



003629  
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

COMPARACION DEL MODELO DE NILSSON  
CON EL MODELO  $SU(3)$  Y SIMPLECTICO  
DEL NUCLEO

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS**  
( F I S I C A )

**P R E S E N T A :**  
VICTOR MANUEL VELAZQUEZ AGUILAR

DIRECTOR DE TESIS:

DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT

**TESIS CON** MEXICO, D. F.  
**FALLA DE ORIGEN**

1968

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS**

**COMPLETA**

**Agradezco al Instituto de Ciencias Nucleares la hospitalidad brindada para la realización de este trabajo de tesis de Maestría. Agradezco la colaboración del Dr. Jorge Hirsch, los consejos del Dr. Octavio Castaños y las correcciones hechas al trabajo por cada uno de los sinodales elegidos para la defensa de esta tesis. Finalmente agradezco de manera muy especial al Dr. Peter Hess por haberme guiado en esta investigación y por mostrarme el camino hacia el tunel donde la ciencia guarda sus secretos.**

**A mis padres y hermanos  
porque son incondicionales.**

**A Donald que al irse dejó  
sus sueños de hacer física.**

**Agradezco a los operadores de computo del instituto: Antonio Ramírez y Miguel de Icaza, las facilidades y apoyo en el aspecto computacional. En ese ámbito, también agradezco a Juan Carlos López Vieyra y Rubén Darío Santiago.**

**Snorkita:**

**Gracias por continuar a mi lado, empujándome hacia el futuro. Ésto, apenas comienza. No sé hacia donde nos llevará el futuro, pero iremos siempre juntos. Te ama:**

**Victor.**

# Contenido

<b>1</b>	<b>Modelo de Nilsson</b>	<b>7</b>
1.1	El potencial promedio	7
1.2	Aproximación del modelo de capas al problema de muchos cuerpos	9
1.3	El modelo de Nilsson	11
1.4	Ejemplo	15
<b>2</b>	<b>Modelos algebraicos microscópicos del núcleo.</b>	<b>19</b>
2.1	Introducción	19
2.2	El modelo SU(3)	20
2.2.1	Rotor Cuántico Triaxial	20
2.2.2	Dinámica del rotor y SU(3)	21
2.3	Representación simpléctica del modelo de capas	23
2.3.1	Hamiltoniano del Modelo Simpléctico	28
2.4	Esquema Pseudo-SU(3)	30
2.4.1	Dobletes Espín-Orbita	31
2.5	El esquema pseudo-simpléctico	34
2.5.1	Factor de escalamiento	36
<b>3</b>	<b>Modelo de Pseudo-Nilsson</b>	<b>41</b>
3.1	La simetría de Pseudo-espín	41
3.2	El modelo Pseudo-Nilsson	43
3.3	Momento cuadrupolar en el pseudo-espacio	44
3.4	Cálculo de momento cuadrupolar	45
<b>4</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>51</b>
5.1	Diagramas de Nilsson	52
5.2	Composición en la base esférica	56

5.3	Núcleos ligeros . . . . .	62
5.3.1	Distribución de las partículas excitadas . . . . .	65
5.3.2	Intensidades de excitación de bosones para los núcleos ligeros . . . . .	66
5.4	Núcleos pesados . . . . .	68
5.4.1	Ocupaciones . . . . .	68
5.4.2	Distribución de los números de ocupación . . . . .	72
5.4.3	Intensidades de excitación de bosones . . . . .	74
5.4.4	El momento cuadrupolar y su reducción al espacio normal . . . . .	77
5.4.5	El factor de escalamiento vs. deformación . . . . .	80
5.4.6	Convergencia . . . . .	81
5.5	Interacción y deformación . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Interacción entre capas en el término espín-órbita</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>B</b>	<b>Densidad de carga con el modelo de Nilsson</b> . . . . .	<b>103</b>
<b>C</b>	<b>Ocupación de protones en núcleos ligeros.</b> . . . . .	<b>109</b>
<b>D</b>	<b>La deformación en el modelo rotación-vibración</b> . . . . .	<b>113</b>
D.1	El modelo rotación-vibración . . . . .	113
D.2	Momento cuadrupolar y transiciones B(E2) . . . . .	117
D.3	Ajuste de la deformación . . . . .	119
<b>E</b>	<b>Programa para el modelo de Nilsson</b> . . . . .	<b>121</b>
<b>F</b>	<b>bibliografía</b> . . . . .	<b>123</b>

# Introducción

El estudio de la física nuclear ha seguido varios rumbos al tratar de explicar varias propiedades de los núcleos. Varios modelos surgieron de esta manera. Unos que tratan de explicar al núcleo utilizando consideraciones fundamentales. Otros explican al mismo, utilizando bases empíricas, como propiedades macroscópicas. Los primeros son los llamados modelos microscópicos, ya que tienen por objetivo final la descripción del núcleo y sus características partiendo de la interacción entre dos nucleones. Los modelos del segundo tipo son los llamados modelos colectivos o fenomenológicos por basar su descripción en una parametrización de la superficie nuclear en variables colectivas, que describen el movimiento de los nucleones en conjunto. Esta parametrización está inspirada en el comportamiento colectivo de las moléculas en una gota de líquido. La idea de considerar al núcleo como una gota de líquido proviene de sus propiedades de saturación, superficie bien definida e incompresibilidad. Características muy importantes del núcleo, como vibraciones alrededor de una deformación de equilibrio, rotaciones, momentos cuadrupolares, transiciones y movimientos con distintas multipolaridades, entre otras cosas, han sido estudiadas desde el marco de referencia de los modelos colectivos [Eis-87]. Estos han evolucionado desde la fórmula semiempírica de la masa [Wei-35] pasando por la descripción de Bohr-Mottelson [Bo-52], [Bo-53] y el modelo de rotación-vibración; de ahí, han evolucionado modelos más sofisticados como el modelo colectivo generalizado o modelo de Frankfurt [He-80].

Por otra parte, evidencias experimentales, como el aumento considerable en la energía de amarre de los nucleones en el núcleo, para ciertos valores de  $Z$  (número atómico) 2,8,20,28,50,82 y 126 (números mágicos) y con el consecuente aumento en la energía de los primeros estados excitados para núcleos en la vecindad de los mencionados, fueron más que suficientes para pensar que el núcleo debería tener una estructura de capas [May-48], [May-55].

Es sabido que la interacción entre nucleones en el núcleo, no es del tipo central, pero considerando el corto alcance de la interacción y el número

de nucleones es posible pensar en la existencia de un potencial común, producido por el promedio de los potenciales individuales con las siguientes características: Es tal, que los nucleones se mueven casi libremente dentro del núcleo y los que están en la periferia son atraídos hacia el centro del mismo. Resulta de gran importancia, la suposición de la existencia de un potencial promedio; ya que esto permite sustituir el problema de construir el potencial efectivo como la suma de interacciones de dos y hasta tres cuerpos en el núcleo, por el problema de cada nucleón en un potencial promedio. Es necesario mencionar que las interacciones de uno, dos y tres cuerpos, pueden quedar incluidas en el potencial promedio, según el *ansatz* y ajustes utilizados.

Es posible proponer varios *ansatz* para el potencial promedio que cumplen con las características ya mencionadas. Los más comunes son el potencial de Woods-Saxon, el de oscilador armónico y el de pozo cuadrado, dentro de los cuales el primero y el segundo se han utilizado mucho como modelos para obtener una base en la cual trabajar.

En este trabajo, utilizamos como modelo de prueba aquel que utiliza como potencial promedio al oscilador armónico por ofrecer soluciones analíticas directas.

Es necesario mencionar que el modelo de de partícula independiente (a explicarse en el capítulo 1) utiliza dos interacciones adicionales para ajustar con la evidencia experimental. El proveniente del acoplamiento espín-órbita y el de órbita-órbita<sup>1</sup>:  $l \cdot s$  y  $l^2$ . El primero es necesario para que el modelo explique la existencia de los números mágicos de núcleos pesados y el segundo empuja hacia abajo los orbitales con  $l$  máximo. Este último término ajusta al modelo en una posición intermedia entre el oscilador armónico y el pozo de potencial. El modelo de partícula independiente que utiliza al oscilador armónico como potencial promedio y que además contempla núcleos deformados (oscilador deformado), es el modelo de Nilsson [Ni-55] que está basado en la inclusión de un término de interacción de tipo cuadrupolar. La suposición de deformación viene a explicar varios hechos experimentales como:

- a) Existencia de bandas rotacionales.
- b) Momentos cuadrupolares grandes.
- c) Grandes probabilidades de transición cuadrupolares.

Este potencial de interacción (de tipo cuadrupolar) que para núcleos prolatos tiene la forma  $(\kappa\beta)r^2 Y_{20}$ , donde  $\kappa$  es una constante y  $\beta$  es el parámetro de deformación del núcleo.  $\beta$  puede identificarse con  $Q^c / \langle Q^c \rangle$  donde  $Q^c$  es el momento cuadrupolar colectivo y el término  $\langle Q^c \rangle$  es un promedio de dicha interacción. Este modelo mostró ser una buena aproximación para núcleos

<sup>1</sup>En este contexto, a estas interacciones las denominaremos interacciones residuales

lejos de las capas cerradas ( $A \simeq 25$  : Al, Mg; tierras raras  $110 < A < 150$ ; actínidos  $A > 220$ ).

También es posible estudiar núcleos deformados partiendo del modelo que utiliza el potencial de Woods-Saxon.

Otros modelos pueden ser fabricados teniendo en de recientes estudios, para medir sus consecuencias y alcances (ver por ejemplo [Ca-89] y [TrD-94]). De hecho, este modelo, ha sido enfrentado a un mapeo con el modelo geométrico (modelo colectivo generalizado). Ver por ejemplo la aplicación hecha a  $^{238}\text{U}$  [Ca-92].

El objetivo de este trabajo es hacer una comparación, a nivel de observables, entre el modelo microscópico (simplético y pseudo-simplético) con un modelo de la misma línea, pero más simple, el ya mencionado modelo de Nilsson. La comparación no es uno a uno, ya que el SU(3), maneja diferentes representaciones irreducibles, pero es posible la comparación con la representación fundamental.

Esperamos que los resultados sean similares en este límite; de tal manera que la extensión del SU(3) recobre conceptos físicos bien definidos en el modelo de Nilsson.

La idea de este trabajo es comparar un modelo microscópico como el simplético y pseudo con otro modelo microscópico más clásico como lo es el modelo de Nilsson <sup>2</sup>. Generalmente los modelos se comparan, cuando intentan describir la misma física. En ocasiones sólo es posible la comparación numérica de sus resultados, cuando sus formalismos no pueden describirse uno al otro.

Con este trabajo, intentamos dar una interpretación del estado base del núcleo en los modelos simplético y pseudosimplético en términos del modelo de Nilsson. En estos dos modelos puede calcularse utilizando el estado base como referencia, ya que el modelo algebraico puede describir estados excitados de manera fácil que el modelo de Nilsson no puede describir. El estado correspondiente de comparación en el modelo algebraico será el de la irrep cuyo operador de Casimir de segundo orden sea el más grande.

Cabe mencionar que otros trabajos se han hecho en este renglón con propósitos similares al de esta investigación, como lo es el trabajo de Castañón et al. [Ca-89] y [TrD-9a] de Troltenier et al. El primero, estudia exitosamente núcleos ligeros como  $^{20}\text{Ne}$  y  $^{24}\text{Mg}$  utilizando el modelo simplético. En el segundo trabajo mencionado, se aplica el modelo pseudosimplético y el concepto de "factor de escalamiento" para los núcleos de  $^{160}\text{Dy}$ ,  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$ . Ambos trabajos son básicos en esta investigación, por su estudio con un modelo algebraico son los núcleos que veremos.

---

<sup>2</sup> Consideramos a este modelo como microscópico, aunque no especifica interacción directa entre nucleones

También resulta importante el trabajo de K.H.Bhatt et al. [BHA-92], que estudia el comportamiento y validez del factor de escalamiento propuesto en el modelo Pseudo-simpléctico. Parte del interés de este trabajo consiste en investigar la validez del factor de escalamiento propuesto en el modelo pseudo-simpléctico. También tratar de entender las aseveraciones hechas en el trabajo [BHA-92], acerca de identificar al factor de escalamiento como una carga efectiva, siendo que el carácter del factor de escalamiento está basado en un concepto diferente al de la carga efectiva. Mientras que el factor de escalamiento es el factor necesario (en el modelo de capas) para explicar que los nucleones de valencia polarizan al núcleo de capa cerrada, el factor de escalamiento proviene de la proposición de que un subconjunto de los nucleones no participan activamente en la dinámica del núcleo, pudiendo ser sustituida su presencia por factor denominado "de escalamiento", cuya utilización no necesita de una carga efectiva para explicar observables como el momento cuadrupolar. El trabajo de Bhatt et al. propone que dicho subconjunto de nucleones realmente no es tan inactivo como se piensa, lo que implica cierta invalidez de dicho factor de escalamiento.

En consecuencia, para investigar acerca de la validez del factor de escalamiento, hay que ir a otros modelos (como en este caso el modelo de Nilsson), y obtener información acerca de tal factor de escalamiento y probar que su concepto está bien fundado.

Resumiendo, los objetivos principales de este trabajo son:

- 1) La comparación sistemática del modelo (pseudo-)Nilsson con el modelo (pseudo-)simpléctico.
- 2) Estudio de la validez del factor de escalamiento desde el marco del modelo de Nilsson.

# Capítulo 1

## Modelo de Nilsson

El modelo de Nilsson [Ni-55] es una extensión del modelo de partícula independiente esférico, utilizando un potencial deformado. Antes de explicar los detalles de esta versión, se establecerán de manera breve los fundamentos del modelo de capas esférico.

La evidencia experimental de que núcleos con un número definido de nucleones (números mágicos), tienen energía de amarre mayor que aquellos núcleos con un número de nucleones a la mitad entre los mágicos, estableció la analogía directa con la distribución de los electrones en el problema atómico. Los núcleos mágicos ocupan en esta analogía el lugar que tienen átomos mágicos: Helio, Neón, Argón, etc. Esta conexión entre física atómica y nuclear, fue definitiva en la concepción del núcleo como una distribución de sus componentes en capas; aunque existían otras evidencias como la variación del primer estado  $2^+$  como función del número de nucleones, tal que la energía de excitación se hace mayor en la vecindad de un núcleo mágico o de capa cerrada.

### 1.1 El potencial promedio

La analogía con los electrones alrededor del núcleo trajo la tentativa de utilizar un potencial promedio, en el cual se muevan los nucleones.

Un nucleón cerca del centro del núcleo sentirá un potencial nuclear uniforme, de forma que el efecto neto es el movimiento libre del nucleón:

$$\left(\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \quad (1.1)$$

En cambio, un nucleón en la periferia del núcleo, debe sentir una fuerza desequilibrada; de atracción hacia el interior del sistema nuclear. Esto puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right)_{r < R_0} > 0 \quad (1.2)$$

Finalmente, el alcance de la fuerza nuclear puede especificarse como:

$$V(r) \approx 0, \quad r > R_0 \quad (1.3)$$

Los potenciales más comunes son:

**Woods Saxon**

$$V(r) = -V_0 \left[ 1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right) \right]^{-1} \quad (1.4)$$

**Oscilador armónico**

$$V(r) = -V_0 \left[ 1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 \right] = \frac{m}{2} \omega_0^2 (r^2 - R_0^2) \quad (1.5)$$

**Pozo cuadrado**

$$V(r) = -V_0 \quad \text{para } r \leq R_0 \quad (1.6)$$

$$V(r) = 0 \quad \text{para } r > R_0 \quad (1.7)$$

Donde podemos mencionar

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, \quad V_0 \approx 50 [MeV], \quad a \approx 0.5 [fm], \quad r_0 \approx 1.2 [fm], \quad (1.8)$$

como parámetros frecuentemente usados. [Ring-80]

El potencial de Woods-Saxon, aunque representa un potencial más realista del núcleo, tiene la desventaja de que no tiene soluciones analíticas. Por este motivo, en la práctica se utiliza el potencial de oscilador armónico. Este potencial tiene la desventaja de tener un límite infinito (el potencial va a infinito cuando la distancia crece). Sin embargo, cuando el estudio se restringe a estados ligados de partícula independiente, el oscilador armónico resulta una buena aproximación.

## 1.2. APROXIMACIÓN DEL MODELO DE CAPAS AL PROBLEMA DE MUCHOS CUERPOS

Se ha pensado en el núcleo como un sistema ligado, donde la interacción entre las partículas es sustituida por una interacción de partícula independiente con un potencial común. Este potencial común se obtiene de hacer un promedio de todas las interacciones de dos cuerpos en primera aproximación. De ahí, este potencial que tiene las características (1.1-1.3) se puede aproximar por un potencial de oscilador armónico. Pero este tipo de promedio de las interacciones entre nucleones no toma en cuenta un tipo de interacción que sobrevive al promedio: la interacción espín-órbita. Esta interacción residual es muy importante en la descripción de los núcleos como un sistema en capas. De hecho, antes de tomar en cuenta esta interacción residual, el modelo con sólo el potencial promedio no era capaz de interpretar los números mágicos (2,8,20,28,50,82,126) más allá del número 20. Con la introducción de la interacción  $l \cdot s$ , la degeneración por el potencial promedio se rompe, dando lugar a un buen ajuste del ajuste de los números mágicos.

## 1.2 Aproximación del modelo de capas al problema de muchos cuerpos

Una teoría microscópica del núcleo usualmente se basa en las siguientes tres propiedades:

- 1) El núcleo es un sistema mecánico-cuántico de muchos cuerpos.
- 2) Las velocidades en el núcleo son pequeñas de tal manera que los efectos relativistas pueden despreciarse.
- 3) La interacción entre nucleones tiene carácter de dos cuerpos.

Ya que en mecánica cuántica se postula que la función de onda puede llevar toda la información acerca de un sistema, la ecuación de *Schrödinger* de un sistema de muchos cuerpos puede escribirse como:

$$H\Psi = \left( \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \sum_{i < j}^A v(i, j) \right) \Psi(1, \dots, A) = E\Psi(1, \dots, A) \quad (1.9)$$

donde

$$(i) = (r_i, s_i, t_i) \quad (1.10)$$

se refieren a las coordenadas del  $i$ -ésimo nucleón con  $t_i$  (tercera componente del isospín  $s_i$ ) tomando los valores  $\frac{1}{2}$  para protones y  $-\frac{1}{2}$  para neutrones.

Ahora, si utilizamos la suposición del modelo de partícula independiente, la Ec.[1.9] puede reducirse a la siguiente:

$$H_0 \Psi = \left( \sum_{i=1}^A h_i \right) \Psi = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V(i) \right) \Psi = E \Psi \quad (1.11)$$

Las soluciones de  $\Psi$  son productos antisimetrizados de funciones de partícula independiente, que a su vez son funciones propias del Hamiltoniano de partícula independiente  $h_i$

$$h_i \phi_k = \epsilon_k \phi_k \quad (1.12)$$

Las funciones  $\phi_k$  forman una base ortogonal, que puede ser utilizada en la representación del número de ocupación en el marco de la segunda cuantización. De esta manera, a cada nivel  $k$  le corresponde un par de operadores  $a_k^+$  y  $a_k$  de creación y aniquilación respectivamente. Estos operadores obedecen las relaciones de conmutación de Fermi:

$$\begin{aligned} \{a_\mu, a_\nu^\dagger\} &= \delta_{\mu\nu}, \\ \{a_\mu, a_\nu\} &= \{a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger\} = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Estos crean o destruyen partículas con una función de onda  $\phi_k$ . El modelo del Hamiltoniano de capas  $H_0$  tiene la forma:

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k a_k^+ a_k \quad (1.14)$$

Si identificamos a  $|- \rangle$  como el estado de vacío, las funciones propias pueden ser representadas como:

$$|\phi_{k_1 \dots k_A}\rangle = a_{k_1}^+ \dots a_{k_A}^+ |- \rangle \quad (1.15)$$

cuyos eigenvalores son:

$$E_{k_1 \dots k_A} = \epsilon_{k_1} + \dots + \epsilon_{k_A} \quad (1.16)$$

De esta manera, podemos definir el estado base del sistema como aquel que tiene sus niveles llenos, ordenados de acuerdo a la energía.

$$\Phi_0 = a_1^+ \cdots a_A^+ | - \rangle \quad (1.17)$$

Este es el estado que describe las características de núcleos esféricos en el estado base y que de hecho definen el nivel de Fermi. Pero se sabe, que los núcleos con estas características son pocos dentro la amplia gama de sistemas nucleares. Puede suceder que un estado excitado de un núcleo esférico sea creado, por la excitación de una partícula abajo del nivel de Fermi y se coloque en una energía por encima de éste. Este tipo de excitaciones pueden incluir más de una partícula que cambie de estado de abajo del nivel de Fermi hacia arriba del nivel de Fermi. Eso hace más complicada la descripción de este tipo de núcleos utilizando el modelo de capas esférico. Teorías más fundamentales escriben el Hamiltoniano, como el de capas esférico, más un término de corrección (interacción residual)  $V_R$  adecuado que pueda diagonalizarse en la base del modelo de capas esférico. La nueva función de onda (más realista) puede escribirse de la siguiente manera:

$$|\Psi_0\rangle = C_0 |\Phi_0\rangle + \sum_{ij} C_{ij} a_i^+ a_j |\Phi_0\rangle + \cdots, \quad (1.18)$$

donde  $a_i^+$  son operadores de creación en el estado  $i$ .

### 1.3 El modelo de Nilsson

Los núcleos cercanos a la capa cerrada, son explicados satisfactoriamente por el modelo de capas esférico. Pero este modelo no es suficiente en primera aproximación para explicar el comportamiento de los núcleos que quedan intermedios entre capas cerradas. Específicamente  $A \approx 25$  (Al, Mg),  $150 < A < 190$  (tierras raras) y para  $A > 220$  (Actínidos). Las características de los núcleos en estas regiones de la tabla periódica, pueden clasificarse de la siguiente manera:

- i) Existencia de bandas rotacionales.
- ii) Momentos cuadrupolares grandes.
- iii) Altas probabilidades de transición cuadrupolar.
- iv) Estructura de partícula independiente.

Estas características surgen porque el núcleo adquiere deformación. La interpretación para la presencia de esta deformación, está basada en la interacción de las partículas en la capa de valencia con el cascarón esférico del núcleo. En otras palabras: Las partículas que no son suficientes para llenar otra capa, polarizan el cascarón de capa cerrada del núcleo (que por principio no está deformado).

De qué manera afecta la deformación del núcleo a la suposición hecha de la existencia de un potencial promedio? Ya que la interacción nuclear es de corto alcance, la región de interacción es la superficie deformada del núcleo. Si el sistema nuclear está deformado, esta región de interacción también está deformada. Esto es válido, siempre y cuando el movimiento de los nucleones independientes sea más rápido que el movimiento colectivo de la superficie. Se ha mostrado que la rapidez en el movimiento de estas partículas es mucho mayor con respecto al movimiento de vibración colectivo de la superficie nuclear.

Ya que un nucleón tiene una energía cinética promedio de 40 MeV (clásicamente), el tiempo que le ocupa recorrer el núcleo es:

$$T_{nucleon} = \frac{2R}{\sqrt{2E_k/M}} \approx 10^{-22} \text{ seg.} \quad (1.19)$$

Mientras que el tiempo típico para un período completo de vibración de la superficie nuclear es (para  $\hbar\omega \approx 0.5 \text{ MeV}$ ):

$$T_{superficie} = \frac{2\pi\hbar}{0.5 \text{ MeV}} \approx 10^{-20} \text{ seg.} \quad (1.20)$$

Comparando estos tiempos, se puede suponer que a cada instante los nucleones "siguen" el movimiento colectivo.

Por lo que para efectos prácticos, estos dos efectos pueden desacoplarse a bajas energías.

El Hamiltoniano de Nilsson está basado en la suposición de que siendo el núcleo deformado, tiene un potencial (en este caso de oscilador armónico) promedio deformado. Lo que significa, que las frecuencias de oscilación, serán en general diferentes en cada eje  $x', y', z'$ ; aquí, las primas denotan el sistema de referencia fijo en el cuerpo <sup>1</sup>.

Entonces el Hamiltoniano de Nilsson de partícula independiente es:

<sup>1</sup>Se define el sistema intrínseco como aquel sistema de referencia cuyos ejes coinciden con los ejes principales de la superficie del núcleo

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}M[(\omega_x^2)x'^2 + (\omega_y^2)y'^2 + (\omega_z^2)z'^2] + C\hat{l} \cdot \hat{s}' + D\hat{l}^2. \quad (1.21)$$

Cabe mencionar la introducción del término de interacción  $l^2$  que tiene la particularidad de hacer que el potencial de oscilador armónico se aproxime más a un potencial realista. Su función es dejar al potencial en una forma intermedia entre el oscilador armónico y el pozo de potencial, teniendo como consecuencia que los estados con mayor proyección momento angular (niveles señalados con líneas punteadas) bajen en su posición relativa (fig. 1.1).

Según la Ec. [1.21], es posible encontrar diferentes combinaciones de valores relativos de  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , si tenemos:

$\omega_x = \omega_y = \omega_z$  un núcleo esférico

$\omega_x = \omega_y > \omega_z$  prolato

$\omega_x = \omega_y < \omega_z$  oblató

$\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$  triaxial

Si se utiliza la segunda opción, se trabajará con núcleos de simetría axial (deformación  $\beta$  mayor que cero).

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_0^2 \left(1 + \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta_0\right) \quad (1.22)$$

$$\omega_z^2 = \omega_0^2 \left(1 - 2\left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta_0\right) \quad (1.23)$$

Introduciendo coordenadas adimensionales se tiene para la ecuación de Schrödinger asociada al Hamiltoniano (1.21):

$$\hat{H}_0 \psi_{\alpha\Omega} = \left( \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (-\nabla^2 + r^2) - \hbar \omega_0 \beta_0 r^2 Y_{20} + C \hat{l} \cdot \hat{s}' + D \hat{l}^2 \right) \psi_{\alpha\Omega} \quad (1.24)$$

donde  $\Omega$  es la proyección del momento angular total y  $\alpha$  son los números cuánticos que definen unívocamente un estado.

Podemos definir el operador  $\hat{H}_0'$ :

$$\hat{H}_0' = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (-\nabla^2 + r^2) \quad (1.25)$$

Como base se utiliza, en este caso, las funciones propias del oscilador armónico en coordenadas esféricas (base esférica):

$$|N l \Lambda \Omega\rangle = N_0 (-1)^n r^l e^{-\frac{r^2}{2}} L_{\frac{N-l}{2}}^{l+3/2}(r^2) Y_{l \Lambda} \chi_{\Sigma}(\Omega) \quad (1.26)$$

donde  $L_{\frac{N-l}{2}}^{l+3/2}$  son los polinomios asociados de Laguerre,  $\Lambda$  es la proyección del momento angular orbital y  $\Sigma$  es la proyección del espín

$$N_0 = \frac{(2\Gamma(n+l+3/2))^{\frac{1}{2}}}{(n!)^{\frac{1}{2}} \Gamma(l+3/2)} \quad (1.27)$$

$$E_{Nl} = \hbar \omega_0 (N + \frac{3}{2}) \quad (1.28)$$

$$N = 2n + l, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.29)$$

Aquí,  $\chi$  es la parte de la función de onda correspondiente al espín y  $Y_{l\Lambda}$  son los armónicos esféricos.

Las soluciones de  $\Phi_{\alpha\Omega}$  de  $\hat{H}_0$  son obtenidas por la diagonalización de dicho Hamiltoniano en la base de (1.25)  $\hat{H}_0$ . Las funciones propias de  $\hat{H}_0$  pueden clasificarse de acuerdo a la tercera componente de  $\Omega$  del momento angular total, ya que éste es un buen número cuántico, por la simetría axial del campo deformado contenido en  $\hat{H}_0$ .

Los elementos de matriz de la interacción cuadrupolar en la base mencionada son :

$$\langle N' l' \Lambda' \Omega' | r^2 Y_{20} | N l \Lambda \Omega \rangle = \langle N' l' | r^2 | N l \rangle \langle l' \Lambda' | Y_{20} | l \Lambda \rangle \quad (1.30)$$

Los elementos de matriz de  $r^2$  son los siguientes: [Eis-87].

$$\begin{aligned} \langle N' l' | r^2 | N l \rangle = & \delta_{N', N-2} \{ (\frac{1}{2} \sqrt{(N+l+1)(N+l-1)}) \delta_{l', l-2} \\ & + \frac{1}{2} (\sqrt{(N-l)(N+l+1)}) \delta_{l', l} + \frac{1}{2} (\sqrt{(N-l)(N-l-2)}) \delta_{l', l+2} \} \\ & + \delta_{N', N} \{ (\sqrt{(N-l+2)(N+l+1)}) \delta_{l', l-2} + (N + \frac{3}{2}) \delta_{l', l} \\ & + (\sqrt{(N-l)(N+l+3)}) \delta_{l', l+2} \} + \delta_{N', N+2} \{ \frac{1}{2} (\sqrt{(N-l+4)(N-l+2)}) \delta_{l', l-2} \\ & + \frac{1}{2} (\sqrt{(N-l+2)(N+l+3)}) \delta_{l', l} + \frac{1}{2} (\sqrt{(N+l+5)(N+l+3)}) \delta_{l', l+2} \} \end{aligned}$$

Y la parte angular es:

$$\langle l' \Lambda' | Y_{20} | l \Lambda \rangle = (l' 2 l | \lambda' 0 \lambda) (l' 2 l | 0 0 0) [(2l' + 1)/(2l + 1)]^{1/2} (5/4\pi)^{1/2} \quad (1.31)$$

Aquí,  $(l' 2 l | \lambda' 0 \lambda)$  y  $(l' 2 l | 0 0 0)$  son coeficientes de Clebsch-Gordan.

Como se puede observar en los elementos de matriz de  $r^2 Y_{20}$ , existe un acoplamiento entre capas (aquellas con  $N' = N \pm 2$ ). En su trabajo original, Nilsson [Ni-55] calculó el tamaño de esta interacción, despreciándola con respecto a la separación entre capas ( $2\hbar\omega_0$ ).

También en este trabajo, Nilsson cambió un poco la interpretación de los parámetros. Utilización de las coordenadas estrechas  $\delta\omega_0$  etc. y haciendo una pequeña modificación en los términos  $l \cdot s$  y  $l^2$  pudo sacar de la cuenta el acoplamiento entre capas, por tanto, en dicho trabajo, no se toma en cuenta la interacción entre capas. Entonces Nilsson sólo toma en cuenta elementos de matriz de  $H$  entre los vectores base  $|N l \Lambda \Sigma\rangle$  (base desacoplada con la misma  $N$  y  $\Omega$ ). La guía para llevar a cabo esta simplificación es la pequeñez de las interacciones entre capas, pero a pesar de ello, puede mostrarse que tal interacción existe incluso utilizando una base asintótica, por ejemplo, el cálculo de los elementos de matriz en esta base Gustafson [Gus-67] utiliza la aproximación  $l \cdot s$  en lugar de  $l_t \cdot s$ , donde  $l_t$  es el momento angular orbital modificado por Nilsson. Esta sustitución es hecha sin tomar en cuenta que  $l_t$  acopla estados de diferentes capas. Se muestra en el Apéndice A la forma de este operador en términos de operadores de creación y aniquilación.

## 1.4 Ejemplo

Si se diagonaliza el Hamiltoniano en la base esférica desacoplada, el término de  $l^2$  es diagonal, pero no  $l \cdot s$ , que lleva una parte no diagonal.

Un cálculo sencillo (en computadora) truncando la base hasta la capa 6 resulta en un diagrama de Nilsson de las primeras tres capas. Es necesario mencionar que en este cálculo se ha realizado reemplazando el término  $l^2$  por  $l^2 - \langle l^2 \rangle$ , donde  $\langle l^2 \rangle$  representa el centroide de  $l^2$ ; tal valor es  $\frac{1}{2}N(N+3)$ , y que además se ha despreciado la interacción entre capas en los elementos de matriz de  $r^2$ . Se ha mostrado que esta aproximación es realista (ver Ref. [Ni-55]).

El diagrama obtenido de esta manera utiliza un conjunto de parámetros para una región especial de la tabla periódica:

$$\mu = 0.0, \kappa = 0.08 \quad (1.32)$$

para los núcleos en las primeras capas (0,1,2,3). Para capas mayores, se utiliza:

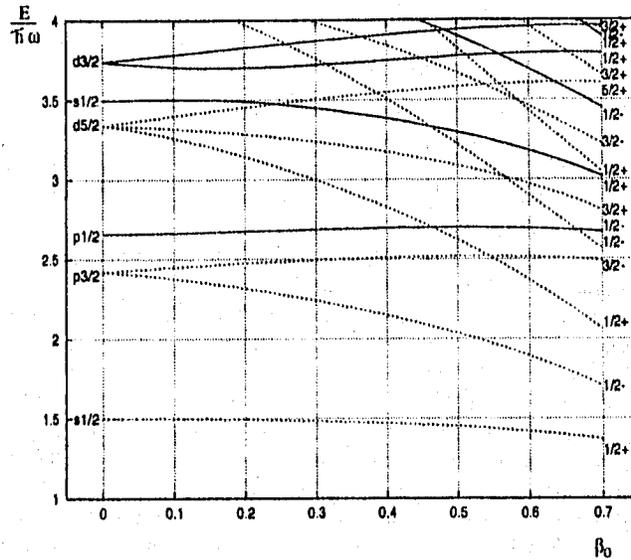


Figura 1.1: Ejemplo de la diagonalización del Hamiltoniano de Nilsson para la región de núcleos ligeros. La gráfica muestra Energía contra deformación. La energía está dada en unidades de  $\hbar\omega_0$ .

$$\mu_p = 0.6, \kappa_p = 0.0637 \quad (1.33)$$

$$\mu_n = 0.42, \kappa_n = 0.0637 \quad (1.34)$$

para las tierras raras, y :

$$\mu_p = 0.65, \kappa_p = 0.0577 \quad (1.35)$$

$$\mu_n = 0.325, \kappa_n = 0.0635 \quad (1.36)$$

para los actínidos.

El intervalo de deformación ( $\beta$ ) va de 0, a 0.7.

Los números cuánticos que etiquetan los orbitales, son los de la base, teniendo en cuenta que los únicos que permanecen invariantes ante cualquier deformación son  $N$  y  $\Omega = \Lambda + \Sigma$ .

Aprovechamos esta sección para establecer el conjunto de deformaciones que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Las deformaciones que se tomaron inicialmente son las establecidas por el artículo [Ram-78], pero por razones de ajuste con el modelo colectivo de rotación y vibración, es necesario hacer una modificación a las deformaciones señaladas en dicho artículo.

También aquí, establecemos la manera de calcular el momento cuadrupolar y las transiciones del tipo B(E2) (tipo cuadrupolar). Estas cantidades serán utilizadas más adelante.

El momento cuadrupolar se calcula con [Ram-78]:

$$Q = \frac{1}{10^4} \frac{\hbar}{m\omega} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sum_i \langle \Psi_i | r^2 Y_{20} | \Psi_i \rangle, \quad (1.37)$$

donde  $\frac{1}{10^4} \frac{\hbar}{m\omega}$  es el factor que nos da las unidades a utilizar: barns. La raíz de este término es conocido como la longitud del oscilador. La suma va sobre todos los estados físicos que están ocupados.

Finalmente las transiciones pueden calcularse con [Ram-78]:

$$B(E2) = \frac{5}{16\pi} Q^2 \quad (1.38)$$

Según [Eis-87] la deformación puede ajustarse de la expresión <sup>2</sup>:

$$B(E2, I_i \rightarrow I_f) = A^2 \frac{2I_f + 1}{2I_i + 1} \beta_0^2 (I_f 2 I_i | 000)^2 (1 + \alpha)^2 \quad (1.39)$$

donde  $\alpha = 0.36\beta$ , B(E2) son las transiciones de tipo cuadrupolar,  $A = 3ZR_0^2/4\pi$ , los término entre paréntesis son un coeficiente de Clebsch-Gordan y el factor de corrección debido al acoplamiento rotación-vibración en el modelo colectivo.

Si se ajusta con respecto al valor experimental de B(E2), es posible encontrar un valor de la deformación efectiva para cada caso. Haciendo los cálculos correspondientes, se obtienen los resultados mostrados en la tabla [1.1].

Como se observa de la tabla, para los núcleos pesados la corrección no es muy importante, pero para los núcleos ligeros, esta corrección ya resulta significativa, si pensamos que la interacción entre capas es proporcional a la deformación; entonces será difícil ajustar el momento cuadrupolar sin el

<sup>2</sup>Ver apéndice D

$^{20}\text{Ne}$	$^{24}\text{Mg}$	$^{160}\text{Dy}$	$^{168}\text{Er}$	$^{234}\text{U}$	$^{236}\text{U}$	$^{238}\text{U}$
0.728	0.606	0.3365	0.3381	0.2719	0.2821	0.2863
0.599	0.512	0.3034	0.3047	0.2495	0.2581	0.2617

Tabla 1.1: deformaciones reportadas en [Ram-78] (arriba) y deformaciones con corrección por efecto de rotación-vibración en el modelo colectivo (abajo).

término de interacción. Como ejemplo, tómesese el núcleo de  $^{20}\text{Ne}$ . Si se calcula dicha cantidad con la deformación sin la corrección, se tiene  $Q = 2.76$  (se define  $Q$  en la Ec. [1.37]) cuando el valor experimental es de 0.59. Luego, tomando la corrección se tiene  $Q = 0.92$  que se apega más al valor experimental.

## Capítulo 2

# Modelos algebraicos microscópicos del núcleo.

### 2.1 Introducción

Uno de los problemas más importantes de la física nuclear es el origen microscópico del movimiento colectivo. Desde el establecimiento del modelo de Nilsson [Ni-55] y rotación-vibración, quedó implícito el problema de reconciliar ambas filosofías: Que un modelo de capas explicara microscópicamente el mecanismo por el cual muchos nucleones realizan movimientos coherentes.

Muchos trabajos han seguido esta línea de investigación, desde el trabajo de Tomonaga [To-55] que investiga el movimiento colectivo en dos dimensiones, hasta los modelos que han surgido a partir del trabajo de Elliott, quien asoció rotaciones colectivas en el núcleo, utilizando la simetría  $SU(3)$  del potencial de oscilador isotrópico. Esta simetría funciona bien para núcleos ligeros, donde la interacción espín-orbita tiene poca influencia, pero al abordar núcleos pesados y con interacción entre capas, el modelo tuvo que ser extendido a otro con nuevas simetrías.

Existen varias maneras de enfrentar un mismo problema. En teoría de muchos cuerpos, existe por ejemplo el método autoconsistente Hartree-Fock por un lado y el método de teoría de grupos por otro, cuyas filosofías son diferentes. Uno de los problemas en la aplicación de las teorías en este ámbito, aparte de la laboriosidad, es la interpretación de los conceptos en juego. Desde este punto de vista, la teoría de grupos ha sobresalido por utilizar el concepto de simetría, en muchos casos generador de entendimiento.

## 2.2 El modelo SU(3)

Uno de los progresos obtenidos en el problema de explicar el movimiento colectivo desde una teoría microscópica utilizando la teoría de grupos es la formulada por Elliott [Eli-58], que permite identificar en su construcción las características rotacionales requeridas para explicar este tipo de movimiento colectivo. Antes de explicar las bases de esta teoría, se establecerá el Hamiltoniano del rotor cuántico, para obtener la identificación arriba señalada.

### 2.2.1 Rotor Cuántico Triaxial

Las características rotacionales, han sido estudiadas por Leschber y Draayer en términos de los generadores del grupo SU(3) [Le-87].

De la mecánica clásica, es conocida la forma que tiene el Hamiltoniano de un rotor triaxial:

$$H_{Rot} = A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + A_3 I_3^2 \quad (2.1)$$

donde  $I_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) es la proyección del momento angular total sobre los ejes de simetría ( $\alpha$ ) fijos en el cuerpo;  $A_\alpha$  son los parámetros de inercia correspondientes.  $A_\alpha = 1/(2\theta_\alpha)$  con  $\theta_\alpha$  como los momentos de inercia alrededor de los ejes principales fijos en el cuerpo.

Ya que es necesario considerar el sistema de referencia fijo en el cuerpo, además del sistema de laboratorio, se utilizará la siguiente convención:  $I$  y  $L$  son los momentos angulares orbitales en el sistema intrínseco (fijo en el cuerpo) y de laboratorio respectivamente. Cuando se incluye el espín se tiene:  $J = I + S = L + S$

Si se definen tres operadores escalares, en términos del momento angular orbital y el momento cuadrupolar, el Hamiltoniano del rotor puede reescribirse de manera diferente. Ya que los escalares son independientes del sistema de referencia, las ventajas serán obvias.

$$L^2 = \sum_{\alpha} L_{\alpha} L_{\alpha} = \sum_{\alpha} I_{\alpha}^2 \quad (2.2)$$

$$X_3^2 = \sum_{\alpha, \beta} L_{\alpha} Q_{\alpha, \beta}^c L_{\beta} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} I_{\alpha}^2 \quad (2.3)$$

$$X_4^2 = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} L_{\alpha} Q_{\alpha, \beta}^c Q_{\beta, \gamma}^c L_{\gamma} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 I_{\alpha}^2 \quad (2.4)$$

donde las  $L_\alpha$  y las  $Q_{\alpha,\beta}^c$  son formas cartesianas para los operadores de momento angular total y cuadrupolar colectivo. En el sistema fijo en el cuerpo o sistema intrínseco, el momento cuadrupolar tiene la forma  $\langle Q_{\alpha,\beta}^c \rangle^{int} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha,\beta}$ , por tanto, las  $\lambda_\alpha$ 's son los elementos diagonales de  $Q_{\alpha,\beta}^c$  en el sistema intrínseco. Las ecuaciones anteriores pueden ser invertidas de forma que :

$$I_\alpha^2 = [(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) L^2 + (\lambda_\alpha^2) X_3^c + (\lambda_\alpha) X_4^c] / D_\alpha \quad (2.5)$$

donde  $D_\alpha = 2\lambda_\alpha^3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$   
Sustituyendo en [2.1] se tiene:

$$H_{Rot} = aL^2 + bX_3^c + cX_4^c \quad (2.6)$$

Aquí, a, b y c dependen de los parámetros de inercia y los valores propios de  $Q^c$

$$a = \sum_\alpha a_\alpha A_\alpha \quad a_\alpha = \lambda_\alpha^3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / D_\alpha \quad (2.7)$$

$$b = \sum_\alpha b_\alpha A_\alpha \quad b_\alpha = \lambda_\alpha^2 / D_\alpha \quad (2.8)$$

$$c = \sum_\alpha c_\alpha A_\alpha \quad c_\alpha = \lambda_\alpha / D_\alpha \quad (2.9)$$

La razón por la cual  $H_{Rot}$  se ha reescrito de esta manera, es que de esta manera la imagen del modelo de capas puede ser identificado en  $L_\alpha$  y  $Q_{\alpha,\beta}^c$  si se escriben como operadores de muchos cuerpos.

### 2.2.2 Dinámica del rotor y SU(3)

Para asignar una correspondencia entre la estructura del rotor y SU(3) (el grupo del oscilador armónico isotrópico en tres dimensiones) es necesario reemplazar el operador colectivo  $Q_{\alpha,\beta}^c$  por el operador algebraico  $Q_{\alpha,\beta}^a$ , ya que el primero conecta capas que difieren por dos cuantos ( $n' = n \pm 2$ ). En cambio el segundo, al igual que  $L_\alpha$ , mantienen su acción sobre la misma capa. De esta manera los operadores  $Q_{\alpha,\beta}^a$  y  $L_\alpha$  juntos, son los generadores del grupo de SU(3). En este caso, el Hamiltoniano del modelo de capas es:

$$H_{SU(3)} = H_0 + aL^2 + bX_3^c + cX_4^c \quad (2.10)$$

## 22CAPÍTULO 2. MODELOS ALGEBRAICOS MICROSCÓPICOS DEL NÚCLEO.

Cabe mencionar la correspondencia que existe entre los grupos del rotor cuántico y de  $SU(3)$ :

El grupo de simetría del rotor cuántico es el producto semidirecto  $T_5 \wedge SO(3)$  donde  $T_5$  es el grupo generado por los cinco componentes del operador cuadrupolar colectivo  $Q_\mu^c$  y  $SO(3)$  es generado por los tres operadores de momento angular ( $L_\mu$ ). El hecho de que cada uno de estos grupos es cerrado bajo las reglas de conmutación y que la conmutación de un elemento de un grupo con un elemento del otro sea proporcional a elementos de sólo uno de los dos grupos, es la razón por la que se tiene un producto semidirecto ( $\wedge$ ) de ambos grupos.

Las reglas de conmutación en uno y otro caso son:

Rotor cuántico:

$$[L_\mu, L_\nu] = -\sqrt{2}(1\mu, 1\nu|1, \mu + \nu)L_{\mu+\nu} \quad (2.11)$$

$$[L_\mu, Q_\nu^c] = -\sqrt{6}(1\mu, 2\nu|2, \mu + \nu)Q_{\mu+\nu}^c \quad (2.12)$$

$$[Q_\mu^c, Q_\nu^c] = 0 \quad (2.13)$$

$SU(3)$ :

$$[L_\mu, L_\nu] = -\sqrt{2}(1\mu, 1\nu|1, \mu + \nu)L_{\mu+\nu} \quad (2.14)$$

$$[L_\mu, Q_\nu^a] = -\sqrt{6}(1\mu, 2\nu|2, \mu + \nu)Q_{\mu+\nu}^a \quad (2.15)$$

$$[Q_\mu^a, Q_\nu^a] = 3\sqrt{6}(2\mu, 2\nu|1, \mu + \nu)L_{\mu+\nu} \quad (2.16)$$

Resulta entonces evidente que  $SU(3)$  es un grupo más extenso que  $T_5 \wedge SO(3)$ .

Si  $Q^a$  es renormalizado al dividirlo por la raíz cuadrada del operador de Casimir de segundo orden ( $Q^a \rightarrow Q^a/\sqrt{C_2}$ ), donde por definición el invariante  $C_2 = (Q^a \cdot Q^a - 3L^2)/4$  conmuta con  $Q^a$  y  $L$ , los primeros dos conmutadores de cada conjunto arriba permanecen iguales, mientras que en [2.16]  $L_{\mu+\nu} \rightarrow L_{\mu+\nu}/C_2$ . Para valores pequeños de  $L$  en irreps grandes de  $SU(3)$ ,  $L_{\mu+\nu}/C_2 \rightarrow 0$ , y el álgebra de  $SU(3)$  se reduce a la de  $T_5 \wedge SO(3)$ . Esta renormalización y formación del límite  $L \ll \sqrt{C_2}$  de  $Q^a$  es llamada "proceso de contracción del grupo". Por tanto, en este límite la teoría de  $SU(3)$  se reduce a la del rotor.

### 2.3. REPRESENTACIÓN SIMPLÉCTICA DEL MODELO DE CAPAS<sup>23</sup>

## 2.3 Representación simpléctica del modelo de capas

El modelo de Elliott, al igual que los modelos microscópicos que lo preceden, no son capaces de explicar las intensas transiciones E2 observadas en núcleos deformados. Este problema requiere la extensión del modelo de Elliott o la inclusión de una carga efectiva. La extensión contempla interacciones entre capas de orden cuadrupolar al menos para bajas energías. Recuérdese que el operador de interacción cuadrupolo-cuadrupolo en el modelo SU(3), no implica interacción entre capas, como lo hace el operador colectivo, que conecta capas con  $n' = n \pm 2$ . La extensión simpléctica del modelo de Elliott hace precisamente eso, incluye excitaciones  $2\hbar\omega$  de tipo monopolar ( $l = 0$ ) y cuadrupolar ( $l = 2$ ). El operador cuadrupolar colectivo puede escribirse de la siguiente manera:

$$Q_m^c = Q_m^a + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(B_{2m}^+ + B_{2m}) \quad (2.17)$$

donde  $B_{2m}^+$  y  $B_{2m}$  son operadores de ascenso y descenso de tipo cuadrupolar ( $2\hbar\omega$ ) en su forma de tensores esféricos. Dichos operadores son las componentes cartesianas de los operadores con buen espín (0 ó 2). Estos son los dos operadores que extienden el modelo SU(3) al modelo simpléctico. Los veintinueve generadores (en forma cartesiana) del álgebra Sp(6, R) son:

$$\begin{aligned} B_{i,j}^+ &= \sum_{s=1}^n \eta_{is} \eta_{js} \\ B_{i,j} &= \sum_{s=1}^n \xi_{is} \xi_{js} \\ C_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (\eta_{is} \xi_{js} + \xi_{js} \eta_{is}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde los  $\eta_{is}$  y  $\xi_{is}$  son los operadores de Jacobi de creación y aniquilación respectivamente, donde los  $C_{ij}$  contienen al operador de número ( $C_{ii}$ ), momento angular y de momento cuadrupolar algebraico.

## 24CAPÍTULO 2. MODELOS ALGEBRAICOS MICROSCÓPICOS DEL NÚCLEO.

L	3	Momento Angular
$Q^a$	5	Momento cuadrupolar
N	1	Número
$B^+_{l,m}$	6	$+2\hbar\omega$
$B_{l,m}$	6	$-2\hbar\omega$

donde  $l = 0, 2$ .

De aquí, los generadores de  $SU(3)$ , son las tres componentes del momento angular y las cinco del operador cuadrupolar para dar un total de ocho. Si a éstas se les agrega el operador de número, se tienen los nueve generadores del grupo  $U(3)$ ; y finalmente, si se incluyen los doce generadores asociados a los dos operadores de ascenso y descenso, se tienen los veintiún generadores del grupo no compacto de simetría simpléctica  $Sp(3, \mathbb{R})$ .

Analizando las características de los operadores  $B_{lm}$  como  $Q^a$  y  $Q^c$  son objetos de un solo cuerpo que actúan de la misma manera sobre todas las partículas. Esto trae consigo, que estos operadores, no cambian la simetría de permutación de las partículas cuando son aplicados a una función de onda de muchos cuerpos, por tal razón el etiquetamiento de las funciones de onda quedan igual, después de la aplicación de estos operadores. Al aplicar por ejemplo el operador  $B^+_{lm}$  a una configuración  $0\hbar\omega$  una partícula se promueve a una capa  $2\hbar\omega$  arriba, pero no hay forma de distinguir, cual fue la partícula que se excitó. Todas las partículas participan igualmente en el proceso. Resulta importante enfatizar aquí, que la acción de  $B_{lm}^+$  genera estados de excitación de manera coherente. Por otra parte, es importante resaltar que el operador  $B_{lm}^+$  actúa sobre las coordenadas espaciales, entonces se comporta como escalares ante el isospín y espín, dejando invariante  $[\vec{J}]$  y la simetría  $[1^m]$  de un estado base de muchas partículas. Cabe establecer el grupo de simetría de un esquema de modelo de capas para la descripción fermiónica de la dinámica con acoplamiento LST (espín, órbita e isospín)  $U(4\Omega)$  es el grupo de simetría de la enésima capa:  $\Omega = \sum (2l + 1) = (N + 1)(N + 2)/2$  (degeneración espacial) y el 4 proviene de los grados de libertad de espín e isospín.  $SU(3)$  es una simetría intermedia (no exacta) de la cadena de tipo espacial  $[U(\Omega) \supset SU(3) \supset SO(3)]$ . El momento angular  $J$  de  $SU_J(2)$  que es una simetría exacta por su invariancia rotacional, resulta del acoplamiento del momento angular orbital  $L$   $[SO(3)]$  al espín total  $S$   $[SU_S(2)]$ . Estas cadenas son mostradas a continuación:

### 2.3. REPRESENTACIÓN SIMPLÉCTICA DEL MODELO DE CAPAS<sup>25</sup>

$$\begin{array}{c}
 U(4 \Omega) \\
 \cup \\
 U(\Omega) \otimes U(4) \\
 \{f\} \quad \quad \quad \{f^c\} \\
 \cup \\
 SU(3) \otimes [SU_S(2) \otimes SU_T(2)] \\
 (\lambda\mu) \quad \quad \quad S \quad \quad \quad T \\
 \cup \\
 [SO(3) \otimes SU_S(2)] \otimes SU_T(2) \\
 L \quad \quad \quad S \quad \quad \quad T \\
 \cup \\
 SU_J(2) \otimes SU_T(2) \\
 J \quad \quad \quad T
 \end{array}$$

(2.19)

El grupo de simetría espacial  $U(\Omega)$  y el grupo de simetría de espín o espín-isoespín  $U(k)$  son complementarios a través de las irreps antisimétricas de  $U(k\Omega) \supset U(\Omega) \otimes U(k)$  donde  $U(\Omega)$  y  $U(k)$  son conjugados uno al otro. Esto significa, que la simetría  $\{f\}$  es una buena simetría y los operadores  $B_f$  son diagonales en bloques con representaciones irreducibles, tanto de  $U(\Omega)$  como de  $U(k)$ . Esta propiedad es muy importante, ya que implica, que los generadores simplécticos no involucran grados de libertad de espín o isoespín, por lo que no acoplan diferentes simetrías de acoplamiento  $L-S$ ,  $L-S-T$  en un modelo de capas. Esto quiere decir que el esquema simpléctico es una extensión directa del modelo de capas  $SU(3)$ . Esto también garantiza, que el esquema puede aplicarse en el modelo pseudo-simpléctico sin mayor problema.

El tratamiento del modelo puede ser más accesible si se realiza un mapeo bosónico de los generadores simplécticos  $B_{lm}^+$  a través de un procedimiento de expansión-contracción, como el presentado en el modelo  $SU(3)$ . El procedimiento de contracción-expansión, puede ser explicado mediante un ejemplo de contracción y expansión de álgebras de Lie. Considérese el siguiente caso:

$$\mathfrak{t}_2 \oplus \mathfrak{so}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \tag{2.20}$$

26CAPÍTULO 2. MODELOS ALGEBRAICOS MICROSCÓPICOS DEL NÚCLEO.

donde a la izquierda, se tiene la suma semidirecta de un ideal abeliano en dos dimensiones más una álgebra ortogonal en dos dimensiones. Esta suma puede ser considerada como la contracción del álgebra compacta de Lie  $so(3)$ . Esto puede ser entendido al pensar en una imagen geométrica, donde rotaciones en ángulos pequeños pueden asociarse a traslaciones. El procedimiento inverso o proceso de deformación puede llevarse a cabo, cuando elementos del álgebra no contraída son determinados por tomar el conmutador del cuadrado del operador de Casimir de  $so(2)$  con los generadores  $p_1$  y  $p_2$ :

$$L_j = \frac{1}{2\sqrt{p^2}} [L_3^2, p_j] \quad (2.21)$$

donde  $p^2 = p_1^2 + p_2^2$ . Puede mostrarse que el álgebra  $sp(6, \mathbb{R})$  y la suma semidirecta de  $w(6)$  y  $su(3)$  están relacionadas por los procedimientos de contracción y deformación.

Lo que interesa es una contracción del álgebra  $sp(6, \mathbb{R})$ , que puede ser obtenida a través de las expresiones [Ca-89]:

$$b_{lm}^\dagger = (1/\epsilon) B_{lm}^\dagger, b^{lm} = (b_{lm}^\dagger)^\dagger \\ N = N_s + 2N_b, L_q = L_q^s + L_q^b, Q_m^a = Q_m^s + Q_m^b \quad (2.22)$$

donde  $l = 0, 2$  y los conjuntos de operadores  $\{ N_s, L^s, Q^s \}$  y  $\{ N_b, L^b, Q^b \}$  son independientes uno de otro y satisfacen reglas de conmutación de álgebras unitarias en tres dimensiones, denotadas por  $u_s$  y  $u_b$ , respectivamente. En tal reducción, el parámetro  $\epsilon$  denota el valor propio del operador hermitiano  $\sqrt{(4/3)N_s}$ , mientras que  $b_{lm}^\dagger$  y  $b^{lm}$  son realizaciones bosónicas de los generadores de ascenso y descenso ( $B_{lm}^\dagger$  y  $B_{lm}$ ) del grupo  $Sp(6, \mathbb{R})$ . El índice  $b$  es usado para denotar que los operadores  $N_b, L^b$  y  $Q^b$  son construídos en términos de productos bilineales de operadores de creación y aniquilación de bosones del tipo monopolo y cuadrupolo, y el índice  $s$  identifica a los operadores de la capa de valencia ( $0\hbar\omega$ ). El álgebra que se obtiene cuando  $\epsilon \gg 1$  corresponde a la suma semidirecta  $w(6) \oplus su(3)$ , donde  $w(6)$  es el álgebra de Weyl de seis dimensiones y  $su(3)$  es una subálgebra de  $sp(6, \mathbb{R})$ .

Esta estructura permite un esquema donde es posible etiquetar la base del modelo simpléctico contraído. Los veintinueve generadores del grupo  $Sp(6, \mathbb{R})$  [3.18] pueden ser clasificados en tres subconjuntos: operadores de ascenso, descenso, de peso y:

$$B_{i,j}^\dagger \text{ y } C_{ij} \text{ con } i < j; C_{ii}; B_{i,j} \text{ y } C_{ij} \text{ con } i > j \quad (2.23)$$

### 2.3. REPRESENTACIÓN SIMPLÉCTICA DEL MODELO DE CAPAS27

respectivamente. El estado de mínimo peso de  $Sp(6, \mathbb{R})$  se define ante la acción de estos operadores:

$$B_{i,j}|w\rangle = 0 \quad \text{con } i > j \quad (2.24)$$

$$C_{i,j}|w\rangle = 0 \quad \text{con } i > j \quad (2.25)$$

$$C_{i,i}|w\rangle = \omega_i|w\rangle = (w_i + \frac{1}{2}n)|w\rangle \quad (2.26)$$

Las representaciones irreducibles de  $Sp(6, \mathbb{R})$  quedan de esta manera caracterizadas por las  $\omega_i$  con  $i = 1, 2, 3$ . Un conjunto completo de estados base para las irreps de  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  de  $Sp(6, \mathbb{R})$  se obtienen aplicando polinomios en  $B_{i,j}^\dagger$  y  $C_{ij}$  (con  $i < j$ ) a  $|w\rangle$ . Utilizando [2.24-26] y las reglas de conmutación de los operadores, los estados base pueden ser escritos en la forma:

$$P(B_{i,j}^\dagger)|[\omega]\alpha_w\rangle \quad (2.27)$$

$[\omega]$  es utilizada para etiquetar la banda simpléctica principal, que también es la irrep más baja de  $U(3)$  y  $\alpha_w$  es utilizada para distinguir sus miembros. Ya que los generadores de ascenso  $B_{i,j}^\dagger$  son componentes de un tensor irreducible  $[2,0,0]$   $U(3)$ , el polinomio  $P(B_{i,j}^\dagger)$  puede también ser caracterizado por un tensor definido de  $U(3)$   $[n] \equiv [n_1, n_2, n_3]$ .  $\alpha_n$  clasifica la degeneración de esta asignación:

$$P(B_{i,j}^\dagger) \rightarrow P_{[n]\alpha_n}(B_{i,j}^\dagger) \quad (2.28)$$

De aquí, una base completa (no-ortonormal) puede ser definida como:

$$|[n][\omega]\rho[\lambda]\alpha\rangle = \{P_{[n]}(B_{i,j}^\dagger) \times |[\omega]\rangle\}_\alpha^{\rho[\lambda]} \quad (2.29)$$

donde las llaves denotan acoplamiento de  $U(3)$  y la etiqueta  $\rho$  distingue ocurrencias múltiples de  $\lambda$  en el producto  $[n] \times [\omega]$ .

Esta estructura permite un esquema donde es posible etiquetar la base del modelo simpléctico contraído como:

$$U_b(6) \times U_s(3) \rightarrow SU_b(3) \times SU_s(3) \rightarrow SU(3) \rightarrow SO(3) \rightarrow SO(2) \quad (2.30)$$

$$N_b \quad N_s \quad (\lambda_b \mu_b) \quad (\lambda_s \mu_s) \quad \rho(\lambda \mu) \quad \kappa \quad L \quad M$$

Los estados base para configuraciones de nucleones idénticos del modelo

## 28CAPITULO 2. MODELOS ALGEBRAICOS MICROSCÓPICOS DEL NÚCLEO.

simplético pueden ser etiquetados (utilizando la consideración anterior y (2.27)) :

$$|\Psi^{n(f)}_{\gamma JM_J}\rangle \equiv |n[f] \alpha [N_b(\lambda_b \mu_b) N_s(\lambda_s \mu_s)] \rho(\lambda \mu) \kappa LSJM_J\rangle \quad (2.31)$$

donde se ha reemplazado la etiqueta  $K$  con un índice corriente  $\kappa$  que denota el conjunto ortonormal de los estados base.

### 2.3.1 Hamiltoniano del Modelo Simplético

El Hamiltoniano del modelo simplético en su forma más simple, restringe la interacción a términos que sólo pueden ser expresados en función de los generadores del álgebra  $Sp(3, \mathbb{R})$ . La forma del Hamiltoniano es:

$$H = H_0 - \frac{1}{2} \chi [Q^c \cdot Q^c - (Q^c \cdot Q^c)_{shell}] + H_r \quad (2.32)$$

donde el operador original de interacción  $Q^c \cdot Q^c$  ha sido reemplazado por  $Q^c \cdot Q^c - (Q^c \cdot Q^c)_{shell}$ . La razón para esto, es que en el Hamiltoniano original el tamaño del factor  $\chi$ , utilizado para ajustar las transiciones E2 observadas, destruye la distancia promedio de oscilador armónico entre orbitales ( $\hbar\omega$ ) debido a que el operador  $(Q^c \cdot Q^c)$  es proporcional a  $\beta^4$  ( $\beta$  es la variable geométrica de la deformación), entonces, puede suceder, que para una  $\chi$  dada, el término mencionado cambie las distancias promedio de oscilador. Para reponerlo, es necesario remover su contribución al campo promedio.  $(Q^c \cdot Q^c)_{shell}$  es un operador que reproduce las trazas en cada capa de oscilador.

Una expresión analítica simple puede darse para la mayoría de los operadores de tipo traza, en particular para  $(Q^c \cdot Q^c)_{shell}$  [Ca-89].

$$(Q^c \cdot Q^c)_{shell} = \frac{65}{7} N^2 + \frac{250}{7} N + \frac{10}{3} N N_s + \frac{15}{4} C_2^s + 10 N_s \quad (2.33)$$

donde  $N$  cuenta el número total de cuantos de oscilación ( $N = N_s + 2N_b$ ), donde  $N_s$  cuenta cuantos a través del nivel  $0\hbar\omega$ ,  $N_b$  cuenta aquellos asociados con las excitaciones simpléticas  $2\hbar\omega$ , y  $C_2^s$  es el operador de Casimir de segundo orden de  $SU(3)$  al nivel  $0\hbar\omega$  con eigenvalor  $[(\lambda_s + \mu_s + 3)(\lambda_s + \mu_s) - \lambda_s \mu_s]$  en la irrep  $(\lambda_s, \mu_s)$ .

Es posible obtener una forma bosónica para este Hamiltoniano. El camino es el siguiente: Todo operador es expresado en forma normal, después se hace la sustitución de  $Q^c = Q^a + \frac{\sqrt{6}}{2} (B_{2m}^+ + B_{2m})$ ; los operadores de creación ( $2\hbar\omega$ ),  $B_l^+$ , son puestos hacia la derecha, y los  $B_l$  hacia

### 2.3. REPRESENTACIÓN SIMPLÉCTICA DEL MODELO DE CAPAS<sup>29</sup>

la izquierda, finalmente se hace la sustitución [2.22] quedando el Hamiltoniano como:

$$\begin{aligned}
 H = H_0 - \frac{1}{2}\chi[Q^c \cdot Q^c - (Q^c \cdot Q^c)_{shell}] + H_r \\
 \rightarrow 2\hbar\omega N_b + \chi\left[\left(\frac{5}{3}N_s + \frac{75}{7}\right)N_b + \frac{25}{14}N_b^2\right. \\
 \left. - \frac{1}{2}Q^a \cdot Q^a - (\sqrt{2N_s})(b^+ \cdot Q^a + Q^a \cdot b)\right. \\
 \left. + 10(\sqrt{N_s})(b_{00}^+ + b_{00}) - N_s(b^+ \cdot b^+ + b \cdot b)\right. \\
 \left. - 2N_s N_d + \frac{5}{4}C_2(\lambda_s, \mu_s)\right] \\
 + aL^2 + bX_3^a + cX_4^a \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

donde  $C_2$  es el operador de Casimir de segundo orden del grupo SU(3),  $N_d$  cuenta el número de bosones  $l = 2$ , y la expansión  $Q^c \cdot Q^c_{shell}$  es incluida, y todos los términos constantes han sido excluidos. Recuérdese que la interacción  $H_r$  se introduce para dar al modelo las características rotacionales requeridas. De esta manera, los elementos de matriz del Hamiltoniano (en la base bosónica [2.31]) pueden ser fácilmente evaluados y la matriz diagonalizada.

Una estimación de la intensidad  $\chi$  de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo puede ser determinada igualando la diferencia en el valor esperado de  $H$  en los estados  $0^+$  de la irrep.  $0\hbar\omega(\lambda_s, \mu_s)$  y la llamada irrep estirada  $2\hbar\omega(\lambda_s + 2, \mu_s)$ , a la energía de excitación  $80A^{-1/3}$ , de resonancias monopolaes gigantes (ver Ca-89):

$$\chi = \frac{A^{-1/3}}{4\lambda_s + 2\mu_s + \frac{15}{4} + N_s(\langle N_d \rangle - 5/6)} \quad (2.35)$$

Este resultado es resulta porque en los estados  $L^x = 0^+$ ,  $Q^a \cdot Q^a = 4C_2$ , y los elementos de matriz de los operadores  $X_3$  y  $X_4$  al igual que los de  $L^2$  son cero.

El valor esperado del valor  $N_d$  en el espacio  $2\hbar\omega$  en términos de  $(\lambda_s, \mu_s)$  puede ser dado [ver Ca-89]:

$$\langle N_d \rangle = \frac{2\lambda_s(\lambda_s + 2) + \mu_s(2\lambda_s + 1)}{3(\lambda_s + 1)(\lambda_s + \mu_s + 2)} \quad (2.36)$$

Los valores para los parámetros  $b$  y  $c$  de la interacción residual en [2.34] pueden ser determinados por el desdoblamiento del estado más bajo y

## 30CAPÍTULO 2. MODELOS ALGEBRAICOS MICROSCÓPICOS DEL NÚCLEO.

primer estado excitado,  $(2_1^+)$  y  $(2_2^+)$ , respectivamente, de  $J = 2$ . Específicamente, al establecer un mapeo directo entre los Hamiltonianos del rotor y  $SU(3)$  una expresión de operador fue encontrada para el cuadrado de la proyección del momento angular sobre un sistema de referencia con sus ejes de simetría fijos en el cuerpo [2.5]. En tal expresión la  $\lambda_\alpha$  indica los momentos principales de inercia, y pueden ser relacionadas a las etiquetas  $\lambda$  y  $\mu$  de la irrep de  $SU(3)$  requiriendo que los invariantes del rotor y  $SU(3)$  se mapean uno en otro de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -(-\lambda - \mu)/3 \\ \lambda_2 &= -(\lambda + 2\mu + 3)/3 \\ \lambda_3 &= (2\lambda + \mu + 3)/3.\end{aligned}\quad (2.37)$$

En el entendido de que el estado  $2_2^+$  es una configuración de la banda  $K = 2$ , se sigue que :

$$b = \frac{\alpha\lambda_3}{2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2} \quad \text{y} \quad c = \frac{\alpha}{2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2} \quad (2.38)$$

(2.39)

donde

$$\alpha = (E_{2_2^+} - E_{2_1^+})$$

De igual manera, el parámetro  $a$  puede ser dado en términos de valores experimentales para el parámetro de inercia ( $\hbar^2/2I$ ):

$$a = \hbar^2/2I - \frac{3}{2}\chi + \frac{\alpha\lambda_1\lambda_2}{2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2} \quad (2.40)$$

### 2.4 Esquema Pseudo-SU(3)

La extensión simpléctica del grupo  $SU(3)$  al grupo  $Sp(6, \mathbb{R})$ , permite introducir interacción entre capas, permitiendo reproducir datos experimentales como transiciones  $E2$  de núcleos deformados. Pero esta extensión sólo es válida en la región de los núcleos ligeros, ya que este modelo es incapaz de predecir el comportamiento correcto de núcleos pesados. El origen de ésto, proviene del intenso acoplamiento  $l \cdot s$  que aparece en núcleos pesados, destruyéndose la simetría  $SU(3)$ . Para núcleos pesados, la interacción residual  $l \cdot s$  empuja al orbital  $j = n + 1/2$  de la capa  $n$  hacia abajo, de forma

que se convierte en un orbital intruso en la capa inmediata inferior,  $(n-1)$ , permitiendo que los nucleones de valencia ocupen orbitales con  $j \neq n+1/2$  (llamados orbitales normales). Es posible mapear los orbitales normales de la capa  $n$  a la capa  $n-1$ . Esto permite reducir el espacio de Hilbert a considerar, y sobre todo los orbitales mapeados presentan una interacción  $\tilde{l} \cdot \tilde{s}$  débil, con lo cual se vuelve a recuperar los beneficios del grupo SU(3), ahora con la simetría  $\widetilde{SU}(3)$ , donde la tilde indica la pseudo-simetría [Ba-92].

### 2.4.1 Dobletes Espín-Orbita

La simetría pseudo-espín como se señala arriba, proviene del hecho de que para núcleos pesados el término de interacción espín-órbita se hace despreciable si se realiza el mapeo antes señalado. En esas condiciones, un orbital de una capa dada, puede ser mapeado a su contraparte en la capa inferior inmediata; aquellos que cumplen con  $j = l \pm 1/2 = \tilde{l} \mp 1/2$ , por ejemplo, poseen una degeneración aproximada de los orbitales  $(g_{7/2}d_{5/2})(d_{3/2}s_{1/2}) \rightarrow (\tilde{f}_{7/2}\tilde{f}_{5/2})(\tilde{p}_{3/2}\tilde{p}_{1/2})$ .

Como se indicó, es posible mapear los orbitales normales (para núcleos pesados:  $A \geq 100$ ) de una capa  $n$ , a los orbitales de una  $\tilde{n} = n-1$ . Para estados base de partícula independiente del oscilador armónico isotrópico en tres dimensiones, la transformación cuasi-unitaria que hace el mapeo del espacio normal al pseudo [CaMo-92] (*normal*  $\leftrightarrow$  *pseudo*) es:

$$|\tilde{n}(\tilde{l}\frac{1}{2})\tilde{j}\tilde{m}\rangle = U|n(l\frac{1}{2})jm\rangle \quad (2.41)$$

donde

$$U = 2(\eta \cdot \xi - 2l \cdot s + 3)^{-1/2}(\xi \cdot s) \quad (2.42)$$

Aquí,  $\eta$  y  $\xi$  son operadores de creación y aniquilación de un cuanto de oscilación.

La aplicación de este operador cuasi-unitario sobre el Hamiltoniano de partícula independiente, lleva al pseudo-Hamiltoniano:

$$H_0 + Cl \cdot s + Dl^2 \rightarrow \tilde{H}_0 + (4D - C)\tilde{l} \cdot \tilde{s} + D\tilde{l}^2 + (h\omega + 2D - C) \quad (2.43)$$

Ya que el término  $(h\omega + 2D - C)$  es una constante, el Hamiltoniano al cual lleva el mapeo  $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{C}\tilde{l} \cdot \tilde{s} + \tilde{D}\tilde{l}^2$  tiene el mismo espectro de excitación como el del Hamiltoniano normal cuando  $h\tilde{\omega} = h\omega$ ,  $\tilde{C} = (4D - C)$  y  $\tilde{D} = D$ . Esta transformación es importante, porque para núcleos pesados  $C \simeq 4D$ ,

32CAPITULO 2. MODELOS ALGEBRAICOS MICROSCÓPICOS DEL NÚCLEO.

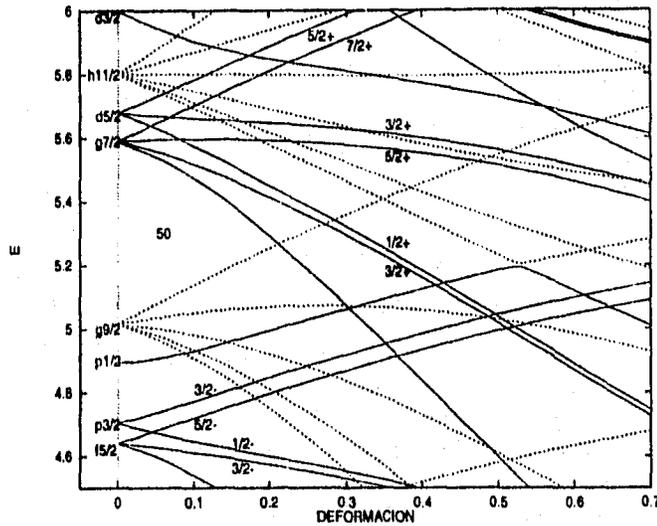


Figura 2.1: Diagrama de Nilsson en la región de tierras raras, donde se muestran los niveles con simetría pseudo-espín (solamente éstos están clasificados). La energía está dada en unidades de  $\hbar\omega_0$ . Los estados anormales están señalados con líneas punteadas.

por lo que  $\tilde{C} \approx 0$ . Puede decirse que la interacción espín-órbita pierde su intensidad en este mapeo (pseudo-espín), pudiéndose recuperar nuevamente la simetría  $SU(3)$ . En este caso, los nucleones bajo esta interacción débil ocuparán niveles casi degenerados. El modelo de Nilsson fue muy importante en la concepción de esta simetría (ver fig. 2.1). Su Hamiltoniano puede ser escrito de la siguiente manera:

$$H = H_0 + Cl \cdot s + Dl^2 - \frac{1}{2}\chi(\kappa\beta)r^2Y_{20}(\theta, \psi) \quad (2.44)$$

donde el último término es un potencial deformado (prolato) que proviene de promediar la interacción  $Q^c \cdot Q^c$  en uno de los operadores:  $Q^c \cdot Q^c \rightarrow Q^c \cdot \langle Q^c \rangle = (\kappa\beta)r^2Y_{20}(\theta, \varphi)$ , donde  $\kappa = 3k(16\pi/5)^{1/2}$  y  $k^2 = (5/9\pi)(Ar^2)^2$ .

Si se utiliza una base cilíndrica (asintótica) para diagonalizar el Hamiltoniano de Nilsson (como en el ejemplo del capítulo 1), los números cuánticos

que etiquetan a los estados son  $[N_p N_z \Lambda] \Omega$ , donde  $N_p$  es el número de cuantos de vibración en el plano  $x-y$ ,  $N_z$  es el número de cuantos de vibración en la dirección  $z$ , cumpliendo con  $N_p + N_z = N$ .  $\Lambda$  es la proyección del momento angular orbital en una dirección del plano  $x-y$ . Finalmente  $\Omega$  es la proyección del momento angular total en el sistema intrínseco,  $\Omega = \Lambda + \Sigma$ , con  $\Sigma$  como la proyección del espín.

Si se excluyen los orbitales con clasificación anormal, ( $j = N + \frac{1}{2}$ ), se puede observar que el número de orbitales (y niveles) en cada capa se reduce exactamente al número de orbitales de la capa anterior antes de hacer tal exclusión. Esto permite pensar en un mapeo del conjunto de capas normal, a otro conjunto con un cuanto de excitación menor.

En la representación de pseudo-espín, los niveles de Nilsson son reetiquetados por ([Ca-94]):  $[\tilde{N}_p \tilde{N}_z \tilde{\Lambda}] \tilde{\Omega}$  donde  $\tilde{N} = N - 1$ ,  $\tilde{N}_p = \tilde{N}, \tilde{N} - 1, \dots$ ;  $\tilde{N}_z = \tilde{N}, \tilde{N} - 1, \dots$ ;  $\tilde{\Lambda} = \pm \tilde{N}_p, \pm(\tilde{N}_p - 2), \dots, 1$  ó  $0$ ; y  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Lambda} + \tilde{\Sigma} = \Omega$ . Obsérvese que la proyección del momento angular total se conserva ante la transformación. Este reetiquetamiento de los orbitales da lugar a los compañeros de pseudo-espín  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Lambda} \pm 1/2$ , y ante la transformación debe cumplirse:  $\Omega = \Lambda \pm 1 = \tilde{\Lambda} \mp 1$ , los cuales son casi degenerados en energía. Es necesario mencionar que esta clasificación en números cuánticos asintóticos es buena para deformaciones hacia infinito.

Volviendo a la descripción de la teoría de grupos, se encuentra que una diferencia importante entre las dos interacciones de un cuerpo es que la interacción  $l^2$  no acopla espacios diferentes (de espín y de momento angular orbital), como hace la interacción  $l \cdot s$ . En ese caso, la descripción de partículas en el estado más bajo es a través del grupo de simetría  $U(k\Omega)$ ; donde  $\Omega$  se refiere a la degeneración de tipo espacial y  $k$  a la degeneración 2 ó 4 si se tiene degeneración del espín ó de espín-isoespín respectivamente. Al hacer la transformación de pseudo-espín, el término de interacción  $\tilde{l} \cdot \tilde{s}$  es muy pequeño, permitiendo un desacoplamiento de la parte espacial y de espín. Esta característica es importante, porque esto significa que se puede partir el espacio completo en subespacios (pseudo) disjuntos,  $U(\tilde{\Omega}) \otimes U(\tilde{k})$ , menor en dimensión que  $U(\Omega) \otimes U(k)$ . En la [fig.2.1] se muestra el rompimiento del espacio completo en sus irreps de  $U(\Omega) \otimes U(k)$  y sus subgrupos.

Para núcleos pesados, los protones y neutrones de valencia ocupan diferentes capas, por tanto se puede aplicar a cada una  $\tilde{k} = 2$ . En este caso, equivale a no considerar al isoespín, existiendo distinción entre protones y neutrones.

Al realizar la transformación de pseudo-espín es necesario que las in-

teracciones residuales de dos cuerpos, por ejemplo, respeten esta transformación; dicho de otra manera, que estas interacciones sean un operador escalar de pseudo-espín, por ejemplo, la interacción de "pairing" que depende solamente de  $j$  y no de  $(l, s)$  o  $(\bar{l}, \bar{s})$ . Pero al transformar el operador  $(Q \cdot Q)$  al espacio pseudo, esta cantidad es conservada en un 90 por ciento, por tanto, no es un escalar de pseudo-espín exacto.

## 2.5 El esquema pseudo-simpléctico

El esquema pseudo simpléctico, extiende el esquema de pseudo SU(3) al permitir excitaciones entre capas de  $2\hbar\omega$  del tipo monopolo y cuadrupolo. La simetría para este caso pseudo-Sp(3,R) contiene a la pseudo SU(3) como un subgrupo. Los generadores de la nueva simetría pueden dividirse en dos grupos, para protones y neutrones (pensando en que ocupan diferentes capas).

El Hamiltoniano del modelo pseudo simpléctico está formado por la suma de los dos pseudo-osciladores armónicos (para protones y neutrones) más una interacción real de tipo cuadrupolo-cuadrupolo actuando entre nucleones, incluyendo contribuciones del tipo  $\pi\nu$ . Para asegurar que la interacción cuadrupo-cuadrupolo no destruye la simetría del potencial promedio, la interacción  $\tilde{Q}_\alpha^c \cdot \tilde{Q}_\alpha^c$  es reemplazada por  $\tilde{Q}_\alpha^c \cdot \tilde{Q}_\alpha^c - (\tilde{Q}_\alpha^c \cdot \tilde{Q}_\alpha^c)_{shell}$ , donde  $\alpha = \pi, \nu$ . Se tiene:

$$H = \hbar\omega\tilde{N} - \frac{1}{2}\chi[\tilde{Q}^c \cdot \tilde{Q}^c - (\tilde{Q}^c \cdot \tilde{Q}^c)_{shell}] + H_r \quad (2.45)$$

donde

$$\tilde{N} = \tilde{N}_\pi + \tilde{N}_\nu \quad \text{y} \quad \tilde{Q}^c = \tilde{Q}_\pi^c + \tilde{Q}_\nu^c \quad (2.46)$$

Los operadores cuadrupolares  $\tilde{Q}_\pi^c$  y  $\tilde{Q}_\nu^c$  pueden expresarse (en el esquema simpléctico) como  $\tilde{Q}_\alpha^c = \tilde{Q}_\alpha^a + (3/2)^{1/2}(B_{2\alpha}^1 + B_{2\alpha})$ . Y como para el caso pseudo SU(3), estos operadores ( $O = \tilde{Q}^a, B^1, B$ ) pueden ser expandidos en tensores de pseudo SU(3) como (ver Ca-89):

$$O = \kappa\tilde{O} + \dots \quad (2.47)$$

donde  $\tilde{O}$  tiene el mismo carácter tensorial que  $O$

Como se puede ver para los operadores  $B^1$  en la tabla a continuación, los

demás términos de la serie tienen un diferente carácter tensorial y generalmente son menores que el diez por ciento del término principal.

	$(\lambda, \mu)$	$\kappa_0$	$L_0$	$S_0$	$n = 4$
$B_{00}^\dagger$	normal (2,0)	1	0	0	16.73320
	pseudo (2,0)	1	0	0	19.89008
	(3,1)	1	1	1	1.95141
	(4,2)	1	0	0	0.69593
	(5,3)	1	1	1	0.29740
	(6,4)	1	0	0	0.06295

	$(\lambda, \mu)$	$\kappa_0$	$L_0$	$S_0$	$n = 4$
$B_{2m}^\dagger$	normal (2,0)	1	0	0	16.73320
	pseudo (2,0)	1	2	0	18.54388
	(2,0)	1	2	1	2.41666
	(3,1)	1	1	1	0.65306
	(3,1)	1	2	0	0.84002
	(3,1)	1	2	1	0.82559
	(3,1)	1	3	1	0.35250
	(4,2)	1	2	0	0.37102
	(4,2)	1	2	1	0.35373
	(4,2)	2	2	0	-0.08262
	(4,2)	2	2	1	0.03246
	(4,2)	1	3	1	0.16523
	(5,3)	1	1	1	0.09171
	(5,3)	1	2	0	0.12822
	(5,3)	1	2	1	0.12796
	(5,3)	1	3	1	0.06454
	(5,3)	2	3	1	-0.01430
	(6,4)	1	2	0	0.03749
	(6,4)	1	2	1	0.03438
	(6,4)	2	2	0	-0.00518
	(6,4)	2	2	1	0.00607
	(6,4)	1	3	1	0.01584

En aplicaciones de pseudo SU(3), estos términos de mayor orden resultaron ser menores al uno por ciento en energías calculadas y transiciones electromagnéticas [Ca-87].

El significado de la  $\kappa$  es reestablecer (a primer orden, debido a la expansión) la fracción del operador  $O$  [2.46] perdida al pasar al espacio pseudo. En particular para el momento cuadrupolar  $\kappa = \frac{n+3/2}{n+1/2}$  [TrD-94]. Despreciando términos de orden mayor, el Hamiltoniano [2.44] puede reescribirse como:

$$H = h\omega\hat{N} - \frac{1}{2}\chi[\hat{Q}^c \cdot \hat{Q}^c - (\hat{Q}^c \cdot \hat{Q}^c)_{shell}] + a\hat{L}^2 + b\hat{X}^2_3 + \hat{X}^2_4. \quad (2.48)$$

### 2.5.1 Factor de escalamiento

Se piensa, que los nucleones que se encuentran en niveles de tipo anormal, siguen el comportamiento de los nucleones en niveles de tipo normal de manera adiabática [TrD-94]. Por decirlo de otra manera, que los nucleones en niveles anormales imitan la dinámica de los nucleones normales. Siendo así, la dinámica del núcleo estaría determinada por los nucleones de tipo normal, corrigiendo con un "factor de escalamiento" que tome en cuenta la contribución de tipo anormal. Cuál es el tamaño de este factor de escalamiento? Ya que la dinámica viene determinada en gran parte por el factor de interacción de tipo cuadrupolo-cuadrupolo, es conveniente saber cuál es la fracción del momento cuadrupolar que proviene de los nucleones en orbitales de tipo anormal. El factor de escalamiento encontrado, utilizando el momento cuadrupolar de tipo geométrico [Eis-87], es:

$$f_0 = \frac{ZA^{2/3}}{Z_n A_n^{2/3}} \quad (2.49)$$

Estudiaremos esto con mayor detalle.

Se ha visto que el cálculo utilizando el modelo pseudo-simpléctico sigue muy bien esta regla para el cálculo del momento cuadrupolar.

Cuál es la diferencia entre el factor de escalamiento y una carga efectiva en el cálculo del momento cuadrupolar?

Como se mencionó arriba, el factor de escalamiento proviene de la suposición de que una fracción de los nucleones no contribuye directamente a la dinámica del núcleo, sino que contribuyen de forma adiabática. Éstos son los nucleones en orbitales denominados de tipo anormal.

Una carga efectiva es la masa cuadrupolar atribuida al cascarón de capa cerrada en el núcleo que agregada al momento cuadrupolar de los nucleones

de valencia, conforman el momento cuadrupolar total. Podemos notar que entre estas dos definiciones existe diferencia, ya que en el concepto de carga efectiva los nucleones que están en el cascarón de capa cerrada contribuyen de igual manera a la masa del momento cuadrupolar total, sin distinguir si pertenecen o no a orbitales de paridad normal o anormal. Se considera entonces que el cascarón del núcleo correspondiente a la carga efectiva no actúa en la dinámica del núcleo.

La diferencia con el factor de escalamiento en tal caso es evidente ya que el factor de escalamiento proviene de una suposición un poco diferente: Los nucleones en orbitales con  $j = N + 1/2$  ejecutan su dinámica similar a los nucleones en orbitales que no cumplen con  $j = N + 1/2$ . Entonces si cada nucleón en un orbital anormal imita la dinámica de un nucleón en un orbital normal, entonces basta con llevar a la cuenta a uno de los dos.

En los modelos que utilizan la teoría de capas, comúnmente se habla de conceptos como carga efectiva. En el párrafo anterior, hemos hablado del factor de escalamiento. Ambos números provienen de la necesidad de obtener las propiedades de un núcleo haciendo el mínimo de cálculos y sobre todo de intuir que tales propiedades del núcleo pueden explicarse siguiendo la dinámica de un subconjunto de los nucleones más un número que compense al resto. En ese caso, el éxito de una carga efectiva o factor de escalamiento depende de la facilidad para su obtención, poniendo en evidencia la poca participación activa del subconjunto de nucleones involucrados en tal factor.

Cuando hablamos de un mínimo de cálculos, pensamos en la diferencia que existe en realizar los cálculos apropiados con un subconjunto de los nucleones involucrados, en lugar de hacerlo con todos. Esto trae como consecuencia una reducción en el espacio de la base necesario para obtener una convergencia más rápida en los números calculados de las propiedades del núcleo. Pero esto no es la meta de utilizar cargas efectivas o factores de escalamiento. La razón de este método está en poner en evidencia el comportamiento de los nucleones dentro del núcleo de forma que es posible utilizar una cargas efectivos o factores de escalamiento.

En este contexto, existe diferencias en los conceptos de factor de escalamiento y carga efectiva. Desde el punto de vista de los modelos de capas, las propiedades de los estados de los núcleos a bajas energías están determinadas por los nucleones de valencia. Los nucleones de valencia, son aquellos que exceden la cuenta de ocupación por capas tomando como referencia

## 38CAPÍTULO 2. MODELOS ALGEBRAICOS MICROSCÓPICOS DEL NÚCLEO.

los números mágicos. La contribución del núcleo mágico <sup>1</sup> al momento cuadrupolar intrínseco (esto es, el efecto de polarización del núcleo mágico, por los nucleones de valencia) es usualmente tomado en cuenta asociando una carga efectiva a los nucleones de valencia. Para modelos como el de Nilsson (o Woods-Saxon), que calculan el momento cuadrupolar intrínseco tomando en cuenta la contribución de todos los nucleones, resulta innecesario el empleo de una carga efectiva. La carga efectiva asociada a protones y neutrones son respectivamente definidas por:  $e_{\pi} = (1 + \epsilon_{\pi}^{eff})$  y  $e_{\nu} = \epsilon_{\nu}^{eff}$ , que para términos prácticos se acostumbra igualar:  $\epsilon_{\pi}^{eff} = \epsilon = \epsilon_{\nu}^{eff}$ . El concepto de carga efectiva permite a las teorías de tipo  $\Delta\hbar\omega = 0$  reproducir las transiciones de tipo B(E2) usando estados propios calculados. Esta necesidad es natural, si pensamos que para que los nucleones de valencia produzcan una polarización en el núcleo mágico deben existir interacciones entre capas. Interacciones que no contemplan las teorías cuya excitación de fonones sólo son del tipo  $\Delta\hbar\omega = 0$ .

A diferencia de las teorías mencionadas, el modelo simpléctico contempla interacciones entre capas, permitiendo explicar la interacción de los nucleones de valencia con el núcleo mágico. Propiciando su polarización de manera natural, sin la utilización de cargas efectivas. Ésto es directo para los núcleos ligeros, en los cuales la interacción espín-órbita no es muy grande en comparación con los núcleos pesados. En estos últimos, aún utilizando la extensión simpléctica el modelo pseudo-SU(3) necesita de la introducción de una carga efectiva <sup>2</sup> para reproducir los valores experimentales de momento cuadrupolar y transiciones B(E2). Pero, esta carga puede omitirse si se utiliza un factor de escalamiento debidamente seleccionado. El factor de escalamiento, como ya se ha explicado, surge de la suposición, de que existe un subconjunto de nucleones (en orbitales de tipo normal) del número total, que es considerado espectroscópicamente activo. Los demás (en orbitales de tipo anormal) sólo siguen la dinámica de forma adiabática.

Podemos encontrar el factor de escalamiento de consideraciones de tipo geométrico: Para una distribución uniforme de carga  $Q_{\pi}^c$  obtenida de un modelo colectivo <sup>3</sup>, es proporcional a  $ZA^{2/3}$ . Pero al utilizar solamente una parte de los nucleones, debemos hacer la sustitución  $Z \rightarrow Z_n$  y  $A \rightarrow A_n$ . Entonces, el factor de escalamiento necesario para compensar la predicción de los nucleones en el espacio normal es:

<sup>1</sup> En adelante denominamos núcleo mágico al núcleo con un número de nucleones igual al de un número mágico. Esto para sustituir la palabra en inglés "core"

<sup>2</sup> Mayor aún que la carga efectiva utilizada en los modelos de  $\Delta\hbar\omega = 0$

<sup>3</sup>  $Z$ : número de protones y  $A^{2/3}$  provienen de la dependencia cuadrática del radio. A primer orden  $Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} R_0^2 Z\beta_0$  [Eis-87]

$$f_2 = \frac{ZA^{2/3}}{Z_n A_n^{2/3}} \quad (2.50)$$

También se considera que las distribuciones de protones y neutrones siguen sus movimientos mutuamente, de manera que contribuyen de manera coherente a la masa cuadrupolar, entonces es posible pensar que los protones contribuyen a dicha masa en la proporción:

$$Q_\pi^c = \frac{Z}{A} Q^c \quad (2.51)$$

Entonces esta cantidad también entra en la cuenta del factor que sirve para compensar la masa cuadrupolar (a razón de  $f_1 = Z_n/A_n$ : por el hecho de tomar únicamente nucleones en orbitales de paridad normal). En ese caso, los elementos de matriz del operador de transición deben multiplicarse por el factor:

$$f^2 = (f_1 f_2)^2 = \left( \frac{Z_n}{A_n} \frac{ZA^{2/3}}{Z_n A_n^{2/3}} \right)^2 = \left( \frac{Z}{A_n} \right)^2 \left( \frac{A}{A_n} \right)^{4/3} \quad (2.52)$$

Como en el cálculo hecho en este trabajo se limita a solamente protones, el factor que utilizamos (en núcleos pesados) para compensar la exclusión de nucleones en niveles anormales es directamente el factor de escalamiento  $f$ . Realizamos un estudio acerca de este factor en el capítulo 5.

**40CAPÍTULO 2. MODELOS ALGEBRAICOS MICROSCÓPICOS DEL NÚCLEO.**

## Capítulo 3

# Modelo de Pseudo-Nilsson

La razón para introducir este pequeño capítulo del modelo de Nilsson en el pseudospacio es la de resumir dos de los conceptos planteados en los capítulos anteriores y preparar el terreno para desarrollar la comparación entre ambos modelos.

Por una parte, el modelo de Nilsson, como aquéllos otros que utilizan un potencial de campo promedio de partícula independiente, presentan una simetría muy importante con respecto a la interacción espín-órbita en la región de los núcleos pesados. Por otra parte, el modelo algebraico utiliza precisamente esta simetría para restaurar su alcance de aplicación<sup>1</sup>, perdido al pasar de los núcleos ligeros a los pesados.

Entonces, la comparación de ambos modelos en la región de tierras raras y actínidos debe ser a nivel de pseudo-modelos. Por eso, se muestra en este capítulo las transformaciones hechas al Hamiltoniano de Nilsson, de manera que sea consistente al marco de la comparación.

### 3.1 La simetría de Pseudo-espín

El modelo de capas esférico, puede ser aproximado por el Hamiltoniano de partícula independiente:

$$H_{sp} = H_0 + C1 \cdot s + D1^2, \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Recuerde que para núcleos pesados el término espín-órbita destruye la simetría SU(3)

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano del oscilador esférico y los términos de la interacción residual están pesados por los parámetros C y D. Como se dijo anteriormente, el efecto combinado de las interacciones de tipo residual crecen con el valor de la masa atómica, destruyendo la estructura del oscilador esférico simple.

Sin embargo, un proceso de reetiquetamiento de los números cuánticos del modelo de capas permite despreciar la interacción espín-órbita, obteniendo una simplificación en el tratamiento de núcleos pesados ( $A > 100$ ).

Este reetiquetamiento en términos de los números cuánticos de la base esférica, se traduce como:

$$\tilde{j} = j, \quad \tilde{N} = N - 1, \quad \tilde{s} = s, \quad \tilde{l} = l \pm 1 \quad (3.2)$$

Este reetiquetamiento implica una reducción en el espacio de Hilbert inicialmente considerado por el modelo normal.

El mapeo del Hamiltoniano del modelo de capas esférico al pseudo-espacio, está expresado de la siguiente manera <sup>2</sup>:

$$H_{sp} = H_0 + C\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} + D\mathbf{l}^2 \rightarrow \tilde{H}_0 + (4D - C)\tilde{\mathbf{l}} \cdot \tilde{\mathbf{s}} + D\tilde{\mathbf{l}}^2 + (\hbar + 2D - C). \quad (3.3)$$

Esta transformación es hecha sobre los estados de paridad normal, ya que se supone que las partículas en orbitales de tipo anormal contribuyen de manera adiabática a la dinámica de estados de baja energía <sup>3</sup>.

Regresando a la transformación al espacio pseudo, su significado físico proviene del hecho de que para núcleos pesados:

$$4D - C \simeq 0 \quad (3.4)$$

Siendo la consecuencia de que el término pseudo espín-órbita resulta ser despreciable. Luego, el Hamiltoniano expresado en Eq.(3.1) es mapeado a:

$$\tilde{H} \rightarrow \tilde{H}_0 + (4D - C)\tilde{\mathbf{l}} \cdot \tilde{\mathbf{s}} + D\tilde{\mathbf{l}}^2 \quad (3.5)$$

<sup>2</sup>El mapeo se realiza a través del operador unitario U que lleva una cantidad A en el espacio normal, a la correspondiente  $\tilde{A}$  en el pseudo-espacio:  $\tilde{A} = UAU^\dagger$  [CaMo-92]

<sup>3</sup>Esta suposición ya no es válida a energías altas y valores grandes del momento angular  $J \sim (10 - 14)\hbar$  para los núcleos de las tierras raras y  $J \sim (12 - 16)\hbar$  para los actínidos [SS-72, DraRA-79].

### 3.2 El modelo Pseudo-Nilsson

El hamiltoniano del oscilador armónico en el pseudo-espacio, modificado por el término de interacción de tipo cuadrupolar que introduce la deformación, puede escribirse como:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_\beta + (4D - C)\tilde{I} \cdot \tilde{s} + D\tilde{I}^2 \quad (3.6)$$

con:

$$\tilde{H}_\beta = -\beta\tilde{r}^2 Y_{20}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \quad (3.7)$$

Para obtener los valores propios y estados propios, el Hamiltoniano anterior es diagonalizado en la base  $|\tilde{N}\tilde{\Lambda}\tilde{\Sigma}\rangle$ , con  $\Lambda$  como la proyección del momento angular orbital.

### 3.3 Momento cuadrupolar en el pseudo-espacio

Ya que las interacciones de tipo cuadrupolar  $H_\beta$  y  $\tilde{H}_\beta$  (por aplicarse a diferentes capas  $N$  y  $N - 1$  respectivamente) son diferentes, entonces las deformaciones involucradas en cada caso no son las mismas. Por ello, existe un factor que conecta la magnitud de la interacción de tipo cuadrupolar en ambos esquemas. Para encontrar este factor se comparan los elementos de matriz radiales de la interacción en la misma capa. Se obtiene:

$$\tilde{H}_\beta \approx \frac{N + \frac{3}{2}}{N + \frac{1}{2}} H_\beta \quad (3.8)$$

Un factor más realista se consigue si se piensa que el conjunto de protones y neutrones ocupan osciladores independientes (para núcleos pesados); entonces un promedio del factor para protones y neutrones resulta más adecuado.

Como se ha mencionado, este factor compensa la diferencia en la magnitud de la interacción debido al cambio en el espacio de la base, pero en dicho cambio la energía también puede ser afectada, al igual que los demás operadores de un cuerpo en el Hamiltoniano. En ese caso, este factor debería multiplicar no sólo al operador de interacción de tipo cuadrupolar sino a todos <sup>4</sup>. En tales condiciones, podemos escribir:

$$\tilde{H} = \hbar\omega K(\hat{N} - \beta\tilde{Q}_{20}) + \tilde{C}\tilde{I} \cdot \tilde{s} + \tilde{D}\tilde{I}^2, \quad (3.9)$$

donde  $K$  es el factor  $(N + 3/2)/(N + 1/2)$ .

Los valores utilizados son  $K = 1.2$  para las tierras raras y  $K = 1.17$  para los actínidos.

Ya que el parámetro  $C$  también se modifica al pasar al pseudo-espacio, se encuentra que:

$$D \rightarrow \tilde{D} = D \quad (3.10)$$

$$C \rightarrow \tilde{C} = AD - C \quad (3.11)$$

<sup>4</sup>La razón de esto, es que si se pasa de un conjunto de  $A$  nucleones a otro con  $A_n$  ( $A$  compuesto de nucleones en orbitales de tipo normal) entonces las energías se ven modificadas. Lo mismo se puede pensar para los términos de interacción residual; aunque la modificación en estos casos es menor, el caso de espín-órbita, debido a su pequeñez, puede despreciarse.

En términos de  $\mu$  y  $\kappa$ :

$$\mu \rightarrow \mu \quad (3.12)$$

$$\kappa \rightarrow (2\mu - 1)\kappa \quad (3.13)$$

### 3.4 Cálculo de momento cuadrupolar

El cálculo del momento cuadrupolar se hace de la misma forma como en el modelo normal, con la diferencia que ahora se tiene el factor  $K$ , que compensa la magnitud del operador al pasar de un espacio a otro. Además, el cálculo del momento cuadrupolar se hace ahora sólo sobre los nucleones que ocupan orbitales de paridad normal. Por una parte, esto reduce la contribución a dicho observable, además de que el parámetro conocido como "longitud de onda del oscilador" está modificado por pasar de un espacio al otro:

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_n}} \quad (3.14)$$

Por tanto <sup>5</sup>:

$$Q_n = \frac{1}{10^4} \frac{\hbar}{m\omega_n} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sum_i \langle \Psi_i | r^2 Y_{20} | \Psi_i \rangle, \quad (3.15)$$

donde los elementos de matriz se refieren al operador en el pseudo espacio y el índice corre sobre los niveles de tipo normal.

Finalmente, el factor de escalamiento (discutido en el capítulo anterior), se consigue dividiendo el momento cuadrupolar total entre el momento cuadrupolar en el pseudo espacio:

$$f_2 = \frac{Q}{Q_n} \quad (3.16)$$

<sup>5</sup>Se introduce el factor adecuado para tener las unidades barns



## Capítulo 4

# Aplicaciones

Por una parte, el modelo de Nilsson es un modelo de partícula independiente que utiliza un potencial promedio de oscilador armónico deformado, con el cual interactúan los nucleones que se encuentran afuera de capas cerradas.

Por otra parte, el modelo Pseudo-simpléctico es la extensión a núcleos pesados en conjunto con la extensión de interacción entre capas ( $\Delta N = 2$ ) del modelo de Elliott, siendo este último un modelo de capas que utiliza la teoría de grupos para explicar el movimiento coherente (de tipo rotor) de los nucleones de valencia dentro del potencial promedio de oscilador armónico. Resulta importante reafirmar que ambos modelos utilizan el mismo tipo de potencial de oscilador armónico en tres dimensiones; con la diferencia de que en el modelo de Nilsson, la interacción promedio con que interactúan los nucleones de valencia se supone ya deformada desde un principio. En el modelo de Elliott y sus extensiones, se utiliza un potencial promedio esférico. En el modelo de Nilsson la deformación entra explícitamente a través de un término del tipo  $Q^c \cdot \langle Q^c \rangle$ , pero en el modelo simpléctico y pseudo-simpléctico se utiliza un término  $Q^c \cdot Q^c$  que permite la interacción entre dos nucleones y de los mismos con el potencial promedio de oscilador armónico. Mientras que en el modelo de Nilsson, la deformación aparece como algo preestablecido en el modelo, en el pseudosimpléctico es efecto de un proceso dinámico.

La extensión simpléctica del modelo de Elliott permite estudiar núcleos deformados. La simetría de pseudo-espín permite abordar núcleos pesados; la conjunción de estas dos últimas se utiliza en el estudio de núcleos pesados y deformados. Tales modificaciones al modelo de Elliott traen consigo, el problema de interpretar la actividad de los nucleones en estados normales y anormales ( $J = N + 1/2$ ).

El objetivo de este trabajo es comparar el comportamiento del modelo algebraico y el modelo de Nilsson ante la aplicación correspondiente a un conjunto de núcleos:  $^{22}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{160}\text{Dy}$ ,  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{234}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$ .

Ya se han hecho otro tipo de comparaciones, como aquella entre el modelo  $\text{SU}(3)$  y el Modelo Colectivo [Ca-88], o similarmente una interpretación microscópica de la superficie de energía potencial, en término de variables geométricas [Ca-92]. También se han hecho cálculos con el modelo pseudo-simpléctico, utilizando precisamente el modelo de Nilsson o el modelo Woods-Saxon deformado como modelos de apoyo: obtención de una base de trabajo y descripción de propiedades del núcleo a estudiar como niveles de energía, ocupaciones de nucleones en estados normales o anormales, etc. [Tr-94], [Hi-94].

La idea de este trabajo es comparar un modelo microscópico como el simpléctico y pseudo-simpléctico con otro modelo microscópico más clásico como lo es el modelo de Nilsson. Generalmente los modelos se comparan cuando intentan describir la misma física. En ocasiones sólo es posible la comparación numérica de sus resultados, cuando sus filosofías no pueden describirse una a la otra. Pero también se tiene el caso de comparar dos modelos que ocupan básicamente la misma filosofía (como lo es utilizar un potencial promedio de tipo oscilador armónico), pero que sus técnicas son un tanto diferentes.

Con este trabajo, intentamos dar una interpretación del estado base del núcleo en el modelo simpléctico y pseudo-simpléctico en términos del modelo de Nilsson. En estos dos modelos puede calcularse utilizando el estado base como referencia, ya que el modelo algebraico puede describir estados excitados de manera que el modelo de Nilsson no puede describir. El estado correspondiente de comparación en el modelo algebraico será el de la irrep cuyo operador de Casimir de segundo orden sea el más grande.

Como señalamos al inicio de este capítulo, los modelos son básicamente similares, por lo que esperamos que los resultados obtenidos también lo sean. De manera especial, esto podrá ser visto para los núcleos ligeros al utilizar la extensión simpléctica, donde hemos de comparar dos modelos en que la diferencia básica estriba en el tipo de interacción cuadrupolo-cuadrupolo. Como sabemos, la correspondiente al modelo algebraico incluye interacción entre dos cuerpos de manera explícita, mientras que la del modelo de Nilsson incluye interacción entre dos cuerpos pero de manera oculta en el potencial promedio. Esto representa una diferencia, ya que en el modelo de Nilsson los nucleones en la capa de valencia no interactúan. Si no existe diferencia, podemos pensar que la interacción entre los nucleones en la capa de valencia es despreciable, o que de alguna manera la interacción entre nucleones en la capa de valencia también está incluida en el potencial promedio. Revisaremos la similitud en los números de ocu-

pación en los orbitales de paridad normal y anormal. De ser diferentes los resultados necesitaremos una interpretación posterior. Se han hecho cálculos con anterioridad utilizando núcleos ligeros [Ca-89] y pesados [TrD-94]. El plan para la aplicación es el siguiente:

#### I MODELO DE NILSSON

- a) Obtención del diagrama de Nilsson para los núcleos en cuestión.
- b) Desarrollo de algunos niveles de Nilsson en la base esférica.
- c) Obtención de los números de ocupación en niveles normales y anormales.
- d) Contribución a capas superiores a través de excitaciones del tipo  $\Delta N$  ( $\Delta N = 0, \Delta N = 2, \Delta N = 4$ ).
- e) Descripción de la estructura de excitaciones [Hi-94]  $N_B \neq 0$ . Cómo se compara con el modelo simpléctico?

#### II MODELO SIMPLÉCTICO Y PSEUDO-SIMPLÉCTICO.

- a) Números de ocupación en niveles normales y anormales.
- b) Números de ocupación por capa para núcleos ligeros.
- c) Intensidades de excitación del tipo  $\Delta N = 0, 1, 2, 3, \dots$

#### III COMPARACIÓN E INTERPRETACIÓN

Debemos señalar que para el cálculo correspondiente al modelo algebraico, se utiliza un código ya elaborado [DraCa-87]. Los parámetros utilizados ( $\mu$   $\kappa$ ) son los considerados más eficientes hasta el momento [Ring-80].

- a) Comparación de los números de ocupación en los núcleos ligeros.
- b) Comparación del número promedio de bosones excitados en núcleos ligeros y pesados.
- c) Comparación de los factores de escalamiento obtenidos.
- d) Interpretación de la dependencia interacción-deformación.

#### IV CONSIDERACIONES GENERALES

- a) Analizar la exactitud del llenado "a ojo", contra el llenado automático.
- b) Comparar el carácter de las excitaciones en diferentes estados de la base.
- c) Analizar el llenado con dependencia en la deformación.
- d) Checar la convergencia de los valores obtenidos del momento cuadrupolar.
- e) Checar la distribución de densidad nuclear.



## Capítulo 5

# Resultados

En este capítulo presentamos la aplicación y comparación de los modelos de Nilsson y algebraico ya mencionado. Presentamos primero los diagramas obtenidos con el modelo de Nilsson, para poner en evidencia sus características, como la distribución de los niveles de tipo normal y anormal<sup>1</sup>, y la potencial dificultad para contar los nucleones que se encuentran en orbitales de tipo anormal.

Después continuaremos con la expansión en la base esférica de algunos niveles para observar el comportamiento de las mezclas, con su dependencia de la deformación. Hemos dividido lo siguiente en dos partes, núcleos ligeros y núcleos pesados. Para la primera parte, presentamos la comparación del momento cuadrupolar y transiciones  $B(E2)$  en el modelo de Nilsson con los valores experimentales. A continuación presentamos gráficas, que ponen en evidencia la distribución de los nucleones (bajo el efecto de la interacción entre capas) en el espacio de la base esférica. Consecutivamente, hacemos una comparación de los números de ocupación (de nucleones) obtenidos en ambos modelos<sup>1</sup>. Finalmente, hacemos una comparación del número de bosones excitados en cada modelo.

Para la parte de núcleos pesados, hacemos lo mismo que para núcleos ligeros (con excepción de la comparación de números de ocupación), pero en este caso introducimos la comparación entre los llenados hechos con la vista en los diagramas de Nilsson y el calculado utilizando los factores en el desarrollo de la base esférica. También incluimos las gráficas que muestran el comportamiento que siguen los llenados con respecto a la deformación. En la última sección, hablamos de la convergencia en los números obtenidos para el momento cuadrupolar a altas deformaciones.

<sup>1</sup>Los números de ocupación obtenidos con el modelo algebraico son obtenidos por J. Hirsch [Hi-95]. Estos números no están disponibles para núcleos pesados.

REGION	$\kappa$	$\mu$
$N, Z < 50$	0.0800	0.0000
$50 < Z < 82$	0.0637	0.6000
$82 < N < 126$	0.0637	0.4200
$82 < Z$	0.0577	0.6500
$126 < N$	0.0635	0.3250

Tabla 5.1: Parámetros del Hamiltoniano de Nilsson [Gus-67].

## 5.1 Diagramas de Nilsson

Las gráficas (Figs. [5.1-3]) muestran las energías del modelo de Nilsson en las tres regiones de interés de este trabajo. Hacemos las siguientes observaciones, aunque para una revisión detallada recomendamos el estudio del trabajo original de Nilsson [Ni-55]:

En los diagramas mostrados, las energías están dadas en unidades de  $\hbar\omega$ , y entendemos por "DEFORMACION", el valor numérico del parámetro  $\beta$  introducido en el Hamiltoniano (eq.[1.24]). Los diagramas fueron construidos utilizando los parámetros  $\mu$  y  $\kappa$  dados por Gustavsson et al. [Gus 67].

1) Cada nivel en los diagramas puede clasificarse a bajas deformaciones utilizando los números cuánticos de la base esférica  $[Nl_j\Omega]$ . Como sabemos, para deformaciones alejadas de cero esta clasificación ya no es válida, por tanto, clasificamos a cada nivel, por su paridad y la proyección del momento angular total ( $[\Omega\pi]$ ), que son buenos números cuánticos a través de la deformación. Clasificamos con  $[\Omega+]$  y  $[\Omega-]$  a los estados en capas pares e impares respectivamente. Sabemos también que si tomamos en cuenta la interacción entre capas, el número que clasifica a la capa ( $N$ ) no es un buen número cuántico, pero no por eso la paridad referente a la capa, ya que el término de interacción solamente mezcla capas con la misma paridad, por lo que la paridad de un estado también se conserva a través de la deformación. Hacemos la observación, que si hubiéramos decidido utilizar la base asintótica para diagonalizar el Hamiltoniano,  $[N N_z m_l \Omega]$ <sup>2</sup> entonces estos números serían buenos números a deformaciones grandes, pero no a deformaciones pequeñas.

<sup>2</sup>  $N_z$  y  $m_l$  son el número de fonones en la dirección de z y la proyección del momento angular orbital respectivamente

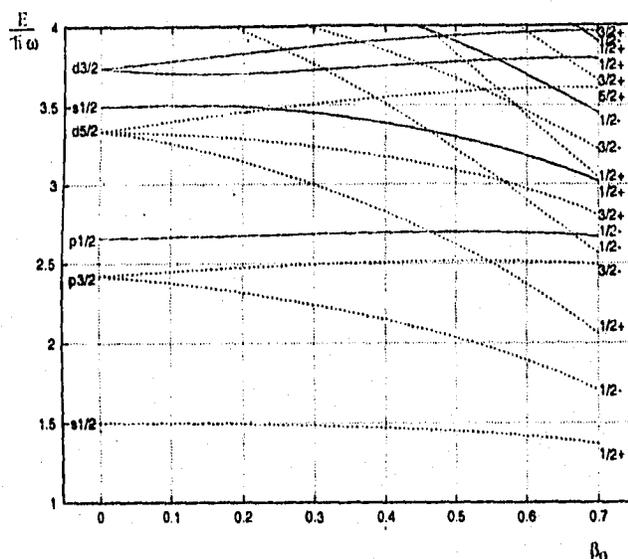
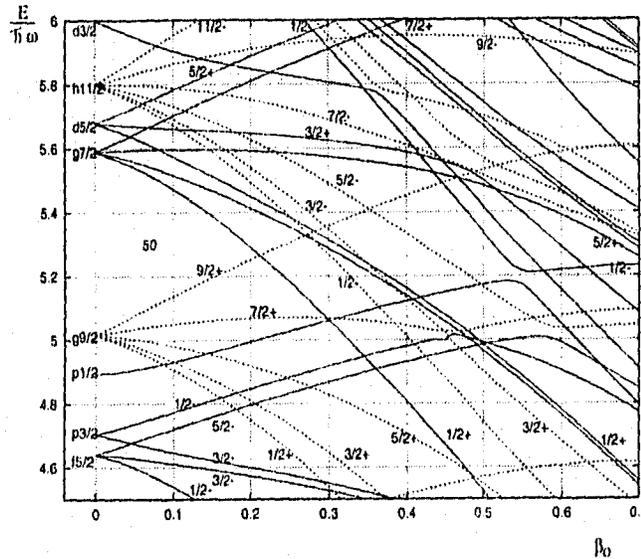


Figura 5.1: Diagrama de Nilsson para núcleos ligeros.

2) En los diagramas, hemos distinguido a los estados provenientes de orbitales con  $j = N + 1/2$  (en líneas cortadas) y que ya hemos reconocido como orbitales anormales, siendo los que no cumplen con esta regla, orbitales de tipo normal. Esta distinción nos ayudará más adelante en la determinación del factor de escalamiento en el modelo de pseudo-Nilsson.

3) Como podemos apreciar, los estados con  $\Omega$  pequeño caen (en energía) a través de la deformación. Por ejemplo, en la Fig.[5.2], el orbital clasificado (a deformación cero) como  $g_{9/2}$ , rompe su degeneración a través de la deformación quedando abajo los estados con menor proyección de  $j = 9/2$ , siendo el estado  $[1/2+]$  el que es empujado más hacia abajo.

Lo anterior puede explicarse de la siguiente manera: La interacción del tipo  $r^2 Y_{20}$  causa que los niveles con menor  $\Omega$  sean empujados hacia abajo para deformaciones positivas (formas prolatas) y hacia arriba para deformaciones negativas (formas oblatas). Este efecto puede ser entendido al considerar, que los estados con menor  $\Omega$  tienen una probabilidad relativamente más alta de permanecer cerca del eje Z. Ya que esto corresponde a momento cuadrupolar positivo ( $\langle r^2 Y_{20} \rangle$ ), y tomando en cuenta que el término de interacción está precedido por un signo menos en el Hamiltoniano, entonces la contribución de su valor esperado es negativa, propiciando el efecto en cuestión.

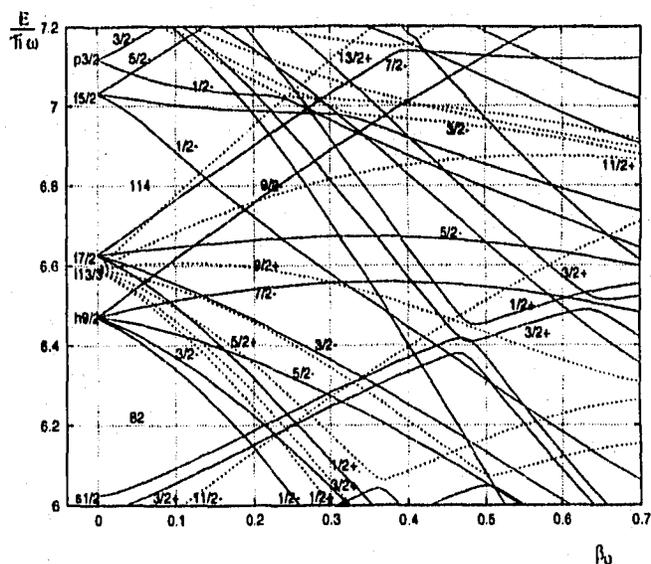
Figura 5.2: Diagrama de Nilsson para  $Z < 82$ .

4) Podemos observar en las Figs.[5.2-3], la existencia de "cruces". Este efecto sucede a deformaciones grandes<sup>3</sup>. Los niveles que tienen "cruces", son aquellos con la misma clasificación  $[\Omega\pi]$  pero pertenecientes a diferente  $j$ . Es una regla que los niveles que cumplen con esa condición nunca se cruzan (Regla de no cruzamiento Newmann-Wigner [NW-29,LL-59,HW-53]).

Como ejemplo, podemos observar algunos cruces presentados en los diagramas. En la Fig.[5.2] se aprecia un "cruce" entre las deformaciones  $0.5 < \beta < 0.6$  a una energía de 5.2 MeV. En este caso, los dos estados están clasificados con  $[1/2-]$ , el que sube de izquierda perteneciente a la capa  $N = 3$  y el que baja, perteneciente a la capa  $N = 5$ . Tenemos otro cruce, abajo del anterior y ligeramente a la derecha, en el que intervienen un nivel de la capa  $N = 3$  con clasificación  $[5/2-]$  y otro de la capa  $N = 5$  proveniente del orbital  $h_{11/2}$ . Un ejemplo más didáctico los representa el doble "cruce" en la Fig.[5.3] entre las deformaciones 0.4 y 0.5, a una energía aproximada de 6.4 MeV. Resulta importante este ejemplo, porque podemos observar que los dos niveles que vienen de abajo ( $[1/2+]$  y  $[3/2+]$ ) tienen un "cruce" con los niveles que vienen de arriba, con las mismas clasificaciones.

<sup>3</sup>En este contexto identificaremos a la palabra "cruce" con el efecto de deformación de dos niveles en la zona de máxima cercanía de forma que parecen repelerse, ver figuras.

Se sabe que lo que sucede en el "cruce" [NW-29,LL-59] corresponde a un intercambio de propiedades en los niveles, que se puede constatar lejos de la zona de interacción, es decir, las funciones de onda lejos del "cruce" son las mismas, como si no hubiera existido la interacción.



## 5.2 Composición en la base esférica

Para el estudio de los niveles de Nilsson en su desarrollo de la base esférica, los separamos en aquéllos que tienen cruzamiento o no. Ambos tipos de niveles definen su composición principal en deformación cero, cambiando su clasificación dependiendo de la deformación; por ejemplo para una deformación de  $\beta = 0.01$  (deformación pequeña), el nivel numerado como 21 Fig.[5.6], de abajo hacia arriba, está clasificado en la base esférica como  $N = 4, l = 4, j = 9/2, \Omega = 1/2$ , con un porcentaje alto con respecto a los demás estados de la base. Si sobre este nivel se va a  $\beta = 0$ , su clasificación exacta es  $^4 N=4, l=4, j=9/2, \Omega=1/2$ ; pero si se va hacia la derecha, la probabilidad de que nucleones en este nivel sean clasificados en el estado mencionado de la base decrece mientras que la probabilidad de otros estados aumenta.

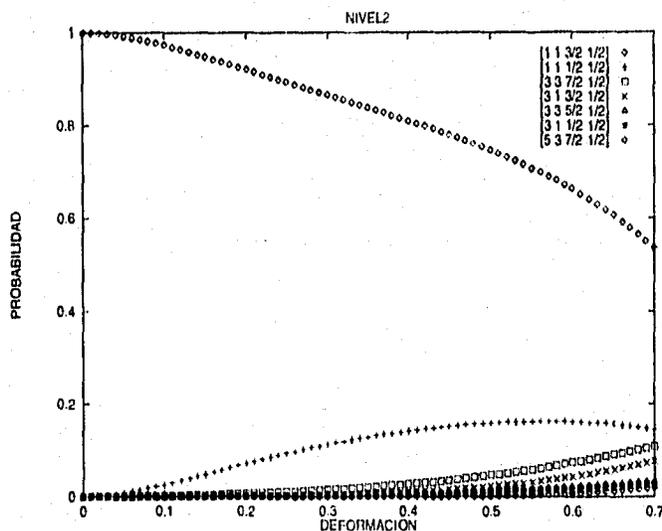


Figura 5.4: Desarrollo en la base esférica del nivel 2, cuya clasificación en la base esférica a deformación cero es  $N = 1, l = 1, j = 3/2, \Omega = 1/2$ . Hemos definido como probabilidad a  $|C_{Nl\Omega}^{\Lambda\Omega\pi}|^2$ .

En el caso de niveles pertenecientes a orbitales anormales dicha probabilidad puede descender más del cincuenta por ciento, trayendo consigo un

$$^4|\Lambda\Omega\pi\rangle = \sum_{Nl\Omega} C_{Nl\Omega}^{\Lambda\Omega\pi} |Nl\Omega\rangle$$

cambio en la clasificación más probable.

Si se grafica el desarrollo en la base esférica de un nivel que tiene un cruce, su composición cambia localmente para la deformación donde se da el cruce, pero fuera de ella, la gráfica es como aquella donde no se toma en cuenta la interacción entre capas.

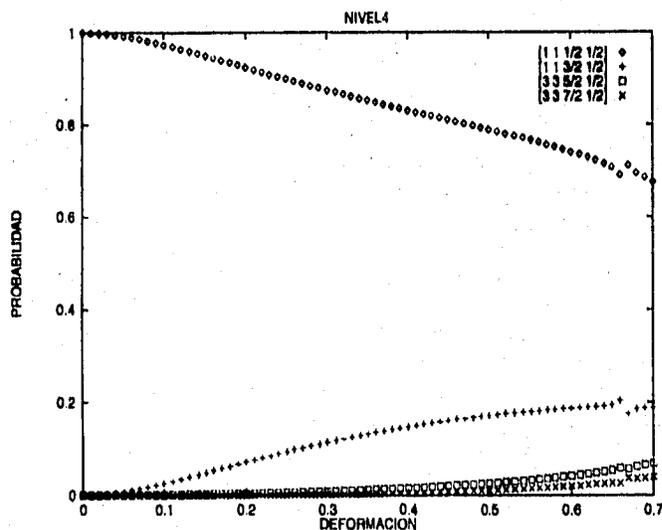


Figura 5.5: Desarrollo en la base esférica del nivel 4, cuya clasificación en la base esférica a deformación cero es  $N = 1, l = 1, j = 1/2, \Omega = 1/2$ .

Para realizar los cálculos de estos núcleos en el modelo pseudo-simpléctico contraído es necesario tener la ocupación de nucleones en orbitales normales y anormales. Una manera de realizar este conteo es el método tradicional "a ojo" que consiste en contar el número de niveles normales y anormales que están ocupados y obtener el número de protones (neutrones) que ocupan niveles normales y anormales, pero todo esto, siguiendo los niveles "a ojo" desde su deformación  $\beta=0$ , donde su clasificación en normal y anormal está bien definida. Como se sabe para una deformación distinta de cero, un nivel queda clasificado para una mezcla de diferentes estados de la base esférica (o la base que se esté utilizando) con la misma proyección del momento angular total; esto trae consigo que el conteo "a ojo" pueda ser impreciso porque el estado que se está siguiendo a través de la deformación es una mezcla de varios estados, en cuyo caso el llenado hecho de esta ma-

nera puede ser tan impreciso, como tan rápido cambie la composición del estado seguido. Para observar este tipo de comportamiento, resulta muy revelador obtener una expansión de varios estados físicos en la base esférica, para de esta manera saber cuánto varía su composición cuando se aumenta la deformación. Como ejemplo, en las figuras [5.4-7] podemos observar el comportamiento mencionado.

En la Fig. [5.4] se muestra la expansión en la base esférica del nivel del diagrama de Nilsson numerado (por orden de energía a deformación cero) con 2, en la capa  $N=1$ . Como podemos observar, el estado principal en este desarrollo es el  $[N=1, l=1, j=3/2, \Omega = 1/2]$ . Este es principal en el sentido, que a través de la deformación, este es el estado con mayor probabilidad de ser representativo del estado de un nucleón en el nivel número 2. Pero también podemos observar, que para deformaciones altas, el estado físico comienza a tener contribuciones apreciables de otros estados de la base; en este caso, nos referimos a los estados  $[1 1 1/2 1/2]$ ,  $[3 3 7/2 1/2]$ ,  $[3 1 3/2 1/2]$ , etc. Precisamente estas contribuciones adicionales a partir de una cierta deformación, son las responsables de que el conteo siguiendo las líneas del diagrama de Nilsson "con los ojos" tenga cierta imprecisión, ya que si calculamos como se dijo anteriormente el número de partículas que se encuentran en niveles anormales y normales, se traduce en encontrar el número de partículas que se encuentran en estados anormales y normales de la base. En ese caso, un solo nivel como el señalado como el 2, aunque clasificado para deformación cero como un nivel anormal ( $J = N + 1/2$ ), tendrá contribuciones normales a la cuenta, como lo es en este caso el estado siguiente en importancia en la misma figura  $[1 1 1/2 1/2]$  clasificado como normal.

Entonces si hacemos una cuenta rápida, el nivel dos de la capa uno es cien por ciento anormal para deformación cero, mientras que lo es en un ochenta por ciento para una deformación de  $\beta = 0.3$ . Si ahora se hace lo mismo con todos los niveles que son ocupados en un núcleo a la deformación adecuada, es posible que estos errores de apreciación en la contabilidad del llenado pueda contribuir a uno de los dos tipos de llenado (normal o anormal), o tal vez estos errores se compensen y finalmente el conteo hecho de esta manera se el mismo que el hecho siguiendo los niveles "con los ojos" a través del diagrama de Nilsson correspondiente.

Podemos notar que el nivel cuatro en la Fig.[5.5] tiene un comportamiento similar al nivel número dos. En cambio, el nivel numerado con 21 en la fig.[5.6], que es el nivel más bajo en energía en la capa cuatro, es de tipo anormal, denotándose su clasificación esférica como  $[4 4 9/2 1/2]$ , cae rápidamente desde 1.0 en deformación cero, hasta 0.3 para una deformación de  $\beta = 0.3$  incluso, a una deformación vecina, el estado físico es una mez-

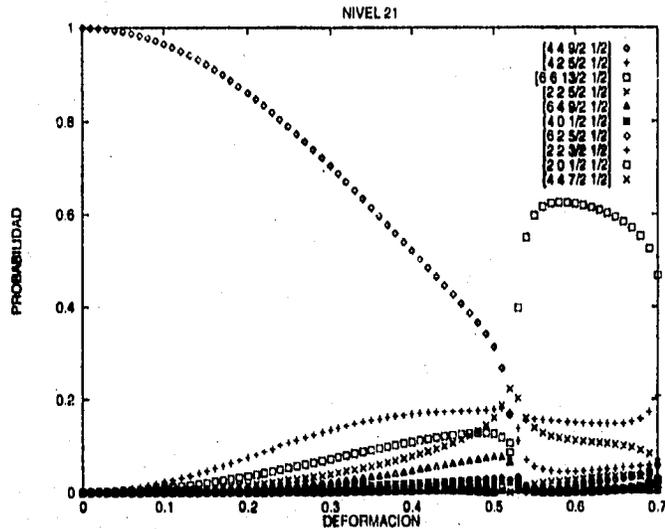


Figura 5.6: Desarrollo en la base esférica del nivel 21, cuya clasificación en la base esférica a deformación cero es  $N = 4, l = 4, j = 9/2, \Omega = 1/2$

cla de muchos estados de la base, sin que alguno sobresalga a los demás; para esta deformación se ha dado un cruce (efecto Landau-Zener). Para una región posterior a esta deformación otro estado es el líder, y es precisamente aquel con el que el anterior se ha cruzado. Probablemente esto traiga algunas consecuencias en la diferencia con el tipo de conteo "a ojo". Como se puede apreciar, este tipo de análisis consiste básicamente de explorar los eigenvectores de cada estado en la base esférica. Una manera de checar si estos estados propios son los correctos en la diagonalización, es graficar su contribución a la componente radial de la función de onda total del núcleo. En el apéndice B se grafica la distribución de carga para los núcleos que estamos estudiando. El buen comportamiento de esta distribución ayuda a confiar en los estados propios y su composición, que es motivo de estudio.

Para completar este estudio, también mostramos el comportamiento de los nucleones que ocupan niveles normales con respecto a la deformación. Esto lo veremos más adelante cuando tengamos que hablar de los núcleos pesados.

Dividiremos los resultados obtenidos para núcleos ligeros y pesados para

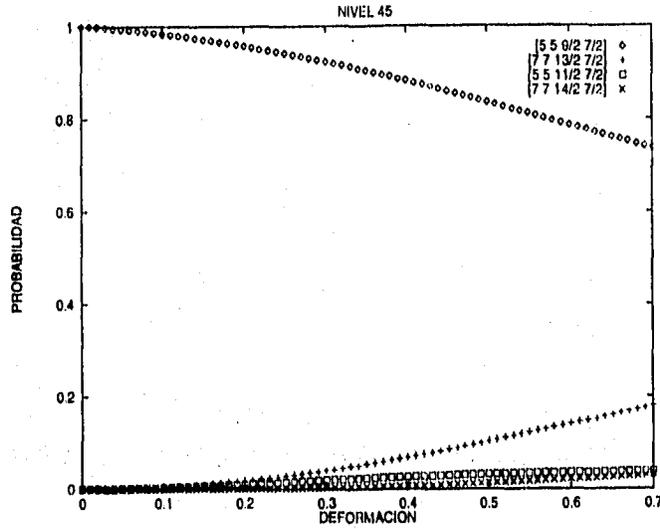


Figura 5.7: Desarrollo en la base esférica del nivel 45, cuya clasificación en la base esférica a deformación cero es  $N = 5, l = 5, j = 9/2, \Omega = 7/2$ .

Ne20	Mg24	Dy160	Er168	U234	U236	U238
0.600	0.512	0.303	0.305	0.250	0.258	0.262

Tabla 5.2: Tabla de Deformaciones.

una mejor organización y comprensión de los resultados obtenidos. Las deformaciones utilizadas para cada núcleo son presentadas en la tabla [5.2] (ver capítulo 1).

Antes de continuar, es necesario llegar a un acuerdo con respecto a los conceptos que utilizaremos:

A lo largo de la discusión referente a excitación de bosones y la explicación de los números de ocupación de partículas, hablamos de llenados en "orden normal" y "orden deformado". Explicaremos esa "notación" a continuación:

Hablamos de un llenado en orden normal<sup>5</sup> cuando pensamos que los nu-

<sup>5</sup>En este caso, nada tiene que ver con el concepto de Paridad Anormal. También

neutrones ocupan los niveles de Nilsson en orden, como los ocuparía en el núcleo esférico, ver Fig.[5.8-a]. Hablamos del orden deformado cuando los nucleones llenan los niveles como aparecen para una deformación dada en los diagramas de Nilsson, ver Fig.[5.8-b].

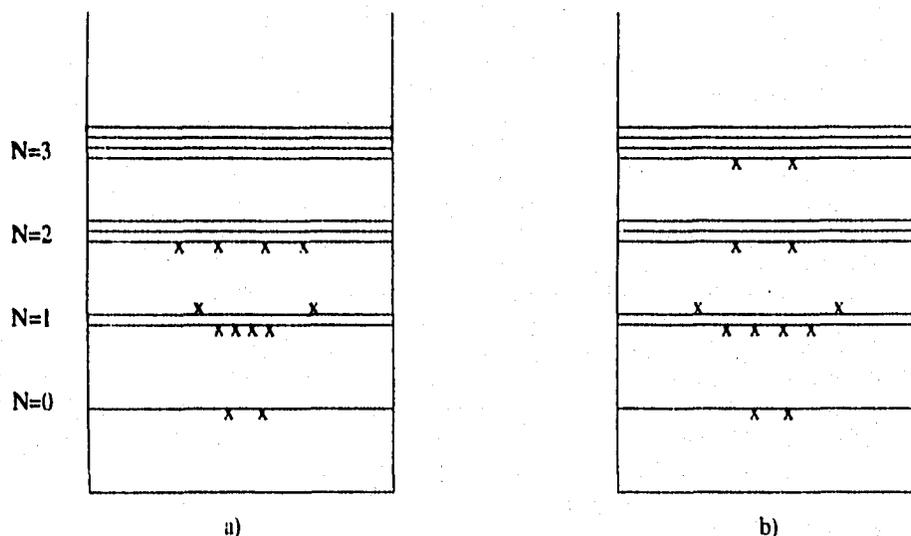


Figura 5.8: a) El llenado en "orden normal" o "orden esférico" representa el llenado de los nucleones por orden de energía en un núcleo esférico. b) El llenado en "orden deformado" implica el llenado de los nucleones en los niveles del núcleo deformado. en ese caso, pueden existir niveles desocupados, por debajo de los nucleones de valencia.

Una vez establecida la correspondencia entre la notación y las ideas que queremos expresar, podemos continuar con el estudio de los núcleos ligeros.

hablamos de "configuración original" cuando queremos saber la localización de los nucleones en ausencia de interacción. Esta configuración es necesaria para calcular el número de bosones  $N_0$ . Por ejemplo, la configuración original para  $^{20}\text{Ne}$  es 2.6.2; y el número de bosones en esta configuración es  $2 \cdot (1) + 6 \cdot (2) + 2 \cdot (3) = 20$ . Los números entre paréntesis, son los números de la capa.

### 5.3 Núcleos ligeros

Como se ha mencionado al principio de este trabajo, los núcleos a estudiar son el  $^{20}\text{Ne}$  y  $^{24}\text{Mg}$ ; por sus números atómicos (tomamos en cuenta sólo protones), éstos núcleos tienen como capa de valencia la  $N = 2$  para deformación cero y  $N = 3$  para deformaciones mayores que 0.3 (ver fig. [5.1]). Las expansiones en la base esférica de los niveles involucrados en el llenado de estos núcleos, muestran que hasta deformaciones relativamente grandes ( $\beta = 0.4, 0.5$ ), la clasificación en la base esférica es predominantemente aquella para deformación cero. Algo que hay que señalar sobremanera en este contexto, es que tales núcleos tienen deformaciones muy altas, comparadas relativamente con las deformaciones de otros núcleos.

Para estos núcleos es posible calcular la excitación de protones, cuando pasamos de un llenado en orden normal a otro en orden deformado. De esta manera, podemos considerar que, por efecto de la interacción de tipo cuadrupolar, los nucleones puedan excitarse a otros niveles de energía que cumplan con las reglas de selección impuestas por este tipo de interacción. Por lo mismo, es posible obtener el número promedio de bosones excitados dentro de una capa o hacia capas externas a la configuración establecida por llenar los niveles en orden creciente de energía, para una deformación dada (en el modelo de Nilsson). Antes de explicar cómo se lleva a cabo este cálculo, es preciso mencionar la diferencia que existe en la transición de un estado a otro de nucleones en un núcleo deformado y uno esférico.

Como se sabe, para un núcleo esférico, la transición entre estados de diferente capa (a saber  $\Delta N = \text{par}$ ), resulta poco probable, o se da a energías grandes, de forma que un nucleón pueda promoverse de una capa a otra con una energía mínima de  $2h\omega_0$ . Pero para núcleos deformados, como se puede apreciar en los diagramas de Nilsson, existen regiones de deformación donde niveles de capas diferentes pueden estar energéticamente muy cerca uno del otro, incluso cruzarse, propiciando en ese caso, altas probabilidades de transición, si las reglas de selección lo permiten. En otras palabras, si para deformación cero el llenado con una configuración de mínima energía sigue el orden normal (llenado en orden normal) de capas y orbitales,  $N=0,1,2,3$ , etc., para una deformación diferente de cero esto no es necesariamente cierto, por lo explicado arriba, y la configuración de mínima energía tiene nucleones en capas sin orden normal.

Puede observarse también en los diagramas de Nilsson que los niveles que pertenecen a orbitales anormales bajan en energía relativamente más que los niveles de orbitales normales de la capa correspondiente. La consecuencia de esto es que para deformaciones grandes la configuración de llenado en orden deformado ocupa niveles anormales de capas superiores que no entran en un orden normal. Esto podría considerarse como un tipo de ex-

citación de los nucleones debido a condiciones puramente geométricas, es decir, a la condición de deformación de núcleo.

Ahora, expliquemos cómo calcular la excitación a niveles de capas superiores por el puro efecto de interacción entre capas:

Dada una deformación se obtiene el desarrollo en la base esférica de las funciones de onda de los estados físicos que participan en la ocupación, después se suman las probabilidades  $|C_i^\alpha|^2$  del  $i$ -ésimo nivel en cada estado  $\alpha$  de la base esférica, puede pensarse entonces que cada estado  $\alpha$  tiene el siguiente número de partículas (no necesariamente un entero):

$$n_\alpha = \sum_i |C_i^\alpha|^2 \quad (5.1)$$

donde

$$\Psi^i = \sum_\alpha C_i^\alpha |\alpha\rangle \quad (5.2)$$

y  $|\alpha\rangle$  son los estados de la base esférica.

Como se mencionó arriba, teniendo la excitación de los nucleones podemos saber cuál es la cantidad de cuantos de oscilación distribuidos en cada capa considerada en la base esférica. Estos números se obtienen como el producto del número de partículas por el número de capa en la que se encuentran. Posteriormente, para saber cuál es el número promedio de bosones que han salido fuera del llenado en orden normal (los estados que ocupan los nucleones si llenamos en orden creciente de la energía, sin dejar estados vacíos), restamos el número de bosones ocupando la configuración en orden normal.

Definimos  $\bar{N}$  como el número promedio de cuantos de oscilación en todas las capas:

$$\bar{N} = O_0 \times 0 + O_1 \times 1 + O_2 \times 2 + O_3 \times 3 + \dots \quad (5.3)$$

dónde  $O_i$  es la ocupación (número de nucleones) en la capa  $i$ <sup>7</sup>.

Definimos también  $N_0$  como el número de cuantos en la configuración en orden normal (ocupaciones a deformación cero):

$$N_0 = O'_0 \times 0 + O'_1 \times 1 + O'_2 \times 2 + O'_3 \times 3 + \dots + O'_v \times v. \quad (5.4)$$

<sup>6</sup>  $|\alpha\rangle = |N_i \Omega\rangle$   
<sup>7</sup>  $O_i = \sum_{j,\Omega} n_{i,j,\Omega}$

donde  $v$  representa la capa de valencia y las capas están ocupadas por  $(N+1)(N+2)$  protones (neutrones). Excepto la de valencia.

Entonces, el número de cuantos que van hacia afuera de las capas puede ser calculado de la resta:  $\tilde{N} - N_0$ .

De manera similar se obtiene el número de bosones que son excitados hacia afuera de las capas (en el modelo algebraico [Ca-89]) de la configuración en orden normal, con la variante de que el número promedio de cuantos es calculado de la siguiente manera:

$$\tilde{N} = c_0 \times N_0 + c_1 \times N_1 + c_2 \times N_2 + c_3 \times N_3 + \dots \quad (5.5)$$

Haciendo un poco de álgebra, resulta que:

$$\tilde{N} - N_0 = 2c_1 + 4c_2 + 6c_3 + \dots \quad (5.6)$$

donde las constantes  $c_i$  son los porcentajes de excitación de bosones calculados por el modelo algebraico. Los porcentajes típicos para núcleos pesados son de 60%–70% para bosones con  $0\hbar\omega$ , 20%–30% para bosones con  $2\hbar\omega$  y 4%–6% para bosones con  $4\hbar\omega$ , siendo el restante para los cuantos de mayor orden.

Pero; para qué nos interesa saber el número de protones (neutrones) y cuantos de oscilación que son excitados hacia capas superiores? La razón es la siguiente: Estamos interesados en la comparación de dos modelos, y por lo dicho con anterioridad, dicha comparación recaerá básicamente en los términos de interacción. En ambos modelos, la interacción de tipo cuadrupolar propiciará la excitación de partículas y por tanto de fonones hacia afuera y dentro de las mismas capas. Ya que este tipo de excitaciones forman parte de la dinámica entre nucleones que permite explicar cantidades como momento cuadrupolar, transiciones B(E2) muy importantes en la descripción del núcleo, entonces, comparando la magnitud de las excitaciones para ambos modelos obtenemos bastante información acerca de las características y alcances de dichos modelos.

De esta manera, una comparación clave en el funcionamiento de los modelos es la de excitaciones de partículas y bosones.

Trataremos los dos tipos de excitaciones por separado.

La comparación de números de ocupación se efectúa únicamente para los núcleos de  $^{20}\text{Ne}$  y  $^{24}\text{Mg}$ , del modelo de Nilsson, contra un cálculo simplificado del modelo simpléctico, adaptado para calcular el número de ocupación en cada capa (ver apéndice C).

Los resultados obtenidos para los números de ocupación pueden verse en el apéndice C, muestran que existe un buen acuerdo entre los números de

ocupación de uno y otro modelo, asegurando semejanza entre los comportamientos de ambos modelos.

### 5.3.1 Distribución de las partículas excitadas

Si se grafica el número de partículas que le corresponde a cada estado de la base esférica en esta expansión, podemos visualizar en qué estados de la base se reparten las "fracciones" de partícula que por efecto de la interacción se promovieron a tales estados.

Las figuras [5.9] y [5.10] describen la distribución de las partículas excitadas por efecto de la interacción. En el eje de las ordenadas tenemos los estados de la base numerados del 1 al 165, que en este caso corresponden a todos aquellos entre la capa cero y ocho. El ordenamiento está hecho en función de la energía; es decir, los estados con mínima energía aparecen primero y en orden ascendente a la derecha. La utilidad de estas figuras radica en que ofrecen la distribución de las excitaciones a través de los estados de la base y en consecuencia la importancia que tiene la deformación en dicha distribución.

Podemos observar que la distribución de las excitaciones está más distribuida sobre los estados de la base en el núcleo de  $^{20}\text{Ne}$  en comparación con el núcleo de  $^{24}\text{Mg}$ . Como veremos más adelante, en comparación relativa con los núcleos pesados, esta distribución resulta ser directamente proporcional a la deformación como se espera, ya que mientras más deformado esté un núcleo, las "distancias" entre niveles de capas muy separadas para deformación cero pueden llegar a cruzarse, o estar relativamente cercanas a deformaciones grandes.

En el modelo de Nilsson, la deformación del núcleo es una de las condiciones iniciales. Es decir, en este modelo puede entenderse que los nucleones se mueven libremente en un potencial deformado. En el modelo simpléctico, el término de interacción es el causante de la deformación. Si gráficas similares como [5.9-10] se hicieran con el modelo algebraico, seguramente se obtendrían distribuciones similares de las partículas en los estados de la base. Esto significaría que existe una similitud en los efectos de los términos de interacción de ambos modelos. De alguna manera, esta comparación puede lograrse al tener los números de ocupación obtenidos con el modelo algebraico, como se hace en el apéndice C.

La tabla [5.3] muestra la ocupación de protones para  $^{20}\text{Ne}$  y  $^{24}\text{Mg}$ .

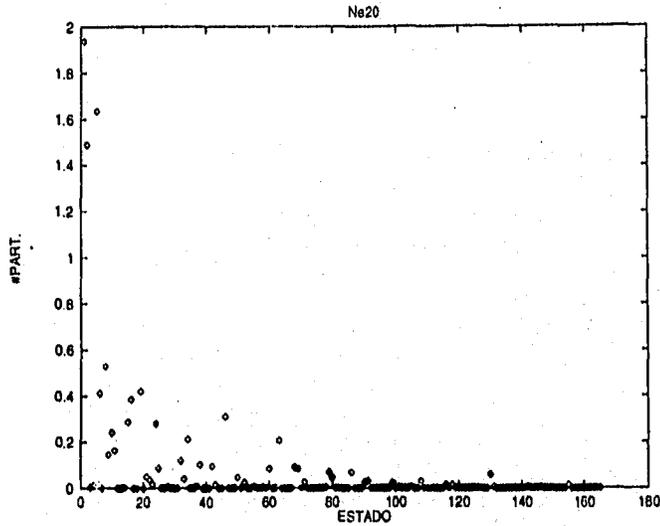


Figura 5.9: Probabilidad de que dos nucleones estén en el estado correspondiente de la base para  $^{20}\text{Ne}$ .

NUCLEO	N=0	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8
$^{20}\text{Ne}$	1.976	5.337	1.373	0.581	0.507	0.071	0.118	0.012	0.003
$^{24}\text{Mg}$	1.987	5.618	3.406	0.356	0.540	0.024	0.061	0.000	0.003

Tabla 5.3: Ocupación de protones para  $^{20}\text{Ne}$  y  $^{24}\text{Mg}$ .

### 5.3.2 Intensidades de excitación de bosones para los núcleos ligeros

A manera de ejemplo, para cálculos posteriores, hacemos el cómputo en detalle de los bosones excitados para el modelo de Nilsson y después para el modelo algebraico:

El número promedio de bosones en las ocho capas es (utilizando la Ec. [5.3])  $N = 13.013$  para  $^{20}\text{Ne}$ . Si a este número le restamos el número de bosones en la configuración en orden normal:

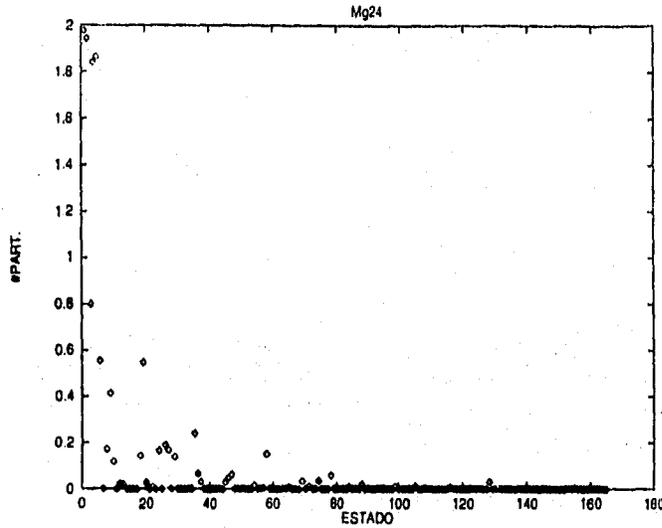


Figura 5.10: Probabilidad de que dos nucleones estén en el estado correspondiente de la base para  $^{24}\text{Mg}$ .

$$N_0 = 2(0) + 6(1) + 2(2) = 10 \quad (5.7)$$

entonces tenemos que el número de bosones que han salido de la configuración original es  $\bar{N} - N_0 = 3.013$ . Ahora, hagamos lo propio para el modelo algebraico:

$$\bar{N} - N_0 = 1.39 \quad (5.8)$$

Al hacer lo mismo para el núcleo de  $^{24}\text{Mg}$  tenemos que en el modelo de Nilsson  $\bar{N} - N_0 = 2.181$  y para el modelo algebraico:  $\bar{N} - N_0 = 1.414$ . Podemos observar que el modelo de Nilsson excita más bosones que el modelo algebraico. Esto implicaría que la intensidad de la interacción en el modelo de Nilsson resulta mayor que la del otro modelo.

$\Delta N = 2$  representa la excitación entre capas que difieren por dos cuantos de oscilación. Similarmente entendido para  $\Delta N = 4$ ,  $\Delta N = 6$ , etc.

Finalmente para completar este estudio de los núcleos ligeros, podemos ver que el momento cuadrupolar calculado por el modelo de Nilsson y experimental son del mismo orden. A saber, para Ne se tiene como teórico

Núcleo	Normal	Anormal
Dy66	30	36
Er68	30	38
U234	46	46
U236	44	48
U238	46	46

Tabla 5.4: Llenado con el programa.

y experimental 0.918 b y 0.585 b respectivamente, mientras que para Mg se tiene 0.92 b y 0.66b, también respectivamente, mostrando de que para núcleos ligeros, el modelo está trabajando de manera regular.

## 5.4 Núcleos pesados

En esta parte presentamos los resultados obtenidos para los núcleos:  $^{160}\text{Dy}$ ,  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$

### 5.4.1 Ocupaciones

Como se mencionó al inicio, para núcleos que tienen muchas partículas y que ocupan muchos niveles, resulta difícil realizar el conteo siguiendo las líneas en los diagramas de Nilsson correspondientes y debido a la mezcla de estados de la base que presenta cada estado físico a deformaciones grandes, por eso, se presenta en las tablas [5.3-4] los correspondientes cálculos hechos "a ojo" y con el programa. En el apéndice E se muestra el programa utilizado. Hemos aproximado los valores obtenidos por el programa al número par más cercano.

Como puede observarse, el cálculo realizado "a ojo" resulta muy similar al hecho con la computadora. La variación máxima resulta ser de dos nucleones para el núcleo de  $^{236}\text{U}$ . Esto quiere decir que por efectos de la interacción existe un cruce no contabilizado en el cálculo "a ojo". La similitud trae por consecuencia que los resultados obtenidos con el modelo pseudosimpléctico al utilizar los llenados "a ojo" sean correctos con respecto a esta posibilidad de error.

Núcleo	Normal	Anormal
Dy66	30	36
Er68	30	38
U234	46	46
U236	46	46
U238	46	46

Tabla 5.5: Llenado "a ojo".

Puede observarse que los llenados normales y anormales cambian de manera similar con la deformación, es decir, cuando existe un cruzamiento entre niveles normales y anormales, la gráfica en cuestión tiene un cambio abrupto de un tamaño correspondiente a dos nucleones, que significa que dos nucleones (o cuatro si se toman en cuenta neutrones) han pasado a ocupar un nivel diferente a normal o anormal, según sea su tipo inicial. En este tipo de gráfica, figuras [5.11-14], el complemento de la curva normal es la anormal.

Para el  $^{168}\text{Er}$  (Fig.[5.13]), observamos que para deformación cero se tienen 34 protones en niveles de paridad normal. Esto se mantiene hasta una deformación cercana a 0.1, donde tiene un cambio abrupto, quedando la cuenta en 32 protones de tipo normal. Esto implica un cruzamiento entre dos niveles con distinta paridad (normal y anormal). Después crece ligeramente, hasta volver a cambiar hasta cerca de 30 protones. Estos decrementos en las cuentas (en valores aproximados a dos) implican entonces que hasta la deformación señalada cuatro nucleones se han metido en dos niveles de tipo anormal. Pero más interesante resulta lo que sucede para la deformación entre  $0.2 < \beta < 0.4$  donde no se tiene ningún cruce, y sin embargo la cuenta del llenado anormal se incrementa en casi un nucleón. Esto es debido a la mezcla proveniente del término de interacción cuadrupolar, siendo precisamente esto, el tipo de cambios que no puede registrar el llenado visual sobre los diagramas de Nilsson. Por otra parte este cambio entre una deformación y otra, donde aparentemente no hubo ningún cruzamiento de niveles, puede resultar muy importante si pensamos que el factor de escalamiento, puede obtenerse en principio, con números fraccionarios. Es decir, en lugar de  $Z_n = 30$  para el núcleo en discusión podríamos hacer el cálculo con un número cercano a 31; esto cambia un poco las cosas, ya que  $A_n$  cambia también en la misma cantidad.

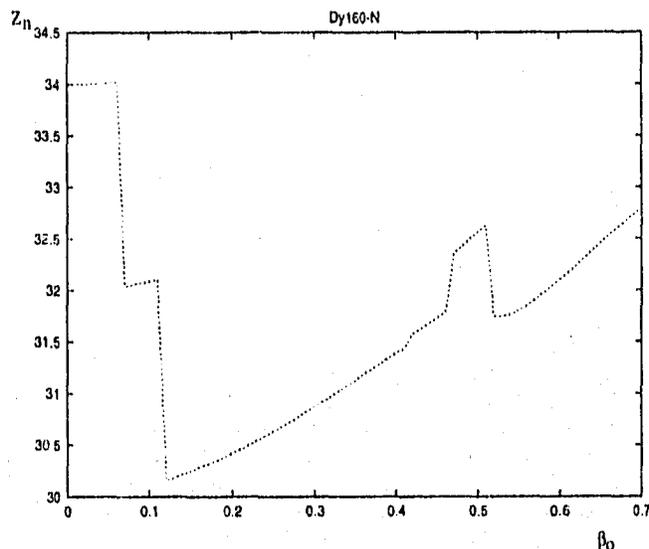


Figura 5.11: Comportamiento del llenado "normal" en función de la deformación para  $^{66}\text{Dy}$ .

Continuando con la descripción de la Fig.[5.13], al llegar a una deformación cercana a 0.4 existe otro cruzamiento de niveles, con la diferencia que en este caso dos nucleones se cambiaron de un nivel anormal a uno normal. Después suceden otros dos cambios complementarios y finalmente se vuelve a ver un incremento sin existir cruce debido a la interacción.

En la Fig.[5.14] tenemos el mismo tipo de figura para los núcleos de Uranio. Sólo presentamos una figura, pues por las características de estos isótopos, resulta representativa.

A diferencia con los núcleos anteriores, la región de interés (la zona de deformación entre 0.3 y 0.5), tiene varios cambios abruptos. Esto puede ser importante, porque implica que si no tenemos la deformación correcta, entonces los cálculos hechos con esta información pueden apartarse un poco de los valores esperados. Como veremos más adelante, esta ambigüedad en el llenado puede ser la causa de que el factor de escalamiento calculado con el modelo de Nilsson se aparte un poco del predicho si se toma un cambio de dos nucleones en el llenado. Continuando con la descripción de la Fig. [5.14], el llenado normal vuelve a crecer continuamente desde una deformación cercana a 0.35, hasta aproximadamente 0.55. En este caso, el

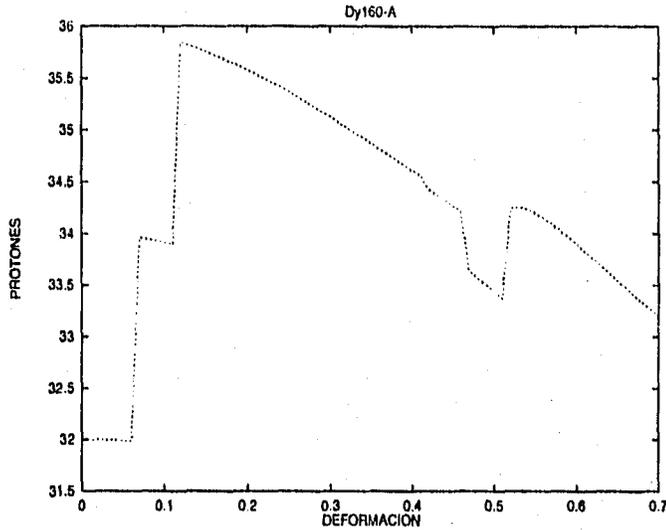


Figura 5.12: Comportamiento del llenado "anormal" en función de la deformación para  $^{66}\text{Dy}$ .

cambio también fue de aproximadamente un nucleón. Pero si revisamos la discusión de arriba para el núcleo de  $^{168}\text{Er}$ , el cambio en ese caso también fue aproximadamente de un nucleón, y además el intervalo de deformación, en el que el llenado crece continuamente es de aproximadamente  $\Delta\beta = 0.2$ . Si regresamos al caso del  $^{160}\text{Dy}$ , dicho intervalo es mayor, y el cambio continuo de nucleones (sin un cruce declarado de niveles de distinta paridad) es mayor,  $\Delta\beta \approx 0.35$ , y el incremento en el número de nucleones de aproximadamente 2. Este cambio en la cuenta de nucleones anormales es debido a la interacción de tipo cuadrupolar.

Entonces esto describe de manera concisa las diferencias que pueden existir en los métodos de llenado de nucleones a simple vista sobre los diagramas de Nilsson y el calculado utilizando los factores del desarrollo en la base esférica, siendo efecto de posibles divergencias en la comparación entre uno y otro modelos, ya que, en principio, los cálculos hechos en el modelo algebraico están basados sobre números de ocupación obtenidos sobre los diagramas de Nilsson a simple vista.

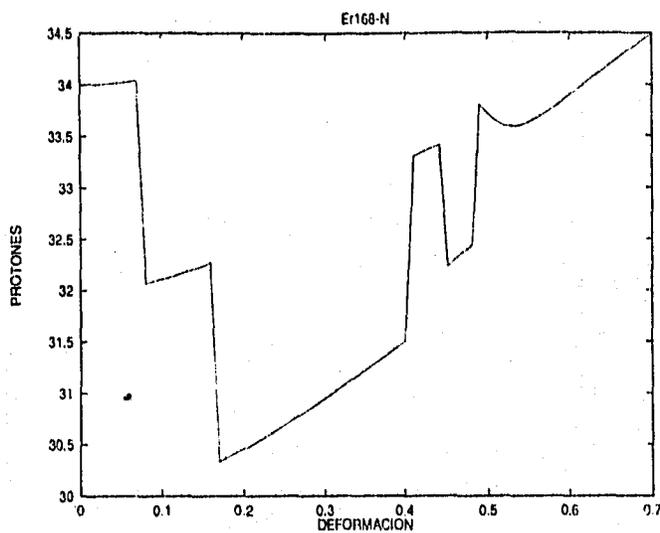


Figura 5.13: Comportamiento del llenado "normal" en función de la deformación para  $^{68}\text{Er}$ .

#### 5.4.2 Distribución de los números de ocupación

Como en el caso de los núcleos ligeros, obtenemos las figuras [5.15-17] correspondientes al número de partículas excitadas en cada estado de la base esférica. Como se puede apreciar en dichas figuras, a diferencia de los núcleos ligeros, existen muchos nucleones que permanecen sin ser excitados en los niveles más bajos.

Otra característica es que por encima de una partícula (en el eje de las ordenadas) se encuentran las contribuciones de los estados ocupados, mientras que por debajo del uno, se encuentran los estados que son excitados por los estados ocupados.

Si se comparan estas figuras con las de los núcleos ligeros, puede notarse que en proporción y de acuerdo a la distancia entre estados de la base que están ocupados y aquéllos que son excitados, es fácil pensar que la deformación relativa de los núcleos pesados es menor que la de los núcleos ligeros estudiados en este trabajo. Esto es con otras palabras: Cinco estados ocupados en la base, por parte del núcleo de  $^{20}\text{Ne}$  provoca una mayor

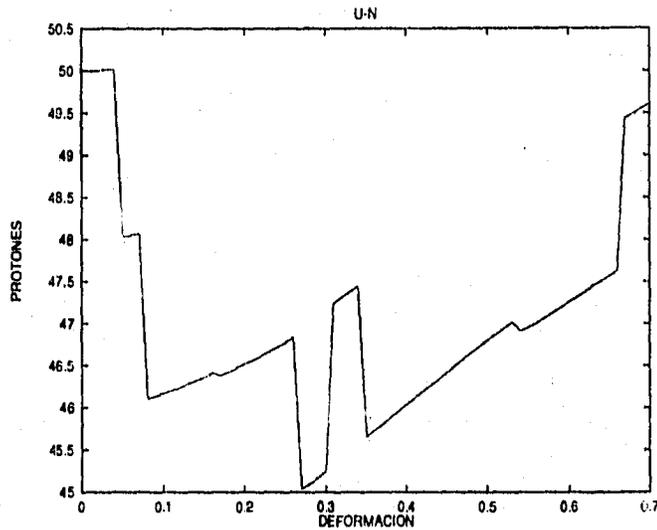


Figura 5.14: Comportamiento del llenado "normal" en función de la deformación para  $^{92}\text{U}$ .

distribución de ocupaciones (relativa) sobre los estados de la base, en comparación con los 33,34 y 46 estados ocupados en los núcleos pesados.

En el caso particular de  $^{160}\text{Dy}$ , Fig.[5.15], de los 66 protones, solamente 26 protones se quedan ocupando los estados de más baja energía. La ocupación en estos estados está por arriba del 95% de la ocupación total (la ocupación total por estado es de 2 protones) y los restantes niveles muestran características de desocupación, siempre arriba del 50%.

Al igual que en los núcleos ligeros, toda la distribución que está por debajo de 1 (número de protones, en el eje vertical) representa la excitación por el efecto de la interacción entre capas, siendo precisamente el faltante en los estados de más baja energía los que presentan desocupación.

Para el caso de  $^{238}\text{U}$ , Fig.[5.17], tenemos una distribución similar, siendo los rasgos más importantes, como punto de comparación, que el estado de la base que más se vacía, se desocupa en un 40%, siendo que para núcleos ligeros como  $^{20}\text{Ne}$  la máxima desocupación es de un 60%, es decir, se desocupa en más de un protón. Esto indica mucho acerca de la influencia de la intensidad del factor de interacción en la excitación de nucleones sobre

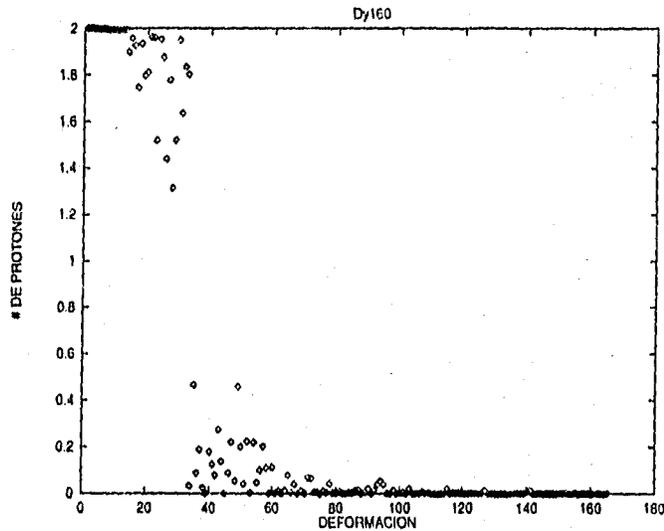


Figura 5.15: Probabilidad de que dos nucleones estén en el estado correspondiente de la base para  $^{160}\text{Dy}$ .

los estados de la base. Por consiguiente, resulta muy importante situar a cada núcleo en su deformación correcta, ya que en el modelo de Nilsson la interacción depende directamente de la deformación.

En lo anterior, hemos revisado, de manera visual, la proporción de nucleones que resultan excitados hacia estados de la base en capas superiores. Aunque por el momento no tenemos este tipo de información por parte del modelo algebraico, resulta instructivo conocer estos números obtenidos por el modelo de Nilsson, ya que de esta manera existe una conexión (por lo menos intuitiva) entre las ocupaciones en capas superiores y el número de bosones que son excitados hacia las mismas. También resultó importante, en términos del efecto que produce una alta o baja deformación. En la siguiente sección, hablaremos de la excitación de bosones.

### 5.4.3 Intensidades de excitación de bosones

En esta parte, calculamos el promedio de bosones que son excitados fuera de la distribución original  $N_0$ , utilizando la misma técnica mostrada en la sección para núcleos ligeros. Para ello utilizamos en el caso del modelo

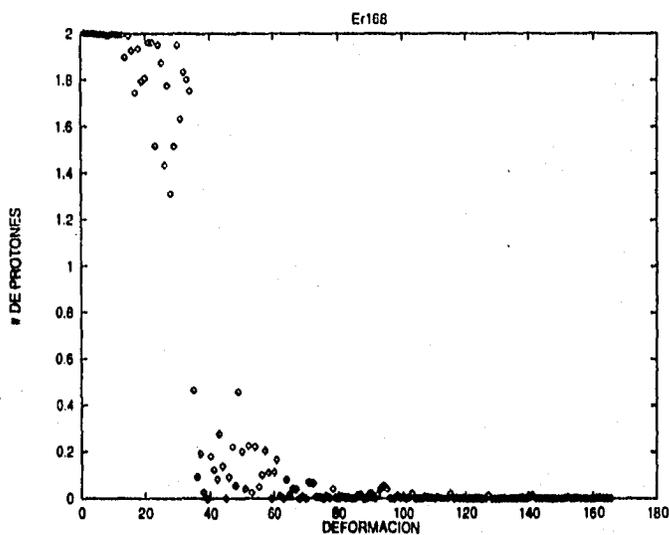


Figura 5.16: Probabilidad de que dos nucleones estén en el estado correspondiente de la base para  $^{168}\text{Er}$ .

de Nilsson los números de ocupación para cada núcleo en cuestión. Tales números se muestran en la tabla [5.6].

Es importante mencionar que los cálculos de los llenados en el modelo de Nilsson son efectuados en el espacio de nucleones de paridad normal, para ser consistentes con el modelo pseudo-simpléctico. Es decir, para los núcleos pesados que estudiamos en este trabajo, utilizamos el modelo pseudo-Nilsson. Por tanto, el número de protones en el pseudo-espacio puede variar en el caso del mismo isótopo. Puede apreciarse en la tabla[5.4]

NUCLEO	N=0	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7
$^{160}\text{Dy}$	2.000	5.983	11.726	9.578	0.234	0.431	0.004	0.011
$^{168}\text{Er}$	2.000	5.983	11.723	9.572	0.236	0.433	0.005	0.011
$^{234}\text{U}$	2.000	6.000	11.936	19.591	5.541	0.405	0.309	0.004
$^{236}\text{U}$	2.000	6.000	11.898	19.558	3.649	0.435	0.233	0.006
$^{238}\text{U}$	2.000	6.000	11.927	19.543	5.503	0.542	0.344	0.007

Tabla 5.6: Ocupación de protones para  $^{160}\text{Dy}$ ,  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$ .

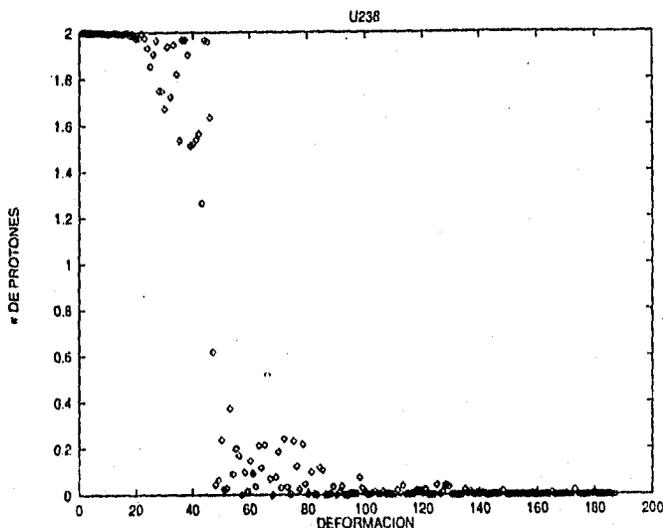


Figura 5.17: Probabilidad de que dos nucleones estén en el estado correspondiente de la base para  $^{238}\text{U}$ .

que mientras que los núcleos de  $^{234}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$  tienen 46 protones en el mencionado pseudoespacio, el núcleo de  $^{236}\text{U}$  tiene 44 protones, por eso la discrepancia en el número de ocupación de la capa  $N = 4$ . Esto trae como consecuencia algunas variaciones en el factor de escalamiento en el cálculo del momento cuadrupolar, como veremos en la sección correspondiente.

Los resultados del número promedio de excitación de bosones obtenidos, están resumidos en la tabla [5.8]. En ella se muestra, en la segunda columna, el número de bosones que hay en el núcleo con ocupación en orden normal. La tercera columna, es el número promedio de bosones excitados fuera de las capas por  $\Delta N = 1, 2, 3, \dots$ , en el modelo de Nilsson. La columna cuatro es lo mismo que la columna tres, pero en el caso del modelo algebraico. De esta tabla, podemos ver que por lo menos los números calculados tienen el mismo orden de magnitud. Lo que llama la atención en este caso, es que para los núcleos de Dy y Er, la diferencia es muy marcada, siendo mayor el número de bosones excitados utilizando el modelo de Nilsson.

Si volvemos a las figuras de distribución de números de ocupación [5.15-17], podemos ver que las distribuciones de excitación de partículas es muy similar. De hecho, se esperaría que el número de excitación de bosones fuera

NUCLEO	$\Delta N = 0$	$\Delta N = 1$	$\Delta N = 2$	$\Delta N = 3$	SUMA
$^{160}\text{Dy}$	67.2	23.1	6.7	0.7	97.7
$^{168}\text{Er}$	68.0	22.8	6.4	0.6	97.8
$^{234}\text{U}$	63.9	25.1	7.5	0.8	97.3
$^{236}\text{U}$	53.0	29.5	11.2	3.2	96.9
$^{238}\text{U}$	54.6	29.2	11.6	3.4	98.8

Tabla 5.7: Porcentajes de excitación de bosones del tipo  $\Delta N = 0, 1, 2, 3, 4$ , en el modelo algebraico.

NUCLEO	$N_0$	$N - N_0$ (Nilsson)	$N - N_0$ (algebraico)
$^{160}\text{Dy}$	60.000	1.50	0.548
$^{168}\text{Er}$	60.000	1.52	0.748
$^{234}\text{U}$	114.000	1.61	0.7
$^{236}\text{U}$	106.000	1.60	1.23
$^{238}\text{U}$	114.000	1.82	1.25

Tabla 5.8: Ocupación promedio de bosones para  $^{160}\text{Dy}$ ,  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$  en el modelo de Nilsson.

muy similar para los núcleos isótopos del Uranio: sin embargo, existe una marcada diferencia, entre el  $^{234}\text{U}$  y los siguientes. Esto quiere decir, que pueden existir algunas fuentes de error como la que proviene de un error en el conteo de la totalidad de bosones excitados por parte del modelo algebraico. Para revisar esto, veamos la tabla [5.7], donde aparecen los porcentajes de excitación (obtenidos en el modelo algebraico) y la suma de dichos porcentajes. Como se puede apreciar, la suma no es exactamente el 100%, por lo que se está subestimando el número de bosones que han sido excitados.

#### 5.4.4 El momento cuadrupolar y su reducción al espacio normal

Como se explicó anteriormente, la utilidad del modelo pseudo-simpléctico estriba en la posibilidad de reducir el espacio de Hilbert de los estados que intervienen en la dinámica del núcleo. Esto porque se plantea que la dinámica de los nucleones en orbitales normales es imitada por aquéllos en

orbitales anormales. En ese caso, basta saber cómo se comportan los nucleones en niveles normales para contabilizar su efecto y agregar un término que represente el efecto ya conocido de los nucleones en orbitales anormales. Por tanto, el número de estados de la base que intervienen directamente en la descripción del núcleo se ve reducido, si se saca de la cuenta a todos los estados de tipo anormal. Este efecto es sustituido por introducir en los resultados un factor de escalamiento. El modelo pseudosimpléctico ha trabajado exitosamente bajo esta suposición.

Otra comparación entre los dos modelos está planeada en el sentido de obtener dicho factor de escalamiento en el modelo de Nilsson y después compararlo con el utilizado por el modelo pseudo-simpléctico.

Para realizar el cálculo del factor de escalamiento, se calculó el momento cuadrupolar para los núcleos pesados y posteriormente el momento cuadrupolar del modelo de pseudo-Nilsson (el momento cuadrupolar de los nucleones en el espacio normal). La razón de estas dos cantidades es el factor de escalamiento buscado.

La manera geométrica de calcular este factor ya se ha discutido en el capítulo dos, y es la siguiente:

$$f_0 = \frac{ZA^{2/3}}{Z_n A_n^{2/3}} \quad (5.9)$$

donde el subíndice  $n$  indica el número y masa atómica en el espacio normal. Debemos mencionar nuevamente (ver capítulo tres) que para calcular el momento cuadrupolar en el modelo de pseudo-Nilsson debemos multiplicar al término de interacción cuadrupolar por un factor que toma en cuenta (como en el caso del modelo algebraico) el cambio en la magnitud de la interacción, por pasar del espacio normal al pseudo espacio (como se menciona al final del capítulo del modelo algebraico). Este efecto causa en el modelo de Nilsson el equivalente a hacer los cálculos para una deformación ligeramente mayor. El factor que se utiliza para los núcleos de  $^{160}\text{Dy}$  y  $^{168}\text{Er}$  es 1.2 (designaremos aquí a este factor). Para los isótopos de Uranio, 1.17 (ver tabla [5.9]).

Como podemos apreciar, éste es el valor en el espacio pseudo del parámetro de la interacción espín órbita, y es muy pequeño como predice el modelo para los núcleos pesados donde existe la simetría de pseudo-espín.

Para obtener el valor del momento cuadrupolar, aplicamos la Ec.[3.15]:

Los resultados del cálculo del momento cuadrupolar están resumidos en la tabla [5.10]<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Entendemos aquí, que  $Q_n$  y  $Q$  son el momento cuadrupolar en el pseudo espacio y

Región	$\mu$	$\kappa$	$\tilde{\kappa}$
T. raras	0.6	0.0637	0.01274
Actínidos	0.65	0.0577	0.01731

Tabla 5.9: Parámetros en el pseudo-Nilsson.

	$^{160}Dy$	$^{168}Er$	$^{234}U$	$^{236}U$	$^{238}U$
$Z_n$	30	30	46	44	46
$A_n$	76	82	124	122	122
$Q$	7.26	7.73	13.44	12.88	13.07
$Q_{exp}$	7.13	7.63	10.35	10.80	11.02
$Q_n$	2.27	2.34	3.93	3.11	3.83
$f_0$	3.51	3.54	3.15	3.17	3.19
$f$	3.19	3.30	3.41	4.13	3.41

Tabla 5.10: Cálculo del momento cuadrupolar en el espacio completo ( $Q$ , Nilsson normal), pseudo espacio ( $Q_n$  pseudo-Nilsson), comparado con el valor experimental, factores de escalamiento con el modelo geométrico y de Nilsson y  $Z$  y  $A$  en el espacio normal.

Como podemos ver de la tabla [5.10], los momentos cuadrupolares calculados con el modelo de Nilsson en el espacio completo son muy similares con los obtenidos experimentalmente en los núcleos de  $^{160}Dy$  y  $^{168}Er$ ; en cambio para los isótopos del Uranio, existen diferencias, siendo el cálculo mayor hasta en un 25%. De cualquier manera, en promedio si se toma en cuenta su aproximación a los núcleos de estudio, incluyendo los ligeros, el desempeño del modelo es bueno.

En dicha tabla,  $f_0$  y  $f$  son el factor de escalamiento obtenido por una fórmula geométrica y el obtenido por la modelo de Nilsson, respectivamente. Como se puede apreciar, el factor de escalamiento calculado con el modelo de Nilsson se mantiene relativamente cerca del geométrico, salvo en el caso de  $^{236}U$ , donde la diferencia es muy marcada. Pero esto puede explicarse en conjunción con algo ya explicado en el la sección [5.6.1] en donde se discuten las ocupaciones y su dependencia con la deformación. Como se puede apreciar, para  $^{236}U$  es evidente su diferencia con los otros dos isótopos, ya que tiene 44 protones en orbitales de paridad normal, en lugar de 46. Si vamos al cálculo del llenado hecho por el modelo de Nilsson, el número exacto es

normal, respectivamente, calculados con el modelo pseudo Nilsson y Nilsson normal

$\beta$	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6
$Z_n$	30	30	30	32	32	32	34	34	34
$A_n$	80	82	82	82	84	86	88	88	88
$Q$	5.99	7.06	8.15	9.27	10.45	13.13	15.15	16.51	17.72
$Q_n$	1.77	2.03	2.30	2.73	3.95	4.41	5.15	6.90	7.52
$f_0$	3.72	3.66	3.66	3.43	3.37	3.32	3.08	3.08	3.08
$f$	3.38	3.48	3.54	3.40	2.65	2.98	2.94	2.39	2.36

Tabla 5.11: Momento cuadrupolar dependiente de la deformación para  $^{168}\text{Er}$ . Cálculo hasta la capa ocho.

$Z_n = 44.981$ , pero como estamos tomando el número par más cercano, escogemos  $Z_n = 44$ . En cambio, para  $^{238}\text{U}$ , el número exacto es  $Z_n = 45.006$ , y por ser estrictos le asignamos  $Z_n = 46$ . Aunque el modelo de Nilsson dice que la diferencia es de  $\Delta Z_n = 0.025$ , nosotros establecemos una diferencia de dos protones. Si calculamos el factor de escalamiento para  $^{236}\text{U}$ , suponiendo que tiene  $Z_n = 46$ , obtenemos  $f = 3.45$  en un mayor acuerdo con el contexto establecido.

La consecuencia de la discusión anterior es que el factor de escalamiento depende bastante del llenado utilizado. Ésta es una de las razones por lo que, más adelante, decidimos hacer un sondeo del factor de escalamiento para una amplia zona de deformaciones para un núcleo en especial ( $^{238}\text{U}$ ), y ver cuál es su variación con respecto a la deformación.

#### 5.4.5 El factor de escalamiento vs. deformación

Por lo dicho en la subsección anterior, es necesario hacer un cálculo del factor de escalamiento para diferentes deformaciones. Escogemos a los núcleos de  $^{168}\text{Er}$  y  $^{238}\text{U}$ . Los resultados están expresados en las tablas [5.11-12].

En dichas tablas, la notación utilizada ya se ha explicado.

Como se puede apreciar, el factor de escalamiento en el modelo de Nilsson se mantiene relativamente cerca del factor de escalamiento (de origen geométrico) utilizado por el modelo (y ajustado) por el modelo pseudo-simpléctico. Existen zonas (en la deformación) donde la diferencia es mayor al promedio. En el caso de  $^{168}\text{Er}$  tabla[5.11], para  $\beta = 0.4$ , la diferencia es de 22 por ciento, siendo mínima para  $\beta = 0.35$ , con menos del uno por ciento.

Para el caso del  $^{238}\text{U}$  (tabla [5.12]) tabla [5.12], se obtienen resultados similares, donde ahora, la máxima diferencia está para  $\beta = 0.55$ . La pregunta obvia en este caso es porqué estamos tomando en la tabla (todo el

$\beta$	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6
$Z_n$	46	46	46	46	46	46	46	46	48
$A_n$	128	128	126	126	128	128	130	132	132
$Q$	8.70	10.32	13.03	16.41	17.96	19.47	22.52	24.64	25.98
$Q_n$	2.70	3.66	4.19	4.78	6.11	6.82	8.98	10.63	12.20
$f_0$	3.02	3.02	3.06	3.06	3.02	3.02	2.99	2.96	2.84
$\Gamma$	3.22	2.82	3.11	3.43	2.94	2.85	2.51	2.32	2.13

Tabla 5.12: Momento cuadrupolar dependiente de la deformación para  $^{238}\text{U}$ . Cálculo hasta la capa ocho.

rango de deformaciones para el llenado de 68 nucleones (como en el caso de  $^{168}\text{Er}$ ), siendo que deberíamos tomar los factores de escala para los núcleos a sus deformaciones experimentales. Pero el caso es que si la fórmula que expresa el factor de escala funciona realmente, debe funcionar aunque sea de manera aproximada para una región amplia de deformaciones. Esto trae consigo, que si existe este tipo de acuerdo, entonces se puede confiar en la efectividad de utilizar el factor de escalamiento (caso de  $^{238}\text{U}$ ).

Finalmente la figura [5.18] muestra las diferencias entre ambos factores de escalamiento a través de la deformación (cálculo hasta la capa 14).

En esta figura, se puede apreciar que no existe mucha diferencia entre un factor y otro, si consideramos que existen variaciones debido a los llenados utilizados, sobre todo en la región de 0.3 y 0.4 en la deformación. Podemos considerar que el modelo de Nilsson aproxima de buena forma el factor de escalamiento utilizando un modelo geométrico.

#### 5.4.6 Convergencia

Por otra parte, sabemos que el momento cuadrupolar es una cantidad muy sensible a cambios en la función de onda, de forma que es de esperarse que las cantidades especificadas en las tablas antes discutidas se modifique si se aumenta el espacio de la base esférica. Para el caso de Uranio, que es donde se esperaría un mayor cambio por ser el núcleo más pesado en este estudio, hicimos el cálculo hasta las capas 12 y 14. Estos datos se muestran en las tablas [5.13-14], respectivamente.

Como se muestra, en el caso de  $N^{max} = 12$  los cambios no son tan definitivos hasta una deformación de  $\beta = 0.3$ , pero más allá, a altas deformaciones, los cambios en el momento cuadrupolar son bastante apreciables, de forma que para  $\beta = 0.6$  el momento cuadrupolar total ha cambiado en

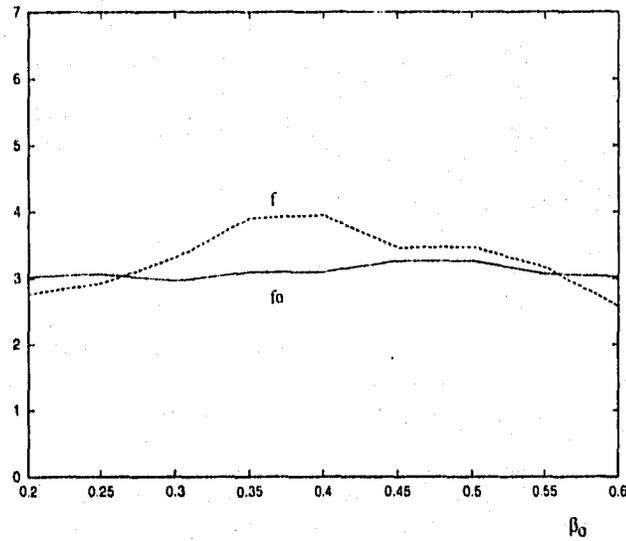


Figura 5.18: Factor de escalamiento geométrico ( $f_0$ ) y de Nilsson ( $f$ ) para U238

un 40 por ciento. Inclusive los llenados para la parte normal se han modificado ligeramente, debido a que al tomar un espacio mayor las energías se afectan, propiciando un cruzamiento de niveles de distinta paridad (normal y anormal) que antes no se había contabilizado. Como se puede apreciar, el factor "f" se ha modificado, y alguno de los factores " $f_0$ " para alguna deformación, y como podemos percatarnos, algunas diferencias entre "f" y " $f_0$ " se hacen más grandes, pero otras se hacen más pequeñas.

Ahora analicemos los resultados para  $N_{max} = 14$ . En ese caso, puede

$\beta$	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6
$Z_n$	46	46	48	46	46	46	44	46	48
$A_n$	128	126	124	124	126	124	124	126	128
Q	9.02	10.96	15.29	18.82	21.64	26.66	32.92	37.20	41.27
$Q_n$	3.27	3.75	4.62	4.85	5.55	8.03	9.98	12.66	17.78
$f_0$	3.02	3.06	2.96	3.09	3.06	3.09	3.23	3.06	2.96
f	2.76	2.92	3.29	3.88	3.9	3.32	3.3	2.93	2.31

Tabla 5.13: Momento cuadrupolar dependiente de la deformación para  $^{238}\text{U}$ . Cálculo hasta la capa doce.

$\beta$	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6
$Z_n$	46	46	48	46	46	44	44	46	46
$A_n$	128	126	124	124	124	122	122	126	128
$Q$	9.02	10.96	15.31	18.89	21.82	28.36	34.66	40.48	45.79
$Q_n$	3.27	3.75	4.62	4.85	5.52	8.20	9.98	12.83	17.79
$f_0$	3.02	3.06	2.96	3.09	3.09	3.26	3.26	3.06	3.02
$f$	2.76	2.92	3.31	3.9	3.95	3.46	3.47	3.16	2.57

Tabla 5.14: Momento cuadrupolar dependiente de la deformación para  $^{238}\text{U}$ . Cálculo hasta la capa catorce.

verse que los números para deformaciones pequeñas empiezan a presentar estabilidad, mientras que las cantidades a altas deformaciones empiezan a señalar que su crecimiento tiende a acotarse, y que la diferencia máxima presentada es del 20 por ciento. Ahora, éste es un error grande, si se piensa que este factor de escalamiento representa a los nucleones en niveles anormales que no se tomaron en cuenta en la dinámica, por suponerse que siguen a los nucleones en niveles normales de forma adiabática. En general si se promedian los errores, resultan ser más pequeños, permitiéndonos hablar de un acuerdo entre ambos factores de escalamiento.

Por otra parte, el factor de escalamiento, contra el cual se está comparando el del modelo de Nilsson, está hecho a partir de consideraciones de tipo geométrico, es decir, sin tomar en cuenta el cruzamiento de niveles que pudieran cambiar el llenado y de esa manera el factor de escalamiento tampoco incluye estos cruces.

Como se dijo anteriormente, el momento cuadrupolar es una cantidad muy sensible ante cambios en la función de onda, por tanto en la base esférica su convergencia se da hasta capas muy altas. Pero también debemos tomar en cuenta que los núcleos que estamos estudiando tienen deformaciones por debajo de  $\beta = 0.35$ , para los de tierras raras, y por debajo de  $\beta = 0.3$ , para los de la región actínida. Luego, como la región de rápida convergencia se da para bajas energías y pequeñas deformaciones, para hallar cálculos realistas de cantidades referentes a los núcleos que estudiamos, basta con quedarnos hasta la capa 12 ó 14.

Para el estudio referente al factor de escalamiento, donde estamos obteniendo números en una amplia zona de deformación, basta con vigilar el momento cuadrupolar total en el caso extremo, como lo sería el núcleo más pesado ( $^{238}\text{U}$ ) a deformación de 0.6 dentro de nuestro contexto de trabajo. Para ello, la Fig.[5.20] muestra el cambio en el momento cuadrupolar con

respecto al aumento del tamaño de la base, para el caso extremo mencionado. Puede apreciarse que para tener una convergencia aceptable en el cálculo del momento cuadrupolar total, es necesario diagonalizar el Hamiltoniano de Nilsson en la base que incluya mínimo hasta la capa  $N = 22$ . Dicho lo anterior, volvamos a la Fig.[5.19], para observar que el momento cuadrupolar de la parte normal crece lentamente hasta  $\beta = 0.4$ , mientras el momento cuadrupolar total crece más rápidamente. La razón de ello, es un problema de convergencia, ya que para calcular el momento cuadrupolar total, los nucleones de valencia ocupan una capa más que los nucleones de valencia en el espacio de paridad normal, y como ya se dijo, la zona de rápida convergencia se encuentra a bajas deformaciones y a bajas energías, por lo que la parte normal del momento cuadrupolar convergirá más rápido, notándose la diferencia en la gráfica.

Como se puede apreciar en la Fig[5.20], el momento cuadrupolar converge

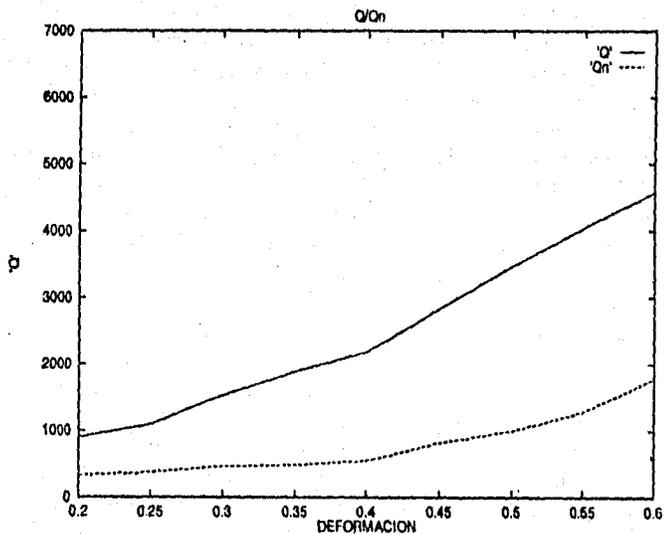


Figura 5.19: Momento cuadrupolar total y fracción normal, para  $^{238}\text{U}$ .

muy lentamente en esta base. Pero también puede observarse que para la región en los núcleos de interés, la convergencia es satisfactoria. Eso nos asegura que los momentos cuadrupolares, energías y transiciones deberán ser las correctas si son calculadas en este modelo.

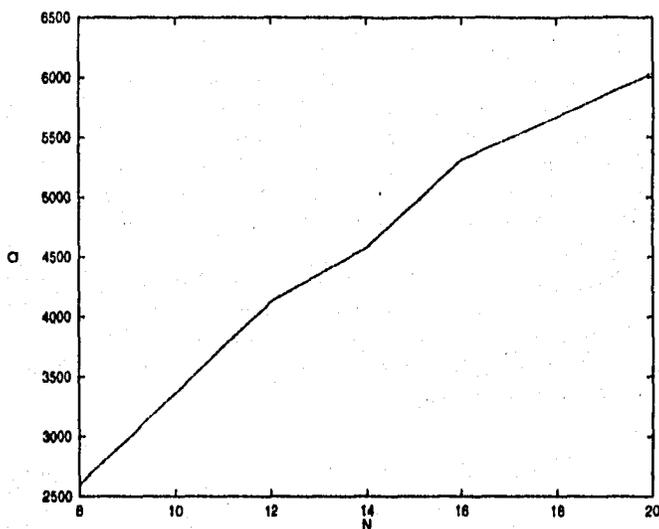


Figura 5.20: Momento cuadrupolar total vs. número de capa  $N$ , para  $^{238}\text{U}$  a  $\beta = 0.6$ .

## 5.5 Interacción y deformación

A manera de recapitulación y apoyo a las conclusiones, podemos decir lo siguiente:

La comparación de los resultados obtenidos con ambos modelos está centrada en el término de interacción. Ésto resulta evidente a nivel de los Hamiltonianos, ya que tienen como principio, el oscilador armónico esférico, más términos de interacción. Por una parte, el término rotacional del modelo algebraico no es tomado en cuenta para realizar la comparación con el modelo de Nilsson desde el sistema intrínseco. Entonces las diferencias entre ambos modelos solamente pueden provenir de las diferencias entre los valores esperados de los términos:

$$H'_N = -\beta r^2 Y_{20} + Cl \cdot s + Dl^2 \quad (5.10)$$

$$H'_A = -\frac{1}{2}\chi[Q^c \cdot Q^c - (Q^c \cdot Q^c)_{shell}] \quad (5.11)$$

donde faltaría una tilde sobre las  $Q$ 's, si se tratara del modelo pseudo-simpléctico.

Por una parte, los términos de interacción residual cuantificados por los parámetros C y D modifican el espectro producido por el oscilador armónico esférico para coincidir en "forma" con el espectro experimental. Esto quiere decir, reproducir números mágicos y propiedades electromagnéticas a deformación cero. Pero de igual manera, utilizamos los mismos términos para deformaciones diferentes de cero. Los parámetros están fijos para las diferentes regiones de la tabla periódica. Estos términos son independientes de la deformación.

Por otra parte, los términos de interacción residual son pequeños para núcleos ligeros y se vuelven importantes para núcleos pesados. Entonces ésto, conjuntado con la independencia de la deformación, nos permite pensar que a bajas deformaciones la comparación entre los dos modelos, Ecs.[5.10-11], puede situarse en términos de:

$$H'_N = -\beta r^2 Y_{20} + F \quad (5.12)$$

$$H'_A = -\frac{1}{2}\chi[Q^c \cdot Q^c - (Q^c \cdot Q^c)_{shell}] \quad (5.13)$$

siendo la cantidad F pequeña.

Pero qué pasa con esta comparación cuando vamos a los núcleos pesados donde las interacciones residuales se vuelven importantes? En ese caso, en las Ecs.[5.10-11] debemos tener la comparación de las interacciones del modelo pseudo-Nilsson y pseudo-simpléctico. Por consecuencia del mapeo pseudo las interacciones residuales en el modelo pseudo Nilsson, vuelven a ser pequeñas, permitiendo nuevamente contemplar que las diferencias entre ambos modelos provienen de las diferencias en los valores esperados de los términos de interacción [5.12-13] en el pseudo espacio.

Entonces, en el estudio de núcleos deformados, un buen acuerdo entre las cantidades predichas por los dos modelos significaría que los dos términos de interacción (Ecs.[5.12-13]) son equivalentes <sup>9</sup>. De esta manera, podemos reconocer las contrapartes de los términos importantes en las dos interacciones. Como señalamos en la introducción, la deformación puede entenderse como proporcional al valor promedio del momento cuadrupolar [Eis-87, Dra-92]. En ese caso, las interacciones a comparar adquieren una forma más sugestiva.

$$H'_N = -a_N \langle Q^c \rangle Q^c + F \quad (5.14)$$

$$H'_A = -\frac{1}{2}\chi[Q^c \cdot Q^c - (Q^c \cdot Q^c)_{shell}] \quad (5.15)$$

<sup>9</sup>En el límite no rotacional del modelo algebraico. Recuérdese, que tratamos con el modelo de Nilsson en el sistema intrínseco

Si a este nivel el modelo algebraico resulta equivalente al modelo de Nilsson, podríamos esperar que los resultados obtenidos con los dos modelos sean muy similares, o por lo menos proporcionales <sup>10</sup>. Dicho lo anterior, regresemos a los resultados que se han obtenido referentes a la comparación entre las dos interacciones:

Observamos, que para núcleos ligeros, existe un desacuerdo considerable en la cantidad promedio de bosones excitados, lo cual trae como consecuencia pensar que el término de interacción en el modelo de Nilsson es mayor, pero si vamos a los núcleos pesados podemos observar que las diferencias se han reducido, pero sigue siendo mayor la acción del término de interacción del modelo de Nilsson. También podemos observar en el apéndice C, que las ocupaciones de nucleones implican la misma diferencia entre las dos interacciones. Pensamos que las diferencias en las ocupaciones podían provenir del hecho de que el cálculo hecho con el modelo algebraico contemplaba sólo hasta la capa cuatro. Entonces hicimos el mismo cálculo con el modelo de Nilsson hasta la capa cuatro, para saber si la diferencia provenía de ese hecho. Al final, aunque se arreglaron las cosas un poco, concluimos que la interacción en el modelo de Nilsson es más intensa, siendo la diferencia mayor para los núcleos ligeros.

Por otra parte, ya que la comparación es a nivel del valor esperado de las interacciones, podemos pensar que una de las dos trabaja bien y ajustar la otra de forma que se encuentre un acuerdo con respecto a los datos experimentales. Es necesario mencionar que el modelo simpléctico tiene ajustados sus parámetros para reproducir el momento cuadrupolar, pero también debemos mencionar que el modelo de Nilsson sobrevalúa el momento cuadrupolar (ver sección de núcleos ligeros). Si queremos ajustar el momento cuadrupolar (por consecuencia las transiciones B(E2)) en el modelo de Nilsson, según las Ecs. [5.12-13] el único parámetro que podemos mover un poco sin salirnos de la filosofía del modelo es la deformación. Sabemos que el momento cuadrupolar es proporcional a la deformación. La pregunta es: cuál es la deformación en el modelo de Nilsson que reproduce las transiciones B(E2) para cada núcleo. Una vez calculada la deformación que cumple con los requerimientos, podemos volver a hacer una nueva comparación entre los dos modelos. Tomemos nuevamente el caso de <sup>20</sup>Ne. Según la ec.[1.38], el momento cuadrupolar está fijado por el valor experimental de B(E2), por consiguiente, también la deformación. Pero olvidemos eso por un momento, y calculemos algunos números con una deformación menor. Digamos 0.5. La tabla [5.15] muestra la comparación de las ocupaciones calculadas por los dos modelos para el núcleo de <sup>20</sup>Ne.

<sup>10</sup> A menudo se encuentra que dos modelos, o experimento y modelo, no son proporcionales, en el sentido de que en una región de comparación las cantidades medidas son semejantes y en otra no.

CAPA	$^{20}\text{Ne}$ (Nilsson)	$^{20}\text{Ne}$ (simplético)
0	1.987	1.961
1	5.644	5.701
2	1.655	1.951
3	0.333	0.299
4	0.316	0.088
5	0.021	-
6	0.038	-
7	0.001	-
8	0.004	-

Tabla 5.15: Números de ocupación en el modelo de Nilsson y simplético para  $^{20}\text{Ne}$  A deformación supuesta de  $\beta = 0.5$ , donde las interacciones se tomaron hasta la capa 14.

Como se aprecia en la tabla [5.15] comparada con la tabla [C3] del apéndice C, podemos observar que ahora existe un mayor acuerdo entre los números de ocupación. Los niveles de abajo de la capa de valencia, han retenido un mayor porcentaje de nucleones. Podemos pensar que la interacción adjudicada por el modelo de Nilsson a este núcleo ha disminuído.

Por otra parte, el número de bosones promedio que son excitados es de 1.59 (en lugar de 3.013) en mayor concordancia con los 1.39 excitados en el modelo algebraico. Finalmente, el momento cuadrupolar calculado con esta deformación (en el modelo de Nilsson) es de 0.662b (en lugar de 0.918b) en mayor acuerdo con 0.585. Al parecer, disminuyendo un poco más la deformación podemos encontrar un mejor acuerdo.

Nos preguntamos si existe forma de disminuir aún más la deformación, sin entrar en contradicción con la ecuación [1.38]. Hemos visto que pudimos disminuir la deformación introduciendo una corrección debido a la interacción rotación-vibración del modelo colectivo, como se mostró en la tabla [1.1]. En el apéndice D, mostramos que tomando términos de segundo orden en la expresión del momento cuadrupolar colectivo y tomando en cuenta la interacción rotación-vibración, la deformación no puede ser llevada tan abajo como aquélla que da origen a la tabla [5.15].

Ante éso, es necesario resumir las posibilidades para llegar a una conclusión: 1) Los modelos microscópicos que comparamos en este trabajo no pueden reproducir las deformaciones aceptadas como correctas en la literatura. Queremos decir que están desajustadas para núcleos ligeros en un 25 por ciento.

2) Las deformaciones (sobre todo para núcleos ligeros) reportadas en la literatura están sobrevaluadas.

De acuerdo a los datos obtenidos, la primera opción sería la indicada; pero hay algunas cosas que debemos poner de manifiesto:

a) Dos modelos con diferentes filosofías, como los es el modelo de Nilsson y el modelo algebraico, acuerdan en la predicción de algunas cantidades como número promedio de bosones excitados, números de ocupación (para núcleos ligeros), momento cuadrupolar y transiciones B(E2)<sup>11</sup>. Esto a deformaciones (deformaciones de Nilsson) por debajo de la reportadas.

b) En el modelo de Nilsson, el término de interacción entre capas resulta importante, de manera que su contribución al momento cuadrupolar es considerable. Poniendo el caso de  $^{20}\text{Ne}$ , calculamos que quitando dicho término el momento cuadrupolar obtenido es:  $Q = 0.21b$ , mientras que al tomar en cuenta la interacción obtenemos  $Q = 0.91b$ , siendo el experimental de  $Q = 0.57b$ , para una deformación obtenida con el modelo colectivo (ver apéndice D).

Teniendo en cuenta los dos puntos señalados arriba, y que también las discrepancias entre los momentos cuadrupolares calculados por el modelo de Nilsson y el modelo colectivo para núcleos ligeros, puede ser una indicación de que las fórmulas colectivas creadas para núcleos con una gran cantidad de nucleones fallen un poco en la descripción de núcleos con pocos componentes<sup>12</sup>, podemos pensar que puede ser válido obtener una deformación desde el modelo de Nilsson.

En ese caso, como ejemplo, las deformaciones predichas por el modelo de Nilsson para  $^{20}\text{Ne}$  y  $^{238}\text{U}$  son de  $\beta = 0.17$  y  $\beta = 0.245$ , respectivamente (ver tabla [5.16]).

Por otra parte, experimentos de dispersión de electrones han puesto en evidencia que la interacción de tipo hexadecupolar es necesaria para describir la forma del núcleo de  $^{20}\text{Ne}$  [Hor-72]. Por lo mismo, para llevar a cabo una mejor comparación desde el marco teórico del modelo de Nilsson debemos tomar en cuenta dicho término.

$$H_{sp} = \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 [r^2 - 2\beta r^2 Y_{20} - 8 \frac{\delta_4}{b^2} r^4 Y_{40}] + C1 \cdot s + D1^2 \quad (5.16)$$

Y. Horikawa [Hor-72] muestra que los factores de forma de las transiciones ( $0^+ \rightarrow 2^+$ ) y ( $0^+ \rightarrow 4^+$ ) no pueden ser ajustados simultáneamente al ex-

<sup>11</sup>Ver [Ca-89] y [ThD-94] con respecto a transiciones y momentos cuadrupolares.

<sup>12</sup>En cambio, para núcleos más pesados, que es donde el microscópico y colectivo coinciden más, las diferencias no son grandes.

CAPA	$^{20}\text{Ne}$ (Nilsson)	$^{20}\text{Ne}$ (simplético)
0	1.989	1.961
1	5.704	5.701
2	1.714	1.951
3	0.280	0.299
4	0.268	0.088
5	0.014	-
6	0.026	-
7	0.001	-
8	0.002	-

Tabla 5.16: Números de ocupación en el modelo de Nilsson y simplético para  $^{20}\text{Ne}$  A deformación supuesta de  $\beta = 0.47$ , donde las interacciones se tomaron hasta la capa 14.

perimento. Es decir, el valor  $\beta = 0.4$ , el cual ajusta el factor de forma de ( $0^+ \rightarrow 2^+$ ) no puede reproducir la transición ( $0^+ \rightarrow 4^+$ ). Esto indica la necesidad de introducir el término de tipo hexadecapolar. En el mismo trabajo se determina el ajuste simultáneo de ambas transiciones determinando el valor adecuado del par  $(\beta, \delta_4)$ . Específicamente para  $^{20}\text{Ne}$ :  $\beta = 0.35$  y  $\delta_4 = 0.01$ . Con respecto a esta evidencia podemos decir varias cosas:

i) La deformación que proponemos (para  $^{20}\text{Ne}$ ,  $\beta = 0.47$ ) al ajustar los números obtenidos en ambos modelos acuerda con la reportada por Horikawa utilizando dispersión de electrones, sin tomar en cuenta el término hexadecapolar.

ii) Es necesaria la introducción del término hexadecapolar para llegar a un buen acuerdo con los datos experimentales. En la comparación que hemos realizado entre los dos modelos microscópicos, no hemos determinado bien cuál es la influencia de omitir el término hexadecapolar en el modelo de Nilsson. Ya que dicho término tiene el mismo signo que la interacción cuadrupolar, su introducción puede llevar la deformación  $\beta$  a un valor todavía menor.

Para concluir esta sección podemos decir que tenemos varias evidencias para pensar que el modelo de Nilsson y el modelo algebraico (en el límite convenido) son muy similares en su comportamiento. La naturaleza de esta similitud puede expresarse en términos de las Ecs. [5.14-15]. Dichas evidencias son las siguientes:

- A) Ajuste de momento cuadrupolar y por tanto de transiciones B(E2).
- B) Números comparables en la excitación promedio de bosones.

C) Números comparables en la ocupación por capas en núcleos ligeros.

D) Acuerdo en el comportamiento dinámico de protones en orbitales de tipo anormal, para núcleos pesados.

Aunque el factor de escalamiento se trató a lo largo de este trabajo como una prueba independiente en el modelo de Nilsson, para justificar su utilización como argumento geométrico de las contribuciones al momento cuadrupolar por parte de los protones clasificados como normales y anormales, realmente es una prueba más de que el modelo pseudo-simpléctico y el modelo de pseudo-*Nilsson* son similares. Es decir: Si en el modelo algebraico se puede tomar en cuenta la contribución al momento cuadrupolar de un subgrupo de protones a través de un factor, y si ese mismo truco se puede hacer en el modelo de Nilsson, quiere decir entonces que la dinámica de ese subgrupo de protones está bien interpretada en ambos modelos al funcionar con el mismo factor. Como se vio en el capítulo 2, el factor de escalamiento tiene que ver con los orbitales de paridad anormal, aquéllos que en el mapeo pseudo son olvidados de la dinámica utilizando el concepto de simetría de pseudo-espín. De esa manera, al reducir el espacio de nucleones, lo que hacemos es regresar a trabajar con núcleos más ligeros, región de la tabla donde el modelo algebraico trabaja bien. Entonces si el modelo simpléctico trabaja bien con los núcleos ligeros, el modelo pseudo-simpléctico también lo hará con los núcleos pesados, siempre y cuando el factor de escalamiento sea un buen número para reproducir los momentos cuadrupolares en dicho modelo. Por consecuencia si el modelo de Nilsson reproduce el concepto geométrico del factor de escalamiento y el modelo pseudo-simpléctico trabaja bien con él, entonces ambos modelos tienen que ver con los mismos órdenes de interacción. Entiéndase los mismos valores esperados de sus términos de interacción, Ecs. [5.14-15].



## Capítulo 6

# Conclusiones

Generalmente un mismo problema puede resolverse de varias maneras. También los métodos utilizados difieren en complejidad y filosofías. Pero casi siempre por muchos caminos se llega a algo en común. Una de las tareas a seguir antes de iniciar este trabajo, era precisamente comparar la aplicación de dos modelos que poseen diferentes herramientas de trabajo, pero una filosofía similar. Por un lado el modelo algebraico del núcleo que basa su técnica en la búsqueda de simetrías que simplifiquen el estudio del núcleo. Por otro lado, el modelo de Nilsson que basa su alcance en técnicas más ortodoxas y que en su momento fue una de las mejores opciones en la descripción del núcleo. Pero ambos utilizan la misma filosofía de entender al núcleo como un arreglo de capas.

Qué tanto se difieren los resultados obtenidos por ambos modelos, es una pregunta que al ser contestada puede arrojar mucho acerca del alcance de uno de los modelos en particular. Qué tanto se parecen puede servir para entender conceptos que estudiados en un solo modelo resultan oscuros.

La idea de este trabajo es comparar un modelo microscópico como el simpléctico y pseudo-simpléctico con otro modelo microscópico más clásico como lo es el modelo de Nilsson. Generalmente los modelos se comparan cuando intentan describir la misma física. En ocasiones sólo es posible la comparación numérica de sus resultados, cuando sus filosofías no pueden describirse una a la otra. Pero también se tiene el caso de comparar dos modelos que ocupan básicamente la misma filosofía (como lo es utilizar un potencial promedio de tipo oscilador armónico), pero que sus técnicas son un tanto diferentes.

Con este trabajo, intentamos dar una interpretación del estado base del núcleo en el modelo simpléctico y pseudo-simpléctico en términos del modelo de Nilsson. En estos dos modelos puede calcularse utilizando el estado

base como referencia, ya que el modelo algebraico puede describir estados excitados de manera fácil que el modelo de Nilsson no puede describir. El estado correspondiente de comparación en el modelo algebraico será el de la irrep cuyo operador de Casimir de segundo orden sea el más grande.

Hemos notado que el modelo de Nilsson tiene ciertas limitaciones cuando vamos a deformaciones grandes. Por un lado como lo indican las gráficas de las expansiones de los estados físicos en la base esférica, nos muestra que no podemos decir mucho acerca de la clasificación de los niveles de los diagramas de Nilsson a deformaciones grandes. Eso trae como advertencia que los mejores resultados en principio serían obtenidos para deformaciones pequeñas. Pero aparte de querer obtener una clasificación de los niveles, el modelo también funciona para obtener cantidades con sentido físico como momento cuadrupolar, transiciones, llenados, etc. Pero esa también resulta ser una limitante para todos los modelos (en medida diferente) que utilizan la base esférica. También existe una limitante de carácter físico, ya que salvo ciertas excepciones la mayoría de los núcleos se hallan a deformaciones que de acuerdo a las utilizadas en este estudio son regulares.

Resulta interesante observar el efecto de los cruzamientos del tipo Landau-Zener, que preservan (fuera de la zona de interacción) la simetría de pseudospín. Es importante mencionar que este efecto se acrecenta cuando en la base interviene un mayor número de capas, por tanto, los diagramas de energía y composición en la base esférica se verán muy diferentes al tomar una base suficientemente grande (aproximadamente  $N > 12$ ).

En otro asunto correspondiente al modelo de Nilsson, debimos modificar las deformaciones reportadas en la literatura [Ram-87], para considerar los efectos debido al acoplamiento rotación-vibración del núcleo. En el caso extremo, dicha corrección alcanza un veinte por ciento de la deformación sin corrección; tal es el caso del  $^{20}\text{Ne}$ .

Con respecto a las intensidades de excitación de tipo bosónico calculadas, podemos notar discrepancias. Para los núcleos ligeros, encontramos que la cantidad de bosones que son excitados a partir de la configuración original en el modelo de Nilsson es marcadamente más grande que los obtenidos con el modelo algebraico. Para los núcleos pesados, las diferencias obtenidas son menores. Observando los números obtenidos por el modelo de Nilsson podemos darnos cuenta que el patrón seguido por este modelo parece ser el correcto ya que cumple con lo esperado. El número de bosones excitados es mayor para los núcleos ligeros que poseen una mayor deformación y por lo tanto, una mayor intensidad en la interacción de tipo cuadrupolar.

Por otro lado, la comparación de las excitaciones (promedio) de partículas en ambos modelos resulta ser satisfactoria para los núcleos ligeros, uti-

lizando los números obtenidos por Hirsch [11-95]. Decimos excitaciones promedio porque basamos la comparación en los números de ocupación de cada capa, y pensamos que en promedio el número de partículas que han salido de la configuración original serán las mismas en ambos modelos, si los números de ocupación por capa son los mismos. Ésto resulta ser muy importante, porque es una muestra de que por lo menos en los núcleos ligeros (y seguramente también para los pesados) los términos de interacción en ambos modelos son comparables. En esta comparación, existen algunas desviaciones que provienen de que el cálculo hecho por Hirsch se limita a las primeras cinco capas, mientras que en los correspondientes al modelo de Nilsson, se tomó hasta la capa catorce. Esto trae consigo que los nucleones de valencia para el cálculo con Nilsson tenderán a "distribuirse" más en las capas superiores por efecto de la interacción. Por eso en la comparación obtenida, los nucleones de la capa de valencia son los más dispares. También podemos observar que hay más pérdida en los nucleones de la capa cero en el modelo algebraico que en el modelo de Nilsson. De cualquier manera, la comparación resulta satisfactoria si se piensa que se trata de modelos muy diferentes en su formalismo. Por la misma razón ésto nos hace pensar que si la cantidad de partículas excitadas (en promedio) es aproximadamente igual en ambos modelos, también lo debería ser el número promedio de bosones.

Por otra parte, se tiene el cálculo del momento cuadrupolar y del factor de escalamiento. Como se ha evidenciado, el factor de escalamiento obtenido a través de un método geométrico no es muy lejano del obtenido con el modelo de Nilsson. Éso indica que la dinámica de los nucleones en los orbitales de tipo anormal puede sustituirse en la cuenta por un factor conocido de antemano.

El modelo de Nilsson aproxima este factor con un error máximo del veinte por ciento. Eso querría decir que no se conoce la dinámica de los nucleones en niveles anormales en un veinte por ciento. O para decirlo de otra manera: De cada cinco nucleones en orbitales anormales, uno no sigue la dinámica de aquéllos en niveles normales de forma adiabática. Pero bajo las condiciones expuestas con anterioridad, ese porcentaje puede quedar escondido en la diferencia de obtención de ambos factores de escalamiento, porque como ya se dijo, la manera geométrica de obtenerlo no contempla los cruces de niveles que trae como consecuencia una diferencia en el conteo de nucleones en orbitales normales y anormales. Entonces el factor puede funcionar perfectamente en una localidad de deformación, pero ya no en otra. En ese caso, la comparación debería hacerse sobre un promedio a través de la deformación, y que como se puede apreciar en los números obtenidos, definitivamente sería menor que el veinte por ciento. Es necesario mencionar que en aquellas regiones donde la discrepancia es mayor, coincide

con una posible ambigüedad en la selección de el número de protones en niveles de paridad normal; por ejemplo, para el núcleo de  $^{236}\text{U}$  el programa reporta un número de protones cercano a 45, a saber, 44.98. En las reglas seguidas para escoger el número de protones que entran en el conteo del momento cuadrupolar, buscamos el número par más cercano, que en este caso es 44. Haciendo de esa manera, obtenemos un factor de escalamiento de 4.13, cuando el geométrico indica 3.17. Pero si utilizamos el número 46, que también es cercano, obtenemos 3.45 como factor de escalamiento. Entonces sabemos que al acercarnos al llenado por números pares en ocasiones estamos descartando o adicionando la contribución al conteo de un protón. Eso no indica que debamos tomar números impares de nucleones en el programa de Nilsson, pero lo que debemos considerar, es que por efectos de la interacción que, como ya vimos, se reporta en la excitación de partículas a niveles superiores, en lugar de pensar que tenemos un nucleón extra o de menos, podemos pensar que realmente es la interacción entre estados lo que produce una modificación en el cálculo del momento cuadrupolar.

Por otra parte, se tiene el problema de la convergencia; como se mencionó, los cálculos de momento cuadrupolar tienen convergencia hasta capas muy altas,  $N = 22, 24$ , que para deformaciones grandes como  $\beta = 0.6$ , los cálculos sólo resultan aproximados si se toman capas inferiores a las mencionadas, y que para deformaciones altas, la descripción obtenida por el modelo de Nilsson sale de la realidad, eso explica por qué en la figura del momento cuadrupolar total y el momento cuadrupolar de la parte normal, para deformaciones altas (núcleos pesados) la falta de convergencia en el cálculo del momento cuadrupolar total, aleja mucho su valor del obtenido en el espacio de paridad normal.

Los cálculos de momento cuadrupolar están dentro de los márgenes de error permitido para el modelo de Nilsson y por consecuencia sus transiciones no se alejan mucho de las experimentales. En términos generales, podemos decir que en las pruebas de comparación ambos modelos describen de manera aproximada a los núcleos que decidimos estudiar. Si bien existen algunas discrepancias, es entendible por el alcance que tiene cada modelo. Por ejemplo, el modelo algebraico está construido para obtener resultados teniendo como sistema de referencia al de laboratorio. En cambio, en el modelo de Nilsson los números obtenidos son desde el sistema intrínseco. De cualquier manera esto no impide llevar a cabo una comparación; teniendo en cuenta que si los números al compararse reportan discrepancias, las características e interpretaciones deben ser las mismas para los dos modelos.

Con respecto a la discusión establecida en el trabajo de K.H. Bhatti et al., mencionamos algunos párrafos arriba que existe una discrepancia de hasta un 20% del factor de escalamiento obtenido con Nilsson y el geométrico, pero esto es cuando se toma un amplio intervalo de deformaciones. En di-

cho caso, fue un "experimento" para saber el comportamiento del factor de escalamiento con respecto a la deformación. Pero si somos estrictos, debemos volver a la tabla [5.10] donde tenemos el factor de escalamiento para los núcleos estudiados, con las deformaciones experimentales. En ese caso, con excepción del núcleo de  $^{236}\text{U}$  (cuya anomalía puede explicarse dentro de la discusión hecha en la sección [5.4]), las diferencias de ambos factores de escalamiento son menores que el 10%, por tanto, podemos considerar que bajo las condiciones del modelo de Nilsson, el factor de escalamiento está bien fundado.

Finalmente, hicimos un pequeño estudio acerca de la validez de la deformación obtenida con el modelo colectivo, y llegamos a la conclusión de que si bajamos la deformación en el modelo de Nilsson, de manera que podamos ajustar el momento cuadrupolar que nos lleve a las transiciones  $B(E2)$  experimentales, los dos modelos microscópicos estudiados concuerdan muy bien en las cantidades estudiadas. Esto nos indicó que tal vez sea válido definir una deformación en términos del modelo de Nilsson o del mismo modelo algebraico. Entonces la comparación del modelo de Nilsson con el modelo algebraico en términos la deformación de origen microscópico es excelente.



## Apéndice A

# Interacción entre capas en el término espín-órbita

Se muestra en este apéndice que la interacción entre capas no es cero por el hecho de hacer un cambio en las coordenadas en el Hamiltoniano del modelo de Nilsson.

La parte anisotrópica del Hamiltoniano puede escribirse como:

$$H_h = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_h \quad (\text{A.1})$$

donde

$$V_h = \frac{1}{2}M(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2) \quad (\text{A.2})$$

Si se introduce la transformación:

$$x_{t\kappa} = \left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x_\kappa \quad (\text{A.3})$$

el hamiltoniano puede reescribirse como:

$$H_h = \sum \frac{1}{2}\hbar\omega_\kappa \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_{t\kappa}^2} + x_{t\kappa}^2\right) \quad (\text{A.4})$$

Si se usan coordenadas esféricas definiendo:

$$\rho^2 = \sum x_{t\kappa}^2 \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla_{x_t}^2 = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_{t\kappa}^2} \quad (\text{A.6})$$

## 100 APÉNDICE A. INTERACCIÓN ENTRE CAPAS EN EL TÉRMINO ESPIN-ÓRBITA

El Hamiltoniano puede volver a reescribirse como:

$$H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega (-\nabla_{x_t}^2 + \rho^2) \quad (\text{A.7})$$

$$H_\epsilon = \frac{1}{2} \hbar \omega \sum \epsilon_\kappa \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_{t\kappa}^2} + x_{t\kappa}^2 \right) \quad (\text{A.8})$$

La  $\epsilon$  especifica la deformación y está como el parámetro  $\beta$  en el capítulo dos.

$H_\epsilon$  es la parte de interacción, dependiente de la deformación.

La ventaja de haber reescrito el Hamiltoniano en el sistema de coordenadas  $x_t$  reside en que la parte de interacción es diagonal [Ni-55].

Pero las interacciones de tipo orbital  $l \cdot l$  y  $l \cdot s$ , también deben reescribirse en las nuevas coordenadas:

$$l_t = -i \hbar x_t \times \nabla_{x_t} \quad (\text{A.9})$$

Ahora, para saber cuál es el efecto de esta transformación en el operador  $l = -i \hbar r \times \nabla$ , escribamos las componentes del momento angular en el nuevo espacio.

$$l_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{A.10})$$

$x, y, z$  están relacionadas con  $\xi, \eta, \zeta$  de la siguiente manera para un núcleo prolato:

$$\begin{aligned} x &= a\xi \\ y &= a\eta \\ z &= b\zeta \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde  $a = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_\perp}}$  y  $b = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_z}}$ , indicando  $\perp$  la oscilación perpendicular a  $z$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} l_z &= \xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \\ l_x &= \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_\perp}} \eta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \sqrt{\frac{\omega_\perp}{\omega_z}} \zeta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ l_y &= \sqrt{\frac{\omega_\perp}{\omega_z}} \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} - \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_\perp}} \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Por otra parte, se definen:

$$\begin{aligned} l_\xi &= \eta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ l_\eta &= \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ l_\zeta &= \xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Se escriben  $\xi, \eta, \zeta$  en términos de operadores de ascenso y descenso  $b^\dagger$  y  $b$  respectivamente.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\xi^\dagger + b_\xi) \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\eta^\dagger + b_\eta) \\ \zeta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\zeta^\dagger + b_\zeta) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Además:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(b_\xi^\dagger - b_\xi) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(b_\eta^\dagger - b_\eta) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(b_\zeta^\dagger - b_\zeta) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Si se calcula el conmutador  $[\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi]$  se ve que sigue la regla usual.

$$[\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi] = -\frac{1}{2}[b_\xi^\dagger - b_\xi, b_\xi^\dagger + b_\xi] = (-\frac{1}{2})(-1 - 1) = 1 \quad (\text{A.15})$$

Ahora, se calcula el término  $\zeta \frac{\partial}{\partial \xi}$

$$\begin{aligned} \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} &= (-\frac{1}{2})(b_\zeta^\dagger + b_\zeta)(b_\xi^\dagger - b_\xi) = \\ &= -\frac{1}{2}(b_\zeta^\dagger b_\xi^\dagger - b_\zeta^\dagger b_\xi + b_\zeta b_\xi^\dagger - b_\zeta b_\xi) = \\ &= -\frac{1}{2}\{(b_\xi^\dagger b_\zeta - b_\zeta^\dagger b_\xi) + (b_\zeta^\dagger b_\xi^\dagger - b_\zeta b_\xi)\} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

102 APÉNDICE A. INTERACCIÓN ENTRE CAPAS EN EL TÉRMINO ESPIN-ÓRBITA

Para  $\xi \frac{\partial}{\partial \zeta}$  se tiene de manera similar:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \{ -(b_\xi^\dagger b_\zeta - b_\zeta^\dagger b_\xi) + (b_\zeta^\dagger b_\xi^\dagger - b_\zeta b_\xi) \} \quad (\text{A.17})$$

Se construye ahora  $l_y$ :

$$\begin{aligned} l_y = & \sqrt{\frac{\omega_\perp}{\omega_z}} \left(-\frac{1}{2}\right) \{ (b_\xi^\dagger b_\zeta - b_\zeta^\dagger b_\xi) + (b_\zeta^\dagger b_\xi^\dagger - b_\zeta b_\xi) \} - \\ & - \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_\perp}} \left(-\frac{1}{2}\right) \{ -(b_\xi^\dagger b_\zeta - b_\zeta^\dagger b_\xi) + (b_\zeta^\dagger b_\xi^\dagger - b_\zeta b_\xi) \} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} l_y = & \left(-\frac{1}{2}\right) \left[ \sqrt{\frac{\omega_\perp}{\omega_z}} + \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_\perp}} \right] (b_\xi^\dagger b_\zeta - b_\zeta^\dagger b_\xi) - \\ & - \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \sqrt{\frac{\omega_\perp}{\omega_z}} - \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_\perp}} \right] (b_\zeta^\dagger b_\xi^\dagger - b_\zeta b_\xi) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Puede observarse que este operador tiene un término que conecta estados con dos cuantos de diferencia. Por lo mismo, no puede decirse que la transformación utilizada toma en cuenta automáticamente la interacción entre capas en su totalidad. De hecho este término subsiste en la base asintótica. Obviamente, la razón para no incluir este término en los desarrollos depende de su tamaño comparativo con las energías en la capa correspondiente, por lo que en general se desprecia.

Por otra parte, si  $\omega_\perp = \omega_z = \omega_0$  y renombrando:  $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$ :

$$l_y = -(b_x^\dagger b_x - b_x^\dagger b_x) = b_x^\dagger b_x - b_x^\dagger b_x \quad (\text{A.20})$$

Lo mismo puede hacerse para  $l_x$  y  $l_z$ . Como puede verse, se llega a la expresión original de  $l_y$ .

## Apéndice B

# Densidad de carga con el modelo de Nilsson

Cada estado físico puede expresarse en términos de la base esférica :

$$\Psi_{\alpha} = \sum_{Nlj\Omega} a_{\alpha}^{Nlj\Omega} \psi_{Nlj\Omega} \quad (\text{B.1})$$

Puede definirse la densidad de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{2}{4\pi} \int \sum_{\alpha} \langle \Psi_{\alpha} | \Psi_{\alpha} \rangle d\cos\theta d\phi \quad (\text{B.2})$$

El integrando puede escribirse como:

$$\langle \Psi_{\alpha} | \Psi_{\alpha} \rangle = \sum_{i,i'} a_{\alpha}^i a_{\alpha}^{i'} \langle \psi_i | \psi_{i'} \rangle \quad (\text{B.3})$$

donde:

$$i = Nlj\Omega \quad (\text{B.4})$$

siendo similar para el índice primado.

Esto puede reescribirse en términos de la parte radial y angular de las funciones  $\psi_{i'}$ :

$$\langle \psi_{\alpha} | \psi_{\alpha} \rangle = \sum_{i,i'} a_{\alpha}^i a_{\alpha}^{i'} R_{n_i} R_{n_{i'}} \sum_{m_i, m_{i'}} \sum_{m, m_i, m_{i'}} C^i C^{i'} Y_{l_i m_i} Y_{l_{i'} m_{i'}} \langle \chi_{\frac{1}{2} m_i} | \chi_{\frac{1}{2} m_{i'}} \rangle \quad (\text{B.5})$$

104A PÉNDICE B. DENSIDAD DE CARGA CON EL MODELO DE NILSSON

donde  $C'$  y  $C$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan que acoplan el momento angular orbital con el espín a momento angular total  $j$ :

$$C' C = (l' \frac{1}{2} j' | m_l' m_s' \Omega') (l \frac{1}{2} j | m_l m_s \Omega) \quad (B.6)$$

donde  $\Omega = m_l + m_s$  y de manera similar para  $\Omega' = m_l' + m_s'$

La parte de espín puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\langle \chi_{\frac{1}{2} m_s'} | \chi_{\frac{1}{2} m_s} \rangle = \langle \chi_{\frac{1}{2}, \Omega' - m_l'} | \chi_{\frac{1}{2}, \Omega - m_l} \rangle \quad (B.7)$$

que pone de manifiesto la condición sobre el resto.

$$\langle \chi_{\frac{1}{2}, \Omega' - m_l'} | \chi_{\frac{1}{2}, \Omega - m_l} \rangle = \delta_{\Omega' - m_l', \Omega - m_l} \quad (B.8)$$

y por tanto,  $\Omega = \Omega - m_l + m_l'$

Por otro lado sabemos que  $\Omega = \Omega'$ , para elementos de matriz diferentes de cero. Reescribiendo:

$$\int \langle \Psi_\alpha | \Psi_\alpha \rangle d\Omega = \sum_{i', i} a_{i'} a_i \sum_{m_l' m_l} (l' \frac{1}{2} j' | m_l' \Omega - m_l, \Omega - m_l + m_l') \times (l \frac{1}{2} j | m_l, \Omega - m_l, \Omega) R_{n'l'} R_{nl} \delta_{m_l', m_l} \quad (B.9)$$

$$= \sum_{i', i} a_{i'} a_i \sum_{m_l} (l' \frac{1}{2} j' | m_l, \Omega - m_l, \Omega) (l \frac{1}{2} j | m_l, \Omega - m_l, \Omega) R_{n'l} R_{nl} \quad (B.10)$$

Utilizando la relación de ortonormalidad de los CCG.

$$\int \langle \Psi_\alpha | \Psi_\alpha \rangle d\Omega = \sum_{n' n l j \Omega} a_\alpha^{n' l j \Omega} a_\alpha^{n l j \Omega} R_{n'l} R_{nl} \quad (B.11)$$

Entonces:

$$\rho = \frac{2}{4\pi} \sum_\alpha \sum_{n' n l j \Omega} a_\alpha^{n' l j \Omega} a_\alpha^{n l j \Omega} R_{n'l} R_{nl} \quad (B.12)$$

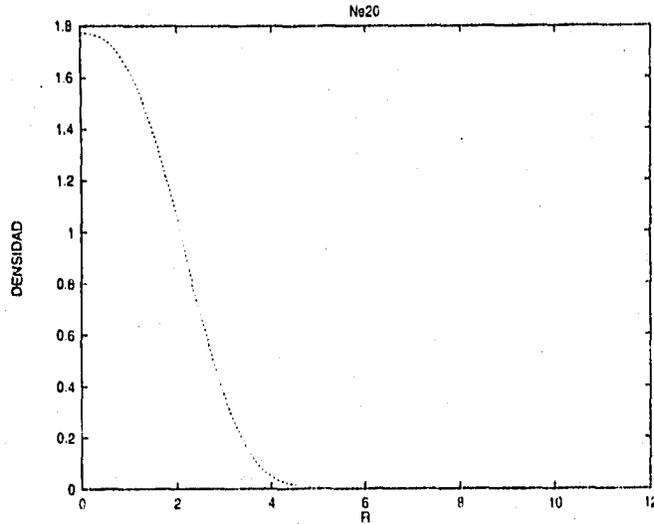


Figura B.1: Densidad ( $4\pi\rho$ ) de carga para  $^{20}\text{Ne}$ .

Utilizando esta expresión podemos graficar la densidad de carga en los núcleos de  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{160}\text{Dy}$ ,  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$ .

Como se aprecia en las figuras 1 y 2 de este apéndice, la extensión radial para los núcleos ligeros es aproximadamente igual para ambos, aunque la densidad es ligeramente mayor en el núcleo de  $^{20}\text{Ne}$ <sup>1</sup>.

En las figuras 3 y 4 notamos que las densidades son muy parecidas. Lo mismo sucede con los núcleos de Uranio. Es importante mencionar que la información obtenida de estas figuras constituye en principio la seguridad de que las funciones de onda obtenidas en la diagonalización del Hamiltoniano de Nilsson son bien comportadas (en los límites permitidos por la base), y que pueden describir de manera satisfactoria cantidades como la densidad de carga nuclear.

La importancia de conocer la extensión y densidad de la carga nuclear, es que pueden compararse y obtenerse algunos parámetros relacionados con cálculos de dispersión de electrones, tema que podríamos abordar posteriormente explotando las ventajas del modelo pseudo-simpléctico.

<sup>1</sup> Algunas distribuciones obtenidas pueden ser consultadas en [Hof-57] y [Lcv-72]

106 APÉNDICE B. DENSIDAD DE CARGA CON EL MODELO DE NILSSON

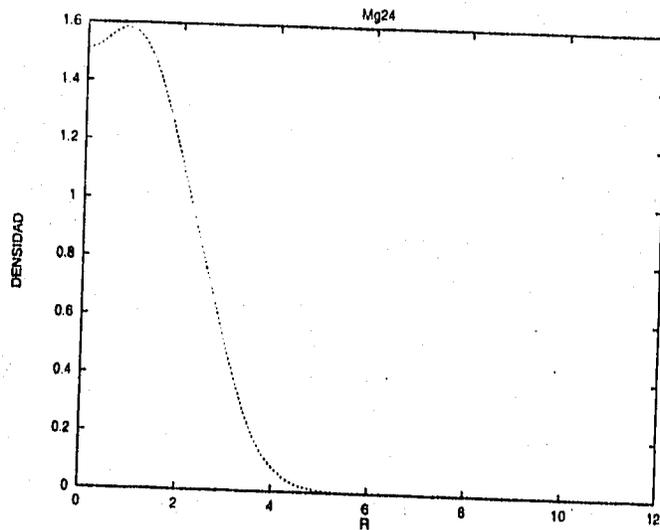


Figura B.2: Densidad ( $4\pi\rho$ ) de carga para  $^{24}\text{Mg}$ .

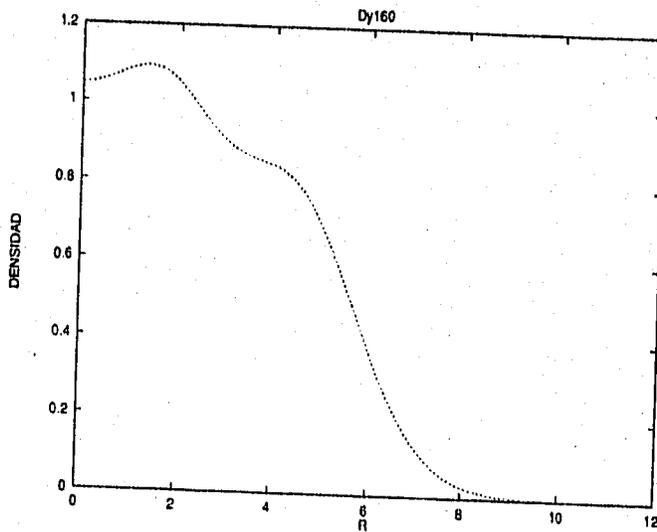
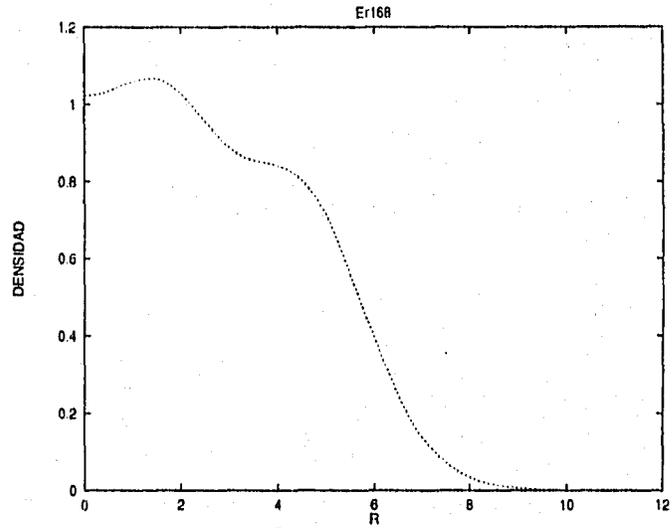
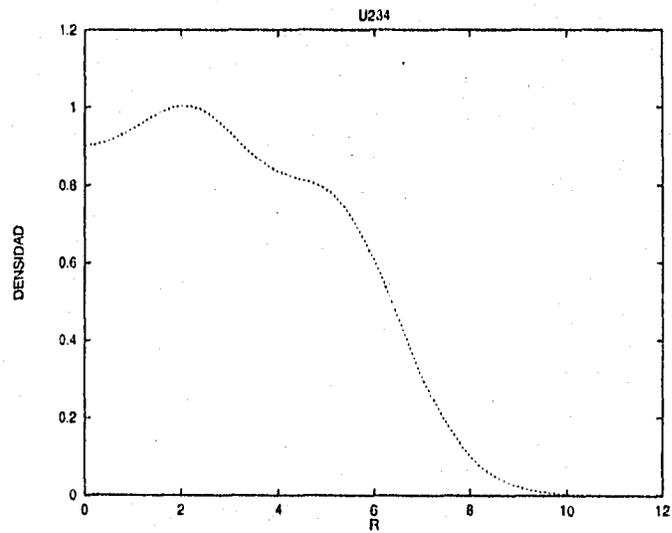


Figura B.3: Densidad ( $4\pi\rho$ ) de carga para  $^{160}\text{Dy}$ .

Figura B.4: Densidad ( $4\pi\rho$ ) de carga para  $^{168}\text{Er}$ .Figura B.5: Densidad de ( $4\pi\rho$ ) de carga para  $^{234}\text{U}$ .

108 APÉNDICE B. DENSIDAD DE CARGA CON EL MODELO DE NILSSON

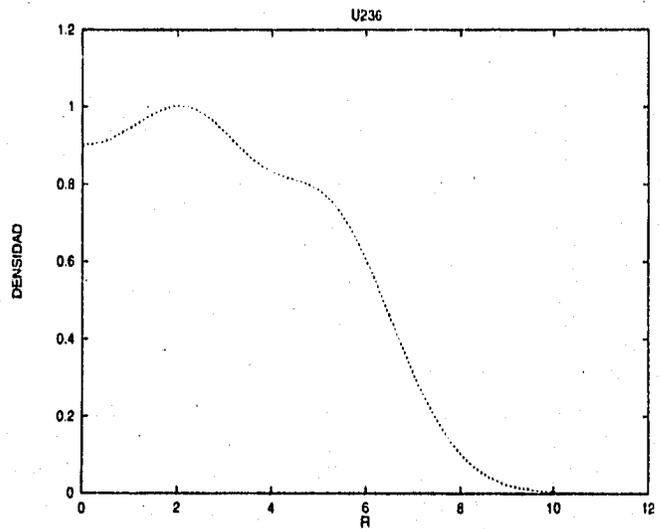


Figura B.6: Densidad de  $(4\pi\rho)$  de carga para  $^{236}\text{U}$ .

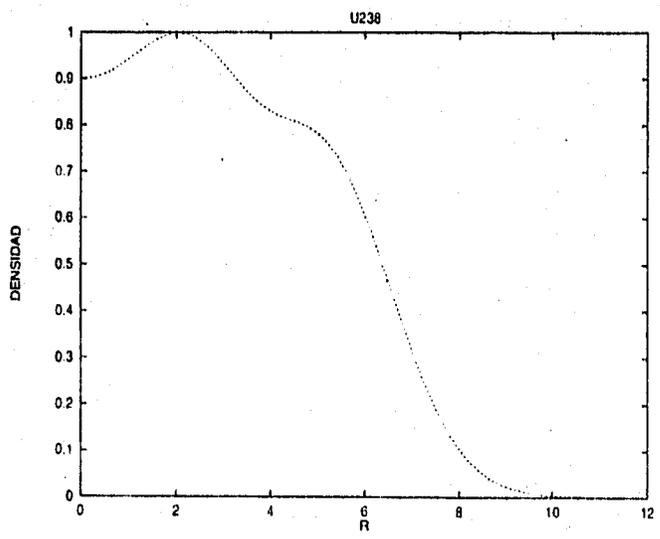


Figura B.7: Densidad de  $(4\pi\rho)$  de carga para  $^{238}\text{U}$ .

## Apéndice C

# Ocupación de protones en núcleos ligeros.

En el capítulo de resultados, se mostró la excitación de los nucleones hasta el nivel de Fermi a capas superiores, en el modelo de Nilsson. Se hizo una comparación con los resultados obtenidos para el modelo pseudo-simpléctico. En este apéndice se muestra una manera de obtener los números de ocupación en capas superiores, debido a la excitación de partículas del nivel de Fermi. El cálculo fue hecho por J. Hirsch [Hi-95], utilizando el modelo SU(3). Las cuentas que se muestran se refieren al estado fundamental (sin rotaciones) del núcleo  $^{20}\text{Ne}$ .

El cálculo consiste básicamente de aplicar el operador bosónico  $B^\dagger$  a las irreps principales. Para el ejemplo de  $^{20}\text{Ne}$  la capa de valencia para 10 protones es la capa dos y el número de protones de valencia es también 2. La irrep principal en este caso, es  $(\lambda, \mu) = (4, 0)$ . Para construir los estados, aplicamos el operador  $B^\dagger$  sobre dicha irrep:

$$B^\dagger|(4, 0)\rangle = (\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), (\lambda_3, \mu_3), \dots \quad (\text{C.1})$$

Al hacer el producto externo se obtiene:

$$(2, 0) \times (4, 0) = (2, 2), (6, 0) \quad (\text{C.2})$$

La siguiente expansión, sirve para comparar las ocupaciones con el modelo de Nilsson:

$$|0^+, \text{simple}\rangle = C_0|(4, 0)\rangle + C_1[B^\dagger|(4, 0)\rangle](2, 2) + C_2[B^\dagger|(4, 0)\rangle](6, 0) \quad (\text{C.3})$$

110 APÉNDICE C. OCUPACIÓN DE PROTONES EN NÚCLEOS LIGEROS.

$\lambda$	$\mu$	$\eta$	protones	fonones
2	2	0	1.86111	2.79167
2	2	1	5.16667	12.91667
2	2	2	2.11111	7.38889
2	2	3	0.83333	3.75000
2	2	4	0.02778	0.15278

Tabla C.1: Número de protones para un estado puro de un bosón B acoplado a  $(4, 0)$  en  $SU(3)$ . Parte de  $(2, 2)$ .

$\lambda$	$\mu$	$\eta$	protones	fonones
6	0	0	2.00000	3.0000
6	0	1	5.54545	13.86364
6	0	2	1.45454	5.09091
6	0	3	0.45454	2.04545
6	0	4	0.54545	3.00000

Tabla C.2: Número de protones para un estado puro de un bosón B acoplado a  $(4, 0)$  en  $SU(3)$ . Parte de  $(6, 0)$ .

CAPA	$^{20}\text{Ne}$ (Nilsson)	$^{20}\text{Ne}$ (simpléctico)	$^{24}\text{Mg}$ (Nilsson)	$^{24}\text{Mg}$ (simpléctico)
0	1.976	1.961	1.987	1.931
1	5.337	5.701	5.618	5.714
2	1.373	1.951	3.459	3.960
3	0.581	0.299	0.303	0.285
4	0.507	0.088	0.54	0.109
5	0.071	-	0.024	-
6	0.118	-	0.061	-
7	0.012	-	0.000	-
8	0.023	-	0.003	-

Tabla C.3: Números de ocupación en el modelo de Nilsson y simpléctico para  $^{20}\text{Ne}$  y  $^{24}\text{Mg}$ .

donde las constantes  $C_i$  se obtienen del cálculo utilizando el modelo simpléctico. Hagamos el ejemplo para el  $^{20}\text{Ne}$ . Para las primeras cuatro capas:

$$\begin{aligned} o_0 &: 0.5742(2) + 0.2795(1.86111) + 0.1463(2) = 1.961 \\ o_1 &: 0.5742(6) + 0.2795(5.16667) + 0.1463(5.54545) = 5.701 \\ o_2 &: 0.5742(2) + 0.2795(2.11111) + 0.1463(1.45454) = 1.951 \\ o_3 &: 0.5742(0) + 0.2795(0.83333) + 0.1463(0.45454) = 0.299 \\ o_4 &: 0.5742(0) + 0.2795(0.02778) + 0.1463(0.54545) = 0.088 \quad (C.4) \end{aligned}$$

Tenemos ya los números de ocupación predichos por el modelo algebraico <sup>1</sup>. Haciendo lo mismo para el núcleo de  $^{24}\text{Mg}$  y comparando con los números de ocupación en el modelo de Nilsson reportamos la tabla [C3].

Como puede apreciarse en la tabla [C3], el modelo de Nilsson tiene mayor desocupación en los estados de valencia, propiciando que las excitaciones de partículas sean de mayor intensidad en el modelo de Nilsson que en el algebraico. Es natural que esto se deba en parte a que el cálculo hecho con el modelo algebraico se haya hecho hasta la capa cuatro <sup>2</sup>, implicando que la función de onda carece de contribuciones de capas más altas. Una manera de saber si realmente el modelo de Nilsson posee un término de interacción de mayor intensidad que el modelo algebraico (en estas condiciones) es hacer calculando la ocupación con el modelo de Nilsson hasta la

<sup>1</sup>Estos números también están calculados con con el modelo de Nilsson ajustando experimentos de dispersión de electrones [Hor-72].

<sup>2</sup>Disponible sólo hasta la capa cuatro.

112 APÉNDICE C. OCUPACIÓN DE PROTONES EN NÚCLEOS LIGEROS.

CAPA	$^{20}\text{Ne}$ (Nilsson)	$^{20}\text{Ne}$ (simpléctico)	$^{24}\text{Mg}$ (Nilsson)	$^{24}\text{Mg}$ (simpléctico)
0	1.984	1.961	1.988	1.931
1	5.585	5.701	5.713	5.714
2	1.684	1.951	3.612	3.960
3	0.415	0.299	0.287	0.285
4	0.332	0.088	0.399	0.109

Tabla C.4: Números de ocupación en el modelo de Nilsson y simpléctico para  $^{20}\text{Ne}$  y  $^{24}\text{Mg}$ , hasta la capa 4.

capa cuatro. Los resultados están expresados en la tabla [C4]. Como se aprecia en la comparación de las tablas [C3] y [C4], en la parte del modelo de Nilsson, el cortar la base hasta la capa cuatro inhibe la excitación a capas arriba de las de valencia. Esto trae como consecuencia que la comparación de ambos modelos sea mejor en la tabla [C4]<sup>3</sup>. Puede observarse, que para el núcleo de  $^{24}\text{Mg}$  el acuerdo es bueno. Por consecuencia, se esperaría que al hacer el mismo cálculo en el modelo algebraico tomando en cuenta hasta la capa ocho, el acuerdo sería mejor en la tabla [C3]. De todas maneras, la tabla [C3] muestra que en la capa cuatro, la ocupación utilizando el modelo de Nilsson es mucho mayor en porcentaje que la ocupación producida con el modelo algebraico. Podemos decir que el término de interacción en el modelo de Nilsson produce una mayor excitación de partículas hacia capas superiores.

Aunque el ajuste de los números es bueno, podemos ver que aún el modelo de Nilsson excita un número mayor de partículas. Esto se debe también a que no se ha tomado en cuenta el cálculo con  $B^{12}$  en la Ec. [C3], [H-95], lo cual traería por consecuencia, una mayor excitación de partículas hacia las capas por encima de las de valencia.

<sup>3</sup> Lo que realmente pasa, es que al truncar la base, estamos reduciendo la distribución de la función de onda del núcleo en la base utilizada.

## Apéndice D

# La deformación en el modelo rotación-vibración

En este apéndice hacemos un cálculo más preciso de la deformación a partir del operador de momento cuadrupolar colectivo, incluyendo la interacción rotación-vibración. Para una revisión detallada del modelo rotación vibración, ver [Eis-87] Cap.6.

### D.1 El modelo rotación-vibración

El modelo de rotación-vibración está construido para reproducir características de núcleos par-par que tienen configuraciones axialmente simétricas en la energía potencial colectiva.

La filosofía de los modelos colectivos está basada en la identificación del comportamiento del núcleo con el de una gota de líquido. La eficacia de este tipo de modelos descansa en la efectividad de la descripción de la superficie nuclear y su comportamiento en función del tiempo. De esta manera, pueden explicarse cantidades nucleares que involucran la colectividad de los nucleones.

Las coordenadas colectivas que describen el movimiento de la superficie nuclear  $\alpha_{\lambda\mu}$  son definidas por la expansión de la superficie nuclear en armónicos esféricos:

114APÉNDICE D. LA DEFORMACIÓN EN EL MODELO ROTACIÓN-VIBRACIÓN

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda\mu} (-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right] \quad (D.1)$$

Las coordenadas colectivas pueden transformarse al sistema de laboratorio de la siguiente manera:

$$a_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^{\lambda}(\theta_j) \alpha_{\lambda\nu} \quad (D.2)$$

Las variables que describen la dinámica en el sistema intrínseco  $\xi$  y  $\eta$ , están definidas por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta_0 + \xi, \\ a_2 &= 0 + \eta \end{aligned} \quad (D.3)$$

donde  $a_0$  y  $a_2$ , junto con los ángulos de Euler, son las variables necesarias para describir la dinámica del núcleo desde el sistema intrínseco. La variación de las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  a partir de la posición de equilibrio es mostrada gráficamente en la Fig.[D1], donde a las vibraciones  $\xi$  y  $\eta$  también son llamadas  $\beta$  y  $\gamma$ , respectivamente.

El Hamiltoniano del modelo Rotación-Vibración está compuesto por las partes:

$$\hat{H} = \hat{H}_{rot} + \hat{H}_{vib} + \hat{H}_{vib-rot}, \quad (D.4)$$

definidas de la siguiente manera:

$$\hat{H}_{rot} = \frac{M^2 - M_3'^2}{2\mathcal{I}_0} + \frac{M_3'^2}{16B\eta^2}, \quad (D.5)$$

$$\hat{H}_{vib} = -\frac{\hbar}{2B} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{2} C_0 \xi^2 + C_2 \eta^2 - \frac{\hbar^2}{16B\eta^2}, \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{vib-rot} &= \frac{M^2 - M_3'^2}{2\mathcal{I}_0} \left[ 2 \frac{\eta^2}{\beta_0^2} - 2 \frac{\xi}{\beta} + 3 \frac{\xi^2}{\beta_0^2} \right] \\ &+ \frac{M_+'^2 + M_-'^2}{4\mathcal{I}_6} \left[ 2\sqrt{6} \frac{\xi\eta}{\beta_0^2} - \frac{2}{3} \sqrt{6} \frac{\eta}{\beta_0} \right] \end{aligned} \quad (D.7)$$

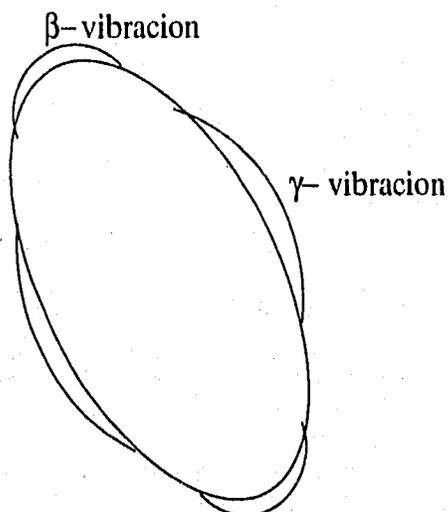


Figura D.1: Ilustración esquemática del significado de las vibraciones  $\chi$  ( $\beta$ ) y  $\eta$  ( $\gamma$ ). Las vibraciones  $\beta$  alargan y acortan el elipsoide y las vibraciones  $\gamma$  producen un tipo de pulsación de estómago.

La función de onda que es solución de  $\hat{H}_{rot}$  y  $\hat{H}_{vib}$ , y en la cual se diagonaliza la interacción rot-vib, es:

$$|IMKn_2n_0\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{k0})}} (D_{IK}^{I*}(\theta_j) + (-1)^I D_{I-K}^{I*}(\theta_j)) \chi_{k,n_2}(\eta) |n_0\rangle \quad (D.8)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= 0, 2, 4, \dots, \\ I &= 0, 2, 4, \dots, \quad \text{para } K=0, \\ I &= K, K+1, K+2, \dots, \quad \text{para } K \neq 0, \end{aligned} \quad (D.9)$$

La clasificación de la función de onda está dada por la parte rotacional,  $|IMK\rangle$ , donde  $M$  y  $K$  son las proyecciones del momento angular  $I$  en el sistema de laboratorio e intrínseco, respectivamente. El número  $n_2$  es el número de fonones en la dirección  $\eta$ , cuya función de onda es:

116 APÉNDICE D. LA DEFORMACIÓN EN EL MODELO ROTACIÓN-VIBRACIÓN

$$\chi_{K,n_2}(\eta) = \frac{\sqrt{\lambda^{l_K + \frac{3}{2}} \Gamma(l_K + \frac{3}{2} + n_2)}}{\sqrt{n_2!} \Gamma(l_K + \frac{3}{2})} \eta^{l_K + 1} e^{-\frac{1}{2} \lambda \eta^2} {}_1F_1(-n_2, l_K + \frac{3}{2}; \lambda \eta^2) \quad (D.10)$$

donde

$$l_K = \frac{1}{2}(|K| - 1) \quad (D.11)$$

Finalmente,  $n_0$  es el número de fonones en la dirección  $\xi$ , cuya función de onda  $|n_0\rangle$  es la del oscilador armónico simple.

El tipo de espectro producido por un núcleo deformado con el tipo de vibraciones como las señaladas se muestra en la Fig. [D2]

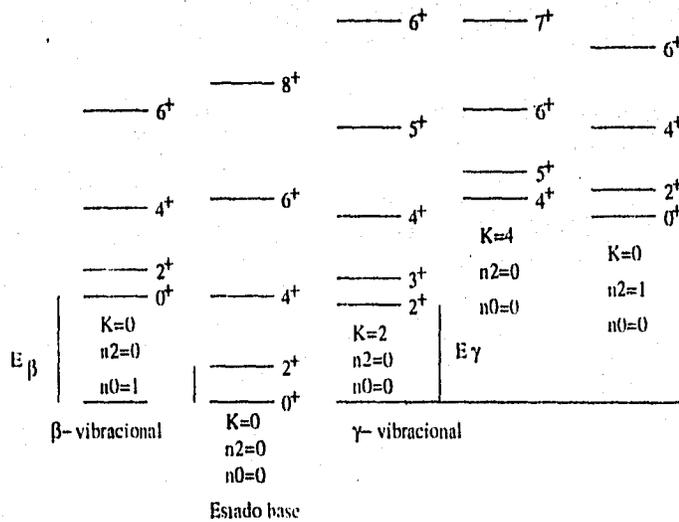


Figura D.2: Típica estructura de bandas para un núcleo par-par deformado.

## D.2 Momento cuadrupolar y transiciones B(E2)

El operador de momento cuadrupolar colectivo puede escribirse en términos de las coordenadas colectivas desde el sistema intrínseco:

$$\begin{aligned}
 Q_{2\mu}^{coll} = & \frac{3ZR_0^2}{4\pi} [D_{\mu 0}^{2*}(\theta_j)\beta_0(1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta_0) \\
 & + D_{\mu 0}^{2*}(\theta_j)\xi(1 + \frac{4}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta_0) + D_{\mu 0}^{2*}(\theta_j)\frac{2}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(\xi^2 - 2\eta^2) \\
 & + (D_{\mu 2}^{2*}(\theta_j) + D_{\mu -2}^{2*}(\theta_j))(1 - \frac{4}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta_0)\eta - \frac{4}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\xi\eta] \quad (D.12)
 \end{aligned}$$

Las  $D_{\mu\mu'}^{2*}(\theta_j)$  son las matrices de rotación que aparecen por llevar las coordenadas del sistema del laboratorio al sistema intrínseco.

Para el cálculo de las transiciones B(E2) se necesitan los elementos de matriz reducidos:

$$\begin{aligned}
 \langle I_i || Q_2^{coll} || I_f \rangle = & \beta_0 \{ a_1(I_i)a_1(I_f)(I_f 2 I_i | 000)(1 + \alpha + \alpha y^2 - \alpha x^2) \\
 & + a_1(I_i)a_2(I_f)(I_f 2 I_i | 2 - 20)x(1 - 2\alpha) \\
 & + a_1(I_i)a_3(I_f)(I_f 2 I_i | 000)y(1 + 2\alpha) \\
 & + a_2(I_i)a_1(I_f)(I_f 2 I_i | 022)x(1 - 2\alpha) \\
 & + a_2(I_i)a_2(I_f)(I_f 2 I_i | 202)(1 + \alpha + \alpha y^2 - 2\alpha x) \\
 & + a_2(I_i)a_3(I_f)(I_f 2 I_i | 022)(-2\alpha y x) \\
 & + a_3(I_i)a_1(I_f)(I_f 2 I_i | 000)y(1 + 2\alpha) \\
 & + a_3(I_i)a_2(I_f)(I_f 2 I_i | 2 - 20)(-2\alpha y x) \\
 & + a_3(I_i)a_3(I_f)(I_f 2 I_i | 000)(1 + \alpha + 3\alpha y^2 - 2\alpha x^2) \} \\
 & \quad (D.13)
 \end{aligned}$$

Donde  $Q_2^{coll} = A Q_2^{coll}$ , y  $A = 3ZR_0^2/4\pi$ . El radio cuadrado en barns es  $R_0^2 = 0.0144 A^{2/3}$ . Aquí,  $A$  es la masa del núcleo.

Los factores  $a_i(I)$  son los coeficientes de la expansión de los estados principales (de mínima energía) de las bandas base,  $\beta$  y  $\gamma$  en la base apropiada (Eq.(D6)) y los coeficientes introducidos están definidos como:

$$\alpha = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta_0 \approx 0.36\beta_0 \quad (D.14)$$

$$x = \sqrt{\frac{3c}{E_\gamma}} \quad (D.15)$$

118 APÉNDICE D. LA DEFORMACIÓN EN EL MODELO ROTACIÓN-VIBRACIÓN

$$y = \sqrt{\frac{3\epsilon}{2E_\beta}} \quad (D.16)$$

Los parámetros se obtienen de los datos experimentales de la manera que se indica en la figura [D3]. El parámetro  $\epsilon$  está relacionado con la energía entre los estados  $0^+$  y  $2^+$  de la banda base.  $E_\beta$  es la energía entre el cero fundamental y el cero de la banda beta.  $E_\gamma$  es la energía entre el cero fundamental y el primer 2 de las bandas gama, restando el valor  $\epsilon$ . Las probabilidades de transición  $B(E2)$  están definidas como:

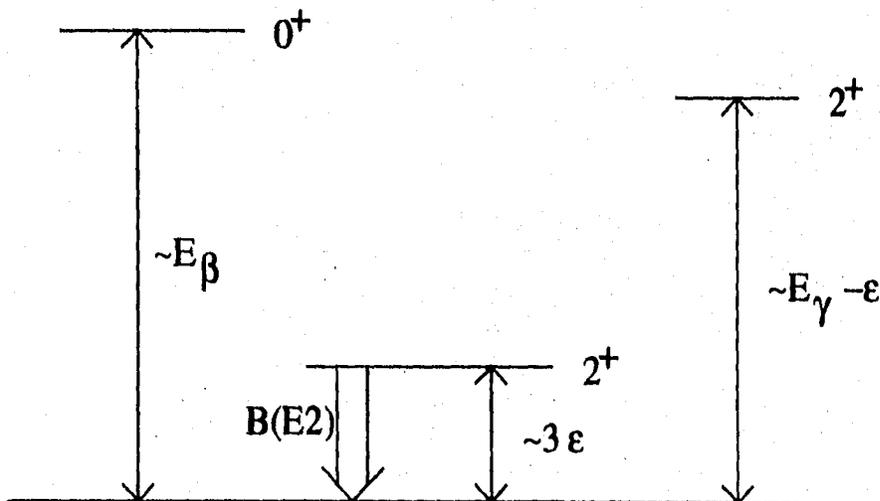


Figura D.3: Ilustración de cómo los tres parámetros  $\epsilon$  ( $\beta_0$  también indirectamente),  $E_\beta$  y  $E_\gamma$  del modelo rotación-vibración pueden ser tomados del experimento

$$B(E2; I_i \rightarrow I_f) = A^2 \frac{2I_f + 1}{2I_i + 1} |\langle I_i || Q_2^{coll} || I_f \rangle|^2 \quad (D.17)$$

Si  $I_i = 0$  e  $I_f = 2$ , la expresión [D15], puede reescribirse para la banda base como:

$$B(E2; 0 \rightarrow 2)_{b-base} = 5A^2 \beta_0 \{ (220|000)(1 + \alpha + \alpha y^2 - \alpha x^2) \}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c}{E_\gamma - 2c} \frac{c}{E_\gamma} \sqrt{12}(220|2 - 20)x(1 - 2\alpha) \\
& + \frac{6c}{E_\beta} \sqrt{\frac{3c}{2E_\beta}} (220|000)y(1 + 2\alpha) \}^2 \quad (D.18)
\end{aligned}$$

### D.3 Ajuste de la deformación

La expresión [D18] nos permite obtener un valor para la deformación, si del lado izquierdo sustituimos el valor experimental de la transición  $B(E2)$ . Hagamos el ejemplo para el caso de  $^{20}\text{Ne}$ . Este tiene  $B(E2) = 0.034e^2b^2$

1) Sin tomar en cuenta vibración, rotación e interacción:

$$0.034 = A^2 \beta_0^2 \quad (D.19)$$

donde encontramos una deformación de  $\beta_0 = 0.728$ , como la reportada en [Ram-78].

2) En el siguiente orden, no tomamos en cuenta la interacción rotación-vibración (como hemos procedido en este trabajo, ver capítulo 1):

$$0.034 = A^2 \beta_0^2 (1 + \alpha)^2 \quad (D.20)$$

En cuyo caso, obtenemos una deformación de  $\beta_0 = 0.6$ .

3) Finalmente, tomamos la expresión completa, al tener en cuenta la interacción rotación-vibración. Los parámetros pueden obtenerse en la literatura [Sak-77]. Utilizando la expresión [D18], encontramos  $\beta = 0.57$ .

En la tabla [D1] presentamos una recopilación de las deformaciones para los tres casos (que denominamos  $\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$ ) en los núcleos que estudiamos.

120 APÉNDICE D. LA DEFORMACIÓN EN EL MODELO ROTACIÓN-VIBRACIÓN

Núcleo	$\epsilon$	$E_\beta$	$E_\gamma$	B(E2)	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
<sup>20</sup> Ne	544.6	6722	8944.4	0.034	0.728	0.6	0.57
<sup>24</sup> Mg	456.20	131.8	3782.3	0.0432	0.606	0.512	0.5
<sup>160</sup> Dy	28.93	(1275)	937.22	5.06	0.3365	0.3034	0.303
<sup>168</sup> Er	26.6	(1217)	794.51	5.79	0.3381	0.3047	0.305
<sup>234</sup> U	14.407	810	912.403	10.66	0.2719	0.2495	0.2492
<sup>236</sup> U	15.081	919.16	943.02	11.61	0.2821	0.2581	0.25
<sup>238</sup> U	14.972	(925)	1045.23	12.09	0.2863	0.2617	0.261

Tabla D.1: Tabla de parámetros y deformaciones a distinta precisión de la expresión del momento cuadrupolar en el modelo rotación-vibración. Los parámetros están dados en KeV's; las transiciones en  $e^2b^2$ .

## Apéndice E

# Programa para el modelo de Nilsson

A continuación presentamos el esquema del programa utilizado para realizar los cálculos correspondientes al modelo de Nilsson. Está elaborado en Fortran, y está autocontenido, pues incluye una rutina de diagonalización que utiliza el método de Jacobi. Incluye también una subrutina que calcula coeficientes de Clebsch-Gordan, construida por Draayer et al. Las opciones que maneja el programa están enlistadas en el archivo de datos iniciales. Dicha lista aparece en la siguiente página.

La explicación para los datos de entrada es la siguiente:

- 1) Especificar la capa mínima y máxima para la cual se ejecutará el cálculo.
- 2) Introducir los límites en los cuales variará la deformación.
- 3) Opción por el llenado. De contestar afirmativamente, a continuación se pregunta por el número de nucleones.
- 4) La siguiente opción. pregunta si se desea el cálculo del momento cuadrupolar.
- 5) El desarrollo de un estado de Nilsson puede hacerse en la base esférica si se desea. Los datos quedan almacenados en los archivos line1-line10.
- 6) Si se desea graficar los diagramas de Nilsson, se tiene opción para graficar un número finito de ellos o todos, aunque su visualización dependerá de la capacidad del graficador utilizado. Para los ejemplos realizados en este trabajo, se utilizó el paquete gnuplot versión 3.5, donde se pueden graficar simultáneamente aproximadamente sesenta estados de Nilsson con  $\beta$  entre 0 y 0.7.
- 7) Se tiene la opción de obtener los elementos de matriz de la interacción de tipo cuadrupolar.

122 *APÉNDICE E. PROGRAMA PARA EL MODELO DE NILSSON*

La última versión de este programa puede solicitarse al Dr. Peter Hess del Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, a la dirección electrónica: [Hess@roxanne.nuclecu.unam.mx](mailto:Hess@roxanne.nuclecu.unam.mx) .

## **bibliografía**

[Ba-92] C.Bahri y J.P.Draayer y S.A. Moszkowski, *Phys. Rev. Lett.* 68(1992)No.14,p.2133.

[BHA-92] K.H.Bhatt, C.W.Nestor,Jr y S.Raman, *Phys. Rev. C* vol.46-1(1992)164.

[Bo-52] A.Bohr, *kgl.Danske Videnskab. Selskab Mat. Fis. Medd* 26(14)(1952).

[Bo-53] A.Bohr y B.Mottelson , *kgl.Danske Videnskab. Selskab Mat. Fis. Medd.* 27(16)(1953).

[Ca-87] O.Castaños, J.P.Draayer y Y.Leschber *Ann. of Phys.* 180(1987)290.

[Ca-88] O.Castaños,J.P.Draayer y Y.Leschber *Z.Phys A*329,33-34 (1988).

[Ca-89] O.Castaños y J.P.Draayer, *Nuclear Physics A*491 (1989) 349-372.

[Ca-91] O.Castaños, P.O.Hess, J.P.Draayer y P.Rochford, *Nucl. Phys.* A524(1991)469-478.

[Ca-92] O.Castaños, P.O.Hess, J.P.Draayer y P.Rochford, *Phys. Lett.* B227(1992)27-32.

[Ca-94] O.Castaños, V.Velázquez, P.O.Hess y J.Hirsch, *Phys.Lett.* B321(1994)303.

[CaMo-92] O.Castaños, M.Moshinsky y C.Quesne *Phys. Lett.* B277(1992)238.

- [Dra-82] J.P.Draayer y K.J.Weeks, Nucl. Phys. A381(1982)1.
- [Dra-84] J.P.Draayer y K.J.Weeks, Ann. of Phys. 156(1984)41.
- [Dra-92] J.P.Draayer, ed. Internacional Workshop: Nuclear Structure Models (1992; Oak Ridge, Tennessee).
- [DraCa-87] J.P.Draayer y O.Castaños. Programa en Fortran para el modelo algebraico.
- [DraRa-79] J.P.Draayer, R.D. Ratna Raju, K.T.Hetch and B.D.Chang; Phys. Rev. C20(1979)2397.
- [Eis-87] J.M.Eisenberg y W.Greiner, "Nuclear Models", vol 1, 3a ed. North Holland 1987.
- [Eli-58] J.P.Elliott, Proc. R. Soc. London A245(1958)128.
- [Gus-67]. C.Gustafson et al. Arkiv for Pysik band 36 nr 69 (1967).
- [He-80] He-80 P.O.Hess, M.Seiwert, J.Maruhn y W.Greiner, Z.Phys. A296(1980)147.
- [Hi-94] Jorge G. Hirsch, O.Castaños y P.O.Hess, Revista Mexicana de Física 40,Suplemento 1(1994) 47-61.
- [Hi-95] Jorge Hirsch, comunicación privada.
- [Hof-57] R. Hofstadter, Ann. Rev. Nucl. Sci. vol. 7, 231 (1957).
- [Hor-72] Y. Horikawa; Progress of Theoretical Physics, Vol. 47, No. 3, (1972) pp.867.
- [Irv-72]. J.M. Irvine; "Nuclear Structure"; Pergamon Press; 1972.
- [Le-87] Y.Leschber y J.P.Draayer, Phys. Lett. B190(1987)1.
- [May-48] M.G.Mayer, Phys.Rev. 74(1948)235.
- [May-55] M.G.Mayer y J.H.D.Jensen, "Elementary Theory of Nuclear Shell Model" ,(Wiley, New York,1955).

[Ni-55] S.G.Nilsson y O.Prior, kgl.Danske Videnskab. Selskab Mat. Fis. Medd 29(1955).

[Ra-73] R.D.Ratna Raju, J.P.Draayer y K.T.Hecht, Nucl. Phys. A202(1973)433.

[Ram-78] S. Raman, C.H.Malarkey, W.T.Milner, C.W.Nestor,JR., and P.H.Stelson; Atomic Data and Nuclear Data Tables 36,1-96(1987).

[Ring-80] P.Ring y P.Schuck "The Nuclear Many-Body Problem" ,Springer, 1980.

[Sak-77] Atomic Data and Nuclear Data Tables, Vol. 20, No. 5 (1977).

[SS-72] F.S. Stephens and R.S.Simon, Nucl. Phys. A183 (1972)257.

[To-55] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. Jpn.13(1955)467.

[TrD-94] D.Troltenier, J.P.Draayer, P.O.Hess, O.Castaños, Nucl. Phys. A576(1994)351-386.

[TrNaz-94] D.Troltenier, W. Nazarewicz, Z. Szymanski and J.P. Draayer; Revista Mexicana de Física vol.40, Suplemento 1(1994)30-45.

[Wei-35] C.F.von Weizsäcker, Z.Physik 96(1935)461.