



01168

20
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESPACIOS GRAFICOS EN LA RESOLUCION
DEL PROBLEMA DE LOCALIZACION EN
REDES

T E S I S
P R E S E N T A D A P O R:
P E R A L T A M A R Q U E Z N O R M A E L V I R A
P A R A O B T E N E R E L G R A D O D E:
M A E S T R O E N I N G E N I E R I A
(I N V E S T I G A C I O N D E O P E R A C I O N E S)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CIUDAD UNIVERSITARIA,

MAYO DE 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



01168

20
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESPACIOS GRAFICOS EN LA RESOLUCION
DEL PROBLEMA DE LOCALIZACION EN
REDES

T E S I S

PRESENTADA POR:
PERALTA MARQUEZ NORMA ELVIRA
PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

TESIS CON
FALLA LE ORIGEN

CIUDAD UNIVERSITARIA,

MAYO DE 1996

*Con inmensa admiración y cariño,
Al Dr. Gonzalo Zubieta Russi.*

RECONOCIMIENTOS.

A la guía de mi asesor:

M.I. Ricardo Aceves García

A mis sinodales:

Dra. Judith Zubieta García

Dr. Francisco Larrión Riveroll

M.I. José Maclovio Sauto Vallejo y

M.I. Víctor Rafael Pérez Pérez

por sus valiosas aportaciones en la realización de este trabajo.

Al Dr. Alberto Alonso y Corta

por su revisión minuciosa, así como por las sugerencias hechas a mi tesis.

Muy especialmente

Al Dr. Gonzalo Zubieta Russi ,

por su continuo apoyo a lo largo de mi maestría.



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

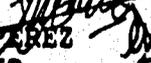
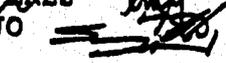
UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

RECIBI COPIA DE: () TRABAJO ESCRITO
(XXXX) TESIS

DESARROLLADO POR LA ALUMNA: NORMA ELVIRA PERALTA MARQUEZ
PARA PRESENTAR EXAMEN:

() DE ESPECIALIZACION
(XX) DE GRADO

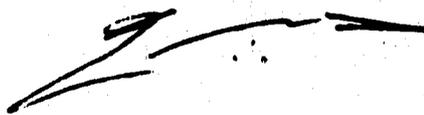
EN INGENIERIA: INVESTIGACION DE OPERACIONES

| | FIRMA | FECHA |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| PRESIDENTE: | DR. FRANCISCO LARRION RIVEROLA  | 20-Marzo-96 |
| VOCAL: | M EN I. RICARDO ACEVES GARCIA  | 26-Abril-96 |
| SECRETARIO | DRA. JUDITH ZUBIETA GARCIA  | 29-Marzo-96 |
| SUPLENTE: | M EN I. VICTOR RAFAEL PEREZ PEREZ  | 11-Abril-96 |
| SUPLENTE: | M EN I. MACLOVIO SAUTO VALLEJO  | 26-abril-96 |

APROBACION DEL TRABAJO O DE TESIS POR EL DEPARTAMENTO _____

PROMEDIO EN CREDITOS 12 (doce) créditos

BJS*jac.



ÍNDICE.

| | |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| INTRODUCCIÓN. | III |
| | |
| CAPÍTULO 1 | |
| CONCEPTOS PRELIMINARES. | 1 |
| 1.1 FUNCIONES CONVEXAS | 4 |
| | |
| CAPÍTULO 2 | |
| EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE UNA SOLA FACILIDAD. | 9 |
| 2.1 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CONVEXO EN GRAL. | 10 |
| 2.2 RESOLUCIÓN. | 13 |
| | |
| CAPÍTULO 3 | |
| UNA TEORÍA MÉTRICA DE REDES. | 15 |
| 3.1 CONVEXIDAD Y ESPACIOS ARBOLADOS. | 15 |
| 3.2 CONVEXIDAD Y ESPACIOS GRÁFICOS. | 19 |
| 3.3 ESPACIOS GRÁFICOS FINITAMENTE DESCOMPONIBLES. | 24 |
| 3.4 MODELOS PARA ESPACIOS GRÁFICOS. | 26 |
| 3.5 OPTIMIZACIÓN CONVEXA SOBRE ESPACIOS MÉTRICOS. | 26 |
| 3.6 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CONVEXA EN ESPACIOS GRÁFICOS. | 27 |

CAPÍTULO 4

| | |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| DEMOSTRACIÓN DE UN CASO PARTICULAR DE LA CONJETURA DE HOOKER. | 37 |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|

CAPÍTULO 5

| | |
|----------------------|-----------|
| CONCLUSIONES. | 43 |
|----------------------|-----------|

CAPÍTULO 6

| | |
|------------------|-----------|
| APÉNDICE. | 45 |
|------------------|-----------|

| | |
|----------------------|-----------|
| BIBLIOGRAFÍA. | 49 |
|----------------------|-----------|

INTRODUCCIÓN.

En la vida real se presentan problemas como determinar la localización exacta donde construir un hospital que proporcione servicios de salud a una región dada (para ello se consideran algunos lugares factibles de construcción), pero se requiere que la ubicación minimice el tiempo que hará cualquier ambulancia desde los distintos puntos de la región al hospital. Otro problema podría ser decidir la ubicación de almacenes de abasto de cierto número de tiendas en el D.F., sabemos la ubicación de las tiendas y queremos que los costos de transporte se reduzcan considerablemente, (los costos de abastecimiento están asociados a las distancias entre tiendas y almacenes). Estos problemas pueden ser resueltos como problemas de localización en redes, mediante el uso de un modelo en redes adecuado. como ejemplos de modelos adecuados de problemas en redes, podemos mencionar: Redes de Transportación; donde los nodos representarían ciudades, fabricas, bodegas, puertos, etc.; los arcos vías de transportación como lo son carreteras, rutas marítimas, vías férreas, etc.; los flujos asociados a los arcos bien pueden ser la cantidad de material que se transporta de un lugar a otro, distancias entre los lugares conectados, tiempo de recorrido entre lugares conectados etc. Redes Hidráulicas; donde los nodos representarían, reservas, ciudades, fábricas, etc.; los arcos, tuberías, canales de irrigación etc.; los flujos asociados a cada arco cantidad de agua transportada de un lugar a otro. De manera similar muchos otros problemas.

Los problemas de localización en redes se pueden clasificar desde el punto de vista del espacio de soluciones en Continuos y Discretos, ambos en problemas de una sola facilidad y problemas de varias facilidades. En el presente trabajo nos abocaremos a los primeros, que consisten en minimizar una función convexa de aridad igual al cardinal del conjunto de los nodos, donde cada entrada de la función es una distancia; (en redes la distancia entre cualesquiera par de nodos, queda determinada por la ruta más corta entre ellos; ésta se obtiene, por ejemplo, mediante el uso del algoritmo de Dijkstra). Como caso particular

podemos mencionar a los problemas de localización denominados "problemas minisum", en los cuales se requiere determinar un punto sobre una red convexa que minimice la suma de las distancias de cualquier nodo sobre la red a él.

La resolución del problema para una sola facilidad es bastante simple si se restringe el conjunto de puntos sobre los cuales hay que determinar el adecuado al conjunto de nodos (caso discreto); pero si se quiere considerar a la red en su totalidad (caso continuo), el problema se torna mucho más complicado. Existe un algoritmo que es usado frecuentemente y que involucra el uso de lo que se conoce como segmentos arbolados, que será totalmente desarrollado en el capítulo 2; sin embargo tiene un bemo: requiere de mucho esfuerzo computacional, es decir es demasiado lento.

En el trabajo del Dr. John Norman Hooker, se proporciona un algoritmo más eficiente en cuanto a esfuerzo computacional se refiere, para ello se requiere del uso de espacios gráficos que son entes que se trabajan dentro de la Teoría de Gráficas; en ellos se definen los espacios arbolados sobre los cuales buscaremos los puntos adecuados.

Esta temática se encuentra desarrollada en el capítulo 3; obviamente, un espacio gráfico no es una red; por esto se hace necesario emplear una biyección, o inyección que nos permita calcar la estructura de un espacio gráfico a una red para poder aplicar el algoritmo de resolución en el espacio gráfico y resolver el problema en la red.

En el trabajo del Dr. Hooker existe un problema abierto, que consiste en una conjetura, en la que se afirma que un conjunto de espacios gráficos que cumplen con una condición, son modelables por un subconjunto de una red.

El objetivo del este trabajo es el demostrar que dicha conjetura se cumple para un subconjunto de espacios gráficos y en el capítulo 4 se proporciona la demostración. Finalmente se proporcionan las conclusiones correspondientes a este trabajo.

TESIS

COMPLETA

Capítulo 1

CONCEPTOS PRELIMINARES

Iniciemos pues, con los conceptos que de una u otra forma estan involucrados en el cuerpo de este trabajo.

Definición 1 *Un espacio métrico es una pareja (M, ρ) donde $M \neq \phi$ es un conjunto y ρ es una función, $\rho : M \times M \rightarrow R$ que cumple:*

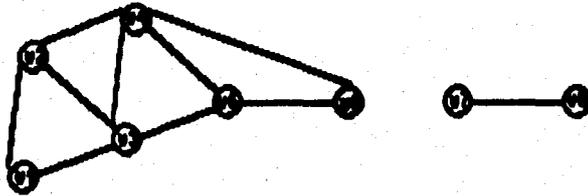
- i) $\rho(x, y) \geq 0$
- ii) $\rho(x, x) = 0$; si $x \neq y$ entonces $\rho(x, y) > 0$
- iii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$
- iv) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

Definición 2 *Si (M, ρ) es un espacio métrico y $x \in M$, se define disco abierto de radio $\varepsilon > 0$ a*

$$D(x, \varepsilon) = \{y \in M / \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

Definición 3 *Un subconjunto A de M es subconjunto abierto de (M, ρ) si para todo $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ t.q. $D(x, \varepsilon) \subseteq A$.*

Definición 4 *Una red es una gráfica $G[N, A]$ que se constituye de una tripleta: un conjunto de nodos N , un conjunto de arcos A y una función de asignación, que a cada arco $j \in A$ le asigna una pareja $(v_i, v_j) \in N \times N$ tal que $v_i \neq v_j$. Ejemplo:*



Definición 5 Sea $G[N, A]$ una red, entonces definimos flujo en el arco $j \in A$ como una cantidad asignada a él

Definición 6 Una **trayectoria o ruta** es una sucesión de nodos y arcos conectados, sin repetición de nodos o arcos.

Definición 7 Un **circuito** es una trayectoria donde el nodo inicial y el final coinciden.

Definición 8 Una red es **conectada** si para cualesquiera par de nodos existe una trayectoria que los une.

Definición 9 Un **árbol** es una red conectada, con al menos un arco y que no contiene circuitos.

Definición 10 Sean $v_i, v_j \in N$ decimos que $P : v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_j$ es la ruta más corta entre ellos si de todas las rutas posibles ésta es la que tiene la suma total de sus flujos sobre los arcos involucrados más pequeña.

ALGORITMO DE RUTA MÁS CORTA (Dijkstra)

Propósito: Determinar la Trayectoria mínima del nodo v_i al nodo v_j en una red dada.

- 1) Iniciar en el nodo v_i
- 2) Etiquetar provisionalmente los nodos que se encuentran conectados con v_i por medio de un arco de la siguiente manera $[v_i | x(A)]$ donde $x(A)$ es el flujo que se encuentra en el arco que los conecta.
- 3) Comparar todas las etiquetas provisionales y elegir la etiqueta que tenga el flujo más pequeño (en caso de empate elegir las todas).

4) Etiquetar definitivamente los nodos con etiquetas provisionales elegidos en (3)

5) A los nodos sin etiqueta definitiva que se encuentran conectados por medio de un arco con nodos etiquetados definitivamente etiquetarlos provisionalmente con

$$\left[\begin{array}{l} \text{nodo anterior} \mid x(A) + \text{flujo del nodo en la etiqueta definitiva del nodo} \\ \text{al que está conectado} \end{array} \right]$$

6) Repetir (3), (4) y (5) hasta etiquetar definitivamente a v_j

7) La ruta más corta desde v_i hasta v_j se encuentra en orden invertido en las etiquetas definitivas a partir de v_j y el flujo total en la ruta es el que aparece en la etiqueta definitiva de v_j .

El hecho de que el algoritmo anterior realmente nos determina la ruta más corta se encuentra demostrado en el libro de Rockafellar, R.T., **Network Flows and Monotropic Optimization**.

Definición 11 Sea $G[V, A]$, una red, entonces sean las siguientes igualdades

G = conjunto de puntos sobre una red

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$ conjunto de nodos

$d(x, y)$ = distancia de x a y dada por la ruta más corta

$A = (v_i, v_j)$ = arco entre v_i y v_j

$A(x, y)$ = porción de A estrictamente entre x y y

$A[x, y]$ = cerradura de $A(x, y)$

$b(v_i, v_j)$ = magnitud asociada a los arcos, siempre positiva.

$b(x, y)$ = longitud de $A[x, y]$ con respecto a $b(v_i, v_j)$

Definición 12 Para cualquier $x, y \in G$ y $\lambda \in [0, 1]$, decimos que $w \in L_\lambda(x, y)$ cuando $d(x, w) + d(w, y) = d(x, y)$ y $d(x, w) = \lambda d(x, y)$

Definición 13 Sea $L(x, y)$ el **segmento de recta** entre x y y , más precisamente es la unión de $L_\lambda(x, y)$ sobre $\lambda \in [0, 1]$

Definición 14 Sea $x \in A(u, w)$ un punto sobre el arco entre los nodos u, w en una red conexa con métrica de ruta más corta y sea v_i cualquier nodo en la red. Sea $d_i(x) = b(u, x) + d(u, v_i)$ y $d'_i(x) = b - b(u, x) + d(w, v_i)$ entonces

$$d(x, v_i) = \min \{d_i(x), d'_i(x)\}$$

Teorema 15 Sea S un árbol no orientado, con longitudes asignadas a sus arcos positivas y d la distancia determinada por la ruta más corta. Entonces (S, d) es un espacio métrico.

Demostración.

1) $S \neq \emptyset$ pues al menos tiene un arco por definición de árbol.

2) i) y ii) son inmediatos del algoritmo de ruta más corta y porque las longitudes de los arcos son positivas.

iii) Sean $x, y, z \in S$ P.D. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

caso a) $z \notin L(x, y)$

\Rightarrow son distintas las rutas más cortas entre cada dos

$\Rightarrow d(x, y) < d(x, z) + d(z, y)$

caso b) $z \in L(x, y)$

$\Rightarrow d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ por definición de L

iv) $d(x, y) = d(y, x)$ por que S es no orientada.

■

1.1 FUNCIONES CONVEXAS.

Es necesario tener nociones del análisis convexo, dado que en problemas de localización en redes, la manera de justificar que una solución que es óptimo local es óptimo global, sólo es válida para regiones y funciones convexas.

Definición 16 $D \subseteq G$ es un conjunto convexo cuando, para todo $x, y \in D$ se tiene que $L(x, y) \subseteq D$

Definición 17 Para cualquier conjunto convexo D , definimos $g : D \rightarrow R$ es una función convexa sobre D si para todo $x, y \in D$ y $\lambda \in [0, 1], w \in L_\lambda(x, y)$ se tiene que $g(w) \leq (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(y)$

Teorema 18 Dada una red G con métrica de ruta más corta, G conectada con al menos un arco. La función $d(\cdot, v) : G \rightarrow R$ es convexa para todo $v \in V$ si G es árbol.

Demostración.

$\Leftrightarrow G$ es árbol $\Rightarrow G$ es conectada $\Rightarrow G$ es convexa

Sean $x, y \in G$ y fijo $\lambda \in [0, 1]$ y $w \in L_\lambda(x, y)$

P.D. $d(w, v) \leq (1 - \lambda)d(x, v) + \lambda d(y, v)$

Sabemos que en un árbol, la ruta entre cualesquiera dos puntos es única, de esta forma, s.p.g. supongamos que $w, y \in L_\lambda(x, v)$ y $y \in L_\lambda(w, v)$

$$\Rightarrow \text{como } w \in L_\lambda(x, v) \Rightarrow d(w, v) = \lambda d(x, v)$$

$$\Rightarrow d(w, v) \leq \lambda d(x, v) + (1 - \lambda)d(y, v)$$

\Rightarrow) Sabemos que d es convexa sobre G . P.D. que G es árbol.

Supongamos que no lo es

$\Rightarrow G$ no es conectada o G tiene al menos un circuito o G no tiene arcos (descartado).

caso a) G no es conectada $\Rightarrow G$ no es convexa

$\Rightarrow d$ no es función convexa sobre G !

caso b) G tiene al menos un circuito $P \Rightarrow$ sea $y \in P$

$\Rightarrow \exists x \in P$ t.q. $P_1 : x \rightarrow \dots \rightarrow y$ y $P_2 : x \rightarrow \dots \rightarrow y$

con P_1 y P_2 distintas y las distancias de ambas rutas iguales.

$\Rightarrow d$ no es función !

Por lo tanto G es árbol.

■

Corolario 19 Una red conectada tiene una métrica d convexa, con $d : G \times G \rightarrow R$ continua ssi ésta es un árbol.

Demostración.

\Leftarrow) Por el teorema anterior.

\Rightarrow) Supongamos que d es una métrica convexa sobre G y G no es un árbol

\Rightarrow Sea P circuito de longitud l en G , sea $v \in P$

\Rightarrow elegimos puntos $x, y, z \in P$ t.q. $d(v, x) = d(y, z) = \frac{l}{2}$

$y \frac{l}{4} = d(v, y) = d(x, y) = d(z, v) = d(x, z)$

$\Rightarrow x \in L_{\frac{1}{2}}(z, y)$ pero $d(v, x) = \frac{l}{2} > \frac{1}{2}d(v, y) + \frac{1}{2}d(v, z) = \frac{l}{4}$!

(se contradice el hecho de que d es convexa)

Por lo tanto G es árbol.

■

Definición 21 Sea $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$ es no decreciente si $d'_i \geq d_i, i = 1, \dots, n$ entonces $f(d'_1, \dots, d'_n) \geq f(d_1, \dots, d_n)$

Lema 22 Si (G, d) tiene nodos v_1, \dots, v_n y métrica convexa d y si $f : R^n \rightarrow R$ es convexa y no decreciente, entonces $z : G \rightarrow R$ dada por $z(x) = f(d(x, v_1), \dots, d(x, v_n))$ es convexa sobre G .

Demostración.

P.D. $\forall x, y \in G, \lambda \in [0, 1]$ y $w \in L_\lambda(x, y)$

$$z(w) \leq (1 - \lambda)z(x) + \lambda z(y)$$

como d es una métrica convexa

$$d(w, v_i) \leq (1 - \lambda)d(x, v_i) + \lambda d(y, v_i) \forall i = 1, \dots, n$$

\Rightarrow como f es no decreciente y convexa, se tiene

$$z(w) = f(d(w, v_1), \dots, d(w, v_n))$$

$$\leq f\{(1 - \lambda)d(x, v_1) + \lambda d(y, v_1), \dots, (1 - \lambda)d(x, v_n) + \lambda d(y, v_n)\}$$

$$\leq (1 - \lambda)f(d(x, v_1), \dots, d(x, v_n)) + \lambda f(d(y, v_1), \dots, d(y, v_n))$$

$$= (1 - \lambda)z(x) + \lambda z(y)$$

■

Lema 23 Sea $g : R \rightarrow R^n$ dada por $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ donde cada g_i es lineal, y sea $f : R^n \rightarrow R$ convexa. Entonces $h : R \rightarrow R$ determinada por $h(t) = f(g(t))$, es convexa.

Demostración.

Sean $t_1, t_2 \in R$ y $\lambda \in [0, 1]$

$$\Rightarrow h[(1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2] = f[g((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2)]$$

$$= f[(1 - \lambda)g(t_1) + \lambda g(t_2)] \text{ por ser } g \text{ lineal}$$

$$\leq (1 - \lambda)f(g(t_1)) + \lambda f(g(t_2)) \text{ por ser } f \text{ convexa}$$

$$= (1 - \lambda)h(t_1) + \lambda h(t_2)$$

■

Lema 24 Si $\min_{x \in D} z(x)$ es un problema convexo y $D \subseteq G$, entonces una solución óptima local del problema es una solución óptima global.

Demostración.

Sea $x_0 \in D$ un mínimo local para z , y supongamos que existe un $x^* \in D$ tal que $z(x_0) > z(x^*)$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } D(x_0, \varepsilon) \subseteq D \text{ en el cual } z(x_0) \text{ es mínimo local}$$

$$\Rightarrow L(x_0, x^*) \subseteq D \text{ por ser } D \text{ convexo}$$

$$\Rightarrow \text{sea } x \in L(x_0, x^*) \wedge x \in D(x_0, \varepsilon) \text{ con } x \neq x_0$$

$$\Rightarrow z(x_0) \leq z(x) > z(x^*) \nabla$$

porque z no sería convexa sobre D .

TEOREMA DE ÁLGEBRA.

Dado un conjunto $A \neq \emptyset$ existe una biyección entre las particiones de A y las relaciones de equivalencia de A .

Demostración.

\Rightarrow) Sea $P_A = \{X_1, X_2, \dots\}$ una partición de A , definimos

$$R = \cup_{i \in I} \{X_i \times X_i \mid X_i \in P_A\}$$

P.D. que R es una relación de equivalencia

1) R es reflexiva

Sea $a \in A \Rightarrow \exists i \in I$ t. q. $a \in X_i \Rightarrow (a, a) \in X_i \times X_i \Rightarrow (a, a) \in R$

2) R es simétrica

Sea $(a, b) \in R \Rightarrow \exists i \in I$ t. q. $a, b \in X_i \Rightarrow (a, b) \in X_i \times X_i$

$\Rightarrow \exists (b, a) \in X_i \times X_i \Rightarrow (b, a) \in R$

3) R es transitiva

Sean $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow \exists i \in I$ t. q. $a, b \in X_i \Rightarrow (a, b) \in X_i \times X_i$

$\Rightarrow \exists j \in I$ t. q. $b, c \in X_j \Rightarrow (b, c) \in X_j \times X_j \Rightarrow$ p.d. $i = j$

supongamos que $i \neq j$ y $(a, b) \in X_i \times X_i \wedge (b, c) \in X_j \times X_j$

$\Rightarrow b \in X_i \cap X_j = \emptyset$! por definición de partición

$\Rightarrow (a, b), (b, c) \in X_i \times X_i$

$\Rightarrow a, c \in X_i \Rightarrow (a, c) \in X_i \times X_i \Rightarrow (a, c) \in R$

\Leftarrow) **P.D. que una relación de equivalencia induce una partición.**

Sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definimos $P_A = \{x^- \mid x \in A\}$

1) $x^- \in P_A$ **P.D. $x^- \neq \emptyset$ pero $x^- \neq \emptyset$ porque $(x, x) \in R$ por ser R reflexiva.**

2) $x^- \neq y^- \in P_A$ **P.D. $x^- \cap y^- = \emptyset$**

supongamos que $x^- \cap y^- = \emptyset \Rightarrow \exists a \in x^- \cap y^- \Rightarrow (x, a) \in R \wedge (a, y) \in R$

$\Rightarrow (x, y) \in R$ por ser R transitiva $\Rightarrow x^- = y^-$!

3) **P.D. $\cup \{x^- \mid x \in A\} = A$**

$\supseteq \mid a \in A \Rightarrow a \in a^- \in \cup \{x^- \mid x \in A\}$

$\subseteq \mid a^- \in \cup \{x^- \mid x \in A\} \Rightarrow x \in a^- \Rightarrow x \in A.$

■

Capítulo 2

EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE UNA SOLA FACILIDAD.

En este capítulo se describe el problema de localización de una sola facilidad en términos generales, se definen conceptos como conjunto arbolado y segmento arbolado, que son los entes convexos donde se resolverá el problema de localización de manera local; para posteriormente comparar y elegir el óptimo global, es decir, el óptimo a el problema original; así como se demostrarán resultados que son necesarios para la resolución del problema. Finalmente se proporciona el algoritmo que determina la solución óptima al problema original.

Consideremos una red G con un conjunto de nodos $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, un conjunto de arcos A que unen a los nodos y una métrica d , daremos la solución al problema de localización sobre redes:

$$\min_{x \in D \subseteq G} z(x) = f[d(x, v_1), \dots, d(x, v_n)] \dots \dots (1)$$

Donde la función de costos $f : R^n \rightarrow R$ es convexa y D es la unión de una cantidad grande pero finita de intervalos cerrados sobre G , entonces sólo es necesario hallar un óptimo local.

La solución de este problema para el caso en que D sea el conjunto de los nodos V es un poco más simple, pues sólo basta utilizar algún algoritmo para calcular la ruta más corta desde cada nodo a

todos los demás; elaborando una matriz de distancias y se elegirá el nodo cuya n -ada de distancias, al ser evaluada en f nos proporcione el valor más pequeño para $z(x)$; aunque en una red considerablemente grande, se puede tornar muy extenso en cuanto a esfuerzo computacional.

2.1 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CONVEXO EN GENERAL.

Si se considera que la función f del problema (1) es una función convexa mediante una descomposición de cada arco de G en "segmentos arbolados" determinaremos la solución óptima del problema lineal convexo sobre cada segmento arbolado; posteriormente encontramos la solución óptima para el problema original, es decir, el problema (1); para ello será necesario definir y demostrar ciertos resultados.

Definición 25 $A(u, w)$ es un arco que conecta los nodos u y w , si los puntos $x, y \in A$, entonces $A(x, y)$ denota la porción estrictamente entre x y y ; $A[x, y]$ denota la cerradura de $A(x, y)$.

Recordemos que $b(x, y)$ la longitud de $A[x, y]$ con respecto a $b = b(u, w)$, para comprender la siguiente definición.

Definición 26 Sean $x, y \in A(u, w)$ cualesquiera puntos en el arco, decimos que pertenecen al mismo conjunto arbolado si para todo $v_i \in V$,

$$L(x, v_i) - A[x, y] = L(y, v_i) - A[x, y]$$

Ejemplo 27 En la siguiente figura se muestra que los puntos x_1 y x_2 pertenecen al mismo conjunto arbolado; pero x_3 no pertenece al mismo conjunto.

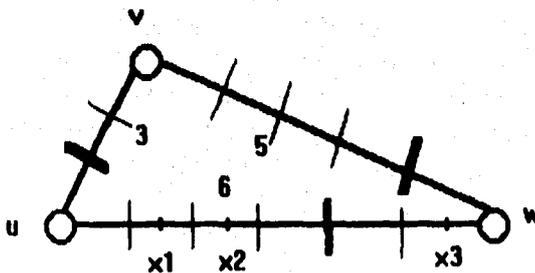


Fig. 1

Definición 28 Sea $x \in A(u, v)$ un punto cualquiera en el arco, sean $d_i(x) = b(u, x) + d(u, v_i)$ y $d'_i(x) = b - b(u, x) + d(w, v_i)$, entonces

$$d(x, v_i) = \min \{d_i(x), d'_i(x)\}$$

Si $d_i(x)$ es más pequeño que $d'_i(x)$ entonces las rutas más cortas de x a v_i contienen al nodo u ; si $d'_i(x)$ es más pequeño que $d_i(x)$ las rutas más cortas contienen a w ; si son iguales entonces contienen a ambos u y w .

Las definiciones y lemas subsecuentes son la base del algoritmo de resolución, en ella se construyen los segmentos arbolados de un arco dado dentro de una red, así como se define una función que nos permite encontrar problemas equivalentes al problema (1); pero de manera local.

Definición 29 Sea $S_i = 1/2 [d(w, v_i) - d(u, v_i) + b]$, entonces se tienen las siguientes equivalencias; el primer caso equivale a $b(u, x) < S_i$, el segundo a $b(u, x) > S_i$ y el tercero a $b(u, x) = S_i$.

Lema 30 Sean los nodos en V numerados como S_1, \dots, S_n en una sucesión no decreciente. Entonces dado un arco A de u a w y puntos $x, y \in A(u, w)$ éstos pertenecen al mismo conjunto arbolado así:

$$S_j = b(u, x) = b(u, y) \text{ p.a. } j \in \{1, \dots, n\}$$

o

$$S_j < b(u, x) < S_{j+1} \text{ y } S_j < b(u, y) < S_{j+1} \\ \text{p.a. } j \in \{1, \dots, n-1\}$$

Demostración.

Sean $x, y \in A(u, w)$

\Leftrightarrow Supongamos $S_j = b(u, x) = b(u, y)$ p.a. $j \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow x, y$ están en el mismo conjunto arbolado.

Supongamos ahora $S_j < b(u, x) < S_{j+1}$ y $S_j < b(u, y) < S_{j+1}$ P.D.

que se cumple: $L(x, v_i) - A[x, y] = L(y, v_i) - A[x, y]$ para todo $v_i \in V$

\Rightarrow sumando las desigualdades de la hipótesis se tiene:

$$d(w, v_j) - d(u, v_j) + b < b(u, x) + b(u, y) < d(w, v_{j+1}) - d(u, v_{j+1}) + b$$

ahora, si $i \leq j$ tenemos la primer desigualdad de donde se infiere $d'_j(x) + d'_j(y) < d_j(x) + d_j(y)$ y con las observaciones pasadas, también

12CAP 'ITULO 2. EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE UNA SOLA FACILIDAD.

sabemos que las rutas más cortas desde x y y a v_i incluyen a w y si $i > j$ con un razonamiento análogo se concluye que contienen a u . De donde se concluye que en ambos casos se cumple la igualdad.

⇒ Supongamos $L(x, v_i) - A[x, y] = L(y, v_i) - A[x, y]$ para todo $v_i \in V$ entonces trabajamos por casos.

a) Si $S_i = b(u, x)$ p.a. $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow u, w \in L(x, v_i)$ y por hipótesis $u, w \in (y, v_i)$

por lo tanto $b(u, y) = S_i$

b) Si $S_i < b(u, x) < S_{i+1}$ entonces todas las rutas más cortas de x a v_i contienen a w

y todas las rutas más cortas de y a v_{i+1} contienen a u

⇒ por hipótesis todas las rutas más cortas de y a v_i contienen a w y análogamente para las rutas más cortas de x a $v_{i+1} \Rightarrow S_i < b(u, y) < S_{i+1}$.

■

Corolario 31 *La relación de pertenecer al mismo conjunto arbolado es de equivalencia.*

Demostración.

Inmediata del hecho de que esta relación induce una partición de cada arco. (ver capítulo 1 TEOREMA DE ÁLGEBRA)

■

El siguiente corolario, nos indica claramente quienes son los conjuntos arbolados en un arco dado.

Corolario 32 Sean S'_0, \dots, S'_{m+1} los distintos S_i 's, en el lema anterior en orden no decreciente, donde $0 \leq m \leq n-2$. Sea z_0, \dots, z_{m+1} puntos de $A(u, w)$ tal que $b(u, z_i) = S'_{i, i=0, \dots, m+1}$. Entonces los conjuntos arbolados en $A(u, w)$ son los singles $\{z_i\}_{i=1, \dots, m}$ y los intervalos abiertos $A(z_i, z_{i+1})_{i=0, \dots, m}$.

Demostración.

Inmediata de la definición de conjunto arbolado.

■

Definición 33 *Un segmento arbolado es la cerradura de cualquier conjunto arbolado.*

La definición anterior es de suma importancia, pues debemos recordar que el algoritmo de resolución se lleva a efecto sobre los segmentos arbolados.

Corolario 34 *Los segmentos arbolados son al menos uno y a lo mas $n - 1$ intervalos adyacentes que juntos cubren a A con cotas z_0, \dots, z_{m+1} .*

Demostración.

Inmediata de la definición de segmento arbolado y corolario anterior.

■

2.2 RESOLUCIÓN.

Queremos minimizar $z(x)$ sobre cada segmento arbolado de G y seleccionar el valor más pequeño, este problema es claramente equivalente a resolver el problema original.

Definición 35 *Para cada arco $A = A[u, w]$ definimos $h : [0, b] \mapsto R$ por*

$$h(d(u, y)) = f(d(y, v_1), \dots, d(y, v_n))$$

para cualquier $y \in A$.

Entonces minimizar $z(x)$ sobre un segmento arbolado $[x_1, x_2] \subseteq A$ es claramente equivalente a resolver el problema de búsqueda lineal

$$\begin{aligned} & \min h(t) \quad (*) \\ & b(u, x_1) \leq t \leq b(u, x_2) \end{aligned}$$

Para demostrar que éste es un problema convexo, supongamos que los nodos están ordenados en una sucesión no decreciente S_1, \dots, S_n entonces, para algún $j \in \{1, \dots, n\}$

$$f(d(y, v_1), \dots, d(y, v_n)) = f(d(y, v_1) + t, \dots, d(u, v_j) + t, d(u, v_{j+1}) + b - t, \dots, d(y, v_n) + b - t)$$

con $y \in [x_1, x_2]$ y por esto, f función de t es lineal y como d es convexa entonces h es convexa sobre $[b(u, x), b(u, y)]$ por el lema.

ALGORITMO DE RESOLUCIÓN

Paso 0

Tomar un conjunto de segmentos arbolados en un arco y $k = 0$

Paso 1

Elegir cualquier arco no examinado y factible $A = A[u, w]$ de G ; si ningún arco permanece, pasar al paso 3.

Calcular $d(u, v_i)$ y $d(w, v_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$ y usar los resultados para el cálculo de S_1, \dots, S_n , ordenarlos de manera no decreciente y etiquetarlos con S'_1, \dots, S'_n , localizar los segmentos arbolados como se indica en el corolario.

Paso 2

Para cada segmento arbolado $A[x_i, x_j]$ sobre A , sea $k = k + 1$ y hallar una sol t^* del problema de búsqueda lineal convexo (*); denote el correspondiente punto sobre A por x_k^* y sea $z_k^* = h(t^*)$, cuando todos los segmentos de A son enumerados, regresar al paso 1.

Paso 3

Comparar los distintos z_k^* y elegir el más pequeño, éste es solución del problema original.

Es claro que el dividir cada arco de la red en una cantidad finita de segmentos arbolados y evaluar en cada uno; puede ser, de hecho, inoperante; esto dependerá de la cantidad de arcos que se tengan en la red; pero en general requiere de mucho esfuerzo computacional.

En el apéndice de este trabajo se muestra la resolución de un problema de localización en redes con el uso de este algoritmo.

Capítulo 3

UNA TEORÍA MÉTRICA DE REDES.

En este capítulo veremos un algoritmo propuesto por el Dr. John Hooker; requeriremos de nuevos conceptos como lo son espacios gráficos y espacios arbolados, así que iniciaremos con definiciones y resultados necesarios para abordar dichos conceptos.

3.1 CONVEXIDAD Y ESPACIOS ARBOLADOS.

Definición 36 Interioridad. Para cualesquiera $z, z \neq x, y$ puntos, z está entre x y y si $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 37 En redes decimos que $z \in L_\lambda(x, y)$ si $d(x, z) = \lambda d(x, y)$, $\lambda \in (0, 1)$ y z está entre x y y .

Definición 38 Sea $L(x, y)$ el segmento de línea que conecta a x y y , si es el conjunto de puntos entre ellos, conteniendo también a x y y , o también

$$L(x, y) = \cup_{\lambda \in [0, 1]} L_\lambda(x, y)$$

Definición 39 Si $L(z_0, \dots, z_k)$ denota $L(z_0, z_1) \cup \dots \cup L(z_{k-1}, z_k)$, decimos que $L(z_0, \dots, z_k)$ es una cadena; en particular una k -cadena que conecta z_0 y z_k si $d(z_0, z_k) = d(z_0, z_1) + \dots + d(z_{k-1}, z_k)$

Definición 40 $C(y_0, \dots, y_m)$ denota cualquier cadena de la forma

$$L(z_0, \dots, z_k), \text{ donde } y_0 = z_0, y_m = z_k \text{ y } \{y_1, \dots, y_{m-1}\} \subseteq \{z_1, \dots, z_{k-1}\}.$$

Definición 41 Si (S, d) es un espacio métrico y $V \subseteq S$ es un conjunto de puntos distinguidos como nodos, decimos que (S, d, V) es un espacio métrico con nodos.

Definición 42 Un conjunto u_v en una cadena $C(x, y) \subseteq S$ es una colección de puntos de $C(x, y)$ con respecto a $v \in V$ si para cualquier $z \in C(x, y)$ se satisface $d(z, v) = d(z, u_v) + d(u_v, v)$. Entonces $c(x, y)$ es una cadena arbolada si ésta contiene una colección de puntos u_v con respecto a cada $v \in V$.

Definición 43 (S, d, V) es un espacio arbolado si para cualesquiera 2-cadena en S ésta es una cadena arbolada.

Observación 1 Si S es un árbol y $x, y \in V$, entonces todas las 2-cadenas son arboladas y por lo tanto cualquier árbol es un espacio arbolado.

Como anteriormente, d es una métrica convexa si $d(\cdot, x)$ es convexa sobre S para todo $x \in V$ (no necesariamente para todo $x \in S$). De igual manera d no es convexa en un espacio arbolado para todo $x \in S$.

Teorema 44 Si (S, d, V) es arbolado entonces para cualquier $v \in V$, $d(\cdot, v)$ es convexa.

Demostración.

Sean $x, y \in S$, $v \in V$, $\lambda \in [0, 1]$ y sea $z \in L_\lambda(x, y)$

P.D. $d(z, v) \leq (1 - \lambda)d(x, v) + \lambda d(y, v)$

Dado que S es arbolado $\Rightarrow \exists u_v \in L(x, z, y)$ t.q.

$d(z, v) = d(z, u_v) + d(u_v, v)$ y $d(x, v) = d(x, u_v) + d(u_v, v)$

\Rightarrow es suficiente demostrar que se verifica

$$d(z, u_v) \leq (1 - \lambda)d(x, u_v) + \lambda d(y, u_v)$$

Se tienen 2 casos.

a) $u_v \in L(z, y) \Rightarrow d(x, u_v) = d(x, z) + d(z, u_v)$ (Ver fig. 2a)

observemos que $d(x, z) = \lambda d(x, y)$ y $d(y, z) = (1 - \lambda)d(x, y)$

es decir $\lambda = \frac{d(x,z)}{d(x,y)}$ y $(1-\lambda) = \frac{d(y,z)}{d(x,y)}$ (*)
 y también $d(x, u_v) = (1-\lambda')d(x, y)$ y $d(y, u_v) = \lambda'd(x, y)$
 es decir $(1-\lambda') = \frac{d(x, u_v)}{d(x, y)}$ y $\lambda' = \frac{d(y, u_v)}{d(x, y)}$ (***)
 $\Rightarrow (1-\lambda)d(x, u_v) + \lambda d(y, u_v) = (1-\lambda)[d(x, z) + d(z, u_v)] + \lambda d(y, u_v)$
 $= d(z, u_v) + d(x, z) + \lambda[d(y, u_v) - d(x, u_v)]$
 \Rightarrow basta demostrar que $d(x, z) + \lambda[d(y, u_v) - d(x, u_v)] \geq 0$
 \Rightarrow partimos de la siguiente desigualdad, dado que $\lambda' \geq 0$ se tiene
 $\lambda' \geq -\lambda' \Leftrightarrow 1 + \lambda' \geq 1 - \lambda' \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{d(x, y)} + \frac{d(y, u_v)}{d(x, y)} \geq \frac{d(x, u_v)}{d(x, y)}$ (por ***)
 $\Leftrightarrow d(x, y) + d(y, u_v) \geq d(x, u_v)$
 $\Leftrightarrow d(x, z)d(x, y) + d(x, z)d(y, u_v) \geq d(x, z)d(x, u_v)$
 $\Leftrightarrow d(x, z) + \lambda d(y, u_v) \geq \lambda d(x, u_v)$ (por *)
 $\Leftrightarrow d(x, z) + [\lambda d(y, u_v) - \lambda d(x, u_v)] \geq 0$
 q.e.d. el caso (a).

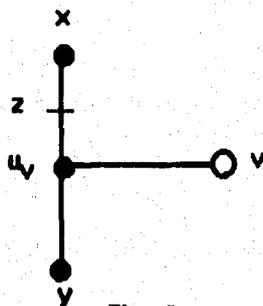


Fig. 2a

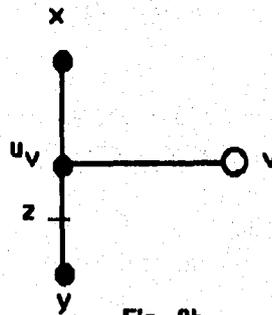


Fig. 2b

b) $u_v \in L(x, z) \Rightarrow d(y, u_v) = d(y, z) + d(z, u_v)$

(Ver Fig. 2b)

y se procede de manera análoga al caso (a).

■

Observación 2 No es suficiente para asegurar convexidad de métrica, que todo segmento de línea sea una cadena arbolada para que toda cadena sea arbolada, como se ve en el siguiente ejemplo:

Sea $V = S = \{x, y, z, w\}$ entonces todo segmento de línea es arbolado (Ver Fig. 3); pero $d(\cdot, w)$ no es convexa, pues

$$2 = d(w, z) \leq (1 - \lambda)d(x, z) + \lambda d(y, z) \leq 1$$

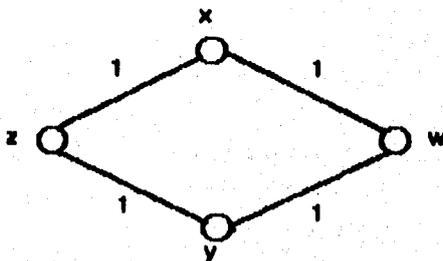


Fig. 3

Definición 45 Decimos que un segmento de línea $L(x, y)$ es una ruta, si para cualquier $z_0, \dots, z_k \in L(x, y)$, con $z_0 = x$ y $z_k = y$ y $d(z_0, z_i) < d(z_0, z_{i+1})$ para $i = 0, \dots, k-1$, el conjunto $L(z_0, \dots, z_k)$ es una cadena.

Teorema 46 Todo segmento de línea que conecta dos nodos en un espacio arbolado es una ruta.

Demostración.

Por inducción.

1o) La base es un arco que conecta dos nodos en un espacio arbolado.

P.D. que es ruta

Supongamos que (v_i, v_j) es un arco que no es ruta en un espacio arbolado

$\Rightarrow \exists z_0, \dots, z_k \in (v_i, v_j)$ con $z_0 = v_i, z_k = v_j$ y $d(z_0, z_i) < d(z_0, z_{i+1})$ para $i = 0, \dots, k-1$, tal que el conjunto $L(z_0, \dots, z_k)$ no es una cadena.

$\Rightarrow d(v_i, v_j) = d(z_0, z_k) < d(z_0, z_1) + \dots + d(z_{k-1}, z_k)$

\Rightarrow tomemos el j más grande tal que

$d(z_0, z_j) = d(z_0, z_1) + \dots + d(z_{j-1}, z_j)$

obviamente el conjunto que satisface esto es no vacío, pues la igualdad se cumple para $j = 1$

supongamos $j > 1 \Rightarrow L(z_0, z_1, \dots, z_j)$ es una j -cadena, fijemos a z_r en ella y tomamos la 2-cadena $L(z_0, z_r, z_j)$ en este espacio arbolado

$\Rightarrow \forall v \in V$ y $\forall x \in L(z_0, z_r, z_j)$ existe al menos un u_v tal que

$d(x, v) = d(x, u_v) + d(u_v, v)$ en particular si $x = z_0$ y $v = v_j$

$\Rightarrow u_v$ tal que $d(v_i, v_j) = d(z_0, v_j) = d(z_0, u_{v_j}) + d(u_{v_j}, v_j)$

$\Rightarrow L(v_i, u_{v_j}, v_j)$ es 2-cadena y por lo tanto es ruta.

Si $j = 1 \Rightarrow L(v_i, v_i, z_1)$ es 2-cadena y por lo tanto es ruta.

2o) Hipótesis de Inducción. S.p.g. supongamos que dado un segmento de línea $L(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$ con v_i nodo para $i = 1, \dots, k-1$ en un espacio arbolado es una ruta.

3o) P.D. que dado un segmento de línea $L(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k)$ con v_i nodo para $i = 1, \dots, k$ en un espacio arbolado, éste es una ruta.

$\Leftrightarrow d(v_1, v_k) = d(v_1, v_2) + \dots + d(v_{k-2}, v_{k-1}) + d(v_{k-1}, v_k)$

pero por hipótesis se tiene que

$d(v_1, v_{k-1}) = d(v_1, v_2) + \dots + d(v_{k-2}, v_{k-1})$

y que $L(v_1, v_j, v_{k-1})$ es 2-cadena para v_j cualquiera

$\Rightarrow \forall v \in V, \forall x \in L(v_1, v_j, v_{k-1})$ existe algún u_v tal que $d(x, v) = d(x, u_v) + d(u_v, v)$

\Rightarrow en particular si $x = v_1$ y $v = v_k$

$\Rightarrow L(v_1, u_{v_k}, v_k)$ es 2-cadena y por lo tanto es ruta.

■

3.2 CONVEXIDAD Y ESPACIOS GRÁFICOS.

En esta sección se definirán los conceptos con los cuales trabajaremos el algoritmo de resolución, es decir, espacios gráficos.

Definición 47 $z \in C(x, y)$ es un punto salida de $C(x, y)$ si z es un punto colección u_v de $C(x, y)$ con respecto a algún $v \notin C(x, y)$. También $z \in C(x, y)$ es interior a $C(x, y)$ si $z \neq x, y$.

Definición 48 Si (S, d, V) es un espacio métrico con nodos, $z \in S$, z es un punto interior-salida de (S, d, V) si es un punto interior-salida de alguna cadena en S .

Definición 49 Un espacio métrico con nodos (S, d, V) es un espacio gráfico si satisface las siguientes condiciones:

a) Cualquier 2-cadena $L(x, z, y)$ en S contiene una cadena $C(x, y)$ formada por una cantidad finita de cadenas arboladas.

b) V contiene todos los puntos interiores-salida de (S, d, V) .

Lema 50 Si un segmento de línea $L(x, y)$ contiene una cadena arbolada $C(x, y)$, entonces $C(x, y)$ contiene todos los nodos de $L(x, y)$.

Demostración.

Sea z nodo en $L(x, y)$

\Rightarrow dado que $C(x, y)$, es arbolada hay una colección de puntos $u_z \in C(x, y)$ con respecto a z tales que

$$d(x, z) = d(x, u_z) + d(u_z, z) \text{ y } d(y, z) = d(y, u_z) + d(u_z, z) \quad (*)$$

$$\text{pero } u_z, z \in L(x, y) \Rightarrow d(x, u_z) + d(u_z, y) = d(x, z) + d(z, y) \quad (**)$$

\Rightarrow sustituimos $(*)$ en $(**)$

$$\Rightarrow d(x, u_z) + d(u_z, y) = d(x, u_z) + d(u_z, y) + 2d(u_z, z)$$

$$\Rightarrow d(u_z, z) = 0 \Rightarrow u_z = z \text{ por lo tanto } z \in C(x, y)$$

■

Lema 51 Si $C(x, z) \equiv L(x, v_1, \dots, v_k, z)$ y $C(z, y) \equiv L(z, w_1, \dots, w_j, y)$ son cadenas y $z \in L(x, y)$, entonces $C(x, z, y) \equiv C(x, z) \cup C(z, y)$ es una cadena.

Demostración.

1o) demostremos que $L(x, z) \subseteq L(x, y)$ y $L(z, y) \subseteq L(x, y)$, sea $w \in L(x, z)$

$$\Rightarrow d(x, z) = d(x, w) + d(w, z)$$

$$\Rightarrow d(x, y) = d(x, w) + d(w, z) + d(z, y) \geq d(x, w) + d(w, y) \geq d(x, y)$$

$$\Rightarrow d(x, w) + d(w, y) = d(x, y)$$

$\Rightarrow w \in L(x, y)$ y por lo tanto $L(x, z) \subseteq L(x, y)$ la otra contención se demuestra de manera análoga.

2o) De lo anterior se sabe que $C(x, z, y) \subseteq L(x, y)$, también, si $z \in L(x, y)$

$$\Rightarrow d(x, v_1) + \dots + d(v_k, z) + d(z, w_1) + \dots + d(w_j, y)$$

$$= d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$$

Por lo tanto $C(x, z, y)$ es una cadena

■

Lema 52 Si $L(z_0, \dots, z_k)$ es una cadena, entonces $L(z_0, \dots, z_j)$ es una cadena para $j = 0, \dots, k$

Demostración.

$$d(z_0, z_k) = d(z_0, z_1) + \dots + d(z_{k-1}, z_k) \text{ por ser cadena}$$

$$\geq d(z_0, z_j) + d(z_j, z_{j+1}) + \dots + d(z_{k-1}, z_k) \text{ por desigualdad del triángulo}$$

$$\geq d(z_0, z_k) \text{ por desigualdad del triángulo}$$

$$\Rightarrow d(z_0, z_j) = d(z_0, z_1) + \dots + d(z_{j-1}, z_j) \text{ y como } z_1, \dots, z_{j-1} \in L(z_0, z_j)$$

se concluye que $L(z_0, z_j)$ es una cadena.

Lema 53 Si $L(x, z, y)$ es una cadena y $u \in L(x, z), v \in L(z, y)$ entonces $z \in L(u, v)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(x, u) + d(u, z) + d(z, v) + d(v, y) \text{ por ser cadena} \\ &\geq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) \text{ por desigualdad del triángulo} \\ &\geq d(x, y) \text{ por desigualdad del triángulo} \\ &\Rightarrow d(u, z) + d(z, v) = d(u, v) \Rightarrow z \in L(u, v) \end{aligned}$$

Lema 54 Si (S, d, V) tiene una métrica convexa, entonces cualquier cadena $C(x, w, y)$ de dos cadenas arboladas $C(x, w)$ y $C(w, y)$ es en sí misma una cadena arbolada.

Demostración.

Supongamos que $C(x, w, y)$ no es cadena arbolada. Sea $v \in V$ nodo para el cual $C(x, w, y)$ no tiene colección de puntos u_v . Dado que $C(x, w)$ y $C(w, y)$ si son arboladas, supongamos que u_1 y u_2 son de la colección de puntos de las cadenas arboladas respectivamente con respecto a v .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow u_1 \neq w \text{ pues si lo fuera } \Rightarrow \forall z \in C(x, w) \\ &d(z, v) = d(z, w) + d(w, v) = d(z, w) + d(w, u_2) + d(u_2, v) = d(z, u_2) + \\ &d(u_2, v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow u_2$ sería colección de puntos de la cadena $C(x, w)$!

de igual manera se demuestra que $w \neq u_2$

$\Rightarrow u_1 \neq w \neq u_2 \Rightarrow w \in L(u_1, u_2)$ por el lema anterior, y dado que $u_1 \neq u_2$

$\Rightarrow w \in L_\lambda(u_1, u_2)$ con $\lambda \in (0, 1)$.

Para demostrar que la métrica no es convexa, basta demostrar que:

$$\begin{aligned} d(w, v) &> (1 - \lambda)d(u_1, v) + \lambda d(u_2, v) \\ &\Rightarrow \text{se tiene que } d(w, v) = d(w, u_1) + d(u_1, v) = d(w, u_2) + d(u_2, v) \\ &\Rightarrow d(u_2, v) = d(w, u_1) + d(u_1, v) - d(w, u_2) \\ &\text{pero } d(w, u_1) = \lambda d(u_1, u_2) \text{ y } d(w, u_2) = (1 - \lambda)d(u_1, u_2) \\ &\Rightarrow d(u_2, v) = d(u_1, v) + (2\lambda - 1)d(u_1, u_2) \\ &\Rightarrow (1 - \lambda)d(u_1, v) + \lambda d(u_2, v) = (1 - \lambda)d(u_1, v) + \lambda [d(u_1, v) + (2\lambda - 1)d(u_1, u_2)] \\ &= (1 - \lambda)d(u_1, v) + \lambda d(u_1, v) + 2\lambda^2 d(u_1, u_2) - \lambda d(u_1, u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< d(u_1, v) + 2\lambda d(u_1, u_2) - \lambda d(u_1, u_2) \text{ porque } (0 < \lambda < 1) \\ &= d(u_1, v) + \lambda d(u_1, u_2) = d(u_1, v) + d(w, u_1) = d(w, v) \end{aligned}$$

■

Lema 55 Toda 2-cadena $L(x, z, y)$ en un espacio gráfico, contiene una cadena $C(x, z, y)$ formada por una cantidad finita de cadenas arboladas.

Demostración.

Sea $L(x, z, y)$ cualquier dos cadena en un espacio gráfico

$\Rightarrow L(x, z)$ contiene una cadena $C(x, z)$ y $L(z, y)$ contiene una cadena $C(z, y)$ de una cantidad finita de cadenas arboladas

pero $L(x, z, y)$ es una cadena y $z \in L(x, y) \Rightarrow C(x, z, y) = C(x, z) \cup C(z, y)$ es una cadena arbolada y $z \in C(x, z, y)$.

■

Lema 56 Si toda cadena de dos cadenas arboladas en (S, d, V) son arboladas, entonces cualquier cadena $C(x, y)$ de una cantidad finita de cadenas arboladas es arbolada.

Demostración.

Sea $C(x, y) = C(z_0, z_1) \cup \dots \cup C(z_{k-1}, z_k)$ donde $z_0 = x, z_k = y$ y cada (z_i, z_{i+1}) es arbolado para $i = 1, \dots, k-1$

\Rightarrow por inducción

1) $C(z_0, z_1)$ es cadena arbolada

2) Supongamos que $C(z_0, z_j) = C(z_0, z_1) \cup \dots \cup C(z_{j-1}, z_j)$ es arbolada

3) P.D. $C(z_0, z_{j+1}) = C(z_0, z_j) \cup C(z_j, z_{j+1})$ es una cadena arbolada pero esto es inmediato de los lemas anteriores.

Por lo tanto $C(x, y)$ es cadena arbolada.

■

Teorema 58 Si (S, d, V) es gráfico, entonces éste es arbolado ssi d es una métrica conveza.

Demostración.

\Rightarrow) ya se demostró.

\Leftarrow) P.D. que S es un espacio arbolado.

Sea $L(x, y, z)$ 2-cadena de S

$\Rightarrow L(x, y, z)$ contiene una $C(x, y, z)$ cadena de una cantidad finita de cadenas arboladas.

$\Rightarrow C(x, y, z)$ es en sí misma arbolada, por el lema anterior ya que S tiene métrica convexa.

P.D. que u_v de $C(x, y, z)$ es una colección de puntos para $L(x, y, z)$ y por tanto $L(x, y, z)$ es arbolado.

caso a) $u_v = x$ o $u_v = y$, s.p.g. supongamos $u_v = x$ es una colección de puntos para todo $t \in L(x, y, z) \Rightarrow$ dado que $u_v = x$ se tiene

$$d(y, v) = d(y, x) + d(x, v) = d(y, t) + d(t, x) + d(x, v) \text{ porque } t \in L(x, y, z) \\ \geq d(y, t) + d(t, v) \geq d(y, v)$$

por lo tanto $d(t, v) = d(t, x) + d(x, v)$

caso b) $u_v \neq x$ y $u_v \neq y$ entonces u_v es interior a $C(x, y, z)$

\Rightarrow Si $v \in C(x, y, z) \Rightarrow u_v = v$

y Si $v \notin C(x, y, z) \Rightarrow u_v$ es punto interior-exterior y por tanto nodo.

\Rightarrow sea $t \in L(x, y, z)$ **P.D.** $d(t, v) = d(t, u_v) + d(u_v, v)$

\Rightarrow Si $t \in L(x, z) \Rightarrow t$ está en una cadena $C(x, t, y)$ de una cantidad finita de cadenas arboladas

$\Rightarrow C(x, t, y) = C(x, t, z) \cup C(z, y)$ que es en sí misma una cadena arbolada

\Rightarrow Si $t \in L(z, y)$ se procede de manera análoga y se obtiene que $C(x, t, y) = C(x, z) \cup C(z, t, y)$ que es arbolada

\Rightarrow dado v nodo $C(x, t, y)$ contiene una colección de puntos con respecto a v y $u_v \in C(x, t, y)$ así como $d(u_v, v) = d(u_v, u'_v) + d(u'_v, v)$

\Rightarrow si $u'_v = x$ o $u'_v = y$, se trata como en el caso (a) y u'_v es colección de puntos de $L(x, y, z)$ ahora si u'_v interior a $C(x, t, y) \Rightarrow$ Si $v \in C(x, t, y)$ obviamente $u'_v = v$, es el punto colección para todo punto de $L(x, y, z) \Rightarrow$ Si $v \notin C(x, t, z)$

$\Rightarrow u'_v$ es interior-salida y por tanto, nodo $\Rightarrow u'_v \in C(x, y, z)$ y también

$d(u'_v, v) = d(u'_v, u_v) + d(u_v, v) \Rightarrow$ por lo anterior $d(u'_v, u_v) = 0$ o $u'_v = u_v$ es decir, u_v es punto colección para $C(x, t, y)$ y $d(t, v) = d(t, u_v) + d(u_v, v)$

■

3.3 ESPACIOS GRÁFICOS FINITAMENTE DESCOMPONIBLES.

En el capítulo cuarto es demostrado un resultado para espacios gráficos específicos y a continuación se definen los conceptos que se manejarán.

Definición 59 Decimos que un espacio gráfico (S, d, V) es finitamente descomponible si S es la unión de una cantidad finita de cadenas arboladas.

Definición 60 Un espacio métrico subyacente (S, d) es acotado si existe un número finito M tal que $d(x, y) \leq M$ para todo $x, y \in S$

Definición 61 Decimos que una sucesión infinita x_1, \dots, x_n, \dots de puntos en S , en un espacio métrico (S, d) es convergente si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Y $x \in S$ es límite de la sucesión x_1, \dots, x_n, \dots si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. (Esta no es la definición tradicional para espacios métricos)

Definición 62 Un espacio métrico (S, d) es completo si S contiene el límite de cualquier sucesión de puntos convergentes de S .

Definición 63 Decimos que una 2-cadena $L(x, z, y)$ es maximal en S , si ésta no está contenida propiamente en una 4-cadena de la forma $L(x', x, z, y, y')$

Lema 64 Si el espacio métrico (S, d) del espacio gráfico subyacente (S, d, V) es acotado y completo, entonces cualquier 2-cadena de S está contenida en alguna 2-cadena maximal de S .

Demostración.

Seleccionamos cualquier 2-cadena $L(x_0, z, y_0)$ de S ,

Sea $C = \{L(x', z, y') \mid L(x_0, z, y_0) \subseteq L(x', z, y')\}$, dado que S es acotado, sea $M' = \max \{d(x', y') \mid L(x', z, y') \in C\}$ entonces, construimos una sucesión de 2-cadenas en C , $L(x_0, z, y_0)$, $L(x_1, z, y_1), \dots$ tal que cada una contiene a la anterior, para cualquier $n \geq 1$

\Rightarrow si $L(x_{n-1}, z, y_{n-1})$ es maximal, entonces $x_n = x_{n-1}, y_n = y_{n-1}$ pues de otra manera $L(x_n, x_{n-1}, z, y_{n-1}, y_n)$ sería una 4-cadena que contiene

propriadamente a $L(x_{n-1}, z, y_{n-1})$ y $L(x_n, z, y_n)$ es la siguiente 2-cadena en la sucesión. Ahora para todo $n \geq 1$ se tiene

$$d(x_{n-1}, y_{n-1}) = d(x_{n-1}, z) + d(z, y_{n-1}) \quad (*)$$

$$\text{pero } d(x_n, z) = d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, z) \text{ y } d(z, y_n) = d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, z)$$

Dado que (S, d) es acotado, la sucesiones $\{d(x_n, z)\}$ y $\{d(z, y_n)\}$ para $n = 0, 1, \dots$ son no decrecientes y acotadas por arriba

$\Rightarrow \{d(x_n, z)\}$ y $\{d(z, y_n)\}$ para $n = 0, 1, \dots$ son convergentes y las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ también son convergentes por definición.

\Rightarrow Dado que (S, d) es completo, S contiene los límites x^* y y^* de las dos sucesiones de puntos respectivamente.

\Rightarrow P.D. que $L(x^*, z, y^*)$ es una 2-cadena maximal que contiene a $L(x_0, z, y_0)$.

$$\forall n \geq 1, d(x^*, y^*) \geq d(x_n, y_n) - d(x_n, x^*) - d(y_n, y^*)$$

$= d(x_n, z) + d(z, y_n) - d(x_n, x^*) - d(y_n, y^*) \Rightarrow$ tomemos el límite cuando $n \rightarrow \infty$

$= d(x^*, z) + d(z, y^*)$ por lo tanto $L(x^*, z, y^*)$ es 2-cadena y contiene a $L(x_0, z, y_0)$ y es maximal por construcción.

■

Teorema 65 Si el espacio métrico (S, d) del espacio gráfico subyacente (S, d, V) es acotado y completo y S esta formado por una cantidad finita de 2-cadenas maximales, entonces (S, d, V) es finitamente descomponible.

Demostración.

Dado que (S, d, V) es gráfico \Rightarrow cualquier 2-cadena $L(x, z, y)$ contiene una cadena $C(x, z, y)$ de una cantidad finita de cadenas arboladas; con $z \in C(x, z, y)$; formamos una colección de éstas en un conjunto $T(L(x, z, y))$

$\Rightarrow \cup T(L(x, z, y))$ sobre todas las 2-cadenas maximales $T(L(x, z, y))$ es una colección finita de cadenas arboladas y como $z = L(z, z, z)$ en S podemos afirmar que ésta está contenida en una 2-cadena maximal $T(L(x, z, y))$ y por lo tanto en al menos uno de los conjuntos en la unión.

Por lo tanto S es la unión de una cantidad finita de cadenas arboladas.

■

3.4 MODELOS PARA ESPACIOS GRÁFICOS.

Definición 66 Sea (G, d^-, N) una red con un conjunto de puntos G , métrica d^- y un conjunto de nodos N . Sea $S^- \subseteq G$ y $V^- = S^- \cap N$. Entonces (S^-, d^-, V^-) modela el espacio gráfico (S, d, V) , si existe una biyección $\phi : S \rightarrow S^-$ tal que $\phi[V] = V^-$ y $d(x, y) = d^-(\phi(x), \phi(y))$.

Es lógico que no todos los espacios gráficos son modelados por redes; pero si relajamos una de las condiciones se puede incrementar el número de espacios gráficos modelados por redes.

Definición 67 Si en lugar de $\phi[V] = V^-$ se cumple que $\phi[V] \subseteq V^-$ entonces decimos que cualquier (S^-, d^-, V^-) que lo cumple modela débilmente al espacio gráfico (S, d, V) .

RESULTADO 1 Cualquier subconjunto (S^-, d^-, V^-) de una red (G, d^-, N) que modela un espacio gráfico (S, d, V) , provee a S^- de todos los segmentos arbolados y acotados en G .

Demostración.

Es inmediata del hecho de que $d(x, y) = d^-(\phi(x), \phi(y))$.

■

CONJETURA Cualquier espacio gráfico finitamente descomponible es débilmente modelado por un subconjunto de una red.

3.5 OPTIMIZACIÓN CONVEXA SOBRE ESPACIOS MÉTRICOS.

Iniciaremos definiendo mínimo local en una forma más viable a nuestra definición de conjunto convexo, posteriormente demostraremos el teorema que justifica la manera de resolver el problema.

Definición 68 En un espacio métrico finito, una δ -vecindad alrededor de x es cualquier disco centrado en x de radio mayor o igual que δ , $\delta > 0$. Decimos que f tiene un mínimo local en x , si x minimiza f en alguna δ -vecindad de x .

3.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CONVEXA EN ESPACIOS GRÁFICO

Definición 69 Decimos que un espacio métrico (S, d) es densamente conectado para un δ fijo si para cualquier $x, y \in S$ y para cualquier δ -vecindad N de x , $[L(x, y) \cap N] - \{x\} \neq \emptyset$.

Teorema 70 Si un espacio métrico (S, d) es densamente conectado y f es convexo sobre un subconjunto convexo D de S , entonces cualquier mínimo local de f sobre D , es un mínimo global sobre D .

Demostración.

Sea f un mínimo local en $z_0 \in D$. Supongamos que $f(z_0) > f(z^*)$ p.a. $z^* \in D$.

\Rightarrow dado que z_0 es un mínimo local, hay una δ -vecindad N de z_0 en la cual $f(z_0)$ es un mínimo local \Rightarrow dado que (S, d) es densamente conectado, N contiene $x \in L(z_0, z^*)$, donde $x \neq z_0$; $x \in D$ porque D es convexo

$$\Rightarrow f(z_0) \leq f(x) > f(z^*) \nabla$$

viola la convexidad sobre D .

■

3.6 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CONVEXA EN ESPACIOS GRÁFICOS.

Dado un espacio gráfico finitamente descomponible (S, d, V) , donde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ conjunto de nodos, queremos resolver el problema de localización:

$$\min_{x \in D \subseteq S} z(x) = f(d(x, v_1), \dots, d(x, v_n))$$

donde la función costo es convexa.

Cuando S es una red, podemos resolver el mismo problema como en el capítulo 2, mediante la solución del problema convexo:

$$\min_{z \in C} z(x) = f(d(x, v_1), \dots, d(x, v_n))$$

sobre todo segmento arbolado C de la red.

Ahora, se hará un procedimiento análogo; pero sobre espacios arbolados, término que a continuación se define.

Definición 71 Un conjunto convexo $T \subseteq S$ es un subespacio arbolado de (S, d, V) si toda 2-cadena en T es una cadena arbolada de S y $(T, d|_{T \times T}, V \cap T)$ es un espacio arbolado.

Definición 72 Una cadena de subespacios arbolados es una cadena de cadenas arboladas, que también son subespacios arbolados.

Teorema 73 La métrica d es siempre convexa sobre un subespacio arbolado T de un espacio gráfico (S, d, V) , en el sentido de que $d(\cdot, v)$ es convexo sobre T para todo $v \in V$.

Demostración.

Es suficiente demostrar que $d(\cdot, v)$ es convexa sobre cualquier segmento de línea $L(x, y)$ en T para cualquier $v \in V$.

pero dado que $L(x, y)$ es una cadena arbolada de $S \Rightarrow L(x, y)$ contiene una colección de puntos u_v con respecto a v , tales que $d(w, v) = d(w, u_v) + d(u_v, v) \forall w \in L(x, y)$

\Rightarrow el demostrar que $d(\cdot, u_v)$ es convexo sobre $L(x, y)$ es obvio para el caso $u_v = x$ o $u_v = y$,

\Rightarrow asumimos que u_v es interior a $L(x, y)$.

Si $v \in L(x, y) \Rightarrow u_v = v$; si $v \notin L(x, y) \Rightarrow u_v$ es un punto interior-salida

$\Rightarrow u_v$ es nodo y dado que $u_v \in T$ y $(T, d|_{T \times T}, V \cap T)$ es un espacio arbolado

\Rightarrow y por lo tanto, sobre $L(x, y)$

Dado que $d(u_v, v)$ es constante $\Rightarrow d(\cdot, v)$ es convexa sobre $L(x, y)$

■

Sabemos ahora que el problema original (1) de localización en redes, se puede reducir a un conjunto de subproblemas convexos, con solo descomponer (S, d, V) en una colección finita de subespacios arbolados.

Lema 74 Si $L(x, z, y)$ es una 2-cadena y $w \in L(x, y)$, entonces para cualquier $x' \in L(x, y)$, $w \in L(x, x', y)$, implica que $w \in L(x, x', z)$.

Demostración.

Sea $w \in L(x, x', y)$, t.q. $w \in L(x, x')$ o $w \in L(x', y)$. (Ver Fig. 4)

Si $w \in L(x, x') \Rightarrow w \in L(x, x', y)$ y ya está.

Si $w \in L(x', y)$ y sea $z \in L(x', y)$.

3.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CONVEXA EN ESPACIOS GRÁFICO

$\Rightarrow d(x', w) + d(w, y) = d(x', z) + d(z, y)$ y $d(x, w) + d(w, z) = d(x, x') + d(x', z)$, **sumando, se tiene**
 $d(x, x') + d(x', z) + d(z, y) = d(x, w) + d(w, y)$
 $\Rightarrow d(x', w) + d(w, z) = d(x', z)$
 $\Rightarrow w \in L(x', y)$. **implica que $w \in L(x, x', z)$..**

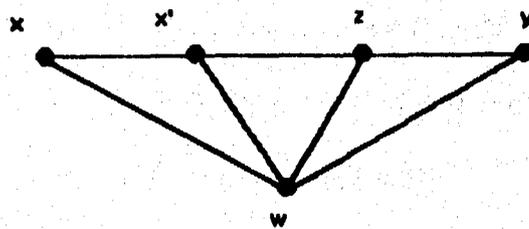


Fig. 4

Lema 75 Sea $L(x, y)$ segmento de línea que contiene una 2-cadena $L(x', z', y')$, y sea $L(x^*, z', y^*)$ una 2-cadena que contiene la 2-cadena $L(x, z', y)$. (Ver Fig. 5). Si $x', y' \in L(x^*, z', y^*)$, entonces o $x' \in L(x, z)$ y $y' \in L(z', y)$ o $x' \in L(z', y)$ y $y' \in L(x, z')$

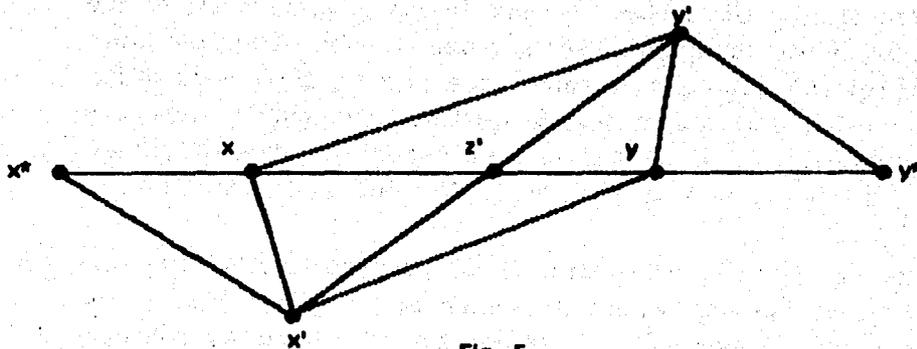


Fig. 5

Demostración. Dado que $L(x, z', y) \subseteq L(x^*, z', y)$, o $x \in L(x^*, z')$ y $y \in L(z', y^*)$ o $x \in L(z', y^*)$ y $y \in L(x^* z')$, si $x \in L(x^*, z') \Rightarrow x \in L(x^*, y) \Rightarrow$

$d(x^*, y) = d(x^*, x) + d(x, y) = d(x^*, x) + d(x, z') + d(z', y)$. Por la desigualdad 1, se sigue que $d(x^*, x') + d(x', y) \geq d(x^*, x) + d(x, z') + d(z', y)$ o $d(x', y) \geq d(x^*, x) + d(x, z') + d(z', y) - d(x^*, x')$

* Pero dado que $x', y' \in L(x, y)$, se tiene que

$$d(x, x') + d(x', y) = d(x, z') + d(z', y) \quad **$$

\Rightarrow sustituyendo * en **, se tiene que

$$d(x, x') \leq d(x^*, x') - d(x^*, x) \quad \diamond$$

pero dado que $x \in L(x^*, z')$, tenemos que

$$d(x^*, x') + d(x', z') = d(x^*, x) + d(x, z') \quad \circ$$

$$d(x', z') = d(x^*, x) + d(x, z') - d(x^*, x) \quad \diamond \diamond$$

Sumando \diamond a $\diamond \diamond$ tenemos que

$d(x, x') + d(x', z') \leq d(x, z') \Rightarrow x' \in L(x, z')$. Entonces por simetría, $y' \in L(z', y)$, y como iniciamos de $x \in L(z', y^*)$ y $y \in L(x^*, z')$, se puede hacer algo análogo para $x' \in L(z', y)$ y $y \in L(x', z')$.

■

El siguiente resultado es el más importante de esta sección; en la demostración del teorema se nos indica la manera en la que podemos dividir cualquier 2-cadena maximal en una cantidad finita de subespacios arbolados y como un espacio gráfico es la unión finita de 2-cadenas arboladas; lo que en conclusión se nos esta proporcionando es en sí, la manera en la cual podemos dividir un espacio gráfico en una cantidad finita de subespacios arbolados.

Teorema 76 Si un espacio gráfico (S, d, V) tiene una cantidad finita de 2-cadenas maximales, entonces cualquier 2-cadena $L(x, z, y)$ en S contiene una cadena $C(x, y)$ de una cantidad finita de subespacios arbolados.

3.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CONVEXA EN ESPACIOS GRÁFICO

Demostración. Tomemos cualquier $L(x, y)$ en S . Construiremos una cadena $C(x, y)$ de una cantidad finita de subespacios arbolados con un procedimiento recursivo P . Básicamente, la operación P es como sigue:

Iniciamos con una cadena $C(x, y) = C(x_0, y_0)$ de una cantidad finita de cadenas arboladas, la cual nosotros conocemos que existe porque (S, d, V) es gráfico. Si toda cadena arbolada es un subespacio arbolado, ya terminamos. De otra manera, para cada cadena arbolada $C(x_1, y_1)$ de $C(x_0, y_0)$ que no sea espacio arbolado, entonces llamamos a P y reemplaza cada $C(x, y)$ por una de las $C'(x_1, y_1)$ cadena de cadenas arboladas. Si cada una de las cadenas $C'(x_1, y_1)$ llamadas por P resulta ser una cadena de subespacios arbolados, ya terminamos. De otra manera volvemos a llamar a P para cada cadena $C(x_2, y_2)$ que no lo cumplió para que las reemplace por $C'(x_2, y_2)$ y así sucesivamente hasta que $C(x, y)$ es una cadena de una cantidad finita de subespacios arbolados.

Falta mostrar que el procedimiento es finito. Cada vez que llamamos a P usamos cuatro argumentos $n, C(x_n, y_n), L^*$ y F^* . n es la carga en el árbol de enumeración. $C(x_n, y_n)$ es una cadena arbolada en $C(x, y)$ que tiende a ser un espacio arbolado y el cual se reemplazará por P por una cadena arbolada en caso de no ser espacio arbolado.

L^* es una lista de $n - 1$ 2-cadenas acumuladas, $L(x_k, z_k, y_k)$, con $k = 1, \dots, n - 1$.

F^* es una lista de $n - 1$ objetos, algunos de ellos nodos y otros 2-cadenas maximales, que son usados en la prueba de finités del algoritmo.

Iniciaremos por llamar $P(1, C(x_1, y_1), \emptyset, \emptyset)$ para cada cadena arbolada $C(x_1, y_1)$ de $C(x_0, y_0)$ que tiende a ser subespacio arbolado. El procedimiento P se sigue y $P(n, C(x_n, y_n), L^*, F^*)$. Dado que $C(x_n, y_n)$ no es un subespacio arbolado, hay un nodo $v_n \in (x_n, y_n)$ con respecto al cual alguna $L(x'_n, z'_n, y'_n)$ en $C(x_n, y_n)$ no tiene punto colección. Entonces tenemos dos casos.

Caso 1). $v_n \notin L(x_n, w, y_n)$ para algún $w \in L(x'_n, z'_n, y'_n)$ (Ver Fig. 6), se elige a tal w y conjunto $z_n = w$. Entonces, dado que (S, d, V) es gráfico, $L(x_n, w, y_n)$ contiene una cadena $C'(x_n, y_n)$ de una cantidad finita de cadenas arboladas, \Rightarrow reemplazamos $C(x_n, y_n) \in C(x, y)$

por $C'(x_n, y_n)$

Para cada cadena arbolada $C(x_{n+1}, y_{n+1})$ de $C'(x_n, y_n)$ que no es subespacio arbolado, llamamos $P[n+1, C(x_{n+1}, y_{n+1}), L^* \cup L\{(x_n, w, y_n)\}, F^* \cup \{v_n\}]$ y si no hay tales cadenas paramos.

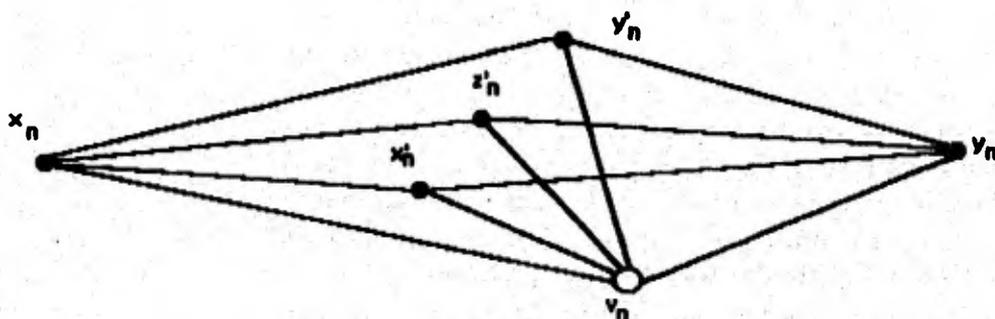


Fig. 6

Caso 2) $v_n \in L(x_n, w, y_n)$ para todo $w \in L(x'_n, z'_n, y'_n)$ (Ver Fig. 7) $\Rightarrow L(x_n, z'_n, y_n)$ esta en alguna 2-cadena maximal $L(x_n^*, z'_n, y_n^*)$ y dado que (S, d, V) es gráfico, $L(x_n, z'_n, y_n)$ contiene una cadena $C'(x_n, y_n)$ de una cantidad finita de cadenas arboladas $\Rightarrow C'(x_n, y_n)$ reemplaza a $C(x_n, y_n)$ en $C(x, y)$ Para cada cadena arbolada $C(x_{n+1}, y_{n+1})$ de $C'(x_n, y_n)$ que no es subespacio arbolado, llamamos

$P[n+1, C(x_{n+1}, y_{n+1}), L^* \cup L\{(x_n, z'_n, y_n)\}, F^* \cup \{L(x_n^*, z'_n, y_n^*)\}]$ y si no hay tales cadenas paramos.

Esto completa el procedimiento P .

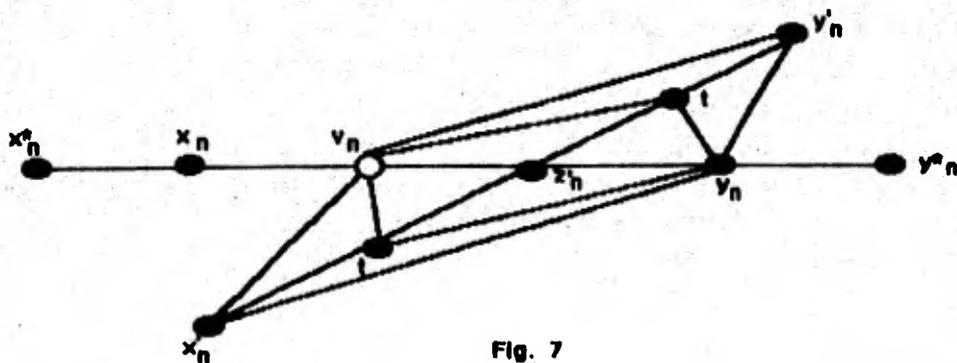


Fig. 7

3.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CONVEXA EN ESPACIOS GRÁFICO

Ahora demostraremos que en cada llamada de P , todos los nodos en F^* son distintos, note que es suficiente demostrar que

- i) $v_k \notin L(x_k, z_k, y_k)$
- ii) $v_k \in L(x_j, z_j, y_j)$
- iii) $L(x_{n+1}, z_{n+1}, y_{n+1}) \subseteq L(x_n, z_n, y_n)$

para todo $n \geq 0$ y todo nivel j en el cual un nodo v_j es adicionado a F^* , en el caso 1, donde k es el nivel en el cual un nodo v_k es próximo a adicionarse a F^* .

Claramente (i) se cumple por la hipótesis del caso 1, donde $z_k = w$.

También (ii) porque $v_k \in C(x_k, y_k) \subseteq C'(x_j, y_j) \subseteq L(x_j, z_j, y_j)$. Donde $L(x_n, z_n, y_n)$ contiene una cadena $C'(x_n, y_n)$ de cadenas arboladas incluyendo $C(x_{n+1}, y_{n+1})$, $z_{n+1} \in L(x_{n+1}, y_{n+1})$ lo que implica (iii)

Ahora mostraremos que en cada llamada de P , toda 2-cadena maximal en F^* es distinta.

Es suficiente mostrar que

- (i') $x'_k, y'_k \in L(x'_j, z'_j, y'_j)$
- (ii') $x'_k \notin L(x'_k, z'_k, y'_k)$ o $y'_k \notin L(x'_k, z'_k, y'_k)$

para todos los niveles j en los cuales una 2-cadena maximal $L(x'_j, z'_j, y'_j)$ es adicionada a F^* en el caso 2, donde k es el nivel próximo adicionado a F^* .

Obviamente (i') lo cumple, pues $x'_k, y'_k \in L(x'_j, z'_j, y'_j) \subseteq L(x'_j, z'_j, y'_j)$

Mostremos ahora (ii'), supongamos lo contrario, que $x'_k, y'_k \in L(x'_k, z'_k, y'_k)$ y se deriva que $L(x'_k, z'_k, y'_k)$ tiene una colección de puntos con respecto a v_k .

$\Rightarrow x'_k \in L(x'_k, z'_k) \cap y'_k \in L(z'_k, y'_k)$ también por la descripción del caso 2 $v_k \in L(x'_k, z'_k, y'_k)$

\Rightarrow por simetría, podemos asumir, s.p.g. que $x'_k \in L(x'_k, z'_k)$ y $y'_k \in L(z'_k, y'_k)$ y $v_k \in L(x'_k, z'_k)$

$\Rightarrow v_k \in L(x'_k, x'_k, y'_k) \Rightarrow v_k \in L(x'_k, x'_k, z'_k)$

también se tiene que $v_k \in L(x'_k, x'_k)$ o $v_k \in L(x'_k, z'_k)$

si $v_k \in L(x'_k, z'_k) \Rightarrow$ es punto colección de $L(x'_k, z'_k, y'_k)$ con respecto a si mismo \Rightarrow asumimos $v_k \in L(x'_k, x'_k)$

En este caso podemos demostrar que x'_k es punto colección de $L(x'_k, z'_k, y'_k)$ con demostrar que

$$\forall t \in L(x'_k, z'_k, y'_k), d(v_k, t) = d(v_k, x'_k) + d(x'_k, t)$$

Dado que $x'_k \in L(x_k, z'_k)$ y $y'_k \in L(z'_k, y_k) \Rightarrow L(v_k, x'_k, z'_k, y'_k, y_k)$ es una cadena $\Rightarrow x'_k \in L(x_k, y'_k)$, $v_k \in L(x_k, x'_k) \Rightarrow t \in L(x'_k, y'_k) \Rightarrow x'_k \in L(v_k, t)$ y se sigue inmediatamente que x'_k es un punto colección de $L(x'_k, z'_k, y'_k)$! esto viola la hipótesis de que $L(x'_k, z'_k, y'_k)$ no tiene puntos colección.

Hemos demostrado (i') y (ii') \Rightarrow concluimos que si el algoritmo no terminará, entonces la cardinalidad del conjunto de nodos siempre irá en ascenso; pero como (S, d, V) tiene una cantidad finita de nodos \Rightarrow el algoritmo terminara produciendo una cadena de una cantidad finita de subespacios arbolados.

La demostración del siguiente corolario es paralela a la del lema que demuestra que toda 2-cadena en un espacio gráfico contiene una cadena de una cantidad finita de cadenas arboladas.

Corolario 77 *Si el espacio métrico (S, d) del espacio gráfico subyacente (S, d, V) es acotado y completo y S esta formado por una cantidad finita de 2-cadenas maximales, entonces (S, d, V) tiene una descomposición en subespacios arbolados.*

Demostración.

Dado que (S, d, V) es gráfico y tiene una cantidad finita de 2-cadenas maximales, conocemos que cualquier 2-cadena $L(x, z, y)$ contiene una cadena $C(x, z, y)$ de una cantidad finita de espacios arbolados, con $z \in C(x, z, y)$ y lo demás se deriva de la demostración del penúltimo teorema.

El lema a continuación justifica que son subespacios arbolados las regiones factibles a considerar en el algoritmo de resolución.

Lema 78 *Sea T un subespacio arbolado del espacio gráfico (S, d, V) y D un subconjunto convexo de S . Entonces $T \cap D$ es un subespacio arbolado de (S, d, V) .*

Demostración.

3.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CONVEXA EN ESPACIOS GRÁFICO

$T \cap D$ es convexo porque T y D lo son, también, dado que T es subespacio arbolado, cualquier 2-cadena en $T \cap D$ contiene una colección de puntos u_v con respecto a cualquier $v \in V \cap (T \cap D)$.

$\Rightarrow (T \cap D, d|_{T \cap D}, V \cap (T \cap D))$ es un espacio arbolado y por lo tanto $T \cap D$ es un subespacio arbolado.

■

ALGORITMO DE RESOLUCIÓN.

Paso 0

Hallar una descomposición finita de (S, d, V) en subespacios arbolados T_1, \dots, T_n . Sea $D = D_1 \cap \dots \cap D_m$ la región factible. Sea C_1, \dots, C_p los distintos conjuntos no-vacíos, en el

conjunto $\{T_i \cap D_j / i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ sea $k = 0$ y $z_{\min} = \infty$.

Paso 1

Sea $k = k + 1$. Si $k > p$ entonces pasar a 3; de otra manera, resuelva el problema convexo

$$(*) \min_{x \in C} z(x) = f(d(x, v_1), \dots, d(x, v_n))$$

con $C = C_k$. Sea x_k^* una solución de (*) con $z_k^* = z(x_k^*)$

Paso 2

Tomar $z_{\min} = \min\{z_k^*, z_{\min}\}$ regresar a 1

Paso 3

Cualquier x_k^* tal que $z_k^* = z_{\min}$ resuelve el problema.

Hasta aquí, todo parece indicar que el algoritmo aquí descrito, es más eficiente que el que se proporcionó en el capítulo 2.

Capítulo 4

DEMOSTRACIÓN DE UN CASO PARTICULAR DE LA CONJETURA DE HOOKER.

Hemos llegado al capítulo donde se hace la aportación de este trabajo de tesis.

Es muy importante ver que la conjetura hecha en el capítulo anterior tiene mucha fuerza; pero su demostración no es trivial. A continuación se demuestra que esta conjetura es válida para un subconjunto de los espacios gráficos finitamente descomponibles.

Proposición 79 *Sea (S, d) espacio métrico del espacio gráfico subyacente finitamente descomponible. Si (S, d, V) es acotado, completo y S está formado por una cantidad finita de 2-cadenas maximales entonces S es débilmente modelable por un subconjunto de una red.*

Demostraremos esta proposición en base a varios lemas, para ello primero haremos las siguientes consideraciones:

Proposición 80 *Tomemos la contrapositiva de la proposición, es decir, la proposición:*

Si S no es débilmente modelable entonces S no es completo o S no es acotado o S no está formado por una cantidad finita de 2-cadenas maximales.

Si S no es débilmente modelable $\Rightarrow \forall (G, d^-, N)$ red con un conjunto de puntos G , N conjuntos de nodos tales que $S^- \subseteq G$ y $V^- = S^- \cap N$ y $\forall \phi: S \rightarrow S^-$ biyección $d(x, y) \neq d^-(\phi(x), \phi(y))$, $\exists v \in V$ t.q. $\phi(v) \notin V^-$

P.D. *Si $\exists v \in V$ t.q. $\phi(v) \notin V^-$ entonces S no es completo o S no es acotado o S no esta formado por una cantidad finita de 2-cadenas maximales.*

Supongamos que $\exists v \in V$ t.q. $\phi(v) \notin V^-$ y S es completo y S es acotado y S esta formado por una cantidad finita de 2-cadenas maximales. Además sabemos que S es espacio gráfico finitamente descomponible, así como $d(x, y) = d^-(\phi(x), \phi(y))$.

Lema 81 *Si $L(x, z, y)$ es segmento de línea en S entonces*

$L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))$ es el segmento de línea en S bajo la biyección ϕ .

Demostración.

Sea $x' \in L(x, z, y) \Rightarrow x' \in L(x, z) \vee x' \in L(z, y)$

\Rightarrow Si $x' \in L(x, z) \Rightarrow d(x, z) = d(x, x') + d(x', z)$ (por def. de seg.)

pero

$d^-(\phi(x), \phi(z)) = d(x, z) = d(x, x') + d(x', z) = d^-(\phi(x), \phi(x')) + d^-(\phi(x'), \phi(z))$

$\Rightarrow \phi(x') \in L(\phi(x), \phi(z))$ y como para cada $x \in S, \exists x^- \in S^-$ t.q.

$\phi(x) = x^-$

por ser biyección, y trabajando de manera análoga el otro caso, se infiere que

$L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))$ es el segmento de línea correspondiente en S^- bajo ϕ .

■

Lema 82 *Si $L(x, z, y)$ es cadena 2-arbolada en S entonces*

$L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))$ es 2-cadena arbolada en S^- .

Demostración.

Como $L(x, z, y) = L(x, z) \cup L(z, y)$

$\Rightarrow L(\phi(x), \phi(z), \phi(y)) = L(\phi(x), \phi(z)) \cup L(\phi(z), \phi(y))$ y

$d^-(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) = d^-(\phi(x), \phi(z)) + d^-(\phi(z), \phi(y))$

$\Rightarrow L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))$ es 2-cadena

Sea $v^- \in V^- \Rightarrow$ P.D. $\exists u_{v^-} \in L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))$ t.q.

$d^-(\phi(x^-), \phi(v^-)) = d^-(\phi(x^-), \phi(u_{v^-})) + d^-(\phi(u_{v^-}), \phi(v^-))$

$v^- \in V^- \Rightarrow v^- \in \phi[V] \Rightarrow \exists! v \in V$ t.q. $\phi(v) = v^-$ y $\exists! x \in L(x, z, y)$ t.q. $\phi(x) = x^-$ por que ϕ es biyección.

P.D. $\phi[u_v] = u_v^- \Rightarrow$ tomamos un punto u'_v de los de la colección u_v
 $\Rightarrow d^-(\phi(x), \phi(v)) = d(x, v) = d(x, u'_v) + d(u'_v, v) = d^-(\phi(x), \phi(u'_v)) + d^-(\phi(u'_v), \phi(y))$

Por lo tanto $L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))$ es cadena arbolada.

■

Lema 83 $S^- = \cup T(L(\phi(x), \phi(z), \phi(y)))$ donde $L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))$ es 2-cadena arbolada y $T(L(\phi(x), \phi(z), \phi(y)))$ es 2-cadena maximal.

Demostración.

\subseteq) sea $x_0^- \in S^- \Rightarrow \exists! x_0 \in S$ t.q. $\phi^{-1}(x_0^-) = x_0$

pero si $x_0 \in S \Rightarrow \exists L(x, z, y)$ arbolada t.q. $x_0 \in L(x, z, y)$

$\Rightarrow \phi(x_0) \in L(\phi(x), \phi(z), \phi(y)) \Rightarrow \phi(x_0) \in \cup T(L(\phi(x), \phi(z), \phi(y)))$

\supseteq) sea $x_0^- \in \cup T(L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))) \Rightarrow \exists L(\phi(x), \phi(z), \phi(y))$ 2-cadena en S^- t.q.

$x_0^- \in L(\phi(x), \phi(z), \phi(y)) \Rightarrow x_0^- \in S^-$

■

Lema 84 Si S es acotado entonces S^- es acotado.

Demostración.

Como $\forall x, y \in S, \exists M \in R$ t.q. $d(x, y) \leq M$ y $d(x, y) = d^-(\phi(x), \phi(y))$

q.e.d.

■

Lema 85 Si S es completo entonces S^- es completo.

Demostración.

Sea x'_1, x'_2, \dots sucesión de puntos en S^- t.q. converge a x'

P.D. que $x' \in S^-$

Por las propiedades de las isometrías se tiene que:

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(\phi^{-1}(x'_n), \phi^{-1}(x')) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^-(x'_n, x') = 0$

y $\phi^{-1}(x') \in S^-$.

■

Observación 4 Observe que para cualquier nodo v en una cadena arbolada, es él mismo su correspondiente u_v , pues cumple que para cualquier x en la cadena, $d(x, v) = d(x, v) + d(v, v)$

40CAPÍTULO 4. DEMOSTRACIÓN DE UN CASO PARTICULAR DE LA CONJETURA

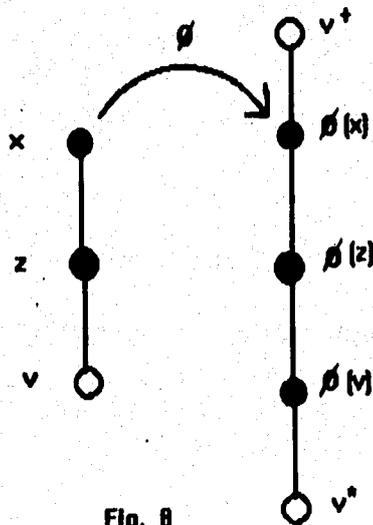
Observación 5 Por las características que tiene un nodo en una red, que si u_{v^-} es un punto interior-salida de S^- entonces $u_{v^-} \in V^-$, pues los nodos son los que conectan a los arcos y en una cadena arbolada, para un nodo v fuera de ella, si se cumple la propiedad anterior, se hará por medio de la conexión de una ruta con la cadena y esta conexión será con un nodo.

Supusimos que $\exists v \in V$ t.q. $\phi(v) \notin V^-$ por lo anterior sabemos que v no puede ser interior-salida, entonces se tienen sólo dos casos: o v es un nodo salida de S o $v \neq u_{v'}$ para cualquier $v' \in S$

Caso i) $\exists L(x, z, v)$ 2-cadena maximal de S , donde v es nodo salida y $\phi(v) \notin V^-$

\Rightarrow sabemos que $L(\phi(x), \phi(z), \phi(v))$ es también 2-cadena maximal.

\Rightarrow tomemos el nodo más cercano a $\phi(v)$ digamos v^* conectado a ese arco y que no esté en $L(\phi(x), \phi(z), \phi(v))$ (siempre existe tal nodo en una red), y hacemos lo mismo con el nodo más cercano a $\phi(x)$, digamos v^+



$\Rightarrow L(\phi(z), \phi(x), \phi(v)) \subset L(v^+, \phi(z), \phi(x), \phi(v), v^*)$
 $\Rightarrow L(\phi(z), \phi(x), \phi(v))$ no es 2-cadena maximal !

Caso ii) Sea $v \in V$ t.q. $\forall v' \in S, v \neq u_{v'} \wedge \phi(v) \notin V^-$
Este caso no es factible porque si $v \in V$ entonces siempre existe una 2-cadena maximal que lo contiene y por tanto $v = u_v$.

q.e.d. la proposición.



42CAPÍTULO 4. DEMOSTRACIÓN DE UN CASO PARTICULAR DE LA CONJETU

Capítulo 5

CONCLUSIONES.

El algoritmo de resolución para problemas de localización en redes de una sola facilidad proporcionado en el capítulo 2, es demasiado denso en cuanto a esfuerzo computacional; quizás una manera de hacer más rápido el proceso si se está en el caso de una red muy grande, sería que, a criterio del investigador, se descartaran algunos arcos.

El algoritmo proporcionado en el capítulo 3, es mucho más eficiente que el primero; siempre y cuando se cuente ya con el espacio gráfico, al cual modele la red que representa el problema; en general es la red misma, con algunos puntos distinguidos mas, es por ello que no se dudaría en utilizar el segundo algoritmo.

Desde un punto de vista matemático, ambos algoritmos contienen una riqueza teórica muy grande, la cual ha sido mostrada en los capítulos 2 y 3; sobretodo en el segundo, que involucra a la Teoría de Gráficas y al Análisis Matemático.

El propósito de la tesis se cumplió en el capítulo 4, donde se proporcionó la demostración matemática de un caso particular del problema abierto del capítulo 3. Es evidente que sólo se demostró que un subconjunto pequeño de subespacios gráficos es modelado por redes, es decir, se pide demasiado para ser modelado. La demostración de la conjetura completa no es trivial y como caso particular; no encontré algún contraejemplo que pueda refutarla.

La aportación de este trabajo es puramente matemática, es en sí, conocer algo más acerca de la teoría de espacios gráficos finitamente descomponibles.

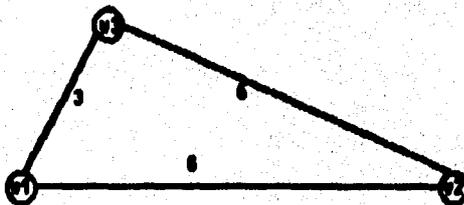
Las extensiones de esta tesis, bien pueden ser el demostrar que la conjetura es cierta para el complemento del subconjunto de espacios gráficos completos, acotados y que son unión finita de cadenas arboladas, o bien dar el correspondiente contraejemplo; también se podría trabajar en el aspecto computacional, elaborando un programa, que describa los algoritmos en un lenguaje de programación de alto nivel.

Capítulo 6

APÉNDICE.

Daremos un ejemplo de aplicación de los algoritmos descritos en los capítulos 1 y 2.

Sea $G[N, A]$ una red con $N = \{v_1, v_2, v_3\}$ como la siguiente:



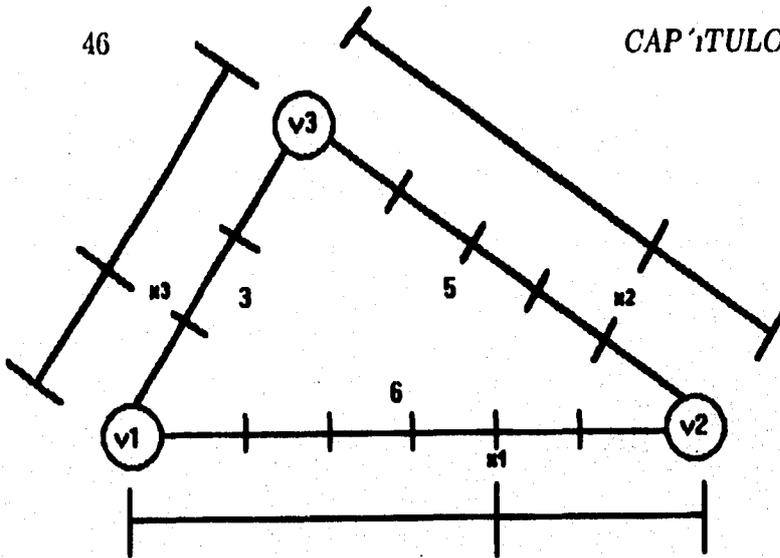
Resolveremos el problema de localización en redes

$$\min_{x \in G} z(x) = d(x, v_1) + d(x, v_2) + d(x, v_3)$$

1º) Usando el algoritmo en el capítulo 2, enumeramos con s'_i ; $i = 1, 2, 3$ a cada nodo de acuerdo con la fórmula $s'_i = 1/2 [d(w, v_i) + d(u, v_i) + b]$ para $A(u, w)$

$$\Rightarrow s'_1 = s_1, s'_2 = s_2, s'_3 = s_3$$

Dividimos cada arco en segmentos arbolados y la gráfica correspondiente queda de la siguiente manera:



⇒ 1) Para $A(v_1, v_2)$ se tienen a $A[v_1, x_1]$ y $A[x_1, v_2]$

⇒ $h[0, 6] \mapsto R$

⇒ Para $A[v_1, x_1]$ se tiene:

$$\min_{0 \leq t \leq 4} h(t) = d(t, v_1) + d(t, v_2) + d(t, v_3)$$

⇒ $x_1^* = v_1 \wedge z_1^* = z(x_1^*) = 9$

⇒ Para $A[x_1, v_2]$ se tiene:

$$\min_{4 \leq t \leq 6} h(t) = d(t, v_1) + d(t, v_2) + d(t, v_3)$$

⇒ $x_2^* = v_2 \wedge z_2^* = z(x_2^*) = 11$

⇒ 2) Para $A(v_2, v_3)$ se tienen a $A[v_2, x_2]$ y $A[x_2, v_3]$

⇒ $h[0, 5] \mapsto R$

⇒ Para $A[v_2, x_2]$ se tiene:

$$\min_{0 \leq t \leq 1} h(t) = d(t, v_1) + d(t, v_2) + d(t, v_3)$$

⇒ $x_3^* = v_2 \wedge z_3^* = z(x_3^*) = 14$

⇒ Para $A[x_2, v_3]$ se tiene:

$$\min_{1 \leq t \leq 5} h(t) = d(t, v_1) + d(t, v_2) + d(t, v_3)$$

⇒ $x_4^* = v_3 \wedge z_4^* = z(x_4^*) = 8$

⇒ 3) Para $A(v_1, v_3)$ se tienen a $A[v_1, x_3]$ y $A[x_3, v_3]$

$\Rightarrow h[0, 3] \mapsto R$

\Rightarrow Para $A[v_1, x_3]$ se tiene:

$$\min_{0 \leq t \leq 1} h(t) = d(t, v_1) + d(t, v_2) + d(t, v_3)$$

$\Rightarrow x_5^* = v_1 \wedge z(x_5^*) = 9$

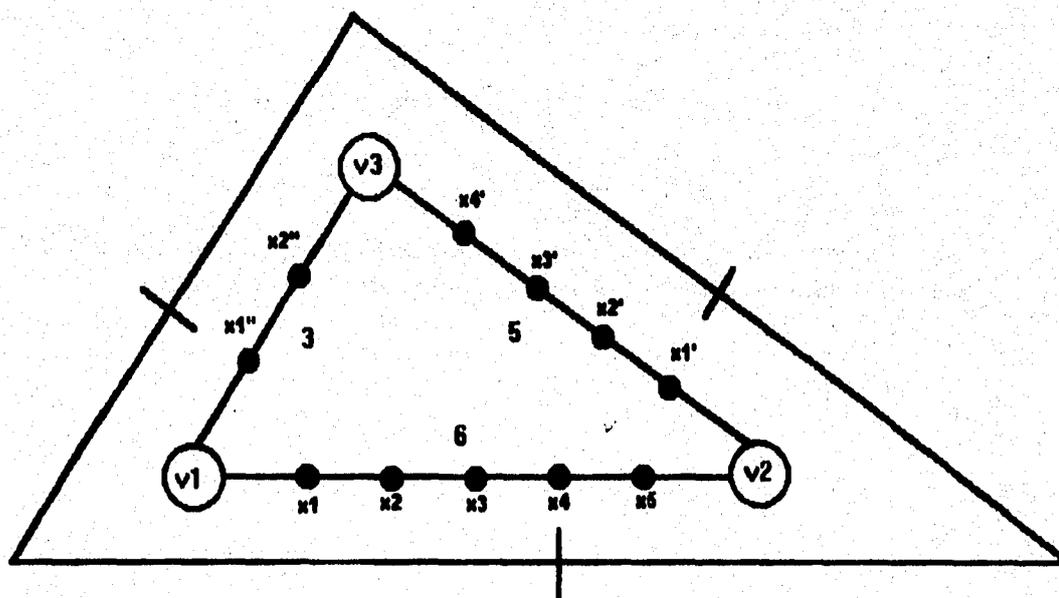
\Rightarrow Para $A[x_3, v_3]$ se tiene:

$$\min_{1 \leq t \leq 3} h(t) = d(t, v_1) + d(t, v_2) + d(t, v_3)$$

$\Rightarrow x_6^* = v_3 \wedge z(x_6^*) = 8$

Por lo tanto $\min\{z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*, z_5^*, z_6^*\} = 8 \wedge x^* = v_3$

2^o) Usando el algoritmo descrito en el capítulo 3, lo primero es buscar un espacio gráfico, al cual nuestra red modele; el espacio gráfico es el siguiente:



Como segundo paso, se tiene que dividir al espacio gráfico en subespacios arbolados; esto es posible, pues el espacio gráfico es acotado, convexo, completo y unión finita de dos cadenas arboladas; la descomposición queda como arriba está ilustrado.

Se tiene entonces que en este caso $L(x''_1, v_3, x'_1)$, $L(x''_1, v_1, x_4)$, $L(x_4, v_2, x'_1)$, son la unión finita de 2-cadenas arboladas, de hecho, en este caso son en sí mismas 2-cadenas maximales. Los consideraremos como regiones factibles, dado que a su vez son subconjuntos convexos y por tanto, son los tres C_i sobre los cuales evaluaremos nuestra función objetivo.

⇒ Para $L(x''_1, v_3, x'_1)$

$$\min_{x \in C_1} z(x) = d(x, v_1) + d(x, v_2) + d(x, v_3)$$

$$\Rightarrow x_1^* = v_3 \wedge z_1^* = 8 \wedge z_{\min} = 8$$

⇒ Para $L(x''_1, v_1, x_4)$

$$\min_{x \in C_2} z(x) = d(x, v_1) + d(x, v_2) + d(x, v_3)$$

$$\Rightarrow x_2^* = v_1 \wedge z_2^* = 9 \wedge z_{\min} = 8$$

⇒ Para $L(x_4, v_2, x'_1)$

$$\min_{x \in C_3} z(x) = d(x, v_1) + d(x, v_2) + d(x, v_3)$$

$$\Rightarrow x_3^* = v_2 \wedge z_3^* = 11 \wedge z_{\min} = 8$$

Por tanto, $z_{\min} = 8 \wedge x^* = v_3$

En este ejemplo, es claro que en el algoritmo del capítulo 3, hemos evaluado la mitad de veces que con el uso del otro.

ESTA TESIS
NO DEBE
SALIR DE LA
BIBLIOTECA

BIBLIOGRAFÍA.

Rockafellar, R.T.,
Network Flows and Monotropic Optimization.
Ed. John Wiley & Sons, USA,
1984, 617 pp.

Handler, G. Y. and P. B. Mirachandani,
Location on Networks Theory and Algorithms.
Ed. MIT Press, USA,
1979, 233 pp.

Hooker, J. N.,
Nonlinear Network Location Models.
(Tesis presentada para obtener el grado de Dr.),
University of Tennessee, USA,
1984, 225 pp.

Rockafellar, R.T.,
Convex Analysis,
Ed. Princeton University Press, USA,
1970, 451 pp.

Robert, F.L., Morris J. G. y Wesolowsky J.G.,
Facilities Location.
Ed. North-Holland, USA,
1988, 296 pp.

Robert G. Bartle,
Introducción al Análisis Matemático,
Ed. Limusa, México.
1989, 519 pp.