- Como la segunda derivada de $q(x)$ es

$$= x^{-3}\left[a(n-1)(n-2)x^{n} + 2b\right],$$

al evaluar en el punto $x = b/a(n-1)^{\frac{1}{n}}$, se tiene,

$$q''(x) = \left(\frac{b}{a(n-1)}\right)^{-\frac{3}{n}}(nb) > 0$$

así que hay un mínimo en

$$x = \left(\frac{b}{a(n-1)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

6.- $\lim\limits_{x \to 0^{+}} ax^{n-1} + b/x = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^{-}} ax^{n-1} + b/x = -\infty$.

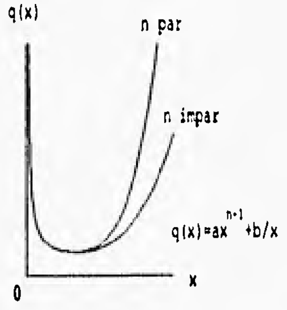
7.- $\lim\limits_{x \to \infty} ax^{n-1} + b/x = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^{n-1} + b/x = \infty$ si n es impar y $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^{n-1} + b/x = -\infty$ si n es par.

8.- De acuerdo con el paso 6, se tiene que $x = 0$ es una asíntota vertical. Ahora como

$$\lim_{x \to \infty} \frac{q(x)}{x} = \frac{ax^{n-1} + b/x}{x} = \lim_{x \to \infty}\left(ax^{n-2} + b\right) = \infty,$$

la función costo promedio no tiene asíntotas no verticales .

Debe ser claro que el costo promedio se representa por la rama de una hipérbola situada en el primer cuadrante, de acuerdo a lo dicho en la introducción del capítulo. Como lo muestra la gráfica siguiente,



5.4.3 Costo marginal.

El costo marginal está dado por $Q'(x) = anx^{n-1}$, para determinar sugráfica se siguen los siguientes pasos.

1.- $Q'(x)$ interseca a los ejes en el origen.

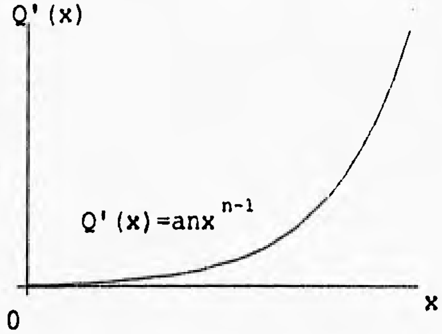
2.- $Q'(x)$ es una función continua.

3.- $Q''(x)$ es igual a cero si $x = 0$.

4.- $Q''(x) > 0$ para $x > 0$ y $Q''(x) < 0$ para $x < 0$, por tanto, $Q'(x)$ es decreciente si $x \in (-\infty, 0)$ y $Q'(x)$ es creciente si $x \in (0, \infty)$.

5.- Por el paso anterior, $Q(x)$ es cóncava hacia arriba y por el criterio de la primera derivada el punto $x = 0$ es un mínimo.

Por lo anterior, el costo marginal queda representado por la sección de una curva en el primer cuadrante, de acuerdo a lo dicho en la introducción de este capítulo, como lo muestra la gráfica siguiente,



5.5 ANALISIS DE LAS FUNCIONES COSTO EXPONENCIALES.

5.5.1 Costo total.

La función costo total está dada por $Q(x) = ae^{nx}$ donde $a > 0, n > 0$, para determinar su gráfica se siguen los siguientes pasos.

1.- La gráfica interseca al eje $Q(x)$ en el punto a y no interseca al eje x.

2.- $Q(x)$ es una función continua en todo R.

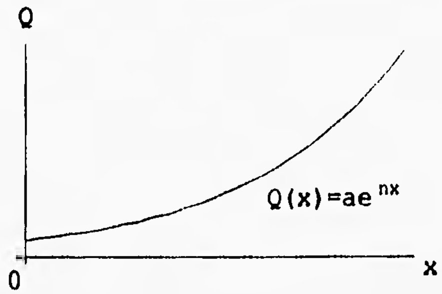
3.- $Q(x)$ no tiene puntos críticos.

4.- $Q(x)$ es una función estrictamente creciente en todo su dominio.

5.- Como $Q'(x)$ es creciente y $Q''(x) > 0$, entonces $Q(x)$ es cóncava hacia arriba y no tiene máximos, mínimos ni puntos de inflexión.

Es claro que el costo total se representa por la parte de una curva exponencial de la cual sólo se considera la sección situada en el primer cuadrante, de acuerdo a lo dicho en la introducción de este capítulo.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior,



5.5.2 Costo marginal.

La función costo marginal está dada por $Q'(x) = \frac{dQ(x)}{dx} = ane^{nx}$, para determinar su gráfica se siguen los siguientes pasos.

1.- La gráfica interseca al eje $Q'(x)$ cuando $x = 0$, en el punto an y no interseca al eje x.

2.- $Q'(x)$ es continua en todos los reales.

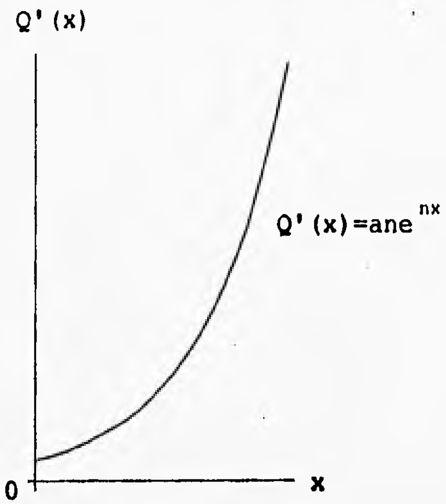
3.- $Q''(x) = an^2e^{nx} > 0$, para toda x, por tanto, no existen puntos críticos de $Q'(x)$.

4.- $Q'(x)$ es creciente en todo R.

5.- Por el paso 3, se tiene que $Q'(x)$ es creciente, y como $Q''(x) > 0$, entonces es cóncava hacia arriba y no tiene máximos, mínimos ni puntos de inflexión.

Por lo anterior, el costo marginal queda representado por la sección de una curva exponencial en el primer cuadrante, de acuerdo a lo dicho en la introducción de este capítulo.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior,



5.5.3 Costo promedio.

El costo promedio está dado por $q(x) = \frac{ae^{nx}}{x}$, para determinar su gráfica se siguen los siguientes pasos.

1.- No hay intersección con los ejes.

2.- $q(x)$ es continua en su dominio.

3.- La primera derivada del costo promedio es igual a cero si

$$ae^{nx}(nx-1) = 0,$$

o sea si

$$x = \frac{1}{n}.$$

4.- Si $x \in (0, 1/n)$ entonces $q(x)$ es decreciente y si $x \in (1/n, \infty)$ entonces $q(x)$ es creciente.

5.- La segunda derivada del costo promedio está dada por

$$q''(x) = \frac{axe^{nx}\left(n^2x^2 - 2nx + 2\right)}{x^4},$$

sustituyendo el valor de $x = \frac{1}{n}$ en $q''(x)$, se tiene que

$$q''(1/n) = \frac{\frac{a}{n}e^1\left(1 - 2 + 2\right)}{\frac{1}{n^4}} = an^3e^1 > 0,$$

por tanto, $q(x)$ es cóncava hacia arriba y tiene un mínimo en $x = \frac{1}{n}$.

6.- $\lim\limits_{x \to 0^+} q(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} q(x) = -\infty$.

7.- $\lim\limits_{x \to \infty} q(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} q(x) = 0$.

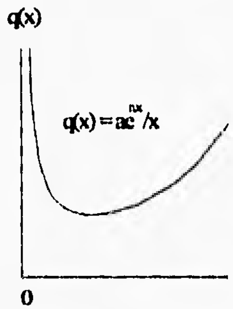
8.- De acuerdo con el paso 6 se tiene que en $x = 0$ existe una asíntota vertical y como

$$\lim_{x \to \infty} \frac{q(x)}{x} = \frac{ae^{nx}}{x^2} = \infty,$$

no tiene asíntotas no verticales.

Debe ser claro que el costo promedio se representa por la rama de una hipérbola situada en el primer cuadrante, de acuerdo a lo dicho en la introducción de este capítulo.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior,

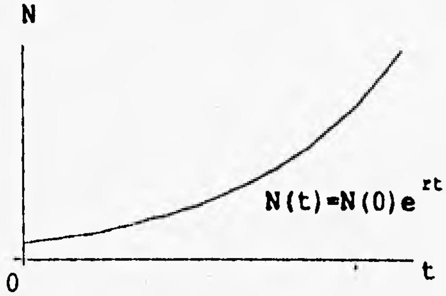


5.6 ANALISIS DE ALGUNAS FUNCIONES DEMOGRAFICAS.

5.6.1 Población total.

La función población total se representa por $N(t) = N(0)e^{rt}$, en donde N(0) es una constante positiva, $t \geq 0$ y r puede ser positiva, negativa o constante.

Si $r > 0$, entonces la gráfica sigue el mismo comportamiento que la de la función costo total, como lo muestra la grafica siguiente,



Si $r < 0$, entonces

1.- La gráfica, interseca al eje N en el punto $N(0)$ y no interseca al eje x.

2.- $N(x)$ es una función continua en todo R.

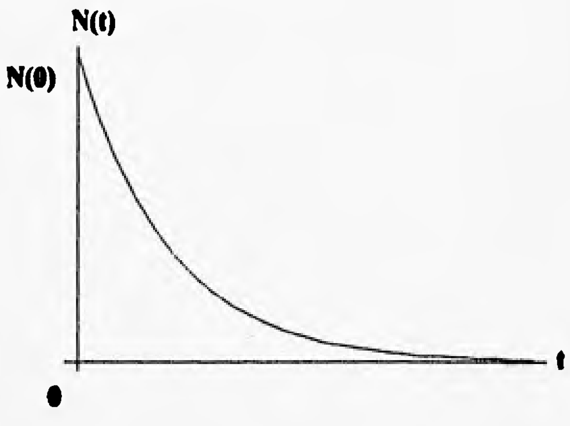
3.- $N(x)$ no tiene puntos críticos.

4.- $N(x)$ es una función estrictamente decreciente en todo su dominio.

5.- Como $N'(x)$ es decreciente y $N''(x) > 0$, entonces $N(x)$ es cóncava hacia arriba y no tiene máximos, mínimos ni puntos de inflexión.

Es claro que la población total se representa por la parte de una curva exponencial de la cual sólo se considera la sección situada en el primer cuadrante, de acuerdo a lo dicho en la introducción de este capítulo.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior,



Si $r = 0$, es claro que la gráfica es la linea recta $N(t) = N(0)$, de la que se considera sólo la parte comprendida en el primer cuadrante, de acuerdo con lo dicho en la introducción de este capítulo.

5.6.2 Función fecundidad.

Una función fecundidad está dada por $f(x) = c(x-s)(s+n-x)^2$; para $0 < s \leq x \leq s+n$

En donde $f(x)$ es la fecundidad por edad de las mujeres, x es la edad de la mujer, s el comienzo de la vida reproductiva, n la amplitud del intervalo de reproducción y c un parámetro positivo que depende del nivel de la fecundidad.

1.- $f(0) = c(-s)(s+n)^2 < 0$, por tanto, no interseca al eje $f(x)$ en el primer cuadrante y como $f(x) = 0$ cuando $x = s$, o cuando $x = s+n$, por tanto interseca al eje x en esos puntos.

2.- $f(x)$ es una función continua en todos los reales.

3.- $f'(x) = c(s+n-x)(2s+n-3x) = 0$ si $x = s+n$, o si $x = (2s+n)/3$, por tanto, estos valores para x son puntos críticos.

4.- La función $f(x)$ es creciente en todo su dominio.

5.- $f''(x) = c(6x-5s-4n)$, como

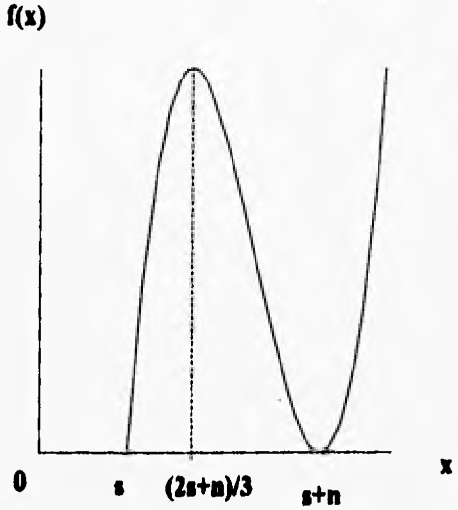
$$f''(s+n) = c(s+2n) > 0,$$

existe un mínimo en el punto $x = s+n$, y como

$$f''\left(\frac{2s+n}{3}\right) = -c(s+2n) < 0,$$

existe un máximo en el punto $x = (2s+n)/3$.

Por lo anterior, la gráfica de la función fecundidad se encuentra en el primer cuadrante, como lo muestra la gráfica siguiente,



Es claro que desde el punto de vista demográfico se considera que la gráfica tiene significado dentro del intervalo $(0, s+n)$ ya que después de $x = s+n$ la fecundidad aumenta, lo que no puede suceder puesto que termina la vida reproductiva de la mujer en ese punto.

Capítulo 6

INTEGRACIÓN.

6.1 APLICACIONES A LA ECONOMIA Y LOS SEGUROS.

Los economistas sostienen que algunas veces es más fácil obtener los datos que reflejan los incrementos ocacionados en los costos e ingresos, obtenidos con la produoción y venta adicional de un determinado artículo, es por esta razón que no es posible determinar directamente las funciones costo e ingreso total a las que corresponden dichos datos, pero se pueden conocer la funciones costo e ingreso marginal a las que corresponden, de esta manera se pueden de terminar las funciones costo e ingreso total de la siguiente manera.

6.1.1 Costo marginal.

Si la función costo marginal está dada por

$$Q'(x) = \frac{dQ(x)}{dx},$$

entonces, el costo total será la integral con respecto a x de la función costo marginal, es decir,

$$\int Q'(x)dx = Q(x) + c.$$

Para obtener una única función costo total, al integrar dicha función, debe especificarse una condición inicial, la cual es el costo fijo.

EJEMPLO

Una agencia de seguros sabe que la función costo marginal por producir x seguros de gastos médicos es $Q'(x) = 32x + 92$ donde x es el número de unidades producidas y $Q\prime(x)$ es el costo marginal dado en pesos. Encontrar la función costo total, si el costo fijo es de $10.

Solución:

$$Q(x) = \int (32x + 92)\, dx = 16x^2 + 92x + c.$$

Sustituyendo la condición inicial $Q(0) = 10$, se obtiene que $c = 10$, entonces, la función de costo total es:

$$Q(x) = 16x^2 + 92x + 10$$

6.1.2 Ingreso marginal.

El ingreso marginal que depende de la cantidad demandada, es la derivada del ingreso total con respecto a x, es decir,

$$\frac{dR(x)}{dx} = R'(x),$$

por tanto, la función ingreso total es la integral, con respecto a x, de la función ingreso marginal, es decir,

$$R(x) = \int R'(x)dx,$$

y dado que,

$$\int R'(x)dx = R(x) + c,$$

se tiene que especificar una condición inicial para obtener una única función ingreso total. Para evaluar la constante de integración puede usarse la condición inicial de que el ingreso es nulo cuando la cantidad de demanda es nula.

EJEMPLO

La aseguradora del ejemplo anterior fija un precio de $680 por unidad de venta de un seguro de gastos médicos. De aquí se tiene que la función del ingreso marginal por ventas es $R'(x) = 680$ pesos. Para obtener la función ingreso total por ventas $R(x)$, se integra

$$R(x) = \int 680dx = 680x + c.$$

Como $R(0) = 0$, entonces, la función ingreso total por la venta de x seguros de gastos médicos es

$$R(x) = 680x$$

6.1.3 Beneficio (Ingresos contra costos).

La integración se utiliza en administración y economía para determinar el beneficio total o las ganancias netas totales. En general, se maximiza el beneficio (suponiendo libre competencia) cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal. El beneficio total se determina integrando la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal, desde cero hasta la cantidad x^* para la cual el beneficio es máximo , es decir:

$$G(x) = \int_0^{x^*} (R'(x) - Q'(x))dx.$$

EJEMPLO

Determinar el beneficio total de la producción y venta de los seguros de gastos médicos de los ejemplos anteriores.

Solución:

La función ingreso marginal es $R'(x) = 680$ y la función costo marginal es $Q'(x) = 32x + 92$, igualando el costo marginal con el ingreso marginal se tiene que cuando se produce y se vende $x = 18.375$ seguros de gastos médicos la ganancia será máxima, en este caso se considera $x = 18$ ya que no se producen partes de seguros.

Como la ganancia es igual al ingreso por ventas menos el costo de producción, entonces las ganancias máximas ocurren cuando

$$G(x) = \int_0^{18} (R'(x) - Q'(x))\,dx,$$

es decir,

$$G(x) = \int_0^{18} (680 - (32x + 92))\, dx$$

$$= \int_0^{18} 680dx - \int_0^{18} (32x + 92)\, dx = 5,390 \quad \text{pesos.}$$

La ganancia máxima es de \$5,390 cuando se venden 18 seguros de gastos médicos.

Si la aseguradora desea conocer el incremento en las ganancias cuando las unidades vendidas aumentan de 18 a 19 seguros, se calcula la integral

$$\int_{18}^{19} (R'(x) - Q'(x))\, dx = 5,386 \quad \text{pesos,}$$

entonces, al incrementar la venta en una unidad, se tiene una disminución en la ganancia de \$4

6.1.4 Excedente del consumidor.

Una función demanda representa las respectivas cantidades de un artículo que se compra en el mercado a diversos precios. Si el precio en el mercado se representa con p y la correspondiente cantidad demandada en dicho mercado es q, entonces la función demanda es $p(q)$.

Una función oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que se ofrece en el mercado a diversos precios. Si el precio en el mercado se representa con p y la correspondiente cantidad ofrecida en dicho mercado es q, entonces la función oferta es $p(q)$.

Cuando el precio de un artículo es tal que la demanda es igual a la oferta, se dice que hay *equilibrio del mercado.* Al precio se le llama entonces el *precio de equilibrio* y a la cantidad producida se le llama *cantidad* o *producción de equilibrio.* Estas cantidades se designan por p_0 y q_0. Pueden obtenerse resolviendo el par de ecuaciones de oferta y demanda

$$\text{Oferta} : p = f(q)$$

$$\text{Demanda}: p = g(q)$$

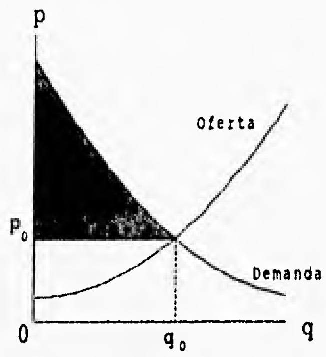
Estos conceptos se definieron en el capítulo 2 para el caso en que ambas relaciones funcionales son lineales; en esta parte de la tesis se trabajan en una forma más general.

Ahora, supóngase que se tiene como datos una curva de la función demanda y una curva de la función oferta, y, que bajo un tipo de monopolio, se han fijado el precio y la cantidad producida de manera que se produce el equilibrio del mercado. Si un consumidor está dispuesto a pagar el precio dado por la curva precio-demanda, ha ganado con el hecho de tener fijo el precio en p_0 porque por cualquier cantidad que él desee comprar que sea menor que la cantidad producida, él está pagando menos de lo que está dispuesto a pagar, entonces aquellos consumidores que estén dispuestos a pagar un precio mayor que el del mercado, se benefician por el hecho de que el precio es solamente p_0.

Una forma de medir el valor o utilidad que un bien tiene para el consumidor es el precio que está dispuesto a pagar por él, los economistas sostienen que en realidad los consumidores reciben un valor excedente en los bienes que adquieren, atendiendo al modo de funcionar del mercado, es decir, están dispuestos a pagar un precio más alto que el precio de equilibrio.

La ganancia[1] del consumidor está representada por el área bajo la curva de la demanda y sobre la recta $p(q) = p_0$ y se conoce como *excedente (o superávit) del consumidor* y representa la cantidad de placer que le causa el adquirir un bien, determinada por la cantidad de dinero extra que está dispuesto a pagar por él, en donde el área sombreada representa el excedente del consumidor, como se ilustra en la figura siguiente,

[1]Entiéndase como ganancia del consumidor, el beneficio físico o moral que el bien representa para el consumidor, representado por una cantidad de dinero.



Se evalúa como sigue

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^{q_0} p(q)dq - q_0 p_0,$$

en donde la función $p(q)$ es el precio en función de la demanda; si se tiene la demanda en función del precio entonces con un cambio de variable, se tiene que :

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_{p_0}^{m_0} q(p)dp,$$

en donde la función de demanda es $q(p)$ y $p(0) = m_0$ es la intersección con el eje $p(q)$ de la gráfica de la función demanda. Así,

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^{q_0} p(q)dq - q_0 p_0 = \int_{p_0}^{m_0} q(p)dp.$$

Obsérvese que el excedente del consumidor se expresa en las mismas unidades que el precio p, por ejemplo si p se expresa en pesos (u otro tipo de moneda), lo mismo sucederá con el excedente del consumidor.

EJEMPLOS

1.- Si la función de demanda es $p(q) = 32 - 4q - q^2$ y, el precio se encuentra dado en pesos, determine el excedente del consumidor si $q_0 = 3$ artículos y haga una gráfica que represente el excedente del consumidor.

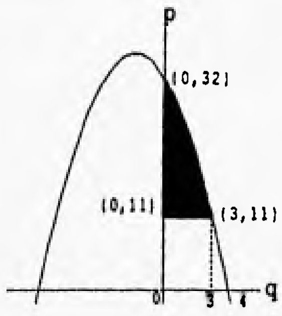
Solución:

Como $q_0 = 3$ artículos, el precio del mercado es $p(3) = 11$ pesos, así, se tiene

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^3 (32 - 4q - q^2)dq - (3)(11) = 36 \quad \text{pesos,}$$

es decir, la ganancia adicional obtenida por el consumidor es de $36.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior,



En donde el área sombreada representa el excedente del consumidor.

2.- Si la función de demanda es $p(q) = \sqrt{9-q}$ y $q_0 = 5$ artículos, evaluar el excedente del consumidor y haga una gráfica en donde se muestre el excedente del consumidor para cada caso.

Solución (1):

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^5 (9-q)^{1/2}dq - (5)(2) = \int_2^3 (9-p^2)dp,$$

entonces el excedente del consumidor se representa por el área sombreada de la *figura 1* y es igual a

$$\int_0^5 (9-q)^{1/2}dq - 10 = \frac{8}{3} \text{ pesos.}$$

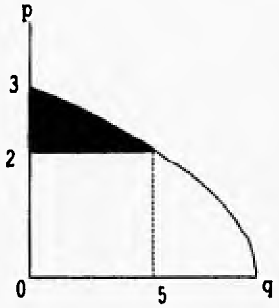


Figura 1

Solución (2) :

Utilizando la función inversa, de la función $p(q) = \sqrt{9-q}$, el excedente del consumidor se representa por el área sombreada de la *figura 2* y es igual a

$$\int_2^3 (9-p^2)dp = \frac{8}{3} \text{ pesos.}$$

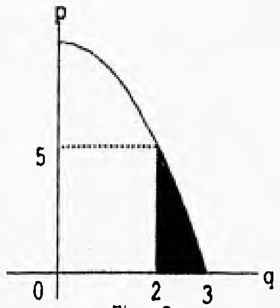


Figura 2

3.- La cantidad vendida y el correspondiente precio en un mercado monopólico, se determina por medio de la función demanda $p(q) = 16 - q^2$ y por la función de costo marginal $p'(q) = 6 + q$, de manera que se maximice la ganancia. Determinar el correspondiente excedente del consumidor.

Solución:

La función *ingreso* es

$$R(q) = 16q - q^3,$$

y la función *ingreso marginal* es

$$R'(q) = 16 - 3q^2.$$

La ganancia o beneficio se maximiza cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal, es decir, cuando,

$$16 - 3q^2 = 6 + q,$$

o sea si,

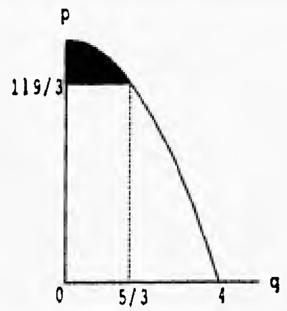
$$q = \frac{5}{3} \quad ó \quad q = -2,$$

pero como no puede tomar el valor negativo, entonces se toma el valor de $q = 5/3$ y el excedente del consumidor es

$$\text{EC} = \int_0^{5/3} (16 - q^2)dq - \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{119}{9}\right)$$

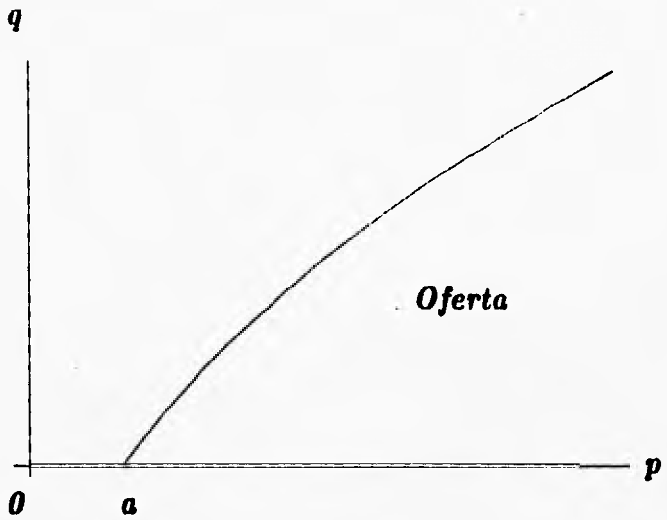
$$= \frac{250}{81} \simeq 3.09 \quad \text{pesos.}$$

El área sombreada de la gráfica siguiente muestra el resultado anterior



6.1.5 Excedente del productor.

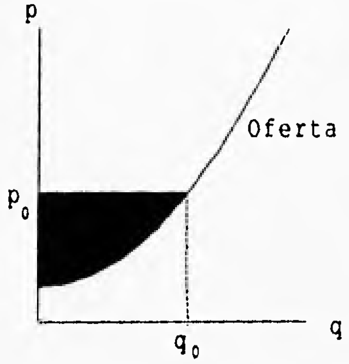
Una función oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que se ofrece en el mercado a diversos precios. Si el precio en el mercado se representa con p y la correspondiente cantidad ofrecida en dicho mercado es q, entonces la función oferta es $q(p)$, si se supone que en un determinado intervalo a un aumento del precio algunos consumidores están dispuestos a seguir adquiriendo dicho artículo la gráfica de la función tiene la forma siguente,



en donde a es el precio mínimo en que el productor está dispuesto a vender.

Ahora, si se considera la función inversa y se supone que se tiene como datos una curva de la función demanda y una curva de la función oferta, y, que bajo un tipo de monopolio, se han fijado el precio y la cantidad producida de manera que se produce el equilibrio del mercado; una forma de medir el valor o utilidad que la venta de un bien tiene para el productor es el precio en que está dispuesto a venderlo. Los economistas sostienen que en realidad los productores reciben un valor excedente en los bienes que venden, atendiendo al modo de funcionar del mercado, es decir, cobran un precio más alto al precio en que están dispuestos a vender.

La ganacia adicional del productor está representada por el área sobre la curva de oferta y bajo la recta $p = p_0$, denominándose esta área como *excedente del productor*, lo que se representa con el área sombreada de la gráfica siguiente,



El área se evalúa como sigue

$$\text{Excedente del productor} = q_0 p_0 - \int_0^{q_0} p(q)dq,$$

en donde la función oferta $p(q)$ es el precio en función de la oferta; si se tiene la oferta en función del precio entonces con un cambio de variable se tiene que,

$$\text{Excedente del productor} = \int_{m_0}^{p_0} q(p)dp,$$

en donde la función oferta es $q(p)$ y $p(0) = m_0$ es la intersección con el eje y de la gráfica de la función oferta. Así,

$$\text{Excedente del productor} = q_0 p_0 - \int_0^{q_0} p(q)dq = \int_{m_0}^{p_0} q(p)dp.$$

Como en el caso del excedente del consumidor, el excedente del productor se expresa en las mismas unidades que el precio p.

EJEMPLOS

1.- Si la función de oferta es $p(q) = (q+2)^2$ y el precio se fija en $p_0 = 25$ pesos, obtener el excedente del productor.

Solución (1):

Como el precio en el mercado es de \$25, la oferta en el mercado es $25 = (q+2)^2$, o sea $q = 3$ artículos, entonces,

$$\text{Excedente del productor} = (25)(3) - \int_0^3 (q+2)^2 dq = 36 \text{ pesos,}$$

como lo muestra la figura 1

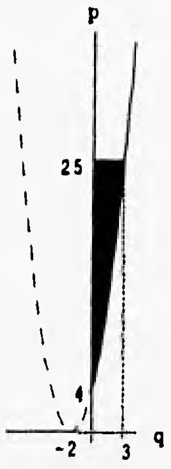


Figura 1

Solución (2) :

Si se toma la funcion inversa de p, entonces,

$$\text{Excedente del productor} = \int_4^{25} (p^{1/2} - 2)dp = 36 \text{ pesos},$$

es decir, la ganancia adicional del productor es de \$36.

La figura 2 muestra el resultado anterior.

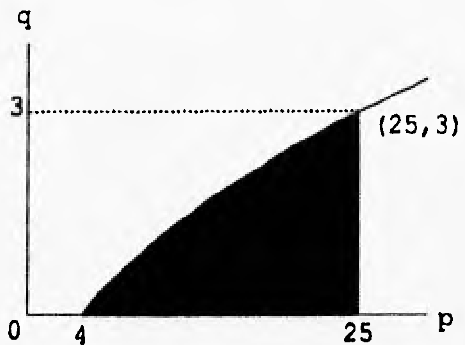


Figura 2

2.- La cantidad de demanda y el precio en un mercado de libre competencia, están determinados por la función demanda $p(q) = 16 - q^2$ y oferta $p(q) = 4 + x$. Obtener el correspondiente excedente del productor.

Solución:

Para encontrar el precio y la demanda del mercado se igualan las funciones demanda y oferta, es decir:

$$16 - q^2 = 4 + q,$$

o sea,

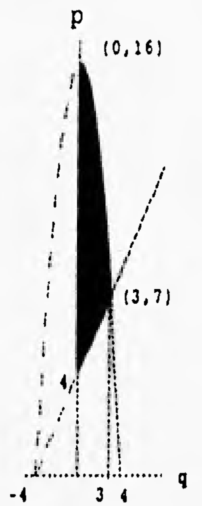
$$q = 3 \quad ó \quad q = -4,$$

pero como no tiene sentido el valor negativo, entonces la demanda del mercado es de 3 artículos y el precio en el mercado es $p(3) = 7$ pesos, en la función de oferta, por tanto,

$$\text{Excedente del productor} = (3)(7) - \int_0^3 (q+4)dq = \frac{9}{2} \quad \text{pesos},$$

es decir la ganancia adicional del productor es de \$4.5

El área sombreada de la figura siguiente muestra el resultado anterior,



3.- La cantidad demandada y el precio en un mercado de libre competencia, están determinados por las funciones demanda $p(q) = 36 - q^2$ y oferta $p(q) = 6 + (q^2/4)$. Determinar los correspondientes excedentes del consumidor y del productor.

Solución:

Para encontrar el precio y la demanda de equilibrio se igualan las funciones oferta y demanda, es decir

$$36 - q^2 = 6 + \frac{q^2}{4},$$

o sea,

$$q = \pm 2\sqrt{6},$$

al tomar la raíz positiva, se tiene que el precio de equilibrio es de $p(q) = 12$ pesos y, la oferta y la demanda de equilibrio son de $q = 2\sqrt{6}$ unidades en las función de oferta y demanda, por tanto,

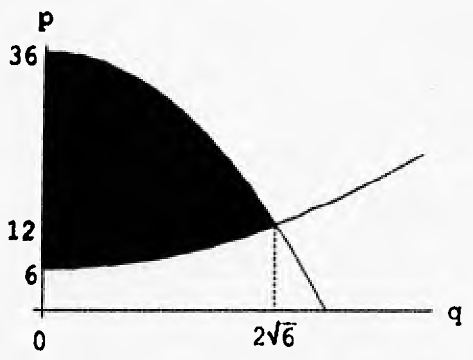
$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^{2\sqrt{6}} (36 - q^2)dq - (2\sqrt{6})(12) = 32\sqrt{6} \approx 78.4 \quad \text{pesos,}$$

y

$$\text{Excedente del productor} = (2\sqrt{6})(12) - \int_0^{2\sqrt{6}} (6 + \frac{q^2}{4})dq = 8\sqrt{6} \approx 19.6 \quad \text{pesos,}$$

es decir, la ganancia adicional del consumidor es de $78.40 y la ganancia adicional del productor es de $19.60.

La figura siguiente muestra el excedente del consumidor y el excedente del productor,



6.2 APLICACIONES A LA DEMOGRAFIA.

6.2.1 Tiempo vivido.

Considere la función $l(t) = 100 - t$ (ley de mortalidad de Moivre) que representa el número de sobrevivientes a edades sucesivas de una generación inicial $l(0) = 100^2$, entonces el tiempo vivido por esa generación desde la edad $a \geq 0$ hasta la edad $b \leq 100$ se representa por:

$$\int_a^b l(t)dt.$$

EJEMPLO

De acuerdo con la función anterior calcular:

a) El tiempo vivido por esa generación entre los 10 y 15 años.

b) El tiempo vivido por esa generación desde los 10 años hasta que se extingue.

Solución:

a) Al integrar la función $l(t)$ entre 10 y 15 años, se obtiene el tiempo vivido, o sea, el número de años-persona vividos por la generación $l(0)$ entre las edades 10 y 15. Se usa el símbolo $_5L_{10}$ para representar lo anterior y

$$_5L_{10} = \int_{10}^{15} (100 - t)dt = 437.5 \quad \text{años-persona}^3.$$

b) El tiempo vivido por la generación desde la edad 10 hasta que se extingue, se representa por T_{10} y está dado por

$$T_{10} = \int_{10}^{100} (100 - t)dt = 4,050 \quad \text{años-persona}.$$

[3]Se toma el valor de 100, ya que en demografía y seguros se considera, que es es la cantidad máxima como un estandar de años que puede vivir una persona

6.2.2 Población total.

La *población total* corresponde a uno de los modelos básicos de Lotka[7]. Esta fórmula vincula a la población total en un momento t con los nacimientos y con la ley de mortalidad que supone que, la población es cerrada (no hay migración) y la mortalidad por edades es constante en el tiempo y además bajo el supuesto de que los nacimientos en cada año son costantes.

Si $B(t-x)$ es la densidad anual de nacimientos o sea los nacimientos anuales en la época $t-x$, y $p(x) = l(x)/l(0)$ es la probabilidad de que una persona esté con vida a la edad exacta x[8], al momento del nacimiento,entonces la expresión $B(t-x)p(x)$ representa el número de personas que en el momento t tienen la edad x y la expresión $B(t-x)p(x)dx$ representa el número personas que en el momento t tienen edades comprendidas entre x y $x+dx$. Al integrar con respecto a x se obtiene *la suma* de las personas de todas las edades, que están con vida en el momento t, es decir, la población total en el tiempo t es

$$N(t) = \int_0^w B(t-x)p(x)dx,$$

donde w es la edad máxima que se considere que vive una persona.

EJEMPLOS

1.- Calcular la función de población total si los nacimientos de cada año son constantes e iguales a $l(0)$, o sea iguales a los que nacen el primer año.

Solución :

Como los nacimientos en cada año son constantes, entonces $B(t-x) = l(0)$ y se tiene que la población total es

[7]Alfred J. Lotka, *Teoría de las asociaciones biológicas*, CELADE, Serie E, No.5, Santiago de chile, 1969, p.66.
[8]Se considera que una persona tiene la edad exacta x cuando se llega al cumpleaños x y no se ha llegado al cumpleaños $x+1$.

$$N(t) = \int_0^w l(x)dx.$$

2.- Obtener la función de variación de la población total con respecto al tiempo (ver capítulo 2), suponiendo que su tasa de crecimiento es constante.

Solución:

La tasa de crecimiento de la población r, es igual a :

$$\frac{1}{N(t)} \cdot \frac{dN(t)}{dt},$$

que en nuestro caso es igual a r (constante).

Al despejar $N(t)$ de la expresión anterior se tiene

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = rdt,$$

y al integrar ambos lados se tiene,

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = r \int dt,$$

lo que implica que

$$N(t) = ce^{rt}.$$

El valor de la constante de integración c se obtiene al considerar como condición inicial a la población inicial $N(0)$, con lo anterior, se tiene que

$$N(t) = N(0)e^{rt}.$$

Es decir, que si la tasa de crecimiento se mantiene constante con respecto al tiempo, la población total crece según la ley exponencial.

6.3 INTEGRACION NUMERICA.

En demografía, las funciones que se manejan se obtienen por medio de métodos estadísticos o aproximaciones a distribuciones de probabilidad, en algunas ocasiones, se cuenta con pocos datos y no es posible determinar el tipo de función a la que se aproximan, por tanto, se necesita aplicar algunas técnicas de integración numérica, en las que es necesario el supuesto de que las muertes se distribuyen uniformemenete, como en el caso de los siguientes

EJEMPLOS

1.- En una tabla de vida los sobrevivientes hasta los 5 años de una población de $l_0 =$ 100,000 personas son los siguientes,

x	l_x
0	100,000
1	92,107
2	90,110

3	88,944
4	88,249
5	87,823

Calcular el tiempo vivido por esa población entre los 1 y 5 años de edad, utilizando el método de los trapecios.

Solución:

El tiempo vivido entre las edades 1 y 5 es igual a la integral entre esos límites de la función de sobrevivientes l_x, es decir:

$$_4L_1 = \int_1^5 l_x dx.$$

Debido a que no se conoce la forma analítica de la función, sino solamente los valores correspondientes a edades exactas, se utiliza un procedimiento de aproximación, como puede ser el método de los trapecios. Su fórmula para los valores igualmente espaciados es

$$_4L_1 = \int_1^5 l_x dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{5-1}{4}\right)(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + 2l_4 + l_5)$$

$$= \frac{l_1 + l_5}{2} + l_2 + l_3 + l_4 = 357,268 \quad \text{años-persona.}$$

En la práctica se requiere conocer el cálculo del tiempo vivido para cada subintervalo por separado. En este caso se tiene que

$$_1L_1 = \int_1^2 l_x dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{1}\right)(l_1 + l_2)$$

$$= \frac{l_1 + l_2}{2} = 91,108 \quad \text{años-persona.}$$

De igual manera,

$$_1L_2 = \frac{l_2 + l_3}{2} = 88,527 \quad \text{años-persona,}$$

$$_1L_3 = \frac{l_3 + l_4}{2} = 88,597 \quad \text{años-persona,}$$

$$_1L_4 = \frac{l_4 + l_5}{2} = 88,036 \quad \text{años-persona,}$$

y el tiempo total entre 1 y 5 años se obtiene mediante la siguiente suma

$$_4L_1 =_1 L_1 +_1 L_2 +_1 L_3 +_1 L_4 = 357,268 \quad \text{años-persona.}$$

2.- Con los datos del ejemplo anterior, calcular el tiempo vivido entre los 1 y 5 años de edad aplicando el método de los trapecios parabólicos.

Solución:

El tiempo vivido entre las edades 1 y 5 años es igual a la integral entre esos límites de la función de sobrevivientes l_x, es decir

$$_4L_1 = \int_1^5 l_x dx.$$

Debido a que en la teoría el método de los trapecios parabólicos es un procedimiento de aproximación más fino que el método de los trapecios, según se vió en la teoría, se considera que el siguiente resultado es más exacto que el anterior.

La fórmula de los trapecios parabólicos para este ejercicio es la siguiente

$$ {}_4L_1 = \int_1^5 l_x dx \approx \frac{1}{3}\left(\frac{5-1}{2(2)}\right)(l_1 + 4l_2 + 2l_3 + 4l_4 + 2l_5) $$

$$ = \frac{1}{3}(l_1 + 4l_2 + l_3) + \frac{1}{3}(l_3 + 4l_4 + l_5) = 357,085 \quad \text{años-persona.} $$

Este método da 183 años-persona menos que el anterior debido a que la parábola tiene una concavidad hacia arriba, mientras que el método de los trapecios considera una línea recta.

Por otra parte, el método de los trapecios parabólicos no permite calcular el tiempo vivido dentro de cada subintervalo.

En matemáticas es más exácto el método de los trapecios parabólicos mientras que en demografía, para este caso, resulta mejor el método de los trapecios ya que se puede calcular el tiempo vivido en cada subintervalo.

Capítulo 7

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

En este capítulo se darán ejemplos de distintos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, con aplicaciones a finanzas y economía, en los que se pueden aplicar algunos métodos de solución vistos en dicha materia como son los métodos de ecuaciones diferenciales separables, homogéneas, exactas y lineales.

7.1 ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES.

7.1.1 Interés compuesto.

Si la tasa de interés es i capitalizable continuamente y S es el monto en cualquier tiempo (monto principal más el interés acumulado), entonces

$$\frac{dS}{dt} = iS,$$

al separar variables,

$$\frac{dS}{S} = idt,$$

al integrar ambos lados de la ecuación anterior, se tiene que

$$\int \frac{dS}{S} = \int i dt,$$

es decir,

$$\log S = it + c,$$

por lo que,

$$S = ce^{it}.$$

Si $S = S_0$ cuando $t = 0$, entonces $c = S_0$ (que representa el monto inicial), sustituyendo el valor de c en la expresión anterior, el monto total es:

$$S = S_0 e^{it}.$$

7.1.2 Utilidad neta.

La relación entre la utilidad neta $P(x)$ y el gasto en publicidad x es tal que la razón de cambio de la utilidad neta con respecto al gasto en publicidad, es proporcional a la diferencia de una constante a (que representa la utilidad máxima que se puede obtener) y la ganancia neta, multiplicada por una constante k que es la tasa de incremento de la utilidad neta con respecto al crecimiento del gasto en publicidad. Para obtener la relación entre la utilidad neta y el gasto en promoción si $P(0) = P_0 < a$, se procede de la siguiente manera.

La ecuación que representa el caso anterior es

$$\frac{dP(x)}{dx} = k(a - P(x)),$$

al separar las variables, se obtiene

$$\frac{dP(x)}{(a-P(x))}=kdx$$

y al integrar ambos lados de la ecuación, se tiene que

$$\int\frac{dP(x)}{(a-P(x))}=\int kdx,$$

es decir

$$-\ln(a-P(x))=kx+c,$$

al despejar $P(x)$ de la expresión anterior, se tiene

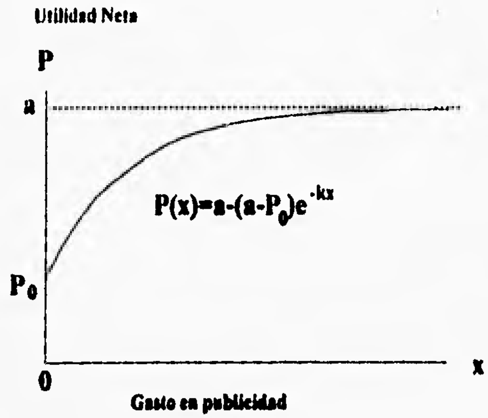
$$P(x)=a-ce^{-kx}.$$

Al sustituir la condición inicial $P(0)=P_0$ se tiene que $c=a-P_0$, por tanto, la utilidad neta es

$$P(x)=a-(a-P_0)e^{-kx}.$$

Así, la utilidad neta es P_0 cuando no hay gastos de publicidad y crece, con estos gastos, hacia un máximo (asintótico) igual a a.

La siguiente figura muestra el resultado anterior



7.2 ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS.

Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ se llama homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado y su solución se encuentra ilustrada en los siguientes ejemplos.

7.2.1 Costo de manufactura.

La relación entre el costo de manufactura por el artículo M y el número de tipos de artículos fabricados N, es tal que la tasa de incremento del costo de manufactura, a medida que aumenta el número de tipos, es igual a la razón del costo por artículo más el número de tipos, dividido, todo, entre el número de tipos de artículos que se manufacturan. Para obtener la relación entre el costo de fabricación por artículo y el número de tipos de productos fabricados si $M = M_0$ cuando $N = 1$, se procede de la siguiente manera.

La ecuación que representa el caso anterior es

$$\frac{dM}{dN} = \frac{M+N}{N} = \frac{M}{N} + 1,$$

lo que es lo mismo que

$$NdM = (M + N)dN.$$

como son dos funciones homogéneas de grado uno, la ecuación diferencial es homogénea.

Al sustituir $M = vN$ y $dM = vdN + Ndv$, la ecuación anterior toma la forma

$$vNdN + N^2dv = (vN + N)dN,$$

al despejar dv se tiene,

$$dv = \frac{dN}{N},$$

al integrar ambas expresiones con respecto a v, se tiene,

$$v = \ln N + c,$$

al sustituir $v = M/N$, se tiene,

$$\frac{M}{N} = \ln N + c,$$

al despejar M de la expresión anterior,

$$M = N \ln N + Nc,$$

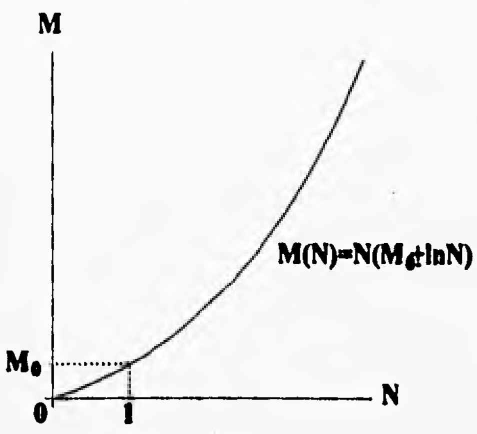
y puesto que $M = M_0$ cuando $N = 1$,

$$M_0 = c$$

y el costo de manufactura por artículo, para el caso particular en que $M = M_0$ cuando $N = 1$, se representa por la ecuación

$$M = N(M_0 + \ln N)$$

En la siguiente figura se ilustra la gráfica de esta ecuación.



7.2.2 Tasa de incremento en el costo.

Supongase que la tasa de incremento en el costo y de elaborar un pedido y supervisarlo, a medida que crece la magnitud o extensión del pedido a surtir, es igual a la razón de la suma de los cuadrados del costo y la magnitud dividida entre el doble del producto del costo y la extensión o tamaño del pedido.

Para determinar la relación entre el costo de elaborar y supervisar un pedido y el tamaño del pedido si $y = 3$ cuando $s = 1$, se procede de la siguiente forma.

La ecuación diferencial correspondiente está dada por

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y^2 + s^2}{2sy} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{s} + \left(\frac{y}{s}\right)^{-1}\right),$$

separando variables se tiene que,

$$2sydy - (y^2 + s^2)ds = 0$$

por tanto, se trata de una ecuación diferencial homogénea de grado dos.

y al sustituir $y = vs$ y $dy = vds + sdv$, se tiene,

$$2vs^2(vds + sdv) - (v^2s^2 + s^2)ds = 0,$$

lo que lleva a

$$\frac{ds}{s} + \frac{2v}{v^2 - 1}dv = 0,$$

al integrar se tiene que

$$\ln s + \ln(v^2 - 1) = c,$$

al despejar s se tiene que

$$s(v^2 - 1) = e^c = c,$$

al sustituir $v = y/s$, se tiene que

$$y^2 - s^2 = cs,$$

al despejar y se tiene que

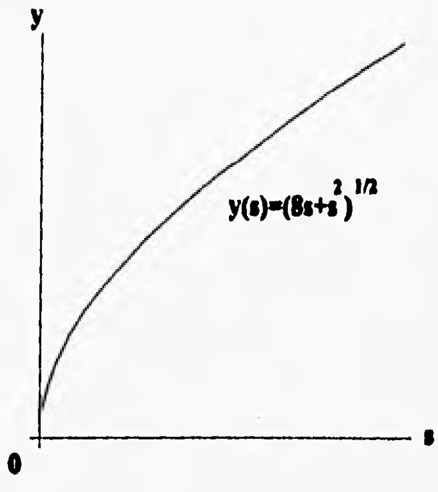
$$y = \sqrt{cs + s^2}$$

y por medio de la condición inicial, el valor de $c = 8$, y el costo de elaborar un pedido y supervisarlo, en el caso particular de que $y = 3$ cuando $s = 1$, se representa por la ecuación

$$y = \sqrt{8s + s^2}.$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de esta ecuación.

Costo de elaborar y controlar un pedido



Magnitud de la orden o pedido

7.3 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS.

7.3.1 Modelo precio-demanda.

El cambio en el precio y con respecto al cambio en la cantidad demandada x, de una cierta mercancía, está dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 24x}{x^2 + 16}.$$

Para determinar la relación entre el precio y la cantidad demandada, si el valor del primero es 7.5 cuando la segunda vale 4 se procede de la siguiente manera.

La ecuación diferencial correspondiente es

$$(2xy + 24x)dx + (x^2 + 16)dy = 0.$$

Al calcular las derivadas parciales se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy + 24x) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 16),$$

por tanto, la ecuación es exacta, es decir, existe $F(x, y)$ tal que,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 24x \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 16.$$

al integrar $\partial F/\partial x$ con respecto a x,

$$F(x, y) = x^2 y + 12x^2 + f(y),$$

y al calcular la derivada parcial con respecto a y en esta última expresión, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial}{\partial y} f(y),$$

y como

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 16,$$

al igualar ambas expresiones, se tiene,

$$x^2 + \frac{\partial}{\partial y}f(y) = x^2 + 16,$$

así,

$$\frac{\partial}{\partial y}f(y) = 16,$$

al integrar ambos lados de la igualdad con respecto a y, se tiene que,

$$f(y) = 16y,$$

y

$$F(x,y) = x^2y + 12x^2 + 16y + c = 0,$$

por consiguiente, la solución es

$$x^2y + 12x^2 + 16y = c$$

Si $y = 7.5$ cuando $x = 4$ entonces $c = 432$ y la solución particular para este caso es

$$x^2y + 12x^2 + 16y - 432 = 0.$$

7.4 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

7.4.1 Un ejemplo de costos.

Una empresa fabricante de cierto producto ha encontrado que el costo c por operar y mantener su equipo está dado por la ecuación

$$\frac{dc}{dx} - \frac{b-1}{x}c = -\frac{ba}{x^2},$$

en donde a, b son constantes. Para hallar una solución de esta ecuación con condición inicial $c(x_o) = c_0$, se procede de la siguiente manera.

Al expresar la ecuación en la forma

$$\frac{dc}{dx} + cP(x) = Q(x),$$

donde

$$P(X) = \left(-\frac{b-1}{x}\right) \quad \text{y} \quad Q(x) = -\frac{ba}{x^2},$$

se tiene una ecuación diferencial de tipo lineal, entonces un factor de integración es,

$$e^{\int P(x)dx} = x^{-(b-1)}$$

y, al multiplicar por el factor de integración a la ecuación diferencial, se tiene que

$$\frac{dc}{dx}x^{-b+1} + c(-b+1)x^{-1}x^{-b+1} = -bax^{-b-1},$$

es decir

$$(cx^{-b+1})' = -bax^{-b-1}.$$

Al integrar ambos lados de la ecuación con respecto a x, se obtiene,

$$cx^{-b+1} = -ba\int x^{-b-1}dx,$$

es decir

$$cx^{-b+1} = ax^{-b} + C$$

o sea,

$$c = \frac{a}{x} + Cx^{b-1},$$

y utilizando la condición inicial $c = c_0$ cuando $x = x_0$, se tiene que

$$c_0 = \frac{a}{x_0} + Cx_0^{b-1},$$

por tanto,

$$C = \frac{c_0x_0 - a}{x_0^b},$$

y la solución particular para este caso es

$$c = \frac{a}{x} + \frac{c_0x_0 - a}{x_0^b}x^{b-1}.$$

7.5 ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES.

7.5.1 Dinámica del precio de mercado, con dos variables.

Supóngase que para un bien particular, las funciones de demanda y oferta son las siguientes:

$$D(p) = \alpha - \beta p \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

$$O(p) = -\gamma + \delta p \qquad (\gamma, \delta > 0).$$

Donde α es una constante que representa la cantidad total demandada, β es una constante que indica cómo cambia la demanda al incrementarse en una unidad el precio, γ es una constante que representa la cantidad total ofrecida, δ es una constante que indica cómo cambia la oferta al incrementarse en una unidad el precio.

Anteriormente se vio que el precio de equilibrio se encuentra en el punto p^* en el que la oferta es igual a la demanda, por tanto el precio de equilibrio es:

$$p^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Si ocurre que el precio inicial $p(0)$ está precisamente al nivel p^*, el mercado está en equilibrio y no hará falta ningún análisis dinámico. En el caso en que $p(0) = p_0 \neq p^*$, es posible obtener p^* -si es alcanzable- después de un proceso de ajuste, durante el cual no sólo cambiará el precio a través del tiempo, sino que la demanda y la oferta, por ser funciones de p, también van a cambiar con el tiempo, es decir, se pueden considerar las variables precio y cantidad como funciones del tiempo.

Lo anterior plantea el siguiente problema:

Dado un intervalo de tiempo suficiente para que actúe por sí mismo el proceso de ajuste, ¿tiende éste a llevar el precio al nivel de equilibrio p^* ?, es decir, ¿la trayectoria temporal[1] $p(t)$ converge a p^* cuando t tiende a ∞ ?.

Para encontrar la solución se procede de la siguiente manera.

En primer lugar se debe encontrar la trayectoria temporal $p(t)$, lo cual requiere establecer un esquema específico de cambio del precio. En general los cambios en el precio están gobernados por la variación de la oferta y la demanda en el mercado. Supóngase que la tasa de cambio del

[1] A la forma que toma la gráfica, bajo este proceso, se le conoce como trayectoria temporal.

precio es directamente proporcional a la demanda excedente $(D-O)^2$ que se tiene en el tiempo t, es decir,

$$\frac{dp}{dt}=j(D-O) \qquad (j>0),$$

en donde j representa un coeficiente de ajuste (constante). Con lo anterior podemos tener una ecuación diferencial homogénea si y sólo si $D=O$, es decir en el precio de equilibrio. En este modelo el termino *precio de equilibrio* puede verse desde dos puntos de vista, ya sea en el sentido intertemporal (p es constante con respecto al tiempo) o bien en el sentido de mercado perfecto (el precio de equilibrio es aquél que iguala la demanda con la oferta)[3].

Sustituyendo las funciones demanda y oferta en la expresión anterior, se tiene,

$$\frac{dp}{dt}=j(\alpha+\gamma)-j(\beta+\delta)p,$$

al despejar el término constante, se tiene,

$$\frac{dp}{dt}+j(\beta+\delta)p=j(\alpha+\gamma),$$

que es una ecuación diferencial no homogénea y su solución consistirá en la suma de la solución particular del caso homogéneo y_c y una solución particular y_p.

Una solución particular se encuentra al suponer que el precio es constante, es decir, que $dp/dt=0$, y la ecuación anterior toma la forma

$$j(\beta+\delta)p=j(\alpha+\gamma),$$

y su solución es,

$$p=\frac{(\alpha+\gamma)}{(\beta+\delta)}=p^*.$$

[2]Alpha C. Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Universidad de Connecticut, tercera edición, 1987.

[3]Alpha C. Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Universidad de Connecticut, tercera edición, 1987.

La ecuación diferencial homogénea es,

$$\frac{dp}{dt} + j(\beta + \delta)p = 0,$$

es decir,

$$\frac{dp}{dt} = -j(\beta + \delta)p,$$

que es una ecuación diferencial de variables separables, o sea,

$$\frac{dp}{p} = -j(\beta + \delta)dt,$$

al integrar ambas partes con respecto a t, se obtiene,

$$\ln p = -j(\beta + \delta)t + c_1,$$

al despejar p de la expresión anterior, se obtiene,

$$p = ce^{-j(\beta+\delta)t},$$

por tanto, la solución general es

$$p(t) = ce^{-j(\beta+\delta)t} + p^*,$$

el valor de la constante c se obtiene al utilizar la condición inicial $p(0) = p_0$ y su valor es,

$$c = p_0 - p^*,$$

y la solución particular en el caso de que $p(0) = p_0$ es

$$p(t) = (p_0 - p^*)e^{-j(\beta+\delta)t} + p^*.$$

Ahora, como

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = p^*,$$

la trayectoria temporal del modelo llevará el precio a la situación del precio de equilibrio p^*. En una situación de este tipo, en donde la trayectoria temporal de la variable $p(t)$ converge hacia el nivel de equilibrio p^*, se dice que el mercado es dinámicamente estable.

Al analizar los valores de p_0 y p^*, aparecen 3 casos.

1.- $p_0 = p^*$

Lo cual implica que $p(t) = p^*$, en este caso la trayectoria del precio permanece constante y el equilibrio es inmediato.

2.- $p_0 > p^*$

En este caso $p_0 - p^* > 0$ pero disminuirá a medida que un aumento en t disminuya el valor de $e^{-j(\beta+\delta)t}$. De esta forma , la trayectoria temporal se aproxima por arriba al precio de equilibrio.

3.- $p_0 < p^*$

En este caso $p_0 - p^* < 0$, pero aumentará a medida que un aunento en t aumente el valor de $e^{-j(\beta+\delta)t}$. De esta forma , la trayectoria temporal se aproxima por abajo al precio de equilibrio.

La gráfica siguiente muestra el resultado anterior

Capítulo 8

INTRODUCCION A VARIAS VARIABLES.

En los capítulos anteriores se analizó el caso en que se produce y se vende un sólo artículo, en el presente capítulo se analizará el caso en que se tienen varios artículos y se venden a distintos precios.

8.1 Derivadas Múltiples.

8.1.1 Interrelación de la demanda de varios productos.

Hasta ahora sólo se ha supuesto que la demanda de un producto depende exclusivamente de su precio. Así, las funciones demanda analizadas son de la forma

$$d = x(p),$$

para que no se preste a confución, ya que x se utiliza casi siempre como vaiable, se utilizará de manera equivalente

$$d = f(p).$$

Con frecuencia, la demanda de un producto o servicio depende no sólo del precio, sino también del precio de otros productos o servicios, como por ejemplo, en el caso de tres productos, la función demanda del producto uno queda determinada por

$$d = f(p_1, p_2, p_3) = a - bp_1 + cp_2 + ep_3,$$

y representa la cantidad demandada del producto 1 en términos de su precio y del precio de los productos relacionados 2 y 3.

Las derivadas parciales de esta función de demanda dan una medida de la respuesta instantánea de la demanda del producto 1 ante los cambios en los precios de los tres productos, es decir, $f_{p_1} = -b$ nos dice que, si p_2 y p_3 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 se verá disminuida a una tasa instantánea de b unidades por cada unidad que aumente p_1.

De modo análogo, las derivadas parciales $f_{p_2} = c$ y $f_{p_3} = e$ indican las tasas de cambio instantáneas en la demanda del producto 1, asociadas a los que se producen en los precios de otros productos. $f_{p_2} = c$ nos dice que, si p_1 y p_3 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 aumentará a una tasa instantánea de c unidades por cada unidad que aumente p_2, así mismo, $f_{p_3} = d$ nos dice que, si p_1 y p_2 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 aumentará a una tasa instantánea de d unidades por cada unidad que aumente p_3.

Observaciones:

1) Esta función demanda es lineal (no tiene que ser siempre así) y sus correspondientes derivadas parciales son constantes, es decir las tasas instantáneas de cambio son iguales en cualquier parte del dominio de la función demanda.

2) En segundo lugar, el hecho de que la demanda del producto 1 aumente al incrementarse los precios de los productos 2 y 3 revela una interdependencia entre los tres productos. Este es el tipo de relación que cabría esperar que exista entre *productos en competencia*[1], los cuales son los productos del mismo tipo pero de distintas marcas, entre los ejemplos de este tipo de bienes se encuentran las diferentes marcas de un mismo producto (por ejemplo las llantas radiales, los zapatos, etc.).

Los *productos complementarios* son aquellos que sirven para satisfacer una necesidad determinada que se pueden sustituir uno por otro (como margarina por mantequilla, carne de res por carne de puerco, etc.) .

En estos casos es lógico esperar que conforme aumente el precio de un producto, disminuya su demanda, mientras que la demanda de los otros productos aumenta. De manera análoga, a medida que disminuye el precio de un producto, se espera que su demanda aumente y la demanda de los otros productos disminuya. Este es el tipo de comportamiento de la función demanda anterior y de sus derivadas parciales.

EJEMPLO

En la función demanda

$$d = f(p_1, p_2, p_3) = 120,000 - 0.5p_1^2 + 0.4p_2^2 + 0.2p_3^2$$

a) calcule las derivadas parciales de primer orden.

b) Si los precios actuales de los tres productos son $p_1 = 10$, $p_2 = 20$ y $p_3 = 30$, evalúe las derivadas parciales e interprete su significado.

---

[1] *Budnick, S. Frank. Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales.*

c) ¿Qué sugiere la función demanda y sus derivadas parciales respecto a la interdependencia entre los tres productos?

Solución:

a) Las derivadas parciales son:

$$f_{p_1} = -p_1,$$

$$f_{p_2} = +0.8p_2,$$

$$f_{p_3} = +0.4p_3.$$

b) Al sustituir los valores de p en las derivadas parciales se tiene

$$f_{p_1}(10,20,30) = -10,$$

es decir, si p_2 y p_3 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 disminuirá a una tasa instantánea de 10 unidades por cada unidad que aumente p_1.

$$f_{p_2}(10,20,30) = 16,$$

es decir, si p_1 y p_3 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 aumentará a una tasa instantánea de 16 unidades por cada unidad que aumente p_2.

$$f_{p_3}(10,20,30) = 12.$$

es decir, si p_1 y p_2 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 aumentará a una tasa instantánea de 12 unidades por cada unidad que aumente p_3.

c) Lo anterior nos indica que son productos complementarios, ya que el incremento en el precio de alguno de los artículos 2 y 3 incrementa la demanda del artículo 1, mientras que un incremento en p_1 disminuye la demanda del producto 1.

El resultado anterior se puede extender a n variables, ya que la demanda de un producto o servicio depende no sólo del precio, sino también del precio de otros productos o servicios, como por ejemplo en el caso de n productos, la función demanda del primer producto está representada por

$$d = f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_0 + a_1 p_1 + a_a p_2 + \ldots + a_n p_n,$$

y representa la cantidad demandada del producto 1 en términos de su precio y con relación a los precios de los otros productos, las derivadas parciales de esta función demanda dan una medida de la respuesta instantánea de la demanda del producto 1 ante los cambios en los precios de los n productos, es decir, la derivada parcial $f_{p_i} = a_i$ con $i = 2, \ldots, n$ dice que, si $p_2, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots p_n$ se mantienen constantes, la demanda del producto 1 aumentará a una tasa instantánea de a_i unidades por cada unidad que aumente p_i.

Mientras que la derivada parcial $f_{p_1} = a_1$ dice que, si $p_2, p_3, \ldots, p_n$ se mantienen constantes, la demanda del producto 1 disminuye a una tasa instantánea de a_1 unidades por cada unidad que aumente p_1.

En el caso que la función demanda sea no lineal, el significado de las derivadas parciales es similar y el comportamiento en el mercado de la relación de los n productos es de *productos complementarios* o *productos en competencia.*

8.2 MAXIMOS Y MINIMOS.

8.2.1 Modelo de fijación de precios.

Suponga que en un mercado de monopolio, un fabricante vende dos productos afines, cuya demanda se caracteriza por el siguiente tipo de funciones demanda

$$d_1 = a_{11} - a_{12} p_1 + a_{13} p_2,$$

$$d_2 = a_{21} + a_{22}p_1 - a_{23}p_2,$$

en donde p_j $(j = 1,2)$ es el precio del producto j y d_j denota la demanda (en miles de unidades) del producto j. El examen de estas funciones demanda, dice que los dos productos están relacionados entre sí. La demanda de uno depende no sólo del precio que se le fije a ese producto, sino además del precio que se establezca para el otro.

Con respecto a la demanda del producto 1, se incrementa en a_{13}% al incrementarse el precio del producto 2 en una unidad y disminuye en a_{12}% al incrementarse el precio del producto 1 en una unidad, mientras que la demanda del producto 2 se incrementa en a_{22}% al incrementarse el precio del producto 1 en una unidad y disminuye en a_{23}% cuando el precio del producto 2 se incrementa en una unidad.

Si el fabricante desea determinar el precio que deberá fijar a cada producto, a fin de maximizar los ingresos totales por la venta de los dos productos, se procede de la siguiente manera

El ingreso total que se logra con la venta de los 2 productos se determina mediante la función

$$\mathrm{R} = p_1d_1 + p_2d_2.$$

Sin embargo. esta función, se expresa en términos de cuatro variables. Como en el caso anterior, es posible sustituir los valores de d_1, d_2 en la función anterior, así, el ingreso obtenido por cada producto se determina por el sistema

$$\mathrm{R}_1 = a_{11}p_1 - a_{12}p_1^2 + a_{13}p_1p_2,$$

$$\mathrm{R}_2 = a_{21}p_2 + a_{22}p_1p_2 - a_{23}p_2^2,$$

y el ingreso total obtenido por la venta de los 2 artículos se representa por

$$\mathrm{R} = f(p_1,p_2) = \mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2.$$

Las primeras derivadas parciales son

$$f_{p_1} = a_{11} - 2a_{12}p_1 + (a_{13} + a_{22})p_2,$$

$$f_{p_2} = a_{21} + (a_{22} + a_{13})p_1 - 2a_{23}p_2,$$

y son iguales a cero si

$$a_{11} = 2a_{12}p_1 - (a_{13} + a_{22})p_2,$$

$$a_{21} = -(a_{22} + a_{13})p_1 + 2a_{23}p_2,$$

Si existe solución del sistema anterior de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, se tiene como resultado, que los puntos obtenidos (p_1^*, p_2^*) son los puntos críticos de la función ingreso, en tal caso, para verificar que en dichos puntos críticos hay un máximo para la función ingreso, se forma la matriz hesiana de las segundas derivadas, es decir la matriz

$$\begin{pmatrix} -2a_{12} & a_{13} + a_{22} \\ a_{13} + a_{22} & -2a_{23} \end{pmatrix}$$

Existe un máximo relativo si los menores principales[2] (evaluados en los puntos críticos) se alternan en el signo, para este modelo, los menores principales de orden impar son negativos y los menores principales de orden par son positivos, es decir,

$$|H_1| < 0, \quad |H_2| > 0.$$

[2] Los *menores principales* se determian por los determinantes de las submatrices de la diagonal.

Si existen los puntos críticos, la función ingreso alcanza un máximo relativo, ya que

$$| H_1 | = -2a_{12} < 0,$$

y

$$| H_2 | = 4a_{12}a_{23} - (a_{13} + a_{22}) > 0, \quad \text{para que} \quad p_1^* \quad \text{y} \quad p_2^* \quad \text{sean positivos,}$$

por tanto, el ingreso máximo se obtiene con los precios $p_1 = p_1^*$ y $p_2 = p_2^*$.

EJEMPLO

Un fabricante vende dos productos afines, cuya demanda se caracteriza por las funciones demanda siguientes

$$d_1 = 150 - 2p_1 + p_2,$$

$$d_2 = 200 + p_1 - 3p_2,$$

donde p_j ($j = 1, 2$) es el precio del producto j y d_j denota la demanda (en miles de unidades) del producto j. El examen de estas funciones demanda, nos dice que los dos productos están relacionados entre sí. La demanda de uno no depende sólo del precio que se le fije a ese producto, sino además del precio que se establezca para el otro.

La compañía desea determinar el precio que deberá fijar a cada producto, a fin de maximizar los ingresos totales por la venta de los dos productos.

Solución:

En este problema hay dos productos y, por tanto, dos decisiones de fijación de precios que deben tomarse.

El ingreso total que se logra con la venta de los dos productos se determina mediante la función

$$R = p_1 d_1 + p_2 d_2.$$

Sin embargo, esta función, se expresa en términos de cuatro variables. Como en el caso de una sola variable, es posible sustituir los valores de d_1 y d_2 en la función anterior y, así, toma la forma

$$R = f(p_1, p_2) = 150p_1 - 2p_1^2 + 2p_1p_2 + 200p_2 - 3p_2^2.$$

Ahora se puede maximizar la superficie de ingreso para los puntos máximos relativos.

Las primeras derivadas parciales son

$$f_{p_1} = 150 - 4p_1 + 2p_2,$$

$$f_{p_2} = 200 + 2p_1 - 6p_2,$$

y son iguales a cero si

$$150 = 4p_1 - 2p_2,$$

$$200 = -2p_1 + 6p_2,$$

al resolver el sistema anterior de dos ecuaciones con dos incógnitas, se tiene como resultado que $p_1 = 65$ y $p_2 = 55$.

Si estos valores se sustituyen en f, se tiene que

$$f(65, 55) = 10,375 \text{ pesos},$$

es decir, existe un punto crítico de f en el punto $(65, 55)$.

Las segundas derivadas son

$$f_{p_1p_2} = 2 \qquad f_{p_1p_1} = -4,$$

$$f_{p_2p_1} = 2 \qquad f_{p_2p_2} = -6,$$

como $\quad f_{p_1p_1} < 0, \quad f_{p_2p_2} < 0 \qquad$ y

$$(f_{p_1p_1})(f_{p_2p_2}) - (f_{p_1p_2})(f_{p_2p_1}) = 20 > 0,$$

existe un máximo relativo en f cuando $\quad p_1 = 65 \quad$ y $\quad p_2 = 55$.

Los ingresos se maximizan en \$10,375,000 cuando se venda en \$65.00 el producto 1 y en \$55.00 el producto 2.

La demanda esperada con estos precios se obtiene al sustituir $p_1 = 65$ y $p_2 = 55$ en el sistema de ecuaciones de la demanda y es de $\quad d_1 = 75,000$ unidades del producto 1 y de $d_2 = 100,000$ unidades del producto 2.

El modelo anterior puede extenderse a n variables, es decir, un fabricante vende n productos afines, cuya demanda se caracteriza por las funciones demanda que, para este caso son,

$$d_1 = a_{11} - a_{12}p_1 + a_{13}p_2 + ... + a_{1n}p_n,$$

$$d_2 = a_{21} + a_{22}p_1 - a_{23}p_2 + ... + a_{2n}p_n,$$

$$d_3 = a_{31} + a_{32}p_1 + a_{33}p_2 - ... + a_{3n}p_n,$$

....

$$d_n = a_{n1} + a_{n2}p_1 + a_{n3}p_2 + \dots - a_{nn}p_n,$$

donde p_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ es el precio del producto j y d_j denota la demanda (en miles de unidades) del producto j. El examen de estas funciones demanda, dice que los n productos están relacionados entre sí. La demanda de uno depende no sólo del precio que se le fije a ese producto sino, además, del precio que se establezca para los otros productos.

La compañía desea determinar el precio que deberá fijar a cada producto, a fin de maximizar los ingresos totales de la venta de los n productos.

Solución:

El ingreso total que se logra con la venta de los n productos se determina mediante la función

$$R = p_1d_1 + p_2d_2 + \dots + p_nd_n.$$

Sin embargo. esta función, se expresa en términos de $2n$ variables. Como en el caso anterior, es posible sustituir los valores de $d_1, d_2, \dots, d_n$ en la función anterior, así, el ingreso obtenido por cada producto se determina mediante el sistema

$$R_1 = a_{11}p_1 - a_{12}p_1^2 + a_{13}p_1p_2 + \dots + a_{1n}p_1p_n,$$

$$R_2 = a_{21}p_2 + a_{22}p_1p_2 - a_{23}p_2^2 + \dots + a_{2n}p_1p_n,$$

....

$$R_n = a_{n1}p_n + a_{n2}p_1p_n + a_{n3}p_2p_n + ... - a_{nn}p_n^2,$$

y el ingreso total obtenido por la venta de los n artículos se representa por

$$R = f(p_1, p_2, ...p_n) = R_1 + R_2 + ... + R_n.$$

Ahora se puede maximizar la función ingreso total. Las primeras derivadas parciales son

$$f_{p_1} = a_{11} - 2a_{12}p_1 + (a_{13} + a_{22})p_2 + (a_{14} + a_{32})p_3 + ... + (a_{1n} + an2)p_n,$$

$$f_{p_2} = a_{21} + (a_{22} + a_{13})p_1 - 2a_{23}p_2 + (a_{24} + a_{33})p_3 + ... + (a_{2n} + a_{n3})p_n,$$

$$f_{p_3} = a_{31} + (a_{32} + a_{14})p_1 + (a_{33} + a_{24})p_2 - 2a_{34}p_3 + ... + (a_{3n} + a_{n4})p_n,$$

....

$$f_{p_n} = a_{n1} + (a_{n2} + a_{1n})p_1 + (a_{n3} + a_{2n})p_2 + (a_{n4} + a_{3n})p_3 + ... - 2a_{nn}p_n,$$

y son iguales a cero si

$$a_{11} = 2a_{12}p_1 - (a_{13} + a_{22})p_2 - (a_{14} + a_{32})p_3 - ... - (a_{1n} + an2)p_n,$$

$$a_{21} = -(a_{22} + a_{13})p_1 + 2a_{23}p_2 - (a_{24} + a_{33})p_3 - ... - (a_{2n} + a_{n3})p_n,$$

$$a_{31} = -(a_{32} + a_{14})p_1 - (a_{33} + a_{24})p_2 + 2a_{34}p_3 - ... - (a_{3n} + a_{n4})p_n,$$

....

$$a_{n1} = -(a_{n2} + a_{1n})p_1 - (a_{n3} + a_{2n})p_2 - (a_{n4} + a_{3n})p_3 - ... + 2a_{nn}p_n.$$

Si existe solución del sistema anterior de n ecuaciones con n incógnitas, se tiene como resultado que los puntos obtenidos $(p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$ son los puntos críticos de la función ingreso, en tal caso, para verificar que dichos puntos críticos son un máximo para la función ingreso, se forma la matriz hessiana de las segundas derivadas, es decir la matriz

$$\begin{pmatrix} -2a_{12} & a_{13}+a_{22} & a_{14}+a_{32} & .... & a_{1n}+a_{n2} \\ a_{13}+a_{22} & -2a_{23} & a_{24}+a_{33} & .... & a_{2n}+a_{n3} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n2}+a_{1n} & a_{n3}+a_{2n} & a_{n4}+a_{3n} & .... & -2a_{nn} \end{pmatrix}$$

El criterio para determinar máximos y mínimos relativos es el siguiente:

1.- Existe un máximo relativo si los menores principales (evaluados en los puntos críticos) se alternan en el signo, los menores principales de orden impar son negativos y los menores principales de orden par son positivos, es decir,

$$|H_1| < 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| < 0, ...$$

2.- Existe un mínimo relativo si todos los menores principales (evaluados en los puntos críticos) son positivos, es decir,

$$|H_1| > 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| > 0, ...$$

3.- Si no cumple ninguna de las dos condiciones anteriores, no se encuentra información alguna respecto al punto crítico. Se requiere un análisis ulterior en la vecindad del punto crítico para determinar su naturaleza[3].

Mediante el criterio anterior se determina si la función ingreso tiene un máximo.

8.3 INTEGRALES MULTIPLES.

8.3.1 Probabilidad como una integral doble.

Una de las aplicaciones más frecuentes de la integral doble se refiere a la determinación de la probabilidad de que dos o más variables aleatorias queden dentro de límites o intervalos específicos para cada una de ellas. Tales problemas se establecen en términos de la integral doble de una *función conjunta de densidad de probabilidad*, justamente como la probabilidad de que una variable quede dentro de un intervalo específico se establece en términos de la integral de una *función de densidad de probabilidad* (f.d.p.) de una variable.

Una f.d.p. conjunta para variables continuas x y y será una función $f(x,y)$ que tenga las siguientes propiedades:

1.- $f(x,y) \geq 0$.

2.- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

3.- $\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dxdy = P(a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2)$.

Tales propiedades son semejantes a las correspondientes a una f.d.p. de una variable y establecen que la probabilidad es siempre positiva, la probabilidad de un evento que seguramente ocurrirá es igual a la unidad, la probabilidad de que el valor de x esté en el intervalo (a_1,b_1) y de que el valor de y esté en el intervalo (a_2,b_2), está dado por la integral respectiva.

[3]Este análisis no corresponde al programa de *cálculo diferencial e integral III*.

Geométricamente la gráfica de $f(x,y)$ es una superficie en tres dimensiones y el volumen bajo la superficie situada bajo el rectángulo determinado por $a_1 < x < b_1$ y $a_2 < y < b_2$ es la *probabilidad* de que x y y asuman valores correspondientes a puntos en este rectángulo.

Si $f(x,y)$ es continua, entonces $P(a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2) = P(a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2)$.

EJEMPLO

1.-En un estudio de costos para un cierto tipo de lámpara, una fábrica ha determinado que la f.d.p. para la magnitud o tamaño del pedido, x y el costo total de la orden o pedido y, es aproximadamente,

$$f(x,y) = \frac{1}{3.5} \qquad 1 \leq x \leq 6 \qquad 0.1 + 0.9x \leq y \leq 0.1 + 1.1x,$$

en donde x está en miles de lámparas, y y, en miles de unidades monetarias (pesos). Si la compañía establece un precio de $1.05 por lámpara, ¿en qué proporción de los pedidos la empresa no perderá nada, o bien, tendrá una ganancia?

Solución:

Como la compañía establece un precio de $1.05 por lámpara, entonces el costo mayor que puede tener una lámpara es dicho precio, es decir, la probabilidad de que el tamaño o magnitud del pedido varíe entre 1 y 6 cuando el costo varía entre $0.1 + 0.9x$ y $1.05x$ es.

$$P(1 \leq x \leq 6,\ 0.1 + 0.9x \leq y \leq 0.1 + 1.1x) = \int_1^6 \int_{0.1+0.9x}^{1.05x} \frac{1}{3.5} dy dx,$$

al integrar con respecto a y y al evaluar los límites de y, se tiene,

$$\int_1^6 (0.15x - 0.1)dx,$$

al integrar con respecto a x y al evaluar los límites de x, se tiene,

$$\int_1^6 (0.15x - 0.1)dx = 0.6071$$

es decir, que tiene una probabilidad del 60% de que la compañía no perderá nada o bien, tendrá una ganancia extra cuando los pedidos se encuentren en el intervalo $1,6$.

CONCLUCIONES.

En este trabajo se realizan justificaciones matemáticas de algunos conceptos que se estudian en financieras, economía, seguros y demografía, a los que no siempre se les aplica dicha justificación.

Las funciones utilizadas en economía, demografía y seguros están basadas en fundamentos matemáticos.

Las aplicaciones permiten elaborar de manera más comprensible las abstracciones matemáticas.

Una misma función, como la exponencial, puede tener diversas aplicaciones en varias disciplinas.

Existen aplicaciones, como las de costos, que se pueden generalizar a varias disciplinas.

Los conceptos principales del cálculo, como la derivada, puede tener similitud con algunos conceptos económicos, demográficos o de seguros.

Las gráficas obtenidas por los métodos matemáticos tienen diversar interpretaciones dependiendo de la disciplina en la que se esté considerando.

El dominio de los conceptos principales del cálculo ayuda a comprender de manera más eficaz los modelos de la economía.

Con base en el buen manejo de los conceptos principales del cálculo se pueden generalizar a n variables algunas aplicaciones a la economía.

BIBLIOGRAFÍA.

Arizmendi, Peimbert Hugo., Carrillo, Hoyo Angel M., Lara, Aparicio Miguel. *Cálculo, Primer Curso.* México: Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.

Arya, C. Jagdish., Lardner, W. Robin. *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía.* México: Prentice Hall Hispanoamericana S. A. 1992.

Brass, W. *The Demography of tropical Africa.* Priceton: University Press, 1968.

Budnick, S. Frank, *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* México: Mc Graw Hill, 1990.

Chiang, C. Alpha. *Métodos fundamentales de Economía Matematica.* Universidad de Connecticut, 1987.

Courand, John. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático.* México: Limusa, 1993.

Freund, E. John. *Introducción a las Matemáticas de los Negocios y la Economía.* México: Mc Graw Hill, 1990.

Goldstein, J. Larry., C. Lay David., Schneider, I. David. *Cálculo y sus aplicaciones.* México: Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.

Kovacio, L. Michael. *Matemáticas a las Ciencias Economico-Administrativas.* México: Mc Graw Hill, 1992.

Kuiatowsk, Kazimierz. *Introducción al Cálculo.* México: Limusa, 1975.

Lotka, J. Alfred. *Teoría de las Asociaciones Biológicas.* Santiago: Celade, 1969.

Pressat, Roland. *El Análisis Demográfico, Conceptos, Métodos, Resultados, Aplicaciones.* México: Fondo de Cultura Económica, 1983.

Somoza, Jorge. *Poblaciones teóricas.* Santiago: Celade, 1971.

Spiegelman, Mortimer. *Introducción a la Demografía.* México: Fondo de Cultura Económica, 1985.

Spivak, Michael. *Cálculo Infinitesimal.* México: Repla, 1989.

Weber, E. Jean. *Matemáticas Aplicadas para Administración y Economía.* México: Mc Graw Hill, 1992.