

00365



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

8
lej

**FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**MULTPLICIDAD DE CARACTERISTICAS CERRADAS
EN
HIPERSUPERFICIES DE TIPO CONTACTO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)
P R E S E N T A
JOSE MARTINEZ LEON

**DIRECTORA DE TESIS: DRA. MONICA ALICIA CLAPP JIMENEZ
LABORA**

1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Usted por fin aprende
y usa lo aprendido
para saber que el mundo
es como un laberinto
en sus momentos claves
infierno o paraíso
amor o desamparo
y siempre siempre un lio...

A Marce, por su amor

Comenzaron caminando juntos
por el campo y los magueyales
los arroyos y los maizales
para después decidir
seguir juntos por la vida...

A Alicia y José, por su amor
y cariño de toda la vida

A la academia y a las instituciones:

Quiero agradecer a todos mis sinodales sus contribuciones y apoyo que se manifestaron de diferentes formas, en la realización y terminación de este trabajo.

En especial a mi directora de tesis la Dra. Mónica Clapp, por el apoyo decidido que me dio para que obtuviera la beca de DGAPA (mayo 92 / marzo 94), por haberme impulsado hacia donde ella intuía que había un nuevo resultado, así como por su revisión y comentarios a al menos tres versiones de la tesis, que me ayudaron a ir clarificando mis ideas. Al Doctor Jorge Ize le agradezco el tiempo invertido en la lectura detallada y crítica que hizo a dos versiones preliminares de la tesis, en las que llegó hasta el último rincón del trabajo, el cual se benefició de sus comentarios y sugerencias, adquiriendo una mayor solidez y una mejor presentación. Al Dr. Pablo Padilla por las pláticas que tuvimos sobre puntos importantes del trabajo y por sus valiosos comentarios encaminados a impulsarme hacia nuevos resultados. Al Dr. Gilberto Flores por el tiempo dedicado a las exposiciones y a la lectura de una versión preliminar. Al Dr. Santiago Lopez de Medrano por haberme dado algunas ideas sobre cuestiones simplécticas y haber llamado mi atención hacia algo nuevo para mí: La conjetura de Seifert. Al Dr. Ernesto Rosales y al Dr. Salvador Perez Esteva por el tiempo que dedicaron a que les expusiera.

Por otra parte quiero agradecer al Instituto de Matemática el apoyo para obtener la beca de DGAPA que gocé de mayo de 1992 a marzo de 1994. Al subcomité de becas del Instituto le agradezco su apoyo académico, traducido en una beca de lugar (abril 94 / abril 96), lo que me permitió tener los elementos para desarrollar un trabajo académico serio.

Quiero agradecer a mi abuelo Sergio León, donde quiera que esté, por su cariño y apoyo de tantos años. Agradecerle a Roxana su afecto, su apoyo y esos libros que son para leerse en cualquier isla, no importa si está rodeada de mar, tierra o estrellas. A Antonio León le agradezco su apoyo moral y sus conversaciones sobre academia y política. A Laura R. por su amistad y afecto. A Déborah por su afecto, esperando que podamos recorrer muchos más conventos del siglo XVI... Les agradezco su aprecio y afecto a Mara, a Max y Martha T., a Liz Izquierdo, a Adriana, Juan Carlos y Jose Luis. A Gaby S. y Leonardo les agradezco de nuevo su ayuda con el Latex.

A Jorge, Elia, Lilia, Norma e Hilda les agradezco su cariño, que nos permitirá siempre enfrentar la vida en sus momentos difíciles y en los otros hacerla más plena.

Y a Marce le agradezco por su alegría y sonrisa constantes, por su calidez y su ternura, y por todo el apoyo y el tiempo que me obsequió.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	
1.1 Sistemas Hamiltonianos	1
1.2 Un poco de historia	9
1.3 Contenido	12
2. TEORÍA DE PUNTOS CRÍTICOS PARA FUNCIONALES CON SIMETRÍAS	
2.1 El índice	16
2.2 Pseudoíndice	29
2.3 Teoría de puntos críticos	39
3. EL PROBLEMA VARIACIONAL	
3.1 Una clase adecuada de funciones hamiltonianas	52
3.2 El problema variacional	59
3.3 Nuestro problema variacional	68
3.4 Nuestro problema variacional satisface las hipótesis del teorema de enlace	72
4. MULTIPLICIDAD DE ÓRBITAS	
4.1 El problema y su independencia del hamiltoniano	84
4.2 La familia. Hipersuperficies de tipo contacto restringido	87
4.3 Un resultado de multiplicidad	101
4.4 Comparación del hamiltoniano asociado a hipersuperficies	111
4.5 Un hamiltoniano adecuado para cuando Σ_S es discreto	117
4.6 El caso en que S es un elipsoide	128
4.7 Demostración del teorema 4.3.1	140
Bibliografía	151

1. INTRODUCCION

§1.1 Sistemas hamiltonianos

Comencemos presentando un ejemplo sencillo de un sistema hamiltoniano y, mediante él, la problemática de nuestro interés. Tomemos $H : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$

$$H(x) := a_1(x_1^2 + x_3^2) + a_2(x_2^2 + x_4^2) \quad a_1, a_2 > 0.$$

El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales se conoce como sistema hamiltoniano

$$\dot{x}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_{N+i}}(x(t)) \quad (\text{SH})$$

$$\dot{x}_{i+N}(t) = \frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t))$$

con $i = 1, 2$, $N = 2$. A la función H se le llama hamiltoniano o energía. Un problema de interés es encontrar soluciones periódicas del sistema hamiltoniano (SH).

Escribamos el sistema (SH) de manera más concisa

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t)) \\ &= \left(-\frac{\partial H}{\partial x_3}(x(t)), -\frac{\partial H}{\partial x_4}(x(t)), \frac{\partial H}{\partial x_1}(x(t)), \frac{\partial H}{\partial x_2}(x(t))\right) \\ &= J\nabla H(x(t)) \quad \text{donde } J(x_1, \dots, x_4) = (-x_3, -x_4, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Observemos que $J(x_1, \dots, x_4) \cdot (x_1, \dots, x_4) = 0$.

Como primer hecho relacionado con nuestro problema observemos que las soluciones de (SH) se encuentran en algún nivel de energía i.e si $x(t)$ es una solución de (SH) (periódica o no) entonces

$$H(x(t)) \equiv cte \quad \text{para todo } t,$$

ya que

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \nabla H(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla H(x(t)) \cdot J\nabla H(x(t)) = 0.$$

Ahora resolvamos el sistema hamiltoniano particular que hemos planteado. Pongamos explícitamente el sistema de ecuaciones (SH)

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -2a_i x_{i+N}(t) \\ & \quad i = 1, 2 \quad N = 2 \\ \dot{x}_{i+N}(t) &= 2a_i x_i(t). \end{aligned}$$

Este sistema es equivalente a las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\ddot{x}_i(t) = -4a_i^2 x_i(t) \quad (x_{i+N}(t) := -\frac{1}{2a_i} \dot{x}_i(t)) \quad i = 1, 2.$$

Reescribiendo éstas tenemos

$$\ddot{x}_i + 4a_i^2 x_i(t) = 0 \quad i = 1, 2.$$

Las cuales son ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas y normales en \mathbf{R} . Como sabemos las soluciones de cada una de estas ecuaciones forman un espacio vectorial de dimensión 2, y dos generadores linealmente independientes de los espacios respectivos son $\cos(2a_i t)$ y $\sin(2a_i t)$ para $i = 1, 2$.

Así, si las funciones componentes de $x(t)$ son de la forma

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \lambda_i \cos(2a_i t) + \mu_i \sin(2a_i t) \\ & \quad i = 1, 2 \quad N = 2 \\ x_{i+N}(t) &= \lambda_i \sin(2a_i t) - \mu_i \cos(2a_i t), \end{aligned} \tag{1}$$

entonces $x(t)$ es una solución de (SH). E inversamente toda solución de (SH) tiene sus funciones componentes de esa forma.

Notemos que la existencia de soluciones de (SH) no representa problema pues la garantizan los resultados de ecuaciones diferenciales, ya que los niveles de energía, $H^{-1}(a)$ con $a \in \mathbf{R}$, están acotados. Pero la existencia de soluciones periódicas si resulta un problema de interés.

Sea $x(t)$ una solución de (SH), de la expresión (1) tenemos que el período de $x_1(t), x_3(t)$ es $T = \pi/a_1$ y que el período de $x_2(t), x_4(t)$ es $\tilde{T} = \pi/a_2$. Por lo que los períodos de las componentes $x_i(t), x_{2+i}(t)$ son $k\pi/a_i$ con $k \in \{1, 2, \dots\}$, $i = 1, 2$.

Notemos que a partir de una solución $x(t)$ de (SH) podemos obtener otras soluciones de (SH), $x(t+t_0)$ con $t_0 \in \mathbf{R}$. Así, cuando busquemos

diferentes soluciones de (SH) éstas deben ser geoméricamente independientes i.e. no se deben obtener una de la otra de la manera anterior.

Debido a que las soluciones de (SH) se encuentran en algún nivel de energía, limitemos nuestra búsqueda a soluciones de (SH) que estén en algún nivel de energía preestablecido "a" con "a" valor regular de H . Y tomemos $\alpha = 1$.

Caso 1 Supongamos que $1 = a_1 = a_2$. Así estamos buscando soluciones cerradas contenidas en la esfera unitaria S^3 .

Notemos que si $x(t)$ es una solución de (SH) entonces sus componentes $x_1(t), x_3(t)$ tienen período $\pi = \pi/a_1$, y que sus componentes $x_2(t), x_4(t)$ tiene período $\pi = \pi/a_2$. Por tanto toda solución de (SH) es una solución cerrada. Más aun por cada punto $w \in S^3$ pasa una solución cerrada $x(t)$ dada por

$$\begin{aligned} x_i(t) &= w_i \cos(2t) - w_{i+N} \sin(2t) \\ &\quad i = 1, 2 \quad N = 2 \\ x_{i+N}(t) &= w_i \sin(2t) + w_{i+N} \cos(2t), \end{aligned}$$

Por tanto existe una infinidad de soluciones periódicas de (SH) geoméricamente independientes.

Caso 2 Tomemos $a_1 \notin \mathbf{Q}, a_2 = 1$. Supongamos que existe una solución periódica de (SH), $x(t)$, contenida en el elipsoide $H^{-1}(1)$ tal que ninguna de sus funciones componentes es idénticamente cero. Como sabemos sus componentes $x_1(t), x_3(t)$ tienen período π/a_1 y sus componentes $x_2(t), x_4(t)$ tienen período π/a_2 . De donde se desprende que

$$\begin{aligned} n \frac{\pi}{a_1} &= m \frac{\pi}{a_2} \quad \text{para algún } n, m \in \{1, 2, \dots\} \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{a_1}{a_2} \in \mathbf{Q} \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción a nuestra elección de a_1 . Por tanto alguna de las funciones componentes debe ser idénticamente cero. Y así (SH) tiene exactamente dos soluciones periódicas geoméricamente independientes.

Así el número de soluciones periódicas de (SH) geoméricamente independientes puede variar drásticamente si movemos un poco la geometría de $H^{-1}(1)$, en un caso la esfera con un número infinito de soluciones periódicas geoméricamente independientes en otro caso un elipsoide (objeto homeomorfo a la esfera, más aun difeomorfo a S^3) tan "cercano" a la esfera como queramos, haciendo $|1 - a_1|$ pequeño, con sólo dos soluciones periódicas geoméricamente independientes.

Notemos que si nuestro hamiltoniano es $H(x) = a_1(x_1^2 + x_3^2) + a_2(x_2^2 + x_4^2)$, con $a_1, a_2 > 0$ y $a_1/a_2 \notin \mathbf{Q}$, entonces sobre el elipsoide $H^{-1}(1)$ no puede haber dos soluciones periódicas de (SH) geoméricamente diferentes y con el mismo período. Darse cuenta de esto es sencillo, ya que procediendo de manera análoga a lo hecho en el caso (2), se ve que las soluciones periódicas de (SH) están contenidas en el plano $\mathcal{P}_1, x_2 = x_4 = 0$, o en el plano $\mathcal{P}_2, x_1 = x_3 = 0$, y que sobre cada plano \mathcal{P}_i las soluciones periódicas no son geoméricamente independientes y tienen período π/a_i . Como además los números π/a_1 y π/a_2 no tienen un múltiplo entero común (dado que $a_1/a_2 \notin \mathbf{Q}$) entonces las soluciones no pueden tener el mismo período.

Ahora veamos que relación guardan el hamiltoniano y sus soluciones.

En nuestra anterior argumentación vimos que para el hamiltoniano $H(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ la ecuación (SH) tiene una infinidad de soluciones periódicas geoméricamente independientes en $S^3 = H^{-1}(1)$. Resulta natural preguntarnos que pasa si cambiamos el hamiltoniano, más precisamente, tomemos otro hamiltoniano $\tilde{H} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^∞ tal que

$$\tilde{H}^{-1}(\tilde{a}) = S^3 \quad \text{para algún } \tilde{a} \in \mathbf{R} \quad \text{con } \tilde{a} \text{ valor regular de } \tilde{H} \quad (2)$$

i.e. $\nabla \tilde{H}(x) \neq 0$ para todo $x \in S^3$.

¿ Tendrán el sistema (SH) y el sistema ($S\tilde{H}$) el mismo número de soluciones periódicas geoméricamente independientes sobre la esfera?

La respuesta es Sí. Ejemplifiquémoslo usando un hamiltoniano \tilde{H} particular. Sea

$$\tilde{H}(x) = \tilde{a}H(x) \quad \text{con } \tilde{a} \equiv \text{cte} > 0.$$

Tomemos una solución $x(t)$ de (SH), $\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$, sobre la esfera unitaria.

Basta con reparametrizar adecuadamente la solución $x(t)$ para que ésta sea solución de $(S\tilde{H})$. Tomemos $y(t) = x(\tilde{a}t)$

$$\dot{y}(t) = \tilde{a}J\nabla H(x(\tilde{a}t)) = J\nabla\tilde{H}(y(t))$$

Por tanto $y(t)$ es solución de $(S\tilde{H})$. Además esta correspondencia lleva la solución $x(t + t_0)$ en la solución $y(t + \frac{t_0}{\tilde{a}})$ con $t_0 \in \mathbf{R}$ i.e. soluciones que no son geoméricamente independientes van en soluciones que no son geoméricamente independientes. Inversamente dada una solución periódica $y(t)$ de $(S\tilde{H})$ contenida en S^3 , al reparametrizarla como $x(t) := y(\tilde{a}^{-1}t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \tilde{a}^{-1}J\nabla\tilde{H}(y(\tilde{a}^{-1}t)) \\ &= J\nabla H(x(t)).\end{aligned}$$

Así $x(t)$ es una solución periódica de (SH) contenida en S^3 . Y $y(t + t_0)$ va en $x(t + \tilde{a}t_0)$. Como además estas correspondencias entre las soluciones de (SH) y las soluciones de $(S\tilde{H})$ son inversa una de la otra, tenemos que hay una correspondencia biunívoca entre las soluciones periódicas de (SH) que se encuentran sobre S^3 y las soluciones periódicas de $(S\tilde{H})$ que están sobre S^3 , y esta correspondencia preserva el que dos soluciones sean geoméricamente independientes.

Para el caso general en que \tilde{H} es un hamiltoniano de clase C^∞ que satisface (2), la idea de la demostración es la misma: dar correspondencias usando para ello reparametrizaciones adecuadas de las soluciones, para una demostración se puede ver la sección 4.1.

Por tanto para resolver problemas de existencia o multiplicidad de soluciones periódicas de (SH) geoméricamente independientes sobre la esfera, podemos usar cualquier hamiltoniano \tilde{H} que satisfaga (2).

A la traza $\{x(t) : t \in \mathbf{R}\}$ de una solución periódica $x(t)$ de (SH) la denominaremos órbita. Notemos que dos soluciones de (SH) son geoméricamente independientes si y sólo si sus órbitas son diferentes. Así lo que buscamos son órbitas contenidas en S , y lo que hemos probado es que ellas permanecen invariantes si usamos hamiltonianos H que satisfagan (2).

Podemos ir un poco más allá y describir en términos puramente geométricos a las órbitas que se encuentran en un nivel de energía, suprimiendo

la referencia a un hamiltoniano que satisfaga (2). \mathbf{R}^4 tiene una geometría euclídeana inducida por la forma bilineal simétrica y no degenerada que conocemos como producto punto

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^4 x_i y_i.$$

Ahora, usando la forma bilineal antisimétrica y no degenerada

$$\omega(x, y) := Jx \cdot y$$

inducimos en \mathbf{R}^4 otro tipo de geometría, la geometría simpléctica.

Podemos utilizar ésta para caracterizar a las órbitas sobre S^3 . Veamos, tomemos una órbita C sobre S^3 y un hamiltoniano \tilde{H} como en (2). Sea $y(t)$ la parametrización regular de la órbita que la hace solución de $(S\tilde{H})$, así

$$\dot{y}(t) = J\nabla\tilde{H}(y(t)).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y &:= \{J(p, q) = (-q, p) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^4 : (p, q) \in \mathcal{N}_y\} \quad \text{donde } \mathcal{N}_y \\ &\quad \text{es la recta perpendicular a } T_y S^3 \\ &= \{v \in T_y S^3 : \omega(v, u) = 0 \quad \text{para todo } u \in T_y S^3\}, \end{aligned}$$

es un subespacio vectorial de dimensión 1, y que $\dot{y}(t) \in \mathcal{L}_{y(t)}$. Esto último se desprende de que para $u \in T_{y(t)} S^3$

$$\begin{aligned} \omega(\dot{y}(t), u) &:= J\dot{y}(t) \cdot u \\ &= -\nabla\tilde{H}(y(t)) \cdot u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}_{y(t)} = T_{y(t)} C.$$

Así las órbitas las podemos ver como subvariedades, C , de clase C^∞ de dimensión 1 difeomorfas a S^1 con la propiedad de que

$$\mathcal{L}_y = T_y C \quad \text{para todo } y \in C.$$

A las órbitas vistas de esta manera se les denomina características cerradas.

Por último notemos que a S^3 la hemos estado tomando como $S^3 = H^{-1}(a)$ con a valor regular de H , función de clase C^∞ . De esto se deduce que S^3 es una subvariedad de \mathbf{R}^4 de la misma clase que el hamiltoniano, en este caso de clase C^∞ , y que tiene codimensión 1, i.e. $\dim \mathbf{R}^4 - \dim S^3 = 1$.

Así al tomar el sistema hamiltoniano general en \mathbf{R}^{2N} , el concepto que generaliza a S^3 es

DEFINICION 1.1.1 (*Hipersuperficie*) $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ es una hipersuperficie si es una subvariedad de \mathbf{R}^{2N} de codimensión 1.

Y la problemática general dentro de la cual se circunscribe nuestro trabajo es:

¿ Qué condiciones geométricas debe tener una hipersuperficie compacta para garantizar que existan órbitas o para que haya múltiples órbitas ?

Ahora demos notación y algunas clases geométricas especiales de hipersuperficies a las cuales se hará referencia en las siguientes secciones de este capítulo.

DEFINICION 1.1.2 (*conjunto convexo y estrictamente convexo*) $C \subset \mathbf{R}^{2N}$ es convexo (estrictamente convexo) si

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in C,$$

para todo $u, v \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ (y además satisface que si $x, y \in \partial C$ entonces el segmento que une a x con y no intersecta a ∂C en puntos diferentes de x, y). Además pediremos que $0 \in C$.

DEFINICION 1.1.3 (*Hipersuperficie convexa y estrictamente convexa*) Una hipersuperficie $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ es convexa (estrictamente convexa) si $S = \partial C$ con C conjunto convexo (estrictamente convexo).

DEFINICION 1.1.4 (*Hipersuperficies en forma de estrella*) Una hipersuperficie $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ tiene forma de estrella si $\zeta : S \rightarrow S^{2N-1}$, $\zeta(x) = x/\|x\|$ es un C^1 -difeomorfismo.

DEFINICION 1.1.5 (*Dilatación simpléctica*) Un campo vectorial de clase C^∞ $\chi : U \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, con $U \subset \mathbf{R}^{2N}$ abierto, es una dilatación simpléctica

si

$$JD\eta_t(x)(u) \cdot D\eta_t(x)(v) = e^t Ju \cdot v \quad \text{para todo } u, v \in \mathbf{R}^{2N}, \\ \text{para todo } x \in U \text{ para todo } t,$$

donde $D\eta_t(x)$ es la diferencial de $\eta_t : U \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ en el punto x y $\eta_t(x) = \eta(t, x)$ es el flujo inducido por χ .

DEFINICION 1.1.6 (*Hipersuperficies de tipo contacto*) Una hipersuperficie $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ compacta y conexa es de tipo contacto si existe $\chi : U \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, con U vecindad abierta de S , dilatación simpléctica transversal a S i.e. $\chi(x) \notin T_x S$ para todo $x \in S$.

Ejemplos:

- 1) Toda hipersuperficie en forma de estrella es de tipo contacto.
- 2) Otras hipersuperficies que no son como en 1) se dan en 4.2.5.

DEFINICION 1.1.7 (*Hipersuperficies de tipo contacto restringido*) Una hipersuperficie $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ compacta y conexa es de tipo contacto restringido si existe $\chi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ dilatación simpléctica transversal a S .

Sea $H : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$ un hamiltoniano. Denotaremos

$$\nabla H(x) = (H_p(x), H_q(x)) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2N}.$$

Y cuando se haga referencia a una familia de hipersuperficies S_ϵ $-1 \leq \epsilon \leq 1$, éstas se habrán obtenido como $H^{-1}(\epsilon)$ con ϵ valor regular de H , para un hamiltoniano H adecuado, y $S_0 = S$.

§1.2 Un poco de historia

El primer trabajo que se conoce en la dirección de nuestra problemática general, y de carácter global, es el de Seifert [Se] quien buscó soluciones de (SH) considerando hamiltonianos H , escritos en la forma clásica "energía cinética más energía potencial"

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(q) p_i p_j + V(q)$$

donde $g_{ij}(q)$ es una matriz positiva definida para cada q . Seifert mostró que si cero es un valor regular de V y $V^{-1}(-\infty, 0]$ es C^2 -difeomorfo al disco entonces existe al menos una órbita en $H^{-1}(0)$, siempre que se garantice que $V, g_{ij} \in C^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ i.e. son de clase C^2 . (aquí Seifert usa otras condiciones técnicas). Para la prueba usó ideas de geometría diferencial. Rudamente hablando él encuentra soluciones de (SH) como geodésicas de una métrica riemanniana, llamada la métrica de Jacobi, asociada con el término de la energía cinética en el hamiltoniano. Posteriormente en 1978 Weinstein [We1] usando el método de Seifert, reemplazando la geometría riemanniana por la geometría de Finsler, probó que si S es una hipersuperficie compacta, convexa e imagen inversa de un valor regular de H entonces tiene una solución periódica de (SH). En este mismo trabajo Weinstein plantea la siguiente pregunta

¿Si S es difeomorfa a S^{2N-1} tendrá S alguna órbita?

Ha sido hasta recientemente que se ha dado una respuesta a esta pregunta. Michel Herman, a finales de 1994 en un seminario en París, exhibió una hipersuperficie difeomorfa a una esfera que no tiene órbitas (comunicación verbal del Dr. Lopez de Medrano).

También en 1978 apareció un artículo de Rabinowitz [Ra1] que aborda el problema desde una perspectiva diferente y que abriría un gran caudal de trabajos posteriores que emplearían métodos de cálculo de variaciones. En [Ra1] Rabinowitz aborda los problemas de:

* Encontrar soluciones de (SH) que tienen una energía prescrita.

** Encontrar soluciones de (SH) con período prescrito.

En cuanto al primero mostró que si $S = H^{-1}(b)$ tiene forma de estrella (con b valor regular) entonces (SH) tiene al menos una solución periódica en S . Rabinowitz obtiene sus resultados usando métodos de cálculo de variaciones. Así las soluciones de (SH) corresponden a puntos críticos de una

funcional, definida en un espacio E de curvas y que toma valores en los reales, sujeta a una restricción (el promedio del hamiltoniano a lo largo de la curva) i.e. se buscan puntos críticos de la funcional elegida restringida a una subvariedad \mathcal{M} de E . Weinstein en [We2] observa que existen elementos geométricos comunes en situaciones previamente estudiadas, en la abordada en [We1] (para hipersuperficies compactas y convexas) y en aquellas en que se demuestra la existencia de órbitas por medio de métodos variacionales [Ra1] (para hipersuperficies en forma de estrella) y [Ra2] (para algunas hipersuperficies que son transversales a $\chi(p, q) = (\epsilon p, (1 - \epsilon)q)$), las hipersuperficies en cuestión son hipersuperficies de tipo contacto. Y plantea su conjetura (que enunciamos en el caso particular en que el espacio simpléctico es $(\mathbf{R}^{2N}, \omega)$).

Conjetura (Weinstein, 1979): Si S es una hipersuperficie de tipo contacto con $H^1(S; \mathbf{R}) = 0$ entonces S tiene una característica cerrada.

Esta conjetura sería resuelta por Viterbo [Vi] sin necesidad de pedir que $H^1(S; \mathbf{R}) = 0$.

En 1987 en un trabajo novedoso Hofer y Zehnder [HZ1] mostraron que tan cerca como se quiera de S existe una hipersuperficie S_ϵ que lleva una órbita x . Y además dan una estimación de la acción en x , $0 < A(x) < d(H)$, donde

$$A(x) := -\frac{1}{2} \int_0^T J \dot{x}(t) \cdot x(t) dt \quad x(0) = x(T).$$

A partir de este resultado prueban, con considerable sencillez, aquel obtenido por Viterbo [Vi]. Exhiben también que si se tienen estimaciones a priori de la forma

$$\frac{1}{c} l(x) \leq |A(x)| \leq c l(x) \quad \text{donde } l(x) := \int_0^T |\dot{x}(t)| dt \quad (\textcircled{a})$$

para toda solución periódica en S_ϵ , $-1 \leq \epsilon \leq 1$ (para la estimación no es necesario probar existencia), entonces S tiene al menos una órbita.

Así Hofer y Zehnder también dan una respuesta a la conjetura de Benci-Rabinowitz quienes en [BR1] habían conjeturado que si tenían cotas a priori del estilo (\textcircled{a}) para toda solución periódica en S entonces debía de existir al menos una órbita en S . En [BR1] se prueba que una hipersuperficie $S = H^{-1}(a)$, con a valor regular, que satisface que

$$\langle p, \frac{\partial}{\partial p} H(x) \rangle > 0 \quad \text{si } p \neq 0$$

donde $x = (p, q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, tiene cotas a priori del estilo (©). Este tipo de hipersuperficies S engloba gran parte de las tratadas hasta ese momento. Posteriormente Benci, Hofer y Rabinowitz [BHR] mejoraron la condición para obtener cotas a priori de la forma ©. El resultado que probaron es el siguiente: supongamos que existen $K \in C^1(U, \mathbf{R})$ con U vecindad compacta de S , y constantes $a, b \geq 0$ con $a + b > 0$ tales que

$$ap \cdot H_p(z) + bq \cdot H_q(z) + \nabla K(z) \cdot J\nabla H(z) > 0$$

para todo $z \in U$. Entonces existen cotas a priori de la forma ©.

El trabajo de Hofer y Zehnder [HZ1] ha tenido varias generalizaciones. Rabinowitz en [Ra3] extendió los resultados de [HZ1] mostrando que existe una estructura más rica de soluciones periódicas de (SH) cerca de S . Mostró que existe una sucesión de hipersuperficies S_{ϵ_m} , con $\epsilon_m \rightarrow 0$, que contienen un número no numerable de órbitas distintas o existe un número no numerable de hipersuperficies S_ϵ con ϵ cercano a cero y tal que contienen cada una al menos una órbita.

En esta dirección Struwe [St1] probó que una de las situaciones que prevé Rabinowitz siempre se da y de manera más general. Struwe encontró que dado un valor regular t_0 del hamiltoniano H existe al menos una órbita en $H^{-1}(t)$ casi para toda t cercano a t_0 , siempre y cuando $H^{-1}(t_0) = S$ sea compacta y conexa.

La cuestión de multiplicidad de órbitas en una hipersuperficie de energía S es difícil y hay pocos resultados de carácter global. Dentro de los resultados existentes fue en [EL] donde Ekeland y Lasry dieron la pauta. En este trabajo de 1980, Ekeland y Lasry muestran que si $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ es una hipersuperficie de energía de clase C^1 , convexa y tiene la propiedad geométrica

$$B_\alpha \subset \mathcal{B}(S) \subset B_\beta$$

para $\alpha, \beta > 0$ constantes adecuadas ($\beta \in (\alpha, \sqrt{2}\alpha)$) entonces S tiene al menos N órbitas, donde $\mathcal{B}(S)$ denota la parte acotada de $\mathbf{R}^{2N} \setminus S$ y $B_r := \{x \in \mathbf{R}^{2N} : |x| \leq r\}$. Para la demostración ellos usan técnicas de análisis convexo. Ambrosetti y Mancini en [AM] dan otra prueba del resultado de [EL], para hipersuperficies estrictamente convexas, permitiendo que el intervalo $(\alpha, \sqrt{2}\alpha)$ sea de la forma $(\alpha, \sqrt{k}\alpha)$, $2 \leq k \leq N$, y garantizando que existen al menos $\lfloor N/(k-1) \rfloor$ órbitas distintas.

Posteriormente en 1985 Berestycki et al. en [BLMR] generalizan los resultados de Ekeland-Lasry y el de [AM], mostrando que para una hipersuperficie S en forma de estrella y de clase C^2 que satisface la condición geométrica

$$\overline{\mathcal{B}(\alpha\xi)} \subset \overline{\mathcal{B}(S)} \subset \overline{\mathcal{B}(\beta\xi)} \quad \text{con } \xi = \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = 1\}, \quad (\text{CG})$$

si $\beta^2/\alpha^2 < 1 + \delta_i$, entonces S tiene al menos i órbitas, $1 \leq i \leq N$, donde $\delta_i(r_1, \dots, r_i, \rho/\alpha)$ y $\rho := \max_{x \in S} d(x + T_x S, 0)$.

Hasta aquí se ha hecho referencia a algunos resultados de carácter global, cabe señalar que existen resultados previos de carácter local. Para referencias a éstos o si se desea ampliar la perspectiva histórica existen dos versiones panorámicas de Rabinowitz una de 1982 [Ra4] y otra de 1993 [Ra5], también se puede consultar [MW]. Ahora se puede consultar [HZ2] si se desea abordar la problemática desde un punto de vista más geométrico.

§1.3 Contenido

Hasta 1993 existían pocos resultados sobre multiplicidad de órbitas en hipersuperficies compactas. Lo último que se había logrado era para hipersuperficies en forma de estrella en [BLMR]. El teorema principal de este trabajo es un resultado de multiplicidad de órbitas para una clase más general de hipersuperficies que la clase de las hipersuperficies que son C^∞ y tienen forma de estrella. Más precisamente tomemos $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie de tipo contacto restringido, ver 1.1.7, que tiene la siguiente propiedad geométrica

$$\mathcal{B}(\alpha\xi) \subset \mathcal{B}(S) \subset \mathcal{B}(\beta\xi) \quad (3)$$

donde ξ es un elipsoide de la forma $\xi := \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = 1\}$, con $0 < r_1, \dots, r_N, \alpha, \beta > 0$, y $\mathcal{B}(S)$ denota la parte acotada de $\mathbf{R}^{2N} \setminus S$.

Además imponemos a S la siguiente hipótesis técnica

- (i) Existe una dilatación simpléctica χ transversal a S con flujo global η_S , i.e. η_S tiene dominio $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2N}$.

Definamos

$$\rho := \min_{x \in S} \{ \text{longitud de la proyección de } \chi(x) \text{ en la dirección ortogonal a } T_x S \} > 0.$$

TEOREMA PRINCIPAL Sea S una hipersuperficie de tipo contacto restringido que tiene la propiedad geométrica (3) y satisface la hipótesis (i). Si α, β cumplen que $\beta^2/\alpha^2 < 1 + \delta$ entonces existen al menos N órbitas contenidas en S , donde $\delta = \delta(r_1, \dots, r_N, \rho/\alpha)$ es una constante (vease 4.3.4).

Tomemos una clase particular de hipersuperficies de tipo contacto restringido que satisfacen (i), la clase de hipersuperficies que son C^∞ y tienen forma de estrella, ver 1.1.4 (aquí la dilatación simpléctica que satisface (i) es $\chi(x) = \frac{1}{2}x$). Para hipersuperficies de clase C^∞ que tienen forma de estrella el teorema principal es precisamente el obtenido en 1985 por Berestycki et al. en [BLMR].

Notemos que hay hipersuperficies de tipo contacto restringido que satisfacen la hipótesis (i) y no tienen forma de estrella, por ejemplo las hipersuperficies para las cuales la dilatación simpléctica $\chi(p, q) = ((1 - \epsilon)p, \epsilon q)$, $\epsilon > 0$, $\epsilon \neq \frac{1}{2}$, es transversal, ver figura 1.

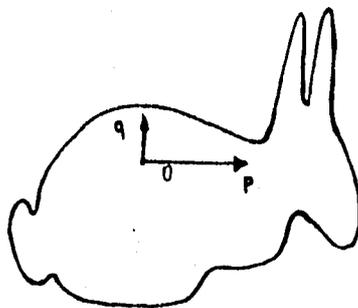


Figura 1.

En el capítulo IV además de probar el teorema principal obtenemos los corolarios de [BLMR], uno es el resultado de Ekeland-Lasry [EL] de 1980 que fue el que dio la pauta a seguir en este tipo de problemas y el otro es el resultado de Ambrosetti-Mancini [AM] de 1982. El teorema principal lo

obtenemos de otro teorema, 4.3.1, que es del estilo del de Hofer-Zehnder [HZ1] y cuya demostración abarca gran parte del capítulo IV.

Dado que usamos métodos variacionales para resolver un problema de ecuaciones diferenciales, vertiente que abrió en 1978 Rabinowitz en [Ra], en el capítulo III planteamos el problema variacional adecuado para nuestro caso, este problema variacional traduce soluciones periódicas de (SH) contenidas en hipersuperficies S_ϵ cercanas a S en puntos críticos de cierta funcional ϕ , para hipersuperficies $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ compactas y de clase C^2 . En este capítulo también probamos que esta funcional ϕ satisface las condiciones para que nuestra teoría de puntos críticos se pueda aplicar. Cabe hacer notar que el resultado más importante del capítulo III tiene como corolarios el resultado de Hofer-Zehnder [HZ1], en una versión un poco más general, y el corolario de éste, el teorema de Viterbo [Vi], en una versión en donde bajamos la clase de la hipersuperficie, de clase C^∞ a clase C^2 .

En el segundo capítulo desarrollamos una teoría de puntos críticos la cual garantiza la existencia de múltiples puntos críticos para ciertas funcionales invariantes bajo la acción de un grupo de Lie compacto G , donde G está sujeto a una hipótesis de no trivialidad, hipótesis que sólo probamos que se satisface para $G = S^1$, pero de hecho la misma prueba nos sirve para $G = \mathbf{Z}_q$, q primo. Además sugerimos como probarla para $G = (\mathbf{Z}_q)^k$, $G = (S^1)^k$, q primo, $k = 1, 2, \dots$. En este capítulo introducimos un índice y un pseudoíndice en el sentido de [Be].

La idea de cómo abordar el resultado de multiplicidad se originó de la lectura de los trabajos de Ekeland y Hofer, [EH1] y [EH2] de 1989 y 1990 respectivamente, sobre capacidades simplécticas. De hecho estos trabajos hacen pensar que el resultado de Berestycki et al puede ser generalizado al menos para hipersuperficies de tipo contacto restringido.

2. TEORÍA DE PUNTOS CRÍTICOS PARA FUNCIONALES CON SIMETRÍAS

En este capítulo definiremos un índice, γ_G , y a partir de él un pseudoíndice, γ_G^Γ , en el sentido de Benci [Be] y probaremos un lema de deformación y un teorema de enlace, los cuales son los resultados más importantes del capítulo, que nos permiten garantizar la existencia de múltiples valores críticos, diferentes y positivos para ciertas funcionales invariantes bajo la acción de un grupo de Lie compacto G . Una de las partes relevantes de nuestra teoría de puntos críticos es el lema de Γ -deformación en cuya formulación se usaron sugerencias del Dr. Jorge Ize, otra parte relevante es la propiedad de no trivialidad del pseudoíndice, γ_G^Γ con $G = S^1$, en cuya demostración se usan ideas de [EH2] y se sigue un guión de M. Clapp.

Es posible emplear otros "índices" en vez del que introducimos en la siguiente sección 2.1. Dado que nuestras aplicaciones sólo son para $G = S^1$ podríamos emplear, para definir el pseudoíndice, el índice de Fadell-Rabinowitz [FR] en vez de γ_{S^1} . Desde nuestro punto de vista γ_{S^1} tiene la ventaja de que a la topología algebraica sólo se remite uno cuando hay que hacer el cálculo específico para algún Z de $\gamma_{S^1}(Z)$, lo cual por lo general se logra aplicando una versión adecuada de Borsuk-Ulam. En cambio el índice de Fadell-Rabinowitz usa la topología algebraica desde la definición misma. Ekeland y Hofer en [EH2] definen un pseudoíndice usando el índice de Fadell-Rabinowitz. El pseudoíndice es usado para tener un teorema de minimax, el cual requiere, para ser probado, de un lema de deformación adecuado. Cabe señalar que en [EH2] el lema de deformación que presentan tiene un error, ya que la deformación obtenida por el flujo no puede ser vista como un elemento del grupo de homeomorfismos equivariantes Γ , grupo que se emplea en la definición del pseudoíndice, como ellos afirman. Por ésto nuestro grupo Γ no es el que ellos manejan. Sobre ésto abundaremos en la sección 3.4, en donde probamos que el lema de deformación de [EH2] es incorrecto.

Con el nivel de generalidad que se usa en este capítulo, G un grupo de Lie compacto, en lugar del pseudoíndice γ_G^Γ se puede emplear la \mathcal{A} -categoría, $\mathcal{A} - cat_X^{\mathcal{F}}(A, B)$ [BC]. Si se usa la \mathcal{A} -categoría el problema a resolver es tener un teorema de minimax (o teorema de enlace) que nos garantice que

la relación entre funcionales

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \quad \text{para todo } x$$

la podemos traducir a una relación entre los valores de la forma *inf sup* obtenidos por el principio de minimax

$$c_{j,\phi_1} \leq c_{j,\phi_2}$$

sin que dejen de ser éstos, valores críticos de las correspondientes funcionales.

§2.1 El índice

En esta sección, para la clase de los G -espacios metrizable, definiremos un índice γ_G el cual tiene las propiedades básicas de monotonía, continuidad y subaditividad. Este índice, $\gamma_G(Z)$, es de hecho igual a $\mathcal{A}\text{-cat}(Z \rightarrow pt)$ donde pt es el espacio que consta de un solo punto y \mathcal{A} es la familia de G -espacios homogéneos, G/H donde H es un subgrupo cerrado de G y $H \neq G$ [CP]. Además si i_p es el \mathbf{Z}_p -índice de Michalek-Tarantello, [MT], tenemos que

$$\gamma_{\mathbf{Z}_p}(Y) \leq i_p(Y),$$

la igualdad se da si p es primo. Esta desigualdad entre los índices se debe a que nosotros en nuestra definición de γ_G estamos tomando la familia de \mathbf{Z}_p -espacios homogéneos \mathbf{Z}_p/H , con H subgrupo propio de \mathbf{Z}_p , y Michalek-Tarantello sólo permiten que $H = \{0\}$.

Las demostraciones de las propiedades de índice son las usuales, pero se dan aquí por completez.

Sea G un grupo de Lie compacto.

Definiciones:

- G -espacio. A un espacio topológico X provisto de una función continua $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$ que satisface $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ para todo $g_1, g_2 \in G$ y para todo $x \in X$, y que $ex = x$ para todo $x \in X$ (donde e es la identidad del grupo G) se le llama un G -espacio.

- **Subconjunto G -invariante, G -órbita.** Un subconjunto Y de un G -espacio X se dice G -invariante si $gy \in Y$ para todo $y \in Y$ y para todo $g \in G$. Dado $x \in X$, $Gx := \{gx : g \in G\}$ es un subconjunto G -invariante al que se le denomina la G -órbita de x .
- **Función G -equivariante o G -función y función G -invariante.** Sean X, Y G -espacios. A una función continua $\varphi : X \rightarrow Y$ se le denomina G -equivariante o G -función si $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ para todo $g \in G$ y para todo $x \in X$. En el caso de que $Y = \mathbf{R}$ y en \mathbf{R} el grupo G actúa trivialmente i.e. $gy = y$ para todo $g \in G$ y para todo $y \in \mathbf{R}$ entonces a una función $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$ G -equivariante ($\varphi(gx) = g\varphi(x) = \varphi(x)$) se le denomina función G -invariante.

Una clase adecuada de G -espacios en donde definir el índice γ_G es la clase consistente de los G -espacios metrizable. Usaremos el hecho de que los G -espacios homogéneos G/H son G -ANR's (G -retractos absolutos de vecindad), es decir, son G -espacios metrizable que tienen la propiedad de que:

- Si Y es un G -espacio metrizable y $A \subset Y$ es un G -subconjunto cerrado de Y , entonces para cada función G -equivariante $\varphi : A \rightarrow X$ existe una extensión G -equivariante $\phi : U \rightarrow X$ a una G -vecindad U de A en Y .

Para una demostración ver [Pa] página 27.

Notemos que la G -órbita Gx es G -homeomorfa a G/H donde H es el subgrupo de isotropía de $x \in X$, $H = \{g \in G : gx = x\}$.

En lo que resta de la sección G será un grupo de Lie compacto y X un G -espacio metrizable, a menos que se especifique lo contrario.

DEFINICION 2.1.1 (El índice γ_G) Definiremos el índice de X , denotado por $\gamma_G(X)$, como el menor número entero k para el cuál existe una cubierta de X

$$X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$$

de subconjuntos U_1, \dots, U_k G -invariantes y abiertos en X , que satisfacen que existen funciones G -equivariantes $\varphi_i : U_i \rightarrow G/H_i$ donde H_i es un subgrupo cerrado de G y $H_i \neq G$, $1 \leq i \leq k$. Si no existe una tal cubierta, definimos $\gamma_G(X) := \infty$. Y $\gamma_G(\emptyset) := 0$.

2.1.2 Ejemplos

Un G -espacio de Banach E sobre $K = \mathbf{R}$ o \mathbf{C} es un espacio de Banach sobre K que es a la vez un G -espacio con la topología inducida por la norma y que además satisface que

$$\text{la acción es lineal} \quad \begin{cases} g(x_1 + x_2) = gx_1 + gx_2 \\ g\lambda x_1 = \lambda gx_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{para todo } g \in G, \lambda \in K, \\ x_1, x_2 \in E \end{array}$$

y

preserva la norma $\|gx\| = \|x\|$ para todo $g \in G$ y para todo $x \in E$.

- (a) Si $G = \mathbf{Z}_2$, $X = E$ es un G -espacio de Banach sobre K ($K = \mathbf{R}$ o \mathbf{C}) entonces γ_G es el género de Krasnoselskii, [St2], i.e. para Y subconjunto no vacío, cerrado y G -invariante de E

$$\gamma_G(Y) = \begin{cases} \min\{n : \text{existe } F \text{ función continua, } F : Y \rightarrow \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \\ \text{impar}\} \\ \infty \text{ si no existe tal } n. \end{cases}$$

- (b) Si $G = \mathbf{Z}_p$ con p primo y $X = E$ es un G -espacio de Banach sobre \mathbf{C} entonces γ_G es el \mathbf{Z}_p -índice de Michalek-Tarantello [MT]. Para definir i_p , el \mathbf{Z}_p -índice, tomaremos en \mathbf{C}^n acciones de \mathbf{Z}_p de la forma

$$[m](c_1, \dots, c_n) = (e^{ik_1 \frac{2\pi}{p} m} c_1, \dots, e^{ik_n \frac{2\pi}{p} m} c_n) \quad [m] \in \mathbf{Z}_p, \quad (4)$$

donde k_1, \dots, k_n son enteros primos relativos a p .

Si $Y \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado y G -invariante de E

$$i_p(Y) := \begin{cases} \min \{n : \text{existe } \phi : Y \rightarrow \mathbf{C}^n \setminus \{0\} \text{ función} \\ \mathbf{Z}_p\text{-equivariante, donde la acción tomada} \\ \text{en } \mathbf{C}^n \text{ es como en (4)}\} \\ \infty \text{ si no existe tal } n, \end{cases} \quad (5)$$

$$i_p(\emptyset) := 0.$$

Probaremos que

$$\gamma_G(Y) = i_p(Y) \quad (6)$$

junto con el siguiente ejemplo.

(c) Tomemos en C^n una acción de la forma

$$\theta(c_1, \dots, c_n) = (\alpha_1^\theta c_1, \dots, \alpha_n^\theta c_n) \quad \text{para todo } \theta \in S^1 \quad (7)$$

donde para $1 \leq j \leq n$, $\alpha_j^\theta \in S^1$ es una función de θ no constante.

Si $G = S^1$, X es un G -espacio metrizable y Y es un subconjunto de X no vacío y G -invariante entonces

$$\gamma_G(Y) = \begin{cases} \min \{n : \text{existe } \phi : Y \rightarrow C^n \setminus \{0\} \text{ } S^1\text{-equivariante} \\ \text{para alguna acción en } C^n \text{ de la forma (7)}\} \\ \infty \quad \text{si no existe tal } n. \end{cases} \quad (8)$$

La prueba de este hecho la daremos posteriormente.

(d) Si $G = S^1$, X es un G -espacio metrizable y Y es un subconjunto de X no vacío y G -invariante entonces

$$\gamma_G(Y) = \begin{cases} \min \{ \dim_C W : \text{existe } \phi : Y \rightarrow W \setminus \{0\} \text{ } S^1\text{-equivariante,} \\ \text{para alguna representación ortogonal } W \text{ de } S^1 \\ \text{sin puntos fijos} \} \\ \infty \quad \text{si no existe tal } n \end{cases}$$

Aclaremos el concepto de representación. Sea W un S^1 -espacio. Podemos visualizar de otra manera la acción de S^1 definiendo

$$T : S^1 \rightarrow C^1(W, W) \quad T_g(x) := gx.$$

T resulta ser continua y satisface que $T_g \circ T_{g'} = T_{gg'}$ para todo $g, g' \in S^1$ y que $T_e = 1_W$ donde e es la identidad del grupo. Si W tiene además estructura de espacio vectorial sobre C podemos pedirle a la acción que "respete" la estructura lineal i.e. que la acción sea lineal

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) &= gx_1 + gx_2 \quad g \in S^1, x_1, x_2 \in W, \\ g(\lambda x) &= \lambda gx \quad g \in S^1, \lambda \in C \text{ y } x \in W, \end{aligned}$$

lo cual en términos de la T significa que T_g es lineal. A una tal T se le denomina representación.

Si además la topología de W proviene de un producto interior \langle , \rangle y pedimos que la acción respete el producto

$$\langle gx_1, gx_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \quad \text{para todo } g \in \mathbf{S}^1, x_1, x_2 \in W,$$

entonces T_g es una isometría para todo $g \in G$, y a la T se le denomina representación ortogonal.

Por ejemplo en $(\mathbf{C}^n, (,))$ (donde $(,)$ es el producto usual en \mathbf{C}^n) una acción del tipo (7) induce una representación ortogonal

$$T_\theta(c_1, \dots, c_n) = (\alpha_1^\theta c_1, \dots, \alpha_n^\theta c_n). \quad (9)$$

Además notemos que si $T_\theta(c_1, \dots, c_n) = (c_1, \dots, c_n)$ para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$ entonces para $(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ tenemos que $\alpha_{j_0}^\theta = 1$ para todo θ y para algún $1 \leq j_0 \leq n$. Como pedimos que $\alpha_{j_0}^\theta \neq cte$ tenemos que $(c_1, \dots, c_n) = 0$. Por tanto 0 es el único punto de \mathbf{C}^n tal que $T_\theta(c) = c$ para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$ i.e. la representación (o la acción) no tiene puntos fijos diferentes de 0 .

Las demostraciones de (b), (c) y (d) se posponen hasta el final de la sección.

Ahora probemos algunas propiedades del índice γ_G .

PROPOSICION 2.1.3 γ_G satisface las siguientes propiedades

(Monotonía) Sean Y_0, Y_1 G -espacios . Si existe una G -función $f : Y_0 \rightarrow Y_1$ entonces $\gamma_G(Y_0) \leq \gamma_G(Y_1)$.

(Continuidad) Si $Y \subset X$ es un subconjunto G -invariante y cerrado en X entonces existe una vecindad U de Y en X , G -invariante tal que

$$\gamma_G(U) = \gamma_G(Y)$$

(Subaditividad) Sean $Y_0, Y_1 \subset X$ subconjuntos G -invariantes y cerrados en X entonces

$$\gamma_G(Y_0 \cup Y_1) \leq \gamma_G(Y_0) + \gamma_G(Y_1).$$

(*) Sea $X^G = \{x \in X : gx = x \text{ para todo } g \in G\}$. Si K es compacto y $K \cap X^G = \emptyset$ entonces

$$\gamma_G(K) < \infty.$$

Además si $\gamma_G(K) = m$ entonces K tiene al menos m G -órbitas diferentes.

(**) Sean $G = \mathbf{S}^1$ y K un subconjunto G -invariante tal que $K \cap X^G = \emptyset$. Si $\gamma_G(K) \geq 2$ entonces K tienen un número infinito de G -órbitas.

Demostración

(Monotonía) Es inmediata de la definición 2.1.1.

(Continuidad) Si $\gamma_G(Y) = \infty$ no hay nada que probar. Supongamos que $\gamma_G(Y) = k$. Tomemos una cubierta de Y como en 2.1.1

$$Y = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k,$$

$\varphi_i : U_i \rightarrow G/H_i$ funciones G -equivariantes $1 \leq i \leq k$.

$U_i = Y \cap V_i'$ con V_i' abierto en X . Como V_i' es metrizable (debido a que X lo es), U_i es un G -subconjunto cerrado en V_i' y G/H_i es un G -ANR entonces φ_i se extiende, a una vecindad V_i de U_i en V_i' , a una G -función $\varphi_i' : V_i \rightarrow G/H_i$.

Por tanto para la vecindad $U = V_1 \cup \dots \cup V_k$ de Y

$$\gamma_G(U) \leq \gamma_G(Y).$$

Además por la monotonía

$$\gamma_G(Y) \leq \gamma_G(U).$$

(Subaditividad) Sean Y_0, Y_1 como en el enunciado. Si $\gamma_G(Y_0) = \infty$ o $\gamma_G(Y_1) = \infty$ no hay nada que probar. Así supongamos que $\gamma_G(Y_0) = k$ y $\gamma_G(Y_1) = l$. Por la propiedad de continuidad existen U , G -vecindad de Y_0 , y V , G -vecindad de Y_1 , tal que

$$\gamma_G(Y_0) = \gamma_G(U) \quad \text{y} \quad \gamma_G(Y_1) = \gamma_G(V).$$

De la definición de γ_G se sigue inmediatamente que

$$\gamma_G(U \cup V) \leq \gamma_G(U) + \gamma_G(V),$$

y usando la monotonía se tiene que

$$\gamma_G(Y_0 \cup Y_1) \leq \gamma_G(Y_0) + \gamma_G(Y_1).$$

(*) Escribamos

$$K = \bigcup_{x \in K} Gx.$$

Tomemos para $x \in K$ el G -homeomorfismo

$$\psi_x : Gx \rightarrow G/H_x, \quad \psi_x(gx) = [g], \quad H_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

Notemos que $H_x \neq G$ para todo $x \in K$ ya que $K \cap X^G = \emptyset$. Como G/H_x es un G -ANR y Gx es un G -subconjunto cerrado de K entonces existe una extensión $\varphi_x : U_x \rightarrow G/H_x$, de ψ_x , a una G -vecindad U_x de Gx en K . Así por ser K compacto

$$K = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i},$$

cubierta que satisface 2.1.1. Por tanto $\gamma_G(K) \leq m < \infty$.

Supongamos que $\gamma_G(K) = m$. Así existen $y_1, \dots, y_m \in K$ tales que

$$y_i \in U_i, \quad y_i \notin \bigcup_{j \neq i} U_j.$$

Usando que los U_i son G -invariantes tenemos que

$$Gy_i \in U_i, \quad Gy_i \notin \bigcup_{j \neq i} U_j$$

Por tanto las m G -órbitas Gy_1, \dots, Gy_m son diferentes.

(**) Supongamos que K consta de un número finito de G -órbitas Gz_1, \dots, Gz_m . Probemos que $\gamma_G(K) = 1$.

Como sabemos la G -órbita Gz_j es G -homeomorfa a G/H_j donde H_j es el subgrupo de isotropía de z_j , $H_j = \{g \in G : gz_j = z_j\}$. Como $K \cap X^G = \emptyset$ entonces $H_j \neq G$. Como además $G = S^1$ y H_j es cerrado entonces $H_j = Z_{l_j}$, p.a. l_j natural. Denotemos este G -homeomorfismo por

$$\varphi_j : G \rightarrow G/Z_{l_j}.$$

Tomemos $l = l_1 l_2 \dots l_m$ y definamos

$$\begin{aligned} \psi_j : G/Z_{l_j} &\rightarrow G/Z_l. \\ [\theta]_{G/Z_{l_j}} &\rightarrow [\theta]_{G/Z_l} \end{aligned}$$

Como $\{e^{(\theta + \frac{k2\pi i}{l})} : 1 \leq k \leq l_j\} \subset \{e^{(\theta + \frac{k2\pi i}{l})} : 1 \leq k \leq l\}$ entonces ψ_j está bien definida y es una G -función. Así tenemos

$$\psi_j \circ \varphi_j : Gz_j \rightarrow G/\mathbf{Z}_l, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Como $K = Gz_1 \cup \dots \cup Gz_m$ es una cubierta abierta en K con abiertos ajenos podemos pegar las G -funciones $\psi_j \circ \varphi_j$ en una G -función $\varphi : K \rightarrow G/\mathbf{Z}_m$.

$$\varphi(x) = \psi_j \circ \varphi_j(x) \quad \text{si } x \in Gz_j.$$

Por tanto $\gamma_G(K) = 1$. ■

Ahora demostremos (b), (c) y (d) de 2.1.2. Para la prueba de (6) y (8) requerimos del siguiente

LEMA 2.1.4 Sean $G = \mathbf{S}^1$ o \mathbf{Z}_p con p primo y $H \neq G$ un subgrupo cerrado de G . Entonces existe $\beta : G/H \rightarrow C \setminus \{0\}$ función G -equivariante donde en C el grupo G actúa de la forma (4) si $G = \mathbf{Z}_p$, o G actúa de la forma (7) si $G = \mathbf{S}^1$.

Demostración de (6) y de (8)

Sea $G = \mathbf{S}^1$ o \mathbf{Z}_p con p primo.

(\geq) Sea Y un subconjunto de X , G -invariante y no vacío. Si $\gamma_G(Y) = \infty$ no hay nada que probar. Supongamos que $\gamma_G(Y) = n$. Sean

$$Y = U_1 \cup \dots \cup U_n$$

y

$$\varphi_j : U_j \rightarrow G/H_j \quad 1 \leq j \leq n,$$

como en 2.1.1.

Tomemos, para $1 \leq j \leq n$,

$$\beta_j : G/H_j \rightarrow C \setminus \{0\}$$

como en 2.1.4. Y en C^n tomemos la acción de G dada por

$$g(c_1, \dots, c_n) := (gc_1, \dots, gc_n)$$

donde en la coordenada j -ésima estamos tomando la acción de G que hace a β_j una función G -equivariante i.e.

$$gc_j := \begin{cases} \alpha_j^\theta c_j & g = \theta \in \mathbf{S}^1 \text{ si } G = \mathbf{S}^1 \\ e^{ik_j \frac{2\pi}{p}} c_j & g = [m] \in \mathbf{Z}_p \text{ si } G = \mathbf{Z}_p, \end{cases}$$

con k_j entero fijo y primo relativo a p . Definamos

$$\phi_j = \beta_j \varphi_j$$

Y tomemos $\{\pi_j : j = 1, \dots, n\}$ una partición de la unidad subordinada a $(U_j)_{j=1}^n$. Entonces

$$\phi : Y \rightarrow C^n, \phi(x) = (\pi_1(x)\phi_1(x), \dots, \pi_n(x)\phi_n(x))$$

satisface:

(i) ϕ es G -equivariante. Esto es debido a que

$$\begin{aligned} \phi(gx) &= (\pi_1(x)\phi_1(gx), \dots, \pi_n(x)\phi_n(gx)) \quad \pi_j \text{ es } G\text{-invariante } 1 \leq j \leq n \\ &= (g\pi_1(x)\phi_1(x), \dots, g\pi_n(x)\phi_n(x)) \quad \phi_j \text{ es } G\text{-equivariante } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

(ii) $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in Y$. Esto es debido a que por ser $\{\pi_j\}_{j=1}^n$ una partición de la unidad subordinada a una cubierta de Y , para cada $x \in Y$ existe $1 \leq j_0 \leq n$ tal que $\pi_{j_0}(x) \neq 0$. Y además $\phi_{j_0}(x) \in C \setminus \{0\}$. Por tanto $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in Y$.

(\leq)

Sea $\phi : Y \rightarrow C^n \setminus \{0\}$ una función G -equivariante como en (5) o (8). Usando la acción particular que estamos tomando de G en C^n obtengamos una cubierta de $C^n \setminus \{0\}$ de subconjuntos G -invariantes y abiertos

$$C^n \setminus \{0\} = V_1 \cup \dots \cup V_n$$

y funciones $\psi_j : V_j \rightarrow G/H_j$, para $1 \leq j \leq n$, que satisfagan 2.1.1.

Notemos que a partir de esta cubierta de $C^n \setminus \{0\}$ obtenemos la cubierta deseada de Y

$$Y = U_1 \cup \dots \cup U_n \quad \text{con}$$

$$U_j = \phi^{-1}(V_j)$$

$$\text{y } \varphi_j : U_j \rightarrow G/H_j, \quad \varphi_j := \psi_j \phi \quad \text{para } 1 \leq j \leq n.$$

Y así habríamos concluido. Exhibamos una tal cubierta de $C^n \setminus \{0\}$.

(i) Caso $G \equiv S^1$. Tomemos $\pi_j : C^n \rightarrow C$, $\pi_j(c) = c_j$, y definamos para $1 \leq j \leq n$

$$V_j = C^n \setminus \pi_j^{-1}(0), \quad \beta_j : V_j \rightarrow S^1, \quad \beta_j(c_1, \dots, c_n) = \frac{c_j}{|c_j|}$$

donde $|c|$ es el valor absoluto usual y $S_j^1 = S^1$. Recordemos que en C^n tenemos una acción de S^1 del tipo (7), por lo que las funciones α_j^θ son homomorfismos de grupo, continuos para $1 \leq j \leq n$. Fijemos j . Hagamos actuar a S^1 en S_j^1 de la siguiente forma

$$\theta z := \alpha_j^\theta z \quad z \in S_j^1. \quad (10)$$

Que ésta es una acción se sigue de que $\alpha_j : S^1 \rightarrow S_j^1$, $\alpha_j(\theta) = \alpha_j^\theta$ es continua y un homomorfismo de grupos. Con esta acción de S^1 en S_j^1 , β_j resulta ser equivariante. Por otra parte por ser α_j una función cerrada (debido a que es continua, S^1 compacto y S_j^1 Hausdorff) y suprayectiva, de la propiedad de la topología cociente tenemos que existe γ_j función continua con inversa continua tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\alpha_j} & S_j^1 \\ \delta_j \searrow & & \nearrow \beta_j \\ & S^1/H_j & \end{array}$$

donde δ_j es la proyección canónica y porque $\alpha_j(\theta) \neq \text{cte}$ $G \neq H_j := (\alpha_j)^{-1}(1)$. Tomando en S^1 la acción usual sobre sí mismo, en S^1/H_j la acción usual de S^1 pasada al cociente y en S_j^1 la acción de S^1 descrita anteriormente, tenemos que δ_j y α_j son S^1 -equivariantes y por tanto γ_j también lo es.

Por tanto la cubierta

$$C^n \setminus \{0\} = V_1 \cup \dots \cup V_n,$$

con las funciones $\psi_j : V_j \rightarrow S^1/H_j$, $\psi_j = \gamma_j^{-1} \beta_j$, satisfacen 2.1.1.

(ii) Caso $G = \mathbb{Z}_p$. Tomemos $\pi_j : C^n \rightarrow C$, $\pi_j(c) = c_j$ y definamos para $1 \leq j \leq n$

$$V_j = C^n \setminus \pi_j^{-1}(0), \quad \beta_j : V_j \rightarrow S^1, \quad \beta_j(c_1, \dots, c_n) = \frac{c_j}{|c_j|}.$$

Fijemos $1 \leq j \leq n$. Si hacemos actuar a \mathbb{Z}_p en S^1 mediante

$$[m]z = e^{ik, \frac{2\pi}{p}m} z \quad (11)$$

β_j resulta ser \mathbf{Z}_p -equivariante. Ahora tomemos en \mathbf{S}^1 la relación de equivalencia dada por

$$\theta \sim \theta' \quad \text{si y solo si} \quad \frac{m}{p} \leq \theta, \theta' < \frac{(m+1)}{p} \quad \text{para algún } m \in \mathbf{Z}.$$

La proyección canónica $\delta_j : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1 / \sim$ y $\gamma_j : \mathbf{S}^1 / \sim \rightarrow \mathbf{Z}_p$, $\gamma_j([e^{i\frac{2\pi}{p}m}]) = [\frac{m}{p}]$ son funciones \mathbf{Z}_p -equivariantes, donde la acción de \mathbf{Z}_p en \mathbf{S}^1 es (11), la acción de \mathbf{Z}_p en \mathbf{S}^1 / \sim es la acción anterior pasada al cociente y la acción de \mathbf{Z}_p en \mathbf{Z}_p es $g[m_1] = [k_j m + m_1]$, $g = [m] \in \mathbf{Z}_p$.

Por tanto la cubierta

$$\mathbf{C}^n \setminus \{0\} = V_1 \cup \dots \cup V_n$$

con las funciones $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbf{Z}_p$, $\psi_j = \gamma_j \delta_j \beta_j$, para $1 \leq j \leq n$ satisfacen 2.1.1. ■

Demostración de 2.1.4

(i) Sea $G = \mathbf{Z}_p$ con p primo. Entonces el único subgrupo propio de \mathbf{Z}_p es $H = \{0\}$. Ahora tomemos en \mathbf{C} la acción de \mathbf{Z}_p dada por

$$[m]z = e^{i\frac{2\pi}{p}m} z$$

y definamos

$$\beta : \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad \beta([m]) = e^{i\frac{2\pi}{p}m}.$$

La cual es la función \mathbf{Z}_p -equivariante que queremos.

(ii) Sea $G = \mathbf{S}^1$. Sea $H \neq G$ un subgrupo cerrado de G . Como H es un subgrupo cerrado de \mathbf{S}^1 entonces H es un \mathbf{Z}_l . Definamos $\alpha : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$ $\alpha(e^{2\pi i \theta}) = e^{2\pi i l \theta}$ la cual es continua, sobre y abierta. Por la propiedad de la topología cociente existe β homeomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C} \setminus \{0\} \\ \searrow \delta & & \nearrow \beta \\ & \mathbf{S}^1 / H & \end{array}$$

con δ la proyección canónica. Si tomamos en \mathbf{S}^1 la acción sobre si mismo dada por

$$\theta z = e^{2\pi i l \theta} z$$

β se convierte en un S^1 -homeomorfismo, ya que si $[z] \in S^1/Z_1$, $z = e^{2\pi i\tau}$, y $e^{2\pi i\theta} \in G = S^1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\beta(e^{2\pi i\theta}[z]) &= \beta([e^{2\pi i\theta} e^{2\pi i\tau}]) \\ &= e^{2\pi i\theta(\theta+\tau)} \quad \text{por definición de } \beta \\ &=: \theta\beta([z]).\end{aligned}$$

Así β es la función S^1 -equivariante que requeríamos. ■

En lo siguiente se da una prueba usando algebra lineal de algo que es material estandar de teoría de representaciones ver por ejemplo [BD] § 2.8.

Demostración de (d)

(\geq) Sea $Y \subset X$ no vacío, G -invariante con $\gamma_G(Y) = n < \infty$. Por (8) existe

$$\phi : Y \rightarrow C^n \setminus \{0\} \quad S^1\text{-equivariante,}$$

en donde en C^n la acción de S^1 es de la forma (7). Por (9) esta acción se traduce en una representación ortogonal sin puntos fijos.

(\leq) Sea $(W, \langle, \rangle), \{T_\theta\}_{\theta \in S^1}$ una representación ortogonal de S^1 , sin puntos fijos diferentes de 0, para la cual existe $\phi : Y \rightarrow W \setminus \{0\}$ función S^1 -equivariante, $\dim_C W = n < \infty$. A partir de esta representación W produzcamos una en C^n , que sea de la forma (9), para la cual exista

$$\zeta : (W, \langle, \rangle) \rightarrow (C^n, (,))$$

función S^1 -equivariante, con $\zeta^{-1}(0) = \{0\}$. Notemos que de aquí se sigue que la función

$$\zeta\phi : Y \rightarrow C^n \setminus \{0\}$$

es S^1 -equivariante, donde en C^n tomamos la acción inducida por la representación, acción que resulta ser de la forma (7). Y así por (8) tendríamos la desigualdad deseada.

Produzcamos la representación ortogonal en C^n . Esto se puede hacer como lo hacen Mawhin y Willen [MW] usando ecuaciones diferenciales. Nosotros lo hacemos de otra forma usando la herramienta "dual", algebra lineal.

Como la $\dim_C W = n$ entonces podemos tomar $\bar{\zeta} : W \rightarrow C^n$ isomorfismo (transformación lineal biyectiva), e inducir en C^n un producto interior complejo (o producto hermitiano)

$$((c, d)) := \langle \bar{\zeta}^{-1}(c), \bar{\zeta}^{-1}(d) \rangle \quad c, d \in C^n$$

respecto al cual $\tilde{\zeta}$ se convierte en una transformación lineal que preserva el producto interior. A partir de $\tilde{\zeta}$ inducimos en \mathbf{C}^n una representación ortogonal $\{\bar{R}_\theta\}_{\theta \in \mathbf{S}^1}$ tal que

$$\tilde{\zeta} T_\theta = \bar{R}_\theta \tilde{\zeta} \quad \text{para todo } \theta \in \mathbf{S}^1. \quad (12)$$

Notemos que (12) nos dice que $\tilde{\zeta}$ es \mathbf{S}^1 -equivariante. Como \bar{R}_θ preserva el producto interior $((,))$ en \mathbf{C}^n , ya que por (12) es composición de funciones que preservan el producto interior, entonces

$$((\bar{R}_\theta(c), d)) = ((c, \bar{R}_{-\theta}(d))) \quad \text{para todo } c, d \in \mathbf{C}^n.$$

De donde se sigue que $\bar{R}_\theta^* = \bar{R}_{-\theta}$ y por lo tanto $\bar{R}_\theta \bar{R}_\theta^* = \bar{R}_\theta^* \bar{R}_\theta$ para todo θ donde $*$ denota el adjunto. Así \bar{R}_θ es unitario y por tanto puede ser diagonalizado ([HK] página 313). Pero además porque $\bar{R}_\theta \bar{R}_{\theta'} = \bar{R}_{\theta'} \bar{R}_\theta$ para todo $\theta, \theta' \in \mathbf{S}^1$, podemos diagonalizar simultáneamente a $\{\bar{R}_\theta\}_{\theta \in \mathbf{S}^1}$ ([HK] página 206), i.e. podemos encontrar una base $\{v_i\}_{i=1}^n$ de \mathbf{C}^n tal que

$$\bar{R}_\theta(c_1, \dots, c_n) = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1^\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n^\theta \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{para todo } \theta \in \mathbf{S}^1$$

donde A es la matriz de cambio de base, de la base canónica a la base $\{v_i\}_{i=1}^n$, y el exponente en α_i^θ es un supraíndice.

Así mediante el cambio de base $\tilde{\zeta} : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$, $\tilde{\zeta}(x) = (c_1, \dots, c_n)$ si $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, cuya matriz es A , inducimos una representación ortogonal $\{R_\theta\}_{\theta \in \mathbf{S}^1}$ en (\mathbf{C}^n, \ll, \gg) como se hizo anteriormente

$$R_\theta := \tilde{\zeta} \bar{R}_\theta \tilde{\zeta}^{-1}, \\ R_\theta(c_1, \dots, c_n) = (\alpha_1^\theta c_1, \dots, \alpha_n^\theta c_n) \quad , \quad \ll c, d \gg := (\tilde{\zeta}^{-1}(c), \tilde{\zeta}^{-1}(d)).$$

Por la forma en que se definió el producto interior \ll, \gg , $\tilde{\zeta}$ preserva productos, en particular es continua, y además satisface que $\tilde{\zeta} \bar{R}_\theta = R_\theta \tilde{\zeta}$, así $\tilde{\zeta}$ es \mathbf{S}^1 -equivariante.

Así la función \mathbf{S}^1 -equivariante que requerimos es

$$\zeta = Id \tilde{\zeta} \tilde{\zeta}$$

donde $Id : (C^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (C^n, (,))$ es la identidad y en ambos lados tenemos la acción inducida por $\{R_\theta\}_{\theta \in S^1}$ en C^n

$$\theta c := R_\theta(c) = (\alpha_1^\theta c_1, \dots, \alpha_n^\theta c_n). \blacksquare$$

§2.2 Pseudoíndice

En esta sección usando el índice γ_G definimos una teoría de pseudoíndice en el sentido de Benci [Be].

Comencemos definiendo el concepto de un G -espacio de Hilbert. E es un G -espacio de Hilbert si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert sobre C que es además un G -espacio en donde la acción satisface:

(es lineal) $g(x+y) = gx + gy$, $g\lambda x = \lambda gx$ para todo $g \in G$ para todo $x, y \in E$ y para todo $\lambda \in C$.

(preserva el producto interior) $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $g \in G$ y para todo $x, y \in E$.

A esta estructura la podemos reinterpretar de forma equivalente de la siguiente manera, a la cual nos referiremos como una representación ortogonal T del espacio de Hilbert E ,

$$T : G \rightarrow L(E, E) := \{L : E \rightarrow E : L \text{ es lineal y continua}\},$$

en donde T es un homomorfismo de grupos, continuo y tal que $T(g)$ preserva el producto interior para todo $g \in G$. En $L(E, E)$ se toma como operación la composición.

Dado el G -espacio de Hilbert la representación ortogonal asociada es $T(g)(x) = gx$.

Tomemos un G -espacio de Hilbert E tal que E es separable, y el conjunto de puntos fijos $E^G := \{x \in E : gx = x \text{ para todo } g \in G\}$, tiene dimensión finita. Fijemos una descomposición de E como suma directa de subespacios vectoriales, G -invariantes y ortogonales

$$E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$$

donde $E^0 = E^G$. Y sean $P^-(x) = x^-$, $P^0(x) = x^0$ y $P^+(x) = x^+$ las proyecciones ortogonales correspondientes.

Y fijemos un subespacio vectorial F de E^+ G -invariante y de dimensión finita.

DEFINICION 2.2.1 (El grupo $\Gamma \equiv \Gamma(F)$) Una G -función $h : E \rightarrow E$ continua con inversa continua está en Γ si es de la forma

$$h(x^+ + x^0 + x^-) = e^{\psi^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi^-(x)}x^- + K(x)$$

y ψ^+ , ψ^- y K tienen las siguientes propiedades

- (i) ψ^+ , $\psi^- : E \rightarrow \mathbf{R}$ son continuas, G -invariantes y mandan conjuntos acotados en conjuntos acotados. Además $\psi^+(x) = \psi^-(x) = 0$ para todo $x \in E^0$.
- (ii) $K : E \rightarrow E$ es una función continua, compacta (i.e. manda conjuntos acotados en conjuntos con cerradura compacta) y G -equivariante con $K(x^0) = 0$ para todo $x^0 \in E^0$.

(iii) Existe $\rho > 0$ tal que

$$\psi^+(x) = \psi^-(x) = 0 \quad \text{y} \quad K(x) = 0 \quad \text{si } x \in E^- \oplus E^0 \oplus F \text{ y } \|x\| \geq \rho. \quad (13)$$

LEMA 2.2.2 Γ es un grupo.

Demostración

(a) La identidad está en Γ . Si tomamos $\psi^+(x) = \psi^-(x) = 0$ y $K(x) = 0$ para todo $x \in E$ entonces ψ^+ , ψ^- y K satisfacen (i),(ii) e (iii). Así

$$x = e^{\psi^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi^-(x)}x^- + K(x)$$

(b) Probemos que Γ es cerrado bajo la composición de funciones. Sean $h_1, h_2 \in \Gamma$,

$$h_1(x) = e^{\psi_1^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi_1^-(x)}x^- + K_1(x)$$

y

$$h_2(x) = e^{\psi_2^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi_2^-(x)}x^- + K_2(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 h_2 \circ h_1(x) &= h_2(e^{\psi_1^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi_1^-(x)}x^- + K_1(x)) \\
 &= e^{\psi_2^+(h_1(x))}(e^{\psi_1^+(x)}x^+ + P^+K_1(x)) + x^0 + P^0K_1(x) + \\
 &\quad e^{\psi_2^-(h_1(x))}(e^{\psi_1^-(x)}x^- + P^-K_1(x)) + K_2(h_1(x)) \\
 &= e^{\psi_2^+(h_1(x))+\psi_1^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi_2^-(h_1(x))+\psi_1^-(x)}x^- + (e^{\psi_2^+(h_1(x))}P^+K_1(x) \\
 &\quad + P^0K_1(x) + e^{\psi_2^-(h_1(x))}P^-K_1(x)) + K_2(h_1(x)). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned}
 \psi^+(x) &= \psi_2^+(h_1(x)) + \psi_1^+(x), \\
 \psi^-(x) &= \psi_2^-(h_1(x)) + \psi_1^-(x), \\
 K(x) &= (e^{\psi_2^+(h_1(x))}P^+K_1(x) + P^0K_1(x) + e^{\psi_2^-(h_1(x))}P^-K_1(x)) + K_2(h_1(x)).
 \end{aligned}$$

tenemos que $h_2 \circ h_1$ tiene la expresión que se requiere para que pertenezca a Γ . Restaría checar que ψ^+ , ψ^- y K satisfacen (i),(ii) e (iii).

Que ψ^+ y ψ^- satisfacen (i) es claro.

Veamos que K satisface (ii). Porque en la definición de K intervienen sólo funciones continuas y G -equivariantes entonces K es continua y G -equivariante. Veamos que K es compacto. Observemos que debido a las propiedades de los elementos $h \in \Gamma$, ver 2.2.1 (i) e (ii), h manda acotados en acotados. Ahora notemos que si $P_1, P_2 : E \rightarrow E$ son compactos, $Q : E \rightarrow E$ es continuo y $\psi : E \rightarrow \mathbf{R}$ lleva acotados en acotados entonces

$$\begin{aligned}
 P_1 \circ Q, \quad Q \circ P_1 &\quad \text{son compactos,} \\
 P_1 + P_2 &\quad \text{es compacto,} \\
 (e^\psi P_1)(x) &\quad \text{es compacto.}
 \end{aligned}$$

Así K es compacto.

Ahora tomando $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ donde $\rho_1 > 0$ es el real que satisface (iii) para h_1 y $\rho_2 > 0$ es el real que satisface (iii) para h_2 tenemos que ρ satisface (iii) para $h_2 \circ h_1$.

(c) Veamos que existen inversos. Sea $h_1 \in \Gamma$.

$$h_1(x) = e^{\psi_1^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi_1^-(x)}x^- + K_1(x)$$

Definamos

$$h_2(x) = e^{\psi_2^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi_2^-(x)}x^- + K_2(x),$$

con

$$\psi_2^+(x) := -\psi_1^+(h_1^{-1}(x))$$

$$\psi_2^-(x) := -\psi_1^-(h_1^{-1}(x))$$

y

$$K_2(x) := -(e^{-\psi_1^+(h_1^{-1}(x))}P^+K_1h_1^{-1}(x) + P^0K_1h_1^{-1}(x) + e^{-\psi_1^-(h_1^{-1}(x))}P^-K_1h_1^{-1}(x)).$$

De (14) es claro que

$$h_2 \circ h_1 = \text{Id} = h_1 \circ h_2. \blacksquare$$

Ahora definamos el pseudoíndice γ_G^F

DEFINICION 2.2.3 (El pseudoíndice γ_G^F) Sea Z un subconjunto G -invariante de E . Definimos el pseudoíndice de Z

$$\gamma_G^F(Z) = \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(h(Z) \cap S^+)$$

donde $S^+ = \{x \in E^+ : \|x\| = 1\}$.

PROPOSICION 2.2.4 (Propiedades de γ_G^F) Sean Z, Z_1 y Z_2 subconjuntos de E cerrados y G -invariantes .

(Γ -Monotonía) Si existe $h_0 \in \Gamma$ con $h_0(Z_1) \subset Z_2$ entonces

$$\gamma_G^F(h_0(Z_1)) = \gamma_G^F(Z_1) \leq \gamma_G^F(Z_2)$$

(Subaditividad mixta)

$$\gamma_G^F(Z_1 \cup Z_2) \leq \gamma_G^F(Z_1) + \gamma_G^F(Z_2)$$

($\gamma_G^F(Z)$ es independiente del radio de la esfera en E^+ .) Tomemos $\rho_0 > 0$ y $S_{\rho_0}^+ = \{x \in E^+ : \|x\| = \rho_0\}$. Sea Z un subconjunto G -invariante entonces

$$\gamma_G^F(Z) = \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(h(Z) \cap S_{\rho_0}^+).$$

(Comparación) Para todo $\rho_0 > 0$

$$\gamma_G^\Gamma(Z) \leq \gamma_G(Z \cap S_{\rho_0}^+) \leq \gamma_G(Z)$$

Demostración (Γ -Monotonía)

$$\begin{aligned} \gamma_G^\Gamma(Z_1) &= \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(hh_0(Z_1) \cap S^+) \quad \text{porque } \Gamma \text{ es un grupo} \\ &\leq \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(h(Z_2) \cap S^+) \quad \text{por la monotonía de } \gamma_G \\ &= \gamma_G^\Gamma(Z_2). \end{aligned}$$

(Subaditividad mixta) Sean Z_1 y Z_2 como en el enunciado. Calculemos

$$\begin{aligned} \gamma_G^\Gamma(Z_1 \cup Z_2) &= \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(h(Z_1 \cup Z_2) \cap S^+) \\ &\leq \inf_{h \in \Gamma} \{ \gamma_G(h(Z_1) \cap S^+) + \gamma_G(h(Z_2) \cap S^+) \} \quad \text{por la subaditi-} \\ &\quad \text{vidad de } \gamma_G \text{ y porque } h \text{ es } G\text{-homeomorfismo} \\ &\leq \inf_{h \in \Gamma} \{ \gamma_G(h(Z_1) \cap S^+) + \gamma_G(h(Z_2)) \} \quad \text{monotonía de } \gamma_G \\ &= \inf_{h \in \Gamma} \{ \gamma_G(h(Z_1) \cap S^+) + \gamma_G(Z_2) \} \quad \text{por la monotonía de } \gamma_G \\ &\quad \text{y porque } h \text{ es } G\text{-homeomorfismo} \\ &\leq \gamma_G^\Gamma(Z_1) + \gamma_G(Z_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

($\gamma_G^\Gamma(Z)$ es independiente del radio de la esfera en E^+ .) Definamos $h_0 : E \rightarrow E$ por

$$h_0(x) = e^{\psi^+(x)}x^+ + x^0 + e^{\psi^-(x)}x^- + K(x),$$

con

$$\begin{aligned} \psi^-(x) &= 0 \quad \text{para todo } x \in E, \\ \psi^+(x) &= \ln \rho_0 \quad \text{para todo } x \in E, \\ K(x) &= 0 \quad \text{para todo } x \in E. \end{aligned}$$

Es claro que $h \in \Gamma$ y satisface que

$$h_0(S^+) = S_{\rho_0}^+. \quad (15)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(h(Z) \cap S_{\rho_0}^+) &= \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(Z \cap h^{-1}(S_{\rho_0}^+)) \text{ por la monotonía de } \gamma_G \\ &= \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(Z \cap h^{-1}h_0^{-1}(S_{\rho_0}^+)) \text{ porque } \Gamma \text{ es un grupo} \\ &= \inf_{h \in \Gamma} \gamma_G(h(Z) \cap S^+), \end{aligned}$$

estó último por (15) y nuevamente por la monotonía de γ_G .

(Comparación) La primera desigualdad es debida a la propiedad anterior y a que la identidad está en Γ (porque Γ es un grupo), y la segunda desigualdad es debida a la momotonía de γ_G . ■

La siguiente proposición será empleada en la prueba de la no trivialidad de γ_G^Γ , para $G = S^1$, teorema 2.2.8.

Sea

$$E_1^- \subset E_2^- \subset \dots \subset E_k^- \subset \dots \subset E^- \quad (16)$$

una sucesión de subespacios G -invariantes de E^- de dimensión finita cuya union es densa en E^- .

Sean $F \subset E$ un subespacio vectorial G -invariante,

$$E_k := E_k^- \oplus E^0 \oplus E^+$$

y $Q_k : E \rightarrow E_k$ la proyección ortogonal.

Notemos que la proyección ortogonal $Q_k : E \rightarrow E_k$ satisface que

$$Q_k(x) \rightarrow x \quad \text{para todo } x \in E \quad (17)$$

ésto es debido a que los subespacios tomados en las sucesión correspondiente a E^- son cerrados en E y tienen union densa en E^- .

Una consecuencia de (17) es que si $x_k \rightarrow x_\infty$ entonces

$$Q_k(h(x_k)) \rightarrow h(x_\infty) \quad \text{para todo } h \in \Gamma, \quad (18)$$

demostración Sea $\epsilon > 0$, entonces existen K_1, K_2 tales que

$$\begin{aligned} \|Q_k h(x_\infty) - h(x_\infty)\| &< \epsilon/2 \quad \text{si } k \geq K_1 \\ \|h(x_\infty) - h(x_k)\| &< \epsilon/2 \quad \text{si } k \geq K_2. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|h(x_\infty) - Q_k(h(x_k))\| &\leq \|h(x_\infty) - Q_k(h(x_\infty))\| + \|Q_k\| \|h(x_\infty) - h(x_k)\| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \text{para } k \geq \max\{K_1, K_2\}, \end{aligned}$$

la última desigualdad se debe a que $\|Q_k\| = 1$ por ser Q_k una proyección ortogonal. Por tanto

$$Q_k(h(x_k)) \rightarrow h(x_\infty) \quad \text{para todo } h \in \Gamma. \blacksquare$$

Sea $h \in \Gamma$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$h_k : E_k^- \oplus E^0 \oplus F \rightarrow E_k^- \oplus E^0 \oplus E^+ \quad (19)$$

$$h_k(x) = Q_k h(x).$$

PROPOSICION 2.2.5 Para cada $h \in \Gamma$ y para k suficientemente grande

$$\gamma_G(h_k^{-1}(S^+)) \leq \gamma_G(h(E^- \oplus E^0 \oplus F) \cap S^+).$$

Demostración

Por la propiedad de continuidad de γ_G podemos encontrar una G -vecindad abierta, U , de $h(E^- \oplus E^0 \oplus F) \cap S^+$ tal que $\gamma_G(h(E^- \oplus E^0 \oplus F) \cap S^+) = \gamma_G(U)$.

Si probamos que

$$h_k^{-1}(S^+) \subset U \quad \text{para } k \gg 0 \quad (20)$$

entonces por la propiedad de monotonía de γ_G tenemos que

$$\gamma_G(h_k^{-1}(S^+)) \leq \gamma_G(h(E^- \oplus E^0 \oplus F) \cap S^+) \quad \text{para } k \gg 0$$

Y habríamos concluido la demostración.

Para probar (20) procedamos por reducción al absurdo, supongamos que existe $h \in \Gamma$ tal que

$$h_k^{-1}(S^+) \not\subset U \quad \text{para una infinidad de } k\text{'s.}$$

Entonces existe una sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\begin{aligned} x_k &\in E_k^- \oplus E^0 \oplus F \\ h_k(x_k) &\in S^+ \end{aligned} \quad (21)$$

$$h_k(x_k) \notin U. \quad (22)$$

Notemos que de (21), de la forma particular de h y de que $x_k^- = Q_k P^-(x_k) = P^- Q_k(x_k)$ y $x^0 = Q_k P^0(x_k) = P^0 Q_k(x_k)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|e^{\psi^+(x_k)} x_k^+ + P^+ Q_k K(x_k)\| &= 1, \\ e^{\psi^-(x_k)} x_k^- + P^- Q_k K(x_k) &= 0 \end{aligned}$$

y

$$x_k^0 + P^0 Q_k K(x_k) = 0$$

De donde se sigue, usando 2.2.1 (iii), que $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ está acotada. Y así usando las propiedades de ψ^+ , ψ^- y K tenemos que $(\psi^+(x_k))_{k=1}^{\infty}$, $(\psi^-(x_k))_{k=1}^{\infty}$ y $(K(x_k))_{k=1}^{\infty}$ tienen una subsucesión convergente, digamos ellas mismas. Por tanto $(x_k^+)_{k=1}^{\infty}$ está acotada, $x_k^- \rightarrow x^-$ en E^- y $x_k^0 \rightarrow x^0$ en E^0 . Como además $\dim_{\mathbb{C}} F < \infty$ entonces $x_k^+ \rightarrow x^+$ en F . Por tanto existe $x_{\infty} \in E^- \oplus E^0 \oplus F$ tal que $x_k \rightarrow x_{\infty}$.

Tomando el límite en (21) y (22) tenemos

$$h(x_{\infty}) \in S^+ \quad \text{por (18)}$$

$$h(x_{\infty}) \notin U \quad \text{por (18),}$$

lo cual es una contradicción al hecho de que U es una vecindad de $h(E^- \oplus E^0 \oplus F) \cap S^+$. Por tanto

$$h_k^{-1}(S^+) \subset U \quad \text{para } k \gg 0. \quad \blacksquare$$

Hasta aquí hemos considerado que G es un grupo de Lie compacto. Lo que resta es probar la no trivialidad de γ_G^r la cual con esta generalidad sería consecuencia de un teorema de Borsuk-Ulam [BC], pero nos restringiremos a el caso en que $G = S^1$ y usaremos el siguiente teorema de Borsuk-Ulam, para S^1 , que no demostraremos aquí. Para la versión clásica del teorema de Borsuk-Ulam ($G = \mathbb{Z}_2$) se puede consultar [Sp] y para la misma versión

del teorema ($V^G = 0 = W^G$) pero con $G = (\mathbb{Z}_q)^k$ o $G = (S^1)^k$, q primo, $k = 1, 2, \dots$, se puede consultar [Ba]. Para la versión que usaremos nosotros se puede ver [BC].

TEOREMA 2.2.6 (Teorema de Borsuk-Ulam) Sean V y W representaciones de S^1 , $\mathcal{O} \subset V$ una vecindad acotada del origen y $f : \partial\mathcal{O} \rightarrow W \setminus \{0\}$ una función S^1 -equivariante tal que $f|_{\mathcal{O}^{S^1}} : \partial\mathcal{O}^{S^1} \rightarrow SW^{S^1}$ es la identidad. Entonces $\dim W \geq \dim V$.

TEOREMA 2.2.7 $\gamma_{S^1}(h_k^{-1}(S^+)) \geq \dim_{\mathbb{C}} F$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración

Sea h_k como en (19). Sea $\mathcal{O} := \{x \in E_k^- \oplus E^0 \oplus F : \|h_k(x)\| < 1\}$. \mathcal{O} es una vecindad abierta del origen en $E_k^- \oplus E^0 \oplus F$. Además es acotada, por 2.2.1 (iii).

Sea U_1 vecindad de $h_k^{-1}(S^+)$ tal que $\gamma_{S^1}(h_k^{-1}(S^+)) = \gamma_{S^1}(U_1) = n$ y que tenga la propiedad adicional de que $U_1 \cap SE^0 = \emptyset$ (ésto se logra intersectando U_1 con $N_\delta(h_k^{-1}(S^+)) := \{x \in E_k^- \oplus E^0 \oplus F : d(x, h_k^{-1}(S^+)) < \delta\}$ donde $\delta = \frac{1}{2}d(h_k^{-1}(S^+), SE^0) > 0$).

Por 2.1.2 (c) existe una función S^1 -equivariante $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ para alguna acción de S^1 en \mathbb{C}^n sin puntos fijos. Sea $U_2 = \partial\mathcal{O} \setminus h_k^{-1}(S^+)$. Notemos que

$$\begin{aligned} x \in \partial\mathcal{O} &= \partial h_k^{-1}(\{x \in E_k^- \oplus E^0 \oplus F : \|h_k(x)\| < 1\}) \\ \Rightarrow h_k(x) &\in S(E_k^- \oplus E^0 \oplus F) \quad \text{debido a que } h_k \text{ es abierto.} \end{aligned}$$

De ésto se desprende que $h_k(U_2)$ está contenido en el complemento de E^+ y así podemos proyectarlo sobre $E_k^- \oplus E^0$ obteniendo una función $\varphi_2 : U_2 \rightarrow (E_k^- \oplus E^0) \setminus \{0\}$ que es la identidad en los puntos fijos (ya que h_k lo es). Pegando φ_1 y φ_2 mediante una partición de la unidad S^1 -invariante subordinada a $\{U_1, U_2\}$ obtenemos una función

$$\partial\mathcal{O} \rightarrow (E_k^- \oplus E^0 \oplus \mathbb{C}^n) \setminus \{0\}$$

S^1 -equivariante que es la identidad en los puntos fijos. El teorema de Borsuk-Ulam implica que $n \geq \dim_{\mathbb{C}} F$. ■

Como corolario de 2.2.5 y 2.2.7 tenemos el siguiente importante

TEOREMA 2.2.8 (*No trivialidad de $\gamma_{S^1}^\Gamma$*) Si $F \subset E$ es un subespacio vectorial G -invariante entonces

$$\gamma_{S^1}^\Gamma(E^- \oplus E^0 \oplus F) = \dim_{\mathbb{C}} F,$$

donde F es un subespacio de E^+ de dimensión finita y G -invariante, en base al cual se define $\gamma_{S^1}^\Gamma$, ver 2.2.1 (iii).

Demostración

Debido a 2.2.5 y 2.2.7 sólo es necesario probar que

$$\gamma_{S^1}^\Gamma(E^- \oplus E^0 \oplus F) \leq \dim_{\mathbb{C}} F.$$

Ahora por la propiedad de comparación de $\gamma_{S^1}^\Gamma$,

$$\gamma_{S^1}^\Gamma(E^- \oplus E^0 \oplus F) \leq \gamma_{S^1}^\Gamma(SF)$$

donde $SF = \{x \in F : \|x\| = 1\}$ es la esfera unitaria en F . De 2.1.2 (d) se sigue que $\gamma_{S^1}^\Gamma(SF) \leq \dim_{\mathbb{C}} F$ ■

Observaciones:

Nos restringimos al grupo $G = S^1$ debido a que para nuestras aplicaciones sólo usamos funcionales invariantes bajo una acción de S^1 . Pero notemos que el material desarrollado hasta aquí, nos permite probar que $\gamma_{\mathbb{Z}_q}^\Gamma$ satisface la propiedad de no trivialidad, para q primo. La demostración de 2.2.8 sería tal cual, ya que 2.2.5 se probó en general para un grupo de Lie compacto y 2.2.7 sólo requiere de la versión para \mathbb{Z}_q del teorema de Borsuk-Ulam que usamos para S^1 , para lo cual se puede usar el anteriormente citado teorema de [BC]. Y 2.1.2 (d) se obtiene de manera análoga para \mathbb{Z}_q .

Para otros grupos como toros $(S^1)^k$ o $(\mathbb{Z}_q)^k$ con q primo, $k = 1, 2, \dots$, la no trivialidad puede ser probada de manera análoga usando 2.2.5 y la versión general de Borsuk-Ulam de [BC], y en el resto del argumento usar resultados de teoría de representaciones, ver [BD] 2.8.

§2.3 Teoría de puntos críticos.

Sea E un G -espacio de Hilbert y tomemos la descomposición de E como suma directa de subespacios vectoriales, G -invariantes y ortogonales

$$E^- \oplus E^0 \oplus E^+.$$

Y como se hizo en la sección anterior fijemos F un subespacio vectorial de E^+ , G -invariante y de dimensión finita, en base al cual se define Γ .

Sea $\phi : E \rightarrow \mathbf{R}$ G -invariante y diferenciable.

DEFINICION 2.3.1 (Γ -D) ϕ satisface la propiedad de Γ -deformación para $c \in \mathbf{R}$ si

- (a) K_c es compacto, donde $K_c = \{x \in E : \nabla\phi(x) = 0 \text{ y } \phi(x) = c\}$.
- (b) Para toda vecindad G -invariante U de K_c existen $\epsilon > 0$ y $h \in \Gamma$ tales que

$$h(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi^{\leq c-\epsilon},$$

donde $\phi^{\leq c} := \{x \in E : \phi(x) \leq c\}$.

Ahora veamos que imponiendo a la funcional $\phi : E \rightarrow \mathbf{R}$ ciertas condiciones, ésta tiene la propiedad de Γ -deformación.

(PS)_c Se dice que ϕ satisface la condición de $(PS)_c$, para $c \in \mathbf{R}$ si toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ para la cual $\phi(x_n) \rightarrow c$ y $\nabla\phi(x_n) \rightarrow 0$ tiene una subsucesión convergente.

Si bien sólo usaremos $(PS)_c$, es importante mencionar que otra condición de compacidad que se usa es

(PS) Se dice que ϕ satisface la condición de Palais-Smale si toda sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ para la cual $(\phi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ está acotada y $\nabla\phi(x_n) \rightarrow 0$ tiene una subsucesión convergente.

Notemos que (PS) es más fuerte que la condición $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbf{R}$, ver [MW] página 81.

Para la demostración de la siguiente proposición se tomaron ideas de [Ra6] y [EH1], y se incluye una demostración, del Doctor Jorge Ize, en la parte referente a que la deformación $\eta(\tau, x)$ tiene la forma requerida.

PROPOSICION 2.3.2 (lema de Γ -deformación) Sea $\phi \in C^{1,1}(E, \mathbf{R})$ una funcional G -invariante .

(1) Si ϕ satisface $(PS)_c$ para algún $c > 0$ entonces

[1.a] K_c es compacto, donde $K_c = \{x \in E : \nabla\phi(x) = 0 \text{ y } \phi(x) = c\}$.

[1.b] Para toda vecindad G -invariante U de K_c existen $\epsilon > 0$ y $\tau_0 > 0$ tales que

$$\eta(\tau_0, \phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi^{\leq c-\epsilon},$$

donde $\phi^{\leq c} := \{x \in E : \phi(x) \leq c\}$ y η es el flujo inducido por un campo de la forma $\nu(x)\nabla\phi(x)$, $\nu(x) \geq 0$.

(2) Si además $\phi(x) = \frac{1}{2}\langle Lx, x \rangle + \varphi(x)$ con $Lx = x^+ - x^-$, $\varphi(x) \leq 0$ y $\nabla\varphi$ compacto entonces

$$\eta(\tau, x) = e^{\psi^+(x,\tau)}x^+ + x^0 + e^{\psi^-(x,\tau)}x^- + K(x, \tau) \quad \text{para toda } \tau,$$

donde ψ^+, ψ^- y K son como en 2.2.1.

(3) Si aunado a lo anterior existe $\rho > 0$ tal que $\phi(x) \leq 0$ para todo $x \in E^- \oplus E^0 \oplus F$, $\|x\| \geq \rho$ entonces $h \in \Gamma(F)$.

Por tanto ϕ tiene la propiedad de Γ -deformación para c .

Demostración (1) Supongamos que ϕ satisface la propiedad de $(PS)_c$ para algún $c > 0$.

(1.a) Se sigue de manera inmediata de la condición $(PS)_c$.

(1.b) Porque K_c es compacto y ∂U es cerrado entonces $\delta = \frac{d(K_c, \partial U)}{2} > 0$ y

$$N_\delta(K_c) := \{x \in E : d(x, K_c) \leq \delta\} \subset U. \quad (23)$$

Notemos que basta probar el lema para $N_\delta(K_c)$. Por lo que tomemos $U = N_\delta(K_c)$.

Traduzcamos la condición $(PS)_c$ a una propiedad del campo gradiente $\nabla\phi$. Porque ϕ satisface $(PS)_c$, existe $\tilde{\epsilon} > 0$ y $1 > b = b(\tilde{\epsilon}) > 0$ tal que

$$\|\nabla\phi(x)\| \geq b \quad \text{para todo } x \in \phi^{\leq c+\tilde{\epsilon}} \setminus (\phi^{\leq c-\tilde{\epsilon}} \cup N_{\delta/4}(K_c)). \quad (24)$$

Ya que en caso contrario existirían $\tilde{\epsilon}_j \rightarrow 0_{j \rightarrow \infty}$, $b_j \rightarrow 0_{j \rightarrow \infty}$ y $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$x_j \in \phi^{\leq c+\tilde{\epsilon}_j} \setminus (\phi^{\leq c-\tilde{\epsilon}_j} \cup N_{\delta/4}(K_c)) \quad (25)$$

y

$$\|\nabla\phi(x_j)\| \leq b_j. \quad (26)$$

Porque ϕ satisface $(PS)_c$ y por (25) y (26) la sucesión $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ satisface las hipótesis de $(PS)_c$ entonces $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente a un punto crítico x . Por tanto $x \in K_c$ lo que contradice el hecho de que por (25) $x \notin N_{\delta/4}(K_c)$. Por tanto existen $\tilde{\epsilon}$ y b como se afirmaba en (24). Además pidamos que $0 < c - \tilde{\epsilon}$.

Ahora hagamos las modificaciones necesarias al campo gradiente.

Sea

$$\hat{\epsilon} = \min\{\min\{b, \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\}, \frac{b\delta}{4}\}. \quad (27)$$

Tomemos

$$B = \phi^{-1}([c - \hat{\epsilon}, c + \hat{\epsilon}]) \quad , \quad D = E \setminus \phi^{-1}((c - \tilde{\epsilon}, c + \tilde{\epsilon})),$$

$$\nu_1, \nu_2 : E \rightarrow [0, 1]$$

$$\nu_1(x) := \frac{d(x, D)}{d(x, D) + d(x, B)}, \quad \nu_2(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } \|\nabla\phi(x)\| \leq 1 \\ \|\nabla\phi(x)\|^{-1} & \text{si } \|\nabla\phi(x)\| \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{y } \chi(x) = -\nu(x)\nabla\phi(x) \quad \text{con } \nu(x) = \nu_1(x)\nu_2(x).$$

Observemos que $\phi^{-1}(-\infty, 0] \subset D$ debido a que pedimos que $0 < c - \tilde{\epsilon}$.

Notemos que debido a que el campo $\chi(x)$ es localmente Lipschitz (ya que en su definición sólo intervienen funciones que son localmente Lipschitz) entonces tiene flujo local (para propiedades del flujo inducido por un campo χ localmente Lipschitz en un espacio de Banach ver [AMR]).

Debido a $\nu_2(x)$ el campo $\chi(x)$ está acotado, $\|\chi(x)\| \leq 1$, por lo que existe el flujo global η .

La condición de $(PS)_c$, más precisamente (24), implicará la existencia de $\tau_0 > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$\eta(\tau_0, \phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi^{\leq c-\epsilon}. \quad (28)$$

Probémoslo. Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi(\eta(t, x)) &= \langle \nabla \phi(\eta(t, x)), \chi(\eta(t, x)) \rangle \\ &= -\nu(\eta(t, x)) \|\nabla \phi(\eta(t, x))\|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Entonces

$$\phi(\eta(t, x)) \text{ es decreciente en la variable } t. \quad (30)$$

Tomemos

$$\epsilon = \hat{\epsilon}/2. \quad (31)$$

Y sea

$$x \in \phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U. \quad (32)$$

Caso (1) Si $x \in \phi^{\leq c-\epsilon}$ entonces

$$\begin{aligned} \phi(\eta(1/b, x)) &\leq \phi(\eta(0, x)) = \phi(x) \leq c - \epsilon \quad \text{por (30)} \\ \Rightarrow \eta(1/b, x) &\in \phi^{\leq c-\epsilon}. \end{aligned}$$

Caso (2) Si $x \notin \phi^{\leq c-\epsilon}$. Entonces

$$\eta(0, x) = x \in \phi^{\leq c+\epsilon} \setminus (U \cup \phi^{\leq c-\epsilon}). \quad (33)$$

Ahora veamos que pasa al movernos a lo largo de la curva integral $\eta(t, x)$ para $t \in [0, 1/b]$. Supongamos que

$$\eta(t, x) \in \phi^{\leq c+\epsilon} \setminus (N_{\delta/2}(K_c) \cup \phi^{\leq c-\epsilon}) \quad \text{para todo } t \in [0, 1/b]. \quad (34)$$

Entonces $\eta(t, x) \in B$ y (24) es válido. Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\eta(1/b, x)) - \phi(\eta(0, x))}{1/b} &= \frac{d}{dt} \phi(\eta(t, x)) \Big|_{\bar{t}} \\ &\leq \begin{cases} -b^2 & \text{si } \|\nabla \phi(\eta(\bar{t}, x))\| \leq 1 \\ -b & \text{si } \|\nabla \phi(\eta(\bar{t}, x))\| \geq 1 \end{cases} \\ &\leq -b^2 \quad \text{porque se eligió } b \leq 1. \\ \Rightarrow \phi(\eta(1/b, x)) &\leq (\phi(x) - c) + (c - b) \\ &\leq \epsilon + c - \hat{\epsilon} \quad \text{por (33) y la elección de } \hat{\epsilon} \text{ (ver (27))} \\ &= c - \epsilon \quad \text{elección de } \epsilon, \text{ ver (31)} \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción a nuestra suposición (34).

Tomemos t tal que $\eta(t_0, x) \in \phi^{\leq c+\epsilon} \setminus (N_{\delta/2}(K_c) \cup \phi^{\leq c-\epsilon})$ para todo $t_0 \in [0, t)$ y $\eta(t, x) \notin \phi^{\leq c+\epsilon} \setminus (N_{\delta/2}(K_c) \cup \phi^{\leq c-\epsilon})$. Por la continuidad de η y la elección de x tenemos que $t > 0$ y por la negación de (34) se tiene que $t \leq 1/b$. Calculemos

$$\begin{aligned} b\|\eta(t, x) - x\| &= b\left\|\int_0^t -\nu(\eta(s, x))\nabla\phi(\eta(s, x))ds\right\| \\ &\leq b\int_0^t \nu(\eta(s, x))\|\nabla\phi(\eta(s, x))\|ds \\ &\leq \int_0^t \nu(\eta(s, x))\|\nabla\phi(\eta(s, x))\|^2 ds \text{ por (24)} \\ &= -\int_0^t \frac{d}{ds}\phi \circ \eta(s, x)ds \\ &= \phi(x) - \phi(\eta(t, x)) \\ &\leq 2\epsilon = \hat{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\eta(t, x) - x\| \leq \hat{\epsilon}/b \leq \delta/4 \text{ por la elección de } \hat{\epsilon}, \text{ ver (27)}$$

$$\Rightarrow d(\eta(t, x), K_c) \geq \frac{3}{4}\delta > \delta/2 \text{ por (32)}$$

$$\Rightarrow \eta(t, x) \notin N_{\delta/2}(K_c)$$

$$\Rightarrow \eta(t, x) \in \phi^{\leq c-\epsilon}.$$

En particular $\eta(1/b, x) \in \phi^{\leq c-\epsilon}$. Por tanto

$$\eta(1/b, \phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi^{\leq c-\epsilon}.$$

Así existen $\tau_0 = 1/b$ y ϵ como se afirmaba en (28).

(2) Ahora veamos que $\eta_\tau : E \rightarrow E$, $\eta_\tau(x) = \eta(\tau, x)$ tiene la forma requerida, para todo τ .

Notemos que

$$\chi(x) = -(\nu(x)Lx + \nu(x)\varphi'(x))$$

con $L(x)$ operador lineal autoadjunto, $-\nu(x)\varphi'(x)$ continuo y χ induciendo un flujo global. Por los resultados de Hofer, [Ho], veremos que $\eta_\tau : E \rightarrow E$ puede ser expresado como

$$\eta_\tau(x) = e^{\psi^+(x, \tau)}x^+ + x^0 + e^{\psi^-(x, \tau)}x^- + K(x, \tau)$$

donde

$$\begin{aligned}\psi^+(\mathbf{x}, \tau) &= \tilde{\psi}^+(0, \tau, \mathbf{x}) \quad , \quad \psi^-(\mathbf{x}, \tau) = \tilde{\psi}^-(0, \tau, \mathbf{x}), \\ \tilde{\psi}^+(s, \tau, \mathbf{x}) &= \int_{\tau}^s \nu(\eta(t, \mathbf{x})) dt, \\ \tilde{\psi}^-(s, \tau, \mathbf{x}) &= \int_{\tau}^s -\nu(\eta(t, \mathbf{x})) dt,\end{aligned}$$

$$K(\mathbf{x}, \tau) = \int_{\tau}^0 [e^{\tilde{\psi}^+(s, \tau, \mathbf{x})} P^+ + P^0 + e^{\tilde{\psi}^-(s, \tau, \mathbf{x})} P^-] \nu(\eta(s, \mathbf{x})) \nabla \varphi(\eta(s, \mathbf{x})) ds$$

y para τ fijo, ψ^- , ψ^+ y K satisfacen 2.2.1. Probémoslo.

Probemos primero que

$$\begin{aligned}\eta_{\tau}(\mathbf{x}) &= e^{\psi^+(\mathbf{x}, \tau)} \mathbf{x}^+ + \mathbf{x}^0 + e^{\psi^-(\mathbf{x}, \tau)} \mathbf{x}^- + K(\mathbf{x}, \tau) =: g(\mathbf{x}, \tau), \\ \eta_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} = g(\mathbf{x}, 0).\end{aligned}$$

Para \mathbf{x} fijo $\eta(\tau, \mathbf{x})$ es C^1 en τ , de donde se sigue que ψ^+ , ψ^- son diferenciables en τ , así como K .

$$\begin{aligned}\frac{dg}{d\tau} &= -\nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) e^{\psi^+(\mathbf{x}, \tau)} \mathbf{x}^+ + \nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) e^{\psi^-(\mathbf{x}, \tau)} \mathbf{x}^- \\ &\quad - (P^- + P^0 + P^+) \nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) \nabla \varphi(\eta(\tau, \mathbf{x})) + \\ &\quad \int_{\tau}^0 -\nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) (e^{\tilde{\psi}^+(s, \tau, \mathbf{x})} P^+) + \nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) e^{\tilde{\psi}^-(s, \tau, \mathbf{x})} P^- \nu(\eta(s, \mathbf{x})) \nabla \varphi(\eta(s, \mathbf{x})) ds \\ &= -\nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) (e^{\psi^+(\mathbf{x}, \tau)} \mathbf{x}^+ - e^{\psi^-(\mathbf{x}, \tau)} \mathbf{x}^-) - \nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) \nabla \varphi(\eta(\tau, \mathbf{x})) - \\ &\quad \nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) \int_{\tau}^0 (e^{\tilde{\psi}^+(s, \tau, \mathbf{x})} P^+ - e^{\tilde{\psi}^-(s, \tau, \mathbf{x})} P^-) \nu(\eta(s, \mathbf{x})) \nabla \varphi(\eta(s, \mathbf{x})) ds \\ &= -\nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) [(g^+(\mathbf{x}, \tau) - g^-(\mathbf{x}, \tau)) + \nabla \varphi(\eta(\tau, \mathbf{x})) - (P^+ K(\mathbf{x}, \tau) - \\ &\quad P^- K(\mathbf{x}, \tau))] + \int_{\tau}^0 (e^{\tilde{\psi}^+(s, \tau, \mathbf{x})} P^+ - e^{\tilde{\psi}^-(s, \tau, \mathbf{x})} P^-) \nu(\eta(s, \mathbf{x})) \nabla \varphi(\eta(s, \mathbf{x})) ds\end{aligned}$$

Como $P^+ P^0 = 0$, $P^+ P^- = 0$, $(P^+)^2 = P^+$ entonces

$$\begin{aligned}P^+ K(\mathbf{x}, \tau) &= \int_{\tau}^0 [e^{\tilde{\psi}^+(s, \tau, \mathbf{x})} P^+ \nu(\eta(s, \mathbf{x})) \nabla \varphi(\eta(s, \mathbf{x}))] ds, \\ P^- K(\mathbf{x}, \tau) &= \int_{\tau}^0 e^{\tilde{\psi}^-(s, \tau, \mathbf{x})} P^- \nu(\eta(s, \mathbf{x})) \nabla \varphi(\eta(s, \mathbf{x})) ds.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{dg}{d\tau} = -\nu(\eta(\tau, \mathbf{x})) (g^+(\mathbf{x}, \tau) - g^-(\mathbf{x}, \tau) + \nabla \varphi(\eta(\tau, \mathbf{x}))), \quad g(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$$

Pero la solución a esta ecuación lineal es única y es $\eta(\tau, x)$. Por tanto

$$\eta_\tau = g.$$

Ahora fijemos τ y probemos que ψ^-, ψ^+ y K satisfacen 2.2.1.

- (i) Probemos que las funcionales $\psi^+, \psi^- : E \rightarrow \mathbf{R}$ son continuas, G -invariantes, mandan conjuntos acotados en conjuntos acotados y $\psi^+(x, \tau) = \psi^-(x, \tau) = 0$ para todo $x \in E^0$.

La continuidad de estas funciones es inmediata de la continuidad de ψ^+ , la cual probaremos en (ii).

Que son funciones G -invariantes es inmediato de que $\nu(\eta(t, x))$ es G -invariante. En efecto, dado que ϕ es G -invariante los conjuntos B y D son G -invariantes. Además $d(gx, B) = d(x, B)$ ya que la acción preserva distancias. Por lo tanto $\nu_1(x)$ es G -invariante. También $\nabla\phi$ es G -equivariante, i.e. $\nabla\phi(gx) = g\nabla\phi(x)$, y otra vez por que la acción preserva la norma, $\nu_2(x)$ es G -invariante.

Chequemos que mandan conjuntos acotados en conjuntos acotados. Debido a que $|\nu(x)| \leq 1$ tenemos que $|\psi^+(x, \tau)|, |\psi^-(x, \tau)| \leq |\tau|$ para todo $x \in E$.

Por último, debido a que $\nu(x) = 0$ para todo $x \in E^0$ tenemos que $\eta(t, x) = x$ para todo $t \in \mathbf{R}$ y para todo $x \in E^0$. En efecto $\phi(x) = \langle Lx, x \rangle + \varphi(x) = +\varphi(x)$ si $x \in E^0$. Por lo que $\phi(x) \leq 0$ si $x \in E^0$. Así $E^0 \subset \phi^{-1}(-\infty, 0] \subset D$.

Por tanto $\nu(\eta(t, x)) = 0$ para todo t y para todo $x \in E^0$ y así $\psi^+(x) = \psi^-(x) = 0$ para todo $x \in E^0$.

- (ii) Probemos que $K : E \rightarrow E$, $K(x) = K(x, \tau)$ es una función continua compacta y G -equivariante con $K(x) = 0$ para todo $x \in E^0$.

• Probemos la continuidad de K . Para ello probemos primero el siguiente resultado: si $\zeta : [0, \tau] \times E \rightarrow E$ es continua entonces

$$\tilde{\zeta} : E \rightarrow E \quad \tilde{\zeta}(x) = \int_\tau^0 \zeta(s, x) ds \quad \text{es continua.} \quad (35)$$

La demostración de este resultado es como sigue. Como ζ es continua entonces

$$\tilde{\zeta}(x) := \int_{\tau}^0 \zeta(s, x) ds$$

está bien definida. Además debido a que ζ es continua, $[0, \tau]$ compacto y Hausdorff entonces

$$\hat{\zeta} : E \rightarrow C([0, \tau], E) \quad , \quad \hat{\zeta}(x)(s) := \zeta(s, x)$$

es continua tomando la topología compacto abierta en $C([0, \tau], E)$ ([Mu] página 287). Porque E es métrico y $[0, \tau]$ es compacto entonces la topología compacto abierta coincide con la topología inducida por la métrica uniforme ([Mu] página 283, 286).

Ahora como

$$\left\| \int_{\tau}^0 \beta_1(s) - \beta_2(s) ds \right\| \leq \int_{\tau}^0 \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\| ds$$

entonces $f : C([0, \tau], E) \rightarrow E$ es continua usando la métrica uniforme en $C([0, \tau], E)$. Por tanto

$$\tilde{\zeta} = f \circ \hat{\zeta} \quad \text{es continua.}$$

Tomemos $\zeta(t, x) = \nu(\eta(t, x))$. Debido a que

$$\|\tilde{\psi}^+(s, \tau, x) - \tilde{\psi}^+(\tilde{s}, \tau, \tilde{x})\| \leq |s - \tau| \|\nu(\eta(\cdot, x)) - \nu(\eta(\cdot, \tilde{x}))\|_{\infty} + |s - \tilde{s}|,$$

para todo $s, \tilde{s} \in [0, \tau]$ y a la continuidad de $\hat{\zeta}$ tenemos que $\tilde{\psi}^+(s, \tau, x)$ es continua.

Ahora tomemos

$$\zeta(s, x) = e^{\tilde{\psi}^+(s, \tau, x)L}(\nu(\eta(s, x))\nabla\varphi(\eta(s, x))) + P^0\nu(\eta(s, x))\nabla\varphi(\eta(s, x)).$$

ζ es continua porque en su definición sólo intervienen funciones continuas. Así por (35) tenemos que $\tilde{\zeta}(x) = K(x)$ es continuo.

• Ahora veamos que K es compacta. Notemos que, en K , $0 \geq \tilde{\psi}^+(s, \tau, x) \geq -\tau$ y $0 \leq \tilde{\psi}^-(s, \tau, x) \leq \tau$. Sea $B_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$.

Sea $Y = \{(P^0 + e^{\alpha L})z = (e^{\alpha P^+} + P^0 + e^{-\alpha P^-})z : \alpha \in [0, -\tau], z \in \overline{\nu \nabla \varphi(\eta([0, \tau] \times B_r))}\}$. Observemos que debido a que

$$\|\eta(s, x)\| = \|x + \int_0^s \chi(\eta(t, x)) dt\| \leq r + \tau \quad \text{para todo } s \in [0, \tau] \text{ y}$$

$$\text{para todo } x \in B_r,$$

y a que $\nu \nabla \varphi$ es compacto entonces $\overline{\nu \nabla \varphi(\eta([0, \tau] \times B_r))}$ es compacto. Por lo que Y es compacto. Ahora como $K(x) \in \text{conv} Y$ para todo $x \in B_r$ (donde $\text{conv} Y$ es la envolvente convexa de Y) y como la envolvente convexa de compactos es compacto entonces $\overline{K(B_r)}$ es compacto. Por tanto K es una función compacta.

• K es G -equivariante debido a que las funciones sobre las cuales se está integrando son funciones G -invariantes y funciones G -equivariantes. Por último tenemos que $K(x) = 0$ para todo $x \in E^0$ debido a que $\nu(x) = 0$ para todo $x \in E^0$ y a que $\eta(s, x) = x$ para todo $s \in \mathbf{R}$ y para todo $x \in E^0$.

(3) Para ver que $\eta(\tau, x) \in \Gamma(\mathbf{F})$ solo resta probar 2.2.1 (iii). Por la forma en que definimos a ν se sigue que $\nu(x) = 0$ si $x \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{F}$, $\|x\| \geq \rho$, y de ello que η , el flujo inducido por $\chi(x) = \nu(x) \nabla \varphi(x)$, satisface que $\eta(s, x) = x$ para todo s y para todo $x \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{F}$. Así $\nu(\eta(s, x)) = 0$ y por tanto

$$\psi^+(x, \tau) = \psi^-(x, \tau) = 0 \quad \text{y} \quad K(x, \tau) = 0$$

si $x \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{F}$ y $\|x\| \geq \rho$.

Por último tomando $\tau = \tau_0$ tenemos el resultado deseado. ■

En lo que resta de la sección supondremos que G es un grupo de Lie compacto que satisface la propiedad de no trivialidad de γ_G^{Γ} , 2.2.8, para subespacios G -invariantes de \mathbf{F} , donde \mathbf{F} es el subespacio vectorial de E^+ G -invariante y de dimensión finita en base al cual se definió el pseudoíndice.

Definimos

$$c_j = \inf_{Z \in \Gamma_j} \sup_{x \in Z} \phi(x)$$

donde $\Gamma_j := \{Z \subset E : Z \text{ es } G\text{-invariante, cerrado y } \gamma_G^{\Gamma}(Z) \geq j\}$

TEOREMA 2.3.3 (Teorema de Enlace) Supongamos que existen $0 < c^0 < c^\infty$ y $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}$ subespacio G -invariante, tales que

(**Γ -D**) ϕ satisface la propiedad de Γ -deformación para cada $c > 0$,

(**L1**) $\phi(x) \leq c^\infty$ para todo $x \in E^- \oplus E^0 \oplus F$,

(**L2**) $\phi(x) \geq c^0$ para todo $x \in S_{\rho_0}^+ = \{x \in E^+ : \|x\| = \rho_0\}$, para algún $\rho_0 > 0$.

Entonces

(a) $c^0 \leq c_j \leq c^\infty$, $j = 1, \dots, k = \dim_{\mathbb{C}} F$.

(b) c_j es valor crítico de ϕ , para $1 \leq j \leq k$.

(c) Si $c_j = \dots = c_{j+p}$ entonces $\gamma_G(K_c) \geq p + 1$.

Demostración Probemos (a). Para $1 \leq j \leq k$ si $Z \in \Gamma_j$ entonces

$$1 \leq \gamma_G(Z \cap S_{\rho_0}^+) \quad \text{por 2.2.4 (comparación).}$$

De donde se sigue que $Z \cap S_{\rho_0}^+ \neq \emptyset$. Así por (L2)

$$c^0 \leq \sup_{x \in Z} \phi(x) \quad \text{para todo } Z \in \Gamma_j.$$

Por tanto $c^0 \leq c_j$ para $1 \leq j \leq k$.

Ahora como estamos suponiendo que el grupo de Lie G satisface la propiedad de no trivialidad de γ_G^F entonces tenemos que

$$\gamma_G^F(E^- \oplus E^0 \oplus F) = \dim_{\mathbb{C}} F = k.$$

Por lo que $E^- \oplus E^0 \oplus F \in \Gamma_j$ para $1 \leq j \leq k$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} c_j &:= \inf_{Z \in \Gamma_j} \sup_{x \in Z} \phi(x) \leq \sup_{x \in E^- \oplus E^0 \oplus F} \phi(x) \\ &\leq c^\infty \quad \text{por (L1), } 1 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

Por tanto $c^0 \leq c_j \leq c^\infty$ para todo $1 \leq j \leq k$.

Probemos (c). i.e. que si $c = c_j = c_{j+1} = \dots = c_{j+p}$ entonces $\gamma_G(K_c) \geq p + 1$. Supongamos lo contrario i.e. $\gamma_G(K_c) \leq p$. Por la propiedad de continuidad de γ_G existe U vecindad abierta G -invariante de K_c tal que

$$\gamma_G(K_c) = \gamma_G(U). \quad (36)$$

Sea $\epsilon > 0$ y h_0 como en 2.3.1 para U . Por definición de c_{j+p} podemos encontrar $Z \in \Gamma_{j+p}$ tal que $Z \subset \phi^{\leq c+\epsilon}$ donde $\phi^{\leq c+\epsilon} := \{x \in E : \phi(x) \leq c + \epsilon\}$. Debido a la propiedad de Γ -monotonía tenemos que

$$j + p \leq \gamma_G^\Gamma(Z) \leq \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon}).$$

Ahora probemos que $j \leq \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U)$.

$$\begin{aligned} j + p \leq \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon}) &\leq \gamma_G^\Gamma((\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) \cup \bar{U}) \quad \Gamma\text{-monotonía del pseudoíndice} \\ &\leq \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) + \gamma_G(\bar{U}) \quad \text{por la subaditividad mixta} \\ &= \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) + \gamma_G(K_c) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow j + p - \gamma_G(K_c) \leq \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon}) - \gamma_G(K_c) \leq \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U)$$

ya que por (Γ -D) y 2.1.3 $\gamma_G(K_c) < \infty$

$$\Rightarrow j = j + p - p \leq \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) \quad \text{ya que supusimos que } \gamma_G(K_c) \leq p$$

Por tanto

$$j \leq \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U).$$

Por como elegimos $h_0 \in \Gamma$ tenemos que

$$h_0(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi^{\leq c-\epsilon}.$$

Ahora usando la Γ -monotonía de γ_G^Γ tenemos que

$$\gamma_G^\Gamma(h_0(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U)) = \gamma_G^\Gamma(\phi^{\leq c-\epsilon} \setminus U) \geq j.$$

Por tanto $h_0(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U) \in \Gamma_j$ y $\sup \phi(h_0(\phi^{\leq c+\epsilon} \setminus U)) \leq c - \epsilon < c$.

Lo cual es una contradicción a la elección de $c_j = c$.

Probemos (b). Tomando $p = 0$ en (c) tenemos que $\gamma_G(K_c) \geq 1$. Por tanto $K_c \neq \emptyset$. ■

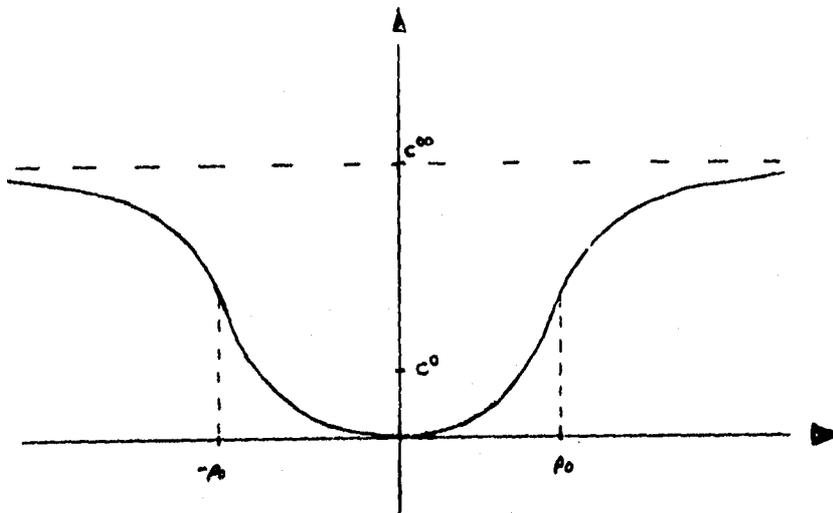
COROLARIO 2.3.4 El principio de minimax, 2.3.3, es valido para el grupo $G = \mathbf{S}^1$.

Demostración Se probó en 2.2.8 que para $G = \mathbf{S}^1$ se satisface la propiedad de no trivialidad de $\gamma_{\mathbf{S}^1}^\Gamma$, que fue la hipótesis que impusimos a G . ■

Como hicimos ver en las observaciones a 2.2.8, $\gamma_{Z_q}^I$ satisface la propiedad de no trivialidad para q primo, por lo que tenemos un análogo a 2.3.4 para Z_q .

Comentarios al teorema 2.3.3:

- (1) Tomemos $G = Z_2$, $E^+ = F = \mathbf{R}$, $E^0 = E^- = \{0\}$ y $\phi : E \rightarrow \mathbf{R}$ una función de la forma



Esta función satisface (L1) y (L2) pero no tiene ningún valor crítico en $[c^0, c^\infty]$. Ésto es debido a que $\phi(x)$ no satisface (PS_c) para $c = c^\infty$, tomemos por ejemplo la sucesión $(n)_{n=1}^\infty$.

- (2) Ahora veamos que relevancia tiene el que los homeomorfismos de Γ sean de la forma 2.2.1.

Notemos primero que la forma particular de los elementos de Γ nos permite pasar de una situación infinita a una situación finita, cuando calculamos

$$\gamma_G(h(E^- \oplus E^0 \oplus F) \cap S^+) \quad h \in \Gamma,$$

ver 2.2.5.

En caso que $\dim E^- < \infty$ entonces no es necesario usar 2.2.5, y el

teorema 2.3.3 sería válido si en lugar de Γ usamos otro grupo de G -homeomorfismos que satisfagan:

- (1) $h(x) = x$ si $\|x\| > \rho$, $x \in E^- \oplus E^0 \oplus F$, i.e. 2.2.1 (iii).
- (2) (b) de la propiedad de Γ -deformación, 2.3.1, para cada $c > 0$.

Por otra parte si ϕ satisface $(PS)_c$, siempre disponemos de homeomorfismos que cumplen (b) de la propiedad de Γ -deformación para c , ya que la condición $(PS)_c$ permite que el G -homeomorfismo dado por el flujo $h(x) = \eta(\tau, x)$ inducido por un campo gradiente de la forma $\nu(x)\nabla\phi(x)$, $\nu(x) > 0$, sea uno de tales homeomorfismos, para τ adecuada. Además si a $\nabla\phi$ se le imponen ciertas condiciones, 2.3.2 inciso (2), entonces el G -homeomorfismo dado por el flujo puede ser expresado como en 2.2.1, satisfaciendo sólo (i) e (ii).

Respecto a 2.2.1 (iii), el subespacio que se está usando, $E^- \oplus E^0 \oplus F$, lo hemos ajustado a ser el máximo subespacio donde la funcional ϕ esté acotada, condición **(L1)**, ya que de no ser así nuestro lema de Γ -deformación sería incorrecto, ver 3.4.5.

3. EL PROBLEMA VARIACIONAL

En este capítulo planteamos el problema variacional de encontrar soluciones periódicas a la ecuación hamiltoniana (SH) como puntos críticos de cierta funcional $\phi_H(x) = A(x) - \varphi_H(x)$, definida en un espacio de curvas adecuado. El problema se plantea en general, como fue sugerido por el Dr. Jorge Ize, para un hamiltoniano H para el cual el gradiente tiene cierta forma de crecimiento, $\nabla H(u) \leq b + a |u|^s$, y además φ_H es de clase $C^{1,1}$ y su diferencial puede ser escrita de cierta manera.

También definimos una familia de hamiltonianos, de clase C^2 , \mathcal{H}_S que nos resulta adecuada, tal construcción se hace como en [HZ1], y se prueba que para hamiltonianos $H \in \mathcal{H}_S$ se puede hacer la traducción de puntos críticos de ϕ_H a soluciones de (SH) e inversamente. Posteriormente vemos que es posible aplicar nuestro teorema de existencia de múltiples puntos críticos para funcionales, desarrollado en 2.3, a la funcional ϕ_H , $H \in \mathcal{H}_S$. Para probar esta parte sólo usamos que H es de clase C^1 , $H(U) \equiv 0$, U vecindad de 0, $H(u)$ es cuadrática si $|u| \gg 0$, que φ_H es C^1 y que su diferencial puede ser escrita de cierta forma. En varias partes del capítulo fueron usadas ideas del Dr. Jorge Ize que contribuyeron principalmente a bajar la suavidad de los hamiltonianos que usábamos originalmente, de hamiltonianos de clase C^∞ a clase C^2 .

§ 3.1 Una clase adecuada de funciones hamiltonianas.

En esta sección construiremos una familia especial de funciones hamiltonianas para una hipersuperficie S compacta y de clase C^2 . Tal construcción se hace como la presentan Hofer y Zehnder en [HZ1], para hipersuperficies compactas y de clase C^∞ .

De aquí en adelante S será una hipersuperficie compacta, conexa y de clase C^2 contenida en \mathbf{R}^{2N} .

DEFINICION 3.1.1 (*Familia parametrizada de hipersuperficies mode-*

ladas por S) Una familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S es un difeomorfismo, de clase C^2 , $\eta : (-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, $\hat{\vartheta} > \vartheta > 0$, cuya imagen es una vecindad abierta y acotada de S y tal que $\eta(0, x) = x$ para todo $x \in S$.

Ejemplo 3.1.2. Sea $\chi : U \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, con $U \subset \mathbf{R}^{2N}$ vecindad abierta de S , un campo vectorial de clase C^2 transversal a S (i.e. $\chi(x) \notin T_x S$ para todo $x \in S$). Debido a que χ es en particular localmente Lipschitz, existe el flujo local para cada $x \in S$ y por ser S compacta existen $\hat{\vartheta} > \vartheta > 0$ tal que se puede definir el flujo $\eta : (-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ con las siguientes propiedades:

- (a) $\eta(0, x) = x$ para todo $x \in S$.
- (b) η es un difeomorfismo de clase C^2 sobre su imagen y $S_\epsilon := \eta(\{\epsilon\}, S)$, $-\vartheta < \epsilon < \hat{\vartheta}$, es una hipersuperficie difeomorfa a S .
- (c) η tiene como imagen una vecindad de S abierta y acotada.

(a) y (b) son propiedades bien conocidas del flujo, ver por ejemplo [AMR], y respecto a (c) notemos que mediante el teorema de invariancia del dominio para variedades se muestra que $\text{Im}\eta$ es abierta.

A lo largo de este trabajo usaremos la siguiente

Notación:

Ahora sea η como en 3.1.1 y sean μ, α , reales tales que $0 < \mu < \alpha < \hat{\vartheta}$, $\mu < \vartheta$. $\mathbf{R}^{2N} \setminus \eta([-\mu, \alpha] \times S)$ tiene dos componentes.

- $S_\epsilon \equiv \eta(\{\epsilon\}, S)$,
- $\mathcal{B}(\eta([-\mu, \alpha] \times S))$ la componente acotada de $\mathbf{R}^{2N} \setminus \eta([-\mu, \alpha] \times S)$ que supondremos contiene al origen y a S_ϵ para $-\vartheta < \epsilon < -\mu$,
- $\mathcal{A}(\eta([-\mu, \alpha] \times S))$ la componente no acotada de $\mathbf{R}^{2N} \setminus \eta([-\mu, \alpha] \times S)$ y supondremos que $\eta(t, \bar{x}) \in \mathcal{A}(S_\epsilon)$ para $t > \epsilon$, $\bar{x} \in S$,
- $\varsigma := \text{diam}(\eta((-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S))$.

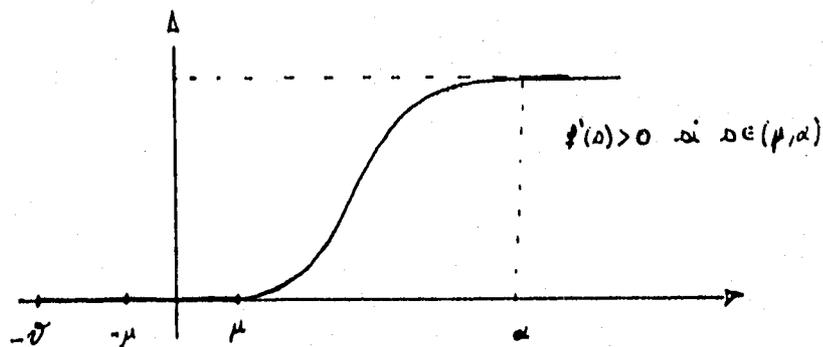
DEFINICION 3.1.3 (La familia \mathcal{H}_S) Dadas $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie de clase C^2 , compacta y conexa, η una familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S y $j_0 > 0$ un número natural, definimos la familia $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S(S, \eta, j_0)$ de funciones hamiltonianas $H : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$ construidas de la siguiente manera: se eligen números $b, R > 0$ y $k_0 \in \{j_0, j_0 + 1, \dots\}$ tales que

$$a = (k_0 + \frac{1}{2})\pi, \quad (\Rightarrow 2a \notin 2\pi\mathbf{Z}), \quad (37)$$

$$R > \varsigma,$$

$$b > aR^2. \quad (38)$$

Tomamos una función de clase C^∞ $f : (-\vartheta, \hat{\vartheta}) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que



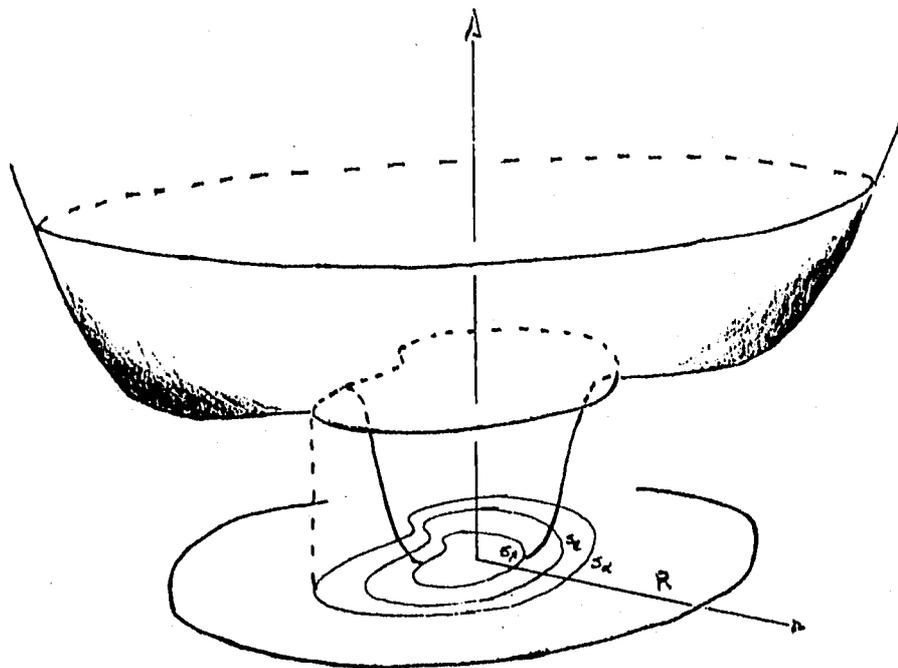
$$f(s) = 0 \text{ si } s \leq \mu,$$

$$f(s) = b \text{ si } s \geq \alpha \text{ donde } \mu, \alpha \text{ son reales tales que } 0 < \mu < \vartheta, \mu < \alpha < \hat{\vartheta},$$

$$\text{y } f'(s) > 0 \text{ para } \mu < s < \alpha.$$

Y definimos

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{B}(\eta([- \mu, \alpha] \times S)) \\ f(\epsilon) & \text{si } x = \eta(\epsilon, \bar{x}), \bar{x} \in S, -\mu \leq \epsilon \leq \alpha \\ b & \text{si } x \in \mathcal{A}(\eta([- \mu, \alpha] \times S)) \text{ y } |x| \leq R \\ g(|x|) & \text{si } |x| > R \end{cases} \quad (39)$$



Gráfica de H

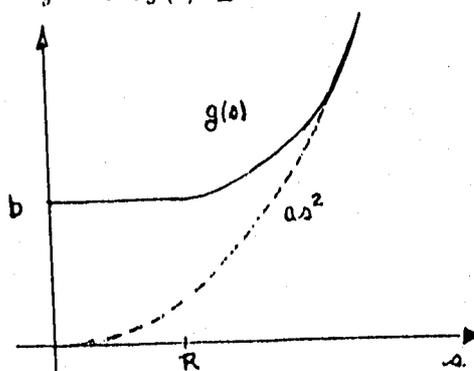
donde la función g se elige de tal forma que g es C^∞ y

$$g(s) = b \quad s \leq R$$

$$g(s) \geq as^2 \quad s > R$$

$$g(s) = as^2 \quad s \gg 0$$

$$0 < g'(s) \leq 2as \quad s > R.$$



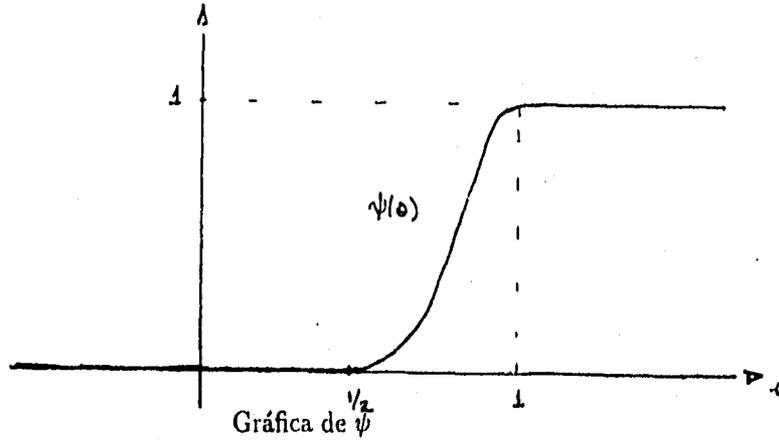
Gráfica de g

En el siguiente lema se reescribe una demostración de la existencia de g , que hizo el Dr. Jorge Ize.

LEMA 3.1.4 Existe una función g como la requerida en la definición de H .

Demostración

Sea $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tal que $0 \leq \psi(s) \leq 1$, $\psi(s) = 0$ si $s \leq 1/2$ y $\psi(s) = 1$ si $s \geq 1$.



Notemos que $M := \int_0^1 \psi(s) ds < 1/2$.

Sea $\gamma > 1$.

$$\tilde{g}(s) := \int_R^s 2au\psi\left(\frac{u}{R}-1\right)du = 2aR^2(\gamma-1) \int_0^{\frac{s-R}{R-1}} (1+(\gamma-1)\tau)\psi(\tau)d\tau$$

Notemos que

$$\tilde{g} \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}),$$

$$\tilde{g}(s) = 0 \quad \text{si } s < R,$$

$$0 < \tilde{g}'(s) = 2as\psi\left(\frac{s}{R}-1\right) \leq 2as$$

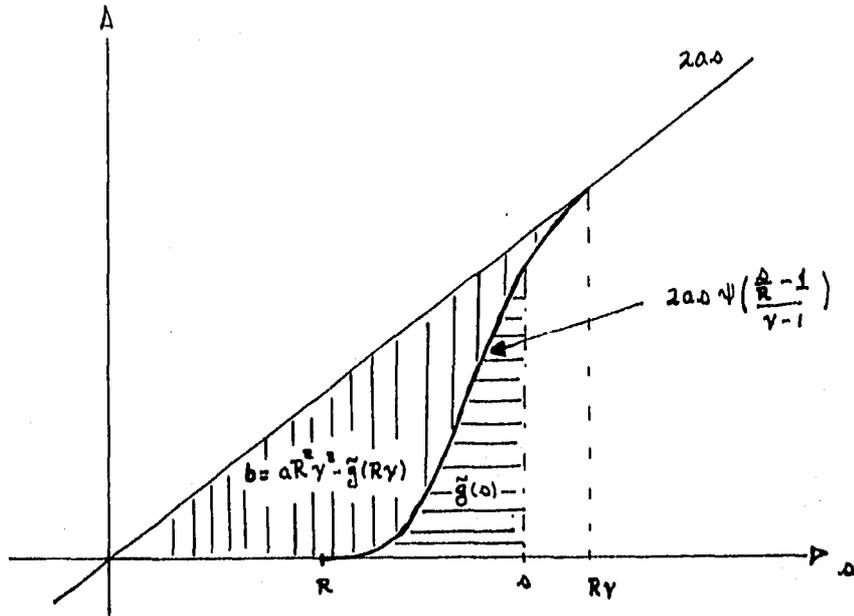


Figura 2

Ahora hay que hacer una elección adecuada de γ , ver figura 2. Consideremos

$$h(\gamma) = A\gamma^2 + B\gamma + C,$$

con

$$A = aR^2(2K - 1), \quad B = (M - K)2aR^2, \quad C = (K - M)2aR^2 + b,$$

donde $K = \int_0^1 s\psi(s)ds$. Notemos que usando integración por partes y que $M < 1/2$ tenemos

$$K = \int_0^1 \psi(s)ds - \int_0^1 \Psi(s)ds < 1/2 \quad \text{donde } \Psi(s) = \int_0^s \psi(\tau)d\tau,$$

por lo que $0 < K < 1/2$ y así $-aR^2 < A < 0$.

Como $h(1) > -aR^2 + b > 0$ entonces existe un único $\gamma_0 > 1$ con $h(\gamma_0) = 0$. Tomemos $\gamma = \gamma_0$. Definamos

$$g(s) = b + \tilde{g}(s)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \tilde{g}(R\gamma) &= 2aR^2(\gamma - 1) \int_0^{\frac{R\gamma - 1}{\gamma - 1}} (1 + (\gamma - 1)\tau)\psi(\tau)d\tau \\ &= 2aR^2(\gamma - 1)[M + (\gamma - 1)K]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$aR^2\gamma^2 - \tilde{g}(R\gamma) = -[aR^2(2K-1)\gamma^2 + (M-K)2aR^2\gamma + (K-M)2aR^2] \\ = b.$$

La última igualdad es debida a la elección de γ . Por tanto para $s > \gamma R$

$$g(s) = b + \tilde{g}(\gamma R) + \int_{\gamma R}^s 2au\psi\left(\frac{u}{R}-1\right)du \\ = as^2.$$

Finalmente

$$g(s) - as^2 = b - aR^2 + \int_R^s 2av[\psi\left(\frac{u}{R}-1\right) - 1]du \\ = b - aR^2 + k(s) \quad \text{con } k'(s) \leq 0 \quad \text{ya que } \psi(s) \leq 1, \forall s \\ \Rightarrow g(s) - as^2 \quad \text{es decreciente y vale 0 si } s \geq \gamma R.$$

Por tanto

$$g(s) \geq as^2 \quad \text{si } s \geq R. \blacksquare$$

Observemos que H tiene las siguientes propiedades

$$(H1) \quad H \in C^2(\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R}) \quad (40)$$

$$(H2) \quad H|_U \equiv 0, \quad 0 \in U \text{ vecindad abierta de } 0, \quad H(x) = a|x|^2$$

$$\text{si } |x| \gg 0, \quad a = (k_0 + \frac{1}{2})\pi \quad \text{i.e. como en (37)} \quad (41)$$

$$(H3) \quad -b + a|x|^2 \leq H(x) \leq b + a|x|^2 \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N} \quad (42)$$

$$(H4) \quad \text{Sea } x \in \eta((\mu, \alpha) \times S) \text{ entonces} \quad (43)$$

$$\nabla H(x) \cdot \chi(x) = f'(\epsilon),$$

donde $x = \eta(\epsilon, \bar{x})$, $\bar{x} \in S$ y $\chi(x) = \frac{d}{d\epsilon}\eta(\epsilon, \bar{x})$. Y H es regular sobre S_ϵ para $\mu < \epsilon < \alpha$.

(H1) se sigue de que sólo intervienen funciones al menos de clase C^2 bien "pegadas". (H2) y (H3) son inmediatas de la definición de H . Probemos (H4)

Demostración H4

$$H \circ \eta(\epsilon, \bar{x}) = f(\epsilon) \text{ para todo } \bar{x} \in S \text{ y } \mu < \epsilon < \alpha.$$

Sea $x := \eta(\epsilon, \bar{x})$. Entonces

$$f'(\epsilon) = \nabla H(x) \cdot \frac{d}{d\epsilon} \eta(\epsilon, \bar{x}) = \nabla H(x) \cdot \chi(x).$$

Ahora dado que por definición de f , $f'(\epsilon) > 0$ para $\mu < \epsilon < \alpha$ tenemos que

$$\nabla H(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in S_\epsilon \text{ y para todo } \mu < \epsilon < \alpha. \blacksquare$$

Notemos que S no es la imagen inversa de un valor regular de H ya que en la vecindad, $\eta((-\vartheta, \mu) \times S)$, $H \equiv 0$. Pero por (43) las hipersuperficies S_ϵ si son imágenes inversas de un valor regular de H para $\mu < \epsilon < \alpha$.

§3.2 El problema variacional

Identifiquemos a \mathbf{R}^{2N} con \mathbf{C}^N

$$x = (x_p, x_q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2N} \leftrightarrow x_p + ix_q = x.$$

Así una curva periódica $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, $x(t) = (x_p(t), x_q(t))$ de periodo 1, la podemos ver como $x : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}^N$

$$x(t) = x_p(t) + ix_q(t),$$

con $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, e inversamente.

Consideremos el espacio de Hilbert $(L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N), (\cdot, \cdot)_{L^2})$, donde

$$(x, y)_{L^2} = \int_0^1 x(t) \bar{y}(t) dt, \quad \bar{y}(t) = y_p(t) - iy_q(t)$$

y su base de Hilbert

$$\mathbf{C} = \{e_j^{2\pi ikt}\}_{1 \leq j \leq N, k \in \mathbf{Z}} \quad \text{donde } e_j^{2\pi ikt} = (0, \dots, 0, e^{2\pi ikt}, 0, \dots, 0).$$

Dado que \mathcal{C} es una base de Hilbert, $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathcal{C}^N)$ puede ser expresado de manera única en términos de su serie de Fourier

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N a_{k,j} e_j^{2\pi i k t}, \quad a_{k,j} \in \mathcal{C}. \quad (44)$$

El espacio de Sobolev $H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathcal{C}^N)$ puede ser descrito de varias maneras, para nosotros será

$$\{x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathcal{C}^N) : \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N |k| |a_{k,j}|^2 + \sum_{1 \leq j \leq N} |a_{0,j}|^2 < \infty\},$$

donde los términos $a_{k,j}$ corresponden a los términos de la expresión de x de su serie de Fourier, provisto del producto interior

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \operatorname{Re} \left(2\pi \sum_{k \neq 0} \sum_{j=1}^N |k| a_{k,j} \bar{b}_{k,j} + \sum_{1 \leq j \leq N} a_{0,j} \bar{b}_{0,j} \right), \\ x &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N a_{k,j} e_j^{2\pi i k t}, \quad y = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N b_{k,j} e_j^{2\pi i k t}, \\ \|x\| &= \langle x, x \rangle^{1/2}, \end{aligned}$$

que lo hace un espacio de Hilbert. A $(H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathcal{C}^N), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ lo denotaremos por E .

Ahora E tiene una acción natural de \mathbf{S}^1 que consiste en reparametrizar la curva $x \in E$ componiéndola con una rotación

$$\theta x(t) := x(t + \theta) \quad e^{2\pi i \theta} \in \mathbf{S}^1.$$

E se puede expresar como la suma directa de los siguientes subespacios vectoriales cerrados, ortogonales y \mathbf{S}^1 -invariantes

$$x = x^- + x^0 + x^+ \in E^- \oplus E^0 \oplus E^+ = E$$

$$P^-(x) = x^- = \sum_{k < 0} \sum_{j=1}^N a_{k,j} e_j^{2\pi i k t}, \quad P^0(x) = x^0 = (a_{0,1}, \dots, a_{0,N}),$$

$$P^+(x) = x^+ = \sum_{k > 0} \sum_{j=1}^N a_{k,j} e_j^{2\pi i k t}.$$

Notemos que E^0 es el espacio de puntos fijos bajo la acción de S^1 y su dimensión es N .

Otro espacio de Sobolev que nos es de utilidad es $H^1(S^1, C^N)$, el cual puede ser descrito de varias formas dentro de las cuales elegimos la siguiente para caracterizarlo. $H^1(S^1, C^N)$ es el espacio de Hilbert que consta de las curvas cerradas $x : S^1 \rightarrow C^N$ tales que x es absolutamente continua y $\dot{x} \in L^2(S^1, C^N)$, en donde el producto interior está definido como

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^N (1 + |k|^2) u_{k,j} \bar{v}_{k,j},$$

donde se están usando los coeficientes de Fourier de u, v , $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^N u_{k,j} e_j^{2\pi i k t}$, $v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^N v_{k,j} e_j^{2\pi i k t}$.

Sea $H : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 tal que

$$|\nabla H(u)| \leq b + a |u|^s \quad \text{para todo } u \in \mathbf{R}^{2N}, \text{ con } a, b > 0, \text{ y } s \geq \frac{1}{2}.$$

Definamos $\varphi_H : E \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$\varphi_H(x) := \int_0^1 H(x_p(t), x_q(t)) dt, \quad x = x_p + i x_q \in E$$

Supongamos que φ_H satisface las siguientes propiedades:

$$* \quad \varphi_H \text{ es de clase } C^1. \quad (45)$$

$$** \quad D\varphi_H(x)(\xi) = \int_0^1 \nabla H(x_p(t), x_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt, \quad (46)$$

$$\xi = \xi_p + i \xi_q \in E.$$

En la siguiente sección demostraremos que los hamiltonianos definidos en 3.1.3 satisfacen todas estas propiedades.

Definamos $A : E \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$A(x) := \frac{1}{2} \langle Lx, x \rangle = \frac{1}{2} (\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2), \quad Lx = x^+ - x^-.$$

Observemos que si expresamos a $A(x) = \langle \cdot, \cdot \rangle \circ F(x)$, donde $F : E \rightarrow E \times E$ está definida por $F(x) = (Lx, x)$, entonces resulta claro que $A(x)$ es una

función C^1 ya que es composición de funciones C^1 , F lineal continua y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilineal continua.

Por tanto

$$\phi_H(x) := \frac{1}{2} \langle Lx, x \rangle - \int_0^1 H(x_p(t), x_q(t)) dt, \quad x = x_p + ix_q$$

es una función de clase C^1 y

$$D\phi_H(x)(\xi) = \langle Lx, \xi \rangle - \int_0^1 \nabla H(x_p(t), x_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt, \quad (47)$$

donde $\xi = \xi_p + i\xi_q \in E$. De esto se sigue, usando el teorema de representación de Riesz, que

$$\nabla \phi_H(x) = Lx - \nabla \varphi_H(x). \quad (48)$$

Ahora veamos que las soluciones de período 1 de

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)) \quad \text{donde } J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (\text{SH})$$

son precisamente los puntos críticos de la funcional $\phi_H : E \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\phi_H(x) = \frac{1}{2} \langle Lx, x \rangle - \int_0^1 H(x_p(t), x_q(t)) dt, \quad Lx = x^+ - x^-, \quad x = x_p + ix_q$$

PROPOSICION 3.2.1 Sea $H : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 tal que

$$|\nabla H(u)| \leq b + a |u|^s \quad \text{para todo } u \in \mathbf{R}^{2N},$$

con $s \geq \frac{1}{2}$, que además satisface (45) y (46). Entonces $x(t)$ es solución de período 1 de

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)), \quad x(t) = (x_p(t), x_q(t))$$

si y sólo si x es punto crítico de

$$\phi_H(x) = \frac{1}{2} \langle Lx, x \rangle - \int_0^1 H(x_p(t), x_q(t)) dt, \quad x = x_p + ix_q.$$

Para la demostración de 3.2.1 necesitamos las siguientes proposiciones

PROPOSICION 3.2.2 Sea $z = z_p + iz_q \in H^1(S^1, \mathbf{C}^N)$ entonces

$$\langle Lz, \xi \rangle = - \int_0^1 J(\dot{z}_p(t), \dot{z}_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt, \quad \xi = \xi_p + i\xi_q \in E$$

PROPOSICION 3.2.3 Sea $H : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 tal que

$$|\nabla H(u)| \leq b + a|u|^s \quad \text{para todo } u \in \mathbf{R}^{2N},$$

con $s \geq \frac{1}{2}$, que además satisface (45). Sea $x = x_p + ix_q$ un punto crítico de ϕ_H entonces existe un único $\hat{x} = \hat{x}_p + i\hat{x}_q \in H^1(S^1, \mathbf{C}^N)$ tal que

$$(\dot{\hat{x}}_p(t), \dot{\hat{x}}_q(t)) = J\nabla H(x_p(t), x_q(t)) \quad \text{c.d.q.}$$

y

$$x(0) = \hat{x}(0)$$

Demostración de la proposición 3.2.1

\Rightarrow Sea $x(t) = (x_p(t), x_q(t))$ solución de

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)). \quad (49)$$

Tomemos $x = x_p + ix_q$ y $\xi = \xi_p + i\xi_q \in E$. Por (47) tenemos que

$$\begin{aligned} D\phi_H(x)(\xi) &= \langle Lx, \xi \rangle - \int_0^1 \nabla H(x_p(t), x_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt \\ &= - \int_0^1 J(\dot{x}_p(t), \dot{x}_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt \\ &\quad - \int_0^1 \nabla H(x_p(t), x_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt \quad \text{por 3.2.2} \\ &= \int_0^1 (-J(\dot{x}_p(t), \dot{x}_q(t)) - \nabla H(x_p(t), x_q(t))) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt \\ &= 0 \quad \text{por (49)}. \end{aligned}$$

Así $D\phi_H(x)(\xi) = 0$ para todo $\xi \in E$. Por tanto $x = x_p + ix_q$ es un punto crítico de ϕ_H .

\Leftarrow) Sea x un punto crítico de ϕ_H . Entonces por (48)

$$0 = \nabla \phi_H(x) = Lx - \nabla \varphi_H(x) \Rightarrow Lx = \nabla \varphi_H(x). \quad (50)$$

Por 3.2.3 existe un único $\hat{x} = \hat{x}_p + i\hat{x}_q \in H^1(S^1, C^N)$ tal que

$$(\dot{\hat{x}}_p(t), \dot{\hat{x}}_q(t)) = J\nabla H(x_p(t), x_q(t)) \quad \text{c.d.q.} \quad (51)$$

y

$$x(0) = \hat{x}(0).$$

Probaremos ahora que $\hat{x} = x$. Sea $\xi = \xi_p + i\xi_q \in C^\infty(S^1, C^N)$ y calculemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \nabla H(x_p(t), x_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt &= \int_0^1 (-\xi_q \cdot \dot{\hat{x}}_p + \xi_p \cdot \dot{\hat{x}}_q) dt \quad \text{por (51)} \\ &= \int_0^1 (\dot{\xi}_q \cdot \hat{x}_p - \dot{\xi}_p \cdot \hat{x}_q) dt \\ &= \text{Re}(\hat{x}, \tilde{\xi})_{L^2} \quad \text{donde } \tilde{\xi} = \dot{\xi}_q - i\dot{\xi}_p, \end{aligned}$$

en la penúltima igualdad se usó que las funciones son periódicas y se aplicó integración por partes (válido porque \hat{x}_p, \hat{x}_q son absolutamente continuas).

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_0^1 \nabla H(x_p(t), x_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt &= \langle \nabla \varphi_H(x), \xi \rangle \\ &= \langle Lx, \xi \rangle \quad \text{por (50)} \\ &= \langle L\xi, x \rangle \quad L \text{ es autoadjunto} \\ &= - \int_0^1 J(\dot{\xi}_p(t), \dot{\xi}_q(t)) \cdot (x_p, x_q) dt \\ &= \text{Re}(x, \tilde{\xi})_{L^2}, \quad \tilde{\xi} = \dot{\xi}_q - i\dot{\xi}_p \end{aligned}$$

la penúltima igualdad se debe a 3.2.2. Por tanto

$$\text{Re}(\hat{x}, \tilde{\xi})_{L^2} = \text{Re}(x, \tilde{\xi})_{L^2} \quad \text{para todo } \tilde{\xi} \in \{-i\dot{\xi} : \xi \in C^\infty(S^1, C^N)\}.$$

Como la anterior igualdad es en particular válida para las funciones $\{e_j^{2\pi ikt}\}_{1 \leq j \leq N, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ entonces los coeficientes de sus respectivas series de Fourier, $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^N a_{k,j} e_j^{2\pi ikt}$, $\hat{x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^N \hat{a}_{k,j} e_j^{2\pi ikt}$, son iguales para $k \neq 0$ i.e.

$$a_{k,j} = \hat{a}_{k,j} \quad 1 \leq j \leq N, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

y como

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k,1}, \dots, \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k,N} \right) = x(0) = \hat{x}(0) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}_{k,1}, \dots, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}_{k,N} \right),$$

tenemos que

$$a_{0,j} = \hat{a}_{0,j} \quad 1 \leq j \leq N.$$

De lo que se sigue

$$\hat{x} = x \quad \text{c.d.q.}, \quad (52)$$

y que \hat{x} y x tienen la misma expresión en series de Fourier, por lo que $x \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$. Por tanto $x(t) = (x_p(t), x_q(t))$ es continua y de (52) se sigue que $\hat{x} = x$. Como $\hat{x}(t) = (\hat{x}_p(t), \hat{x}_q(t))$ es solución de (SH) y ∇H es continuo entonces $x(t) = (x_p(t), x_q(t))$ tiene derivada continua. ■

Demostración de la proposición 3.2.2

Sea $z \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ y $\xi \in E$. Expresémoslos en términos de su serie de Fourier

$$z = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N a_{k,j} e_j^{2\pi i k t}, \quad \xi = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N b_{k,j} e_j^{2\pi i k t}.$$

Calculemos

$$\begin{aligned} (\dot{z}, e_j^{2\pi i k t})_{L^2} &= \int_0^1 \dot{z}(t) e_j^{-2\pi i k t} dt \\ &= 2\pi \int_0^1 z(t) i k e_j^{-2\pi i k t} dt \quad \text{integración por partes} \\ &= 2\pi i k a_{k,j}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\dot{z} = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N i k a_{k,j} e_j^{2\pi i k t}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} - \int_0^1 J(\dot{z}_p(t), \dot{z}_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt &= \text{Re}(\dot{z}_q(t) - i \dot{z}_p(t), \xi(t))_{L^2} \\ &= \text{Re}((-i \dot{z}(t), \xi(t))_{L^2}) \\ &= 2\pi \text{Re} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N k a_{k,j} \bar{b}_{k,j}. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la definición de L y de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tenemos

$$\langle Lz, \xi \rangle = 2\pi \text{Re} \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^N k a_{k,j} \bar{b}_{k,j} \right).$$

Por tanto

$$\langle Lz, \xi \rangle = - \int_0^1 J(\dot{z}_p(t), \dot{z}_q(t)) \cdot (\xi_p(t), \xi_q(t)) dt. \blacksquare$$

Para la demostración de la proposición 3.2.3 necesitaremos el siguiente

LEMA 3.2.4 Sea $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ tal que $[x] = 0$, $[x] := \int_0^1 x(t) dt$. Entonces existe $\hat{x} \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ tal que $x = \dot{\hat{x}}$, y \hat{x} está determinado en forma única si su valor inicial $\hat{x}(0)$ es especificado.

Demostración Probemos el caso en que $N = 1$, el caso general es enteramente igual. Sea $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$. Por Hölder

$$\int_0^1 x(t) dt \leq \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \|x\|_{L^2} < \infty.$$

Por tanto $x \in L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$. Definamos

$$\hat{x}(t) = c + \int_0^t x(s) ds. \quad (53)$$

Entonces \hat{x} es absolutamente continua,

$$\hat{x}(0) = c = c + \int_0^1 x(s) ds = \hat{x}(1), \quad [x] = 0$$

y

$$\hat{x}'(t) = x(t) \quad \text{c.d.q.} \quad [\text{Ru}] \text{ página 176.}$$

Como \hat{x} es absolutamente continua, $\hat{x}(0) = \hat{x}(1)$ y $\hat{x}'(t) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ entonces $\hat{x} \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$. Supongamos que $z \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ es tal que $\dot{z} = x$ y que $z(0) = \hat{x}(0)$ entonces

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) + \int_0^t \dot{z}(s) ds \quad [\text{Co}] \text{ página 188} \\ &= z(0) + \hat{x}(t) - c \quad \text{por (53)} \\ &= \hat{x}(t), \quad z(0) = \hat{x}(0) = c \end{aligned}$$

Por tanto $z = \hat{x}$. \blacksquare

En la siguiente demostración se usan ideas del Dr. Jorge Ize.

Demostración de la proposición 3.2.3

Sea x un punto crítico de ϕ_H . Probemos que $\nabla H(x(t))$ satisface las hipótesis de 3.2.4. Sea $\xi_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in E$. Como x es un punto crítico de ϕ_H entonces $Lx = \nabla\phi_H(x)$ por (48). De esto se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla\phi_H(x), \xi_j \rangle \\ \Rightarrow 0 &= \int_0^1 \nabla H(x(t)) \cdot \xi_j(t) dt \quad 1 \leq j \leq N \\ \Rightarrow 0 &= \int_0^1 J\nabla H(x(t)) dt. \end{aligned}$$

Por tanto el valor medio, $\int_0^1 J\nabla H(x(t)) dt$, es cero.

Ahora de nuestra hipótesis

$$|\nabla H(u)| \leq b + a \|u\|^s \quad \text{para todo } u \in \mathbf{R}^{2N}, s \geq \frac{1}{2},$$

se sigue que $J\nabla H(x(t)) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$. Probémoslo.

Como $x \in E$ entonces $x \in L^q(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ para todo $1 \leq q < \infty$, ver Adams teorema 7.58 página 218, de donde se sigue

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\nabla H(x(t))|^2 dt &\leq 2 \int_0^1 (a^2 + b^2 \|x(t)\|^{2s}) dt \\ &= 2a^2 + 2b^2 \|x\|_{L^2}^{2s}, \\ &\leq 2a^2 + 2Kb^2 \|x\|^{2s}. \end{aligned}$$

Por tanto $J\nabla H(x(t))$ satisface las hipótesis de 3.2.4, de donde se sigue que existe $\hat{x} \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ tal que

$$\dot{\hat{x}} = J\nabla H(x(t)) \quad \text{c.d.q.,}$$

y es único si $\hat{x}(0) = x(0)$. ■

Una referencia más extensa para este problema variacional es [BR2].

§3.3 Nuestro problema variacional

Recordemos que identificamos a \mathbf{R}^{2N} con C^N

$$x = (x_p, x_q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2N} \leftrightarrow \mathbf{x} = x_p + ix_q \in C^N.$$

En la sección anterior vimos que si $H : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$ es tal que $|\nabla H(u)| \leq b + a|u|^s$ para todo $u \in \mathbf{R}^{2N}$ con $a, b > 0$, $s \geq \frac{1}{2}$ y

$$\varphi_H(\mathbf{x}) := \int_0^1 H(x(t)) dt \quad (SH)$$

satisface (*), enumerado con (45), y (**), enumerado con (46), entonces las soluciones de período 1 de la ecuación hamiltoniana

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)),$$

son puntos críticos de

$$\phi_H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle L\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \int_0^1 H(x(t)) dt \quad \text{donde } L\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$$

e inversamente.

Notemos que si $H \in \mathcal{H}_S$ entonces

$$|\nabla H(u)| \leq b + a|u|^s \quad \text{para todo } u \in \mathbf{R}^{2N},$$

donde a y b son como en (37) y (38), y $s = 2$, esta afirmación se sigue de (42).

En esta sección probaremos que si $H \in \mathcal{H}_S$, familia definida en 3.1.2, entonces ϕ_H satisface (*) y (**). Por lo cual buscar soluciones de (SH) de período 1 es equivalente a buscar puntos críticos de ϕ_H .

Notemos que no podemos determinar de antemano en que hipersuperficie de energía se encuentran las soluciones de (SH) que han sido obtenidas como puntos críticos de ϕ_H .

Pero 3.3.3 nos garantizará que si nos restringimos a puntos críticos, \mathbf{x} , de ϕ_H con valor crítico positivo, $\phi_H(\mathbf{x}) > 0$, entonces x estará contenido en alguna hipersuperficie difeomorfa a S y "cercana" a S .

Probemos que si $H \in \mathcal{H}_S$ entonces ϕ_H satisface (45) y (46).

PROPOSICION 3.3.1 (ϕ_H satisface (*) y (**)) Sea $H \in \mathcal{H}_S$ entonces

$$\varphi_H(\mathbf{x}) := \int_0^1 H(x(t)) dt$$

es una función de clase $C^{1,1}(E, \mathbf{R})$ y

$$D\varphi_H(\mathbf{x})(\xi) = \int_0^1 \nabla H(x(t)) \cdot \xi(t) dt.$$

Además φ'_H es compacto, donde $D\varphi_H(\mathbf{x})(\xi) = \langle \varphi'_H(\mathbf{x}), \xi \rangle$ para todo $\xi \in E$.

Demostración Comencemos probando que $\|D^2H(x)\|$ está acotada para todo $x \in \mathbf{R}^{2N}$.

Por definición de H , $H(x) = a|x|^2$ si $|x| \gg 0$, digamos si $|x| > \tilde{\rho}$. Así

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right) = \begin{pmatrix} 2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2a \end{pmatrix} \quad \text{si } |x| > \tilde{\rho}.$$

De donde se sigue que

$$\|D^2H(x)\| := \sup_{|h_1|=|h_2|=1} |D^2H(x)(h_1, h_2)| \leq 2a |h_1| |h_2| = 2a \quad \text{si } |x| > \tilde{\rho}.$$

Como D^2H es continua

$$\|D^2H(x)\| < M_1 \quad \text{si } |x| < \tilde{\rho}.$$

Por tanto

$$\|D^2H(x)\| \leq M \equiv M_1 + 2a \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}. \quad (54)$$

Ahora por Taylor

$$\begin{aligned} |H(x+h) - H(x) - \nabla H(x)(h)| &\leq \frac{1}{2} |D^2H(c)(h, h)| \quad c = tx + \\ &\quad (1-t)(x+h) \text{ p.a. } t \in [0, 1] \\ &\leq \frac{1}{2} \|D^2H(c)\| |h|^2 \\ &\leq \frac{M}{2} |h|^2 \quad \text{por (54)}. \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} |\varphi_H(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \varphi_H(\mathbf{x}) - \int_0^1 \nabla H(x(t)) \cdot h(t) dt| &\leq \int_0^1 |H(x+h) - H(x) - \nabla H(x(t)) \cdot h(t)| dt \\ &\leq \frac{M}{2} \|\mathbf{h}\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{M}{2} \|\mathbf{h}\|^2. \end{aligned}$$

Por tanto φ_H es diferenciable y

$$D\varphi_H(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^1 \nabla H(x(t)) \cdot \boldsymbol{\xi}(t) dt.$$

Ahora veamos que $D\varphi_H$ es localmente Lipschitz. Utilizando el teorema del valor medio y que $\|D^2H(x)\| \leq M$ para todo $x \in \mathbf{R}^{2N}$ se prueba que

$$|\nabla H(x+h) - \nabla H(x)| \leq M_0 |h| \quad \forall x, h \in \mathbf{R}^{2N}, M_0 \equiv cte,$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned} \|D\varphi_H(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - D\varphi_H(\mathbf{x})\|_{E^*} &:= \sup_{\|z\| \leq 1} \left| \int_0^1 (\nabla H(x(t) + h(t)) - \nabla H(x(t))) \cdot z(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{\|z\| \leq 1} \left| M_0 \int_0^1 |h(t)| |z(t)| dt \right| \\ &\leq \sup_{\|z\| \leq 1} M_0 \|h\|_{L^2} \|z\|_{L^2} \\ &\leq M_0 \|\mathbf{h}\|_{L^2} \\ &\leq M_0 \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Por tanto $D\varphi_H$ es localmente Lipschitz.

Por último probemos que φ_H' es compacto. Sea $(\mathbf{x}_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión acotada de E . Porque E está compactamente encajado en $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$, entonces hay una subsucesión de $(\mathbf{x}_j)_{j=1}^\infty$ que converge en $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$. Supongamos que $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}$ en $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$. De esto y de (55) se sigue que

$$\|D\varphi_H(\mathbf{x}_j) - D\varphi_H(\mathbf{x})\|_{E^*} \leq M_0 \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Por tanto $D\varphi_H$ es compacto, y del teorema de Riesz se sigue lo deseado. ■

Así de 3.2.1 y 3.2.2 tenemos

COROLARIO 3.3.2 Sea $H \in \mathcal{H}_S$ entonces los puntos críticos de

$$\phi_H(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) - \int_0^1 H(x(t))dt,$$

donde $A(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t)dt$, son exactamente las soluciones de período 1 de la ecuación

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)). \blacksquare$$

Así nuestra búsqueda será ahora de puntos críticos \mathbf{x} de la funcional ϕ_H , pero además debido al siguiente lema sólo nos interesarán aquellos puntos para los cuales $\phi_H(\mathbf{x}) > 0$.

Observemos que si $x(t)$ es una curva cerrada y C^1 entonces

$$\langle L\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t)dt, \quad (56)$$

ésto se sigue de 3.2.2 y de que $\mathbf{x} \in H^1(S^1, \mathbb{C}^N)$.

LEMA 3.3.3 Sea $H \in \mathcal{H}_S$. Y sea $x(t)$ una solución de período 1 de

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)), \quad (SH)$$

o equivalentemente \mathbf{x} un punto crítico de ϕ_H (por 3.2.1 y 3.3.1), la cual satisface $\phi_H(\mathbf{x}) > 0$. Entonces $x(t) \in S_\epsilon$ para todo t y para algún $\mu < \epsilon < \alpha$.

Demostración Sea $x(t)$ solución de período 1 de (SH).

Supongamos que $|x(0)| > R$. Por ser x solución de (SH)

$$0 = \dot{x}(t) \cdot \nabla H(x(t)) = \frac{d}{dt}H(x(t)) \quad \text{para todo } t.$$

Por tanto $H(x(t)) = cte$ para todo t . Como $cte = H(x(t)) = g(|x(t)|)$ y $g(s)$ es estrictamente creciente si $|s| > R$ entonces

$$|x(t)| = |x(0)| \quad \text{para todo } t. \quad (57)$$

Además $x(t)$ satisface

$$-J\dot{x}(t) = \nabla H(x(t)) = g'(|x(t)|) \frac{2x(t)}{2|x(t)|}. \quad (58)$$

Calculemos

$$\begin{aligned}
 \phi_H(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \langle L\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \int_0^1 H(x(t)) dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt - \int_0^1 H(x(t)) dt \quad \text{por (56)} \\
 &= \frac{1}{2} g'(|x(0)|) |x(0)| - g(|x(0)|) \quad \text{por (58) y (57)} \\
 &\leq \frac{1}{2} g'(|x(0)|) |x(0)| - a |x(0)|^2, \quad g(s) \geq as^2 \\
 &\leq a |x(0)|^2 - a |x(0)|^2, \quad 0 < g'(s) \leq 2as \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

En caso de que $|x(0)| < R$ entonces $x(t) \in S_\epsilon$ para toda t y para algún $\mu < \epsilon < \alpha$ o $x(t) \equiv cte$. Pero para $x(t) \equiv cte$

$$\phi_H(\mathbf{x}) = -\int_0^1 H(x(t)) dt \leq 0 \quad \text{ya que } H(u) \geq 0 \text{ para todo } u \in \mathbf{R}^{2N}.$$

Por tanto

$$x(t) \in S_\epsilon \text{ para todo } t \text{ y para algún } \mu < \epsilon < \alpha. \blacksquare$$

§3.4 Nuestro problema variacional satisface las hipótesis del teorema de enlace

Recordemos que en la sección 3.1 construimos una familia de hamiltonianos \mathcal{H}_S para S una hipersuperficie compacta y conexa. En esta sección demostraremos que para $H \in \mathcal{H}_S$, la funcional ϕ_H satisface las hipótesis del teorema de enlace, 2.3.3. Para ello primero probaremos que para cada $c > 0$ ϕ_H satisface las hipótesis del lema de Γ -deformación, 2.3.2, ya que el lema nos garantiza que si ϕ_H satisface sus hipótesis entonces tiene la propiedad de Γ -deformación. De estas hipótesis sólo nos resta probar que ϕ_H satisface $(PS)_c$ para cada $c > 0$. Después probaremos que se satisface la condición (L2) del teorema de enlace, para $c^0 > 0$ adecuado. La condición (L1) se

probará en general para $H \in \mathcal{H}_S$ con c^∞ y F adecuados. Notemos que los puntos críticos c_j , de la funcional ϕ_H , obtenidos por el principio de minimax están en $[c^0, c^\infty]$. Para el caso en que la hipersuperficie es un elipsoide ξ de cierto tipo, $S = \xi$, requerimos optimizar nuestro intervalo $[c^0, c^\infty]$, lo cual logramos refinando la elección del número c^∞ que se obtuvo para el caso general en que S es una hipersuperficie compacta y conexa. Así probamos una versión adecuada de (L1) para hamiltonianos muy específicos $H_\xi \in \Lambda_\xi \subset \mathcal{H}_\xi$. Esta aplicación más específica del teorema de enlace para los hamiltonianos $H_\xi \in \Lambda_\xi$ se usará en el capítulo IV. En esencia ambas demostraciones de (L1) son iguales.

Recordemos que identificamos a \mathbf{R}^{2N} con \mathbf{C}^N

$$x = (x_p, x_q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2N} \leftrightarrow \mathbf{x} = x_p + ix_q \in \mathbf{C}^N$$

Comencemos probando (L1) para $H \in \mathcal{H}_S$

LEMA 3.4.1 (ϕ_H satisface (L1) para \mathbf{F} y $c^\infty = b$) Sea $H \in \mathcal{H}_S$ y sea $\mathbf{G} = \mathbf{G}(k_0)$ el subespacio vectorial generado por $\{\mathbf{e}_j^{2\pi ikt}\}_{1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq k_0}$ donde $\mathbf{e}_j^{2\pi ikt} = (0, \dots, 0, e^{2\pi ikt}, 0, \dots, 0)$. Entonces

$$\phi_H(\mathbf{x}) \leq b \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{G},$$

donde $k_0(H) = k_0 \geq j_0$ es como en (37) y b es como en (38). En particular

$$\phi_H(\mathbf{x}) \leq b \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{F}$$

donde $\mathbf{F} = \mathbf{F}(j_0)$ es el subespacio vectorial generado por $\{\mathbf{e}_j^{2\pi ikt}\}_{1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq j_0}$

Demostración

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}^- + \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}^+ \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{G}$.

$$\begin{aligned} \phi_H(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}^+\|^2 - \|\mathbf{x}^-\|^2) - \int_0^1 H(\mathbf{x}(t)) dt \\ &\leq \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}^+\|^2 - \|\mathbf{x}^-\|^2) - (-b + a\|\mathbf{x}\|_{L^2}^2) \quad \text{por (42)} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^-\|^2 + a\|\mathbf{x}^-\|_{L^2}^2\right) - a\|\mathbf{x}^0\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^+\|^2 - a\|\mathbf{x}^+\|_{L^2}^2\right) + b \\ &\leq (\pi k_0 - a)\|\mathbf{x}^+\|_{L^2}^2 + b, \quad (\|\mathbf{x}^+\|^2 = 2\pi \sum_{j=1}^N \sum_{1 \leq k \leq k_0} k |a_{k,j}|^2 \leq 2\pi k_0 \|\mathbf{x}^+\|_{L^2}^2) \\ &\leq b. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sean $0 < r_1 < \dots < r_N$ números reales tales que si $r_i^2/r_j^2 \in \mathbf{Q}$ entonces $i = j$. Definamos el elipsoide

$$\xi := \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = 1\}, \quad (59)$$

y ordenemos el conjunto $\mathcal{P} = \{k\pi r_i^2 : k \in \{1, 2, \dots\}, 1 \leq i \leq N\}$ en una sucesión estrictamente creciente (d_j^ξ) . Notemos que $d_j^\xi = k_j \pi r_{n_j}^2$ para k_j, n_j únicos.

Cuando S es el elipsoide ξ y $H_\xi \in \mathcal{H}_\xi$ tiene la propiedad de que

$$H_\xi(x) \geq d_{j_0}^\xi \tilde{H}(x) - M_{j_0} \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N} \quad (60)$$

para algún $j_0 \in \{1, 2, \dots\}$, donde $\tilde{H}(x) = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2}$, $M_{j_0} \equiv cte$, entonces podemos refinar la elección de c^∞ .

LEMA 3.4.2 (ϕ_{H_ξ} satisface (L1) para F y $c^\infty = M_{j_0}$) Sea $H_\xi \in \mathcal{H}_\xi$ tal que tiene la propiedad (60) entonces

$$M_{j_0} \geq \sup_{x \in E^- \oplus E^0 \oplus F} \phi_{H_\xi}(x)$$

donde F es el subespacio generado por $\{e_{n_j}^{2\pi i k_j t}\}_{j=1}^{j_0}$ donde $d_j^\xi = k_j \pi r_{n_j}^2$, $1 \leq j \leq j_0$.

Demostración Sea $x = x^- + x^0 + x^+ \in E^- \oplus E^0 \oplus F$, $x^+ = \tau_1 r_{n_1} e_{n_1}^{k_1 2\pi i t} + \dots + \tau_{j_0} r_{n_{j_0}} e_{n_{j_0}}^{k_{j_0} 2\pi i t}$.

$$\begin{aligned} \phi_{H_\xi}(x) &= \frac{1}{2} (\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2) - \int_0^1 H_\xi(x(t)) dt \\ &\leq \frac{2\pi}{2} (k_1 \tau_1^2 r_{n_1}^2 + \dots + k_{j_0} \tau_{j_0}^2 r_{n_{j_0}}^2) - \int_0^1 [d_{j_0}^\xi \tilde{H}(x(t)) - M_{j_0}] dt \quad \text{por (60)}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^1 [d_{j_0}^\xi \tilde{H}(x(t)) - M_{j_0}] dt &= d_{j_0}^\xi \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2(t) + x_{j+N}^2(t)}{r_j^2} dt - M_{j_0} \\ &= d_{j_0}^\xi \sum_{j=1}^N \frac{\|\hat{x}_j\|_{L^2}^2}{r_j^2} - M_{j_0}, \quad \hat{x}_j(t) = (0, \dots, x_j(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0, \dots, x_{j+N}(t), \dots, 0) \\
& = d_{j_0}^\xi \sum_{j=1}^N \frac{\|\hat{\mathbf{x}}_j^-\|_{L^2}^2 + \|\hat{\mathbf{x}}_j^0\|_{L^2}^2 + \|\hat{\mathbf{x}}_j^+\|_{L^2}^2}{r_j^2} - M_{j_0}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\phi_{H_t}(\mathbf{x}) & \leq k_1 \pi r_{n_1}^2 \tau_1^2 + \dots + k_{j_0} \pi r_{n_{j_0}}^2 \tau_{j_0}^2 - d_{j_0}^\xi \sum_{j=1}^N \frac{\|\hat{\mathbf{x}}_j^+\|_{L^2}^2}{r_j^2} + M_{j_0} \\
& = (d_1^\xi - d_{j_0}^\xi \frac{r_{n_1}^2}{r_1^2}) \tau_1^2 + \dots + (d_{j_0}^\xi - d_{j_0}^\xi \frac{r_{n_{j_0}}^2}{r_{j_0}^2}) \tau_{j_0}^2 + M_{j_0} \\
& \leq M_{j_0} \text{ porque } (d_j^\xi)_{j=1}^\infty \text{ está ordenada en forma creciente.}
\end{aligned}$$

Así

$$\sup_{E \oplus E^0 \oplus F} \phi_{H_t}(\mathbf{x}) \leq M_{j_0}. \blacksquare$$

En lo que resta de la sección fijaremos $H \in \mathcal{H}_S$. Ahora probemos que ϕ_H satisface **(L2)**. Esto se podría hacer como en [IIZ] usando el teorema de Taylor, para lo cual necesitamos que ϕ_H sea de clase C^2 , para probar que en efecto es de clase C^2 se podría proceder como lo hace Struwe en el apéndice C de [St2]. En la siguiente demostración, que se debe al Dr. Jorge Ize, sólo se usa que H es continua, cero en una vecindad del cero y cuadrática fuera de una bola.

LEMA 3.4.3 (ϕ_H satisface (L2)) Existen c^0 y $\rho_0 > 0$ tales que

$$\phi_H(\mathbf{x}) \geq c^0 \text{ si } \mathbf{x} \in S_{\rho_0}^+ = \{\mathbf{x} \in E^+ : \|\mathbf{x}\| = \rho_0\}$$

Demostración Dado que $H(x) \equiv 0$ en una vecindad U de 0 y $H(x) = a|x|^2$ para $|x| \geq 2R$ (por ejemplo) entonces si $p \geq 2$ existe K , dependiendo de p , tal que

$$H(x) \leq K|x|^p,$$

ésto es obvio dada la continuidad de H . De donde se desprende que

$$\begin{aligned}
\phi_H(\mathbf{x}) & = \|\mathbf{x}^+\|^2 - \|\mathbf{x}^-\|^2 - \int_0^1 H(x(t)) dt \\
& \geq \|\mathbf{x}^+\|^2 - \|\mathbf{x}^-\|^2 - K \|\mathbf{x}\|_{L^p}^p \\
& \geq \|\mathbf{x}^+\|^2 - \|\mathbf{x}^-\|^2 - K c^p(p) \|\mathbf{x}\|^p.
\end{aligned}$$

ya que por el teorema de encaje de E en L^p tenemos que $\|\mathbf{x}\|_{L^p} \leq c(p)\|\mathbf{x}\|$ para todo $1 \leq p < \infty$.

Así si $\mathbf{x} \in E^+$

$$\phi_H(\mathbf{x}) \geq \|\mathbf{x}\|^2(1 - Kc^p\|\mathbf{x}\|^{p-2}).$$

Tomando ρ_0 tal que $\rho_0 = (2Kc^p)^{-\frac{1}{p-2}}$ tenemos que

$$\phi_H(\mathbf{x}) \geq \frac{\rho_0^2}{2} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in S_{\rho_0}^+.$$

(PS)_c Se dice que ϕ_H satisface la condición (PS)_c para $c \in \mathbf{R}$, si toda sucesión $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ para la cual $\phi_H(\mathbf{x}_n) \rightarrow c$ y $\nabla\phi_H(\mathbf{x}_n) \rightarrow 0$ tiene una subsucesión convergente.

En la siguiente demostración se sigue la idea que usan [HZ1] y desarrolla [St2], página 127, y se incluye una prueba hecha por el Dr. Jorge Ize, relativa a que la curva \mathbf{v} es una solución trivial de la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{v}}(t) = 2aJ\mathbf{v}(t)$.

LEMA 3.4.4 (ϕ_H satisface (PS)_c) Sea $H \in \mathcal{H}_S$. Entonces ϕ_H satisface (PS)_c para cada $c > 0$.

Demostración Sea $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en E que satisface las hipótesis de la condición (PS)_c.

Veamos primero que si $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ está acotada entonces tiene una subsucesión convergente.

Como φ'_H es compacta (por 3.3.1) $(\varphi'_H(\mathbf{x}_n))_{n=1}^\infty$ tiene una subsucesión convergente, digamos ella misma, $\varphi'_H(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{y}$.

Así

$$\mathbf{x}_n^+ - \mathbf{x}_n^- = L(\mathbf{x}_n) = \nabla\phi_H(\mathbf{x}_n) + \varphi'_H(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{y}.$$

Porque E^0 tiene dimensión finita $(\mathbf{x}_n^0)_{n=1}^\infty$ tiene una subsucesión convergente, digamos ella misma. Por lo que

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n^+ + \mathbf{x}_n^- + \mathbf{x}_n^0 \rightarrow \mathbf{x}.$$

Ahora probemos que $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ está acotada. Supongamos lo contrario i.e. $\|\mathbf{x}_n\| \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} |\langle \varphi'_H(\mathbf{x}_n)/\|\mathbf{x}_n\|, \mathbf{w} \rangle| &= \left| \int_0^1 \nabla H(\mathbf{x}_n(t)) \cdot \mathbf{w}(t) dt \right| / \|\mathbf{x}_n\| \\ &\leq \frac{\|\nabla H(\mathbf{x}_n)\|_{L^2} \|\mathbf{w}\|_{L^2}}{\|\mathbf{x}_n\|} \end{aligned}$$

Demos una cota adecuada para $\|\nabla H(x_n)\|_{L^2}$.

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |\nabla H(x_n(t))|^2 dt\right)^{1/2} &\leq \left(\int_{\{t:|x_n(t)|\leq R\}} |\nabla H(x_n(t))|^2 dt\right)^{1/2} + \\ &\quad \left(\int_{\{t:|x_n(t)|>R\}} |\nabla H(x_n(t))|^2 dt\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\{t:|x_n(t)|\leq R\}} |\nabla H(x_n(t))|^2 dt\right)^{1/2} + 2a\|x_n\|_{L^2} \\ &\leq d(1 + \|x_n\|_{L^2}), \quad d = \max_{|x|\leq R} \{2a, \max_{|x|\leq R} |\nabla H(x)|\}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\nabla H(x_n)\|_{L^2} \leq d(1 + \|x_n\|_{L^2}).$$

Así regresando a nuestro cálculo tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\|\nabla H(x_n)\|_{L^2} \|w\|_{L^2}}{\|x_n\|} &\leq d\left(\frac{1}{\|x_n\|} + \frac{\|x_n\|_{L^2}}{\|x_n\|}\right) \|w\|_{L^2} \\ &\leq d_1 \|w\|_{L^2} \quad d_1 \equiv cte \text{ ya que } \|x_n\| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por tanto

$$|\langle \varphi'_H(x_n)/\|x_n\|, w \rangle| \leq d_1 \|w\|_{L^2} \quad d_1 \equiv cte. \quad (61)$$

De las hipótesis tenemos que

$$\frac{1}{\|x_n\|} \phi'_H(x_n) \rightarrow 0. \quad (62)$$

Tomando en (61) $w = \varphi'_H(x_n)/\|x_n\|$ tenemos que

$$(\varphi'_H(x_n)/\|x_n\|)_{n=1}^\infty \text{ está acotado.}$$

Usando el teorema de Alaoglu y que E es un espacio de Hilbert (y por tanto reflexivo), se sigue que los acotados en E son relativamente débilmente compactos (ver [Cn] página 132). Así podemos suponer que

$$y_n := \varphi'_H(x_n)/\|x_n\| \rightarrow y \text{ débilmente en } E, \quad (63)$$

entonces

$$y_n \rightarrow y \text{ en } L^2. \quad (64)$$

Ahora veamos que $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$ en E . Probemos que

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \rangle \rightarrow 0 \quad (65)$$

Usando (61) con $\mathbf{w} = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}$ y despues aplicando (64) tenemos que $|\langle \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \rangle| \leq d_1 \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\|_{L^2} \rightarrow 0$, por tanto el primer sumando en (65) tiende a cero. Usando (63) tenemos que $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{y} \rangle = 0$. Por tanto hemos probado (65).

Así de (62) y de que $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$ en E tenemos que, para $\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}_n\|}$,

$$\mathbf{v}_n^+ - \mathbf{v}_n^- = L(\mathbf{v}_n) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_n\|} \phi'_H(\mathbf{x}_n) + \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}.$$

De este hecho aunado a que E^0 tiene dimensión finita se sigue que

$$\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v} \quad \text{en } E.$$

Además $(\mathbf{v}_n)_{n=1}^\infty$ converge casi donde quiera a \mathbf{v} .

Como $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ en E y como L es continua entonces

$$\langle L\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \rightarrow \langle L\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Como por (62)

$$\begin{aligned} \langle \phi'_H(\mathbf{x}_n), \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{x}_n\|} \rangle &\rightarrow 0 \quad \text{para todo } \mathbf{w} \in E, \\ \langle \phi'_H(\mathbf{x}_n), \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{x}_n\|} \rangle &= \langle L\mathbf{v}_n, \mathbf{w} \rangle - \int_0^1 \frac{\nabla H(\|\mathbf{x}_n\|v_n(t)) \cdot \mathbf{w}(t)}{\|\mathbf{x}_n\|} dt \\ &= \langle L\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \int_0^1 2av(t) \cdot \mathbf{w}(t) dt + \langle L(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left(\frac{\nabla H(\|\mathbf{x}_n\|v_n(t))}{\|\mathbf{x}_n\|} - 2av_n(t) \right) \cdot \mathbf{w}(t) dt - \\ &\quad \int_0^1 2a(v_n(t) - v(t)) \cdot \mathbf{w}(t) dt, \end{aligned}$$

y $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ en E y en L^2 entonces sólo es necesario probar que

$$\int_0^1 \left(\frac{\nabla H(\|\mathbf{x}_n\|v_n(t))}{\|\mathbf{x}_n\|} - 2av_n(t) \right) \cdot \mathbf{w}(t) dt \rightarrow 0. \quad (66)$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Ya que si suponemos ésto probado tenemos que $\langle Lv, w \rangle = \int_0^1 2av \cdot w dt$. Por la proposición 3.2.1 aplicada a $\tilde{H}(x) = a \|x\|^2$, v es punto crítico de la funcional asociada y por lo tanto solución de la ecuación diferencial $\dot{v} = 2aJv$. Reparametrizando $v(t)$, $\tilde{v}(t) := v(t/2a)$, tenemos que \tilde{v} es una solución de $\dot{\tilde{v}}(t) = J\tilde{v}(t)$ de período $2a$. Como vimos en 1.1, tomando $a_1 = 1 = a_2$, las soluciones de esta última ecuación tiene período $m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$. Pero por nuestra elección de a (ver (37)) tenemos que $2a \notin 2\pi\mathbf{Z}$. Por tanto la solución es trivial, $v = 0$, lo que contradice el hecho de que $\|v\| = 1$. Por tanto $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$ está acotada.

Probemos (66). Sea $I_n = \{t : |x_n(t)| > 2R\} \subset \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \nabla H(x) = 2ax\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{\nabla H(\|x_n\|v_n(t))}{\|x_n\|} - 2av_n(t) \right|^2 dt &= \int_{I_n^c} \left| \frac{\nabla H(x_n(t)) - 2ax_n(t)}{\|x_n\|} \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{(M + 4aR)^2}{\|x\|^2} dt \text{ donde} \\ &M = \max_{|x| \leq 2R} |\nabla H(x)| \\ &\leq \frac{(M + 4aR)^2}{\|x_n\|^2} \rightarrow 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora veamos que el lema de deformación que presentan Ekeland y Hofer en [EH2] (lema 1 página 559) es incorrecto.

LEMA 3.4.5 (Lema de deformación de Ekeland-Hofer) Si $H \in \mathcal{H}_S$ y U es una vecindad S^1 -invariante del conjunto de puntos críticos de ϕ_H con valor $c > 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para algún $h \in \Gamma^*$

$$h(\phi_H^{c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi_H^{c-\epsilon}. \quad (67)$$

demostramos que el lema es falso

En la definición que manejan ellos de Γ^* se pide que si $h \in \Gamma^*$ entonces existe $\rho > 0$ tal que $h(x) = x$ si $x \in E$ y $\|x\| \geq \rho$. Esta es la propiedad que no se satisface en 3.4.5, y demostrarlo es sencillo. Probémoslo. Supongamos que el lema 3.4.5 es válido con U una vecindad acotada, $\|x\| < M$ para todo $x \in U$. Sea h como en (67) y tal que $h(x) = x$ si $x \in E$ y $\|x\| \geq \rho$. Notemos primero que

$$\phi_H(x) := \frac{1}{2}(\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2) - \int_0^1 H(x(t)) dt$$

$$\leq 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in E^- \oplus E^0,$$

y que para $\mathbf{x} = \mu \mathbf{e}_1^{2\pi i(k_0+1)t} = (\mu e^{2\pi i(k_0+1)t}, 0, \dots, 0)$, con $|\mu| > (\frac{2}{\pi}(b+c+\epsilon))^{1/2}$ y k_0 como en (37)

$$\begin{aligned} \phi_H(\mathbf{x}) &\geq \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}^+\|^2 - \|\mathbf{x}^-\|^2) - b - a\|\mathbf{x}\|_{l,2}^2 \quad \text{por (42)} \\ &= (\pi(k_0+1) - a)\mu^2 - b \quad \text{con } a \text{ como en (37) } a = (k_0 + \frac{1}{2})\pi \\ &> c + \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora sean $\rho_0 = \max\{M, \rho, (\frac{2}{\pi}(b+c+\epsilon))^{1/2}\}$, $\mathbf{x} = \rho_0 \mathbf{e}_1^{2\pi i(k_0+1)t}$ y $\mathbf{y} \in E^- \oplus E^0$ tal que $\mathbf{y} \neq 0$. Y tomemos la curva $z(\tau) = \rho_0(\tau \mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) / \|\tau \mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}\|$. Esta curva satisface que $\|z(\tau)\| = \rho_0$ para todo τ , $\phi_H(z(0)) \leq 0$ y $\phi_H(z(1)) \geq c + \epsilon$. Por tanto existe $\tau_0 \in [0, 1]$ tal que $z(\tau_0) \in \phi_H^{c+\epsilon} \setminus \phi_H^{c-\epsilon}$. Como h satisface (67) $h(z(\tau_0)) \neq z(\tau_0)$ lo cual es una contradicción a que $h(z(\tau_0)) = z(\tau_0)$ ya que $\|z(\tau_0)\| \geq \rho_0$. ■

Ahora probemos que la funcional ϕ_H satisface las hipótesis de nuestra versión del lema de deformación. Antes de dar la prueba es importante hacer notar que para definir el grupo Γ , como en 2.2.1, es necesario fijar un subespacio vectorial de E^+ , S^1 -invariante y de dimensión finita. En nuestro caso encontramos conveniente tomar el subespacio \mathbf{F} generado por $\{(e^{2\pi ikt}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e^{2\pi ikt})\}_{1 \leq k \leq j_0}$.

LEMA 3.4.6 (*Se satisfacen las hipótesis del lema de Γ -deformación*) Sea $H \in \mathcal{H}_S$. Para cada $c > 0$, ϕ_H satisface las hipótesis del lema de Γ -deformación, 2.3.2.

Demostración Tomamos $\phi_H(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}(L\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (-\varphi_H(\mathbf{x}))$ con $L\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$. Que ϕ_H es $C^{1,1}(E, \mathbf{R})$ y φ_H es compacto fueron probados en 3.3.1. Que $\varphi_H(\mathbf{x}) \geq 0$ es por construcción de $H \in \mathcal{H}_S$ y que se satisface (PS) para $c > 0$ fue probado en 3.4.4. Soló falta probar que si $\mathbf{x} \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{F}$ y $\|\mathbf{x}\| \geq \rho$ entonces $\phi_H(\mathbf{x}) \leq 0$, de hecho ésto es válido si en lugar de \mathbf{F} tomamos el subespacio vectorial \mathbf{G} generado por $\{\mathbf{e}_j^{2\pi ikt}\}_{1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq k_0}$ y k_0 es como en (37). Probémoslo. Tomemos $\rho = (2k_0 b)^{1/2}$. Y sea $\mathbf{x} \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{G}$ tal que $\|\mathbf{x}\| \geq \rho$, $\mathbf{x}^+ = \sum_{1 \leq k \leq k_0} \sum_{j=1}^N a_{k,j} \mathbf{e}_j^{2\pi ikt}$. Calculemos

$$\phi_H(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}^+\|^2 - \|\mathbf{x}^-\|^2) - \int_0^1 H(\mathbf{x}(t)) dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^+\|^2 - a\|\mathbf{x}^+\|_{L^2}^2\right) + b - \left(\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^-\|^2 + a\|\mathbf{x}^0\|_{L^2}^2 + a\|\mathbf{x}^-\|_{L^2}^2\right) \text{ por (42)} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{k_0} \pi(k - (k_0 + \frac{1}{2})) |a_{k,j}|^2\right) + b - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}^- + \mathbf{x}^0\|^2 \\
&\leq -\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^+\|_{L^2}^2 + b - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}^- + \mathbf{x}^0\|^2 \\
&\leq -\frac{1}{2k_0}\|\mathbf{x}^+\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}^- + \mathbf{x}^0\|^2 + b \\
&\leq -\frac{1}{2k_0}\|\mathbf{x}\|^2 + b.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\phi_H(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbf{F} \text{ y } \|\mathbf{x}\| \geq \rho. \blacksquare$$

Por tanto ϕ_H satisface la propiedad de Γ -deformación para cada $c > 0$, así como las demás hipótesis del principio de minimax, 2.3.3, (L1) fue probada en 3.4.1 para $c^\infty = b$ y el subespacio \mathbf{F} generado por $\{(e^{2\pi ikt}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e^{2\pi ikt})\}_{1 \leq k \leq j_0}$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{F} = Nj_0$, y (L2) fue probado en 3.4.3. Además en el caso de que la hipersuperficie S es un elipsoide ξ del tipo (59) y $H_\xi \in \Lambda_\xi$ satisface (60) entonces (L1) se cumple para $c^\infty = M_{j_0}$ y para el subespacio F generado por $\{e_n^{2\pi i k_j t}\}_{j=1}^{j_0}$, $1 \leq n_j \leq N$, $\dim_{\mathbb{C}} F = j_0$. Por último antes de enunciar el corolario del teorema de enlace para $G = S^1$, 2.3.4, observemos que hemos fijado el subespacio \mathbf{F} para definir el grupo Γ , y así el pseudoíndice $\gamma_{S^1}^\Gamma$. Recordemos que

$$\Gamma_j := \{Z \subset E : Z \text{ es } S^1\text{-invariante, cerrado y } \gamma_{S^1}^\Gamma(Z) \geq j\}.$$

COROLARIO 3.4.7 Si $H \in \mathcal{H}_S$ entonces

$$c_{j,H} := \inf_{Z \in \Gamma_j} \sup_{x \in Z} \phi_H(x) \quad , 1 \leq j \leq j_0,$$

satisfacen

(a) $0 < c^0 \leq c_{j,H} \leq c^\infty < \infty$

(b) $c_{j,H}$ es valor crítico de ϕ_H

(c) Si $i \neq j$ y $c_{i,H} = c_{j,H} = c$ entonces ϕ_H tiene un número infinito de S^1 -órbitas críticas diferentes, con valor crítico c . En el caso de que S sea un elipsoide ξ y que $H_\xi \in \mathcal{H}_\xi$ satisfaga (60) entonces M_{j_0} puede ser tomado como c^∞ ■

Es decir, dadas una hipersuperficie $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ (de clase C^∞ , conexa y compacta), una familia $(S_\epsilon : -\hat{\nu} < \epsilon < \hat{\nu})$ de hipersuperficies modeladas por S y $0 < \delta < \hat{\nu}$ existen N_{j_0} soluciones de período 1 de

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$$

en $S_{\epsilon_1}, \dots, S_{\epsilon_{N_{j_0}}}$ con $0 < \epsilon_1, \dots, \epsilon_{N_{j_0}} < \delta$.

Una hipersuperficie S compacta, conexa y de clase C^∞ es de tipo contacto si existe un campo vectorial χ de clase C^∞ , transversal a S ($\chi(x) \notin T_x S$ para todo $x \in S$) definido en una vecindad de S tal que el flujo $\eta_t(x) := \eta(t, x)$ inducido por χ satisface

$$JD\eta_t(x)(v) \cdot D\eta_t(x)(w) = e^t Jv \cdot w \quad \text{para todo } v, w \in \mathbf{R}^{2N}.$$

A tal campo vectorial se le denomina dilatación simpléctica, ver 1.1.5.

Si S es de tipo contacto podemos como en Hofer-Zehnder [HZ1] jalar estas soluciones a nuestra hipersuperficie S usando la dilatación simpléctica. Sin embargo nada nos garantiza que estas soluciones no sean todas sino múltiplos de una sola.

En el siguiente capítulo daremos una condición geométrica que garantiza el que todas estas soluciones sean geoméricamente distintas.

Antes es importante hacer notar que el corolario 3.4.6 implica un resultado un poco más general que el obtenido por Hofer-Zehnder [HZ1] (la suavidad de la hipersuperficie baja de C^∞ a C^2) y por consiguiente el corolario de éste, el teorema de Viterbo [Vi], en una versión más general:

TEOREMA 3.4.8 (Teorema de Hofer-Zehnder para hipersuperficies de clase C^2) Sea $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie compacta y de clase C^2 y sea η una familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S . Entonces existe una constante $d = d(\eta) > 0$ tal que para cada $0 < \delta < 1$ existe $|\epsilon| < \delta$ para la cual la hipersuperficie S_ϵ tiene una órbita periódica x que satisface la estimación

$$0 < A(x) < d$$

donde $A(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt$, $x(0) = x(1)$. ■

Cabe hacer notar que dada $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie compacta y de clase C^2 existe $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, con U vecindad abierta de S , función de clase C^2 tal que $f^{-1}(0) = S$ y $\nabla f(x) \neq 0$ para todo $x \in S$ [Li]. Así el flujo inducido por el campo gradiente produce una familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S , como se observó en 3.1.2.

Del teorema 3.4.8 y de 4.2.3 tenemos

TEOREMA 3.4.9 (Teorema de Viterbo [Vi] para hipersuperficies de clase C^2) Sea $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie compacta, conexa y de clase C^2 , para la cual existe un campo vectorial $\chi : U \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, U vecindad de S , con las siguientes propiedades:

- $\chi(x) \notin T_x S$ para todo $x \in S$ (χ es transversal a S).
- $J D\eta_t(x)(u) \cdot D\eta_t(x)(v) = e^t J u \cdot v$ para todo $u, v \in \mathbf{R}^{2N}$, para todo $x \in U$ para todo t ,

donde $D\eta_t(x)$ es la diferencial de $\eta_t : U \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ en el punto x y $\eta_t(x) = \eta(t, x)$ es el flujo inducido por χ . Entonces S tiene una órbita periódica. ■

4. MULTIPLICIDAD DE ÓRBITAS

§4.1 El problema y su independencia del hamiltoniano

Sean S una hipersuperficie compacta de clase al menos $C^{1,1}$ y $U \subset \mathbf{R}^{2N}$ una vecindad abierta de S . Tomemos una función $H : U \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $H^{-1}(a_0) = S$ para algún $a_0 \in \mathbf{R}$. Además pidamos que H satisfaga

(i) $H \in C^{1,1}(U, \mathbf{R})$ i.e. H es de clase C^1 y $\nabla H : U \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ es localmente Lipschitz,

(ii) a_0 es valor regular de H ,

para la existencia de una tal H vease por ejemplo [Li].

Descamos saber si la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)) \quad \text{donde } J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (\text{SH})$$

la cual se conoce como la ecuación Hamiltoniana, tiene sobre S varias soluciones periódicas geoméricamente distintas, i.e. $x(t) \in S$ para todo t , y las soluciones no son reparametrizaciones de la forma $x(t + t_0)$ con t_0 una constante (en el trabajo se dará una respuesta sólo para familias de hipersuperficies de tipo contacto restringido, noción que se definirá en la sección 4.2.1.)

Observemos que la búsqueda de soluciones, $x(t)$, sobre S de la ecuación (SH) se puede realizar con cualquier función H que satisfaga (i) e (ii), con $H^{-1}(a_0) = S$ para algún $a_0 \in \mathbf{R}$. Veamos, sean

$$H_1, H_2 : U \rightarrow \mathbf{R}$$

tales que satisfacen (i) e (ii). Tomemos

$$\lambda(x) = \|\nabla H_2(x)\| / \|\nabla H_1(x)\|,$$

definida en una vecindad de S en la que $\nabla H_1(x) \neq 0$ y $\nabla H_2(x) \neq 0$ para todo x . Y supongamos que $\nabla H_1(x)$ y $\nabla H_2(x)$ tienen el mismo sentido para todo $x \in S$. Así

$$\nabla H_2(x) = \lambda(x) \nabla H_1(x).$$

Sea $x(t)$ una solución, contenida en S , de

$$\dot{x}(t) = J \nabla H_1(x(t)). \quad (SH_1)$$

Como $\lambda(x)$ es localmente Lipschitz existe $r(t)$ tal que

$$\frac{dr}{dt} = \lambda \circ x \circ r(t), \quad r(0) = 0.$$

Como $\dot{r}(t) > 0$ entonces r es estrictamente creciente y sobre \mathbf{R} . Por tanto proponemos para la reparametrización a $r(t)$ y como solución de (SH_2) a $y(t) = x(r(t))$. Veamos

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt} r(t) \dot{x}(r(t)) \\ &= \lambda \circ x \circ r(t) J \nabla H_1(x(r(t))) \\ &= \lambda(y(t)) J \nabla H_1(y(t)) \\ &= J \nabla H_2(y(t)). \end{aligned}$$

Notemos que si $x(t)$ es de período T , entonces $y(t)$ es de período τ , donde $T = r(\tau)$. Por tanto $y(t)$ es solución de (SH_2) . La inversa se hace en forma análoga.

Así la existencia de soluciones periódicas sobre S de la ecuación hamiltoniana (SH) no depende de la función hamiltoniana, H , que se use. Esta función sólo matiza la solución vía la parametrización. A la traza $\{x(t) : t \in \mathbf{R}\}$ de una solución periódica $x(t)$ de (SH) se le denominará órbita. Así lo que buscamos son órbitas contenidas en S , y lo que hemos visto es que ellas son las mismas si en (SH) sustituimos H por algún otro hamiltoniano \tilde{H} que satisfaga (i) e (ii) con $\tilde{H}^{-1}(a_0) = S$ para algún $a_0 \in \mathbf{R}$.

Ahora podemos ir un poco más allá y prescindir de la función hamiltoniana planteando nuestro problema en términos puramente geométricos. Denotemos por \mathcal{N}_x la recta perpendicular a $T_x S$ y $\mathcal{L}_x := \{J(p, q) = (-q, p) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2N} : (p, q) \in \mathcal{N}_x\}$. Entonces buscamos subvariedades, C , de

S de dimensión 1 difeomorfas a S^1 , donde el difeomorfismo es de la misma clase que la variedad, tales que

$$T_x C = \mathcal{L}_x \quad \text{para todo } x \in C. \quad (68)$$

Tales subvariedades son llamadas características cerradas. Veamos que una órbita da lugar a una característica cerrada. Sea x una órbita contenida en S . Tomemos $H : U \rightarrow \mathbf{R}$ un hamiltoniano de la misma clase que la hipersuperficie, tal que $\nabla H(x) \neq 0$ para todo $x \in S$ y $H^{-1}(a) = S$ para algún $a \in \mathbf{R}$, con U vecindad abierta de S , ver por ejemplo [Li]. Entonces podemos parametrizar a x de tal forma que

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)) \quad x(0) = x(T).$$

Así la traza de $x(t)$ es una variedad difeomorfa a S^1 , en donde el difeomorfismo $x(t)$ es de la misma clase que S . La otra condición es clara ya que $\dot{x}(t) \in \mathcal{L}_x$.

Chequemos la inversa. Sea C una característica cerrada contenida en S , entonces existe $\gamma : S^1 \rightarrow C$ difeomorfismo. Así $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todo $t \in S^1$. Tomemos un hamiltoniano H que satisface (i) e (ii). Supongamos que $\dot{\gamma}(t)$ y $J\nabla H(\gamma(t))$ tienen el mismo sentido para todo t . Definamos

$$\lambda(t) = \frac{\|J\nabla H(\gamma(t))\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

Como λ es localmente Lipschitz existe $r(t)$ tal que

$$\frac{d}{dt} r(t) = \lambda(r(t)).$$

Dándole a C la parametrización $x(t) = \gamma(r(t))$ satisface la ecuación

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)).$$

Por lo que C es una órbita.

Resumiendo, usaremos la siguiente notación para el resto del capítulo:

Órbita contenida en S : es $\{x(t) : t \in \mathbf{R}\}$ donde $x(t)$ es una solución periódica de (SH) contenida en S , con H como al principio de la sección.

Órbita periódica contenida en S : es una órbita contenida en S provista de una parametrización regular $x(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Característica cerrada contenida en S : es una órbita contenida en S vista como una curva geométrica difeomorfa a \mathbf{S}^1 , o equivalentemente es una subvariedad de S difeomorfa a \mathbf{S}^1 , que satisface (68), donde el difeomorfismo es de la misma clase que la variedad.

Dado que la respuesta que ofrecemos en este trabajo es para hipersuperficies de tipo contacto restringido, definición 1.1.7, cabe la pregunta

¿Cuál es la ventaja de trabajar con hipersuperficies de tipo contacto restringido (T.C.R.)?

Y la respuesta que yo daría es que para hipersuperficies de T.C.R. es posible relacionar la geometría de la hipersuperficie con la geometría del espacio produciendo un hamiltoniano distinguido \mathbf{H} para el cual podemos tener estimaciones de los periodos de sus soluciones (vease 4.2).

§4.2 La familia. Hipersuperficies de tipo contacto restringido

DEFINICION 4.2.1 (Dilatación simpléctica) Un campo vectorial $\chi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ de clase C^∞ es una dilatación simpléctica si

$$JD\eta_t(x)(u) \cdot D\eta_t(x)(v) = e^t J u \cdot v \quad \text{para todo } u, v \in \mathbf{R}^{2N}, \quad (69)$$

para todo $x \in \mathbf{R}^{2N}$ para todo t ,

donde $D\eta_t(x)$ es la diferencial de $\eta_t : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ en el punto x , $\eta_t(x) = \eta(t, x)$ es el flujo inducido por χ , $J(p, q) = (-q, p)$ con $(p, q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2N}$ y " \cdot " denota el producto escalar usual de \mathbf{R}^{2N} .

Observemos que si escribimos el producto escalar de \mathbf{R}^{2N} en forma matricial

$$u \cdot v = uv^T,$$

y tomamos $A = D\eta_t(x)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{N \times N}$ entonces

$$\begin{aligned} (JAu^T)^T(Av^T) &= e^t(Ju^T)^T v^T \\ \Rightarrow uA^T J^T Av^T &= e^t u J^T v^T \quad \text{para todo } u, v \in \mathbf{R}^{2N} \\ \Rightarrow A^T J A &= e^t J \quad \text{ya que } J^T = -J. \end{aligned}$$

4.2.2 Ejemplos

(a) $\chi(x) = \frac{1}{2}x$ es una dilatación simpléctica: El flujo inducido por χ es

$$\eta(t, x) = e^{\frac{1}{2}t}x,$$

así

$$\begin{aligned} JD\eta_t(x)(u) \cdot D\eta_t(x)(v) &= J(e^{\frac{1}{2}t}u) \cdot (e^{\frac{1}{2}t}v) \\ &= e^t J u \cdot v. \end{aligned}$$

(b) $\chi(p, q) = ((1 - \epsilon)p, \epsilon q)$, $\epsilon > 0$ número real fijo, es una dilatación simpléctica: El flujo inducido por χ es

$$\eta(t, x) = (e^{(1-\epsilon)t}p, e^{\epsilon t}q),$$

así

$$\begin{aligned} JD\eta_t(x)(u) \cdot D\eta_t(x)(v) &= J(e^{(1-\epsilon)t}u_p, e^{\epsilon t}u_q) \cdot (e^{(1-\epsilon)t}v_p, e^{\epsilon t}v_q) \\ &= (-e^{\epsilon t}u_q, e^{(1-\epsilon)t}u_p) \cdot (e^{(1-\epsilon)t}v_p, e^{\epsilon t}v_q) \\ &= e^t J u \cdot v. \end{aligned}$$

(c) Sean $\chi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ una dilatación simpléctica cualquiera y η el flujo inducido por χ . Sean $\mathbf{Y}(x) = \frac{1}{2}x$, $\nu(t, x) = e^{\frac{1}{2}t}x$ el flujo inducido por \mathbf{Y} y t_0 un número real fijo.

Entonces el campo vectorial

$$\mathbf{X}(x) := e^{t_0/2} \chi(e^{-\frac{t_0}{2}} x)$$

es una dilatación simpléctica, que induce el flujo

$$\zeta(t, x) = \nu(t_0, \eta(t, \nu(-t_0, x))) = e^{\frac{it_0}{2}} \eta(t, e^{-\frac{it_0}{2}} x).$$

Demostración Veamos primero que $\zeta(0, x) = x$.

$$\begin{aligned} \zeta(0, x) &= \nu(t_0, \eta(0, \nu(-t_0, x))) \\ &= \nu(t_0, \nu(-t_0, x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \zeta(t, x) &= \frac{d}{dt} \nu(t_0, \eta(t, y)) \quad y = \nu(-t_0, x) \\ &= D\nu_{t_0}(\eta(t, y)) \left(\frac{d}{dt} \eta(t, y) \right) \\ &= D\nu_{t_0}(\eta(t, y)) (\chi(\nu_{-t_0} \nu_{t_0}(\eta(t, y)))) \\ &= e^{it_0/2} \chi(\nu_{-t_0} \nu_{t_0}(\eta(t, y))) \\ &= \mathbf{X}(\nu(t_0, \eta(t, \nu(-t_0, x)))) \\ &= \mathbf{X}(\zeta(t, x)). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{d}{dt} \zeta(t, x) = \mathbf{X}(\zeta(t, x)).$$

Por último veamos que \mathbf{X} es una dilatación simpléctica. Calculemos

$$\begin{aligned} &JD\zeta_t(x)(u) \cdot D\zeta_t(x)(v) \\ &= JD\nu_{t_0}(\eta_t \nu_{-t_0}(x)) \circ D\eta_t(\nu_{-t_0}(x)) \circ D\nu_{-t_0}(x)(u) \cdot JD\nu_{t_0}(\eta_t \nu_{-t_0}(x)) \\ &\quad \circ D\eta_t(\nu_{t_0}(x)) \circ D\nu_{-t_0}(x)(v) \\ &= e^{t_0} e^t e^{-t_0} Ju \cdot v \text{ aquí usamos 4.2.1. } \blacksquare \end{aligned}$$

- (d) Si en el inciso (c) en lugar de tomar el campo $\mathbf{Y}(x) = \frac{1}{2}x$ tomamos como $\mathbf{Y}(x)$ a una dilatación simpléctica cualquiera, entonces el campo vectorial

$$\mathbf{X}(x) := D\nu_{t_0}(\nu_{-t_0}(x))(\chi(\nu_{-t_0}(x)))$$

es una dilatación simpléctica que induce el flujo

$$\zeta(t, x) = \nu(t_0, \eta(t, \nu(-t_0, x))).$$

La demostración es analoga a la de (c).

Dada una hipersuperficie S podemos deformarla usando el flujo η_t inducido por un campo vectorial definido en una vecindad de la hipersuperficie. Una situación interesante se da cuando la deformación preserva características cerradas. En el siguiente resultado probamos que los campos vectoriales que satisfacen (69), en particular las dilataciones simplécticas, tienen la importante propiedad de que la deformación de S obtenida por η_t lleva características cerradas contenidas en S en características cerradas contenidas en $\eta_t(S)$. Es importante observar que esta propiedad la tienen otros campos que no son dilataciones simplécticas, por ejemplo: $\chi(x) = cx$, $0 < c$, $c \neq \frac{1}{2}$, para una discusión más general sobre esto ver [HZ2] página 122. Notemos que esta propiedad en particular nos dice que para una hipersuperficie S de tipo contacto, definición 1.1.6, si la hipersuperficie $S_t = \eta_t(S)$ tiene al menos una órbita periódica entonces también S tiene al menos una órbita periódica. Dado que esta propiedad más el teorema de Hofer-Zehnder dan el teorema de Viterbo me parece adecuado dar dos pruebas de ella, la segunda se debe al doctor Jorge Ize.

LEMA 4.2.3 Sea $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie compacta y de clase C^1 . Sean $\chi : U \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, U vecindad de S , un campo vectorial de clase C^1 con la propiedad (69) y η el flujo inducido por χ . Entonces, para cada t

$$C \mapsto \eta_t(C)$$

es una correspondencia biyectiva entre las características cerradas contenidas en S y las características cerradas contenidas en la hipersuperficie compacta $S_t := \eta_t(S)$.

Demostración 1

Fijemos t , tomemos una característica cerrada C contenida en S y definamos la correspondencia

$$C \mapsto \eta_t(C).$$

Veamos que $\eta_t(C)$ es una característica cerrada en S_t . Por definición de característica cerrada, C satisface:

(1) C es una subvariedad de S difeomorfa a S^1 , digamos que $\gamma : S^1 \rightarrow C$ es un difeomorfismo,

(2) $T_x C = \mathcal{L}_x$ para todo $x \in C$, donde $\mathcal{L}_x := \{J(p, q) = (-q, p) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2N} : (p, q) \in \mathcal{N}_x\}$ y \mathcal{N}_x denota la recta perpendicular a $T_x S$.

Probemos que $\eta_t(C)$ satisface el análogo a (1). Observemos que $\eta_t : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ es un difeomorfismo. Así $\eta_t(C)$ es una subvariedad y $\eta_t \circ \gamma : S^1 \rightarrow \eta_t(C)$ es un difeomorfismo.

Ahora probemos que $\eta_t(C)$ satisface el análogo a (2), i.e. que $T_{\eta_t(x)} \eta_t(C) = \mathcal{L}_{\eta_t(x)}$. Para probarlo notemos que, dado que $T_{\eta_t(x)} \eta_t(C)$ y $\mathcal{L}_{\eta_t(x)}$ son subespacios de dimensión 1, basta probar que $T_{\eta_t(x)} \eta_t(C) \subset \mathcal{L}_{\eta_t(x)}$. Tomemos $\bar{u} \in T_{\eta_t(x)} \eta_t(C) = D\eta_t(x)(T_x C)$ y $\bar{v} \in T_{\eta_t(x)} \eta_t(S) = D\eta_t(x)(T_x S)$, digamos que $\bar{u} = D\eta_t(x)(u)$ y que $\bar{v} = D\eta_t(x)(v)$. Así

$$\begin{aligned} \omega(\bar{u}, \bar{v}) &= \omega(D\eta_t(x)(u), D\eta_t(x)(v)) \\ &= c^t \omega(u, v) \\ &= 0 \quad \text{para todo } \bar{v} \in T_{\eta_t(x)} \eta_t(S), \end{aligned}$$

donde ω es como en 1.1, i.e. $\omega(\bar{u}, \bar{v}) = J\bar{u} \cdot \bar{v}$. Como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\eta_t(x)} &:= \{J(p, q) = (-q, p) : (p, q) \in \mathcal{N}_{\eta_t(x)}\} \\ &= \{\bar{u} \in T_{\eta_t(x)} \eta_t(S) : \omega(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \text{ para todo } \bar{v} \in T_{\eta_t(x)} \eta_t(S)\} \end{aligned}$$

entonces $\bar{u} \in \mathcal{L}_{\eta_t(x)}$.

Así $\eta_t(C)$ es una característica cerrada contenida en S_t .

Como además $\eta_t \circ \eta_{-t}(C) = C = \eta_{-t} \circ \eta_t(C)$ entonces

$$C \mapsto \eta_t(C)$$

es una biyección. ■

Demostración 2 Si $x \in S = H^{-1}(a)$ entonces $\eta_t(x) \in \eta_t(S)$ y no necesariamente $H(\eta_t(S)) = \text{cte}$.

Si $x(\tau)$ es una solución de

$$\frac{dx}{d\tau} = J\nabla H(x(\tau)) \quad x(0) = x(T) \in S \quad (SH)$$

entonces $x(\tau) \in S$ para todo τ . Y así $\eta_t(x(\tau))$ es una curva, de período T , en $\eta_t(S)$ que satisface

$$\frac{d}{d\tau} \eta_t \circ x(\tau) = D\eta_t(x(\tau)) \left(\frac{dx}{d\tau} \right) = [AJ(\nabla H(x(\tau)))^T]^T,$$

con $A^T J A = e^t J$ (lo cual es equivalente a $A^T J A J = -e^t I \Rightarrow AJ = e^t J(A^T)^{-1}$).
Si definimos un nuevo hamiltoniano

$$\tilde{H}(x) := e^t H(\eta_{-t}(x))$$

entonces $\dot{\tilde{H}}|_{\eta_t(S)} = ae^t$. Además $\nabla(\tilde{H} \circ \eta_t)(x) = e^t \nabla H(x) = \nabla \tilde{H}(\eta_t(x))A$, por la regla de la cadena. Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_t \circ x(\tau)}{d\tau} &= e^{-t} [AJ(\nabla \tilde{H}(\eta_t(x(\tau))))^T]^T \\ &= e^{-t} [e^t J(A^T)^{-1} A^T (\nabla \tilde{H}(\eta_t(x(\tau))))^T]^T \\ &= [J(\nabla \tilde{H}(\eta_t(x(\tau))))^T]^T. \end{aligned}$$

O equivalentemente expresando el término derecho en notación no matricial

$$\frac{d\eta_t(x(\tau))}{d\tau} = J \nabla \tilde{H}(\eta_t(x(\tau))).$$

Por tanto $\eta_t(x(\tau))$ es una solución de la ecuación diferencial (SH), en donde la H es remplazada por \tilde{H} y S es remplazada por $\eta_t(S)$, i.e. una curva característica sobre $\eta_t(S)$. ■

DEFINICION 4.2.4 (*Hipersuperficie de tipo contacto restringido*)
Una hipersuperficie $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ compacta, conexa y de clase C^∞ es de tipo contacto restringido si existe $\chi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ dilatación simpléctica transversal a S i.e. $\chi(x) \notin T_x S$ para todo $x \in S$. Nos referiremos al flujo inducido por esta dilatación simpléctica como flujo simpléctico.

4.2.5 Ejemplos

(a) Las hipersuperficies suaves i.e. que son de clase C^∞ , que tienen forma de estrella son de tipo contacto restringido: Sea $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie en forma de estrella i.e. tal que $\pi : S \rightarrow \mathbf{S}^{2N-1}$, $\pi(x) :=$

$x/|x|$ es un difeomorfismo de clase C^1 . π se puede extender a $\pi : \mathbf{R}^{2N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{S}^{2N-1}$, $\pi(x) = x/|x|$.

Porque $\pi|_S = \pi$ y π es un difeomorfismo entonces

$$D\pi(x)|_{T_x S} : T_x S \rightarrow T_{\pi(x)} \mathbf{S}^{2N-1}$$

es un isomorfismo lineal. Tomemos $u = x/|x|$, como $D\pi(x)(u) = 0$ entonces $u \notin T_x S$. Por tanto $\chi(x) = \frac{1}{2}x$ es transversal a S y por 4.2.2 (a), χ es una dilatación simpléctica.

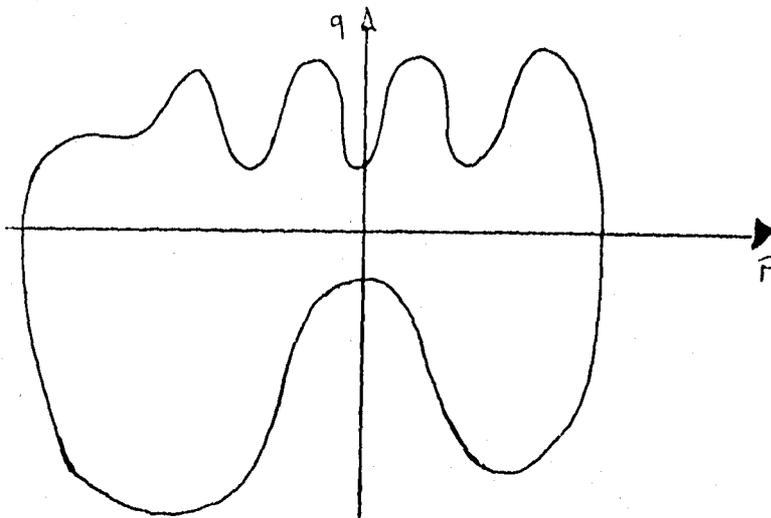


Figura 3

(b) Sea $\pi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^N$, $\pi(p, q) = p$ donde $(p, q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2N}$. Tomemos $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie suave, compacta y conexa que tiene las siguientes propiedades (ver figura 3):

- (i) $\pi(S)$ es una variedad con frontera difeomorfa al N -disco $D^N := \{x \in \mathbf{R}^N : |x| \leq 1\}$,
- (ii) para cada p en el interior de $\pi(S)$, la intersección $\pi^{-1}(p) \cap S$ tiene forma de estrella en $\pi^{-1}(p)$,
- (iii) para cada p en la frontera de $\pi(S)$, $\pi^{-1}(p) \cap S$ consiste de un solo punto $(p, 0)$.

En [We2] se prueba que el campo $\chi(p, q) = ((1-\epsilon)p, \epsilon q)$, para $0 < \epsilon < 1$ adecuada, es transversal a S . Así por 4.2.2 (b) S es una hipersuperficie de tipo contacto restringido.

- (c) Sea S una hipersuperficie de tipo contacto restringido. Así por definición existe $\chi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ dilatación simpléctica transversal a S . Sea η el flujo inducido por χ . Entonces $S_\epsilon := \eta_\epsilon(S)$ es una hipersuperficie de tipo contacto restringido.

Demostración Por 4.2.2 (d) el campo vectorial

$$X(x) = D\eta_\epsilon(\eta_{-\epsilon}(x))(\chi(\eta_{-\epsilon}(x)))$$

es una dilatación simpléctica. Veamos que además es transversal a S_ϵ . Sea $x \in S_\epsilon$. Entonces $\eta_{-\epsilon}(x) \in S$

$$\Rightarrow \chi(\eta_{-\epsilon}(x)) \notin T_{\eta_{-\epsilon}(x)}S \quad \text{porque } \chi \text{ es transversal a } S.$$

Porque η_ϵ es un difeomorfismo entonces $D\eta_\epsilon(\eta_{-\epsilon}(x))|_{T_{\eta_{-\epsilon}(x)}} : T_{\eta_{-\epsilon}(x)} \rightarrow T_x S_\epsilon$ es un isomorfismo lineal. Por tanto

$$X(x) = D\eta_\epsilon(\eta_{-\epsilon}(x))(\chi(\eta_{-\epsilon}(x))) \notin T_x S_\epsilon. \blacksquare$$

Una observación a la demostración: en el caso de que χ sea lineal entonces $X(x) = \chi(x)$.

En nuestro trabajo posterior es de mucha importancia el conjunto que consiste de los múltiplos enteros positivos de la acción calculada en las características cerradas contenidas en S .

DEFINICION 4.2.6 (La acción $a(C)$) Sea C una característica cerrada contenida en una hipersuperficie S . Definimos la acción

$$a(C) := \int_C \sum_{i=1}^N p_i dq_i$$

= suma de las áreas encerradas por las proyecciones (p_i, q_i) .

Observemos que la acción está relacionada con la función $A(x)$ definida en la sección 3.2 como sigue: Si $x(t)$ es una parametrización regular de periodo

1 de la característica cerrada C cuyo periodo mínimo es $T_0 = \frac{1}{h}$, $h \in \mathbf{N}$, y $x(t)$ le da exactamente k vueltas a la curva C , entonces

$$\begin{aligned} A(x) &:= -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt \\ &= -\frac{k}{2} \int_0^{T_0} J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt \\ &= ka(C). \end{aligned}$$

Esto, a la luz de 4.2.10, motiva nuestro interés por el conjunto Σ_S , de los múltiplos de las acciones de las características cerradas contenidas en S ,

$$\Sigma_S := \{ka(C) > 0 : C \text{ es una característica cerrada contenida en } S, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Es importante notar que $A(x)$ es independiente de la parametrización de $x(t)$. Sólo depende del número de vueltas k y de la acción $a(C)$.

Tomemos en \mathbf{R}^{2N} el sistema de coordenadas $(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N)$, y consideremos la estructura lineal simpléctica canónica de \mathbf{R}^{2N} definida por la forma bilineal antisimétrica no degenerada

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= Jx \cdot y \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \tilde{q}_i - q_i \tilde{p}_i, \end{aligned}$$

donde $x = (p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N)$ y $y = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N)$, y " \cdot " denota el producto usual en \mathbf{R}^{2N} .

Ahora tomemos la 2-forma diferencial en \mathbf{R}^{2N}

$$\omega := \sum_{i=1}^N dp_i \wedge dq_i.$$

Notemos que para cada $x \in \mathbf{R}^{2N}$, ω define en el espacio tangente $T_x \mathbf{R}^{2N} = \mathbf{R}^{2N}$ una forma bilineal antisimétrica no degenerada que coincide con ω .

LEMA 4.2.7 Sea S una hipersuperficie de tipo contacto restringido, χ la dilatación simpléctica y η el flujo respectivos. Para cada ϵ

$$C \mapsto \eta_\epsilon(C),$$

es una biyección entre las características cerradas de S y las de S_t tal que

$$a(\eta_t(C)) = e^t a(C).$$

En particular $\Sigma_{S_t} = e^t \Sigma_S$. Y si $\bar{x}(t)$ es una parametrización regular de C de período 1 entonces $A(x) = e^t A(\bar{x})$ donde $x(t) := \eta_t(\bar{x}(t))$ es una parametrización regular de $\eta_t(C)$ de periodo 1.

Demostración Que la correspondencia es una biyección se probó en 4.2.3. Probemos que

$$a(\eta_t(C)) = e^t a(C).$$

Sea C una característica cerrada contenida en S . Por 4.2.3 $\tilde{C} := \eta_t(C)$ es una característica cerrada contenida en $\eta_t(S)$. Tomemos el pull back de ω y η_t, η_t^* ,

$$\begin{aligned} (\eta_t^* \omega)_x(v_1, v_2) &:= \omega_{\eta_t(x)}(D\eta_t(x)(v_1), D\eta_t(x)(v_2)) \\ &= \omega(D\eta_t(x)(v_1), D\eta_t(x)(v_2)) \\ &= e^t \omega(v_1, v_2) \\ &= e^t \omega_x(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\eta_t^* \omega = e^t \omega.$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned} a(\tilde{C}) &:= \int_{\eta_t(C)} \sum_{i=1}^N p_i dq_i \\ &= \int_{\eta_t(N)} \omega \quad \partial N = C. \text{ Por el teorema Stokes} \\ &= \int_N \eta_t^* \omega \quad \text{Por el teorema de cambio de variable} \\ &\quad \text{ver. por ejemplo [AMR] página 466} \\ &= \int_N e^t \omega \\ &= e^t \int_C \sum_{i=1}^N p_i dq_i \quad \text{por el teorema de Stokes} \\ &= e^t a(C). \end{aligned}$$

Por tanto

$$a(\eta_t(C)) = e^t a(C).$$

El resto del enunciado del lema se sigue de lo anterior y de la observación a 4.2.6. ■

La estructura de contacto χ de S nos permite definir un hamiltoniano distinguido:

$$\mathbf{H}(x) := \epsilon \quad \text{si } \eta(\epsilon, \bar{x}) = x \quad \text{con } \bar{x} \in S,$$

donde $\eta : (-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ es el flujo inducido por χ , con $\eta(0, x) = x$ (ver ejemplo 3.1.2) y $x \in U := \eta((-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S)$.

Este hamiltoniano tiene la propiedad de que si parametrizamos una órbita contenida en S mediante $x(t)$, de modo tal que

$$\dot{x}(t) = J\nabla\mathbf{H}(x(t)), \quad (\text{SH})$$

entonces su periodo está dado en términos de la función A definida en la sección 3.2 (ver proposición 4.2.9), y el conjunto Σ_S es justamente el conjunto de todos los periodos de las soluciones de (SH) (proposición 4.2.10).

Definamos la familia \mathcal{H}_S de funciones hamiltonianas como en 3.1.3 a partir de la familia parametrizada de hipersuperficies dada por el flujo simpléctico $\eta(t, x)$, ver 3.1.2. Tenemos entonces el siguiente resultado.

LEMA 4.2.8 Sean $H \in \mathcal{H}_S$ y x un punto crítico de ϕ_H . Si $\phi_H(x) > 0$ (o más generalmente si $x(t) \in S_\epsilon$ para todo t y para algún $\mu < \epsilon < \alpha$) entonces $A(x) = f'(\epsilon)$ donde $A(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt$ y $\mathbf{H}(x(0)) = \epsilon$ i.e. $x(t) \in S_\epsilon$ para todo t .

Demostración Comencemos calculando la derivada de Lie de ω en la dirección de χ , la cual es una 2-forma diferencial de \mathbf{R}^{2N} ,

$$\begin{aligned} L_\chi \omega(x)(v_1, v_2) &:= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega(\eta_t(x))(D\eta_t(x)(v_1), D\eta_t(x)(v_2)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega(D\eta_t(x)(v_1), D\eta_t(x)(v_2)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e^t \omega(v_1, v_2) \quad \text{por } \chi \text{ es una dilatación simpléctica} \\ &= \omega(x)(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in T_x \mathbf{R}^{2N} = \mathbf{R}^{2N}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$L_{\chi}\omega = \omega.$$

Tomemos la 1-forma, $\lambda \equiv i_{\chi}\omega$, obtenida como el producto interior o contracción de χ y ω

$$\lambda(x)(v) := \omega(x)(\chi(x), v).$$

Y usando la fórmula de homotopía o fórmula de Cartan, [Ar] página 198, obtengamos la derivada exterior de λ

$$\begin{aligned} d\lambda &= di_{\chi}\omega = L_{\chi}\omega - i_{\chi}d\omega \quad \text{fórmula de Cartan} \\ &= L_{\chi}\omega - i_{\chi}d\left(d\left(\sum_{i=1}^N p_i \wedge dq_i\right)\right) \\ &= L_{\chi}\omega \\ &= \omega. \end{aligned}$$

Por tanto

$$d\lambda = \omega.$$

Sea $x \in S_{\epsilon}$, $\mu < \epsilon < \alpha$. Calculemos

$$\begin{aligned} \lambda(x)(J\nabla H(x)) &= i_{\chi}\omega(x)(J\nabla H(x)) \\ &:= \omega(x)(\chi(x), J\nabla H(x)) \\ &= \omega(\chi(x), J\nabla H(x)) \\ &= -\omega(J\nabla H(x), \chi(x)) \\ &= \nabla H(x) \cdot \chi(x) \\ &= f'(\epsilon) \quad \text{por (43) en 3.1.} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lambda(x)(J\nabla H(x)) = f'(\epsilon).$$

Ahora sea x un punto crítico de ϕ_H tal que $\phi_H(x) > 0$. Por el lema 3.3.3 $x(t) \in S_{\epsilon}$ para todo t y para algún $\mu < \epsilon < \alpha$.

Calculemos el valor de $A(x)$

$$\begin{aligned} A(x) &:= -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt \\ &= -\frac{k}{2} \int_0^T J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt \quad T = \min\{\tilde{T} : x(\tilde{T}) = x(0)\}, kT = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \int_C \sum_{i=1}^N p_i dq_i \quad C \text{ curva cerrada simple parametrizada por } x(t). \\
&= k \int_N \omega \quad \partial N = C, \text{ por el teorema de Stokes} \\
&= k \int_N d\lambda \\
&= k \int_C \lambda \quad \text{por el teorema de Stokes} \\
&= \int_0^1 f'(\epsilon) \\
&= f'(\epsilon). \blacksquare
\end{aligned}$$

PROPOSICION 4.2.9 Si x es una solución de $\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$ con $x(0) = x(T) \in S$ entonces $T = A(y)$ donde $A(y) := -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{y}(t) \cdot y(t) dt$ y $y(t) := x(Tt)$. En particular, si T es el periodo mínimo entonces $T = a(C)$ donde C es la característica cerrada parametrizada por x y a es la acción.

Demostración Sea $\eta : (-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, $\hat{\vartheta} > \vartheta > 0$, la familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S , dada por el flujo simpléctico, $\eta_t(x) := \eta(t, x)$. Tomemos $\epsilon_0 \in (0, \hat{\vartheta})$ tal que $-\epsilon_0 \in (-\vartheta, \hat{\vartheta})$. Sea $\tilde{S} = \eta_{-\epsilon_0}(S)$ y tomemos la familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por \tilde{S} , $\eta_{t-\epsilon_0}$. Definamos el hamiltoniano

$$\mathbf{H}(y) = \epsilon \quad \text{si} \quad \eta_t(\bar{y}) = y, \bar{y} \in \tilde{S}.$$

Notemos que $\mathbf{H}(y) = H(y) + \epsilon_0$. Sea $x(t)$ solución de

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$$

con $x(0) = x(T) \in S$ entonces x es una solución de

$$\dot{x}(t) = J\nabla \mathbf{H}(x(t)) \quad x(0) = x(T) \in S = \tilde{S}_{\epsilon_0}$$

Si reparametrizamos $y(t) = x(Tt)$ tenemos que

$$\dot{y}(t) = TJ\nabla \mathbf{H}(y(t)).$$

Tomemos f tal que $f'(\epsilon_0) = T$ como en la definición 3.1.3, y a partir de ella definamos un hamiltoniano $H \in \mathcal{H}_{\tilde{S}}$, como en 3.1.3, usando la familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por \tilde{S} , $\eta_{t-\epsilon_0}$. Así

$$\dot{y}(t) = f'(\epsilon_0)J\nabla \mathbf{H}(y(t)) = J\nabla H(y(t)).$$

Como las soluciones de período 1 de (SH) corresponden a los puntos críticos de ϕ_H , 3.3.2, entonces y es un punto crítico de ϕ_H que además satisface que $y(t) \in S = \tilde{S}_{\epsilon_0}$ para todo t . Así por 4.2.8

$$A(y) = f'(\epsilon_0) = T. \blacksquare$$

PROPOSICION 4.2.10 $\Sigma_S = \{T : T \text{ es un período de alguna solución } x(t) \text{ en } S \text{ de } \dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))\}$.

Demostración Sea $b \in \Sigma_S$. Por definición de Σ_S , $b = k \int_C \sum_{i=1}^N p_i dq_i$, donde C es una característica cerrada contenida en S . Tomemos una parametrización regular $x(t)$ de la característica C tal que

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)),$$

y digamos que el período mínimo de x es T_0 . Por 4.2.9 sabemos que

$$A(y) = T_0 \quad \text{con } y(t) = x(T_0 t).$$

Pero

$$\begin{aligned} A(y) &:= -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{y}(t) \cdot y(t) dt \\ &= \int_C \sum_{i=1}^N p_i dq_i \quad \text{porque 1 es el período mínimo de } y \\ &= b/k. \end{aligned}$$

Por tanto

$$b = kT_0.$$

La inversa es clara. \blacksquare

§4.3 Un resultado de multiplicidad

Sean $\hat{S}, \tilde{S} \subset \mathbf{R}^{2N}$ hipersuperficies compactas y conexas. Se denota

$$\hat{S} < \tilde{S}$$

cuando $\mathcal{B}(\hat{S}) \subset \mathcal{B}(\tilde{S})$ donde $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ es la componente acotada de $\mathbf{R}^{2N} \setminus \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \in \{\hat{S}, \tilde{S}\}$. Y $\hat{S} \prec \tilde{S}$ cuando $\mathcal{B}(\hat{S}) \subset \mathcal{B}(\tilde{S})$.

Para esta sección fijemos $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie de tipo contacto restringido y $\chi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ una dilatación simpléctica transversal a S . Sea η_S el flujo inducido por χ . Tomemos números reales fijos $\hat{\vartheta} > \vartheta > 0$ tales que $\eta_S(\{\epsilon\} \times S)$ está definido para todo $-\vartheta < \epsilon < \hat{\vartheta}$. A lo largo del capítulo denotaremos $S_\epsilon \equiv \eta_S(\{\epsilon\} \times S)$ para $-\vartheta < \epsilon < \hat{\vartheta}$.

Tomemos el hamiltoniano distinguido $\mathbf{H} : U \rightarrow \mathbf{R}$ definido en $U = \eta_S((-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S)$, vecindad de S

$$\mathbf{H}(x) = \epsilon \quad \text{si } \eta_S(\epsilon, \bar{x}) = x \quad \text{con } \bar{x} \in S.$$

Además pidamos que S tenga la siguiente propiedad geométrica

$$\alpha\xi < S < \beta\xi \quad (70)$$

donde ξ es un elipsoide de la forma $\xi := \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = 1\}$ con $0 < r_1, \dots, r_N$ y $\alpha, \beta > 0$.

Tomemos $\omega_i = \frac{1}{r_i^2}$, y reindexemos $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} = \{\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \dots, \omega_{1,l_1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{m,l_m}\}$, con $l_1 + \dots + l_m = N$ y donde los $\omega_{i,j}$ satisfacen que $\omega_{i_1,k_1}/\omega_{i_2,k_2} \in \mathbf{Q}$ si y sólo si $i_1 = i_2$, $1 \leq i_1, i_2 \leq m$.

Para $1 \leq i \leq m$ tomemos como ω^i al mayor número real que satisface que

$$\omega_{i,j} = n_{i,j}\omega^i, \quad n_{i,j} \in \mathbf{N}, \quad 1 \leq j \leq l_i, \quad (71)$$

i.e. al máximo común divisor de $\omega_{i,1}, \dots, \omega_{i,l_i}$.

Para enunciar el siguiente teorema impingamos a S la siguiente hipótesis técnica:

(i) El flujo η_S inducido por χ es global i.e. tiene dominio $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2N}$.

Esta hipótesis la necesitamos para que los hamiltonianos que pertenecen a Λ_S , familia definida en 4.5, tengan las propiedades que se requieren.

Emuncemos el teorema que nos permitirá probar el resultado de multiplicidad de órbitas (teorema principal del trabajo).

TEOREMA 4.3.1 Sea S una hipersuperficie de tipo contacto restringido que tiene la propiedad geométrica (70) y satisface la hipótesis (i) entonces existe un número infinito de órbitas contenidas en S o para cada $0 < \delta \leq 1$ podemos encontrar $\delta > \epsilon > 0$ para la cual existen $l_1 + \dots + l_m = N$ hipersuperficies $S_{\epsilon_{1,1}}, S_{\epsilon_{1,2}}, \dots, S_{\epsilon_{1,l_1}}, S_{\epsilon_{2,1}}, \dots, S_{\epsilon_{m,l_m}}$, $0 \leq \epsilon_{1,1}, \epsilon_{1,2}, \dots, \epsilon_{1,l_1}, \epsilon_{2,1}, \dots, \epsilon_{m,l_m} < \epsilon$, que contienen al menos una órbita periódica $x_{i,j}(t)$, de periodo 1 ($x_{i,j}(t) \in S_{\epsilon_{i,j}}$ para todo t) la cual satisface la estimación

- $\frac{\alpha^2 \pi}{\omega^i} - \epsilon \leq A(x_{i,j}) \leq \frac{\beta^2 \pi}{\omega^i} + \epsilon$, $1 \leq j \leq l_i$, $1 \leq i \leq m$ donde ω^i es como en (71)
- si $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ entonces $e^{-\epsilon_{i_1, j_1}} A(x_{i_1, j_1}) \neq e^{-\epsilon_{i_2, j_2}} A(x_{i_2, j_2})$.

donde $A(x_{i,j})$ es como antes, $A(x_{i,j}) = -\frac{1}{2} \int_0^1 J \dot{x}_{i,j}(t) \cdot x_{i,j}(t) dt$.

La demostración de este teorema requiere del material desarrollado en las secciones 4.4, 4.5 y 4.6 y se da en la sección 4.7. Si se quiere ver la demostración se puede ir sin más preámbulo a la sección 4.7. Lo único que se requiere en la demostración son las propiedades que allí se enumeran, y que se prueban en las secciones 4.5 y 4.6, así como el lema 4.7.1 que se debe al Dr. Jorge Ize.

Un comentario sobre el teorema, notemos que 3.4.7 nos garantiza que para cualquier hipersuperficie compacta existen al menos N órbitas periódicas, no necesariamente geoméricamente distintas, en hipersuperficies $S_{\epsilon_1}, \dots, S_{\epsilon_N}$ con $0 < \epsilon_i < \epsilon$, $1 \leq i \leq N$. Así la estructura de tipo contacto restringido sólo la usamos para obtener la estimación que damos de la acción.

Lo que haremos en lo que resta de la sección es demostrar, haciendo uso del teorema 4.3.1, un resultado de multiplicidad que es una generalización del resultado obtenido por Beretyski et. al. en [BLMR].

Ahora haciendo uso del teorema 4.3.1 probemos el siguiente

COROLARIO 4.3.2 Sean S como en el enunciado de 4.3.1 y \mathbf{H} como al inicio de la sección. Entonces existe un número infinito de órbitas contenidas en S o existen al menos $l_1 + \dots + l_m = N$ curvas parametrizadas y cerradas de período 1, $x_{1,1}(t), x_{1,2}(t), \dots, x_{1,l_1}(t), x_{2,1}(t), \dots, x_{m,l_m}(t)$, contenidas en S (no necesariamente geoméricamente distintas) que son soluciones de la ecuación

$$\dot{x}(t) = A(x)J\nabla\mathbf{H}(x(t)), \quad A(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt,$$

y satisfacen

- $\frac{\alpha^2\pi}{\omega^i} \leq A(x_{i,j}) \leq \frac{\beta^2\pi}{\omega^i}$, $1 \leq j \leq l_i$, $1 \leq i \leq m$, donde ω^i es como en (71),
- si $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ entonces $A(x_{i_1, j_1}) \neq A(x_{i_2, j_2})$.

Demostración Si S tiene un número infinito de órbitas entonces no hay nada que probar. Supongamos que S tiene un número finito de órbitas. Como aplicaremos 4.3.1, fijemos el subíndice (i, j) . Por el teorema 4.3.1, para cada $n \in \mathbf{N}$ existen $0 < \epsilon_n < 1/n$ y una órbita periódica $x_n(t)$ de período 1 tal que $x_n(t) \in S_{\epsilon_n}$ para todo t y

$$\frac{\alpha^2\pi}{\omega^i} - 1/n \leq A(x_n) \leq \frac{\beta^2\pi}{\omega^i} + 1/n. \quad (72)$$

Sea $\bar{x}_n(t) := \eta_S(-\epsilon_n, x_n(t))$. Esta es una órbita periódica de período 1 en S . Como S tiene sólo un número finito de órbitas, una infinidad de \bar{x}_n (digamos que todas, para simplificar notación) son parametrizaciones de la misma órbita C de S . Ahora

$$e^{-\epsilon_n} A(x_n) = A(\bar{x}_n) = k_n a(C) \quad \text{para algún } k_n \in \mathbf{N},$$

debido a 4.2.7, la observación a 4.2.6 y porque una órbita es precisamente una característica cerrada.

Como $(A(x_n))_{n=1}^\infty$ está acotada tiene una subsucesión convergente, digamos ella misma. De modo que para n suficientemente grande, $k := k_n = k_{n+1} = \dots$ y

$$e^{-\epsilon_n} A(x_n) = ka(C). \quad (73)$$

Tomando límites en (72) cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos que

$$\frac{\alpha^2 \pi}{\omega^i} \leq ka(C) \leq \frac{\beta^2 \pi}{\omega^i}.$$

Sea $\tilde{x}(t)$ una parametrización de C de periodo kT y periodo mínimo $T = a(C)$ que satisface

$$\dot{\tilde{x}}(t) = J\nabla\mathbf{H}(\tilde{x}(t)),$$

esto es posible debido a 4.2.9. Entonces su reparametrización de periodo 1 $x(t) := \tilde{x}(kTt)$ satisface

$$\dot{x}(t) = kTJ\nabla\mathbf{H}(x(t)) = A(x)J\nabla\mathbf{H}(x(t)),$$

ya que

$$A(x) = -\frac{1}{2} \int_0^{kT} J\dot{\tilde{x}}(t) \cdot \tilde{x}(t) dt = -\frac{k}{2} \int_0^T J\dot{\tilde{x}}(t) \cdot \tilde{x}(t) dt = ka(C). \quad (74)$$

Así para cada (i, j) , obtenemos una órbita periódica $x_{i,j}(t)$ de periodo 1 contenida en S que satisface

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,j}(t) &= A(x_{i,j})J\nabla\mathbf{H}(x_{i,j}(t)) \\ \frac{\alpha^2 \pi}{\omega^i} &\leq A(x_{i,j}) \leq \frac{\beta^2 \pi}{\omega^i}. \end{aligned}$$

Además para $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ tenemos por (74) que

$$\begin{aligned} A(x_{i_1, j_1}) &= k_{i_1, j_1} a(C_{i_1, j_1}) \\ &\neq k_{i_2, j_2} a(C_{i_2, j_2}) \quad \text{por (73) y 4.3.1 (••)} \\ &= A(x_{i_2, j_2}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente resultado nos da una cota inferior para el período de las soluciones periódicas de la ecuación hamiltoniana

$$\dot{x}(t) = J\nabla\mathbf{H}(x(t)) \quad (\text{SH})$$

Definamos

$$\rho := \min_{x \in S} \frac{|\nabla\mathbf{H}(x) \cdot \chi(x)|}{|\nabla\mathbf{H}(x)|} \quad (75)$$

$$= \min_{x \in S} \{ \text{proyección de } \chi(x) \text{ en la dirección ortogonal a } T_x S \}, \quad (76)$$

donde χ es la dilatación simpléctica transversal a S . Como S es compacta, $\rho > 0$.

LEMA 4.3.3 () Sea $x(t)$ solución de (SH) de período T contenida en S . Entonces

$$T \geq 4\pi\rho^2 \text{ donde } \rho \text{ es como en (75).}$$

Demostración Sea $x(\tau)$ una solución de (SH) de período T y reparametrizémosla mediante $t = T\tau$ para hacerla solución de período 1 de

$$\dot{x}(t) = TJ\nabla\mathbf{H}(x(t)). \quad (77)$$

Expresemos

$$x = \hat{x} + \tilde{x} \quad \text{con } \hat{x} \in E^0, \tilde{x} = \sum_{k \neq 0} a_k e^{2\pi i k t}.$$

Así $J\dot{x}(t) \cdot x(t) = J\dot{\hat{x}} \cdot x + J\dot{\tilde{x}} \cdot \hat{x} + J\dot{\tilde{x}} \cdot \tilde{x}$ y

$$\int_0^1 J\dot{\hat{x}}(t) \cdot \hat{x}(t) dt = \text{Re}(i\dot{\hat{x}}, \hat{x})_{L^2} = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{\tilde{x}}(t) \cdot \tilde{x}(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|\dot{\tilde{x}}\|_{L^2} \|\tilde{x}\|_{L^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \|\dot{\tilde{x}}\|_{L^2} \|\tilde{x}\|_{L^2} \text{ por la desigualdad de Wirtinger, [MW] página 9} \\ &\quad (2\pi \|z\|_{L^2} \leq T \|\dot{z}\|_{L^2} \quad z \in H^1([0, T], \mathbf{R}^{2N}), \int_0^T z(t) dt = 0) \\ &= \frac{1}{4\pi} \|\dot{\tilde{x}}\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 |TJ\nabla\mathbf{H}(x(t))|^2 dt \quad \text{por (77)} \\ &\leq \frac{T^2}{4\pi\rho^2} \quad \text{ya que } \rho |\nabla\mathbf{H}(x)| \leq |\nabla\mathbf{H}(x) \cdot \chi(x)| = 1 \forall x \in S \text{ por (75)} \\ &= A(x)^2 / 4\pi\rho^2, \end{aligned}$$

la penúltima afirmación se debe a que $\mathbf{H}(\eta_\epsilon(x)) = \epsilon$ para todo $x \in S$ implica $1 = \frac{d}{d\epsilon} |_{\epsilon=0} \mathbf{H}(\eta_\epsilon(x)) = \nabla \mathbf{H}(x) \cdot \frac{dy}{d\epsilon} |_{\epsilon=0} = \nabla \mathbf{H}(x) \cdot \chi(x)$.

Por tanto

$$\Rightarrow 4\pi\rho^2 \leq A(x) = T. \blacksquare$$

Tomemos

$$\begin{aligned} \rho &= \min_{x \in S} \frac{|\nabla \mathbf{H}(x) \cdot \chi(x)|}{|\nabla \mathbf{H}(x)|} \\ &= \min_{x \in S} \{ \text{proyección de } \chi(x) \text{ en la dirección ortogonal a } T_x S \} > 0, \\ \delta_1 &:= \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{4\rho^2 w^i}{\alpha^2} \right\}, \\ \delta_2 &:= \min \left\{ \frac{k w^i}{\tilde{n} w^l} - 1 : 1 \leq k, \tilde{n} \leq 1 + \frac{1}{\delta_1}, 1 \leq i, l \leq m, i \neq l, k w^i > \tilde{n} w^l \right\}, \\ \delta &= \min \{ \delta_1, \delta_2 \}. \end{aligned} \quad (78)$$

Ahora probemos el siguiente resultado de multiplicidad, el cual es el teorema principal del trabajo. En él se usan ideas de [BLMR].

TEOREMA 4.3.4 Sea S una hipersuperficie de tipo contacto restringido que tiene la propiedad geométrica (70) y satisface la hipótesis (i), al principio de esta sección. Si α, β satisfacen $\beta^2/\alpha^2 < 1 + \delta$ entonces existen al menos N características cerradas contenidas en S .

Demostración La primera observación es que sin pérdida de generalidad podemos tomar $\alpha = 1$, ya que la situación geométrica

$$\alpha\xi < S < \beta\xi$$

es la misma que la situación geométrica

$$\tilde{\xi} < S < \tilde{\beta}\tilde{\xi}$$

donde $\tilde{\xi}$ es el elipsoide $\tilde{\xi} = \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{(\alpha r_i)^2} = 1\}$ y $\tilde{\beta} = \beta/\alpha$.

Si existe un número infinito de órbitas en S entonces no hay nada que probar. Supongamos lo contrario. Por 4.3.2 existen al menos $l_1 + \dots + l_m = N$ curvas parametrizadas y cerradas de período 1, $x_{1,1}(t), x_{1,2}(t), \dots,$

$x_{1,l_1}(t), x_{2,l_2}(t), \dots, x_{m,l_m}(t)$, contenidas en S (no necesariamente geométricamente distintas) que son soluciones de la ecuación

$$\dot{x}(t) = A(x)J\nabla\mathbf{H}(x(t)) \quad A(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt \quad (79)$$

y satisfacen

$$\bullet \quad \frac{\pi}{\omega^i} \leq A(x_{i,j}) \leq \beta^2 \frac{\pi}{\omega^i} \quad \text{para } 1 \leq j \leq l_i, 1 \leq i \leq m \quad (80)$$

$$\bullet\bullet \quad \text{si } (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2) \text{ entonces } A(x_{i_1, j_1}) \neq A(x_{i_2, j_2}). \quad (81)$$

Fijemos el subíndice (i, j) . Sea $x_{i,j}(t)$ una de las anteriores curvas parametrizadas de periodo 1, y digamos que su periodo mínimo es $\frac{1}{h_{i,j}}$. Denotemos por $C_{i,j}$ la característica cerrada parametrizada $x_{i,j}(t)$.

Problemos que $h_{i,j} \leq 1 + \frac{1}{\delta_1}$. Por (79) una reparametrización de $x_{i,j}$ es solución de la ecuación

$$\dot{x}(t) = J\nabla\mathbf{H}(x(t)) \quad (\mathbf{SH})$$

con periodo mínimo $A(x_{i,j})/h_{i,j} = a(C_{i,j})$, la última igualdad se debe a 4.2.9. Como sabemos, por 4.3.3, el periodo mínimo de toda solución de (\mathbf{SH}) es mayor igual que $4\pi\rho^2$, así

$$4\pi\rho^2 h_{i,j} \leq A(x_{i,j}).$$

Por la elección de δ_1

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\omega^i \rho^2} &\leq \frac{1}{\delta_1} \\ \Rightarrow \frac{\beta^2}{\omega^i} &\leq 4\rho^2 \frac{(1 + \delta_1)}{\delta_1} \quad \text{ya que } \beta^2 < 1 + \delta_1. \end{aligned}$$

Como $A(x_{i,j}) \leq \beta^2 \pi / \omega^i$, por (80), entonces

$$4\pi\rho^2 h_{i,j} \leq A(x_{i,j}) \leq \frac{\beta^2 \pi}{\omega^i} \leq 4\pi\rho^2 \frac{(1 + \delta_1)}{\delta_1}.$$

Por tanto para cada (i, j)

$$h_{i,j} \leq 1 + \frac{1}{\delta_1}.$$

Ahora probemos que $C_{i,j} = C_{l,k}$ implica que $(i, j) = (l, k)$. Supongamos lo contrario i.e. que hay subíndices $(i, j) \neq (l, k)$ tales que $C_{i,j} = C_{l,k}$.

Caso 1. Cuando $i = l$. Como sabemos

$$A(x_{i,j}) = h_{i,j}a(C_{i,j}) \quad \text{y} \quad A(x_{l,k}) = h_{l,k}a(C_{l,k}),$$

con $h_{i,j} \neq h_{l,k}$, podemos suponer que $h_{i,j} \leq h_{l,k} - 1$, la no igualdad se debe a (81). Así usando (80) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\omega^i} \leq A(x_{i,j}) &= h_{i,j}a(C_{i,j}) = h_{i,j}a(C_{l,k}) = \frac{h_{i,j}}{h_{l,k}}A(x_{l,k}) \leq \frac{h_{i,j}}{h_{l,k}} \frac{\pi\beta^2}{\omega^l} \\ &\Rightarrow \frac{h_{l,k}}{h_{i,j}} \leq \beta^2 \\ &\Rightarrow 1 + \delta_1 \leq 1 + \frac{1}{h_{l,k} - 1} = \frac{h_{l,k}}{h_{l,k} - 1} \leq \frac{h_{l,k}}{h_{i,j}} \leq \beta^2. \end{aligned}$$

Lo que contradice la elección de β .

Caso 2. Cuando $i \neq l$. Como ω^i, ω^l satisfacen que $\omega^i/\omega^l \notin \mathbf{Q}$ para $i \neq l$ tenemos que $h_{i,j}\omega^i \neq h_{l,k}\omega^l$. Supongamos que $h_{i,j}\omega^i > h_{l,k}\omega^l$. Entonces

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{h_{i,j}\omega^i}{h_{l,k}\omega^l} - 1 + 1 \geq \delta_2 + 1 \text{ por la elección de } \delta_2 \\ &\quad > \beta^2 \text{ por hipótesis} \\ &\Rightarrow \frac{\omega^i}{h_{l,k}} > \frac{\omega^l}{h_{i,j}}\beta^2. \end{aligned}$$

Pero por (80) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{h_{l,k}\omega^l} \leq a(C_{l,k}) &= a(C_{i,j}) \leq \frac{\pi\beta^2}{h_{i,j}\omega^i} \\ \frac{\omega^i}{h_{l,k}} &\leq \frac{\omega^l}{h_{i,j}}\beta^2. \end{aligned}$$

contradicción. La otra posibilidad $h_{i,j}\omega^i < h_{l,k}\omega^l$ lleva de la misma forma (solo intercambiando i con l , j con k) a una contradicción.

Así en ambos casos llegamos a una contradicción y por tanto las N características cerradas $C_{1,1}, \dots, C_{m,m}$ son todas diferentes. ■

Es importante observar que el teorema 4.3.4 tiene como corolario la versión para hipersuperficies suaves, i.e. de clase C^∞ , del resultado de Berestycki et al. de 1985, [BLMR], así como los corolarios de éste, el teorema de Ekeland-Lasry de 1980 y el de Ambrosetti-Mancini de 1982.

Sea $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie en forma de estrella, ver 1.1, entonces $\chi(x) = \frac{1}{2}x$ es una dilatación simpléctica transversal a S con flujo global $\eta_S(t, x) = e^{\frac{1}{2}t}x$ ver 4.2.5. Por tanto una hipersuperficie S suave y con forma de estrella es de tipo contacto restringido, con flujo global η_S .

La δ en [BLMR] está definida en términos de $\bar{\rho}$, donde

$$\begin{aligned} 0 < \bar{\rho} := \min_{x \in S} d(x + T_x S, 0) &= \min_{x \in S} \frac{|\nabla H(x) \cdot x|}{|\nabla H(x)|} \\ &= 2 \min_{x \in S} \frac{|\nabla H(x) \cdot \chi(x)|}{|\nabla H(x)|} \\ &= 2\rho. \end{aligned}$$

Es sencillo ver que coincide con la dada aquí.

COROLARIO 4.3.5 (*Teorema de Berestycki et al. para hipersuperficies suaves*) Sea S una hipersuperficie suave con forma de estrella que tiene la propiedad geométrica (70). Si α, β satisfacen que $\beta^2/\alpha^2 < 1 + \delta$ entonces existen al menos N órbitas contenidas en S . ■

De los pocos resultados que hay respecto a multiplicidad de órbitas, fue el de Ekeland-Lasry el que dio la pauta en este tipo de problemática. Tomemos una clase particular de hipersuperficies en forma de estrella, la clase de hipersuperficies convexas, ver 1.1, y denotemos por $S^{2N-1} = \{x \in \mathbf{R}^{2N} : |x| = 1\}$.

COROLARIO 4.3.6 (*Teorema de Ekeland-Lasry para hipersuperficies suaves*) Sea S una hipersuperficie suave y convexa que tiene la propiedad geométrica

$$\alpha S^{2N-1} < S < \beta S^{2N-1}. \quad (82)$$

Si $\alpha < \beta < \sqrt{2}\alpha$ entonces S tiene al menos N órbitas.

Demostración De acuerdo a las definiciones en (78) y usando que S tiene forma de estrella tenemos que $\delta = \delta_1 = \bar{\rho}^2/\alpha^2$. Como $\beta < \sqrt{2}\alpha$

entonces

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} < 2 \leq 1 + \frac{\bar{\rho}^2}{\alpha^2} = 1 + \delta,$$

ya que por definición de $\bar{\rho}$ y por ser S convexa, $\alpha < \bar{\rho}$. ■

Al igual que en [BLMR] podemos definir δ_p , $1 \leq p \leq N$, con

$$\delta = \delta_N \leq \delta_{N-1} \leq \dots \leq \delta_1 = \infty,$$

tales que al tomar una hipersuperficie S como en el enunciado de 4.3.4, si se satisface que $\beta^2/\alpha^2 < 1 + \delta_p$ entonces existen al menos p características cerradas contenidas en S . Esto se logra considerando en la definición de δ_1 , δ_2 sólo p -semiejes (en lugar de N). Berestycki et al. afirman, en [BLMR], que con esto se recupera el resultado de Ambrosetti-Mancini, pero no es el caso ya que cuando ξ es una esfera entonces $\delta = \delta_1$, la cual no cambia si tomamos un semieje o si tomamos N semiejes (ya que todos son iguales) y por consiguiente tampoco cambia la condición $\beta^2/\alpha^2 < 1 + \delta$.

COROLARIO 4.3.7 (Teorema de Ambrosetti-Mancini para hipersuperficies suaves) Sea S una hipersuperficie suave y estrictamente convexa que tiene la propiedad geométrica

$$\alpha S^{2N-1} < S < \beta S^{2N-1}.$$

Si $\beta \in (\alpha, \sqrt{k}\alpha)$ entonces S tiene al menos $\lfloor \frac{N}{k-1} \rfloor$ órbitas, $2 \leq k \leq N+1$.

Demostración Si existe un número infinito de órbitas en S entonces no hay nada que probar. Supongamos lo contrario. Por 4.3.2 existen al menos N curvas parametrizadas y cerradas de período 1, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, contenidas en S (no necesariamente geoméricamente distintas) que son soluciones de la ecuación

$$\dot{x}(t) = A(x)J\nabla\mathbf{H}(x(t)), \quad A(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt,$$

y satisfacen

- $\pi\alpha^2 \leq A(x_i) \leq \pi\beta^2$ para $1 \leq i \leq N$.
- si $i \neq j$ entonces $A(x_i) \neq A(x_j)$.

Reparametrizando $y_i(t) := x_i(T_i^{-1}t)$, $T_i = A(x_i)$, $1 \leq i \leq N$, obtenemos N soluciones cerradas de la ecuación

$$x(t) = J\nabla H(x(t)). \quad (\text{SH})$$

Además los periodos de estas soluciones $y_i(t)$ satisfacen que

$$\pi\alpha^2 \leq T_i \leq \pi\beta^2, \quad 1 \leq i \leq N,$$

siendo todos ellos diferentes entre si. Por ser S convexa tenemos que $\bar{\rho} > \alpha$. De lo anterior y de que $\beta \in (\alpha, \sqrt{k}\alpha)$ tenemos que

$$T_i \leq \pi\beta^2 < k\pi\alpha^2 < k\pi\bar{\rho}^2.$$

Notemos que debido a 4.3.3 y a que S tiene forma de estrella, las soluciones de (SH) tienen período mayor igual que $\pi\bar{\rho}^2$, por tanto $\pi\bar{\rho}^2 \leq T_i \leq k\pi\bar{\rho}^2$. De donde se sigue que cada solución puede repetirse a lo más $k-1$ veces. Así hay $\lfloor \frac{N}{k-1} \rfloor$ soluciones. ■

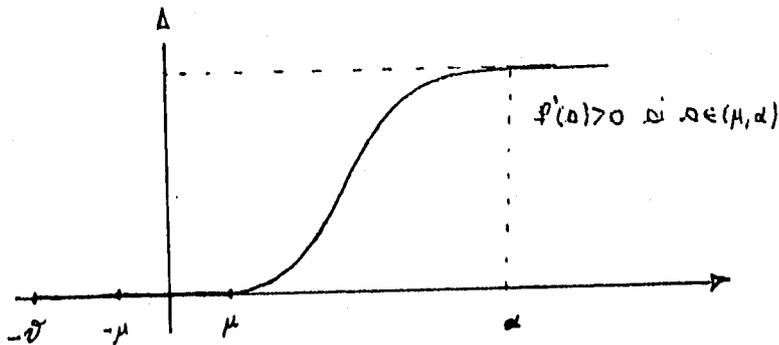
§4.4 Comparación del hamiltoniano asociado a hipersuperficies

Sea $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie compacta y conexa de clase C^∞ . Comencemos recordando la definición de \mathcal{H}_S . $H_S \in \mathcal{H}_S$ si $H_S : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de clase C^∞ de la forma

$$H_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{B}(\eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S)) \\ f_S(\epsilon) & \text{si } x = \eta_S(\epsilon, \bar{x}), \bar{x} \in S, -\mu_S \leq \epsilon \leq \alpha_S \\ b & \text{si } x \in \mathcal{A}(\eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S)) \quad \text{y } |x| \leq R_S \\ g_S(|x|) & \text{si } |x| > R_S \end{cases} \quad (83)$$

donde $\mathcal{B}(\eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S))$ denota la parte acotada de $\mathbf{R}^{2N} \setminus \eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S)$ que estamos suponiendo contiene al origen, $\mathcal{A}(\eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S))$ denota

la parte no acotada de $\mathbb{R}^{2N} \setminus \eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S)$, $f_S(s)$ es una función real con gráfica de la forma



Gráfica de f

y η_S es una familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S .

Recordemos que una familia parametrizada de hipersuperficies, η_S , modeladas por S tiene las siguientes propiedades

- $\eta_S(0, x) = x$ para todo $x \in S$ (84)

- η_S es un difeomorfismo

- η_S tiene imagen abierta y acotada (85)

- $S_{t_1} \prec S_{t_2}$ si $t_1 < t_2$, i.e. $\overline{\mathcal{B}(S_{t_1})} \subset \mathcal{B}(S_{t_2})$. (86)

Para mayor detalle sobre η_S y H_S ver definiciones 3.1.2 y 3.1.3 respectivamente.

Veamos que la condición geométrica

$$S < \tilde{S}$$

la podemos traducir en una desigualdad entre funciones hamiltonianas asociadas a S, \tilde{S} .

LEMA 4.4.1 Sean $S, \tilde{S} \subset \mathbb{R}^{2N}$ hipersuperficies compactas y conexas de clase C^∞ tales que

$$S < \tilde{S}.$$

Sea $\eta_{\tilde{S}}$ una familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por \tilde{S} . Y sea $\mathcal{H}_{\tilde{S}}$ la familia de hamiltonianos que definimos a partir de $\eta_{\tilde{S}}$, como en 3.1.3.

Entonces dada $H_{\tilde{S}} \in \mathcal{H}_{\tilde{S}}$, para cada $\eta_S : (-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, $0 < \vartheta < \hat{\vartheta}$, familia parametrizada de hipersuperficie modeladas por S existe $H_S \in \mathcal{H}_S$ tal que

$$H_S(x) \geq H_{\tilde{S}}(x) \text{ para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}. \quad (87)$$

De hecho si $H_S \in \mathcal{H}_S$ satisface que

$$\bullet \quad f_S(\sigma_S) \text{ es suficientemente grande, } f_S(\sigma_S) > \max_{|x| \leq R_S} H_{\tilde{S}}(x), \quad (88)$$

$$\text{para alg\u00fan } \mu_S < \sigma_S < \alpha_S \text{ con } S_{\sigma_S} \prec \tilde{S}_{\mu_S} \quad (89)$$

$$\bullet \quad R_S \geq R_{\tilde{S}} \text{ y } g_S(s) \geq g_{\tilde{S}}(s) \text{ para todo } s, \quad (90)$$

entonces H_S satisface la desigualdad (87).

Demostraci\u00f3n Sea $H_{\tilde{S}} \in \mathcal{H}_{\tilde{S}}$, $H_{\tilde{S}}(x)$ como en (83). Tomemos $\eta_S : (-\vartheta, \hat{\vartheta}) \times S \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$, $0 < \vartheta < \hat{\vartheta}$ una familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S .

Como $S \prec \tilde{S}$ entonces por definici\u00f3n tenemos

$$\mathcal{B}(S) \subset \mathcal{B}(\tilde{S}).$$

Por (84) $\tilde{S}_0 = \tilde{S}$ y como $0 < \mu_{\tilde{S}}$ tenemos que $\overline{\mathcal{B}(\tilde{S})} \subset \mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}})$, por (86). As\u00ed

$$S \subset S \cup \mathcal{B}(S) = \overline{\mathcal{B}(S)} \subset \mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}}).$$

Como por (85) la $\text{Im } \eta_S$ es una vecindad abierta de S entonces $\mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}}) \cap \text{Im } \eta_S$ es un abierto que contiene a S . As\u00ed $\eta_S^{-1}(\mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}}) \cap \text{Im } \eta_S)$ es un abierto que contiene a $\{0\} \times S$. Por tanto existe $\sigma_S > 0$ tal que

$$\eta_S([-\sigma_S, \sigma_S] \times S) \subset \mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}}). \quad (91)$$

ver figura 4.

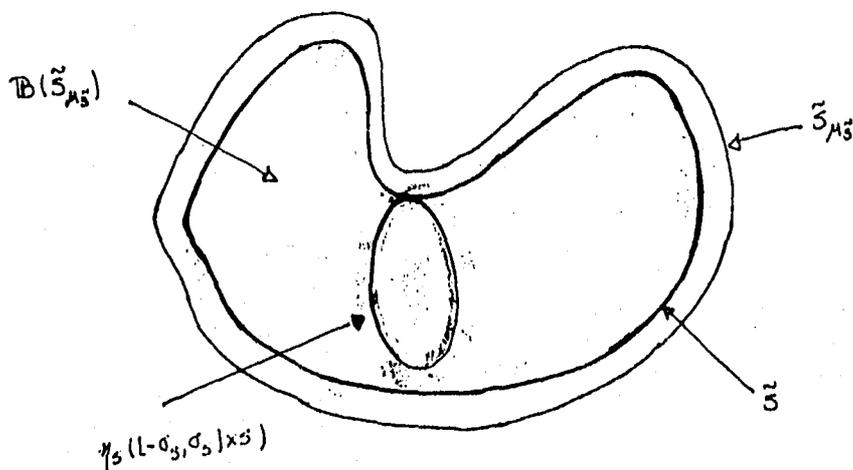


Figura 4

Se eligen μ_s y δ_s tales que

$$\begin{aligned} 0 < \mu_s < \alpha_s \\ \delta_s < \hat{\nu}. \end{aligned} \quad (92)$$

Y se toman α_s y R_s tales que

$$\begin{aligned} \delta_s < \alpha_s < \hat{\nu} \\ \text{y } R_s \geq R_{\hat{s}}. \end{aligned} \quad (93)$$

Y se construye f_s como se requiere para definir H_s como en (83).

$$\begin{aligned} f_s(s) &= 0 \quad \text{si } s \leq \mu_s \\ f'_s(s) &> 0 \quad \text{si } s \in (\mu_s, \alpha_s) \end{aligned}$$

y

$$f_s(s) = b := f_s(\alpha_s) \quad \text{si } s \geq \alpha_s.$$

Con la condición adicional de que

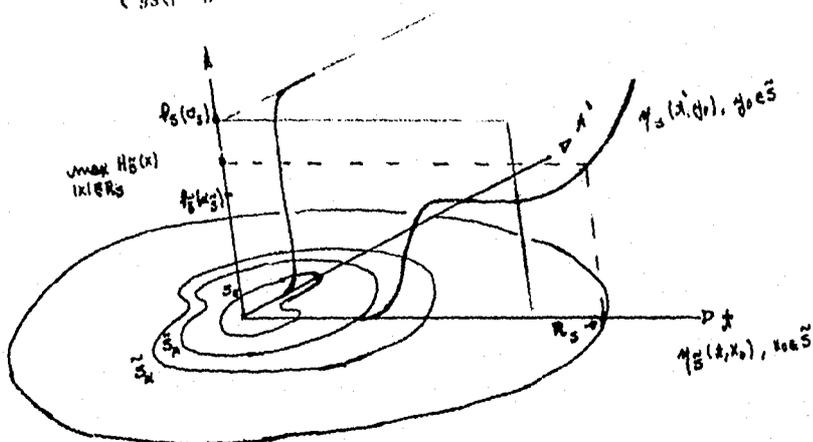
$$f_S(\sigma_S) > \max_{|x| \leq R_S} H_S(x) \quad (94)$$

Tomamos

$$g_S(s) \geq g_S^*(s) \quad \text{para toda } s \quad (95)$$

y definimos

$$H_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{B}(\eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S)) \\ f_S(c) & \text{si } x = \eta_S(c, \bar{x}), \bar{x} \in S, -\mu_S \leq c \leq \alpha_S \\ b & \text{si } x \in \mathcal{A}(\eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S)) \text{ y } |x| \leq R_S \\ g_S(|x|) & \text{si } |x| > R_S \end{cases}$$



Comparemos H_S y $H_{\hat{S}}$. Sea $x \in \mathbb{R}^{2N}$.

(i) Sea $x \in \mathcal{B}(\hat{S}_{\mu_S})$. Como $\mathcal{B}(\hat{S}_{\mu_S}) = \mathcal{B}(\eta_{\hat{S}}([- \mu_S, \mu_S] \times \hat{S})) \cup \eta_{\hat{S}}([- \mu_S, \mu_S] \times \hat{S})$ entonces

$$H_{\hat{S}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{B}(\eta_{\hat{S}}([- \mu_S, \mu_S] \times \hat{S})) \subset \mathcal{B}(\eta_S([- \mu_S, \alpha_S] \times S)) \\ f_{\hat{S}}(c) & \text{si } x = \eta_{\hat{S}}(c, \bar{x}), \bar{x} \in \hat{S}, -\mu_S \leq c \leq \mu_S \\ = 0 & \end{cases}$$

ya que en el segundo caso si $x = \eta_{\tilde{S}}(\epsilon, \bar{x})$ entonces $\epsilon < \mu_{\tilde{S}}$ y por definición de $f_{\tilde{S}}$, $f_{\tilde{S}}(\epsilon) = 0$. Por tanto

$$H_{\tilde{S}}(x) \leq H_S(x).$$

(ii) Sea $x \notin \mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}})$ y $|x| \leq R_S$.

Por (91) $\mathbf{R}^{2N} \setminus \mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}}) \subset \eta_S([\sigma_S, \alpha_S] \times S) \cup \mathcal{A}(\eta_S([-\mu_S, \alpha_S] \times S))$. Ahora por definición de $H_S(x)$ tenemos

$$H_S(x) = \begin{cases} f_S(\epsilon) & \text{si } x = \eta_S(\epsilon, \bar{x}), \bar{x} \in S, \sigma_S \leq \epsilon \leq \alpha_S \\ b & \text{si } x \in \mathcal{A}(\eta_S([-\mu_S, \alpha_S] \times S)) \end{cases} \text{ y } |x| \leq R_S$$

$$\geq f_S(\sigma_S) \quad \text{porque } f \text{ es creciente}$$

Por otra parte

$$H_{\tilde{S}}(x) \leq \max_{|x| \leq R_S} H_{\tilde{S}}(x) < f_S(\sigma_S) \quad \text{por (94)}$$

Por tanto

$$H_{\tilde{S}}(x) \leq H_S(x) \quad \text{si } x \notin \mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}}) \text{ y } |x| \leq R_S.$$

(iii) Sea $|x| > R_S$

$$H_{\tilde{S}}(x) = g_{\tilde{S}}(|x|) \quad \text{por (93) y por definición de } H_{\tilde{S}}$$

$$\leq g_S(|x|) \quad \text{por (95)}$$

$$= H_S(x).$$

Por último probemos la segunda parte del lema. Observemos que para la construcción de $H_S \in \mathcal{H}_S$ sólo utilizamos, además de como deben estar definidos los elementos de \mathcal{H}_S , lo siguiente:

- Que $\eta_S([-\sigma_S, \sigma_S] \times S) \subset \mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}})$ lo cual es equivalente a que $\overline{\mathcal{B}(S_{\sigma_S})} \subset \mathcal{B}(\tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}}) \iff S_{\sigma_S} \prec \tilde{S}_{\mu_{\tilde{S}}}$.
- La única condición, no general, que se impuso a la f fue que

$$f_S(\sigma_S) > \max_{|x| \leq R_S} H_{\tilde{S}}(x).$$

- Que $R_S \geq R_{\bar{S}}$ y que $g_S(s) \geq g_{\bar{S}}(s) \quad \forall s$.

Por tanto si $H_S \in \mathcal{H}_S$ es cualquier elemento que satisface (89), (88) y (90) entonces

$$H_S(x) \geq H_{\bar{S}}(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}. \quad \blacksquare$$

§4.5 Un hamiltoniano adecuado para cuando Σ_S es discreto

Como en la sección 4.3, fijemos S una hipersuperficie de tipo contacto restringido y χ una dilatación simpléctica transversal a S . Además sujetemos a S a las siguientes hipótesis :

- (i) El flujo η_S inducido por χ es global i.e. tiene dominio $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2N}$.

Recordemos que

$\Sigma_S := \{ka(C) > 0 : C \text{ es una característica cerrada contenida en } S, k \in \mathbf{Z}\}$,

donde $a(C) = -\frac{1}{2} \int_0^T J\dot{x}(t) \cdot x(t) dt$ con $x(t)$ una parametrización regular de C de período mínimo T .

- (ii) Σ_S es discreto y cerrado. Así por ser Σ_S discreto y cerrado lo podemos ordenar en una sucesión estrictamente creciente $(d_j^S)_{j=1}^\infty$.
- (iii) Existe $\epsilon > 0$ tal que $(\Sigma_S \cap (s - \epsilon, s + \epsilon)) \setminus \{s\} = \emptyset$ para una infinidad de elementos s en Σ_S .

Ahora a partir del flujo η_S podemos definir una familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S como en 3.1.2, y a partir de ésta definir como en 3.1.3 la familia de hamiltonianos \mathcal{H}_S .

En esta sección dados j_0 un número natural y $\kappa > 0$ un número real construiremos una familia Λ_S que se empleará en la sección 4.7 para demostrar el teorema 4.3.1. El objetivo de la presente sección es exhibir que Λ_S tiene las siguientes propiedades:

(A1) $\Lambda_S \subset \mathcal{H}_S$.

(A2) Sea $H_S \in \Lambda_S$. La función f_S que interviene en la definición de H_S (ver (83)) es de la forma

$$f_S(s) = \varphi \circ e^s, \quad \varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ de clase } C^\infty \text{ con } \varphi(0, 1] \equiv 0.$$

Recordemos las definiciones de

$$\phi_{H_S} = A(x) - \int_0^1 H_S(x(t)) dt,$$

y de los valores críticos de ϕ_{H_S} de la forma

$$c_{j, H_S} := \inf_{z \in \Gamma_j} \sup_{x \in Z} \phi_{H_S}(x)$$

obtenidos en 3.4.7. Cabe observar que el número j_0 determinará el número máximo de valores críticos de esta forma, Nj_0 valores, al determinar el subespacio \mathbf{F} y su dimensión, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{F} = Nj_0$, ver comentarios anteriores a 3.4.7.

(A3) Si $H_S \in \Lambda_S$ entonces, para $1 \leq j \leq j_0$, los valores c_{j, H_S} son valores críticos de ϕ_{H_S} . Además existe $\nu(H_S) = \nu > 0$ tal que si $0 < c_{j, H_S} \leq d_{k_0}^S(1 + \nu)$ entonces podemos encontrar $x_j(t)$ punto crítico de ϕ_{H_S} tal que

$$\begin{aligned} c_{j, H_S} &= \phi_{H_S}(x_j), \\ x_j(t) &\in S_{\epsilon_j} \text{ para todo } t, \\ 0 < \epsilon_j < \nu &\quad \text{y} \quad 0 < H_S(x_j) \equiv c_{j, H_S} < \nu, \end{aligned}$$

donde $k_0(H_S) = k_0 \geq j_0$ es un natural que tiene la propiedad de que $d_{k_0}^S \geq \kappa$.

Además para $i \neq j$ si $e^{-\epsilon_i} A(x_i) = e^{-\epsilon_j} A(x_j)$ entonces S tiene un número infinito de órbitas, $1 \leq i, j \leq j_0$.

Antes de enunciar la siguiente proposición que nos caracterizará los valores críticos positivos de ϕ_{H_S} para $H_S \in \Lambda_S$, recordemos la definición del hamiltoniano \mathbf{H}

$$\mathbf{H}(x) = \epsilon \quad \text{si } x = \eta_S(\epsilon, \bar{x}), \quad \bar{x} \in S.$$

PROPOSICION 4.5.1 Sea $H_S \in \mathcal{H}_S$. Y supongamos que la función f_S que interviene en la definición de H_S (ver (83)) es de la forma

$$f_S(s) = \varphi \circ e^s, \text{ con } \varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ de clase } C^\infty.$$

Entonces los valores críticos positivos de ϕ_{H_S} son exactamente los valores críticos positivos de las funciones

$$d_j^S s - \varphi(s) \quad j = 1, 2, \dots$$

Más precisamente si $c = \phi_{H_S}(x) > 0$ es un valor crítico de ϕ_{H_S} entonces $\phi_{H_S}(x) = d_j^S \tau - \varphi(\tau)$ es un valor crítico de $d_j^S s - \varphi(s)$ para algún $j \in \{1, 2, \dots\}$, con $\tau = e^t$, $x(t) \in S_c$ para todo t . Además $A(x) = \varphi'(e^t)e^t$.

Y si τ es un punto crítico, con valor crítico positivo, de $d_j^S s - \varphi(s)$ para algún $j \in \{1, 2, \dots\}$ entonces existe x punto crítico de ϕ_{H_S} tal que

$$d_j^S \tau - \varphi(\tau) = \phi_{H_S}(x)$$

y

$$x(t) \in S_{\ln \tau} \quad \text{para todo } t.$$

Demostración Sea x un punto crítico positivo de ϕ_{H_S} con valor crítico $c > 0$. Por el lema 3.3.3 $x(t) \in S_c$ para todo t y para algún $\mu < c < \alpha$. Como $x(t) \in S_c$ para todo t entonces $H_S(x(t)) = \varphi(e^t)$ para todo t , por definición de H_S . Ahora

$$\begin{aligned} c = \phi_{H_S}(x) &= A(x) - \int_0^1 H_S(x(t)) dt \\ &= \varphi'(e^t)e^t - \varphi(e^t) \text{ por 4.2.8.} \end{aligned}$$

Como $A(x) \in \Sigma_{S_c}$ y por 4.2.7 $\Sigma_{S_c} = e^t \Sigma_S$, entonces

$$\varphi'(e^t) = d_j^S \tag{96}$$

para algún $j \in \{1, 2, \dots\}$. Así

$$c = d_j^S e^t - \varphi(e^t)$$

Por tanto c es un valor crítico de $h_j(s) = d_j^S s - \varphi(s)$, ya que $h_j'(e^t) = d_j^S - \varphi'(e^t) = 0$ por (96).

Ahora probemos la inversa. Sea $c > 0$ valor crítico de

$$d_j^S s - \varphi(s) \quad \text{con } j \in \{1, 2, \dots\}.$$

Primero veamos que los puntos críticos de $d_j^S s - \varphi(s)$ se encuentran en (e^μ, e^α) . Como $f(s) \equiv cte$ si $s \geq \alpha$ entonces $\varphi(s) \equiv \varphi(e^\alpha)$ si $s \geq e^\alpha$. Por tanto los puntos críticos de $d_j^S s - \varphi(s)$ son menores que e^α . Análogamente porque $f(s) \equiv cte$ si $s \leq \mu$ tenemos que los puntos críticos de $d_j^S s - \varphi(s)$ son mayores que e^μ .

Por tanto si τ es un punto crítico de $d_j^S s - \varphi(s)$ con valor crítico c , entonces $\tau = e^\epsilon$ con $\mu < \epsilon < \alpha$,

$$\begin{aligned} c &= d_j^S e^\epsilon - \varphi(e^\epsilon) \\ \text{y } d_j^S &= \varphi'(e^\epsilon). \end{aligned} \quad (97)$$

Ahora exhibamos $x \in E$ punto crítico de ϕ_{H_S} tal que $x(t) \in S_c$ para todo t y $A(x) = d_j^S e^\epsilon$. Notemos que de ésto se sigue que

$$c = d_j^S e^\epsilon - \varphi(e^\epsilon) = A(x) - \int_0^1 H_S(x(t)) dt = \phi_{H_S}(x),$$

es valor crítico de ϕ_{H_S} , por lo que habríamos terminado.

Como $d_j^S e^\epsilon \in e^\epsilon \Sigma_S = \Sigma_{S_c}$, por definición de Σ_{S_c} existe C característica cerrada contenida en S_c tal que

$$k_0 a(C) = d_j^S e^\epsilon.$$

Como C es una característica cerrada le podemos dar una parametrización $z(t)$ tal que

$$\dot{z}(t) = J\nabla H(z(t)),$$

con periodo mínimo $T = a(C)$, esto último es debido a 4.2.9. Y reparametrizando $x(t) := z(d_j^S e^\epsilon t)$ tenemos una solución de periodo 1 de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= d_j^S e^\epsilon J\nabla H(x(t)) \\ &= \varphi'(e^\epsilon) e^\epsilon J\nabla H(x(t)) \quad \text{por (97)} \\ &= J\nabla H_S(x(t)) \quad \text{porque } x(t) \in S_c \quad \forall t \quad \text{y porque } \mu < \epsilon < \alpha. \end{aligned}$$

Debido a que las soluciones de (SH_S) de periodo 1 son precisamente los puntos críticos de ϕ_{H_S} (ver 3.3.2) tenemos que $x \in E$, es punto crítico de ϕ_{H_S} , además $x(t) \in S_c$ para todo t y $A(x) = f'_S(e^\epsilon) = \varphi'(e^\epsilon) e^\epsilon = d_j^S e^\epsilon$. ■

Ahora veamos que existen funciones $\varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tales que al tomar $f_S(s) = \varphi \circ e^s$ la función $H_S \in \mathcal{H}_S$, como se supuso en 4.5.1 y se afirmaba en (A2). Debido a la proposición 4.5.1 nos resultará relevante el conjunto $\{d_j^S \tau - \varphi(\tau) > 0 : \tau \text{ es un punto crítico de } d_j^S s - \varphi(s) \text{ para algún } j \in \{1, 2, \dots\}\}$. Las funciones φ que construiremos tendrán además la propiedad de que si ordenamos de manera creciente este conjunto los "primeros" elementos son

$$M_1 := \max_{s \in (1, 1+\delta)} d_1^S s - \varphi(s), \dots, M_q := \max_{s \in (1, 1+\delta)} d_q^S s - \varphi(s).$$

Dados $j_0 > 0$ un número natural y $\kappa > 0$ un número real, denotemos por $\mathcal{F}_S(j_0, \kappa) \equiv \mathcal{F}_S$ a la familia de todas las funciones $\varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ de clase C^∞ construidas como sigue:

Se elige un natural $k_0 \geq j_0$ tal que

$$d_{k_0}^S \geq \kappa$$

(a) Elijamos $\tilde{\delta} > 0$. Sea ϵ como en (iii). Tomemos $\tilde{\alpha} > 1 + \tilde{\delta}$ tal que

$$\bullet \quad \epsilon \tilde{\alpha} > d_{k_0}^S (1 + \tilde{\delta}). \quad (98)$$

(b) Se elige $R > 0$ tal que

$$\bullet \quad \overline{\mathcal{B}(S_{\ln \tilde{\alpha}})} \subset B_R(\mathbf{0}) = \{x \in \mathbf{R}^{2N} : |x| \leq R\}. \quad (99)$$

(c) Se elige \tilde{l} tal que

$$\bullet \quad b_S := d_{\tilde{l}-1}^S \tilde{\alpha} > aR^2 \text{ donde } 2a := 2(k_0 + \frac{1}{2})\pi \notin 2\pi\mathbf{Z} \setminus \{0\}$$

$$\bullet \quad d_{\tilde{l}}^S s - d_{k_0}^S (1 + \tilde{\delta}) > 0 \text{ si } s > 1.$$

$$\bullet \quad * \quad d_{\tilde{l}-1}^S \tilde{\delta} > \nu_*, \text{ donde } \nu_* \text{ es un real dado} \quad (101)$$

Construyamos φ sujeta a las siguientes condiciones:

$$\bullet \quad d_{\tilde{l}}^S s - \varphi(s) > d_{k_0}^S (1 + \tilde{\delta}) \text{ si } s \in (1, \tilde{\alpha}) \quad (102)$$

$$\bullet \quad \varphi'(s) > 0, \varphi''(s) < 0 \text{ si } s \in (1 + \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}) \quad (103)$$

por (a) se puede escoger $s_0 < \tilde{\alpha}$ tal que satisfaga

$$\bullet \quad \varphi'(s) > d_{\tilde{l}-1}^S \quad s \in (1 + \tilde{\delta}, s_0), \text{ con } \varphi(s_0) = d_{\tilde{l}-1}^S s_0 \quad (104)$$

$$\bullet \quad \varphi(s) > d_{\tilde{l}-1}^S s, \quad s \in (s_0, \tilde{\alpha}) \quad (105)$$

$$\bullet \quad \varphi(s) = b_S = d_{\tilde{l}-1}^S \tilde{\alpha} > aR^2 \text{ si } s \in [\tilde{\alpha}, \infty). \quad (106)$$

Se elige $\tilde{\mu} \in (0, \tilde{\delta})$ tal que

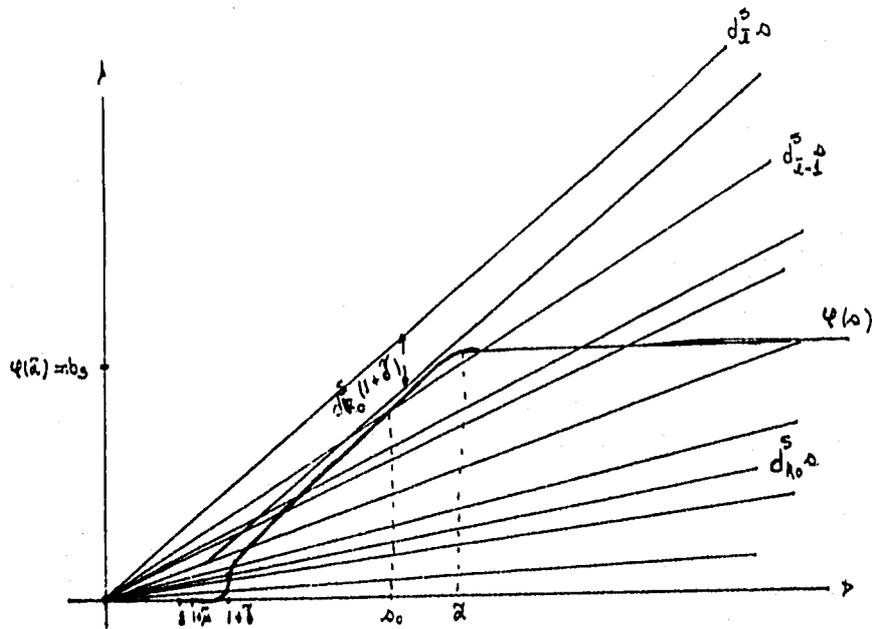
$$\bullet \varphi((0, 1 + \tilde{\mu})) = 0 \quad (107)$$

$$\bullet \varphi(1 + \tilde{\delta}) = d_{k_0}^S(1 + \tilde{\delta}) \quad (108)$$

$$\bullet \varphi'(s) > 0, \varphi''(s) > 0 \text{ si } s \in (1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta}). \quad (109)$$

Observaciones a la construcción de φ

- (I) Notemos que si tomamos otra $\tilde{\mu} \in (0, \tilde{\delta})$, en particular una más pequeña que la elegida, podemos mantener los otros números elegidos en (a), (b) y (c).
- (II) La propiedad (iii) que se le pidió a Σ_S , de que exista $\epsilon > 0$ tal que $(\Sigma_S \cap (s - \epsilon, s + \epsilon)) \setminus \{s\} = \emptyset$ para una infinidad de elementos s en Σ_S , se usó en la elección de $\tilde{\alpha}$ ver (98). Y como no tenemos control sobre la magnitud de $\tilde{\alpha}$ nuestra construcción requiere que el flujo η_S sea global, más precisamente que la variable "tiempo" pueda correr sobre todos los reales positivos.
- (III) La condición (101) sólo se usará en la prueba de A_4 .
- (IV) El objetivo de construir φ de esta manera es él de garantizar que los puntos τ tales que $\varphi'(\tau) = d_j^S$ p.a. $j \in \{1, 2, \dots\}$ y que tienen valor crítico $d_j^S \tau - \varphi(\tau) \in (0, M)$, $M = M(\varphi)$ estén "cerca" de 1 y no "cerca" de $\tilde{\alpha}$.



Gráfica de φ

A partir de φ definimos $H_S(x)$ por

$$H_S(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{B}(\eta_S([- \ln(1 + \tilde{\mu}), \ln \tilde{\alpha}] \times S)) \\ \varphi \circ e^x & \text{si } x = \eta_S(\epsilon, \tilde{x}) \text{ con } \tilde{x} \in S, -\ln(1 + \tilde{\mu}) \leq \epsilon \leq \ln \tilde{\alpha} \\ b_S & \text{si } x \in \mathcal{A}(\eta_S([- \ln(1 + \tilde{\mu}), \ln \tilde{\alpha}] \times S)) \text{ y } |x| \leq R \\ g(|x|) & \text{si } |x| > R \end{cases} \quad (110)$$

donde

$$g(s) = b_S \text{ si } s \leq R$$

$$g(s) \geq as^2 \text{ para todo } s, a = (k_0 + \frac{1}{2})\pi$$

$$g(s) = as^2 \text{ si } s \gg 0$$

y

$$0 < g'(s) \leq 2as \text{ si } s > R.$$

Para checar que H_S está bien definida sólo hay que checar que las funciones que se "pegan" están bien definidas y que se han "pegado" bien. La función g está bien definida por (100) y está bien "pegada" por (99).

A los hamiltonianos construidos de esta forma los agruparemos en la familia Λ_S .

Observaciones:

(a) Por la forma en que se definió H_S (ver (110)) $H_S \in \mathcal{H}_S$ y satisface la propiedad $(\Lambda 1)$.

(b) H_S satisface $(\Lambda 2)$ por la forma en que se definió.

Ahora veamos algunas propiedades del conjunto \mathcal{P} .

LEMA 4.5.2 Sea $\mathcal{P} = \{d_j^S \tau - \varphi(\tau) > 0 : \tau \text{ es un punto crítico de } d_j^S s - \varphi(s) \text{ para algún } j \in \{1, 2, \dots\}, \varphi \in \mathcal{F}_S, \text{ y sea } c \in \mathcal{P} \text{ tal que}$

$$0 < c < d_{k_0}^S(1 + \tilde{\delta})$$

entonces $c = d_j^S \tau - \varphi(\tau)$ con τ punto crítico de $d_j^S s - \varphi(s)$, $j \leq \bar{l} - 1$ y $\tau \in (1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta})$.

Además si ordenamos de manera creciente el conjunto $\mathcal{P} \cap (0, d_{k_0}^S(1 + \tilde{\delta}))$, digamos que tiene q elementos, éstos son

$$M_1 := \max_{s \in (0, \tilde{\alpha})} d_1^S s - \varphi(s), \dots, M_q := \max_{s \in (0, \tilde{\alpha})} d_q^S s - \varphi(s),$$

y los máximos se alcanzan en $(1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta})$. Y éstos tienen la propiedad, para $1 \leq j \leq q$, de que si

$$M_j = d_i^S \tau - \varphi(\tau)$$

con τ punto crítico de $d_i^S s - \varphi(s)$ entonces $i = j$ y τ es el punto donde alcanza el máximo $d_j^S s - \varphi(s)$.

Demostración Observemos primero que los elementos de \mathcal{P} son los valores positivos de $d_j^S s - \varphi(s)$ en puntos τ tales que $\varphi'(\tau) = d_j^S$ para algún $j \in \{1, 2, \dots\}$. Porque $\varphi(s)$ es constante si $s \leq 1 + \tilde{\mu}$ y si $s \geq \tilde{\alpha}$ entonces estos puntos τ están en $(1 + \tilde{\mu}, \tilde{\alpha})$.

Ahora sea $c \in \mathcal{P}$ tal que

$$0 < c < d_{k_0}^S (1 + \tilde{\delta}). \quad (111)$$

Entonces $c = d_{j_1}^S \tau - \varphi(\tau)$ para algún $j_1 \in \{1, 2, \dots\}$,

$$\varphi'(\tau) = d_{j_1}^S, \quad (112)$$

y $\tau \in (1 + \tilde{\mu}, \tilde{\alpha})$.

Probemos que $j_1 \leq \bar{l} - 1$. Tomemos $j \geq \bar{l}$ entonces

$$\begin{aligned} d_j^S s - \varphi(s) &\geq d_{\bar{l}}^S s - \varphi(s) \quad \text{porque } (d_j^S)_{j=1}^{\infty} \text{ es creciente} \\ &> d_{k_0}^S (1 + \tilde{\delta}) \quad \text{para todo } s \in (1 + \tilde{\mu}, \tilde{\alpha}) \quad \text{por (102)} \\ &> c \quad \text{por (111)}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$d_j^S s - \varphi(s) > c \quad \text{para todo } s \in (1 + \tilde{\mu}, \tilde{\alpha}).$$

De donde se sigue que $j_1 \leq \bar{l} - 1$.

Ahora probemos que $\tau \in (1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta})$. Por (104), (112) y porque $j_1 \leq \bar{l} - 1$ tenemos que $\tau \notin (1 + \tilde{\delta}, s_0)$. Por (105) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &> d_{\bar{l}-1}^S s - \varphi(s) \quad \text{para todo } s \in (s_0, \tilde{\alpha}) \\ &\geq d_{j_1}^S s - \varphi(s) \quad \text{para todo } s \in (s_0, \tilde{\alpha}). \end{aligned}$$

Por tanto $\tau \in (1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta})$.

Ahora usando (107) y (109) tenemos que el valor c es máximo

$$\begin{aligned} c &= \max_{s \in (0, 1 + \tilde{\delta})} d_{j_1}^S s - \varphi(s) \\ &= \max_{s \in (0, \tilde{\alpha})} d_{j_1}^S s - \varphi(s), \end{aligned}$$

la última igualdad es debida a que $\varphi(s) > d_{\bar{l}-1}^S s$ si $s \in (s_0, \tilde{\alpha})$, por (105), y a que $\varphi'(s) > d_{\bar{l}-1}^S$ para $s \in (1 + \tilde{\delta}, s_0)$, por (104).

Ahora veamos que los primeros q elementos de \mathcal{P} son como se afirmaba en el enunciado.

Por lo probado anteriormente todo elemento de \mathcal{P} en $(0, d_{k_0}^S(1 + \tilde{\delta}))$ es el máximo de $d_j^S s - \varphi(s)$, en $(0, \hat{\alpha})$ para algún j_1 , y se alcanza en $(1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta})$. Como además

$$d_j^S s - \varphi(s) < d_{j+1}^S s - \varphi(s) \quad \text{para todo } s \quad \text{y para todo } j,$$

entonces

$$M_1 = \max_{s \in (0, \hat{\alpha})} d_1^S s - \varphi(s) < \dots < M_q := \max_{s \in (0, \hat{\alpha})} d_q^S s - \varphi(s).$$

Por último notemos que para $1 \leq j \leq q$ si $M_j = d_j^S \tau - \varphi(\tau)$ con τ punto crítico de $d_j^S s - \varphi(s)$ entonces $d_j^S \tau - \varphi(\tau)$ es el máximo en $(0, \hat{\alpha})$ debido a que $0 < d_j^S \tau - \varphi(\tau) < d_{k_0}^S(1 + \tilde{\delta})$. Así por ser los dos máximos $i = j$. ■

LEMA 4.5.3 Si $H_S \in \Lambda_S$ entonces H_S satisface $(\Lambda 3)$.

Demostración Por $(\Lambda 1)$ $H_S \in \mathcal{H}_S$. Como $H_S \in \mathcal{H}_S$ entonces por 3.4.7, $0 < c_{1, H_S} \leq \dots \leq c_{j, H_S} \leq \dots \leq c_{j_0, H_S} < \infty$ son j_0 valores críticos positivos de $\phi_{H_S} = A(x) - \int_0^1 H_S(x(t)) dt$.

Escojamos j_0 puntos críticos, $x_j(t)$, tales que

- $\phi_{H_S}(x_j) = c_{j, H_S}$. (113)
- para $i \neq j$ si $c := \phi_{H_S}(x_j) = \phi_{H_S}(x_i)$ entonces hay un número infinito de puntos críticos $y_k(t)$ con valor crítico c , $k = 1, 2, \dots$, tales que ninguna curva $y_k(t)$ es una reparametrización de otra de ellas usando para la reparametrización a $r(\theta) = \theta + \theta_0$, $\theta_0 \in [0, 1]$ (en otros términos que sus S^1 -órbitas son diferentes), (114)

esta última parte es consecuencia de 3.4.7 (c).

Ahora por 4.5.1, para $1 \leq j \leq j_0$, se tiene que

- $\phi_{H_S}(x_j) = d_j^S \tau_j - \varphi(\tau_j)$ con τ_j punto crítico de (115)

$d_j^S s - \varphi(s)$ para algún $\hat{j} \in \{1, 2, \dots\}$.

- $x_j(t) \in S_{\epsilon_j}$, para todo t y $A(x_j) = \varphi'(e^{\epsilon_j}) e^{\epsilon_j}$ con $\epsilon_j = \ln \tau_j$. (116)

De aquí en adelante sólo consideraremos puntos críticos x_j con valor crítico $\phi_{H_S}(x_j) = c_{j,H_S} < d_{k_0}^S(1 + \tilde{\delta})$.

Por 4.5.2 $0 < \ln \tau_j = \epsilon_j < \ln(1 + \tilde{\delta})$. Y nuevamente por 4.5.2 $0 < H_S(x_j(t)) = f(\ln \tau_j) = \varphi(\tau_j) \leq d_j^S(\tilde{\delta} - \tilde{\mu}) \leq d_{j-1}^S(\tilde{\delta} - \tilde{\mu})$. Tomemos

$$\nu = \max \{ \ln(1 + \tilde{\delta}), d_{j-1}^S(\tilde{\delta} - \tilde{\mu}) \}. \quad (117)$$

Por tanto de (113), (116) y de la definición de ν tenemos que

$$\begin{aligned} c_{j,H_S} &= \phi_{H_S}(x_j), \\ x_j(t) &\in S_{\epsilon_j} \text{ para todo } t, \\ 0 < \epsilon_j < \nu &\text{ y } 0 < H_S(x_j) \equiv c_{j,H_S} < \nu. \end{aligned}$$

Por último probemos que

- para $i \neq j$ si $e^{-\epsilon_i} A(x_i) = e^{-\epsilon_j} A(x_j)$ entonces S tiene un número infinito de órbitas $1 \leq i, j \leq j_0$.

Sean $i \neq j$ tales que $e^{-\epsilon_i} A(x_i) = e^{-\epsilon_j} A(x_j)$. Como sabemos por (116)

$$\varphi'(e^{\epsilon_i}) = e^{-\epsilon_i} A(x_i) = e^{-\epsilon_j} A(x_j) = \varphi'(e^{\epsilon_j}).$$

Como además $e^{\epsilon_i}, e^{\epsilon_j} \in (1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta})$ y aquí la función φ' es estrictamente creciente entonces

$$\tilde{\epsilon} := \epsilon_i = \epsilon_j.$$

De donde se sigue que

$$\phi_{H_S}(x_i) = A(x_i) - \varphi(e^{\epsilon_i}) = A(x_j) - \varphi(e^{\epsilon_j}) = \phi_{H_S}(x_j),$$

digamos $c = \phi_{H_S}(x_i) = \phi_{H_S}(x_j)$. Por tanto hay un número infinito de puntos críticos $y_k(t)$ con valor crítico c como al principio de la demostración. Debido a que cada punto crítico y_k está contenido en una hipersuperficie S_{ϵ_k} y sólo hay un número finito de tales ϵ_k (ya que $\varphi'(\epsilon_k) = d_j^S$ para algún $j \in \{1, 2, \dots\}$, ver 4.5.1) entonces existe ϵ tal que $y_k(t) \in S_\epsilon$ para todo t y para una infinidad de k 's, para simplificar digamos para toda k .

Como $y_k(t)$ es un punto crítico de ϕ_{H_S} entonces $y_k(t)$ es solución de

$$\begin{aligned} \dot{y}_k(t) &= J\nabla H_S(y_k(t)) \quad y_k(0) = y_k(1) \quad \text{por 3.3.2} \\ &= e^{\epsilon} \varphi'(e^{\epsilon}) J\nabla \mathbf{H}(y_k(t)) \quad \text{por definición de } H_S \\ &= A(y_k) J\nabla \mathbf{H}(y_k(t)) \quad \text{por (116)}. \end{aligned}$$

Reparametrizando $\bar{y}_k(t) = y_k(T^{-1}t)$, $T = A(y_k)$, tenemos

$$\dot{\bar{y}}_k(t) = J\nabla\mathbf{H}(\bar{y}_k(t)) \quad \bar{y}_k(0) = \bar{y}_k(T). \quad (\text{SH})$$

Por tanto tenemos un número infinito de soluciones de (SH) de período T . Como ellas no se obtienen una de la otra con una reparametrización $r(\theta) = \theta + \theta_0$, para algún $\theta_0 \in [0, 1]$, ya que en ese caso lo mismo pasaría con los y_k lo que contradiría (114), entonces tenemos un número infinito de órbitas contenidas en S . ■

§4.6 El caso en que S es un elipsoide

Sea

$$\xi = \left\{ x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = 1 \right\} \quad \text{con} \quad (118)$$

$0 < r_1 < \dots < r_N$ tales que si $r_i^2/r_j^2 \notin \mathbf{Q}$ para todos $i \neq j$. Consideremos la familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por ξ dada por el flujo η_ξ , inducido por la dilatación simpléctica transversal a ξ , $\mathcal{Y}(x) = \frac{1}{2}x$, ver 3.1.2. Recordemos que a partir del flujo η_ξ definimos un hamiltoniano

$$\mathbf{H}(x) = \epsilon \quad \text{si } x = \eta_\xi(\epsilon, \bar{x}), \quad \bar{x} \in \xi.$$

Notemos que $\eta_\xi(\epsilon, \bar{x}) = e^{(1/2)\epsilon}\bar{x}$. Así si $\mathbf{H}(x) = \epsilon$ con $x = \eta_\xi(\epsilon, \bar{x})$, $\bar{x} \in \xi$ entonces

$$H(x) := \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = e^\epsilon \sum_{i=1}^N \frac{\bar{x}_i^2 + \bar{x}_{i+N}^2}{r_i^2} = e^\epsilon.$$

Por tanto

$$H(x) = (e \circ \mathbf{H})(x).$$

Notemos que debido a 4.2.10 los elementos de Σ_ξ son los periodos de las soluciones contenidas en ξ de (SH). Estas soluciones $x(t)$ satisfacen $\mathbf{H}(x(t)) = 0$ para todo t por lo que $\nabla\mathbf{H}(x(t)) = \nabla H(x(t))$ para todo t , y así son también soluciones de (SH). Ahora en 1.1 vimos que los periodos de las soluciones de (SH) son múltiplos enteros de πr_i^2 , por tanto $\Sigma_\xi = \{k\pi r_i^2 : 1 \leq i \leq N, k \in \{1, 2, \dots\}\}$. Denotemos por d_j^ξ a el j -ésimo elemento del conjunto Σ_ξ al ser ordenado de manera estrictamente creciente.

En esta sección definiremos la familia Λ_ξ que se empleará en la sección 4.7 para la demostración del teorema 4.3.1. Λ_ξ es una variante de Λ_ξ .

Tomemos la familia \mathcal{H}_ξ definida como en 3.1.3, usando para definirla a la familia parametrizada de hipersuperficies modeladas por S dada por el flujo η_ξ .

Ahora, exhibiremos que Λ_ξ tiene las siguientes propiedades, empleadas en la prueba de 4.3.1. Fijemos un natural $j_0 > 0$.

A1 $\Lambda_\xi \subset \mathcal{H}_\xi$.

A2 Sea $H_\xi \in \Lambda_\xi$. La función f_ξ que interviene en la definición de H_ξ (ver (83)) es de la forma

$$f_\xi(s) = \psi \circ e^s, \quad \psi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ de clase } C^\infty, \text{ con } \psi(0, 1) \equiv 0.$$

A3 Si $H_\xi \in \Lambda_\xi$ entonces para $1 \leq j \leq j_0$, los valores c_{j, H_ξ} son valores críticos de ϕ_{H_ξ} y

$$c_{j, H_\xi} = M_j,$$

el cual es un máximo absoluto

$$M_j := \sup_{s > 0} d_j^\xi s - \psi(s),$$

que se alcanza en $(1, 1 + \nu_\xi)$, $\nu_\xi(H_\xi) \equiv \nu_\xi > 0$. Además dados $H_\xi \in \Lambda_\xi$ y $n \in \mathbf{N}$ podemos encontrar $\tilde{H}_\xi \in \Lambda_\xi$ de tal forma que la ν_ξ correspondiente satisfaga que $0 < \nu_\xi < 1/n$ y que $\tilde{H}_\xi(x) \geq H_\xi(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^{2N}$.

Consideremos la siguiente situación geométrica

$$\zeta < S < \Upsilon$$

con ζ, Υ elipsoides de la forma (118).

A4 Dado $H_S \in \Lambda_S$ es posible encontrar $H_\zeta \in \Lambda_\zeta$ tal que

$$H_\zeta(x) \geq H_S(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}.$$

Un resultado similar puede ser establecido para las familias Λ_S y Λ_Υ de la siguiente manera:

dado n natural es posible encontrar hamiltonianos $H_T \in \Lambda_T$ y $H_S \in \Lambda_S$ tales que

$$H_S(x) \geq H_T(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N},$$

y satisfacen que $\nu_T \leq \nu_S \leq 1/n$, donde ν_T es como en Λ_3 y ν_S es como en Λ_3 .

Tomemos $H_\xi \in \mathcal{H}_\xi$. Para probar el siguiente lema supongamos que H_ξ es tal que la función f_ξ que interviene en la definición de H_ξ ver (83) es de la forma

$$f_\xi(s) = \psi \circ e^s, \quad \text{con } \psi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ de clase } C^\infty.$$

Y supongamos además que H_ξ satisface:

- (i) Al ordenar de manera creciente $\mathcal{P} := \{d_j^\xi \tau - \psi(\tau) > 0 : \tau \text{ es un punto crítico de } d_j^\xi s - \psi(s) \text{ para algún } j \in \{1, 2, \dots\}\}$ sus primeros j_0 elementos son

$$M_j := \sup_{s>0} d_j^\xi s - \psi(s), \quad 1 \leq j \leq j_0.$$

Además si τ es un punto crítico de $d_i^\xi s - \psi(s)$ y $d_i^\xi \tau - \psi(\tau) \in \mathcal{P}$ es tal que $d_i^\xi \tau - \psi(\tau) = M_j$ para algún $1 \leq j \leq j_0$ entonces $i = j$ y τ es el máximo absoluto.

- (ii) $H_\xi(x) \geq d_{j_0}^\xi H(x) - M_{j_0}$ para todo $x \in \mathbf{R}^{2N}$, con $\infty > M_{j_0} = \sup_{s>0} d_{j_0}^\xi s - \psi(s)$ y $H(x) := \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = e^\epsilon$ si $x = \eta_\xi(\epsilon, \bar{x})$, $\bar{x} \in \xi$.

Como consecuencia de estas propiedades estableceremos la propiedad Λ_3 . Para ello probemos el siguiente

LEMA 4.6.1 Para $1 \leq j \leq j_0$ los valores de la forma c_{j, H_ξ} son valores críticos de ϕ_{H_ξ} y

$$c_{j, H_\xi} = M_j = \sup_{s>0} d_j^\xi s - \psi(s).$$

Demostración Consideremos $\mathcal{P} := \{d_j^\xi \tau - \psi(\tau) > 0 : \tau \text{ es un punto crítico de } d_j^\xi s - \psi(s) \text{ para algún } j \in \{1, 2, \dots\}\}$. Por (i) al ordenar \mathcal{P} los primeros j_0 elementos son

$$0 < M_1 < M_2 < \dots < M_{j_0}.$$

Porque $H_\xi \in \mathcal{H}_\xi$ y $f_\xi(s) = \psi \circ e^s$ podemos aplicar 4.5.1, de donde se desprende que M_1, \dots, M_{j_0} son valores críticos de ϕ_{H_ξ} . Por otra parte como $H_\xi \in \mathcal{H}_\xi$ y satisface (ii) entonces 3.4.7 nos garantiza que ϕ_{H_ξ} tiene j_0 valores críticos en $(0, M_{j_0}]$

$$0 < c_{1, H_\xi} \leq \dots \leq c_{j_0, H_\xi} \leq M_{j_0}.$$

Nuevamente por 4.5.1 basta probar que $c_{i, H_\xi} \neq c_{j, H_\xi}$ si $i \neq j$ de lo cual se sigue que

$$c_{1, H_\xi} = M_1, \dots, c_{j_0, H_\xi} = M_{j_0}.$$

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $c_{i, H_\xi} = c_{i+1, H_\xi}$. Entonces por 3.4.7 (c) existe un número infinito de S^1 -órbitas críticas diferentes: $S^1 x_1, S^1 x_2, \dots$, tales que

$$0 < c_{i, H_\xi} = \phi_{H_\xi}(x_i) \quad i = 1, 2, \dots$$

Como cada punto crítico x_i está contenido en una hipersuperficie S_{ϵ_i} (por 3.3.3) y el número de tales ϵ_i es finito (ya que $\psi'(\epsilon_i) = d_j^{\epsilon_i}$ para algún $j \in \{1, 2, \dots\}$, ver 4.5.1) entonces hay una hipersuperficie S_ϵ que contiene una infinidad de x_i 's. Digamos que x_1, x_2 están contenidas en S_ϵ .

Como sabemos, por 3.3.2, los puntos críticos x de ϕ_{H_ξ} corresponden a soluciones de

$$\dot{x}(t) = J\nabla H_\xi(x(t)) \quad x(0) = x(1). \quad (SH_\xi)$$

Por tanto x_1, x_2 son dos soluciones geoméricamente diferentes de (SH_ξ) contenidas en S_ϵ .

Como $H_\xi(x_i(t)) = \psi(e^\epsilon)$ y $\mathbf{H}(x_i(t)) = \epsilon$ para todo t entonces $\nabla H_\xi(x_i(t)) = \psi'(e^\epsilon)e^\epsilon \nabla \mathbf{H}(x_i(t))$, $i = 1, 2$. Así $y_i(t) := x_i(T^{-1}t)$, $i = 1, 2$, son soluciones geoméricamente diferentes de

$$y(t) = J\nabla \mathbf{H}(y(t)) \quad y(0) = y(T),$$

de periodo $T = \psi'(e^\epsilon)e^\epsilon$. Notemos que

$$H(u) := \sum_{i=1}^N \frac{u_i^2 + u_{i+N}^2}{(e^{1/2} r_i)^2} = e^{-\epsilon} (e \circ \mathbf{H}(u)),$$

y para $u \in \xi_\epsilon$, $\nabla H(u) = e^{-\epsilon} e^\epsilon \nabla H(u) = \nabla H(u)$. Así las soluciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ de (SH) son soluciones de (SH). Pero vimos en 1.1 que no puede haber, sobre elipsoides como ξ_ϵ , dos soluciones geoméricamente diferentes de (SH) con el mismo período. ■

Ahora exhibamos funciones $\psi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tales que al definir H_ξ como en (83), la $f_\xi(s) = \psi \circ e^s$ y $H_\xi \in \mathcal{H}_\xi$, como se supuso en 4.6.1 y se afirmaba en **A2**.

Se elige $k_0 \geq j_0$ tal que

$$k_0 + \frac{1}{2} > k_{j_0} \frac{r_N^2}{r_1^2} \quad \text{donde } d_{j_0}^\xi = k_{j_0} \pi r_{j_0}^2. \quad (119)$$

(a) Elijamos $\tilde{\delta} > 0$. Sea ϵ como en (iii). Tomemos $\tilde{\alpha} > 1 + \tilde{\delta}$ tal que

- $\epsilon \tilde{\alpha} > d_{k_0}^\xi (1 + \tilde{\delta})$.

(b) Se elige $R > 0$ tal que

- $\overline{\mathcal{B}(\xi_{\ln \tilde{\alpha}})} \subset B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^{2N} : |x| \leq R\}$.

(c) Se elige \bar{l} tal que

- $b_\xi := d_{\bar{l}-1}^\xi \tilde{\alpha} > aR^2$ donde $2a := 2(k_0 + \frac{1}{2})\pi \notin 2\pi\mathbb{Z}$

- $d_{\bar{l}}^\xi - d_{k_0}^\xi (1 + \tilde{\delta}) > 0$ si $s > 1$

- $B_R(0) \subset \overline{\mathcal{B}(\xi_{\ln \hat{\alpha}})}$ para algún $\hat{\alpha} \in (\tilde{\alpha}, s_1)$ donde s_1 es el único punto que satisface $d_{k_0}^\xi s_1 = d_{\bar{l}-1}^\xi \tilde{\alpha}$. (120)

(d) Se toma $\hat{\alpha} > \tilde{\alpha}$ tal que $\hat{\alpha}$ satisfaga (120) y se elige $\bar{\alpha} > s_1$. Así

- $d_{k_0}^\xi \bar{\alpha} > d_{\bar{l}-1}^\xi \tilde{\alpha}$.

Construyamos ψ sujeta a las siguientes condiciones:

- $d_{\bar{l}}^\xi - \psi(s) > d_{k_0}^\xi (1 + \tilde{\delta})$ si $s \in (1, \tilde{\alpha})$

- $\psi'(s) > 0$, $\psi''(s) < 0$ si $s \in (1 + \tilde{\delta}, \tilde{\alpha})$

por (a) se puede escoger $s_0 < \tilde{\alpha}$ tal que satisfaga

- $\psi'(s) > d_{\bar{l}-1}^\xi$ $s \in (1 + \tilde{\delta}, s_0)$, con $\psi(s_0) = d_{\bar{l}-1}^\xi s_0$

- $\psi(s) > d_{\bar{l}-1}^\xi s$, $s \in (s_0, \tilde{\alpha})$

- $\psi(s) = b_\xi = d_{\bar{l}-1}^\xi \tilde{\alpha} > d_{k_0}^\xi s$ si $s \in [\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}]$ posible por la elección de $\hat{\alpha}$

- $b_\xi > aR^2$
- $\psi(s) \geq d_{k_0}^\xi s$ si $s \in (\hat{\alpha}, \infty)$
- $\psi(s) = d_{k_0}^\xi s$ si $s \in [\bar{\alpha}, \infty)$
- $\psi'(s), \psi''(s) > 0$ si $s \in (\hat{\alpha}, \bar{\alpha})$.

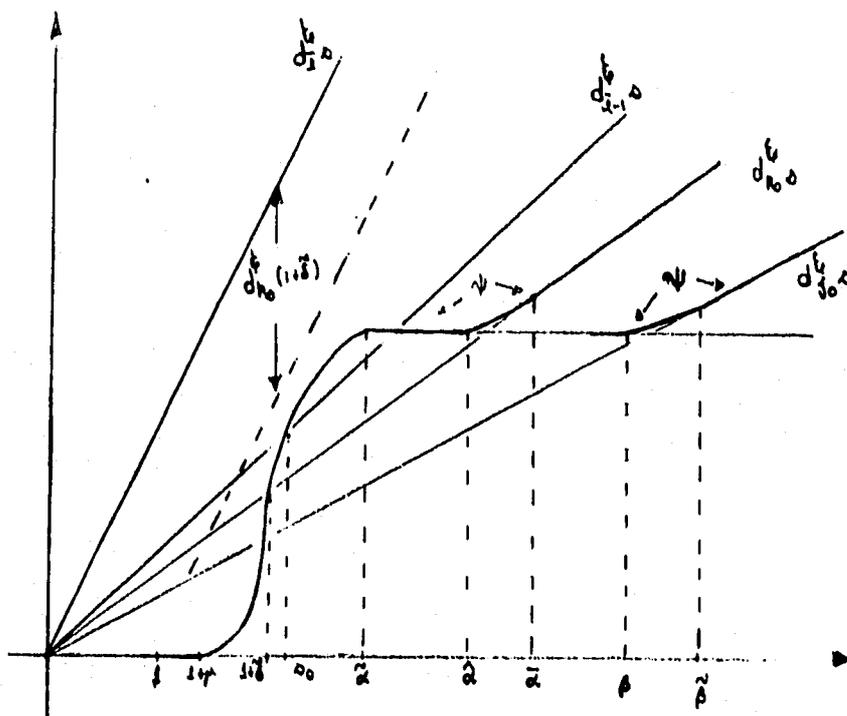
Se elige $\tilde{\mu} \in (0, \tilde{\delta})$ tal que

- $\psi((0, 1 + \tilde{\mu})) = 0$
- $\psi(1 + \tilde{\delta}) = d_{k_0}^\xi (1 + \tilde{\delta})$
- $\psi'(s) > 0, \psi''(s) > 0$ si $s \in (1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta})$.

Observaciones:

- (I) Notemos que en nuestra construcción de ψ , la elección de $\tilde{\delta} > 0$ no tiene restricciones, por lo que puede ser tomada tan pequeña como sea necesario.
- (II) Una vez elegido $\tilde{\delta} > 0$, el número natural k_0 (que sólo tiene la condición de que $k_0 \geq j_0$) puede ser elegido tan grande como se necesite para que $\psi(1 + \tilde{\delta}_s) := d_{k_0}^\xi (1 + \tilde{\delta})$ sea tan grande como se quiera.
- (III) Dado que k_0 lo podemos tomar tan grande como sea necesario entonces podemos tomar $a = (k_0 + \frac{1}{2})\pi$ tan grande como queramos. Notemos además que podemos tomar un real R , mayor que él elegido en (b) sin que se alteren los otros números elegidos con anterioridad en (a).

ψ tiene una gráfica de la forma



Las condiciones para ψ , antecedidas por "•" son las mismas a las que se sujetó a φ en la sección anterior y haciendo uso de estas se probó 4.5.2. Las restantes condiciones, las cuales están antecedidas por "o", se añaden para que H_ξ satisfaga (ii).

A partir de ψ definimos los elementos H_ξ de \mathcal{A}_ξ como en (83)

$$H_\xi(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{B}(\eta_\xi([-\ln(1+\tilde{\mu}), \ln \tilde{\alpha}] \times \xi)) \\ \psi \circ e^\epsilon & \text{si } x = \eta_\xi(\epsilon, \bar{x}) \text{ con } \bar{x} \in \xi, -\ln(1+\tilde{\mu}) \leq \epsilon \leq \ln \tilde{\alpha} \\ b_\xi & \text{si } x \in \mathcal{A}(\eta_\xi([-\ln(1+\tilde{\mu}), \ln \tilde{\alpha}] \times \xi)) \text{ y } |x| \leq R \\ g(|x|) & \text{si } |x| > R \end{cases} \quad (121)$$

Ahora veamos que los elementos de \mathcal{A}_ξ satisfacen las propiedades (i) e (ii), a las que se sujetó a H_ξ para probar 4.6.1.

LEMA 4.6.2 () Si $H_\xi \in \mathcal{A}_\xi$ entonces H_ξ tiene la propiedad (i).

Demostración

Sea $H_\xi \in \mathcal{A}_\xi$. Dentro de las condiciones a las que se sujetó a ψ se encuentran aquellas anteceditas por \bullet que son bajo las cuales se probó 4.5.2. De donde se sigue que H_ξ tiene la propiedad (i), excepto porque los máximos no son absolutos. Pero notemos que para $1 \leq j \leq j_0$

$$M_j > 0,$$

y

$$d_j^s s - \psi(s) \leq 0 \quad \text{si } s \in [\tilde{\alpha}, \infty).$$

Por tanto

$$M_j = \sup_{s>0} d_j^s s - \psi(s) \quad \text{para } 1 \leq j \leq j_0. \blacksquare$$

LEMA 4.6.3 () Si $H_\xi \in \mathcal{A}_\xi$ entonces tiene la propiedad (ii).

Demostración Comencemos definiendo la función auxiliar ψ por

$$\psi(s) = \begin{cases} \psi(s) & \text{si } s \leq \hat{\alpha} \\ \psi(\hat{\alpha}) & \text{si } \hat{\alpha} \leq s \leq \beta \\ d_{j_0}^s s & \text{si } s > \tilde{\beta} \end{cases}$$

con $\tilde{\alpha} < \beta < \tilde{\beta}$,

$$\bullet \quad \psi'(s) > 0 \text{ si } s > \beta.$$

Ahora probemos que

$$H_\xi(x) \geq \psi \circ H(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^{2N} \quad (122)$$

donde $H(x) := e^c = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2}$, $x = \eta_\xi(c, \bar{x})$ $\bar{x} \in \xi$.

• Si $|x| < R$ entonces $H_\xi(x) = \psi \circ H(x)$.

• Si $|x| \geq R$ y $H(x) \leq \bar{\alpha}$ entonces

$$H_\xi(x) = g_\xi(|x|) \geq b_\xi = \psi \circ H(x)$$

• Si $H(x) \geq \hat{\alpha}$ entonces $|x| \geq R$ por (120). Así

$$\begin{aligned} H_\xi(x) = g_\xi(|x|) &\geq a|x|^2 \\ &> k_{j_0} \frac{r_N^2}{r_1^2} \pi |x|^2 \quad \text{por (119)} \\ &\geq d_{j_0}^\xi \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} \\ &= d_{j_0}^\xi H(x) \\ &\geq \psi \circ H(x). \end{aligned}$$

Por tanto hemos probado (122). De donde se sigue que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}^{2N}} (d_{j_0}^\xi H(x) - H_\xi(x)) &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}^{2N}} (d_{j_0}^\xi H(x) - \psi \circ H(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathbf{R}^{2N}} (d_{j_0}^\xi H(x) - \psi \circ H(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_\xi(x) &\geq d_{j_0}^\xi H(x) - \sup_{x \in \mathbf{R}^{2N}} (d_{j_0}^\xi H(x) - \psi \circ H(x)) \\ &= d_{j_0}^\xi H(x) - M_{j_0}, \quad M_{j_0} := \sup_{s>0} d_{j_0}^\xi s - \psi(s). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMA 4.6.4 (Se satisfacen Λ_1 , Λ_2 y Λ_3) Si $H_\xi \in \Lambda_\xi$ entonces H_ξ satisface Λ_1 , Λ_2 y Λ_3 .

Demostración Notemos que por la forma en que se definieron los elementos Λ_ξ es claro que satisfacen Λ_1 y Λ_2 . Ahora por 4.6.2 y 4.6.3 si

$H_\xi \in \Lambda_\xi$ entonces tiene las propiedades (i) e (ii). Así de 4.6.1 se sigue que para $1 \leq j \leq j_0$ los valores c_{j,H_ξ} son valores críticos de ϕ_{H_ξ} y

$$c_{j,H_\xi} = M_j,$$

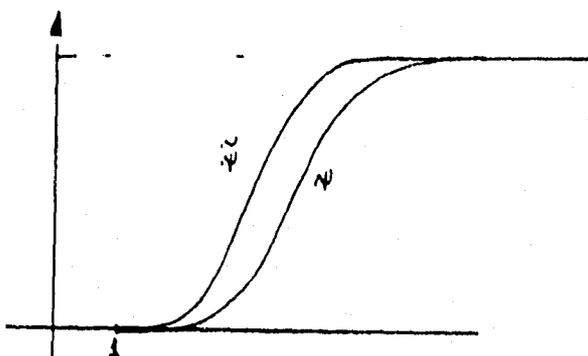
el cual es un máximo absoluto

$$M_j := \sup_{s>0} d_j^\xi s - \psi(s).$$

Y de 4.5.2, el cual se puede aplicar pues las condiciones antecedidas por "•" a las que se sujetó la ψ son bajo las cuales se probó 4.5.2, tenemos que el máximo se alcanza en

$$(1 + \tilde{\mu}, 1 + \tilde{\delta}) \subset (1, 1 + \nu_\xi) \quad \nu_\xi = \tilde{\delta}.$$

Como además la $\tilde{\delta}$ puede ser elegida tan pequeña como se quiera, ver observación (I) a la construcción de ψ , podemos contruir $\tilde{\psi}$ tal que $\tilde{\psi}(s) \geq \psi(s)$ para todo s y que la ν correspondiente a $\tilde{\psi}$ sea menor que $1/n$.



Y usando $\tilde{\psi}$ definimos como en (83) $\tilde{H}_\xi(x)$ el cual satisface que

$$\tilde{H}_\xi(x) \geq H_\xi(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}. \quad \blacksquare$$

Por último probemos que se satisface Λ_4 .
Consideremos la siguiente situación geométrica

$$\zeta < S < \Upsilon$$

con ζ, Υ elipsoides de la forma (118)

LEMA 4.6.5 (Se satisfacc \mathbf{A}_4) Dado $H_S \in \Lambda_S$ es posible encontrar $H_\zeta \in \Lambda_\zeta$ tal que

$$H_\zeta(x) \geq H_S(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}.$$

Un resultado similar puede ser establecido para las familias Λ_S y Λ_Υ de la siguiente manera:

dado n natural es posible encontrar hamiltonianos $H_\Upsilon \in \Lambda_\Upsilon$ y $H_S \in \Lambda_S$ tales que

$$H_S(x) \geq H_\Upsilon(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N},$$

y satisfacen que $\nu_\Upsilon \leq \nu_S \leq 1/n$, donde ν_Υ es como en \mathbf{A}_3 y ν_S es como en Λ_3 .

Demostración

Sean $H_S \in \Lambda_S$. Entonces por 4.4.1 existe $H_\zeta \in \mathcal{H}_\zeta$ tal que

$$H_\zeta(x) \geq H_S(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}. \quad (123)$$

De hecho si $H_\zeta \in \mathcal{H}_\zeta$ satisface que

(a) $f_\zeta(\sigma_\zeta)$ es suficientemente grande, $f_\zeta(\sigma_\zeta) > \max_{|x| \leq n_\zeta} H_S(x)$, para algún $\mu_\zeta < \sigma_\zeta < \alpha_\zeta$ con $\zeta_{\sigma_\zeta} \prec S_{\mu_S}$

(b) $R_\zeta \geq R_S$ y $g_\zeta(s) \geq g_S(s)$ para todo s ,

entonces H_ζ satisface la desigualdad (123). Usemos ésto para ver que H_ζ puede ser tomado en Λ_ζ . Para ello notemos que basta probar que (a) y (b) son compatibles con la manera en que construimos los elementos de Λ_ζ . Para diferenciar los números $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\delta}$ en las construcciones de ψ y φ , pongamos la superficie como subíndice y tomemos $\delta_\zeta \equiv \ln(1 + \tilde{\delta}_\zeta)$, $\mu_S \equiv \ln(1 + \tilde{\mu}_S)$, $\delta_S \equiv \ln(1 + \tilde{\delta}_S)$.

Dado que

$$\zeta < S \prec S_{\mu_S},$$

y en nuestra construcción de ψ podemos elegir $\tilde{\delta}_\zeta$, y así $\delta_\zeta = \ln(1 + \tilde{\delta}_\zeta)$, tan pequeño como sea necesario, digamos tal que

$$\zeta_{\delta_\zeta} \prec S_{\mu_S},$$

y que además el valor $\psi(1 + \tilde{\delta}_\zeta)$ puede ser tomado tan grande como se quiera, ver (II), entonces podemos tomar $\sigma_\zeta = \delta_\zeta$ y hacer que nuestra construcción de ψ cumpla que la función $f_\zeta(s) = \psi(e^s)$ satisface (a).

Con respecto a (b), notemos que R_ζ puede ser elegido tan grande como se quiera, ver (III). Y de nuevo por (III), eligiendo a suficientemente grande podemos tomar $g_\zeta(x) \geq g_S(x)$.

Ahora probemos la segunda parte del lema. Sea n natural. Por Λ_3 podemos encontrar $H_T \in \Lambda_T$ tal que $\nu_T < 1/2n$. Como hicimos para el caso anterior, tomando $\delta_S < \nu_T$, existe $H_S \in \Lambda_S$ tal que

$$H_S(x) \geq H_T(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}. \quad (124)$$

Porque en la construcción de φ pedimos que $d_{l-1}^S \tilde{\delta}_S > \nu_*$, donde $\nu_* > 0$ es un real dado, digamos $\nu_* = \nu_T$, podemos encontrar $\mu > 0$ tal que

$$\nu_T + \frac{1}{2n} > d_{l-1}^S (\tilde{\delta}_S - \mu) > \nu_T.$$

Por la observación (I) a la construcción de φ , podemos tomar cualquier número en $(0, \tilde{\delta}_S)$ en lugar de $\tilde{\mu}_S$ sin que cambien los otros números elegidos para la construcción de φ , y por tanto el valor de $\varphi(1 + \tilde{\delta}_S)$. Así podemos tomar $\tilde{\mu}_S = \mu$. La función H_S obtenida con estas elecciones en la construcción de φ satisface (124) y

$$\begin{aligned} \nu_S &= \max\{\ln(1 + \tilde{\delta}_S), d_{l-1}^S (\tilde{\delta}_S - \tilde{\mu}_S)\} \text{ como en } \Lambda_3 \text{ ver (117)} \\ &= \max\{\delta_S, d_{l-1}^S (\tilde{\delta}_S - \tilde{\mu}_S)\} \\ &\leq \nu_T + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$0 < \nu_T < \nu_S < \frac{1}{n}. \quad \blacksquare$$

§4.7 Demostración del teorema 4.3.1.

Sea $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ una hipersuperficie de tipo contacto restringido, como en el enunciado del teorema 4.3.1 i.e. S tiene la propiedad geométrica

$$\alpha\xi < S < \beta\xi \quad (125)$$

donde ξ es un elipsoide de la forma $\xi := \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = 1\}$ con $0 < r_1, \dots, r_N$ y $\alpha, \beta > 0$.

Tomemos $\omega_i = \frac{1}{r_i^2}$, y reindexemos $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} = \{\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \dots, \omega_{1,l_1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{m,l_m}\}$, donde $l_1 + \dots + l_m = N$, y los $\omega_{i,j}$ satisfacen que $\omega_{i_1,k_1} / \omega_{i_2,k_2} \in \mathbf{Q}$ si y sólo si $i_1 = i_2$, para $1 \leq i_1, i_2 \leq m$.

Para $1 \leq i \leq m$ tomemos como ω^i al mayor número real que satisface que

$$\omega_{i,j} = n_{i,j} \omega^i, \quad n_{i,j} \in \mathbf{N}, \quad 1 \leq j \leq l_i$$

i.e. al máximo común divisor de $\omega_{i,1}, \dots, \omega_{i,l_i}$.

Además la hipersuperficie S está sujeta a la siguiente hipótesis: Fijamos $\chi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ una dilatación simpléctica transversal a S cuyo flujo inducido es η_S

(i) El flujo η_S inducido por χ es global i.e. tiene dominio $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2N}$.

Recordemos que a partir del flujo η_S definimos el hamiltoniano

$$\mathbf{H}(x) = t \quad \text{si } \eta_S(t, \bar{x}) = x, \quad \bar{x} \in S,$$

y que $\Sigma_S = \{kT : T \text{ es un período de alguna solución } x(t), \text{ contenida en } S, \text{ de la ecuación } \dot{x}(t) = J\nabla\mathbf{H}(x(t)), k \in \{1, 2, \dots\}\}$, ver 4.2.10.

Para la demostración del teorema 4.3.1 usaremos el siguiente lema que se debe al Doctor Jorge Ize.

LEMA 4.7.1 S tiene un número infinito de órbitas o Σ_S es discreto, cerrado y tiene la siguiente propiedad

(*) existe $\epsilon > 0$ tal que $\Sigma_S \cap (s - \epsilon, s + \epsilon) = \{s\}$ para una infinidad de elementos s en Σ_S .

Demostración Si S tiene un número infinito de órbitas entonces no hay nada que probar. Supongamos lo contrario. Entonces existe sólo un número finito de soluciones periódicas geoméricamente independientes, contenidas en S , de

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t)) \quad (\text{SH})$$

ver 4.1. Así hay un número finito de periodos mínimos T_1, \dots, T_n correspondientes a soluciones periódicas de (SH).

Que Σ_S es discreto es claro. En efecto si suponemos lo contrario existiría $\{s_j\}$ sucesión en Σ_S tal que $s_j \neq s_{j+1}$, $s_j \rightarrow s \in \Sigma_S$. Por lo que existen T período mínimo y una subsucesión $\{s'_j\}$ tales que $s'_j \rightarrow s$, $s'_j = k_j T$. Por tanto $s'_j \equiv \text{cte}$ si $j \gg 0$, lo que contradice la elección de $\{s_j\}$.

De lo anterior también queda claro que Σ_S es cerrado.

Para probar (*) procedamos por inducción sobre n . Para $n = 1$ es obvio. Supongámoslo válido para n y probémoslo para $n + 1$. Reordenando si es necesario tomemos $T_1 = \min_{1 \leq i \leq n} T_i$. Como es cierto para n existen ϵ_0 y s_1, s_2, \dots tales que $\Sigma(T_2, \dots, T_n) \cap ((s_i - \epsilon_0, s_i + \epsilon_0) \setminus \{s_i\}) = \emptyset$, donde $\Sigma(T_2, \dots, T_n) := \{kT_i : 2 \leq i \leq n, k \in \{1, 2, \dots\}\}$. Como s_1, s_2, \dots son múltiplos de T_2, \dots, T_n podemos tomar una subsucesión $s_i = p_i T_1$ con el mismo T . Llamemos T'_2 a este T , así $s_i = p_i T'_2$.

Si el resultado es falso para $n + 1$ entonces para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon < \epsilon_0$, existe $N(\epsilon)$ tal que $(p_i T'_2 - \epsilon, p_i T'_2 + \epsilon)$ contiene a $k_i T_1$, para $i \geq N(\epsilon)$ ($k_i \geq p_i$) y $k_i T_1 \neq p_i T'_2$.

Podemos suponer que para todo k', k con $1 \leq k \leq n$, $k' \in \{1, 2, \dots\}$ se tiene que $kT_1 \neq k'T'_2$. En efecto si $kT_1 = k'T'_2$ entonces tomando $\epsilon \leq \frac{T'_2}{2n}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |k_i T_1 - p_i T'_2| &= \frac{T'_2}{k} |k_i k' - p_i k| \leq \epsilon \\ \Rightarrow |k_i k' - p_i k| &\leq \frac{\epsilon k}{T'_2} \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow k_i &= \frac{p_i k}{k'} \quad \text{y} \quad k_i T_1 = p_i T'_2 = s_i, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción a la elección de $k_i T_1$.

Reindexemos $\{T_2, \dots, T_n\}$ de tal forma que $T_2 = T'_2$. Ahora hay dos casos:

CASO 1 Si $kT_1 \neq k'T_j$ para $j = 3, \dots, n$, $1 \leq k \leq n$, $k' \in \{1, 2, \dots\}$.

Sea $\epsilon \leq \min\{\frac{T_1}{2n}, \epsilon_0, \frac{1}{4} \min\{|kT_1 - k'T_j| \text{ para todo } k', k, j \geq 2 \text{ con } 1 \leq k \leq n, k' \in \{1, 2, \dots\}\}\}$.

Para $i \geq N(\epsilon)$, consideremos $k_i T_1, (k_i + 1)T_1, \dots, (k_i + n)T_1$ con $|k_i T_1 - p_i T_2'| \leq \epsilon$.

Ahora si para algún $l, 2 \leq j \leq n, 0 \leq r < n$, se tiene que $|(k_i + r)T_1 - lT_j| \leq \epsilon$ entonces $|(k_i + q)T_1 - pT_j| > \epsilon$ para todo $r < q \leq n, p > l$. En efecto si no fuera el caso entonces

$$\begin{aligned} |(q-r)T_1 - (p-l)T_j| &\leq |(k_i + r)T_1 - lT_j| + |(k_i + q)T_1 - pT_j| \\ &\leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

lo cual contradice la construcción de ϵ .

En particular no hay múltiplos de T_2' en las ϵ -vecindades de $(k_i + r)T_1, r = 1, \dots, n$. Si en estas vecindades sólo hay un número finito de múltiplos de $\{T_3, \dots, T_n\}$ entonces la sucesión $(k_i + 1)T_1$ es la que prueba el resultado. Ahora si hay un número infinito de múltiplos de $\{T_3, \dots, T_n\}$ en las ϵ -vecindades de $(k_i + 1)T_1$ entonces llegamos a la siguiente situación: para $i \geq N'$ existe l_i con $|l_i T_3' - (k_i + 1)T_1| \leq \epsilon$. De lo cual se sigue que no hay múltiplos de T_3' en los ϵ -intervalos alrededor de $(k_i + 2)T_1, \dots, (k_i + n)T_1$.

Tomando la sucesión $\{(k_i + 2)\}$ o sólo hay un número finito de múltiplos de $\{T_4, \dots, T_n\}$ con lo cual $\{k_i + 2\}$ es la sucesión requerida o (tomando una subsucesión) existe T_4' con múltiplos de T_4' en las ϵ -vecindades de $(k_i + 2)T_1$. Por la construcción $T_4' \neq T_2', T_3'$. Se toma entonces la sucesión $\{(k_i + 3)T_1\}$, la cual es la requerida o existe $T_5' \neq T_2', T_3', T_4'$.

Queda claro que antes de llegar a $(k_i + n)T_1$ hay una sucesión $(k_i + s)T_1$ sin múltiplos de $T_j, j = 2, \dots, n$.

CASO 2 Si $kT_1 = k'T_j$ para algún $j \in \{3, \dots, n\}, 1 \leq k' \leq k \leq n$ (recordemos que $T_1 < T_j$).

Sea $\epsilon \leq \min\{\frac{T_1}{2n}, \epsilon_0, \{\frac{1}{4} \min\{|k_1 T_1 - k'_1 T_j| : \text{para todo } k_1, k'_1, j \geq 2 \text{ con } 1 \leq k'_1 \leq k_1 \leq n \text{ quitando los pares } (k_1, k'_1) \text{ que son múltiplos de } (k, k') \text{ para } i = j, \text{ y todos los } j\text{'s con esa propiedad}\}\}\}$.

Ahora si en la construcción anterior se toma

$$\begin{aligned} \frac{T_j}{k} |(k_i + r)k' - l_i k| &= |(k_i + r)T_1 - l_i T_j| \leq \epsilon \\ \Rightarrow |(k_i + r)k' - l_i k| &\leq \frac{k\epsilon}{T_j} \leq \frac{1}{2} \frac{kT_1}{nT_j} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto $(k_i + r)k' = l_i k$ y $(k_i + r)T_1 = l_i T_j$, es decir que quitando $(k_i + r)T_1$ del ϵ -intervalo con centro en $(k_i + 2)T_1$ tenemos que no aparece $l_i T_j$.

Por otra parte, no hay otros múltiplos de T_j en los ϵ -intervalos alrededor de $(k_i + q)T_1$ con $2 < q \leq n$, ya que si este fuera el caso entonces

$$|(q-r)T_1 - (p-l_i)T_j| \leq |(k_i+r)T_1 - l_i T_j| + |(k_i+q)T_1 - pT_j| = |(k_i+q)T_1 - pT_j| \leq$$

De donde se sigue, por la construcción de ϵ que (k_i, k'_i) no es un múltiplo de (k, k') y esto contradice la construcción de ϵ , o (k_i, k'_i) es múltiplo de (k, k') y en ese caso el lado izquierdo es 0 y $pT_j = (k_i + q)T_1$ es decir no afecta la construcción (ya que se quita el centro del intervalo). ■

Tomemos como d_j^ξ al j -ésimo elemento de $\Sigma_\xi = \{k\pi r_i^2 : 1 \leq i \leq N, k \in \{1, 2, \dots\}\}$ al ser ordenado de manera creciente, repitiendo sus elementos de acuerdo a su multiplicidad i.e. un elemento se incluye en la sucesión tantas veces como puede ser obtenido en la forma $k\pi r_i^2$, $1 \leq i \leq N$, $k \in \{1, 2, \dots\}$. Por ejemplo

- Si $r_1 = \dots = r_N = 1$ i.e. $\xi = S^{2N-1}$ entonces $d_1^\xi = \dots = d_N^\xi = \pi$, $d_{N+1}^\xi = \dots = d_{2N}^\xi = 2\pi, \dots$
- Si r_1, \dots, r_N tienen la propiedad de que $r_i^2/r_j^2 \notin \mathbf{Q}$ para $i \neq j$. Entonces para cada $j \in \{1, 2, \dots\}$ existen $k_j \in \{1, 2, \dots\}$ y $1 \leq n_j \leq N$ únicos tales que $d_j^\xi = k_j \pi r_{n_j}^2$ y $d_j^\xi = d_{n_j}^\xi$, donde (d_j^ξ) es la sucesión estrictamente creciente obtenida al ordenar los elementos de Σ_ξ .

Observemos que la situación geométrica (125) puede ser reescrita como

$$\zeta < S < \Upsilon.$$

donde

$$\begin{aligned} \Upsilon & : = \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{(\beta r_i)^2} = 1\} \\ \zeta & : = \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{(\alpha r_i)^2} = 1\}. \end{aligned}$$

Y notemos que:

$$d_j^\zeta = \alpha^2 d_j^\xi \quad \text{y} \quad d_j^\Upsilon = \beta^2 d_j^\xi. \quad (126)$$

Para la demostración del teorema 4.3.1 usaremos las familias de funciones hamiltonianas Λ_S y Λ_M , $M \in \{\zeta, \Upsilon\}$, las cuales fueron definidas en 4.5 y 4.6 respectivamente (donde ξ tendrá la propiedad de que sus semiejes satisfacen que $r_1 < \dots < r_N$, y que $r_i^2/r_j^2 \notin \mathbb{Q}$ para $i \neq j$, y S tendrá la propiedad de que Σ_S es discreto y cerrado, por lo que puede ser ordenado en una sucesión estrictamente creciente $(d_j^S)_{j=1}^\infty$). Además se exhibió que estas familias de hamiltonianos tienen las siguientes propiedades (para un natural $j_0 > 0$ y un real $\kappa > 0$ dados):

(a) (Λ_2) Sea $H_M \in \Lambda_M$. La función f_M que interviene en la definición de H_M (ver (83)) es de la forma

$$f_M(s) = \psi \circ e^s, \quad \psi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ de clase } C^\infty \text{ con } \psi(0, 1) \equiv 0.$$

(b) (Λ_3) Si $H_M \in \Lambda_M$ entonces los valores c_{j, H_M} son valores críticos de ϕ_{H_M} para $1 \leq j \leq j_0$. Además

$$c_{j, H_M} = M_j$$

el cual es un máximo absoluto

$$M_j := \sup_{s>0} d_j^M s - \psi(s)$$

que se alcanza en $(1, 1 + \nu_M)$, $\nu_M(H_M) \equiv \nu_M > 0$.

(c) (Λ_3) Si $H_S \in \Lambda_S$ entonces, para $1 \leq j \leq j_0$, los valores c_{j, H_S} son valores críticos de ϕ_{H_S} . Además existe $\nu_S(H_S) = \nu_S > 0$ tal que si $0 < c_{j, H_S} \leq d_{k_0}^S (1 + \nu_S)$ entonces podemos encontrar $x_j(t)$ punto crítico de ϕ_{H_S} tal que

$$\begin{aligned} c_{j, H_S} &= \phi_{H_S}(x_j), \\ x_j(t) &\in S_\epsilon, \text{ para todo } t, \\ 0 < c_j < \nu_S &\quad \text{y} \quad 0 < H_S(x_j) \equiv cte < \nu_S \text{ para } 1 \leq j \leq j_0, \end{aligned}$$

donde $k_0(H_S) \equiv k_0 \geq j_0$ es un número natural que tiene la propiedad de que $d_{k_0}^S \geq \kappa$.

Además para $i \neq j$ si $e^{-\epsilon_i} A(x_i) = e^{-\epsilon_j} A(x_j)$ entonces S tiene un número infinito de órbitas, $1 \leq i, j \leq j_0$.

- (d) (Λ_4) Dado n natural es posible encontrar hamiltonianos $H_\Upsilon \in \Lambda_\Upsilon$ y $H_S \in \Lambda_S$ tales que $\nu_\Upsilon \leq \nu_S \leq 1/n$, donde ν_Υ es como en (b) y ν_S es como en (c), y

$$H_S(x) \geq H_\Upsilon(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}.$$

Un resultado similar puede ser establecido para las familias Λ_S y Λ_ζ de la siguiente manera:

dado $H_S \in \Lambda_S$ es posible encontrar $H_\zeta \in \Lambda_\zeta$ tal que

$$H_\zeta(x) \geq H_S(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}.$$

Es importante recordar la definición de los valores de minimax, c_{j,H_N} , $\mathcal{N} \in \{S, \zeta, \Upsilon\}$, a que se hace referencia en (Λ_3) y (Λ_3).

$$c_{j,H_N} = \inf_{Z \in \Gamma_j} \sup_{x \in Z} \phi_{H_N}(x),$$

donde $\Gamma_j := \{Z \subset E : Z \text{ es } \mathbf{S}^1\text{-invariante, cerrado y } \gamma_{S^1}^j(Z) \geq j\}$. Así Γ_j depende del pseudoíndice $\gamma_{S^1}^j$, el cual se definió en 2.2.1 usando el grupo \mathbf{F} , el cual a su vez depende de un subespacio vectorial \mathbf{F} , subespacio que en nuestro caso está determinado por el número j_0 , para mayor detalle ver 3.4.7.

Demostración del teorema 4.3.1 Sea S como en el enunciado. Así S tiene la propiedad geométrica

$$\zeta < S < \Upsilon$$

donde

$$\begin{aligned} \Upsilon &:= \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{(\beta r_i)^2} = 1\}, \\ \zeta &:= \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{(\alpha r_i)^2} = 1\}. \end{aligned}$$

Si S tiene un número infinito de órbitas entonces no hay nada que probar. Supongamos lo contrario. En este caso 4.7.1 nos garantiza que Σ_S es discreto, cerrado y tiene la propiedad

- (•) existe $\epsilon > 0$ tal que $\Sigma_S \cap (s - \epsilon, s + \epsilon) = \{s\}$ para una infinidad de elementos s en Σ_S .

Notemos que éstas fueron las hipótesis sobre Σ_S bajo las cuales se construyó la familia Λ_S .

CASO 1

Supongamos que los semiejes de ξ satisfacen

- $r_i^2/r_j^2 \notin \mathbf{Q}$ para $i \neq j$, con $1 \leq i, j \leq N$. En este caso $\omega^i = 1/r_i^2$, $1 \leq i \leq N$, donde ω^i es como al inicio de la sección.

Por lo que podemos usar las familias Λ_ζ y Λ_τ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que $r_1 < \dots < r_N$. Tomamos como j_0 al único natural que satisface que $d_{j_0}^\xi = \pi r_N^2$ y $\kappa = \beta^2 d_{j_0}^\xi$.

Sea $0 < \delta < 1$. Debido a la propiedad (d) podemos encontrar hamiltonianos $H_\tau \in \Lambda_\tau$ y $H_S \in \Lambda_S$ tales que

$$\nu_\tau \leq \nu_S \leq \min\left\{\frac{\delta}{4d_\tau^\tau}, \frac{\delta}{4}\right\}$$

y

$$H_S(x) \geq H_\tau(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}. \quad (127)$$

Debido a la propiedad (b) tenemos que para $1 \leq j \leq j_0$ los valores críticos

$$\begin{aligned} c_{j, H_\tau} &= \sup_{s>0} \{d_j^\tau s - \psi(s)\} \\ &\leq d_j^\tau (1 + \nu_\tau) \quad \text{por (a) y (b)} \\ &\leq d_j^\tau + \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$c_{j, H_\tau} \leq d_j^\tau + \frac{\delta}{4}.$$

Además

$$\begin{aligned} c_{j, H_\tau} &\leq d_{j_0}^\tau (1 + \nu_\tau) \quad \text{porque } j \leq j_0 \text{ y } (d_j^\tau)_{j=1}^\infty \text{ es creciente} \\ &= \beta^2 d_{j_0}^\xi (1 + \nu_\tau) \quad \text{por (126)} \\ &\leq d_{k_0}^S (1 + \nu_S) \quad \text{por la elección de } k_0 \text{ (ver (c)), } \kappa \text{ y } \nu_S. \end{aligned}$$

Por tanto

$$c_{j,H_T} \leq d_{k_0}^S (1 + \nu_S).$$

Observemos que de (127) se sigue que

$$\begin{aligned} \phi_{H_S}(x) &:= A(x) - \int_0^1 H_S(x(t)) dt \leq A(x) - \int_0^1 H_T(x(t)) dt \\ &=: \phi_{H_T}(x) \quad \text{para toda curva } x \in E. \end{aligned}$$

De donde tenemos que para $1 \leq j \leq j_0$

$$\begin{aligned} c_{j,H_S} &:= \inf_{Z \in \Gamma} \sup_{x \in Z} \phi_{H_S}(x) \leq \inf_{Z \in \Gamma} \sup_{x \in Z} \phi_{H_T}(x) \\ &=: c_{j,H_T}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$c_{j,H_S} \leq c_{j,H_T} \quad \text{y} \quad c_{j,H_S} \leq d_{k_0}^S (1 + \nu_S) \quad 1 \leq j \leq j_0.$$

Así por la propiedad (c) tenemos que para los valores críticos c_{j,H_S} existe x_j punto crítico de ϕ_{H_S} tal que

$$\begin{aligned} c_{j,H_S} &= \phi_{H_S}(x_j), \\ x_j(t) &\in S_\epsilon, \quad \text{para todo } t, \\ 0 < \epsilon_j < \nu_S \quad \text{y} \quad 0 < H_S(x_j) &\equiv c_{j,H_S} < \nu_S \quad \text{para } 1 \leq j \leq j_0. \end{aligned}$$

Nuevamente debido a la propiedad (d), usando las familias Λ_ζ y Λ_S , podemos encontrar un hamiltoniano $H_\zeta \in \Lambda_\zeta$ tal que

$$H_\zeta(x) \geq H_S(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^{2N}.$$

Por la propiedad (a) y la propiedad (b) tenemos que para $1 \leq j \leq j_0$ los valores críticos

$$d_j^\zeta < c_{j,H_\zeta}.$$

Ahora como $H_\zeta(x) \geq H_S(x) \geq H_T(x)$ para todo $x \in \mathbf{R}^{2N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_j^\zeta < c_{j,H_\zeta} &\leq c_{j,H_S} \leq c_{j,H_T} \leq d_j^T + \frac{\delta}{4} \\ \Rightarrow d_j^\zeta < c_{j,H_S} &= \phi_{H_S}(x_j) := A(x_j) - \int_0^1 H_S(x_j(t)) dt \leq d_j^T + \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$d_j^\zeta < \Lambda(x_j) \leq d_j^r + \frac{\delta}{2}, \quad 1 \leq j \leq j_0. \quad (128)$$

Por tanto sólo nos resta tomar $\epsilon = \delta/2$ y los subíndices j edecuados. Tomemos los subíndices j_1, \dots, j_N que satisfacen que $d_{j_1}^\zeta = \pi r_1^2, \dots, d_{j_N}^\zeta = \pi r_N^2$. Así reindexando y tomando como el índice el subíndice de la j tenemos que existen x_1, \dots, x_N órbitas periódicas, de periodo 1, que satisfacen

$$\frac{\alpha^2 \pi}{\omega^i} - \epsilon \leq \Lambda(x_i) \leq \frac{\beta^2 \pi}{\omega^i} + \epsilon$$

y

$$x_i(t) \in S_{\epsilon_i} \quad 0 < \epsilon_i < \epsilon.$$

CASO 2

Supongamos que ξ es un elipsoide de la forma

$$\xi := \{x \in \mathbf{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + x_{i+N}^2}{r_i^2} = 1\} \quad (129)$$

con $0 < r_1, \dots, r_N$.

Como al inicio de la sección tomemos $\omega_i = \frac{1}{r_i^2}$, y reindexemos $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} = \{\omega_{1,l_1}, \omega_{1,l_2}, \dots, \omega_{1,l_1}, \omega_{2,l_1}, \dots, \omega_{m,l_m}\}$, donde $l_1 + \dots + l_m = N$, $\omega_{i_1, k_1} / \omega_{i_2, k_2} \in \mathbf{Q}$ si y sólo si $i_1 = i_2$, para $1 \leq i_1, i_2 \leq m$.

Para $1 \leq i \leq m$ tomemos como ω^i al mayor número real que satisface que

$$\omega_{i,j} = n_{i,j} \omega^i, \quad n_{i,j} \in \mathbf{N}, \quad 1 \leq j \leq l_i,$$

i.e. al máximo común divisor de $\omega_{i,1}, \dots, \omega_{i,l_i}$.

Nos será de utilidad reindexar también los r_i^2 , $r_{i,j}^2 \equiv 1/\omega_{i,j}$, y preservar la correspondencia que se establece entre el doble índice y el índice original, a la cual nos referiremos por $f(i, j)$.

Ahora sea $0 < \tau < 1$ y tomemos números reales $0 < \bar{r}_{i,j}, \hat{r}_{i,j}$, con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l_i$, $l_1 + \dots + l_m = N$, tales que satisfacen

* Para $1 \leq j \leq l_i$, $1 \leq i \leq m$ se tiene que $0 < n_{i,j} \alpha^2 \pi (r_{i,j}^2 - \bar{r}_{i,j}^2) < \tau$ y $0 < n_{i,j} \beta^2 \pi (\hat{r}_{i,j}^2 - r_{i,j}^2) < \tau$.

** Si $\bar{r}_{i_1, j_1} / \bar{r}_{i_2, j_2} \in \mathbf{Q}$ o $\hat{r}_{i_1, j_1} / \hat{r}_{i_2, j_2} \in \mathbf{Q}$ entonces $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$, para $1 \leq j_1, j_2 \leq l_{i_1}$, $1 \leq i_1, i_2 \leq m$.

*** $d_p^\zeta = k_p \alpha^2 \pi \bar{r}_{\tilde{n}_p}^2$, $d_p^\Upsilon = k_p \beta^2 \pi \bar{r}_{\tilde{n}_p}^2$ donde k_p y \tilde{n}_p satisfacen que $d_p^\zeta = k_p \pi r_{\tilde{n}_p}^2$, $1 \leq p \leq j_0$,

y donde los elipsoides ζ y Υ se definen como en (129) usando los números $\{\alpha \bar{r}_{i,j}\}_{1 \leq j \leq l_i, 1 \leq i \leq m}$ y $\{\beta \bar{r}_{i,j}\}_{1 \leq j \leq l_i, 1 \leq i \leq m}$ y la correspondencia f para reindexar.

Elijamos los N subíndices p de d_p^ζ adecuados para este caso. Sean $p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,l_1}, p_{2,1}, \dots, p_{m,l_m}$ tales que

$$\begin{aligned} p_{i,j} &< p_{i,j+1} \quad 1 \leq j < l_i, 1 \leq i \leq m, \\ d_{p_{1,1}}^\zeta &= n_{1,1} \pi r_{1,1}^2, \\ &\vdots \\ d_{p_{1,l_1}}^\zeta &= n_{1,l_1} \pi r_{1,l_1}^2, \\ d_{p_{2,1}}^\zeta &= n_{2,1} \pi r_{2,1}^2, \\ &\vdots \\ d_{p_{m,l_m}}^\zeta &= n_{m,l_m} \pi r_{m,l_m}^2. \end{aligned}$$

Sea $j_0 = \max\{p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,l_1}, p_{2,1}, \dots, p_{m,l_m}\}$, y tomemos en (*) $\tau = \delta/2$. Por lo probado en el caso 1, usando los elipsoides ζ y Υ (posible por (**)), de (128) al tomar los índices adecuados $p_{i,j}$, para este caso tenemos que existe $\frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{4} < \delta$ para la cual hay $l_1 + \dots + l_m = N$ órbitas periódicas, de periodo 1, $x_{1,1}, \dots, x_{1,l_1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,l_m}$, tales que $x_{i,j}(t) \in S_{\epsilon_{i,j}}$ para toda t , $0 < \epsilon_{i,j} < \epsilon$, y satisfacen

$$d_{p_{i,j}}^\zeta - \frac{\epsilon}{2} \leq A(x_{i,j}) \leq d_{p_{i,j}}^\Upsilon + \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} n_{i,j} \alpha^2 \pi \bar{r}_{i,j}^2 - \frac{\epsilon}{2} &\leq A(x_{i,j}) \leq n_{i,j} \beta^2 \pi \bar{r}_{i,j}^2 + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{por (***) y la elección de } p_i \\ \Rightarrow (n_{i,j} \alpha^2 \pi \bar{r}_{i,j}^2 - \tau) - \frac{\epsilon}{2} &\leq A(x_{i,j}) \leq (n_{i,j} \beta^2 \pi \bar{r}_{i,j}^2 + \tau) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{por (*)} \\ \Rightarrow \left(\frac{\alpha^2 \pi}{\omega^i} - \tau\right) - \frac{\epsilon}{2} &\leq A(x_{i,j}) \leq \left(\frac{\beta^2 \pi}{\omega^i} + \tau\right) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{por definición de } \omega^i. \end{aligned}$$

Como $\tau = \epsilon/2$ tenemos

$$\frac{\alpha^2 \pi}{\omega^i} - \epsilon \leq A(x_{i,j}) \leq \frac{\beta^2 \pi}{\omega^i} + \epsilon, \quad 1 \leq j \leq l_i, 1 \leq i \leq m.$$

Por último notemos que: en el primer caso

- si $i \neq j$ entonces $e^{-\epsilon_i} A(x_i) \neq e^{-\epsilon_j} A(x_j)$,

y para el segundo caso

- si $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ entonces $e^{-\epsilon_{i_1, j_1}} A(x_{i_1, j_1}) \neq e^{-\epsilon_{i_2, j_2}} A(x_{i_2, j_2})$,

se sigue de lo que se afirmaba en (c) y que estamos considerando que S tiene un número finito de órbitas. ■

BIBLIOGRAFIA

- [Adams] R.A. Adams, Sobolev spaces, Pure and applied Mathematics 65, Academic Press, New York-San Francisco-London 1975.
- [AM] A. Ambrosetti y G. Mancini, On a theorem by Ekeland and Lasry concerning the number of periodic hamiltonian trajectories, J. Diff. Eq. 43(1982), 249-256.
- [AMR] R. Abraham, J.E. Marsden y T. Ratiu, Manifolds, tensor analysis and applications, Applied mathematical sciences 75, Springer-Verlag 2 edición, New York 1988.
- [Ar] V.I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Grad. Texts in Math. 60 Springer-Verlag, New York 1978.
- [Ba] Th Bartsch, A simple proof of the degree formula for (\mathbf{Z}/p) -equivariant maps, Math. Z. 212(1993), 285-292.
- [BC] Th. Bartsch, M. Clapp, Critical point theory for indefinite functional with symmetries, por aparecer en J. Funct. Anal.
- [BD] T. Bröcker y T. Dieck, Representations of compact lie groups, Grad. Texts in Math. 98 Springer-Verlag, New York 1985.
- [Be] V. Benci, on critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), 533-572.
- [BHR] V. Benci, H. Hofer y P.H. Rabinowitz, A remark on a priori bounds and existence for periodic solutions of hamiltonian systems, Periodic solutions of hamiltonian systems and related topics, P.H. Rabinowitz et al. eds, d. Reidel 1987, 85-88.
- [BLMR] H. Berestyski, J.M. Lasry, G. Mancini y B. Ruff, Existence of multiple periodic orbits on star-shaped hamiltonian surfaces, Comm. Pure Appl. Math. 38(1985), 253-289.
- [BR1] V. Benci y P.H. Rabinowitz, A priori bounds for periodic solutions of hamiltonian systems, Ergodic Th. and Dynam. Sys. 8(1988), 27-31.

- [BR2] V.Benci y P.H. Rabinowitz, Critical point theory for indefinite functionals, *Invent. Math.* 52(1979), 336-353.
- [Cn] B. Conway, A course in functional analysis, *Grad. Texts in Math.* 96 Springer-Verlag segunda edición, New York 1990.
- [Co] D. Cohn, Measure theory, Birkhauser, Boston, 1980.
- [CP] M. Clapp y D. Puppe, Critical point theory with symmetries, *J. Reine Angew. Math.* 418(1991), 1-29.
- [EH1] I. Ekeland y H. Hofer, Symplectic topology and hamiltonian dynamics, *Math.Z.* 200(1989), 355-378.
- [EH2] I. Ekeland y H. Hofer, Symplectic topology and hamiltonian dynamics II, *Math. Z.* 203(1990), 553-567.
- [EL] I. Ekeland y J.M. Lasry, On the number of periodic trajectories for a hamiltonian flow on a convex energy surfaces, *Ann. of. Math.* 112(1980), 283-319.
- [FR] E. Fadell, P.H. Rabinowitz, Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for hamiltonian systems, *Invent. Math.* 45(1978), 139-173.
- [HK] K. Hoffman y R. Kunze, Algebra lineal, Prentice-Hall hispanoamericana, México 1973.
- [Ho] H. Hofer, On strongly indefinite functionals with application, *T.A.M.S.* 275(1983), 185-214.
- [HZ1] H. Hofer y E. Zehnder, Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo, *Invent. Math.* 90(1987), 1-9.
- [HZ2] H. Hofer y E. Zehnder, Symplectic invariants and hamiltonian dynamics, *Advanced texts Birkhäuser-Verlag, Basel* 1994.
- [Li] L. Lima, Orientability of smooth hypersurfaces and the Jordan-Brouwer separation theorem, *Expo. Math.* 5(1987), 283-286.

- [MT] R. Michalek y G. Tarantello, Subharmonic solutions with prescribed minimal period for nonautonomous hamiltonian systems, *J. Diff. Eq.* 72(1988), 28-55.
- [Mu] J. Munkres, *Topology a first course*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [MW] J. Mawhin y M. Willem, *Critical point theory and hamiltonian systems*, applied mathematical science v. 74, Springer-Verlag, New York 1989.
- [Pa] S. Palais, *The classification of G-spaces*, *Memoirs of the American Math. Society* 36 American Mathematical society, Providence R.I. 1960.
- [Ra1] P.H. Rabinowitz, Periodic solutions of hamiltonian systems, *Comm. Pure Appl. Math.* 31(1978), 157-184.
- [Ra2] P.H. Rabinowitz, Periodic solutions of a hamiltonian systems on a prescribed energy surfaces, *J. Diff. Eq.* 33(1979), 336-352.
- [Ra3] P.H. Rabinowitz, On a theorem of Hofer and Zehnder, *Periodic solutions of hamiltonian systems and related topics*, P.H. Rabinowitz et. al. eds., D. Reidel, 1987, 245-253.
- [Ra4] P.H. Rabinowitz, Periodic solutions of hamiltonian systems: A survey, *SIAM J. Math. Anal* 13(1982), 343-352.
- [Ra5] P.H. Rabinowitz, *Critical point theory and applications to differential equations: A survey*, preprint.
- [Ra6] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C.B.M.S. 65 American Mathematical Society Providence, R.I. 1986.
- [Ru] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-hill segunda edición, 1974.
- [Se] H. Seifert, Periodische Bewegungen mechanischer systeme, *Math Z.* 51(1948), 197-216.

- [Sp] E. Spanier, Algebraic Topology, Springer-Verlag primera edición, New York, 1966.
- [St1] M. Struwe, Existence of periodic solutions of hamiltonian systems on almost every energy surfaces, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 20(1990), 49-58.
- [St2] M. Struwe, Variational methods and applications to partial differential equations and hamiltonian systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990.
- [Vi] C. Viterbo, A proof of the Weinstein conjecture in \mathbf{R}^{2N} , Ann. IHP-Analyse Nonlin. 4(1987), 337-356.
- [We1] A. Weinstein, Periodic orbits for convex hamiltonian systems, Ann of Math. 108(1978), 507-518.
- [We2] A. Weinstein, On the hypotheses of Rabinowitz' periodic theorems, J. Diff. Eq. 33(1979), 353-358.