

13
25j



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"LA PROGRAMACION CUADRATICA SECUENCIAL
APLICADA A MODELOS DE CRECIMIENTO FISICO"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
SABINO ESTEBAN DE LA SANCHA



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" LA PROGRAMACION CUADRATICA SECUENCIAL APLICADA A MODELOS DE CRECIMIENTO FISICO "

realizado por SABINO JIMENEZ DE LA SANCHA

con número de cuenta 8112662-6 , pasante de la carrera de MATEMATICAS.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario M. en C. José López Estrada

Propietario M. en C. José Guerrero Grajeda

Propietario M. en C. Apolinar Calderón Segura

Suplente M. EN C. Ma. Elena García Alvarez

Suplente M. en C. José Luis Navarro Urrutia

Consejo Departamental de Matemáticas

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

AGRADECIMIENTOS:

*A mi padre
Mariano Jiménez
Por haberme enseñado el verdadero
valor al estudio con sentido de responsabilidad
y entrega durante el curso de mi carrera.*

*A mi madre
Fustina de la Sancha
Por su gran comprensión
y palabras de aliento que me
impulsaron a terminar mi carrera.*

*A mi esposa
Beatriz
Quién colaboró en la realización del
presente trabajo, impulsándome en todo
momento.*

*A mis tíos
Angela Hernández y Miguel Jiménez
Quiénes me brindaron su apoyo para la
terminación de mis estudios.*

*A mis hermanos
Mario, Rafaela, Hugo, Alejandra,
Alfredo, Rubén y Antonio Jiménez
por el apoyo que también me brindaron.*

***A mis maestros de la Facultad
y a mis asesores,
en especial al Prof. José López E.
quién con tanto empeño participó en
la realización del presente trabajo.***

***Al Dr. Joaquín Cravioto
quién con sus sabios consejos
supo interesarme en el campo
de la investigación.***

***A todos aquellos
a quienes no hago referencia
y que sin embargo colaboraron
conmigo, no me resta sino darles
las gracias.***

JURADO

DIRECTOR DE TESIS

M. en C. JOSE LOPEZ ESTRADA

1º PROPIETARIO

M. en C. JOSE GUERRERO GRAJEDA

2º PROPIETARIO

M. en C. APOLINAR CALDERON SEGURA

1º SUPLENTE

M. en C. MARIA ELENA GARCIA ALVAREZ

2º SUPLENTE

M. en C. JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA

INTRODUCCION

La idea principal de realizar este trabajo surge de la inquietud de mostrar una de las tantas aplicaciones que tienen las matemáticas en la vida diaria y que a causa de tanta abstracción se olvida uno de la parte más importante e interesante que es la aplicación. Es aquí donde uno se percata de todo el potencial que guarda la matemática y sólo espera ser utilizado en la solución de algún problema.

Es en este sentido como se decidió utilizar la Programación Cuadrática Secuencial en el ajuste de datos longitudinales de talla a 154 sujetos de 0 a 21 años, utilizando en particular, la subrutina NLPQLD de Schittkowski [22] y dos modelos de Preece y Baines [19], en la aplicación del crecimiento físico humano.

El capítulo 1 se divide en dos secciones. En la sección 1.1 presentamos una introducción del método de Lagrange-Newton (PCS), siendo éste, el método básico más directo para resolver problemas de optimización no lineal con o sin restricciones de la función objetivo. En la sección 1.2 se da una introducción de la subrutina NLPQL en lenguaje Fortran, que resuelve problemas de programación no lineal con restricciones.

Cabe mencionar que en el capítulo 1, sólo se enmarca en forma de introducción dado que, no es el objetivo de la presente tesis el de explicar el método de Programación Cuadrática Secuencial sino, presentar una idea general de este método y entender mejor la subrutina NLPQLD de Schittkowski utilizado en el ajuste de talla en individuos de 0 a 21 años para los modelos de Preece y Baines. En el capítulo 2, sección 2.1 y 2.2, presentamos una breve historia de algunos modelos clásicos de crecimiento humano, así como las edades en las cuáles estos modelos funcionan. En la sección 2.3 exponemos la parte más importante, y objetivo del presente trabajo, que es la aplicación de los modelos de crecimiento humano de Preece y Baines, la estimación de los parámetros de ambos modelos, así como un análisis estadístico de ambos errores de ajuste en la comparación de los dos modelos. Asimismo, se estiman los diez parámetros biológicos, los cuales, son de suma importancia, tanto en la interpretación biológica de crecimiento humano, como para la predicción de talla final de los individuos.

Realizamos también, un análisis estadístico de los parámetros biológicos, tratando de encontrar algunas relaciones que guardan estos parámetros biológicos con el crecimiento humano.

En esta tesis se incluyen 2 apéndices: El apéndice 1, trata de la construcción de los modelos de Preece y Baines, resolviendo las ecuaciones diferenciales que de éstos se deriven; en el apéndice 2, presentamos una pequeña introducción en el uso de la subrutina de Programación Cuadrática Secuencial de Schittkowski (NLPQLD) para resolver problemas de optimización no lineal con restricciones aunque en este caso, sólo la usamos como método de optimización de problemas no lineales.

Una vez obtenidos los resultados de ambos modelos y conclusiones a las que llegamos quedó satisfecha la inquietud antes mencionada para la realización de este trabajo.

CAPITULO 1

PROGRAMACION CUADRATICA SECUENCIAL

1.1 El Método de Lagrange - Newton (PCS)

Este es el método iterativo más directo y eficiente para resolver problemas no lineales sobre la base de ciertas aproximaciones de las funciones, $f(x)$ (función objetivo) y $c(x)$ (restricciones de la función objetivo). Requieren ser hechas con el cuidado de garantizar las propiedades de convergencia rápida, cerca de la solución.

Este método se explica mejor como el método de Newton, para encontrar un punto crítico de la función Lagrangeana (1.1.1) [16], de ahí que puede ser enunciado como:

El Método de Lagrange - Newton [10]:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_i \lambda_i c_i(x) \quad (1.1.1)$$

Primero consideramos el método aplicado al problema con restricciones de igualdad:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ & \text{sujeto a :} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

$$c(x) = 0, \text{ donde } c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

y luego el problema con restricciones de desigualdad:

Minimizar $f(x)$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

sujeto a :

(1.1.3)

$$c_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

y se define:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_\lambda \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

e imponemos que:

$$\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \quad (1.1.5)$$

tal que (x^*, λ^*) , es un punto crítico de la función en (1.1.1).

Con una serie usual de Taylor para $\nabla \mathcal{L}$ alrededor de $x^{(k)}, \lambda^{(k)}$, da:

$$\nabla \mathcal{L}(x^{(k)} + \delta_x, \lambda^{(k)} + \delta_\lambda) = \nabla \mathcal{L}^{(k)} + [\nabla^2 \mathcal{L}^{(k)}] \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_\lambda \end{pmatrix} + \dots \quad (1.1.6)$$

Donde $\nabla \mathcal{L}^{(k)} = \nabla \mathcal{L}(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$, etc. .

Abandonando los términos de orden más alto e igualando a cero el lado izquierdo llegamos a:

$$[\nabla^2 \mathcal{L}^{(k)}] \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_\lambda \end{pmatrix} = -\nabla \mathcal{L}^{(k)} \quad (1.1.7)$$

resolviendo este sistema, obtenemos las correcciones δ_x y δ_λ en el curso

del método de Newton para el problema de puntos críticos.

La fórmula para $\nabla_x^2 \mathcal{L}$ y $\nabla_\lambda^2 \mathcal{L}$ se obtiene de (1.1.1). Dando el sistema:

$$\begin{pmatrix} W^{(k)} & -A^{(k)} \\ -A^{(k)T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g^{(k)} + A^{(k)} \lambda^{(k)} \\ C^{(k)} \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

$A^{(k)}$ es la matriz Jacobiana de las restricciones evaluadas en $x^{(k)}$ y

$$W^{(k)} = \nabla^2 f(x^{(k)}) - \sum \lambda_j^{(k)} \nabla^2 c_j(x^{(k)}) \quad (1.1.9)$$

es la matriz Hessiana $\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$. Con $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda$ y $\delta \omega = \delta_\lambda$, la solución del sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} W^{(k)} & -A^{(k)} \\ -A^{(k)T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g^{(k)} \\ C^{(k)} \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

determina $\delta \omega$ y $\lambda^{(k+1)}$. Entonces $x^{(k+1)}$ es dado por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + g^{(k)}. \quad (1.1.11)$$

El método requiere de aproximaciones iniciales $x^{(0)}$ y $\lambda^{(0)}$ usando (1.1.10) y (1.1.11). Se genera una sucesión iterativa $\{x^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$.

Es posible repetir este método desde otro punto de vista. Considérese el subproblema que involucra la minimización de una función cuadrática.

Sea

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } q^{(k)}(\delta) \\ & \delta \in \mathbb{R}^r \\ & \text{sujeto a :} \\ & f^{(k)}(\delta) = 0 \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

donde

$$q^{(k)}(\delta) \triangleq \frac{1}{2} \delta^T w^{(k)} \delta + g^{(k)T} \delta + f^{(k)} \tag{1.1.13}$$

e

$$f^{(k)}(\delta) \triangleq a^{(k)T} \delta + c^{(k)} \tag{1.1.14}$$

de

$$\mathcal{Q}(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T G x + g^T x - \lambda^T (a^T x - b) \tag{1.1.15}$$

y

$$\begin{pmatrix} G & -A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g \\ b \end{pmatrix} \tag{1.1.16}$$

Las condiciones de primer orden para (1.1.12) son dadas por las ecuaciones (1.1.10), tal que δ^* es un punto crítico de (1.1.12).

Algoritmo de programación cuadrática :

Dados los estimadores iniciales

$$x^{(1)} \text{ y } \lambda^{(1)} ;$$

para $k = 1, 2, 3, \dots$

i) resolver :

$$\text{Minimizar } q^{(k)}(\delta) \quad (1.1.17)$$
$$\delta \in \mathbb{R}^n$$

sujeto a :

$$f^{(k)}(\delta) \geq 0 \text{ ó } f^{(k)}(\delta) = 0 ;$$

Determinar $\delta^{(k)}$ y $\lambda^{(k+1)}$ el vector de multiplicadores

de Lagrange de las restricciones lineales ;

$$i) \text{ sea } x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta^{(k)}$$

$W^{(k)}$ es definida positiva, puede garantizarse siempre que $x^{(k)}, \delta^{(k)}$ estén cerca de x^*, δ^* .

Si una minimización única existe en (1.1.12) para toda k , entonces la sucesión de iteración es idéntica a la dada por el método de Lagrange - Newton, (1.1.10) y (1.1.11) para asegurar la convergencia. El subproblema (1.1.12) es un caso particular del (1.1.2).

Las condiciones en (1.1.12) son obtenidas reemplazando las condiciones no lineales $c(x) = 0$ en (1.1.2), por su aproximación de primer orden de series de Taylor $f^{(k)}(\delta) = 0$, alrededor de $x^{(k)}$ dados por (1.1.14). De ahí que la función objetivo $f(x)$ en (1.1.2) es reemplazada por la función cuadrática $q^{(k)}(\delta)$ en (1.1.12).

Esta interpretación de (1.1.17) es realmente una generalización para resolver problemas no lineales con restricciones de desigualdad (1.1.3), reemplazando $c(x)$ por $f^{(k)}(\delta)$ y $f(x)$ por $q^{(k)}(\delta)$ nos conduce al

subproblema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } q^{(k)}(\delta) \\ & \delta \in \mathbb{R}^r \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

sujeto a :

$$f^{(k)}(\delta) \geq 0$$

(1.1.12) y (1.1.18) son subproblemas de programación cuadrática y (1.1.17), se conoce como el Método de Programación Cuadrática Secuencial (FCS). Este método fue mencionado primero por Wilson, basándose en el método de Solver.

De una alternativa derivada de (1.1.12), se observa que una condición suficiente de segundo orden en x^* , λ^* implica que x^* ($\delta = 0$) resuelve el problema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \mathcal{L}(x^* + \delta, \lambda^*) \\ & \delta \in \mathbb{R}^r \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

sujeto a :

$$s^{*T} \delta = 0,$$

ya que

$$s^{*T} w^* s > 0 \tag{1.1.20}$$

y

$$s^{*T} s = 0. \tag{1.1.21}$$

Asegurando la curvatura estrictamente positiva en un renglón disponible. Añadiendo $\theta = \lambda^* a^* \delta = g^* \delta$ en la función objetivo del problema equivalente:

$$\text{Minimizar } \frac{1}{2} \delta^T W \delta + g^T \delta + f^* \quad (1.1.22)$$

sujeto a :

$$a^T \delta = 0 ,$$

el cual también se resuelve para $\delta = 0$ y contiene a los multiplicadores de Lagrange en λ^* .

Las condiciones en (1.1.22), son aproximaciones lineales en $c(x) = 0$ y x^* , por analogía. Si $x^{(0)}$ y $\lambda^{(0)}$ se aproximan a x^* , λ^* la solución del problema (2.1.12) es aconsejable.

Un ejemplo numérico ilustra muchas de las características del método PCS y es dado como un problema con restricciones de desigualdad:

$$\text{Minimizar } f(x) \doteq -x_1 - x_2$$

sujeto a :

$$c_1(x) \doteq x_2 - x_1^2 \geq 0 , \quad (1.1.23)$$

$$c_2(x) \doteq 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 ;$$

con $x^{(0)} = (1/2, 1)^t$ y $\lambda^{(0)} = 0$. (Ver tabla 1.1.1)

De ahí que si $\lambda^{(0)} = 0$ y los términos de la curva ocurridos en $w^{(0)}$ no contrastan, entonces la matriz es cero, ya que $f(x)$ es lineal. Así el subproblema inicial es un problema de programación lineal y $x^{(0)}$ es el vértice de las restricciones linealizadas alrededor de $x(1)$. De hecho, aunque las restricciones $c_1(x) \geq 0$ no estén activas en la solución, la presencia de la linealización es necesaria, ya que permite ser resuelto el primer subproblema. Es necesario dar una vecindad de x^* , λ^* , en este caso, la solución del problema lineal está bien definida y $\lambda^{(0)} = (1/3, 2/3)^t$ es el vector multiplicador en su solución, indicando que ambas restricciones están activas para la segunda iteración.

Tabla 1.1.1
El Método PCS aplicado a (1.1.23)

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\lambda_1^{(k)}$	$\lambda_2^{(k)}$	$c_1^{(k)}$	$c_2^{(k)}$
1	1/2	1	0	0	3/4	-1/4
2	11/2	2/3	1/3	2/3	-0.1736	-0.2847
3	0.7471	0.6862	0	0.7384	0.1280	-0.0291
4	0.7087	0.7068	0	0.7067	0.2044	-0.0018
5	0.7071	0.7071	0	0.7071	0.2071	-28X10 ⁻⁵

$$W^{(2)} = 0 - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

la cual es definida positiva. Obteniendo el resultado del problema de programación cuadrática $I_1^2 \geq 0$, el cual se va hacer inactivo, tal que $\lambda_1^2 = 0$, entonces la convergencia rápida con el método de Newton es observada como una subsección de iteración.

El método PCS sólo requiere una evaluación de las funciones del problema y las derivadas determinan los coeficientes de un subproblema finito de programación cuadrática.

El método PCS es considerado superior en términos del número de evaluaciones de la función y de sus derivadas requeridas. Una característica importante del método se muestra en la (tabla 1.1.1); la convergencia es de segundo orden y si es una condición suficiente para el problema de restricciones de igualdad (1.1.2) en x^* , λ^* y el rango de $a^* = m$, entonces la matriz Lagrangeana es

$$\nabla^2 q^* = \begin{pmatrix} W^* & -A^* \\ -A^{*T} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.24)$$

no singular. La iteración de convergencia de segundo orden de (1.1.10) y (1.1.11), se sigue de la virtud del teorema (1.1.2), aplicando al sistema de $n + m$ ecuaciones $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}$. Esto requiere que ambos $\mathbf{x}^{(k)}$ y $\lambda^{(k)}$ sean suficientemente cercanos a \mathbf{x}^* y λ^* para algún k .

Teorema 1.1.1

Si $\mathbf{x}^{(0)}$ es suficientemente cercana a \mathbf{x}^* , y la matriz Lagrangeana

$$\begin{pmatrix} W^{-1} & -A^T \\ -A^{T^T} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.25)$$

es no singular. Si se tienen las condiciones suficientes de segundo orden en \mathbf{x}^* , λ^* con rango $A^T = m$, entonces la iteración de Lagrange - Newton (1.1.10) y (1.1.11) convergen y el orden de convergencia es de segundo grado. Si $\lambda^{(0)}$ es tal que (1.1.12) es solución única para $\delta \mathbf{x}^{(0)}$ entonces $\lambda^{(0)}$ es verdadera por el método PCB.

Teorema 1.1.2

Si $r \in C^1$, y A^* es no singular y sus elementos satisfacen una condición de Lipschitz y si $\mathbf{x}^{(0)}$ es suficientemente cercana a \mathbf{x}^* para alguna k , entonces el método de Newton - Raphson está bien definido para toda k y la convergencia es de segundo orden.

Teorema 1.1.3 (Dennis - Moré)

Sea $r(\mathbf{x}) \in C^1$ y sea $\mathbf{x}^{(0)} \rightarrow \mathbf{x}^*$ donde $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ y A^* es no singular. Entonces la sucesión converge superlinealmente si y solo si $\delta \omega = (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)})$, satisfaciendo

$$\delta^{(k)} = \delta_{NR}^{(k)} + \mathcal{O}(\|\delta_{NR}^{(k)}\|)$$

donde

donde

$$\delta_{NR}^{(k)} = -A^{k,T} f^{(k)}$$

El método de Lagrange - Newton es equivalente al método PCS, si $\delta\omega$ es la solución única a formar de (1.1.12) para toda k . Lo anterior, es asumido por la continuidad de condiciones suficientes de segundo orden cuando $\lambda\omega$ es suficientemente cercana a λ^* y esto es verdadero para $k \geq 2$.

Una desventaja posible del método PCS es el cálculo de la segunda derivada o el de la matriz $W^{(k)}$, una fórmula análoga es usada en el método Cuasi - Newton [6]. Han [21, 22], sugiere usar la fórmula DFP, para la cual $\gamma^{(k)}$ está definida en principio por:

$$\gamma^{(k)} = \nabla \varrho(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}) - \nabla \varrho(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) \quad (1.1.26)$$

Lo que muestra que el algoritmo tiene convergencia superlineal.

Powell [21, 22], prefiere usar la fórmula BFGS para problemas de minimización y guardar la matriz $B^{(k)}$ definida positiva, de modo que la solución del problema es siempre bien definida. Esto es definiendo el vector:

$$\eta^{(k)} = \theta \gamma^{(k)} + (1 - \theta) B^{(k)} \delta^{(k)}, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (1.1.27)$$

($\gamma^{(k)}$ como en (1.1.26) que es cerrado en $\gamma^{(k)}$ sujeto a la condición que $\delta\omega \eta^{(k)} \geq 0.2 \delta\omega B^{(k)} \delta^{(k)}$), $\eta^{(k)}$ es entonces usada en lugar de $\gamma^{(k)}$ en la fórmula (1.1.26).

Estos resultados muestran que las propiedades locales del método PCS son muy satisfactorias y la principal dificultad que existe es el hecho de que pueden fracasar en la convergencia desde una lejana primera aproximación a la solución y la solución del subproblema (1.1.12) o

Para inducir convergencia global, se requiere de alguna medida de bondad de $x^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$ disponible, la cual es minimizada localmente en la solución. Una posibilidad es introducir el error en las condiciones de Khun - Tucker [10].

$$\phi(x, \lambda) = \|c\|_2^2 + \|g - A\lambda\|_2^2 \quad (1.1.28)$$

Donde $c = c(x)$, etc. . Esto no es totalmente satisfactorio, en el que existe algún sesgo y minimizando la función objetivo, puede causar convergencia en algún punto de ocurrencia (KT). Una idea más susceptible es usar una función de penalidad, por ejemplo; $\phi(x)$ definida en términos de $f(x)$, $c(x)$ y posiblemente de sus derivadas, la cual es minimizada localmente por x^* .

La tabla (1.1.2), compara el número de evaluaciones de la función y del gradiente requeridas para la solución de tres problemas de Colville.

Tabla 1.1.2 Comparación de Técnicas de Programación No lineal

Problema	Extrapolando Func. de Barrera	Multiplicadores de func. de Penalidad	PCS Método
tp1	177	47	6
tp2	245	172	17
tp3	123	73	3

Fletcher [10], muestra cómo usando una restricción de paso o región de confianza todas las dificultades son removidas. El método es fácilmente explicado en lugar de sustituir aproximaciones de series de Taylor en (1.1.13) y (1.1.14) en problemas de programación no lineal, (caso general) éstas son sustituidas directamente en una función exacta de penalidad a saber:

$$\phi(x) = \nabla f(x) + \sum_{i \in E} |c_i(x)| + \sum_{i \in I} c_i(x)^- \quad (1.1.29)$$

donde $a^- \triangleq \max(-a, 0)$, y el parámetro $v > 0$, dando una idea de función de aproximación cuadrática $\psi^{(k)}(\delta)$ y de ahí un subproblema a saber:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \psi^{(k)}(\delta) &:= \nabla q^{(k)}(\delta) + \sum_{i \in E} |f_i^{(k)}(\delta)| + \sum_{i \in I} f_i^{(k)}(\delta) \\ \text{sujeto a :} & \\ |\delta|_{\infty} &\leq h^{(k)}. \end{aligned} \tag{1.1.30}$$

Este subproblema es de una complejidad similar al subproblema de programación cuadrática (1.1.18), y de hecho es un ejemplo del problema L₁FC.

El subproblema (1.1.30) difiere del (1.1.18), en que no existen condiciones explícitas derivadas de las aproximaciones lineales $f^{(k)}(\delta)$.

Diversas investigaciones han sido consideradas recientemente dentro de los aspectos de los métodos Cuasi - Newton y FCS que han sido resumidos. En particular, existe ahora un gran entendimiento de la extensión en la cual $B^{(k)}$ debería aproximarse a W en el orden conocido de convergencia rápida. Esta teoría es relevante sólo en el caso de un problema con restricciones de igualdad. Se supone entonces que (1.1.12) es usado con $B^{(k)}$ reemplazado por $W^{(k)}$, tal que el subproblema FCS resuelve esencialmente:

$$\begin{pmatrix} B^{(k)} & -A^{(k)} \\ A^{(k)r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{(k)} \\ \lambda^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g^{(k)} \\ C^{(k)} \end{pmatrix} \tag{1.1.31}$$

De ahí que sólo las propiedades asintóticas se han empezado a estudiar, asumiendo que el único paso dado por (1.1.11) es tomado y $\delta^{(k+1)}$ es ignorado o posiblemente puede ser usado en lugar de $B^{(k)}$. Sea $z = z(x)$ alguna matriz del espacio nulo para A ($A^1 z = 0$) tal que, $z(x)$ es de clase

C^1 en una vecindad de x^* entonces (1.1.31) puede ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} Z^{(h)T} B^{(h)} \\ A^{(h)T} \end{pmatrix} \delta^{(h)} = \begin{pmatrix} Z^{(h)T} g^{(h)} \\ C^{(h)} \end{pmatrix} \quad (1.1.32)$$

En virtud de que el vector a la derecha es considerado como un método Cuasi - Newton para un sistema de ecuaciones no lineales.

$$\begin{pmatrix} Z^T g \\ C \end{pmatrix} = 0 \quad (1.1.33)$$

($g = g(x)$, etc.) el cual es un multiplicador libre de realización de las condiciones de (KT). Escribiendo $x = (g - a \lambda)$ x operando con ∇ y notando que $(g - a \lambda)^* = 0$ se sigue que:

$$\nabla (g^T x)^* = w^* x^* \quad (1.1.34)$$

Por lo tanto, el Teorema de Dennis - Moré (Teorema 1.1.3) da una caracterización de convergencia superlineal para el método PCS.

$$\lim \frac{\left| \begin{pmatrix} Z^{(h)T} B^{(h)} \\ A^{(h)T} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z^{*T} W^* \\ A^{*T} \end{pmatrix} \right| \delta^{(h)}}{\left| \delta^{(h)} \right|} = 0 \quad (1.1.35)$$

De la continuidad de A y z , es más simple expresarlo como:

$$\lim \frac{\left| Z^{(h)T} (B^{(h)} - W^*) \delta^{(h)} \right|}{\left| \delta^{(h)} \right|} = 0. \quad (1.1.36)$$

Este resultado implica que es suficiente para la convergencia superlineal tener $z^{(h)} (B^{(h)} - W^*) \rightarrow 0$ y no es necesario que $B^* = w^*$.

1.2 NLPQL: Una Subrutina en Fortran que Resuelve Problemas de Programación No lineal con Restricciones.

Introducción

El código NLPQL, es una implementación en Fortran de un método de programación cuadrática para resolver problemas de optimización no lineales restringidos con funciones objetivo diferenciables y de restricciones en un subproblema de programación cuadrática. Se discute la organización del NLPQL, incluyendo la formulación de un subproblema y la información que debe ser proporcionada para su uso.

El funcionamiento de NLPQL se ha comparado con alguno u otro código disponible.

NLPQL fue diseñado para resolver los problemas de programación no lineal con restricciones:

$$\text{Minimizar } f(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sujeto a :}$$

(1.2.1)

$$g_j(x) = 0, j = 1, 2, 3, \dots, m_1;$$

$$g_j(x) \geq 0, j = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m;$$

El método de optimización genera una sucesión de subproblemas de programación cuadrática los cuales han sido resueltos exitosamente. Por lo tanto el algoritmo se conoce como el Método de Programación Cuadrática Secuencial (PCS).

Los detalles teóricos y algunos resultados de convergencia son presentados en Schittkowski [20, 21]. Este dominio de aplicación es determinado por las siguientes suposiciones:

(a) *El problema es suave*: las funciones del problema son continuamente diferenciables en el conjunto $E = \{x \in R^n : x_0 \leq x \leq x_n\}$ note que las funciones f y g_j , $j = 1, \dots, m$, necesitan ser definidas solamente en el conjunto E . De ahí que las iteraciones procesadas por el algoritmo nunca violarán los límites superior e inferior (cajas).

(b) *El problema es pequeño*: El tamaño del problema depende del hardware facilitado, es decir, de la capacidad de almacenamiento y la capacidad de las rutinas de programación cuadrática para resolver problemas grandes. NLPQL fue probado extensivamente en problemas hasta de 100 variables. Un perfil desigual del método es dado en la sección 2, que proporciona las ideas matemáticas y el uso de los módulos del programa, los cuales pueden ser modificados o reemplazados por el usuario. La organización del paquete de programación es dada en la sección 3, junto con la implementación de detalles. La facilidad de la solución de un problema de programación no lineal en la forma (1.2.1), es una versión fácilmente usada al sustituirse en cualquier programa principal o subrutina.

El problema estándar es adaptable a la subrutina NLPQL1 que contiene características adicionales para modificar los parámetros que no se presentan o adecúan al código dentro del programa existente. El programa ha sido probado en aproximadamente 700 problemas, en particular, en la organización de un estudio comparativo de Hock y Schittkowski [20, 21]. Por otra parte, la eficiencia y confianza de NLPQL es comparada con otros códigos de programación no lineal disponibles (ver apéndices). El uso detallado de NLPQL [22] es descrito en la guía del usuario. El código ha sido usado para resolver problemas prácticos de programación no lineal en muchas áreas de las ciencias naturales e ingeniería.

El Algoritmo de Programación Cuadrática Secuencial

Los métodos de Programación Cuadrática Secuencial para la optimización con restricciones no lineales fue desarrollada principalmente por Han y Powell, basándose en el trabajo inicial de Wilson. La idea principal es la formulación de un subproblema específico de programación cuadrática. Sea x_k una iteración, v_k una

aproximación del multiplicador óptimo de Lagrange y B_k una aproximación definida positiva de la matriz Hessiana de la función Lagrangeana :

$$L(x, u) = f(x) - \sum_{j=1}^{m'} u_j g_j(x) \quad (1.2.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ $u = (u_1, \dots, u_{m'})^T \in \mathbb{R}^{m'}$. Tenemos el conjunto $m' = m + 2n$ y define las restricciones de frontera $x_1 \leq x \leq x_n$ para algunas funciones $g_{m+1}(x), \dots, g_{m'}(x)$, simplificando la notación tenemos:

$$g_j(x) = x^{(j-m)} - x_j^{(j-m)} \quad j = m+1, \dots, m+n \quad (1.2.3)$$

$$g_j(x) = x_0^{(j-m-n)} - x^{(j-m-n)}, \quad j = m+1, \dots, m'$$

donde en el lado derecho, se incluyen los componentes de x , x_1 y x_n respectivamente. Pero linealizando las restricciones no lineales de (1.2.1) y minimizando la aproximación cuadrática de la función Lagrangeana (1.2.2), obtenemos el subproblema en la forma:

$$\text{Minimizar}_{d \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2} d^T B_k d + \nabla f(x_k)^T d$$

$$\nabla g_j(x_k)^T d + g_j(x_k) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.2.4)$$

$$\nabla g_j(x_k)^T d + g_j(x_k) \geq 0, \quad j = m+1, \dots, m'$$

$$x_1 - x_k \leq d \leq x_n - x_k$$

Sea d_k una solución de (1.2.4) y u_k el vector correspondiente de los multiplicadores de Lagrange del problema de programación cuadrática, entonces una nueva iteración es determinada por:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (1.2.5)$$

donde α_k es una búsqueda de línea o parámetro tamaño de paso. α_k es diseñado para producir una disminución suficiente de una función de mérito:

$$\phi_k(\alpha) = \Psi_{rk} \left(\begin{pmatrix} x_k \\ v_k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} d_k \\ u_k - v_k \end{pmatrix} \right) \quad (1.2.6)$$

Donde la búsqueda de línea puede depender de la aproximación v_k del multiplicador óptimo de Lagrange de (1.2.1), actualizando v_k simultáneamente por:

$$v_{k+1} = v_k + \alpha_k (u_k - v_k) \quad (1.2.7)$$

en (1.2.6), r_k es un vector de parámetros de penalidad y controla el grado de penalidad de la función objetivo o función Lagrangeana dejando una región factible. La función de mérito posible es la L_1 - función exacta de penalidad:

$$\begin{aligned} \Psi_k(x, v) = & f(x) + \sum_{j=1}^{m_1} r_j |g_j(x)| \\ & + \sum_{j=m_1+1}^m r_j |\min(0, g_j(x))| \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

usada por Han y Powell con la función Lagrangeana aumentada

$$\Psi_r(x, v) = f(x) - \sum_{j=1}^{m_r} (v_j g_j(x) - (1/2)r_j g_j(x)^2) \quad (1.2.9)$$

$$- \sum_{j=m_r+1}^{m'} \begin{cases} (v_j g_j(x) - (1/2)r_j g_j(x)^2), & \text{Si } g_j(x) \leq v_j/r_j \\ (1/2)v_j^2/r_j, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

propuesta por Schittkowski [22]. El parámetro de penalidad r_k es actualizado por una regla apropiada para garantizar una dirección descendente d_k con respecto a la función de mérito elegida.

Es posible que la región factible de (1.2.4) pueda estar vacía aunque el problema original (1.2.1) sea soluble. El segundo inconveniente es el recálculo de los gradientes de todas las restricciones de cada iteración, aunque algunos de ellos pueden estar activos en la solución óptima, es decir, localmente redundante. Para evitar ambas desventajas una variable adicional δ y un conjunto de estrategias son introducidas principalmente para modificar el subproblema.

$$\text{Minimizar } (1/2)d^T B_k d + f(x_k)^T d + (1/2)\rho\delta^2$$

$d \in \mathbb{R}^n, \delta \in \mathbb{R}$

sujeto a :

$$\nabla g_j(x_k)^T d + (1-\delta)g_j(x_k) \geq 0, \quad j \in J_k \quad (1.2.10)$$

$$\nabla g_j(x_k)^T d + g_j(x_k) \geq 0, \quad j \in K_k$$

$$x_j - x_k \leq d \leq x_n - x_k$$

$$0 \leq \delta \leq 1$$

donde

$$J_k = \{ 1, \dots, m \} \cup \{ j: m_c \leq j \leq m, g_j(x_k) \leq \epsilon \text{ ó } v_j^{(k)} > 0r \}$$

$$K_k = \{ 1, \dots, m \} - J_k$$

aquí

$$v_k = (v_1^{(k)}, \dots, v_m^{(k)})^T$$

y ϵ es una tolerancia prevista y dada por el usuario.

El índice k_0 indica los gradientes que han sido calculados en las iteraciones previas. El término ρ_k es un parámetro de penalidad adicional designado para reducir la influencia de δ en una solución de (1.2.10). Es fácil ver, que en el punto $d_0 = 0$, $\delta_0 = 1$ se satisfacen las restricciones de (1.2.10) y puede ser usado como un punto de partida posible para el algoritmo de programación cuadrática.

Como una alternativa a (1.2.10), un subproblema de mínimos cuadrados lineales puede ser formulado explotando la factorización:

$$B_k = L_k D_k L_k^T \quad (1.2.11)$$

con una matriz triangular inferior L_k y una matriz diagonal D_k .

El resultado del problema de mínimos cuadrados lineal contiene una matriz triangular de la función objetivo y es fácilmente transformada en un problema de mínima distancia eficiente y disponible. Los factores LDL de B_k pueden estar actualizados más o menos con el mismo procedimiento de la matriz adicional B_k .

La matriz B_k es una aproximación definida positiva de la matriz Hessiana de la función Lagrangeana. B_k puede ser actualizada por las técnicas Cuasi - Newton de una optimización sin restricciones. La fórmula de BFGS es ciertamente la más popular y es implementada en NLPQL junto con una modificación propuesta por Powell para

garantizar que las matrices sean definidas positivas.

El algoritmo contiene algunas características adicionales para corregir ciertas situaciones de error y es descrito completamente por Schittkowski [22].

Organización del Programa y Detalles de la Implementación

El algoritmo de Programación Cuadrática Secuencial descrito anteriormente, ha sido implantado por el autor y distribuido sobre solicitud. El paquete de programación no contiene una subrutina para resolver la programación cuadrática o el subproblema de mínimos cuadrados lineales. La intención es que un usuario utilice un programa de biblioteca o deba obtener cualquier programa disponible, por ejemplo el código de programación cuadrática QPSOL.

La organización del programa es explicado en la figura 1 el cual, se presenta en módulos que tienen que ser proporcionados por el usuario o intercambiados, ya sea para mejorar la versión presentada o para probar un módulo específico.

PROGRAMA PRINCIPAL

NLPQL
NLPQL1
NLPQL2
FUNC
GRAD
QL
MERIT

LINSEA

Programa principal fácil de usar,
lectura de datos en archivo de
texto o base de datos.
Subrutina fácil de usar.
Versión estándar.
Realización del algoritmo.
Cálculo de la función objetivo.
Cálculo de gradientes.
La solución del subproblema.
Evaluación de la función de
mérito.
Cálculo del tamaño del paso o
búsqueda lineal.

Figura 1. Organización del paquete del programa.

Es necesario que uno se familiarice con el código y se recomienda que primero se ejecute la versión fácil ya sea en forma de un programa principal o subrutina. La dimensión del problema, el número de restricciones, los límites x_1 , x_n , un valor inicial x_0 y una subrutina para evaluar las funciones del problema requieren ser proporcionadas por el usuario. Todas las demás decisiones están predeterminadas por default. Si estas aproximaciones fallaran en algunos parámetros del algoritmo serían cambiados o si el usuario quiere tener más influencia en los procesos de solución, la subrutina estándar NLPQL1 puede ser ejecutada.

La subrutina FUNC ha sido definida por el usuario para el cálculo de las funciones del problema. Si la diferenciación analítica ha sido escogida, la subrutina GRAD debe también ser implementada por el usuario.

El conjunto de restricciones activas y la función o valores del gradiente de la función de mérito (1.2.6) son calculados por una subrutina con el nombre de MERIT. El programa contiene una realización de la función Lagrangeana aumentada (1.2.9). Pero el plan puede estar reemplazado por cualquier otra función de mérito es decir, la L_1 - función exacta de penalidad. Finalmente el usuario es influenciado por el procedimiento de búsqueda de línea, el cual se encuentra en una subrutina llamada LINSEA.

Como mencionamos antes la subrutina NLPQL1 permite la alteración de valores por default o algunas decisiones algorítmicas internas y ajustar los procesos de solución de situaciones específicas.

Las características distintivas más importantes son las siguientes:

** Subproblemas alternativos.*

Una variable lógica debería ser un conjunto ordenado para el usuario en el orden que se indique, si la programación cuadrática o un problema de mínimos cuadrados lineal es formulado. Cuando usamos el Programa de Powell ZQPCVX por ejemplo, uno debe decidir si la factorización inicial de Cholesky, de la aproximación Hessiana es desempeñada dentro de ZQPCVX o del algoritmo a la programación

nolineal exterior.

** Problema de programación cuadrática expandida.*

En una ejecución normal NLPQL se formula como un subproblema de programación cuadrática (1.2.4) combinada con un conjunto activo estratégico para evitar inexactitudes numéricas inducidas por la variable adicional. Esta variable es introducida sólo en el algoritmo correspondiente usado para salvar el registro y el mensaje de error. Se obtiene el subproblema en la forma (1.2.10). Alternativamente este subproblema puede ser formulado en cada paso iterativo de NLPQL1 por tanto, el algoritmo específico para resolverlo es siempre suministrado con un punto de inicio posible.

** Escalamiento.*

El escalamiento es uno de los problemas más difíciles en la optimización práctica. Para llevar a cabo la formulación del modelo tal que, una pequeña alteración fija de alguna variable induce una alteración de las funciones del problema del mismo orden de magnitud. El método de escalamiento aplicable, generalmente no está disponible desde la información inicial posible que posee la programación del algoritmo nolineal acerca de la conducta del problema sólo en una vecindad del punto inicial. De este modo la mejor recomendación para el usuario es definir el parámetro escalado que depende de un problema particular propio. No obstante, el procedimiento escalado es incluido en NLPQL1. Si el valor de la función objetivo o la violación de la función de restricción en el punto crucial es más grande que el valor por default (1000), entonces las funciones correspondientes son escaladas por los factores.

** Comunicación invertida.*

Los códigos de programación nolineal son frecuentemente aplicados como una rutina auxiliar en el complejo sistema es decir, como parte de un control óptimo de los elementos del algoritmo finito. En estos casos, uno se puede ayudar del uso de la comunicación inversa siendo éste, el camino más flexible para salvar un problema de optimización.

*** Información del problema adicional.**

Inicialmente, la matriz de aproximación para el Hessiano de la función Lagrangeana es la matriz de identidad y los estimadores iniciales para los multiplicadores es un conjunto de ceros.

Alternativamente, un usuario puede alimentar al programa con su propia suposición para explotar la información conocida acerca de la estructura del problema.

*** Reiniciar en casos de error.**

Se requiere para un usuario del NLPQL1 reiniciar en situaciones de error automáticamente, procediendo desde la última iteración calculada en la matriz Cuasi-Newton, el multiplicador estimado y los parámetros de penalidad son todo el conjunto de valores iniciales y un intento para resolver el problema nuevo ahora con un límite más bajo en el número permitido de iteraciones.

*** Facilidades de Salida.**

Un usuario está autorizado para suprimir toda salida. Alternativamente se emplea un análisis de convergencia final o salida adicional para cada paso de iteración que pueda estar procesando.

*** La razón para la terminación del algoritmo.**

Si las condiciones de optimización o condiciones de error no se cumplen, el usuario deberá estar informado acerca de las condiciones que no se satisfagan así como algunos usos de tolerancia previstos, entonces el código encuentra una situación de error. El algoritmo termina cuando se ha alcanzado el número máximo de iteraciones.

El programa requiere de un núcleo de almacenamiento de aproximadamente $n^3 + nm + 20n + 9m$ variables reales, además, un almacenamiento adicional que sirva para resolver el subproblema de

programación cuadrática. El tamaño del problema es por lo tanto limitado por el tamaño del núcleo y la capacidad del subproblema algorítmico para resolver problemas grandes. El programa ha sido implementado en Fortran y evaluado por el autor de Telefunken TR440 de la Universidad de Stanford y en una VAX 11/780 de la Universidad de Stuttgart en aritmética de simple y doble precisión. Por otra parte, el código ha sido corrido por varios usuarios en otras computadoras.

La primera implementación del método PCS está en el programa de Powell VFO2AD. Para una clase de problemas de prueba altamente no lineales, la función Lagrangeana aumentada de mérito parece ser preferible pero esta función puede inducir algunas inestabilidades numéricas cuando el problema es degenerado es decir, cuando los gradientes de las restricciones activas son linealmente dependientes.

CAPITULO 2

MODELOS MATEMATICOS APLICADOS AL CRECIMIENTO HUMANO

2.1. Introducción

Existe una gran variedad de aspectos en la naturaleza que describen una cierta relación. En particular, nos parece interesante observar la relación que existe entre el crecimiento físico de un individuo con respecto al tiempo. Para ello, hacemos uso de los modelos matemáticos.

El propósito de nuestro estudio es aplicar los Modelos de Preece y Baines al crecimiento humano, a saber:

$$y(t, a, b, c, d, e) = a - \frac{2(a - e)}{\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))}; \quad (2.1.1)$$

$$y(t, a, b, c, d, e, f) = a - \frac{4(a - f)}{[\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))] \frac{1}{[1 + \exp(e(t - b))]}}, \quad (2.1.2)$$

donde y es la variable dependiente que representa la talla, la cual se puede medir cuantitativamente y se expresa en función de la variable independiente t , el tiempo. La utilidad de los modelos de crecimiento es importante, ya que, nos permite analizar toda una información y predecir la talla de un individuo en un cierto tiempo, siendo de gran ayuda a investigadores en las ciencias de la salud interesados en el desarrollo de un individuo, lo que les permite inferir acerca de los problemas del individuo en su desarrollo como niveles de desnutrición o aspectos genéticos transmisibles, etc.

Nos referimos en este estudio a la talla (estatura) de un individuo dado

que, la talla es un parámetro integral del desarrollo físico y en cierta forma nos proporciona suficiente información con respecto a la variación que existe entre uno u otro individuo en algún tiempo determinado, causado por diferentes aspectos importantes que regulan el crecimiento como son alimentación, estimulación, nivel social, medios de subsistencia, etc.

Un gran número de investigaciones con datos longitudinales se han realizado a partir del estudio realizado en Zurich de 1955 a 1978, por los principales investigadores Fanconi, Prader y Largo, en el Hospital del Niño de la Universidad de Zurich. Algunos de los modelos clásicos de curvas de crecimiento son:

Modelo de Coant (7):

$$y(t;a,c) = a + at + c \ln(t);$$

Modelo de Jeanu (13):

$$y(t;a,b,c,d) = a - bt - \exp(c + dt);$$

para niños del nacimiento a los seis años;

Modelo de Kouchi [(14):

$$y(t;a,b,c) = a + bt^c;$$

en niños del nacimiento a los 2 años;

Modelo de Gómpertz (17,18):

$$y(t;a,c,d) = a \exp(-\exp(c - dt));$$

para niños de 7 a 14 años;

Por último el modelo de Preece y Baines [19]:

$$y(t, a, b, c, d, e) = a - \frac{2(a - e)}{\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))}; \quad (2.13)$$

para talla total. Por esta razón nos interesó el estudio de este modelo.

De un estudio longitudinal del Instituto Nacional de Pediatría, de la Ciudad de México, se nos proporcionó una base de datos para llevar a cabo este trabajo. Consta del seguimiento de 336 sujetos originarios de un poblado rural del altiplano central de la República Mexicana denominado (Lugar Sobre la Tierra Blanca), tomándose 154 de los cuáles tienen datos completos de 0 a 21 años, de estos, 84 pertenecen al género femenino y 70 al masculino.

Utilizando la subrutina NLPQL de Programación Cuadrática Secuencial de Schittkowski [22], ajustamos el modelo para cada uno de los individuos, obteniendo resultados satisfactorios, así como un análisis de los parámetros obtenidos, los cuáles tienen una interpretación biológica en cada individuo. Asimismo se estimaron 10 parámetros biológicos que son de gran interés en el crecimiento de todo ser humano y que guardan alguna relación con los factores principales que influyen en su desarrollo.

Por último se hace una comparación de dos de los modelos de la familia de modelos creados por Preece y Baines.

2.2 Modelos de Crecimiento Humano

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de trabajos realizados anteriormente dedicados a la creación de modelos matemáticos aplicados al crecimiento humano. Uno de los primeros trabajos fue realizado por

Jenas-Bayley [13], en la forma siguiente:

$$y(t,a,b,c,d) = a + bt + \exp(c + dt) ; \quad (2.2.1)$$

el cuál fue utilizado para la estimación de peso y talla a partir del nacimiento hasta los siete años. Deming y Washburn [8], la aplicaron en un estudio del nacimiento hasta los ocho años. También Berkeley y Kent [1], la usaron para ajustar datos de peso y talla del nacimiento hasta los seis años para crear tablas comunes longitudinales de crecimiento. Otro modelo que también se aplicó en esta etapa de la vida fue el Modelo de Coont [7]; aplicado para modelos de crecimiento del cráneo en 1942 y es formulado como:

$$y(t,a,b,c) = a + bt + c \ln(t) ; \quad (2.2.2)$$

En un estudio comparativo realizado por Kirsten [14], fue propuesto para modelar variables antropométricas como el peso, talla y circunferencia cefálica. Berkeley [3] lo comparó con el modelo de Jenas para niños entre tres meses y seis años de edad y concluyó que contenía severos sesgos relacionados a la edad. En 1971, Marubini [15] hace uso de la función logística:

$$y(t,a,b,k,p) = p + \frac{k}{1 + \exp(a - bt)} ; \quad (2.2.3)$$

donde $y = p$ es la ecuación de la asíntota inferior de la curva; $y = p + k$ es la ecuación de la asíntota superior de la curva; b es la constante de crecimiento que regula el crecimiento y a es una constante de integración determinada por la posición del origen. Esta función como la de Gómpertz, propuesta por el actuario inglés del mismo

nombre en 1825 para explicar la mortalidad, tiene la forma:

$$y(t, a, b, k, p) = p + k \exp(- \exp(a - bt)) . \quad (2.2.4)$$

Fueron aplicadas para la estimación del crecimiento a partir de la adolescencia dando ajustes muy similares en ambos modelos. En un estudio comparativo realizado por Marubini y cols. [15,16], obtuvieron mejores ajustes con la función de Gómpertz que con la logística. Por otra parte, Hauspie y cols. [12], compararon las dos funciones para ambos sexos durante la adolescencia. En este trabajo se reportaron resultados similares a los de Marubini y cols. con respecto a las correlaciones residuales obtenidas de ambos modelos, resultando ser muy parecidos, por lo que, no existe razón alguna para preferir uno u otro modelo. Sin embargo se ha tenido mayor preferencia por el modelo logístico en la construcción de nuevos modelos, especialmente para los de ajuste de talla total. Por ejemplo, el modelo de la "doble logística" para el crecimiento total, el cual tiene algunos problemas señalados por Lozy [15], Preecs y Balnos [19], uno de los que señalan es la existencia de la asíntota inferior un poco antes de la adolescencia. Otro, que propone Preecs es que la suma de dos funciones no lineales destruye la estructura de las ecuaciones diferenciales originales donde no hay una estructura similar. Este modelo de la doble logística está dado como:

$$y(t, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) = \frac{a_1}{1 + \exp(- b_1(t - c_1))} + \frac{f - a_1}{1 + \exp(- b_2(t - c_2))} . \quad (2.2.5)$$

el cual no ajusta bien en los datos longitudinales de crecimiento.

Intentando corregir los malos ajustes en la doble logística Bock y Thissen [4] elaboraron un modelo de tres logísticas, donde las dos primeras representan el crecimiento anterior a la pubertad, y la tercera

la etapa de la adolescencia. Este modelo tiene 10 parámetros, donde f lo da como conocido y el cual es escrito como:

Modelo de la triple logística

$$\begin{aligned}
 y(t; a_1, b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, f, p, q) &= \frac{a_1 q}{1 + \exp(-b_1(t - c_1))} \\
 &+ \frac{a_1 p}{1 + \exp(-b_2(t - c_2))} + \frac{f - a_1}{1 + \exp(-b_3(t - c_3))} ;
 \end{aligned}
 \tag{2.2.6}$$

Con este modelo se obtuvieron ajustes bastante buenos en la estimación de talla desde el nacimiento hasta los veinte años. **Loy** [15], incluso muestra la aceleración del crecimiento que ocasionalmente es posible observar entre los seis y ocho años de edad.

Se ha señalado una objeción a esta clase de modelos al afirmar que, mientras matemáticamente es adecuado tener dos procesos de crecimiento simultáneamente, es difícil interpretar tal situación biológica.

Con la familia de modelos que presentaron **Procco y Baines** [19], se realizaron mejores ajustes que los de la doble logística y tan buenos como los presentados por la triple logística y su construcción está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= s(t)(y_1 - y) \\
 \frac{ds}{dt} &= \gamma(s_1 - s)(s - s_0)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.7}$$

Siendo y_1 la talla final alcanzada. Del sistema anterior de ecuaciones diferenciales se obtienen como soluciones:

$$y(t) = y_1 - \frac{2(y_1 - e)}{\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))}; \quad (2.2.8)$$

$$y(t) = y_1 - \frac{4(y_1 - f)}{[\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))]} \quad (2.2.9)$$

$$\frac{1}{[1 + \exp(e(t - b))]} ;$$

Estas funciones se conocen como modelos de Preece y Baines donde y_1 es la talla final, e es la talla estimada a la edad donde se obtiene la máxima velocidad del crecimiento (Modelo 1) y f (Modelo 2), b es la edad donde se obtuvo la máxima velocidad del crecimiento; c , d y e son constantes de proporción. La construcción de estos modelos puede verse con más detalle en el Apéndice 1.

Es importante hacer notar que el parámetro de talla final es un parámetro a estimar, lo que no ocurre en los anteriores modelos, éstos son aceptables para determinar la estimación total de talla en el ser humano.

Particularmente, observamos que se ajusta mejor el Modelo 1 que el Modelo 2. Preece y Baines también proponen la estimación de otros parámetros biológicos a partir de los estimadores obtenidos con los modelos originales, los cuales permiten analizar las relaciones entre los diversos factores que intervienen en el crecimiento. De los cuatro modelos que crearon Preece y Baines, el que tuvo más aplicaciones fue el Modelo 1 y esto debido al número de parámetros que tiene. Al

realizar los ajustes de cualquier modelo no lineal por algún proceso iterativo, es necesario dar valores iniciales a los parámetros a estimar; esto no siempre es fácil de obtener, por lo cual, se requiere de un modelo con el menor número de parámetros.

La proposición más reciente de un modelo para el periodo completo de crecimiento del cual se tiene idea, es el Modelo de Shohoji y Sasaki [23] que consiste en la suma de dos funciones no lineales las cuáles se escriben como:

$$y(t; u, a, b) = u \exp(- \exp(a - bt)) + g(t)(1 - \exp(- \exp(a - bt))) ; \quad (2.2.10)$$

siendo g la función de Count y u, a, b parámetros a estimar, u es la estatura adulta, donde el segundo término determina la estatura antes de la adolescencia y el primer término una función de Gómpertz la que produce el efecto de la aceleración durante la adolescencia.

Lo anterior, ha sido una breve introducción acerca de los modelos más comunes que describen el crecimiento físico, en particular, la estimación de la talla.

2.3 Aplicación de los Modelos de Preece y Baines

Los Modelos de Preece y Baines son cuatro, de los cuáles tomaremos únicamente dos que son los que consideramos que se ajustan mejor a los datos de la talla total. Para mayor detalle ver [19].

Modelo 1

$$y(t; a, b, c, d, e) = a - \frac{2(a - e)}{\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))} ; \quad (2.3.1)$$

El significado para las variables como de los parámetros es el siguiente:

- y talla en un tiempo t
- t tiempo (edad expresada en años)
- a talla final alcanzada (en centímetros)
- b edad en la cual ocurre la máxima velocidad del crecimiento
- c primer factor de la escala de tiempo (constante de proporción)
- d segundo factor de la escala de tiempo (constante de proporción)
- e talla en la edad de la máxima velocidad del crecimiento

Modelo 2

$$y(t, a, b, c, d, e, f) = a - \frac{4(a - f)}{[\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))]} \quad (2.3.2)$$

$$\frac{1}{[1 + \exp(e(t - b))]} ;$$

y el significado de las variables como de sus parámetros:

- y talla a en un tiempo t
- t tiempo (edad expresada en años)
- a talla final alcanzada
- b edad en la cual ocurre la máxima velocidad del crecimiento
- c primer factor de la escala de tiempo
- d segundo factor de la escala de tiempo
- e tercer factor de la escala de tiempo
- f talla en la edad de la máxima velocidad del crecimiento

Este estudio se realizó en un poblado rural denominado "Lugar Sobre la Tierra Blanca", situado en el altiplano central de la República Mexicana, contando con una muestra de 336 sujetos, de los cuáles se tomaron sólo 154, por ser los que tenían el seguimiento de talla desde 0 a 21 años, de este grupo, 84 pertenecían al sexo femenino y 70 al sexo masculino.

Los ajustes se realizaron con la subrutina (NLPQL) utilizada para resolver problemas de programación no lineal con restricciones. En nuestro caso sólo la utilizamos en el ajuste de funciones no lineales con restricciones de caja solamente.

Para el uso de la subrutina creada por Klaus Schittkowski [20, 21], es necesario crear un programa principal y dos subrutinas, cuyos nombres son:

1). La subrutina NLFUN (M, ME, MMAX, N, F, G, X, ACTIVE) .

Es donde se calcula la suma de los cuadrados de los residuales con respecto al modelo (evaluación de la función objetivo).

2). La subrutina NLGRAD (M, ME, MMAX, N, F, G, DF, DG, X, ACTIVE, WA).

Evalúa los gradientes de la función objetivo, donde la función está dada como la suma de los cuadrados de los errores.

En el Modelo 1:

$$j(t; a, b, c, d, e) = \frac{2(a - e)}{\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))}; \quad (2.3.3)$$

donde los errores están dados por :

$$e(t_i) = y_i - \hat{y}(t_i); \quad (2.3.4)$$

de aquí definimos la función objetivo como :

$$h(t; a, b, c, d, e) = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}(t_i; a, b, c, d, e)]^2; \quad (2.3.5)$$

tal que, el gradiente de la función objetivo será igual a las derivadas parciales de $h(t)$ con respecto a cada uno de los parámetros: a, b, c, d, e , del modelo. Sean $t_i = i$; para $i = 0, 1, \dots, 21$; el tiempo en años y $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d, x_5 = e$, entonces

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i; x)] \frac{\partial f(t_i; x)}{\partial x_j}; \quad (2.3.6)$$

para $j = 1, 2, 3, 4, 5$; produce las j -ésimas ecuaciones normales Draper-Smith [9] a saber:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i; x)] \frac{\partial f(t_i; x)}{\partial x_1}; \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i; x)] \frac{\partial f(t_i; x)}{\partial x_2}; \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i; x)] \frac{\partial f(t_i; x)}{\partial x_3}; \quad (2.3.9)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x_4} = \sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i; x)] \frac{\partial f(t_i; x)}{\partial x_4}; \quad (2.3.10)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{f}(t_i; x)] \frac{\partial \hat{f}(t_i; x)}{\partial x_3}; \quad (2.3.11)$$

Lo último que resta es calcular las derivadas parciales del modelo 1 con respecto de cada uno de sus parámetros, entonces

$$\frac{\partial \hat{f}(t; x)}{\partial x_1} = 1 - \frac{2}{\exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2))}; \quad (2.3.12)$$

$$\frac{\partial \hat{f}(t; x)}{\partial x_2} = \frac{-2(x_1 - x_2)}{[\exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2))]^2} \quad (2.3.13)$$

$$[x_3 \exp(x_3(t - x_2)) + x_4 \exp(x_4(t - x_2))];$$

$$\frac{\partial \hat{f}(t; x)}{\partial x_3} = \frac{-2(x_1 - x_2)(x_2 - t) \exp(x_3(t - x_2))}{[\exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2))]^2}; \quad (2.3.14)$$

$$\frac{\partial \hat{f}(t; x)}{\partial x_4} = \frac{-2(x_1 - x_2)(x_2 - t) \exp(x_4(t - x_2))}{[\exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2))]^2}; \quad (2.3.15)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(t; x)}{\partial x_3} = \frac{2}{\exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2))}; \quad (2.3.16)$$

Ya definidas tanto la función objetivo como sus gradientes, creamos ambas subrutinas y las llamamos en el programa principal junto con la subrutina NLPQL, también es necesario dar valores iniciales a los parámetros desconocidos del modelo, como en todos los procesos iterativos para el ajuste de modelos no lineales. En esta subrutina es necesario dar los intervalos en donde los parámetros desconocidos pueden variar. Así, teniendo una idea de la interpretación biológica de los parámetros en el modelo 1, damos los intervalos en donde los valores de los parámetros son válidos. De ahí, los valores iniciales de los parámetros de cada individuo en particular. Por ejemplo, los intervalos para a, b, c, d y e en el modelo 1 son: (140, 200), (10, 20), (0, 0.21), (0, 3), (100, 100) respectivamente y a = 155, b = 12.38, c = 0.1144, d = 1.1369, e = 144.174 son los valores iniciales.

Después de haber creado el programa principal y las subrutinas necesarias, damos el nombre del archivo donde se encuentran los valores observados tanto de la variable independiente (tiempo), como de la variable dependiente (talla), donde el programa principal tomará los datos para realizar los ajustes de cada individuo. Para más detalles de cómo usar la subrutina NLPQL de Schittkowski ver Apéndice 2.

Análogamente se hace lo mismo para el modelo 2, sólo que éste cuenta con seis parámetros, por lo cual, tanto las derivadas parciales de la función objetivo como sus valores iniciales son diferentes.

Sea

$$\hat{y}(t; a, b, c, d, e, f) = a - \frac{4(a - f)}{\exp(c(t - b)) + \exp(d(t - b))} \cdot \frac{1}{1 + \exp(e(t - b))}; \quad (2.3.17)$$

tal que las derivadas parciales de la función objetivo (2.3.5) están dadas como:

$$\frac{\partial H(t, x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{nd} [y_i - \hat{y}(t_i; x)] \frac{\partial \hat{y}(t_i; x)}{\partial x_j}; \quad (2.3.18)$$

con $t_i = i$; para $i = 0, 1, \dots, 21$; y las asignaciones siguientes: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$, $x_5 = e$, $x_6 = f$.

De ahí calculamos las derivadas parciales del modelo 2 con respecto a cada uno de los parámetros, entonces:

$$\frac{\partial \hat{y}(t, x)}{\partial x_1} = 1 - \frac{4}{\exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2))} \frac{1}{1 + \exp(x_3(t - x_2))}; \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}(t, x)}{\partial x_2} &= 4(x_1 - x_6)[1 + \exp(x_3(t - x_2))] \\ &\frac{[\exp(x_3(t - x_2))(-x_3) + \exp(x_4(t - x_2))(-x_4)]}{[(\exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2)))(1 + \exp(x_3(t - x_2)))]^2} \\ &+ \frac{\exp(x_3(t - x_2))(-x_3) \exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2))}{[(\exp(x_3(t - x_2)) + \exp(x_4(t - x_2)))(1 + \exp(x_3(t - x_2)))]^2} \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_3} = 4(x_1 - x_6)$$

(2.3.21)

$$\frac{[(\exp(x_3(t-x_2))(t-x_2))(1+\exp(x_5(t-x_2)))]}{[(\exp(x_3(t-x_2))+\exp(x_4(t-x_2)))(1+\exp(x_5(t-x_2)))]^2};$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_4} = 4(x_1 - x_6)$$

(2.3.22)

$$\frac{[(\exp(x_4(t-x_2))(t-x_2))(1+\exp(x_5(t-x_2)))]}{[(\exp(x_3(t-x_2))+\exp(x_4(t-x_2)))(1+\exp(x_5(t-x_2)))]^2};$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_5} = 4(x_1 - x_6)[\exp(x_3(t-x_2))+\exp(x_4(t-x_2))]$$

(2.3.23)

$$\frac{[\exp(x_5(t-x_2))(t-x_2)]}{[(\exp(x_3(t-x_2))+\exp(x_4(t-x_2)))(1+\exp(x_5(t-x_2)))]^2};$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_6} = \frac{4}{\exp(x_3(t-x_2)) + \exp(x_4(t-x_2))}$$

(2.3.24)

$$\frac{1}{1 + \exp(x_5(t-x_2))};$$

y los intervalos de los parámetros a , b , c , d , e y f del modelo 2 son: (140, 200), (10, 20), (0, 0.21), (0, 2.5), (0, 3), (100, 180) respectivamente donde $a = 147$ cms., $b = 12.38$ cms., $c = 0.114$ cms., $d = 0.135$ cms., $e = 1.137$ cms., $f = 134.074$ cms. los valores iniciales.

Después de hacer los cambios correspondientes para el modelo 2, realizamos los ajustes correspondientes para cada individuo.

De la estimación de los parámetros en ambos modelos, hicimos su representación gráfica observada y estimada de cada sujeto, así como una tabla de resultados en la cual se describen los siguientes datos: clave del sujeto, sexo, edad, talla observada, talla calculada, error estimado, incrementos observados, incrementos calculados, velocidad estimada $y'(t)$ y aceleración estimada $y''(t)$, los cuáles se dan de 0 a 21 años, también se presentan los parámetros estimados, varianza residual y desviación estándar residual. De donde podemos notar que son buenos los ajustes obtenidos para todos los individuos en general.

RESULTADOS

Modelo 1

Dentro del estudio de Preece y Baines, se menciona que el modelo no es muy bueno para los primeros cuatro años de vida. Para apreciar mejor este fenómeno decidimos aplicarlo desde el nacimiento hasta los 21 años, tomando las mediciones equidistantes de un año. Después de haber realizado toda la serie de ajustes respectivos, observamos que los errores obtenidos del ajuste en el nacimiento son en promedio de 5.90 cms.; a un año de 3.88 cms.; a los 2 años de 3.24 cms.; a los 3 años de 1.86 cms.; a los 4 años de 0.82 cms., y en todas las demás edades es menor de 1 cm. Excepto a la edad de 8 años que es de 2.76 cms., con lo cual comprobamos que efectivamente el modelo es excelente de los 4 años en adelante, teniendo como preocupación a la edad de 8 años, (tabla 11, fig.23). Si tomamos el promedio de los errores separados de acuerdo a sexo podemos notar cómo los errores son mayores en los hombres, lo

que nos hace suponer que el modelo ajusta mejor en las mujeres. Se muestran cinco ajustes del sexo femenino y cinco ajustes del sexo masculino (fig. 1-10). Al hacer el análisis de la estadística descriptiva en los parámetros obtenidos encontramos que son mayores en los hombres, esto suele ser razonable si tomamos en cuenta que los hombres en promedio tienden a ser más altos que las mujeres (tabla 1-3). Al graficar ambas tallas estimadas por sexos, se aprecian mejor estas variaciones, notando cómo el crecimiento es muy similar desde el nacimiento hasta los 9 años, después empiezan a despegar las niñas hasta que, finalmente los niños tienden a ser más altos (tabla 7, fig.21).

Asimismo, en la distribución de las velocidades estimadas, notamos la similitud que guardan todas ellas al decrecer, crecer y decrecer, haciéndonos suponer la existencia de un mínimo y máximo local. De igual forma, tomando los promedios de dichas velocidades separadas por sexos notamos cómo las distribuciones son parecidas excepto en los puntos mínimo y máximo, ya que las mujeres a más temprana edad tienden a despegar primero, lo cual hace que obtengan antes su edad de máxima velocidad; siendo éste un factor muy importante para la predicción de su talla final. Mientras que los hombres tardan más en obtener su edad de despegue por lo que su edad de máxima velocidad es obtenida después, viéndose reflejada en su talla final. Observamos también como en ambos sexos la función de velocidad decrece de 0 a 9 años, crece de 9 a 12 años y decrece de 12 a 21 años; en el sexo femenino decrece de 0 a 8 años, crece de 8 a 12 años y decrece de 12 a 21 años, lo que no sucede en el sexo masculino que decrece de 0 a 10 años, crece de 10 a 14 años y decrece de 14 a 21 años.

Debido a la interpretación biológica que tienen estos puntos mínimo y máximo en la función de velocidad, se estimaron las aceleraciones de cada sujeto para estimar los intervalos donde se encuentran dichos puntos. Tomando los promedios separados por sexos, encontramos que el punto mínimo de la función de velocidad en ambos sexos se encuentra en el intervalo de edad de 8 a 9 años y el máximo entre 11 y 12 años, en el sexo femenino, el mínimo se encuentra en el intervalo de 8 a 9 años y máximo entre 11 y 12 años y en el sexo masculino, el mínimo se encuentra 10 y 11 años y el máximo entre 13 y 14 años (tabla 13, fig. 27) Con los intervalos dados estimamos los puntos mínimo y máximo de todos los sujetos a través del método numérico de la bisección de Rice

[6], utilizado para encontrar ceros de funciones.

Estos puntos, por su importancia en la interpretación biológica del crecimiento humano son decisivos en la predicción de la estatura de un individuo. De estos puntos Preece y Baines sugirieron la estimación de los siguientes 10 parámetros biológicos:

- T₀** edad de despegue de la velocidad en la preadolescencia.
- PV** edad de máxima velocidad en la adolescencia.
- HT₀** estatura a la edad **T₀**.
- HPV** estatura a la edad de **PV**.
- VT₀** velocidad a la edad **T₀**.
- VPV** velocidad a la edad **PV**.
- IT₀PV** incremento de talla de **T₀** a **PV**.
- IPVHF** incremento de talla de la edad de **PV** a la talla final.
- PT₀HF** proporción de talla a la edad **T₀** con respecto de la talla final.
- PPVHF** proporción de talla a la edad **PV** con respecto a la talla final.

Donde **T₀** es tomado como mínimo encontrado en la curva de velocidad y análogamente **PV** el punto máximo.

Con la estimación de estos parámetros se tiene información suficiente para realizar una interpretación biológica y predicción de talla final del individuo.

Después de hacer la estimación de los parámetros biológicos de cada individuo, obtuvimos la media, la varianza, la desviación estándar, el máximo y mínimo, de donde observamos que en ambos sexos la media de **T₀** es 9.59 años, la de **PV** es 12.98 años (tabla 15). Lo mismo hicimos para el sexo femenino donde la media de **T₀** es 8.4 años mientras que **PV** es 11.94 años (tabla 16), y en el sexo masculino la media de **T₀** es 10.49 años y la de **PV** es 14.22 años (tabla 17). De aquí podemos decir que la estatura en las mujeres a la edad **T₀** es aproximadamente **HT₀** = 119.078 cms; su velocidad a la edad **T₀** es **VT₀** = 4.535 cms/año; el incremento de talla de la edad **T₀** a la edad **PV** es **IT₀PV** = 18.317 cms., y el porcentaje de talla de la edad **T₀** con respecto de la talla final es **PT₀HF** = 78.89%. Esto nos muestra que la talla final está dada en gran proporción por la talla alcanzada a la edad de **T₀**, y de igual manera tenemos que la edad donde se obtuvo la máxima velocidad en la

adolescencia es $PV = 11.94$ años de donde su estatura es $HPV = 137.396$ cms, con una velocidad de $VPV = 8.065$ cms/año, un incremento de talla de la edad PV a la talla final de $IPVHF = 13.560$ cms y el porcentaje de talla a la edad PV con respecto de la talla final es $PPVHF = 91.02\%$

La talla a la edad donde se obtuvo la máxima velocidad en la adolescencia correspondió al 91.02% de la talla final en las mujeres. Asimismo en los hombres se tiene que la talla a la edad donde alcanza su máxima velocidad corresponde a un 90.44% de su talla final. De donde concluimos que si una mujer alcanza una talla alta a la edad de T_0 alcanzará una talla alta en PV por lo tanto, su talla final será alta. Análogamente sucede lo mismo con los hombres, aunque en el caso de las mujeres estas tallas estarán influenciadas por el brote de la pubertad y la edad de la menarquia. Existen varios trabajos que estudian la relación entre la edad de la menarquia con la talla final, como el de *Zacarias y Rand* realizado en 1983, [24].

De la matriz de correlación de los parámetros estimados del modelo y sus parámetros biológicos (tabla 30), se dan algunas de las relaciones más importantes que existen.

El parámetro a está fuertemente correlacionado positivamente con los parámetros biológicos HT_0 y HPV , esto quiere decir que la talla final en un individuo está correlacionada con las tallas alcanzadas a la edad de despegue de velocidad en la preadolescencia y a la edad en donde se alcanza la máxima velocidad en la adolescencia. Podemos decir que los individuos que alcanzan tallas grandes en las edades de despegue y de máxima velocidad, tendrán tallas finales grandes.

El parámetro b es de esperarse que esté fuertemente correlacionado positivamente con los parámetros T_0 y PV , dado que la interpretación de B es la edad en donde alcanza la máxima velocidad un individuo. Por tanto podría decirse que los individuos que alcanzan el punto de despegue de velocidad a una edad mayor también tendrán su punto de máxima velocidad a una edad mayor.

Los parámetros c y d están correlacionados con los parámetros PT_0HF y $PPVHF$, esto quiere decir que las constantes de proporción que

regulan el crecimiento están correlacionadas con la proporción de las tallas alcanzadas en la edad de despegue y máxima velocidad con respecto de la talla final los cuales pueden verse como un indicador posible del grado de maduración, tales que c y d así son caracterizadas. Por lo tanto se supone que los individuos con maduración más temprana tendrán valores de c y d más grandes.

Por último notamos cómo el parámetro e está correlacionado con los parámetros HTO y HPV lo que significa que el parámetro e está correlacionado con la talla alcanzada en la edad de despegue y máxima velocidad, de aquí podemos decir que los individuos que alcanzan estaturas altas a la edad de despegue y máxima velocidad, tendrán un valor grande de e .

Modelo 2

Una vez realizados todos los ajustes individualmente, en el modelo 2, encontramos que los errores promedio son mayores para cada una de las edades, de donde tenemos al nacimiento un error de 6.172 cms., a un año de 3.801 cms., a los 2 años 3.383 cms., a los 3 años 2.094 cms., a los 4 años 1.077 cms. y en todas las demás edades menor de 1 cm., excepto a la edad de los 8 años que es también de 2.749 cms. (tabla 12, fig. 24).

Con ello ratificamos la validez del modelo después de los cuatro años en adelante, además corroboramos que en esta población, la mayoría de los individuos a la edad de 7 a 8 años su crecimiento permanece constante, lo cual se observa mejor en las gráficas de las tallas observadas de los individuos. En las figs. 10 a 20 mostramos cinco ajustes del sexo femenino y 5 ajustes del sexo masculino para ratificar lo anterior.

Realizando un análisis de los parámetros obtenidos, calculamos primero la estadística descriptiva, de donde tomamos la media, la varianza la desviación estándar, el máximo y el mínimo para cada uno; separando por sexos estas medidas de tendencia central, se muestran los valores en la tabla 4 para ambos sexos, en la tabla 5 para el sexo femenino y el la tabla 6 para el sexo masculino.

En base a los promedios de los parámetros, estimamos las tallas de 0 a 21 años separados por sexos y al graficarlas observamos cómo varían

cada una de ellas después de los 9 años (tabla 8, fig.22). Además, con la gráfica de distribución de los errores promedio se hace notar la variación entre sexos. También se observa el error a los 8 años, lo que nos hace suponer que a esa edad hay una detención en el crecimiento para empezar el despegue de talla, lo que comúnmente se conoce en una función como un punto de inflexión (tabla 10, fig.24).

De la distribución de las velocidades estimadas por sexos notamos cómo son muy parecidas excepto en los puntos mínimo y máximo, dado que las mujeres tienden a despegar antes que los hombres, obteniendo de la misma forma la máxima velocidad en la adolescencia, la cual se cree está relacionada con el brote de la pubertad.

Con la estimación de las velocidades se definen los intervalos en los que se encuentran los puntos mínimo y máximo de velocidad, por tanto, decimos que el mínimo está entre los 8 y 10 años y el máximo entre los 11 y 13 años en el sexo femenino y para el sexo masculino el mínimo está entre los 13 y 15 años (tabla 12, fig. 26). Calculando las aceleraciones en cada individuo para cada una de las edades comprobamos que los puntos mínimo y máximo de la función de velocidad se encontraban en los intervalos antes mencionados (tabla 14, fig. 28).

Aplicando el método de la bisección a la función de aceleración de cada individuo se encuentra el mínimo y máximo local de la función de velocidad. Tomando los promedios de estos puntos separados por sexos notamos que en ambos sexos el mínimo es de 9.797 años, el máximo de 13.043 años (tabla 18); en el sexo femenino el mínimo es de 9.069 años y el máximo de 12.098 años (tabla 19); en el sexo masculino el mínimo es de 10.625 años y el máximo de 14.119 años (tabla 20).

Debido a la importancia que tienen estos puntos en la interpretación biológica del crecimiento humano, Preece y Baines los toman como base para la estimación de los diez parámetros biológicos que ellos mismos sugieren en la forma siguiente:

TO	edad de despegue de velocidad en la preadolescencia.
FV	edad de máxima velocidad en la adolescencia.
HTO	talla a la edad de despegue de la preadolescencia.

HPV	talla a la edad de máxima velocidad en la adolescencia.
VTO	velocidad a la edad de despegue en la preadolescencia.
VPV	velocidad a la edad de máxima velocidad en la adolescencia.
ITOPV	incremento de talla de la edad T0 a la edad PV .
IPVHF	incremento de talla de la edad PV a la edad de talla final.
PTOHF	proporción de talla a la edad T0 con respecto de la talla a la edad PV .
PPVHF	proporción de talla a la edad PV con respecto a la talla final.

Por tanto, tenemos que los valores promedio para los parámetros biológicos en ambos sexos, femenino y sexo masculino difieren entre ellos (tabla 18). Se observa cómo en el sexo femenino los valores de los parámetros son menores, lo cual se ve reflejado en la estimación de la talla final y al igual que en el modelo 1, notamos como la talla a la edad **T0** en proporción con la talla final **PTOHF** es de 78.9% y la talla a la edad **PV** en proporción con la talla final **PPVHF** es de 91% (tabla 19). También observamos cómo la edad de máxima velocidad **PV** está relacionada con el brote de la pubertad, la cuál, en el sexo femenino se da a los 12 años aproximadamente y en el sexo masculino a los 14.1 años aproximadamente.

De la matriz de correlación (tabla 31) encontramos que la talla final (**a**), está también fuertemente correlacionada con la talla alcanzada a la edad de despegue (**T0**) y de máxima velocidad (**PV**).

El parámetro **b** está correlacionado con la edad de despegue en la preadolescencia (**T0**) y la edad de máxima velocidad en la adolescencia (**PV**).

El parámetro **e** está correlacionado con el parámetro **VPV** y el parámetro **f** que significa la talla alcanzada a la edad de máxima velocidad está correlacionado con la talla alcanzada a la edad de despegue (**HT0**) y con la talla alcanzada a la edad de máxima velocidad (**HPV**). De aquí coincidimos con las correlaciones de ambos modelos y la interpretación biológica que tienen sus parámetros.

Comparación del Modelo 1 con el Modelo 2

De los resultados obtenidos de ambos modelos, podemos notar

claramente como el modelo 1 ajusta mejor a los datos de talla, en particular para cada sujeto a distintas edades. De las tablas 9 y 10 podemos ver como en ambos sexos (femenino y masculino) los errores en general son mayores en cada una de las edades del modelo 2, y de la comparación por sexos notamos cómo los errores son mayores en el sexo masculino en ambos modelos.

De las tablas 21, 22 y 23, así como de las figuras 25 y 26, podemos notar fácilmente que las diferencias significativas del modelo 1 -vs- el modelo 2 con la prueba de significancia "t" de Student al 95% de confianza en ambos sexos las encontramos a las edades de 7, 10 y 13 años. En el sexo femenino las diferencias de los modelos existen a las edades de 10, 11 y 13 años y en el sexo masculino son; al nacimiento a 1, 2, 7, 8 y 9 años. En este grupo fue donde se pudieron observar más diferencias, pero si tomamos en cuenta que ambos modelos de ajuste no son muy buenos en los primeros 4 años de vida. Tendríamos sólo 3 diferencias a diferentes edades, haciendo notar que en ambos sexos como en el sexo femenino coinciden las diferencias a las edades de 10 y 13 años. Análogamente se hizo lo mismo con las funciones de aceleración del modelo 1 -vs- modelo 2 notando que en ambos sexos las diferencias son a las edades del nacimiento, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 10 años. En el sexo femenino las diferencias son a las edades de 8, 9, 10 y 12 años y en el sexo masculino a las edades del nacimiento, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 años. De la misma forma que en las velocidades, descartamos las diferencias en los primeros 4 años de vida, notando la coincidencia entre los grupos; ambos sexos y sexo femenino a las edades de 8, 9 y 10 años (tablas 24, 25 y 26) (fig. 27 y 28). Esto es de esperarse si existen diferencias entre los parámetros estimados de cada modelo.

De la obtención de los parámetros biológicos de los dos modelos, notamos en las tablas 27, 28 y 29 cómo cada uno de los parámetros en promedio tanto en el sexo femenino como en el sexo masculino difieren en menos de 1, lo que nos hace suponer que no existen diferencias significativas entre ambos conjuntos de parámetros biológicos. No obstante, con la prueba "t" de Student comprobamos que lo anterior era falso, encontrando diferencias significativas al 95% de confianza en ambos sexos en los parámetros $ITOPV$ y $PTOHF$. En el sexo femenino las diferencias existen en los parámetros HTO , VPV , $ITOPV$ y $PTOHF$ y en el sexo masculino no existen diferencias. Notando también la

coincidencia de las diferencias entre los grupos; ambos sexos y sexo femenino en los parámetros **ITOPV** y **PTOHF**.

Concluyendo con esto decimos que el modelo 1 es mejor que el modelo 2, para el ajuste de datos longitudinales de tallas en individuos.

Después de la obtención de estos resultados coincidimos con los resultados obtenidos por Preece y Baines con los de Gasser y Müller [11], en que la edad donde se obtiene la máxima velocidad se alcanza en el brote de la pubertad que es en promedio para las mujeres a los 12 años y en los hombres a los 14 años de edad. Esta es una característica muy importante del crecimiento humano en la estimación de talla final, considerada por investigadores y médicos pediatras.

De las correlaciones enunciadas de los parámetros de los modelos con los parámetros biológicos se muestra la relación que existe entre ellos, pero debemos recordar que no son todas, ya que también existen entre los mismos parámetros del modelo y los mismos parámetros biológicos, lo que se puede apreciar mejor con la matriz de correlación de todos los parámetros, tanto en la de ambos sexos como sexos separados (tabla 32 y 33).

Por ejemplo, el parámetro **a** está altamente correlacionado con el parámetro **e** y el parámetro **T₀** está correlacionado altamente con el parámetro **PV** en el modelo 1. Análogamente, ocurre lo mismo con estos parámetros en el modelo 2. (tabla 32 y 33).

fig. 1

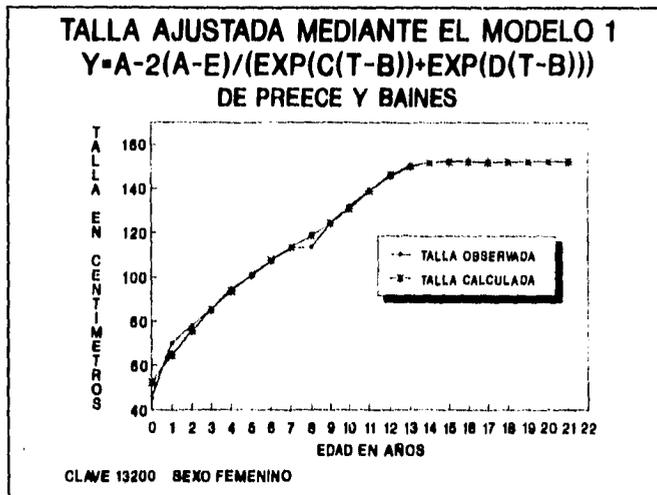


fig. 2

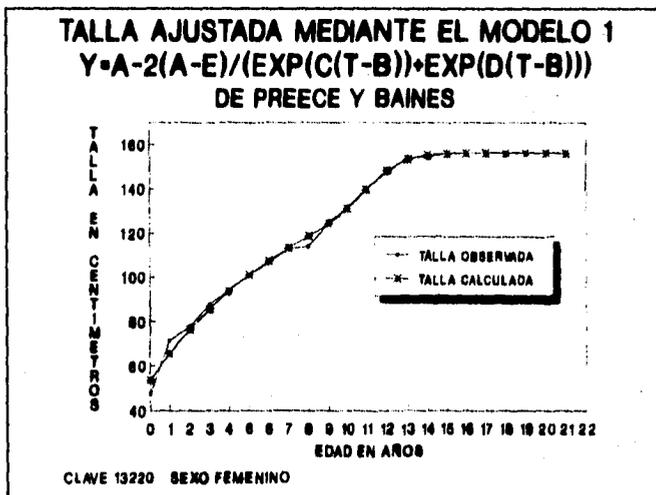


fig. 3

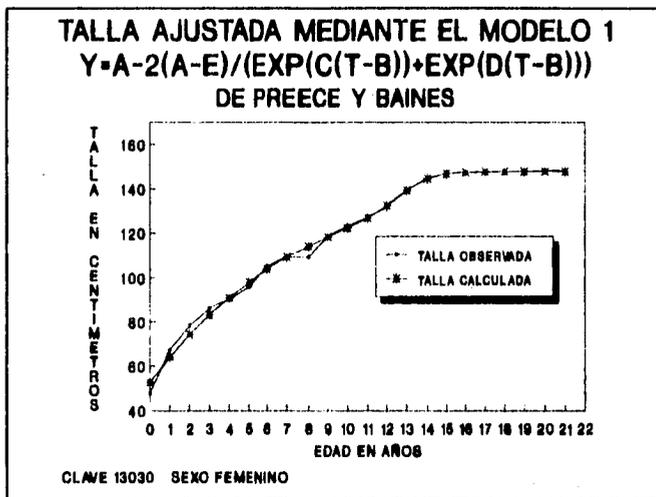


fig. 4

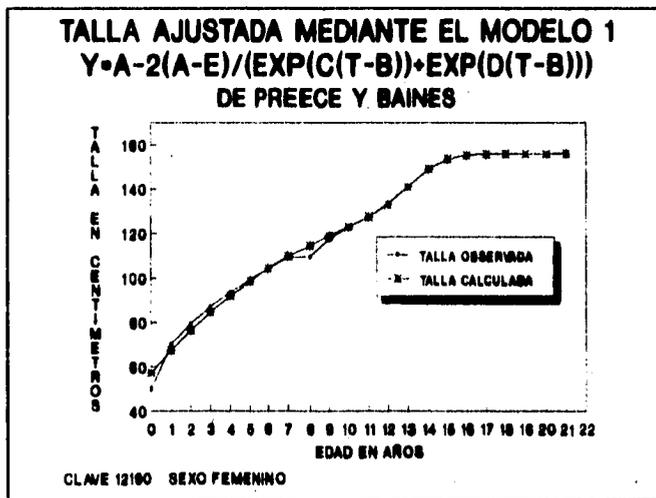


fig. 5

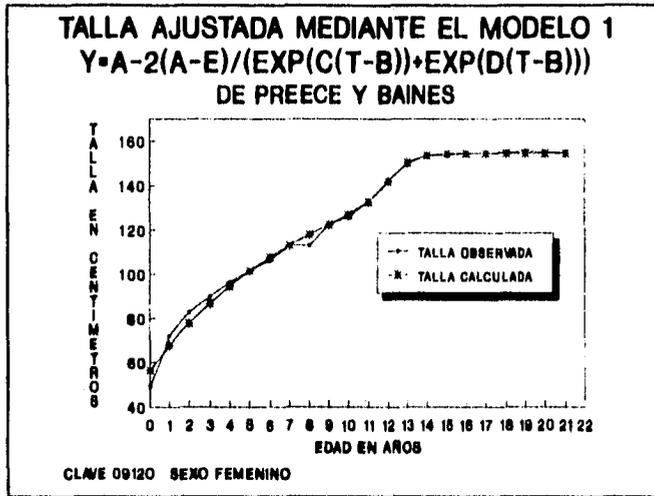


fig. 6

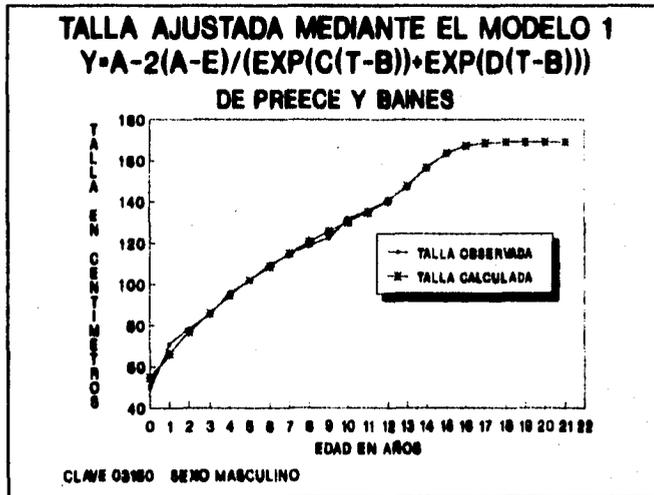


Fig. 7

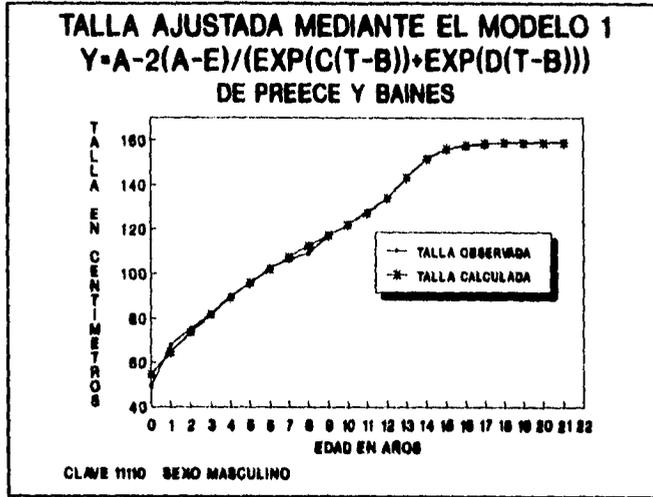


Fig. 8

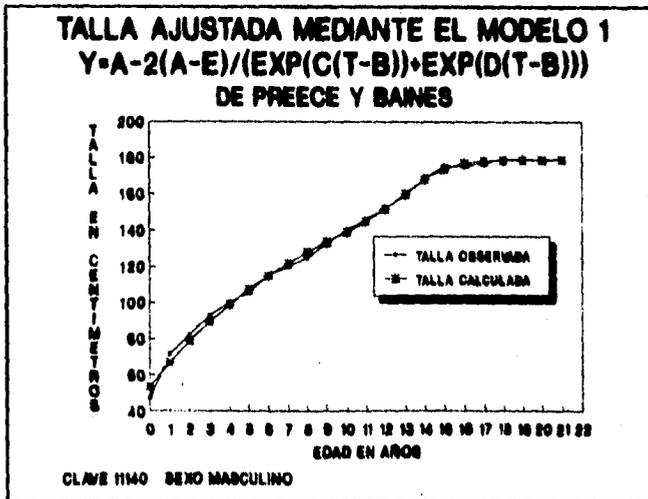


fig. 9

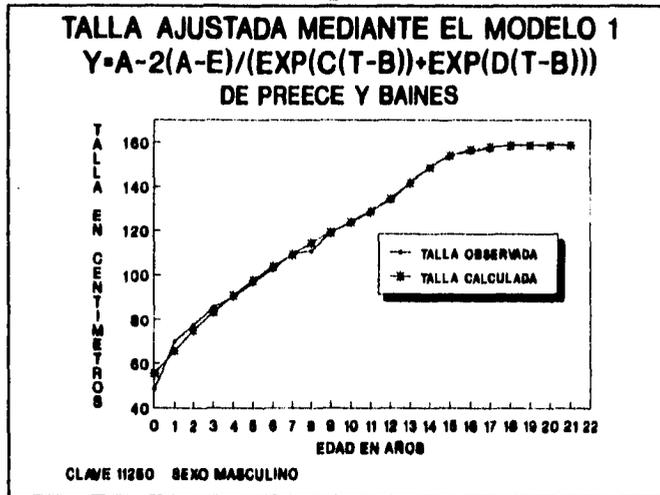


fig.10

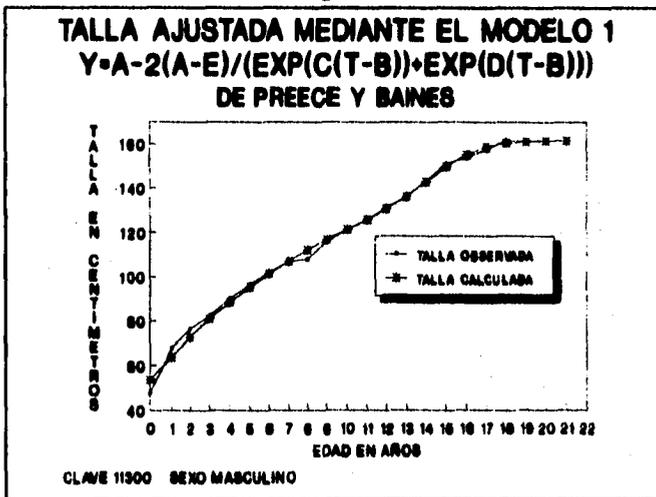


fig. 11

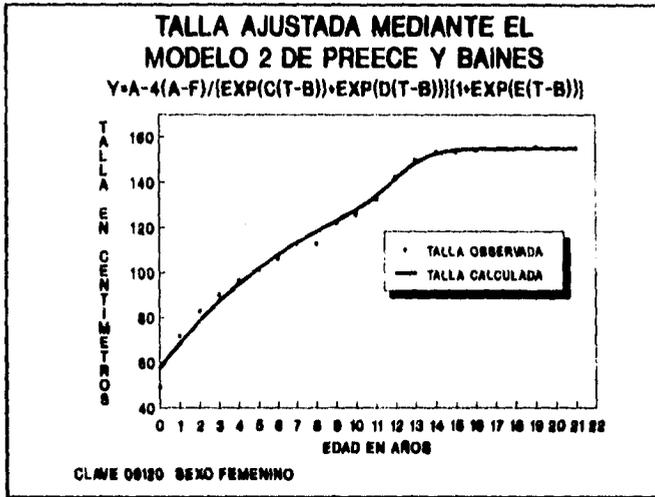


fig. 12

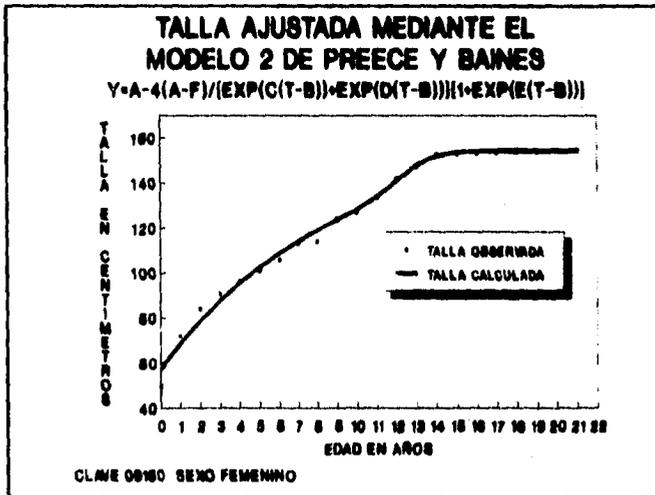


fig. 13

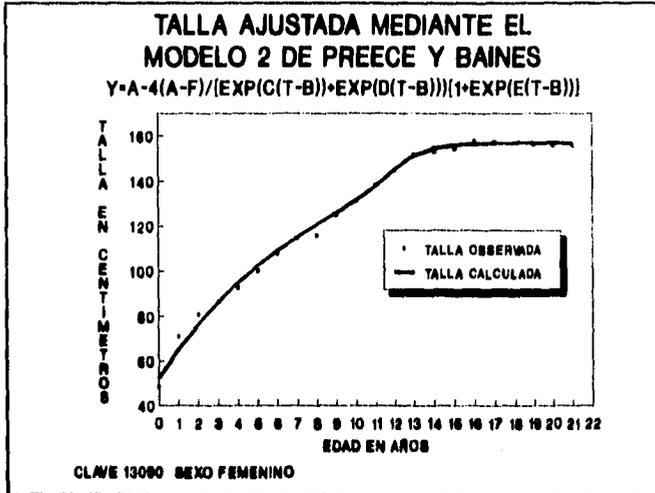


fig. 14

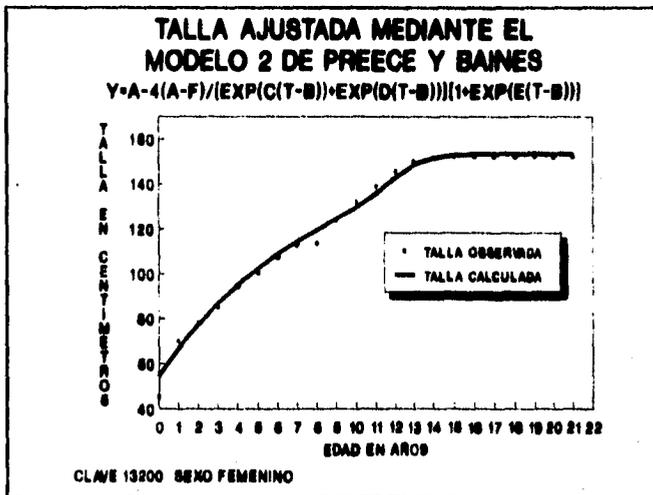


fig. 15

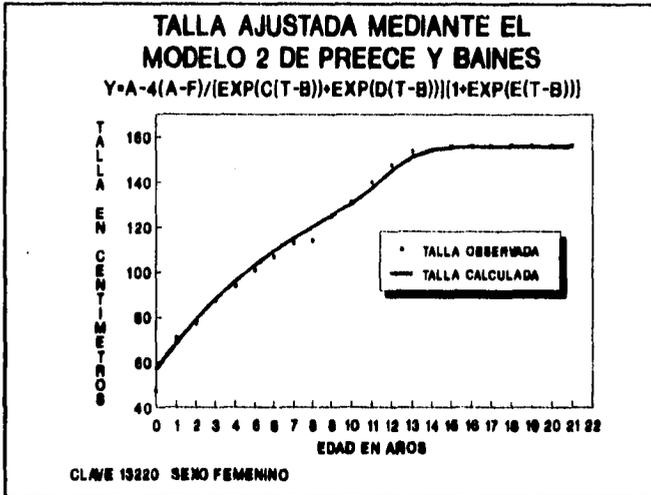


fig. 16

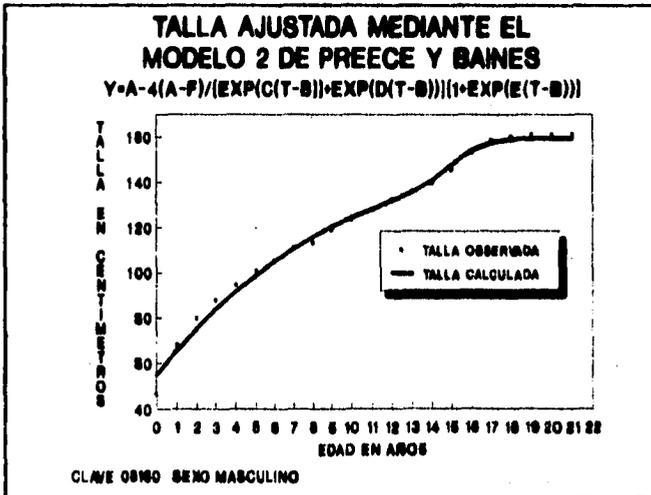


fig. 17

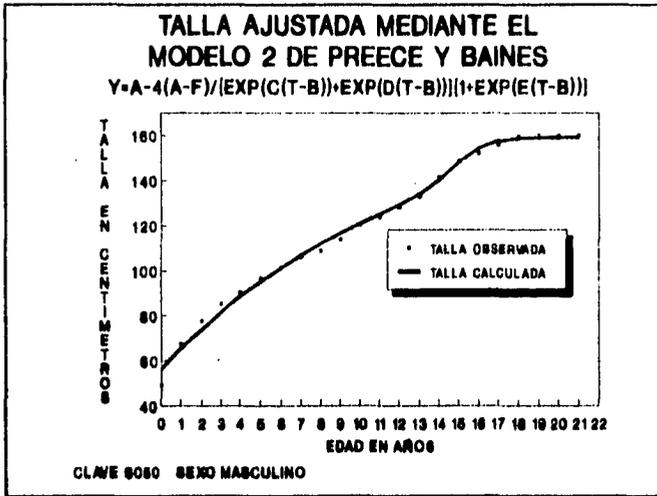


fig. 18

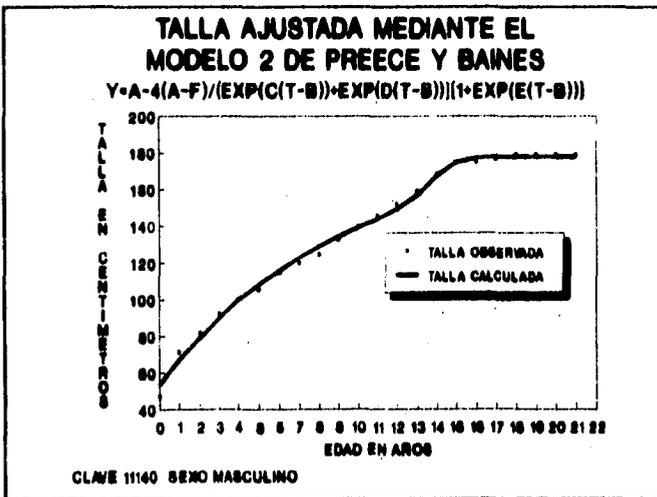


fig. 19

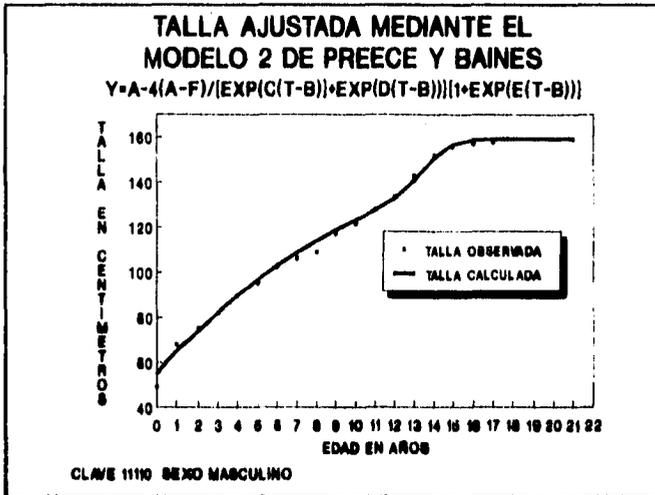


fig. 20

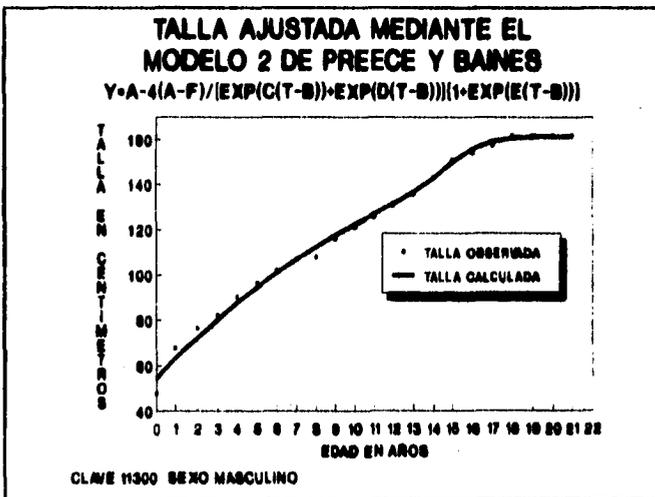


fig. 21

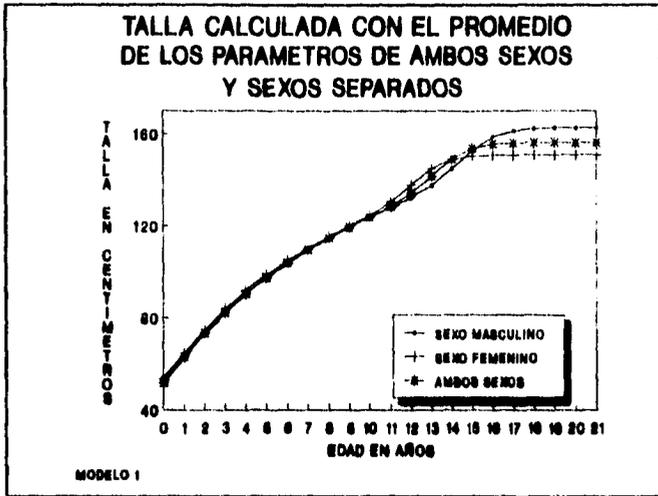


fig. 22

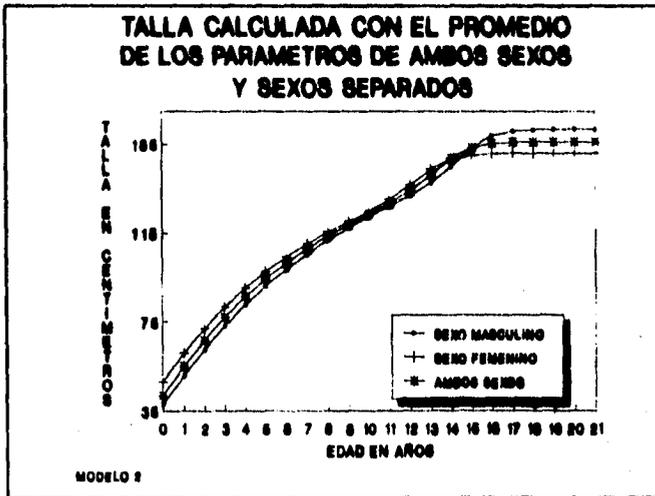


fig. 23

ERRORES OBTENIDOS EN LOS AJUSTES HECHOS CON EL MODELO 1 DE PREECE Y BAINES

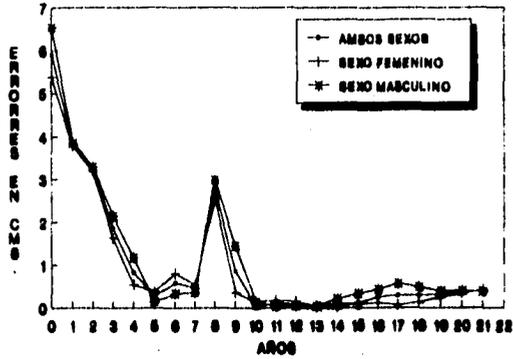


fig. 24

ERRORES PROMEDIO OBTENIDOS CON EL MODELO 2 DE PREECE Y BAINES

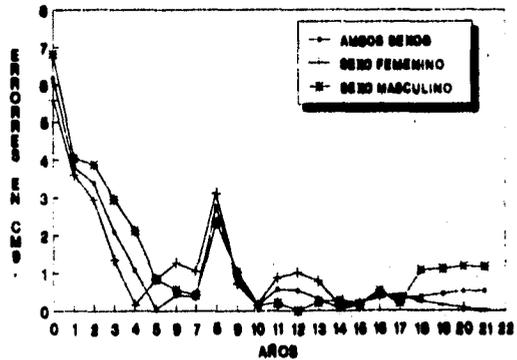


fig. 25

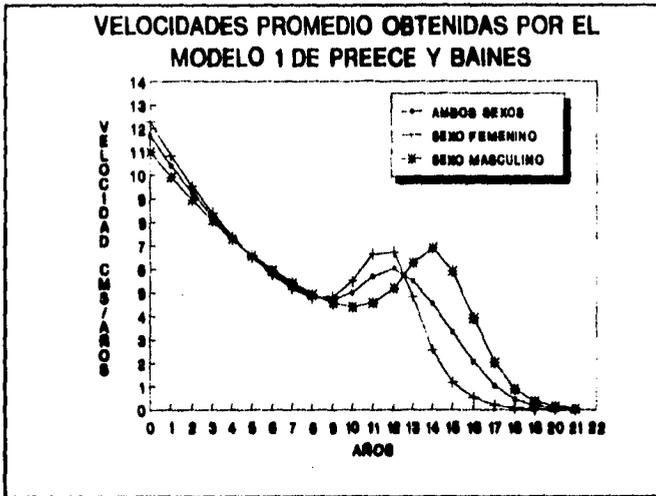


fig. 26

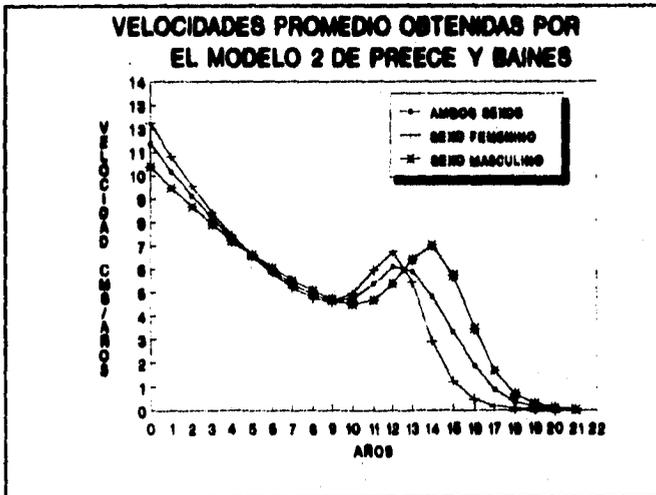


fig. 27

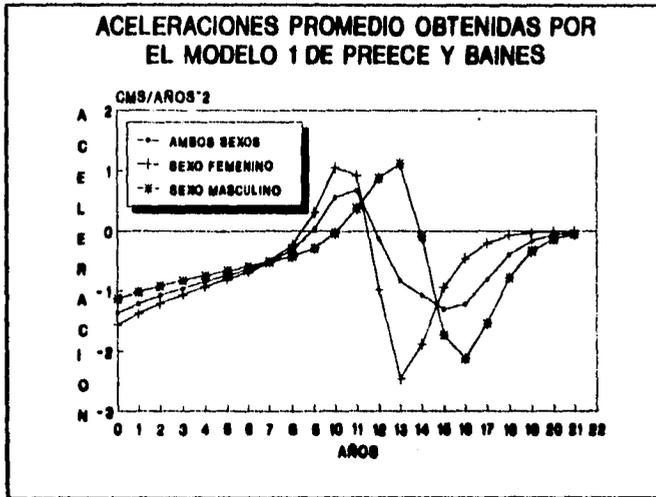


fig. 28

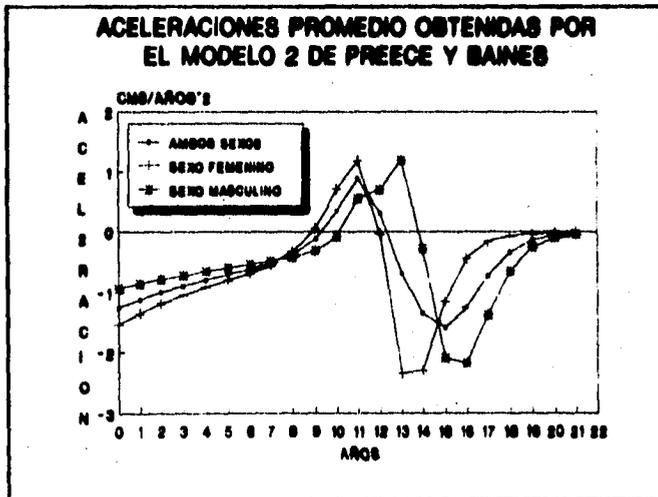


fig. 29



Tabla 1**DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS DEL MODELO 1**

$$Y = A - \frac{2(A-E)}{\text{EXP}[C(T-B)] + \text{EXP}[D(T-B)]}$$

AMBOS SEXOS.

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
A	156.336	75.440	8.686	180.377	137.173
B	13.410	2.374	1.541	16.895	10.437
C	0.115	0.000256	0.016	0.161	0.000
D	1.277	0.063	0.251	2.056	0.698
E	145.161	61.372	7.834	169.870	126.901

Tabla 2**DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS DEL MODELO 1**

$$Y = A - \frac{2(A-E)}{\text{EXP}[C(T-B)] + \text{EXP}[D(T-B)]}$$

SEXO FEMENINO.

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
A	150.999	36.521	6.043	164.160	137.173
B	12.345	1.044	1.022	15.677	10.437
C	0.126	0.000144	0.012	0.161	0.000
D	1.358	0.053	0.231	2.056	0.698
E	140.615	36.235	6.020	160.709	126.901

Tabla 3

DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS DEL MODELO 1
 $Y = A - \frac{EXP [C (T - B) + EXP [D (T - B)]]}{1 + EXP [E (T - B)]}$

SEXO MASCULINO.

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
A	162.788	45.922	6.777	188.377	148.754
B	14.688	0.971	0.985	16.895	11.704
C	0.102	0.000064	0.008	0.120	0.080
D	1.180	0.058	0.242	1.854	0.744
E	198.615	37.164	6.896	169.870	137.903

Tabla 4

DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS DEL MODELO 2
 $Y = A - \frac{EXP [C (T - B) + EXP [D (T - B)]]}{1 + EXP [E (T - B)]}$

AMBOS SEXOS.

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
A	156.289	66.171	8.135	178.133	136.992
B	13.556	1.870	1.368	16.781	11.142
C	0.108	0.0000625	0.025	0.181	0.065
D	0.146	0.004	0.062	0.638	0.069
E	1.171	0.075	0.273	2.999	0.322
F	145.646	51.788	7.191	166.619	129.289

Tabla 5

DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS DEL MODELO 2
 $Y = A - \frac{4 (A - F)}{[EXP [C(T-B)] + EXP[D(T-B)]] [1+EXP[E(T-B)]]}$

SEXO FEMENINO.

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
A	151.121	30.122	5.488	164.736	136.592
B	12.620	0.708	0.841	15.819	11.142
C	0.122	0.000361	0.019	0.181	0.067
D	0.142	0.002	0.042	0.385	0.006
E	1.155	0.034	0.184	1.675	0.606
F	141.320	24.393	4.939	154.184	129.309

Tabla 6

DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS DEL MODELO 2
 $Y = A - \frac{4 (A - F)}{[EXP [C(T-B)] + EXP[D(T-B)]] [1+EXP[E(T-B)]]}$

SEXO MASCULINO.

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
A	162.004	44.272	6.654	178.133	149.213
B	14.622	1.058	1.029	16.701	11.608
C	0.093	0.000441	0.021	0.163	0.035
D	0.150	0.006	0.008	0.638	0.069
E	1.188	0.121	0.348	2.999	0.322
F	150.573	37.371	6.113	166.619	138.027

Tabla 7

**PROMEDIO DE TALLA CALCULADA DE AMBOS SEXOS
Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 1-.**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	51.86	52.95	53.88
1	63.21	64.56	64.44
2	73.32	74.78	73.97
3	82.34	83.80	82.59
4	90.38	91.76	90.36
5	97.55	98.77	97.39
6	103.94	104.96	103.73
7	109.65	110.45	109.47
8	114.78	115.36	114.66
9	119.44	119.93	119.39
10	123.87	124.62	123.76
11	128.54	130.38	127.98
12	134.33	137.89	132.44
13	141.88	145.88	137.90
14	149.34	149.82	145.10
15	153.80	150.42	152.96
16	155.56	150.82	158.62
17	156.11	150.92	161.32
18	156.27	150.95	162.31
19	156.32	150.96	162.64
20	156.33	150.96	162.74
21	156.33	156.96	162.77

Tabla 8**PROMEDIO DE TALLA CALCULADA DE AMBOS SEXOS
Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 2-**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	41.85	48.24	37.84
1	55.03	60.86	50.84
2	66.71	71.93	62.55
3	77.00	81.66	73.09
4	86.26	90.19	82.57
5	94.41	97.69	91.09
6	101.63	104.28	98.75
7	108.03	110.09	105.63
8	113.73	115.26	111.81
9	118.85	120.01	117.37
10	123.61	124.71	122.43
11	128.41	130.09	127.16
12	134.06	136.83	131.98
13	141.31	143.81	137.73
14	148.76	148.36	145.32
15	153.47	150.26	153.80
16	155.37	150.87	158.86
17	155.97	151.05	161.05
18	156.14	151.10	161.74
19	156.19	151.12	161.93
20	156.20	151.12	161.98
21	156.21	151.12	162.00

Tabla 9**PROMEDIO DE VELOCIDADES CALCULADAS DE AMBOS
SEXOS Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 1-.**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	11.689	12.274	10.988
1	10.405	10.811	9.918
2	9.264	9.524	8.952
3	8.251	8.393	8.081
4	7.354	7.401	7.297
5	6.561	6.535	6.592
6	5.869	5.792	5.961
7	5.288	5.191	5.405
8	4.861	4.803	4.931
9	4.705	4.817	4.571
10	5.008	5.512	4.402
11	5.698	6.641	4.566
12	6.028	6.726	5.191
13	5.478	4.829	6.257
14	4.534	2.550	6.914
15	3.330	1.175	5.916
16	2.050	0.509	3.900
17	1.020	0.188	2.017
18	0.433	0.063	0.877
19	0.172	0.022	0.352
20	0.067	0.008	0.138
21	0.026	0.003	0.054

Tabla 10

**PROMEDIO DE VELOCIDADES CALCULADAS DE AMBOS
SEXOS Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 2-**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	11.388	12.261	10.394
1	10.203	10.822	9.498
2	9.144	9.553	8.679
3	8.199	8.434	7.930
4	7.355	7.451	7.246
5	6.605	6.589	6.622
6	5.942	5.844	6.054
7	5.373	5.226	5.542
8	4.923	4.777	5.090
9	4.666	4.616	4.722
10	4.757	4.974	4.809
11	5.378	5.981	4.692
12	6.116	6.747	5.397
13	5.920	5.470	6.432
14	4.859	2.940	7.043
15	3.335	1.217	5.748
16	1.872	0.466	3.473
17	0.886	0.191	1.678
18	0.370	0.085	0.695
19	0.149	0.040	0.273
20	0.062	0.019	0.110
21	0.027	0.009	0.047

Tabla 11

**PROMEDIO DE ERRORES CALCULADOS DE AMBOS
SEXOS Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 1-.**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	5.905	5.379	6.536
1	3.818	3.787	3.855
2	3.240	3.201	3.286
3	1.863	1.629	2.145
4	0.824	0.538	1.168
5	0.276	0.387	0.142
6	0.587	0.801	0.331
7	0.454	0.530	0.363
8	2.759	2.566	2.992
9	0.849	0.354	1.444
10	0.022	0.142	0.122
11	0.106	0.164	0.036
12	0.054	0.145	0.055
13	0.015	0.011	0.046
14	0.078	0.029	0.205
15	0.100	0.094	0.333
16	0.257	0.114	0.428
17	0.295	0.068	0.568
18	0.292	0.131	0.486
19	0.320	0.262	0.389
20	0.376	0.357	0.398
21	0.395	0.408	0.380

Tabla 12

**PROMEDIO DE ERRORES CALCULADOS DE AMBOS SEXOS
Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 2-.**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	6.172	5.598	6.825
1	3.801	3.591	4.040
2	3.383	2.944	3.802
3	2.092	1.341	2.947
4	1.077	0.156	2.126
5	0.046	0.826	0.841
6	0.418	1.269	0.552
7	0.366	1.052	0.416
8	2.749	3.106	2.343
9	0.899	0.721	1.017
10	0.151	0.199	0.142
11	0.557	0.866	0.208
12	0.530	0.994	0.800
13	0.308	0.772	0.220
14	0.049	0.146	0.271
15	0.192	0.225	0.155
16	0.439	0.362	0.527
17	0.313	0.410	0.202
18	0.371	0.243	1.070
19	0.439	0.146	1.105
20	0.507	0.068	1.162
21	0.528	0.028	1.162

Tabla 13

**PROMEDIO DE ACELERACIONES CALCULADAS DE
AMBOS SEXOS Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 1-**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	- 1.362	- 1.559	- 1.127
1	- 1.210	- 1.371	- 1.016
2	- 1.074	- 1.206	- 0.916
3	- 0.953	- 1.059	- 0.826
4	- 0.854	- 0.928	- 0.744
5	- 0.742	- 0.805	- 0.667
6	- 0.640	- 0.678	- 0.594
7	- 0.516	- 0.514	- 0.518
8	- 0.319	- 0.231	- 0.425
9	0.044	0.316	- 0.283
10	0.562	1.054	- 0.029
11	0.677	0.926	0.379
12	- 0.134	- 0.900	0.001
13	- 0.832	- 2.456	1.117
14	- 1.065	- 1.876	- 0.093
15	- 1.296	- 0.937	- 1.726
16	- 1.215	- 0.460	- 2.119
17	- 0.808	- 0.201	- 1.536
18	- 0.391	- 0.069	- 0.778
19	- 0.161	- 0.023	- 0.328
20	- 0.063	- 0.008	- 0.129
21	- 0.024	- 0.003	- 0.000

Tabla 14

**PROMEDIO DE ACELERACIONES CALCULADAS DE
AMBOS SEXOS Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 2-**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	- 1.254	- 1.532	- 0.937
1	- 1.120	- 1.351	- 0.856
2	- 1.000	- 1.191	- 0.783
3	- 0.893	- 1.049	- 0.715
4	- 0.796	- 0.921	- 0.653
5	- 0.706	- 0.803	- 0.596
6	- 0.618	- 0.685	- 0.540
7	- 0.517	- 0.545	- 0.484
8	- 0.372	- 0.334	- 0.416
9	- 0.117	0.052	- 0.310
10	0.336	0.703	0.083
11	0.884	1.178	0.549
12	0.306	- 0.839	0.698
13	- 0.692	- 2.347	1.192
14	- 1.357	- 2.301	- 2.283
15	- 1.597	- 1.157	- 2.999
16	- 1.252	- 0.439	- 2.178
17	- 0.728	- 0.161	- 1.374
18	- 0.336	- 0.066	- 0.643
19	- 0.135	- 0.030	- 0.254
20	- 0.053	- 0.014	- 0.097
21	- 0.022	- 0.007	- 0.039

Tabla 14**PROMEDIO DE ACELERACIONES CALCULADAS DE
AMBOS SEXOS Y SEXOS SEPARADOS -MODELO 2-**

EDAD	AMBOS SEXOS	SEXO FEM.	SEXO MASC.
0	- 1.254	- 1.532	- 0.937
1	- 1.120	- 1.351	- 0.856
2	- 1.000	- 1.191	- 0.783
3	- 0.893	- 1.049	- 0.715
4	- 0.796	- 0.921	- 0.653
5	- 0.706	- 0.803	- 0.596
6	- 0.618	- 0.685	- 0.540
7	- 0.517	- 0.545	- 0.484
8	- 0.372	- 0.334	- 0.416
9	- 0.117	0.052	- 0.310
10	0.336	0.703	0.083
11	0.804	1.178	0.549
12	0.306	- 0.039	0.698
13	- 0.692	- 2.347	1.192
14	- 1.357	- 2.301	- 2.283
15	- 1.597	- 1.157	- 2.099
16	- 1.252	- 0.439	- 2.178
17	- 0.728	- 0.161	- 1.374
18	- 0.336	- 0.066	- 0.643
19	- 0.135	- 0.030	- 0.254
20	- 0.053	- 0.014	- 0.097
21	- 0.022	- 0.007	- 0.039

Tabla 15

**DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS BIOLÓGICOS
OBTENIDOS DEL AJUSTE DEL MODELO 1
DE PREECE Y BAINES, AMBOS SEXOS.**

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
T0	9.596	1.638	1.280	12.830	6.020
PV	12.981	2.303	1.517	16.540	10.000
HT0	122.233	51.435	7.172	144.640	92.420
HPV	141.824	56.267	7.501	163.810	122.400
VT0	4.308	0.349	0.591	6.010	3.020
VPV	8.054	1.828	1.352	12.200	3.300
IT0PV	19.591	10.463	3.235	30.670	12.860
IPVHF	14.482	6.873	2.622	23.300	7.700
PT0HF	78.249	9.955	3.155	84.690	64.160
PPVHF	90.758	2.007	1.445	94.850	85.020

Tabla 16**DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS BIOLÓGICOS
OBTENIDOS DEL AJUSTE DEL MODELO 1
DE PREECE Y BAINES, SEXO FEMENINO.**

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
T0	8.846	0.924	0.961	12.200	6.020
PV	11.947	1.086	1.042	15.430	10.000
HT0	119.078	40.548	6.368	133.030	92.420
HPV	137.396	32.214	5.676	151.190	122.400
VT0	4.535	0.316	0.562	6.000	3.320
VPV	8.065	1.574	1.255	12.200	3.300
IT0PV	18.317	7.556	2.749	30.060	12.860
IPVHF	13.560	5.347	2.312	21.600	7.700
PT0HF	78.894	9.658	3.108	84.690	64.160
PPVHF	91.024	2.008	1.445	94.850	85.020

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Tabla 17

**DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS BIOLOGICOS
OBTENIDOS DEL AJUSTE DEL MODELO 1
DE PREECE Y BAINES, SEXO MASCULINO.**

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
TO	10.497	1.012	1.006	12.830	8.140
PV	14.222	0.935	0.967	16.540	11.430
HTO	126.018	38.627	6.215	144.640	112.600
HPV	147.139	33.482	5.786	163.810	135.250
VTO	4.212	0.336	0.580	6.010	3.020
VPV	8.040	2.159	1.469	11.490	5.330
ITOPV	21.121	9.758	3.124	30.670	15.490
IPVHF	15.589	6.532	2.556	23.360	11.330
PTOHF	77.475	9.344	3.057	82.980	67.940
PPVHF	90.439	1.927	1.388	92.950	86.130

Tabla 18

**DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS BIOLÓGICOS
OBTENIDOS DEL AJUSTE DEL MODELO 2
DE PREECE Y BAINES, AMBOS SEXOS.**

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
TO	9.797	1.335	1.155	12.970	7.580
PV	13.043	1.902	1.379	16.360	9.680
HTO	123.408	42.262	6.501	142.480	104.680
HPV	142.047	51.956	7.208	163.040	126.280
VTO	4.432	0.294	0.542	6.110	3.210
VPV	7.858	3.425	1.851	20.160	4.220
ITOPV	18.639	13.124	3.623	29.060	8.580
IPVHF	14.127	8.021	2.832	30.430	9.640
PTOHF	79.079	9.750	3.122	87.030	66.160
PPVHF	90.975	2.558	1.599	93.510	81.470

Tabla 19**DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS BIOLOGICOS
OBTENIDOS DEL AJUSTE DEL MODELO 2
DE PREECE Y BAINES, SEXO FEMENINO.**

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DESV. EST.	MAXIMO	MINIMO
TO	9.069	0.537	0.733	11.090	7.580
PV	12.098	0.689	0.830	14.500	9.680
HTO	120.688	25.404	5.040	133.560	104.680
HPV	137.792	25.454	5.045	150.650	126.280
VT0	4.517	0.267	0.517	5.800	3.260
VPV	7.323	1.492	1.221	10.070	4.220
IT0PV	17.105	8.489	2.914	25.060	8.970
IPVHF	13.316	3.601	1.898	18.900	9.640
PT0HF	79.894	6.990	2.644	87.030	72.240
PPVHF	91.195	1.384	1.176	93.510	88.120

Tabla 20**DESCRIPTIVA DE LOS PARAMETROS BIOLÓGICOS
OBTENIDOS DEL AJUSTE DEL MODELO 2
DE PREECE Y BAINES, SEXO MASCULINO.**

PARAM.	MEDIA	VARIANZA	DES. EST.	MAXIMO	MINIMO
T0	10.625	0.958	0.979	12.970	7.620
PV	14.119	1.109	1.053	16.360	10.230
HT0	126.507	43.805	6.619	142.480	110.440
HPV	146.892	38.210	6.181	163.040	133.210
VT0	4.335	0.310	0.557	6.110	3.290
VPV	8.468	4.970	2.229	20.160	5.000
ITOPV	20.306	12.785	3.576	29.060	8.500
IPVHF	15.050	11.553	3.399	30.430	10.520
PT0HF	78.151	11.396	3.376	84.810	66.160
PPVHF	90.724	3.814	1.953	93.440	81.470

Tabla 21

VELOCIDADES PROMEDIO DEL MODELO 1 CONTRA VELOCIDADES PROMEDIO DEL MODELO 2, AMBOS SEXOS.

EADAES	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
0	11.6894	11.3883	1.3615	1.7232	1.70	0.0899
1	10.4047	10.2028	1.0751	1.3375	1.46	0.1453
2	9.2640	9.1441	0.8451	1.0240	1.12	0.2634
3	8.2515	8.1987	0.6647	0.7767	0.64	0.5220
4	7.3537	7.3551	0.5286	0.5926	-0.02	0.9825
5	6.5609	6.6046	0.4322	0.4717	-0.85	0.3983
6	5.8691	5.9424	0.3711	0.4111	-1.64	0.1015
7	5.2800	5.3734	0.3458	0.3968	-2.01	0.0451
8	4.8610	4.9233	0.4086	0.4094	-1.35	0.1786
9	4.7052	4.6656	0.7024	0.4724	0.58	0.5618
10	5.0076	4.7965	1.3298	0.7363	2.08	0.0412
11	5.6978	5.3784	1.8182	1.3636	1.74	0.0822
12	6.0282	6.1160	1.7612	1.8110	-0.43	0.6664
13	5.4780	5.9282	2.0452	1.9046	-1.96	0.0506
14	4.5341	4.8987	2.8284	2.6953	-1.03	0.3033
15	3.3301	3.3351	2.8300	2.7671	-0.02	0.9876
16	2.6582	1.8722	2.3183	2.1094	0.71	0.4808
17	1.0196	0.8863	1.4465	1.3186	0.84	0.3990
18	0.4334	0.3704	0.7270	0.6637	0.79	0.4273
19	0.1716	0.1491	0.3271	0.3324	0.60	0.5499
20	0.0668	0.0617	0.1422	0.1794	0.28	0.7811
21	0.0262	0.0267	0.0616	0.1010	-0.06	0.9644

Tabla 22

VELOCIDADES PROMEDIO DEL MODELO 1 CONTRA VELOCIDADES PROMEDIO MODELO 2, SEXO FEMENINO.

EIDADES	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
0	12.2862	12.2613	1.3349	1.5606	0.11	0.9128
1	10.8173	10.8218	1.0661	1.2299	-0.02	0.9802
2	9.5260	9.5527	0.8467	0.9592	-0.19	0.8505
3	8.3915	8.4345	0.6693	0.7412	-0.39	0.6974
4	7.3963	7.4507	0.5273	0.5705	-0.63	0.5268
5	6.5284	6.5891	0.4164	0.4448	-0.90	0.3681
6	5.7847	5.8443	0.3373	0.3642	-1.09	0.2784
7	5.1842	5.2357	0.3149	0.3322	-0.82	0.4135
8	4.8086	4.7766	0.4457	0.3616	0.38	0.7057
9	4.8276	4.6157	0.8738	0.4981	1.91	0.0883
10	5.5495	4.9740	1.5299	0.8077	3.01	0.0030
11	6.7136	5.9810	1.6901	1.1991	3.20	0.0016
12	6.8019	6.7470	1.6856	1.5100	0.23	0.8216
13	4.8457	5.4704	2.8982	1.6448	-2.15	0.0328
14	2.4731	2.9485	1.7754	1.4181	-1.86	0.0643
15	1.8217	1.2165	1.1016	1.0699	-1.18	0.2387
16	0.3765	0.4664	0.5437	0.6902	-0.93	0.3583
17	0.1334	0.1908	0.2474	0.4736	-0.97	0.3319
18	0.0400	0.0855	0.1166	0.2949	-1.07	0.2889
19	0.0180	0.0402	0.0577	0.1663	-1.14	0.2548
20	0.0071	0.0192	0.0292	0.0877	-1.19	0.2368
21	0.0029	0.0092	0.0148	0.0444	-1.21	0.2263

Tabla 23

VELOCIDADES PROMEDIO DEL MODELO 1 CONTRA VELOCIDADES PROMEDIO DEL MODELO 2, SEXO MASCULINO.

EIDADES	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
0	11.0097	10.3940	1.0400	1.3181	3.11	0.0023
1	9.9347	9.4978	0.8794	1.0874	2.65	0.0089
2	8.9656	8.6788	0.7426	0.8930	2.10	0.0379
3	8.0921	7.9302	0.6267	0.7320	1.43	0.1563
4	7.3053	7.2463	0.5297	0.6024	0.62	0.5337
5	6.5900	6.6221	0.4495	0.5032	-0.30	0.7622
6	5.9652	6.0541	0.3865	0.4349	-1.30	0.1969
7	5.4063	5.5416	0.3434	0.3993	-2.18	0.0309
8	4.9298	5.0902	0.3319	0.3906	-2.62	0.0096
9	4.5699	4.7224	0.3939	0.4378	-2.26	0.0256
10	4.3905	4.5808	0.6443	0.5544	-1.18	0.2397
11	4.5409	4.6922	1.1474	1.2122	-0.77	0.4431
12	5.1469	5.3974	1.9045	1.8662	-0.89	0.3768
13	6.1982	6.4324	1.7975	2.0570	-0.73	0.4681
14	6.8814	7.0434	1.7747	2.0665	-0.50	0.6146
15	5.9991	5.7478	1.6758	2.0630	0.67	0.5012
16	3.9563	3.4733	2.0682	2.0483	1.41	0.1997
17	2.0208	1.6784	1.5809	1.5153	1.36	0.1767
18	0.8724	0.6948	0.8698	0.8099	1.27	0.2099
19	0.3466	0.2732	0.4105	0.4211	1.06	0.2911
20	0.1349	0.1101	0.1837	0.2369	0.70	0.4843
21	0.0627	0.0468	0.0812	0.1378	0.32	0.7512

Tabla 24

**ACELERACIONES PROMEDIO DEL MODELO 1 CONTRA
ACELERACIONES PROMEDIO DEL MODELO 2, AMBOS SEXOS.**

EIDADES	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
0	-1.3625	-1.2540	0.3346	0.4416	-2.43	0.0156
1	-1.2098	-1.1197	0.2777	0.3700	-2.42	0.0162
2	-1.0742	-0.9999	0.2297	0.3087	-2.40	0.0171
3	-0.9532	-0.8927	0.1894	0.2564	-2.35	0.0193
4	-0.8440	-0.7959	0.1557	0.2114	-2.27	0.0237
5	-0.7424	-0.7062	0.1283	0.1721	-2.10	0.0360
6	-0.6399	-0.6175	0.1117	0.1369	-1.57	0.1176
7	-0.5157	-0.5166	0.1368	0.1099	0.06	0.9528
8	-0.3195	-0.3721	0.2001	0.1364	2.09	0.0371
9	0.0440	-0.1170	0.5995	0.2961	2.99	0.0030
10	0.5616	0.3356	0.9144	0.5073	2.98	0.0103
11	0.6772	0.0030	1.3316	1.4004	-1.28	0.2003
12	-0.1341	0.3068	2.0001	2.3000	-1.76	0.0799
13	-0.8319	-0.6920	2.3003	2.4205	-0.51	0.6094
14	-1.0684	-1.3575	1.7739	2.1227	1.31	0.1912
15	-1.2955	-1.5973	1.6330	1.6156	1.63	0.1041
16	-1.2146	-1.2521	1.2776	1.2692	0.26	0.7960
17	-0.8077	-0.7282	0.9950	0.8909	-0.74	0.4609
18	-0.3914	-0.3357	0.5000	0.5336	-0.87	0.3861
19	-0.1614	-0.1346	0.2782	0.2399	-0.91	0.3663
20	-0.0629	-0.0530	0.1215	0.1136	-0.74	0.4623
21	-0.0243	-0.0217	0.0520	0.0594	-0.41	0.6834

Tabla 25

**ACELERACIONES PROMEDIO DEL MODELO 1 CONTRA
ACELERACIONES PROMEDIO DEL MODELO 2, SEXO FEMENINO.**

EIDADES	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
0	-1.5654	-1.5321	0.3062	0.3722	-0.63	0.5328
1	-1.3763	-1.3509	0.2536	0.3096	-0.57	0.5662
2	-1.2090	-1.1906	0.2099	0.2569	-0.52	0.6014
3	-1.0624	-1.0485	0.1738	0.2123	-0.46	0.6481
4	-0.9301	-0.9211	0.1451	0.1746	-0.36	0.7197
5	-0.8064	-0.8032	0.1255	0.1425	-0.15	0.8772
6	-0.6781	-0.6852	0.1243	0.1160	0.30	0.7063
7	-0.5117	-0.5455	0.1755	0.1045	1.50	0.1361
8	-0.2242	-0.3330	0.3466	0.1405	2.63	0.0093
9	0.3352	0.0522	0.6760	0.2928	3.40	0.0006
10	1.0009	0.7032	0.8093	0.5003	3.41	0.0008
11	0.9539	1.1779	1.6061	0.8470	-1.07	0.2863
12	-1.0077	-0.0391	2.3736	1.5169	-3.11	0.0022
13	-2.5400	-2.3465	1.6600	1.5722	-0.76	0.4457
14	-1.9731	-2.3013	1.0006	1.0630	1.96	0.0612
15	-0.9756	-1.1571	0.7723	0.6049	1.59	0.1134
16	-0.3075	-0.4308	0.4403	0.3096	0.81	0.4201
17	-0.1303	-0.1610	0.2050	0.2199	0.60	0.5916
18	-0.0402	-0.0660	0.0091	0.1575	0.09	0.3744
19	-0.0172	-0.0299	0.0411	0.1021	1.04	0.2901
20	-0.0064	-0.0141	0.0201	0.0084	1.13	0.2588
21	-0.0025	-0.0060	0.0102	0.0309	1.22	0.2257

Tabla 26**ACELERACIONES PROMEDIO DEL MODELO 1 CONTRA
ACELERACIONES PROMEDIO DEL MODELO 2, SEXO MASCULINO.**

EADAES	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
0	-1.1315	-0.9372	0.1806	0.2666	-5.12	0.0000
1	-1.0202	-0.8564	0.1559	0.2315	-4.98	0.0000
2	-0.9199	-0.7827	0.1344	0.2008	-4.82	0.0000
3	-0.8288	-0.7153	0.1158	0.1741	-4.61	0.0000
4	-0.7460	-0.6534	0.0997	0.1512	-4.34	0.0000
5	-0.6696	-0.5957	0.0859	0.1321	-3.98	0.0001
6	-0.5963	-0.5405	0.0751	0.1173	-3.40	0.0009
7	-0.5203	-0.4837	0.0717	0.1074	-2.41	0.0172
8	-0.4280	-0.4157	0.0977	0.1063	-0.72	0.4697
9	-0.2877	-0.3097	0.2087	0.1430	0.74	0.4624
10	-0.0308	-0.0832	0.4615	0.3386	0.46	0.5119
11	0.3622	0.5489	0.9917	1.9344	-0.78	0.4380
12	0.8608	0.6985	1.0088	2.9288	0.45	0.6569
13	1.1135	1.1923	1.3521	1.7445	-0.30	0.7622
14	-0.8317	-0.2825	1.8442	2.4985	0.69	0.4942
15	-1.6598	-2.0986	2.1939	2.1473	1.21	0.2273
16	-2.1565	-2.1783	1.2644	1.2999	0.10	0.9186
17	-1.5701	-1.3743	0.9089	0.9285	-1.22	0.2226
18	-0.7824	-0.6429	0.6704	0.6368	-1.28	0.2025
19	-0.3258	-0.2539	0.3367	0.2915	-1.37	0.1732
20	-0.1272	-0.0973	0.1531	0.1421	-1.21	0.2266
21	-0.0492	-0.0306	0.0674	0.0772	-0.87	0.3848

Tabla 27

**PARAMETROS BIOLÓGICOS DEL MODELO 1 CONTRA
PARAMETROS BIOLÓGICOS MODELO 2, AMBOS SEXOS.**

PARAM.	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
T0	9.5961	9.7966	1.2797	1.1553	-1.44	0.1500
PV	12.9810	13.8428	1.5175	1.3793	-0.37	0.7089
HT0	122.2328	123.4885	7.1718	6.5009	-1.51	0.1328
HPV	141.8245	142.8467	7.5012	7.2881	-0.27	0.7911
VT0	4.3881	4.4320	0.5907	0.5420	-0.68	0.4973
VPV	8.0535	7.8581	1.3520	1.8507	1.06	0.2909
IT0PV	19.5915	18.6390	3.2346	3.6227	2.43	0.0155
IPVHF	14.4821	14.1268	2.6217	2.8321	1.14	0.2541
PT0HF	78.2488	79.0792	3.1552	3.1224	-2.32	0.0209
PPVHF	98.7581	98.9748	1.4448	1.5993	-1.25	0.2132

Tabla 28

**PARAMETROS BIOLÓGICOS DEL MODELO 1 CONTRA
PARAMETROS BIOLÓGICOS MODELO 2, SEXO FEMENINO.**

PARAM.	MEDIA		DESVIACION STAND. T		P	
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
T0	8.8456	9.1108	0.9611	0.7791	-1.96	0.0511
PV	11.9469	12.1532	1.0422	0.8970	-1.38	0.1710
HT0	119.0785	120.8681	6.3678	5.1200	-2.01	0.0463
HPV	137.3956	138.0223	5.6758	5.1996	-0.75	0.4566
VT0	4.5345	4.5038	0.5622	0.5210	0.37	0.7139
VPV	8.0650	7.3264	1.2545	1.2072	3.89	0.0001
IT0PV	18.3167	17.1549	2.7488	2.9122	2.66	0.0086
IPVHF	13.5598	13.3296	2.3123	1.8942	0.71	0.4814
PT0HF	78.8937	79.8850	3.1077	2.6312	-2.23	0.0270
PPVHF	91.0243	91.1996	1.4450	1.1713	-0.86	0.3888

Tabla 29

**PARAMETROS BIOLÓGICOS DEL MODELO 1 CONTRA
PARAMETROS BIOLÓGICOS MODELO 2, SEXO MASCULINO.**

PARAM.	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
T0	10.4967	10.6196	1.0058	0.9049	-0.73	0.4665
PV	14.2220	14.1103	0.9671	1.0635	0.65	0.5166
HT0	126.018	126.456	6.2150	6.7004	-0.40	0.6885
HPV	147.139	146.876	5.7863	6.2695	0.26	0.7969
VT0	4.2124	4.3459	0.5797	0.5578	-1.39	0.1675
VPV	8.0397	8.4961	1.4695	2.2550	-1.42	0.1582
IT0P	21.1213	20.4200	3.1238	3.6055	1.23	0.2208
IPVH	15.5809	15.0833	2.5557	3.4305	0.99	0.3245
PT0H	77.4749	78.1121	3.0567	3.3908	-1.17	0.2455
PPVH	90.4387	90.7050	1.3082	1.9713	-0.92	0.3571

Tabla 29

**PARAMETROS BIOLÓGICOS DEL MODELO 1 CONTRA
PARAMETROS BIOLÓGICOS MODELO 2, SEXO MASCULINO.**

PARAM.	MEDIA		DESVIACION STAND.		T	P
	MOD.1	MOD.2	MOD.1	MOD.2		
TO	10.4967	10.6196	1.0058	0.9849	-0.73	0.4665
PV	14.2220	14.1103	0.9671	1.0635	0.65	0.5166
HTO	126.018	126.456	6.2150	6.7004	-0.40	0.6885
HPV	147.139	146.876	5.7863	6.2695	0.26	0.7969
VT0	4.2124	4.3459	0.5797	0.5578	-1.39	0.1675
VPV	8.0397	8.4961	1.4695	2.2550	-1.42	0.1582
ITOP	21.1213	20.4200	3.1238	3.6055	1.23	0.2200
IPVH	15.5889	15.0833	2.5557	3.4305	0.99	0.3245
PTOH	77.4749	78.1121	3.0567	3.3908	-1.17	0.2455
PPVH	90.4387	90.7050	1.3882	1.9713	-0.92	0.3571

Tabla 30

**CORRELACION DE PARAMETROS ESTIMADOS Y
PARAMETROS BIOLÓGICOS DEL MODELO 1.**

	A	B	C	D	E
TO	0.422	0.933	-0.516	-0.090	0.512
PV	0.519	0.993	-0.718	-0.323	0.564
HTO	0.750	0.593	-0.177	-0.013	0.863
HPV	0.957	0.606	-0.461	-0.226	0.990
VTO	0.131	-0.627	0.218	-0.283	0.832
VPV	0.114	-0.381	0.003	0.603	0.028
ITOPV	0.556	0.090	-0.678	-0.497	0.384
IPVHF	0.565	0.065	-0.604	-0.613	0.408
PTOHF	-0.278	0.116	0.545	0.500	-0.007
PPVHF	-0.294	0.120	0.496	0.567	-0.115

Tabla 31

**CORRELACION DE PARAMETROS ESTIMADOS Y
PARAMETROS BIOLÓGICOS DEL MODELO 2.**

	A	B	C	D	E	F
T0	0.365	0.903	-0.460	0.098	0.450	0.159
PV	0.451	0.957	-0.535	-0.106	0.470	0.005
HT0	0.704	0.424	-0.117	0.205	0.835	0.239
HPV	0.936	0.468	-0.309	-0.026	0.960	0.207
VT0	0.227	-0.498	0.074	0.282	0.178	-0.286
VPV	0.398	-0.142	-0.246	-0.115	0.295	0.757
IT0PV	0.600	0.172	-0.404	-0.421	0.412	-0.018
IPVHF	0.486	0.008	-0.277	0.031	0.348	-0.474
PT0HF	-0.374	-0.021	0.336	0.285	-0.166	0.282
PPVHF	-0.251	0.034	0.206	-0.033	-0.105	0.527

Tabla 32

CORRELACION TOTAL DE LOS PARAMETROS BIOLÓGICOS Y ESTIMADOS DEL MODELO 1.

	A	B	C	D	E	T0	FV
A	1.000						
B	0.547	1.000					
C	-0.584	-0.739	1.000				
D	-0.385	-0.412	0.563	1.000			
E	0.980	0.587	-0.488	-0.321	1.000		
T0	0.422	0.933	-0.516	-0.898	0.512	1.000	
FV	0.519	0.993	-0.718	-0.323	0.564	0.958	1.000
HT0	0.750	0.593	-0.177	-0.813	0.863	0.684	0.601
HPV	0.957	0.686	-0.461	-0.226	0.990	0.572	0.598
VT0	0.131	-0.627	0.218	-0.283	0.832	-0.798	-0.687
VPV	0.114	-0.381	0.083	0.683	0.828	-0.286	-0.323
IT0PV	0.556	0.898	-0.678	-0.497	0.384	-0.198	0.886
IPVHF	0.565	0.865	-0.684	-0.613	0.485	-0.246	-0.885
PT0HF	-0.278	0.116	0.545	0.588	-0.887	0.416	0.165
FPVHF	-0.294	0.128	0.496	0.567	-0.115	0.634	0.191

	HT0	HPV	VT0	VPV	IT0PV	IPVHF	PT0HF	FPVHF
HT0	1.000							
HPV	0.984	1.000						
VT0	-0.289	-0.861	1.000					
VPV	-0.899	0.864	0.284	1.000				
IT0PV	-0.121	0.315	0.588	0.367	1.000			
IPVHF	-0.186	0.382	0.611	0.388	0.935	1.000		
PT0HF	0.426	0.883	-0.597	-0.313	-0.937	-0.924	1.000	
FPVHF	0.394	-0.885	-0.665	-0.218	-0.884	-0.963	0.974	1.000

Tabla 33

CORRELACION TOTAL DE LOS PARAMETROS BIOLÓGICOS Y ESTIMADOS DEL MODELO 2.

	A	B	C	D	E	F	T0	PV
A	1.000							
B	0.453	1.000						
C	-0.373	-0.550	1.000					
D	-0.015	0.050	-0.319	1.000				
E	0.972	0.486	-0.334	0.123	1.000			
F	0.011	-0.192	-0.034	0.000	0.025	1.000		
T0	0.365	0.903	-0.460	0.090	0.450	0.159	1.000	
PV	0.451	0.957	-0.535	-0.106	0.470	0.005	0.937	1.000
HT0	0.704	0.424	-0.117	0.205	0.835	0.239	0.500	0.400
HPV	0.936	0.460	-0.309	-0.026	0.960	0.207	0.514	0.532
VT0	0.227	-0.490	0.074	0.202	0.178	-0.206	-0.663	-0.600
VPV	0.390	-0.142	-0.246	-0.115	0.295	0.757	-0.007	-0.003
IT0PV	0.600	0.172	-0.404	-0.421	0.412	-0.010	-0.032	0.252
IPVHF	0.006	0.000	-0.377	0.031	0.340	-0.474	-0.266	-0.075
PT0HF	-0.374	0.021	0.336	0.205	-0.166	0.202	0.299	0.010
PPVHF	-0.251	0.034	0.206	-0.033	-0.106	0.527	0.404	0.212

	HT0	HPV	VT0	VPV	IT0PV	IPVHF	PT0HF	PPVHF
HT0	1.000							
HPV	0.066	1.000						
VT0	-0.122	0.024	1.000					
VPV	0.130	0.300	0.091	1.000				
IT0PV	-0.073	0.437	0.267	0.524	1.000			
IPVHF	-0.171	0.140	0.395	0.171	0.603	1.000		
PT0HF	0.394	-0.004	-0.450	-0.354	-0.076	-0.043	1.000	
PPVHF	0.394	0.104	-0.099	-0.002	-0.301	-0.907	0.033	1.000

APENDICE 1: CONSTRUCCION DE LOS MODELOS DE PREECE Y BAINES.

Construcción del Modelo 1

La función logística es dada por:

$$y(t) = p + \frac{k}{1 + \exp(a - bt)} \quad (A1)$$

donde p y $p+k$ son las asíntotas inferior y superior respectivamente y a/b es el punto en el cual se encuentra la máxima velocidad. Como sucede en la mayoría de los modelos de crecimiento, la función logística (A1), es la solución de la ecuación diferencial siguiente [5, 25]:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma(y - y_0)(y_1 - y) \quad (A2)$$

tal que la solución de la ecuación diferencial (A2) también es dada como:

$$y(t) = \frac{y_0 \exp(\gamma y_0(t - \theta)) + y_1 \exp(\gamma y_1(t - \theta))}{\exp(\gamma y_0(t - \theta)) + \exp(\gamma y_1(t - \theta))} \quad (A3)$$

donde $y_0 = p$, $y_1 = p+k$, $\gamma = \frac{b}{k}$, $\theta = \frac{a}{b}$ con y_0, y_1

las asíntotas de y en (A2), y los valores de $y'(t)$ son muy parecidos cuando t es grande y cuando t está cerca de cero. Dada la simetría de

la función logística, nos lleva a modificar (A2), sustituyendo $\gamma(y-y_0)$ por alguna función que incremente la parte derecha de (A2) para valores pequeños de t .

De aquí, la ecuación (A2) se escribe como:

$$\frac{dy}{dt} = s(y)(y_1 - y), \quad \text{donde } s(y) = \gamma(y - y_0)$$

y análogamente

$$s(y) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{(y_1 - y)} \quad (\text{A4})$$

entonces $s(y)$ es una función logística con asíntota inferior cero, lo cual no es posible. **Preece y Baines** argumentaron que debería de modelarse " $s(t)$ " como otra función logística pero con respecto al tiempo y no a la estatura.

Por lo anterior, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dt} = s(t)(y_1 - y) \quad (\text{A5})$$

$$\frac{ds}{dt} = \gamma(s_1 - s)(s - s_0) \quad (\text{A6})$$

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales primero calculamos la solución de (A6) y después sustituimos $s(t)$ en (A5).

$$\text{Sea } \frac{ds}{dt} = \gamma(s_1 - s)(s - s_0)$$

Para resolver esta ecuación diferencial utilizamos el método de variables separables, [5, 25], entonces dividiendo ambos lados de (A6) por $(s - s_1)(s - s_2)$ tenemos:

$$\frac{1}{(s_1 - s)(s - s_2)} \frac{ds}{dt} = \gamma \quad (\text{A7})$$

$$\text{de aquí } \frac{dF(s)}{dt} = \gamma \quad (\text{A8})$$

$$\text{donde } F(s) = \int \frac{1}{(s_1 - s)(s - s_2)} ds \quad (\text{A9})$$

integrando (A8) en ambos lados con respecto de t tenemos:

$$F(s) = \int \gamma dt \quad \text{entonces } F(s) = \gamma(t + c)$$

de aquí

$$\int \frac{ds}{(s_1 - s)(s - s_2)} = \gamma(t + c) \quad (\text{A10})$$

Para integrar $\frac{1}{(s_1 - s)(s - s_2)}$ utilizamos el método de

fracciones parciales.

Entonces :

$$\frac{1}{(s_1 - s)(s - s_0)} = \frac{A}{s_1 - s} + \frac{B}{s - s_0} = \frac{A(s - s_0) + B(s_1 - s)}{(s_1 - s)(s - s_0)} \quad (\text{A11})$$

Igualando los numeradores tenemos que:

$$\rightarrow (A - B)s - As_0 + Bs_1 = 1 \rightarrow A - B = 0 \text{ y } -As_0 + Bs_1 = 1$$

$$A(s - s_0) + B(s_1 - s) = 1 \rightarrow As - Bs - As_0 + Bs_1 = 1$$

entonces de la primera parte $A = B$ & de la segunda

$$\text{tenemos que } -Bs_0 + Bs_1 = 1 \rightarrow B(s_1 - s_0) = 1$$

$$\rightarrow B = \frac{1}{s_1 - s_0} \text{ por lo tanto } A = \frac{1}{s_1 - s_0}$$

$$\rightarrow \int \frac{ds}{(s_1 - s)(s - s_0)} = \frac{1}{s_1 - s_0} \int \frac{1}{s_1 - s} + \frac{1}{s - s_0} ds \quad (\text{A12})$$

de donde

$$\int \frac{1}{s_1 - s} + \frac{1}{s - s_0} ds = \ln(s_1 - s) + \ln(s - s_0) \quad (\text{A13})$$

$$\rightarrow \ln(s_1 - s) + \ln(s - s_0) = \ln|(s_1 - s)(s - s_0)| \quad (\text{A14})$$

de aqui sabemos que

$$\ln|(s_1 - s)(s - s_0)| = \ln\left(\frac{s_0 - s}{s - s_1}\right) \quad (\text{A15})$$

$$\rightarrow \int \frac{ds}{(s_1 - s)(s - s_0)} = \frac{1}{s_1 - s_0} \ln\left(\frac{s_0 - s}{s - s_1}\right) \quad (\text{A16})$$

$$\text{Por lo tanto } \frac{1}{s_1 - s_0} \ln\left(\frac{s_0 - s}{s - s_1}\right) = \gamma(t + c) \quad (\text{A17})$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{s_0 - s}{s - s_1}\right) = \gamma(t + c)(s_1 - s_0) \quad (\text{A18})$$

$$\rightarrow \frac{s_0 - s}{s - s_1} = \exp[\gamma(t + c)(s_1 - s_0)] \quad (\text{A19})$$

$$\rightarrow s_0 - s = \exp[\gamma(t + c)(s_1 - s_0)](s - s_1) \quad (\text{A20})$$

$$\rightarrow \ln(s_1 - s) + \ln(s - s_0) = \ln|(s_1 - s)(s - s_0)| \quad (\text{A14})$$

de aquí sabemos que

$$\ln|(s_1 - s)(s - s_0)| = \ln\left(\frac{s_0 - s}{s - s_1}\right) \quad (\text{A15})$$

$$\rightarrow \int \frac{ds}{(s_1 - s)(s - s_0)} = \frac{1}{s_1 - s_0} \ln\left(\frac{s_0 - s}{s - s_1}\right) \quad (\text{A16})$$

$$\text{Por lo tanto } \frac{1}{s_1 - s_0} \ln\left(\frac{s_0 - s}{s - s_1}\right) = \gamma(t + c) \quad (\text{A17})$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{s_0 - s}{s - s_1}\right) = \gamma(t + c)(s_1 - s_0) \quad (\text{A18})$$

$$\rightarrow \frac{s_0 - s}{s - s_1} = \exp[\gamma(t + c)(s_1 - s_0)] \quad (\text{A19})$$

$$\rightarrow s_0 - s = \exp[\gamma(t + c)(s_1 - s_0)](s - s_1) \quad (\text{A20})$$

$$s_0 - s = s \cdot \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] - s_1 \cdot \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] \quad (\text{A21})$$

$$-s - s \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] = -s_1 \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] - s_0 \quad (\text{A22})$$

$$s + s \cdot \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] = s_1 \cdot \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] + s_0 \quad (\text{A23})$$

$$(1 + \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)])s = s_1 \cdot \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] + s_0 \quad (\text{A24})$$

$$s = \frac{s_1 \cdot \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] + s_0}{\exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] + 1} \quad (\text{A25})$$

simplificando tenemos

$$s = \frac{s_1 \cdot \exp[s_1 \gamma(t+c) - s_0 \gamma(t+c)] + s_0}{\exp[s_1 \gamma(t+c) - s_0 \gamma(t+c)] + 1} \quad (\text{A26})$$

$$s_0 - s = s^* \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] - s_1^* \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] \quad (\text{A21})$$

$$-s - s \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] = -s_1 \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] - s_0 \quad (\text{A22})$$

$$s + s^* \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] = s_1^* \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] + s_0 \quad (\text{A23})$$

$$(1 + \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)])s = s_1^* \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] + s_0 \quad (\text{A24})$$

$$s = \frac{s_1^* \exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] + s_0}{\exp[\gamma(t+c)(s_1-s_0)] + 1} \quad (\text{A25})$$

simplificando tenemos

$$s = \frac{s_1^* \exp[s_1 \gamma(t+c) - s_0 \gamma(t+c)] + s_0}{\exp[s_1 \gamma(t+c) - s_0 \gamma(t+c)] + 1} \quad (\text{A26})$$

$$s = \frac{\frac{s_1 e^{\lambda y(t+d)}}{e^{\lambda y(t+d)}} + \frac{s_0}{1}}{\frac{e^{\lambda y(t+d)}}{e^{\lambda y(t+d)}} + \frac{1}{1}} = \frac{s_1 e^{\lambda y(t+d)} + s_0 e^{\lambda y(t+d)}}{e^{\lambda y(t+d)} + e^{\lambda y(t+d)}} \quad (\text{A27})$$

$$\rightarrow s = \frac{e^{\lambda y(t+d)}(s_1 e^{\lambda y(t+d)} + s_0 e^{\lambda y(t+d)})}{e^{\lambda y(t+d)}(e^{\lambda y(t+d)} + e^{\lambda y(t+d)})} \quad (\text{A28})$$

$$s = \frac{s_1 e^{\lambda y(t+d)} + s_0 e^{\lambda y(t+d)}}{e^{\lambda y(t+d)} + e^{\lambda y(t+d)}} \quad (\text{A29})$$

si la constante de proporción "c" la hacemos $c = -\theta$ tenemos

$$S = \frac{s_1 e^{\lambda y(t-\theta)} + s_0 e^{\lambda y(t-\theta)}}{e^{\lambda y(t-\theta)} + e^{\lambda y(t-\theta)}} \quad (\text{A30})$$

Ahora de (A5) tenemos que

$$\frac{1}{j_1 - y} \frac{dy}{dt} = s(t) \quad (\text{A31})$$

$$\int \frac{dy}{y_1 - y} = \int s(t) dt \quad (\text{A32})$$

$$-\ln(y_1 - y) = \ln([\exp(s_1 \gamma(t - \theta)) + \exp(s_0 \gamma(t - \theta))]^{1/\gamma}) + \ln(c_1) \quad (\text{A33})$$

sabemos que c_1 es una constante de integración, entonces si hacemos $t = \theta$ y $y(\theta) = y_0$, tenemos que:

$$-\ln(y_1 - y_0) = \ln(2^{1/\gamma}) + \ln(c_1)$$

$$\rightarrow -\ln(y_1 - y_0) - \ln(c_1) = \ln(2^{1/\gamma})$$

$$\frac{1}{y_1 - y_0} \frac{1}{c_1} = 2^{1/\gamma} \rightarrow \frac{1}{c_1(y_1 - y_0)} = 2^{1/\gamma}$$

$$1 = 2^{1/\gamma} c_1(y_1 - y_0) \rightarrow c_1 = \frac{1}{2^{1/\gamma}(y_1 - y_0)} \quad (\text{A34})$$

entonces de (A32) tenemos

$$-\ln(y_1 - y) - \ln\left(\frac{1}{2^{1/\gamma}(y_1 - y_0)}\right) = \ln([e^{s_1\gamma(t-\theta)} + e^{s_2\gamma(t-\theta)}]^{1/\gamma}) \quad (\text{A35})$$

$$\frac{2^{1/\gamma}(y_1 - y_0)}{y_1 - y} = [e^{s_1\gamma(t-\theta)} + e^{s_2\gamma(t-\theta)}]^{1/\gamma} \quad (\text{A36})$$

$$\frac{1}{y_1 - y} = \frac{[\exp(s_1\gamma(t-\theta)) + \exp(s_2\gamma(t-\theta))]^{1/\gamma}}{2^{1/\gamma}(y_1 - y_0)} \quad (\text{A37})$$

$$y_1 - y = \frac{2^{1/\gamma}(y_1 - y_0)}{[\exp(s_1\gamma(t-\theta)) + \exp(s_2\gamma(t-\theta))]^{1/\gamma}} \quad (\text{A38})$$

$$-y = \frac{2^{1/\gamma}(y_1 - y_0)}{[\exp(s_1\gamma(t-\theta)) + \exp(s_2\gamma(t-\theta))]^{1/\gamma}} - y_1 \quad (\text{A39})$$

$$y = y_1 - \frac{2^{1/\gamma}(y_1 - y_0)}{[\exp(s_1\gamma(t-\theta)) + \exp(s_2\gamma(t-\theta))]^{1/\gamma}} \quad (\text{A40})$$

de aquí si hacemos $\gamma = 1$ se obtiene

$$y = y_1 - \frac{2(y_1 - y_0)}{\exp(s_1(t - \theta)) + \exp(s_0(t - \theta))} \quad (\text{A41})$$

y si además renombramos a $y_1 = A$, $0 = B$, $s_1 = C$, $s_0 = D$, & $y_0 = E$ tenemos demostrado el primer modelo

$$Y = A - \frac{2(A - E)}{\exp(C(t - B)) + \exp(D(t - B))} \quad (\text{A42})$$

Construcción del Modelo 2

Para la construcción del segundo modelo en (A5) hacemos $\gamma = 1$ y "s" la consideramos como la suma de dos funciones logísticas con diferentes parámetros, tal que si escribimos $s = p + q$ tenemos

$$\frac{dp}{dt} = (p_1 - p)(p - p_0) \quad (\text{B1})$$

$$\frac{dq}{dt} = (q_1 - q)(q - q_0) \quad (\text{B2})$$

En el siguiente sistema de ecuaciones, análogamente resolvemos las ecuaciones diferenciales de la misma forma anterior y obtenemos:

$$p(t) = \frac{p_0 \exp(p_0(t - \theta_1)) + p_1 \exp(p_1(t - \theta_1))}{\exp(p_0(t - \theta_1)) + \exp(p_1(t - \theta_1))} \quad (B3)$$

$$q(t) = \frac{q_0 \exp(q_0(t - \theta_2)) + q_1 \exp(q_1(t - \theta_2))}{\exp(q_0(t - \theta_2)) + \exp(q_1(t - \theta_2))} \quad (B4)$$

Ahora es necesario resolver

$$\frac{dy}{dt} = (p + q)(y_1 - y) \quad (B5)$$

De la misma forma que resolvimos (A32), lo hacemos en (B5), obtenemos que :

$$\int \frac{dy}{y_1 - y} = \int (p(t) + q(t)) dt \quad (B6)$$

$$\begin{aligned} -\ln(y_1 - y) &= \ln[\exp(p_0(t - \theta_1)) + \exp(p_1(t - \theta_1))] \\ &+ \ln[\exp(q_0(t - \theta_2)) + \exp(q_1(t - \theta_2))] + \ln(c) \end{aligned} \quad (B7)$$

si hacemos $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ y $y(\theta) = y_0$

$$\begin{aligned}
 -\ln(y_1 - y_0) &= \ln[\exp(p_0(t - \theta)) + \exp(p_1(t - \theta))] \\
 &+ \ln[\exp(q_0(t - \theta)) + \exp(q_1(t - \theta))] + \ln(c)
 \end{aligned}
 \tag{B8}$$

de la misma forma anterior encontramos el valor de "c" la constante de integración, haciendo $t = \theta$ en (B8) y resolviendo tenemos

$$-\ln(y_1 - y_0) = \ln(2) + \ln(2) + \ln(c)$$

$$\Rightarrow -\ln(y_1 - y_0) = \ln(4c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_1 - y_0} = 4c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4}{y_1 - y_0} \tag{B9}$$

Ahora, corresponde resolver (B8).

$$\begin{aligned}
 -\ln(y_1 - y) &= \ln[\exp(p_0(t - \theta)) + \exp(p_1(t - \theta))] \\
 &+ \ln[\exp(q_0(t - \theta)) + \exp(q_1(t - \theta))] + \ln\left(\frac{4}{y_1 - y_0}\right)
 \end{aligned}
 \tag{B10}$$

$$-\ln(y_1 - y) - \ln\left(\frac{4}{y_1 - y_0}\right) = \ln[e^{\rho_0(t-\theta)} + e^{\rho_1(t-\theta)}] + \ln[e^{\alpha_0(t-\theta)} + e^{\alpha_1(t-\theta)}] \quad (\text{B11})$$

$$\frac{1}{\frac{y_1 - y}{4(y_1 - y_0)}} = [e^{\rho_0(t-\theta)} + e^{\rho_1(t-\theta)}][e^{\alpha_0(t-\theta)} + e^{\alpha_1(t-\theta)}] \quad (\text{B12})$$

$$\frac{4(y_1 - y_0)}{y_1 - y} = [e^{\rho_0(t-\theta)} + e^{\rho_1(t-\theta)}][e^{\alpha_0(t-\theta)} + e^{\alpha_1(t-\theta)}] \quad (\text{B13})$$

$$y_1 - y = \frac{4(y_1 - y_0)}{[e^{\rho_0(t-\theta)} + e^{\rho_1(t-\theta)}][e^{\alpha_0(t-\theta)} + e^{\alpha_1(t-\theta)}]} \quad (\text{B14})$$

$$y = y_1 - \frac{4(y_1 - y_0)}{[e^{\rho_0(t-\theta)} + e^{\rho_1(t-\theta)}][e^{\alpha_0(t-\theta)} + e^{\alpha_1(t-\theta)}]} \quad (\text{B15})$$

De aquí, Preece y Baines hacen notar que uno de los dos nuevos parámetros (ρ_0 ó ρ_1), podrán hacerse cero sin afectar la generalidad del modelo. Entonces si hacemos $\alpha_0=0$, de (B15) tenemos:

$$y = y_1 - \frac{4(y_1 - y_0)}{e^{\rho_0(t-\theta)} + e^{\rho_1(t-\theta)} [1 + e^{q_1(t-\theta)}]} \quad (\text{B16})$$

Esta es la construcción del segundo modelo. De la misma forma que en el modelo anterior, cambiamos de nombre a los parámetros.

Si $y_1 = A$, $\theta = B$, $\rho_0 = C$, $\rho_1 = D$, $q_1 = E$ y $y_0 = F$. De donde tenemos nuestro modelo 2.

$$y(t) = A - \frac{4(A - F)}{[e^{C(t-B)} + e^{D(t-B)}][1 + e^{E(t-B)}]} \quad (\text{B17})$$

Con esto, concluimos la demostración de la construcción de los modelos de crecimiento de Procas y Balas, haciendo hincapié en lo que estos autores afirman que el propósito de su trabajo es desarrollar modelos robustos que pudiesen ser fácilmente ajustados.

APENDICE 2 . USO DE LA SUBROUTINA DE PROGRAMACION CUADRATICA SECUENCIAL DE SCHITTKOWSKI (NLPQLD), PARA RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACION NOLINEAL.

Esta subrutina resuelve el problema general de programacion nolineal

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } F(x) \\ & \text{sujeto a } G(j,x)=0, & j=1, \dots, m_e \\ & G(j,x) \geq 0, & j=m_e+1, \dots, m \\ & x_l \leq x \leq x_u \end{aligned}$$

Para llamar esta subrutina es necesario crear un programa principal donde se declaren las variables necesarias que funcionen como parámetros de dicha subrutina. El programa principal será creado en el lenguaje de programación Fortran; que es el lenguaje utilizado para dicha subrutina y la forma para la llamada es la siguiente:

CALL NLPQLD (M, ME, N, X, F, XL, XU, IPRINT, IFAIL, WA, LWA, KWA, LKWA)

donde se definen los parámetros como:

M: Número total de restricciones.

ME: Número de restricciones de igualdad.

N: Número de parámetros a estimar.

X(N): Arreglo unidimensional que contiene los valores iniciales de los parámetros desconocidos.

F: Contiene el valor de la función objetivo.

XL(N),XU(N): Arreglos unidimensionales **XL** y **XU** que contienen los valores inferiores y superiores donde se mueven los parámetros desconocidos.

IPRINT: Especifica la salida de la impresión.

IPRINT = 0 Da la salida del programa.

IPRINT = 1 Da el análisis de la convergencia final.

IPRINT = 2 Da los valores de los parámetros en cada iteración.

IPRINT = 3 Da más detalles e información en cada iteración de las variables, restricciones y valores de los parámetros.

IFAIL: Muestra los parámetros y la razón para la terminación de n procesos de solución.

IFAIL = 0 Si las condiciones de optimalidad son satisfechas.

IFAIL = 1 Si el proceso se detiene después de 40 iteraciones.

IFAIL = 2 Si el algoritmo calcula una dirección de ascenso.

IFAIL = 3 Si ocurre un underflow cuando determina una nueva aproximación de la matriz Hessiana o Lagrangeana.

IFAIL = 4 Si se requieren más de 10 llamadas de la función durante la búsqueda lineal.

IFAIL = 5 Si la longitud de un arreglo de trabajo es muy pequeña e insuficiente.

IFAIL = 7 Si la búsqueda de dirección es pequeña, pero la iteración no es factible.

1000 > IFAIL > 10: Si la solución de los cuadrados o subproblemas cuadrados es terminada con un mensaje de error.

WA(LWA), LWA: WA es un arreglo de trabajo real de longitud; LWA puede ser menor que $N^2 + M^2 + 11 \cdot M + 25 \cdot N + 60$ y se puede agrandar si se requiere más espacio de trabajo en la solución de la programación cuadrática o el subproblema de mínimos cuadrados.

KWA(LKWA), LKWA: Si el uso de espacio de trabajo produce un arreglo de enteros LKWA, debería ser menor de 18, o mayor si se requiere espacio adicional para la solución del subproblema.

COMMON/CMACHE/EP8: Es defnido para la precisión de la máquina, para su uso mínimo es necesario crear las siguiente dos subrutinas:

a) NLFUNC(M, ME, MMAX, N, F, G, X, ACTIVE)

que es la subrutina que evalúa la función objetivo, donde la función objetivo es considerada como la suma de los cuadrados de los errores y los parámetros de la función son los siguientes:

M, N, ME: Son idénticos a como los describimos en la subrutina principal (NLPQLD).

MMAX: Número de restricciones, dimensión del arreglo G.

F: Contiene el valor de la función objetivo.

G(MMAX): Arreglo que guarda las evaluaciones de las restricciones.

X(N): Arreglo que contiene los parámetros del modelo.

ACTIVE(MMAX): Lógico que indica cuáles restricciones están activas.

b) NLGRAD(M,ME,MMAX,N,F,G,DF,DG,X,ACTIVE,WA)

es la subrutina que evalúa los gradientes de la función objetivo y los parámetros se definen de la forma siguiente:

M,ME,N,MMAX: Contienen los valores antes mencionados.

F: Contiene los valores de la función objetivo.

G(MMAX): Contiene los valores de la restricciones.

DF(N): Contiene los valores de las derivadas parciales de la función objetivo.

DG(MMAX, N): Contiene los valores de las derivadas parciales de las restricciones.

X(N): Contiene los valores de los parámetros del modelo.

ACTIVE(MMAX): Arreglo lógico que determina qué restricciones están activas.

WA(MMAX): Arreglo de trabajo que puede ser usado para la implementación de la diferenciación numérica.

Ya definidas las subrutinas (**NLFUNC**) que estima el valor de la función objetivo y de la subrutina (**NLGRAD**), la cuál evalúa los gradientes de la función objetivo con respecto de cada uno de los parámetros.

Para llamar la subrutina principal (**NLPQLD**), necesitamos enunciar en el programa principal la forma en que se darán los valores observados. Si el ajuste se realiza sólo para un caso (ó si éste es pequeño), lo más recomendable es dar los valores en el programa principal con la instrucción (**DATA**); pero si los datos observados son más de 50 ó si se requiere hacer el ajuste para un grupo de casos, lo más recomendable es proporcionárselos en un archivo de datos, y análogamente se puede hacer para los valores de los parámetros iniciales así como de sus intervalos.

Al usar la subrutina (**NLPQLD**), debemos tener bien definido el modelo, ya que, de éste depende que la función objetivo esté bien evaluada, la cual, repercute considerablemente en la estimación de los parámetros

desconocidos.

Para la creación de la función (NLGRAD) existen dos formas de hacerlo:

1). Dar las derivadas parciales de la función objetivo en forma analítica para luego evaluarlas en cada uno de los tiempos, y guardarlas en la matriz DF(N).

2). Utilizar el método numérico para la derivación de la función objetivo con respecto de cada uno de los parámetros. Por ejemplo; si decidiéramos usar la subrutina (DFDJC2) de More, ésta requiere de una función (FCN), que se encarga de calcular la suma de los cuadrados de los errores relativos del modelo. En la misma forma que en el tipo 1, se guardan los valores obtenidos de las derivadas parciales con respecto de cada uno de los parámetros en la matriz DF(N).

Para completar el programa principal, sólo faltaría realizar la salida de los valores obtenidos por dicha subrutina y fin de programa.

Nota.- Queremos hacer notar que en este caso sólo estamos usando una parte de la subrutina que es la estimación de los parámetros de un modelo no lineal sin restricciones. Si nuestro objetivo fuera minimizar una cierta función no lineal sujeta a ciertas restricciones, necesitaríamos dar también la función de restricción de igualdad, desigualdad o ambas. Además en la función (NLFUNC), habría que dar las instrucciones para la evaluación de las restricciones y los valores se guardarían en la matriz G(MMAX). De la misma forma, en la subrutina (NLGRAD), se darían las instrucciones para la evaluación de las derivadas parciales de las restricciones de igualdad, desigualdad o ambas y se guardan en la matriz DG(MMAX,N), donde MMAX es el número de restricciones y N el número de parámetros.

Como ejemplo, presentamos el listado del programa principal del ajuste del modelo 1 de Preece y Baines, utilizado en la estimación de los parámetros desconocidos del modelo en cada uno de los individuos del estudio longitudinal con el que se realizó este estudio. En este trabajo no presentamos el listado de la subrutina principal (NLPQLD), ni de la subrutina (QLD) que también se requiere por ser muy extensas y que

además abarcaría la mayor parte de este trabajo, pero si alguien las requiere o se interesa en éstas así como de la subrutina (DFDJC2), utilizada para la derivación numérica de una función, les serán proporcionada posteriormente.

```

C          PROGRAMA PRINCIPAL
C  AJUSTE DEL MODELO 1 DE PREECE Y BAINES
C   $Y = A - [2(A-Y(B))] / [EXP(C(T-B))-EXP(D(T-B))]$ 
C  POR MEDIO DE LA SUBROUTINA DE SCHITTKOWSKI
C
DIMENSION X(5),G(5),A(5)
DIMENSION XL(5),XU(5)
DIMENSION WA(3000),KWA(500)
INTEGER M,ME,N,IPRINT,KWA,IFAIL,WA,LWA,LKWA
CHARACTER*5 CLS,CLAVE
DOUBLE PRECISION T(22),Y(22)
DOUBLE PRECISION F,X,XL,XU
COMMON/CMACHE/EPS
COMMON/DATOS/T,Y
EXTERNAL FCN
DO 13 K=1,22
  L=K
  T(K)=DFLOAT(L)-1.0D0
13 CONTINUE
  DATA CLAVE,' 1010'/
  OPEN(UNIT=7,FILE='TALLA.TXT')
  2 READ(7,100,END=23)CLS,ISEX,(Y(D),I=1,22)
100 FORMAT(A5,1X,I1,22F6.1)
19 IF(CLS.EQ.CLAVE) THEN
  EPS=1.0D-19
  IPRINT=2
  IFAIL=0
  IFLAG=1
  N=5
  M=0
  ME=0
  LWA=3000
  LKWA=500
  XL(1)=100.0D0
  XL(2)=6.0D0
  XL(3)=0.0D0
  XL(4)=0.0D0
  XL(5)=50.0D0

```

```

XU(1)=180.0D0
XU(2)=20.0D0
XU(3)=2.1D0
XU(4)=3.0D0
XU(5)=160.0D0
X(1)=155.00D0
X(2)=12.38D0
X(3)=0.1144D0
X(4)=1.1369D0
X(5)=144.174D0
MMAX=5
WRITE(6,1100)(X(I),I=1,N)
C LLAMADA A LA SUBROUTINA PRINCIPAL
CALL NLPQL0(M,ME,N,X,F,XL,XU,IPRINT,IFAIL,WA,
* LWA,KWA,LKWA)
C
WRITE(6,500)CLS,ISEX
500 FORMAT(/5X,' AJUSTE DE LA CLAVE ',A5,' SEXO',I2)
WRITE(6,1000)(X(I),I=1,N)
C WRITE(6,'(1H1)')
STOP
1000 FORMAT(/5X,'SOLUCION OBTENIDA DE LOS
PARAMETROS '//5X,SF10.3)
1100 FORMAT(/5X,'PARAMETROS INICIALES DEL AJUSTE
//5X,SF10.3)
ELSE
CLAVE=CLS
GO TO 19
ENDIF
GO TO 2
23 WRITE(6,1002)
1002 FORMAT(/5X,' TERMINA EL AJUSTE DE FUNCIONES NO
LINEALES',/5X,' FELIZ NAVIDAD ')
END
C
C
C

```

```

SUBROUTINE NLFUNC(M,ME,MMAX,N,F,G,X,A)
DIMENSION G(MMAX)
DOUBLE PRECISION
F,X(N),TMP1,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5,TMP6,XMOD
DOUBLE PRECISION T(22),Y(22),R(22)
LOGICAL A(MMAX)
COMMON/DATOS/T,Y
COMMON/MODELO/XMOD,R

```

```

C
C  EVALUACION DE LA FUNCION OBJETO
C  FUNCION OBJETIVO
C   $F(X) = A - [2(A - Y(B))] / [EXP(C(T - B)) - EXP(D(T - B))]$ 
C

```

```

F=0.0D0
DO 10 I=1,22
  TMP2=2.0D0*(X(I)-X(5))
  TMP3=X(3)*(T(I)-X(2))
  TMP4=X(4)*(T(I)-X(2))
  TMP5=DEXP(TMP3)
  TMP6=DEXP(TMP4)
  XMOD=X(I)-(TMP2/(TMP5+TMP6))
  R(I)=Y(I)-XMOD
  F=F+(R(I)**2)

```

```

10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C
C

```

```

SUBROUTINE NLGRAD(M,ME,MMAX,N,F,G,DF,DG,X,A,WA)
INTEGER M,ME,MMAX,N
DIMENSION G(MMAX),DF(N),DG(MMAX,N),X(N)
DOUBLE PRECISION F,SUM,DF,R(22)
LOGICAL A(MMAX)
DOUBLE PRECISION
X,FVEC(22),FJAC(22,5),WA(22),T(22),Y(22)
DOUBLE PRECISION TMP1,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5
DOUBLE PRECISION TMP6,TMP7,TMP8,TMP9,TMP10

```

DOUBLE PRECISION DFA,DFB,DFC,DFD,DFE,XMOD
COMMON/DATOS/T,Y
COMMON/MODELO/XMOD,R

C

C EVALUA LOS GRADIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO

C

DO 10 I=1,22

TMP2=X(3)*(T(I)-X(2))

TMP3=X(4)*(T(I)-X(2))

TMP4=DEXP(TMP2)

TMP5=DEXP(TMP3)

TMP6=X(3)*TMP4

TMP7=X(4)*TMP5

TMP8=-2.0D0*(X(1)-X(5))

TMP9=X(2)-T(I)

TMP10=TMP4+TMP5

DFA=1.0D0-(2.0D0/TMP10)

DFB=(TMP8*(TMP6+TMP7))/(TMP10**2)

DFC=(TMP8*(TMP9*TMP4))/(TMP10**2)

DFD=(TMP8*(TMP9*TMP5))/(TMP10**2)

DFE=-4.0D0/TMP10

FJAC(I,1)=R(I)*(-DFA)

FJAC(I,2)=R(I)*(-DFB)

FJAC(I,3)=R(I)*(-DFC)

FJAC(I,4)=R(I)*(-DFD)

FJAC(I,5)=R(I)*(-DFE)

10 CONTINUE

DO 20 J=1,5

SUM=0.0D0

DO 30 I=1,22

SUM=SUM+FJAC(I,J)

30 CONTINUE

DF(J)=SUM

20 CONTINUE

RETURN

END

C

C

BIBLIOGRAFIA:

- 1.- Berkey, S.C. and Kent, L.R.: **Longitudinal Principal Components and Nonlinear Regression Models of Early Childhood Growth.** *Annals of Human Biology.* 1983. 10:3. p. 523-536.
- 2.- Berkey, S.C. and Laird, M.N.: **Nonlinear Growth Curve Analysis: Estimating the Population Parameters.** *Annals of Human Biology.* 1986. 13:2 p. 111-128.
- 3.- Berkey, S.C.: **Comparison of Two Longitudinal Growth Models for Preschool Children.** *Biometrics.* 1982. 38 p. 221-234.
- 4.- Bock, R.D.; Thissen, D.: (1976): **Fitting Multicomponent Models for Growth in Stature.** *Proceedings of the 9th. International Biometric Conference.* The Biometric Society. Boston. 1976. 1. p. 431-442.
- 5.- Braun, M.: **Ecuaciones Diferenciales.** *Comunicaciones Internas.* 1981. Facultad de Ciencias U.N.A.M.
- 6.- Burden, L.R.; Farres, D.J.: **Análisis Numérico.** Grupo Editorial Iberoamericana. 1985.
- 7.- Count, E.W.: **A Quantitative Analysis of Growth in Certain Human Skull Dimensions.** *Human Biology.* 1942.14:2 p.143-166.
- 8.- Deming, J. and Washburn, H.A.: **Application of the Jenus Curve to the Observed Pattern of Growth During the First Eight Years of Life in Forty Boys and Forty Girls.** *Human Biology.* 1963. 35. p. 484-506
- 9.- Draper, N.R. and Smith H.: **Applied Regression Analysis.** John Wiley & Sons, Inc. 1986.
- 10.- Fletcher, R.: **Practical Methods of Optimization.** John Wiley & Sons. Segunda Edición. 1987.
- 11.- Gasser, T. Müller, H.G.; Köhler, W.; Molinari, L. and Prader, A.: **Nonparametric Regression Analysis of Growth Curves.** The

Annals of Statistics 1984. 12:1. p. 210-229.

- 12.- Hauspie, C.R.; Wachholder, A.; Baron, G.; Cantraine, F.; Susane, C. and Graffar, M.: **A Comparative Study of the Fit of Four Different Functions to Longitudinal Data of Growth in Height in Belgian Girls.** Annals of Human Biology. 1980. 7:4. p. 347-358.
- 13.- Jenss, M.R. and Bayley, N.: **A Mathematical Model for Studying the Growth of a Child.** Human Biology 1937. 9. p. 556-563.
- 14.- Kirsten, B.S and Cornv, A.: **A Comparative Study of Five Growth Models Applied to Weight Data from Congolese Infants Between Birth and 13 Months.** Annals of Journal Human Biology. 1992.
- 15.- Lozy, M.E.: **A Critical Analysis of the Double and Triple Logistic Growth Curves.** Annals of Human Biology. 1978. 5:4 p. 389-394.
- 16.- Márquez, Díez-Carredo J. **Fundamentos de Teoría de Optimización.** Editorial Limusa. Primera Edición 1987.
- 17.- Marubini, E.; Resele, F.L. and Barghini, G.: **A Comparative Fitting of the Gompertz and Logistic Functions to Longitudinal Height Data During Adolescence in Girls.** Human Biology. 1971. 44. p. 237-252.
- 18.- Marubini, E.; Resele, F.L.; Tanner, M.J. and Whitehouse, H.R.: **The Fitting of Gompertz and Logistic Curves to Longitudinal Data During Adolescence on Height Sitting, Height and Biscromial Diameter in Boys and Girls of the Harpenden Growth Study.** Human Biology. 1972. 45. p. 511-524.
- 19.- Preece, A.M. and Baines J.M.: **A New Family of Mathematical Models Describing the Human Growth Curve.** Annals of Human Biology. 1978. 5:1 p. 1-24.
- 20.- Schittkowski, K.: **The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han and Powell with an Augmented Lagrangian Type Line Search Function.** Numerische Mathematik. 1981. 38 p. 83-114.

- 21.- Schittkowski, K.: **The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han And Powell with an Augmented Lagrangian Type Line Search Function. Part 2. An Efficient Implementation with Linear Least Squares Subproblems.** Numerische Mathematik. 1981 38. p. 115-127.
- 22.- Schittkowski, K.: **NLPQL: A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems.** Annals of Operations Research. 1985. 5. p. 485-500.
- 23.- Shohoji, T. and Sasaki, H.: **Individual Growth of Japanese.** Growth. 1987. 51. p. 432-450.
- 24.- Zacharias, L. and Rand, M.W.: **Adolescent Growth in Height and its Relation to Menarche in Contemporary American Girls.** Annals of Human Biology. 1983. 10:3 p. 209-222.
- 25.- Zill, G. D.: **Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.** Grupo Editorial Iberoamericana. Segunda Edición. 1986.

- 21.- Schittkowski, K.: The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han And Powell with an Augmented Lagrangian Type Line Search Function. Part 2. An Efficient Implementation with Linear Least Squares Subproblems. Numerische Mathematik. 1981 38. p. 115-127.
- 22.- Schittkowski, K.:NLPQL.: A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems. Annals of Operations Research. 1985. 5. p. 485-500.
- 23.- Shohoji, T. and Sasaki, H.: Individual Growth of Japanese. Growth. 1987. 51. p. 432-450.
- 24.- Zacharias, L. and Rand, M.W.: Adolescent Growth in Height and Its Relation to Menarche in Contemporary American Girls. Annals of Human Biology. 1983. 10:3 p. 209-222.
- 25.- Zill, G. D.: Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericana. Segunda Edición.1986.

INDICE

INTRODUCCION 1 - 2

CAPITULO I

INTRODUCCION A LA PROGRAMACION CUADRATICA SECUENCIAL

1.1 El Método de Lagrange - Newton (PCS) 3 - 15

1.2 Subrutina NLPQL 16 - 26

CAPITULO 2

MODELOS MATEMATICOS APLICADOS AL CRECIMIENTO HUMANO

2.1 Introducción 27 - 29

2.2 Modelos de Crecimiento Humano 29 - 34

2.3 Modelos de Preece y Baines 34 - 95

APENDICE 1

Construcción de los Modelos de Preece y Baines 96 - 109

APENDICE 2

Uso de la Subrutina (NLPQL)..... 110 - 118