VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Un Algoritmo para Resolver el Problema de Localización de Servicios con Restricciones de Demanda y Adicionales

TESIS DOCTORAL

Que para obtener el grado de
DOCTOR EN INGENIERÍA

Presenta:
Ricardo Aceves García

Director de Tesis:
Dr. Sergio Fuentes Maya

Ciudad Universitaria
1996

Cd. Universitaria, México, D. F., C. P. 04510, Apdo. Postal 70-256 Tel. 548-09-50 Fax 548-09-50

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A los que me dieron la vida
A los que yo se las di
Y a los que conviven conmigo

Reconocimientos

En especial al Dr. Sergio Fuentes Maya por su constante ejemplo e impulso.

A las instituciones: Universidad Autónoma de Puebla y Universidad Nacional Autónoma de México.

ABSTRACT

Many private and public organizations have to made decisions about how locate warehouses, schools, banks branches, etc. For such problem, of great practical importance, there has been several approaches in order to solve it. Initially, the intents were through the use of heuristics procedures. On the other hand, to obtain an optimal solution the branch and bound technique can been used. However, the effort to get such solution has gone up as the size of the problem increases making the solution of real problems impractical. The mathematical programming approach leaned upon with decomposition techniques has analyzed the problem using two subproblems: The subproblem of facility location at minimun cost and the subproblem of demand distribution toward the facilities at minimun cost. This structure has allowed to use very efficient solution methods.

The mathematical model that has been of great benefit for obtaining efficient algorithms, is the well-known "Fix Charge Problem" and its associated models. The most promising strategy until now has been the use of the so-called Decomposition Principle in their primal or dual implementation. In such approach the "bottle-neck" is the repeated calculation of the master problem, due to its combinatorial structure

The purpose of this work is to propose and implement a simple algorithm to solve the locational problem that avoids to use the master problem and outline an optimal solution.

The main contribution of this research is an algorithm that fulfills the purpose previously described. This algorithm incorporate the Benders decomposition technique and the separable Lagrangean relaxation in a same scheme, that results in the succesive solution of two transport type subproblems solved using a ping-pong process. This allows to get a method that results simple and efficient compared with those reported in the literature.

RESUMEN

El problema de localización se presenta en muchas organizaciones grandes y pequeñas, públicas y privadas; que tienen la necesidad de ubicar geográficamente algún tipo de servicio, como por ejemplo: escuelas, almacenes, estaciones de gasolina, clínicas de salud, sucursales bancarias, etc. Para este problema de gran importancia práctica, se han propuestos varios puntos de vista para resolverlo. Inicialmente, los intentos fueron a través del uso de procedimientos heurísticos. Con el propósito de optimizar al problema, se ha usado un proceso de ramificación y acotamiento, en donde consideraciones de cálculo han ido en contra para la solución de problemas relativamente grandes, generalmente de uso práctico. La programación matemática apoyada fuertemente con las técnicas de descomposición, a través de las cuales, el problema puede ser analizado como dos subproblemas interrelacionados: la localización de costo mínimo para los servicios y la distribución a costo mínimo de la demanda. Estructura que permite el uso de técnicas y métodos de solución muy eficientes.

La formulación matemática que ha sido de gran beneficio para la obtención de algoritmos de solución eficientes, es el denominado "Problema de Cargo Fijo". Y la estrategia de solución más prometedora hasta la fecha, es el uso del "principio de descomposición" en su forma primal o dual, con el consabido "cuello de botella" que representa el cálculo repetido del denominado "problema maestro", el cual es de una compleja estructura combinatoria.

El propósito de este trabajo es el de diseñar e implementar un algoritmo que resuelva en forma óptima el problema de localización de servicios, que evite utilizar al problema maestro en su esquema de solución y que además, sea simple en su manipulación.

La principal contribución de esta investigación es la obtención de un algoritmo que cumple con el propósito anteriormente planteado. La estrategia de solución se basa en la incorporación de la descomposición de Benders y la relajación Lagranjeana Separable en un mismo esquema cruzado, unificación que resulta en la solución sucesiva de dos subproblemas del tipo transporte en un proceso de ping-pong. Hecho que permite obtener un método de solución sencillo y eficiente, comparado con los reportados en la literatura.

ÍNDICE

FIGURAS

TABLAS

INTRODUCCIÓN

Muchas organizaciones grandes y pequeñas, públicas y privadas, se enfrentan a decisiones de localizar: estaciones de bomberos, clínicas de salud, almacenes, sucursales bancarias, escuelas, cajeros automáticos, etc. En tales problemas la meta u objetivo es encontrar la ubicación geográfica que minimice costos en algún sentido, los cuales pueden ser considerados como: pesos, número de usuarios perdidos, promedio o peor tiempo de respuesta, desigualdad social (algunas veces cuantificada), o alguna otra medida. La demanda que requiere acceso a los servicios está esparcida sobre toda el área de estudio y el costo es una función de la distancia o tiempo de viaje, entre cada punto de demanda y el servicio que la atenderá. Normalmente mayores distancias significan mayores costos, pero si se desea localizar un servicio **no deseable,** tal como un depósito de basura o una planta de energía, el objetivo inverso puede ser necesario.

La localización de servicios con frecuencia toma lugar en el contexto de un sistema de comunicaciones, transporte o transmisión, los cuales pueden ser representados para propósitos analíticos como redes, donde los nodos pueden representar poblaciones, terminales, etc. y los arcos carreteras, tubería, calles, cableado, etc.. Algunos modelos (continuos) permiten localizar a los servicios en cualquier parte del plano y otros más (modelos discretos) restringen la posible localización a un conjunto finito de sitios previamente considerados.
Los modelos de localización planares (continuos), generalmente tienen soluciones que son simples, comprensibles y reveladoras de la estructura del problema, pero los supuestos que se hacen en general no son muy realistas. En particular, estos modelos no se adaptan bien a muchos problemas que tienen una estructura reticular y pueden ser muy difíciles de resolver, cuando la localización de los servicios está limitada a cierta región del plano. *Los modelos de localización discretos en redes* tienen la ventaja de que su estructura se puede adaptar a un gran número de aplicaciones y son fácilmente conceptualizados, además de que la medida de distancia utilizada es la denominada **ruta más corta**, la cual le viene bien a un gran número de aplicaciones. Sin embargo las grandes debilidades en estos modelos, han sido la poca variedad de funciones de costo para las cuales se ha analizado y la existencia de problemas en los que el grado de complejidad aumenta al analizarlos como una red. *Los modelos discretos* han atraído fuertemente el interés porque en ellos generalmente se tiene un

trabajable balance entre simplicidad y verosimilitud, son extremadamente flexibles porque permiten elegir cualquier medida de distancia y cualquier conjunto finito de sitios, como localizaciones factibles. Sin embargo una debilidad en estos modelos es que su solución puede ser un asunto difícil y complejo, que con frecuencia revela poco acerca del problema.

El principal propósito de esta investigación es el tratar de eliminar esta debilidad. Por lo cual nos proponemos desarrollar una metodología para resolver los problemas de localización discretos, que facilite y simplifique la solución de los mismos. Específicamente, deseamos diseñar e implementar un algoritmo que resuelva en forma óptima el problema de localización de servicios, que evite utilizar al problema maestro en su esquema de solución y que además, pueda contener restricciones de demanda y adicionales, sin que esto incremente mucho su complejidad.

Este trabajo se desarrolla como sigue: En el primer capítulo, se presenta el análisis clásico del problema de Localización de Servicios que es el de ubicar geográficamente algún tipo de servicio, de tal forma que se minimicen los costos de traslado de las unidades de servicio a los centros de demanda. Y se presenta un enfoque alternativo; es decir como dos subproblemas interrelacionados, el de localización de los servicios y el de distribución de la demanda, estructura que facilita su análisis y permite introducir ciertas variantes que lo hacen más interesante. Además, se presenta las tres principales formulaciones matemáticas con las que se cubre una amplia gama de problemas de aplicación. Como son, los problemas de localización sin restricciones de capacidad, los problemas de localización con restricciones de capacidad y los problema de localización con restricciones de capacidad y adicionales. Quedando sin tomar en cuenta variantes como: Localización de Servicios en Multiperiódo, con Multiservicio, con Economías de Escala, etc.; que pudieran ser interesantes en la práctica, pero que no son consideradas en nuestro trabajo.

En el segundo capítulo, se presenta una revisión de los trabajos más significativos, que han contribuido de manera sustantiva al presente estado del conocimiento. El enfoque se hace con base en las formulaciones del primer capítulo y no se les intenta dar alguna prioridad. Es decir, se presenta una forma de evolución taxonómica, para mostrar como la investigación de operaciones ha impactado en la planeación y diseño de sistemas de localización. Así como ciertas áreas potenciales de mejoramiento, mismas que han servido como punto de partida del trabajo de investigación que se ha desarrollado.

En el tercer capítulo, se presentan las bases teóricas a partir de las cuales se desarrolla la presente investigación. Se presentan los fundamentos teóricos del algoritmo de Descomposición Cruzada, que es el más significativo, ya que propone una nueva estrategia para la solución del problema, basada en la unificación de la descomposición de Benders y la relajación Lagrangeana en un mismo esquema, explotando simultáneamente la estructura primal y dual del problema. Estrategia que permite resolver dos subproblemas más pequeños, incorporando un proceso iterativo de "ping-pong" entre ellos. Además también se presenta, un nuevo esquema de relajación denominado "Relajación Lagrangeana Separable", por medio del cual no se pierde alguno de los conjuntos de restricciones originales especialmente estructurados, esto permite poder identificar estructuras ocultas especiales, además de tener una modelación flexible.

En el cuarto capítulo, se presenta la aplicación de los conceptos teóricos del capítulo anterior al problema de Localización de Servicios, estableciendo la relación que existe entre los subproblemas primal y dual, los cuales pueden verse como problemas maestros relajados uno del otro. Además como la relajación Lagrangeana Separable produce mejores cotas, el proceso de análisis con esta estrategia se establece bajo el siguiente esquema: Inducir la separación del problema en subproblemas independientes, capturar las diferentes características estructurales del problema, obtener cotas más fuertes, identificar las partes del problema que pueden ser separadas, reemplazar las variables por copias en cada parte o sustituir nuevas expresiones, dualizar la copia de las variables o la expresión de sustitución. Estrategia que al aplicarla al problema de Localización permitió obtener un algoritmo mucho más sencillo y práctico para resolver el problema propuesto. Obteniéndose una serie de conclusiones que consideramos contribuyen de gran forma al estado actual del conocimiento. Por último, se presentan ejemplos donde se aplica el algoritmo obtenido para demostrar la superioridad del mismo.

I. El Problema de Localización de Servicios

El problema de localización es muy antiguo, de la literatura matemática se tiene que: Cavalier (1647), consideró el problema de determinar un punto cuya suma de sus distancias a tres puntos dados, sea mínima. Tedenat (1810), resolvió el problema pero considerando n puntos. Steiner (1837), estableció las condiciones necesarias y suficientes para un mínimo. La aplicación se presenta con los trabajos de A. Weber (1929) y W. Isard (1956), para la localización industrial. Sin embargo, solo hasta los trabajos de Kuhn (1963), se pudo considerar al problema completamente tratado y resuelto. En la actualidad, al problema se la ha vinculado fuertemente con las técnicas de optimización a través del denominado "Problema de Localización de Servicios", el cual ha ofrecido y ofrece un gran potencial para modelar problemas donde se tenga que ubicar geográficamente uno a más servicios, para atender a un conjunto de usuarios. Entendiendose por servicio: un hospital, un distrito político, una escuela, una fábrica, una estación de policía o de bomberos, una sucursal bancaria, etc. El problema general de localización de servicios, se puede establecer como: **"Dada la localización de cada usuario, su demanda y los costos (tiempo, distancia, etc.) de transporte en la región de interés. Determinar el número de servicios, la ubicación geográfica y la capacidad de cada uno de ellos, de tal forma que se optimicen costos de transporte, costos de funcionamiento, costos fijos de instalación, etc."**

Este tipo de problemas de gran importancia práctica, puede ser analizado desde otro punto de vista, es decir, como *dos subproblemas interrelacionados:* **El subproblema de encontrar** la **localización de mínimo costo para los servicios, y el subproblema de distribuir a** costo **mínimo, la demanda a** los **servicios** . Estructura que permite el uso de técnicas y métodos de solución muy eficientes, además de poder introducir ciertas variantes que lo hacen más interesante. La naturaleza de los dos subproblemas será discutida brevemente.

Subproblema de Localización.

Si los centros de demanda son agrupados según el número de Unidades de Servicio que se desean instalar, entonces sólo se tendrá un conjunto de M subproblemas de localización de un solo servicio.

Subproblema de Distribución.

Dada la localización fija para cada una de las M unidades de servicio, el subproblema de distribución es encontrar la asignación de la demanda a las unidades de servicio.

Como las unidades de servicio para el subproblema de distribución son establecidas, es posible considerar las siguientes variantes para la función de costo de las unidades de servicio.

- ***CARGO FIJO SIMPLE.-*** Si se tiene un costo fijo f_i asociado con la unidad de servicio i y no se tienen restricciones de capacidad, entonces el costo total de la unidad de servicio es establecido como $\sum_{i=1}^{m} f_i$ y la distribución óptima no tiene mucho problema, puesto que solamente se asigna a cada sitio de demanda el servicio más cercano.

- ***CARGO SIMPLE CON RESTRICCIONES.-*** Si existe un costo fijo f_i y un tamaño máximo a_i, asociado al servicio i, entonces el problema se transforma en uno de transporte. Es decir se tiene una capacidad de suministro a_i en cada servicio para atender la demanda de los destinos.

- ***LINEAL CON Y SIN COSTO FIJO.-*** Si la función de costo de la unidad de servicio, es de la forma:
  $P_i(x_i) = f_i + c_i x_i$
  donde x_i representa la capacidad de generar flujo del servicio i, c_i es su costo de distribución y f_i el costo de establecer el servicio i .El subproblema de distribución puede establecerse como el de cargo fijo simple, formando una nueva función de costo de la siguiente manera:
  $c'_{ij} = c_{ij} + f_i$,
  donde c'_{ij} esta formado por el costo de distribución más el costo fijo de signar un centro de demanda j a la unidad de servicio i más cercana .

- ***CONVEXA LINEAL POR TRAMOS.-*** Si la función de costo del servicio es convexa lineal por tramos, entonces el subproblema de distribución tiene la estructura del problema de transbordo, el cual puede ser resuelto con técnicas del modelo de redes.

- *FUNCIÓN ESCALÓN.*- La figura (1) es un ejemplo de una función de costos para la unidad de servicio, la cual se incrementa en escalones (pasos) finitos. Esta función puede ser utilizada cuando se tiene libertad de elegir diferentes tamaños de servicios, de una relación disponible de modelos, lo cual sucede con mucha frecuencia en la vida real. Para esta función el subproblema puede ser modelado como uno de programación entera 0-1.

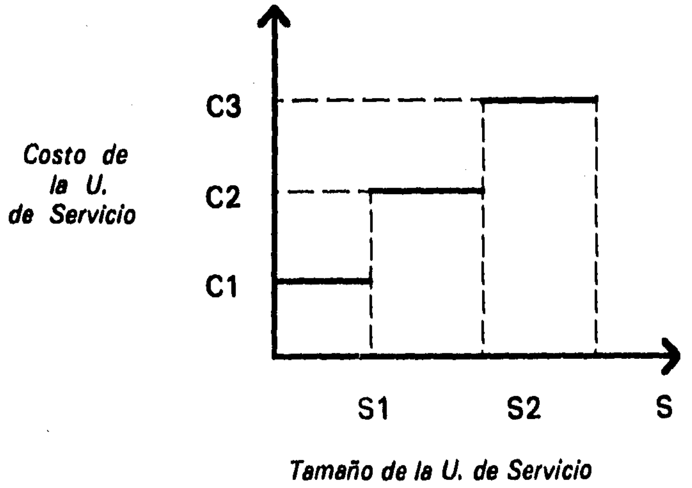


Fig. 1 Función de costos escalón

Una pregunta que puede surgir en este momento, es la debida al hecho del porqué limitamos nuestra atención a modelos en los cuales cada punto de demanda es atendido por el servicio más cercano. Una razón es debido a nuestro interés por los modelos prescriptivos de la investigación de operaciones, más que en los modelos descriptivos característicos de la geografía y de las ciencias regionales. En estas ciencias generalmente se quiere explicar o predecir la interacción entre las unidades de servicios y los centros de demanda, mientras que nosotros queremos de una forma óptima, localizar los servicios y asignar a ellos los usuarios.

Cuando lo principal es optimizar el costo, la forma más natural de asignación es aquella que establece atender la demanda por el servicio más cercano. De esta forma en nuestro estudio no se utilizará la forma descriptiva que frecuentemente usan los geógrafos y analistas regionales, la cual fue emprendida en un esfuerzo para dirigirse a un problema de fundamental interés para ellos, como es el de tratar con ciertos problemas de localización del sector público en los cuales los objetivos son muchos y complejos, en donde las funciones que miden el costo social de manera comprensible son generalmente más complejas y por lo tanto requieren otro método de solución y sería muy ambicioso tratar de resolverlos en este trabajo. Sin embargo, este tipo de problemas más complejos tienden a ser asociados con situaciones en las cuales, las decisiones son tomadas desde oficinas gubernamentales y los modelos de la investigación de operaciones pueden ser una guía para sus planes y programas, además de introducir racionalidad dentro del sector público.

1.1 Formulación

En un problema de decisiones de localización, lo más importante desde el punto de vista práctico, es elegir la ubicación geográfica donde se deben establecer los servicios, de tal forma que se minimice el costo de satisfacer la demanda. Por lo general se tiene un costo fijo asociado por abrir o implementar el servicio y los costos de transporte generados por el traslado entre clientes (demanda) y servicio.

La formulación matemática del problema como uno de programación entera, ha sido provechosa para la obtención de métodos de solución y la clase de problema entero-mixto que en particular ha sido de gran beneficio, es el denominado *Problema de Cargo Fijo,* el cual puede ser expresado como:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{Min.} & CX & + & fY & & \\
\text{s. a.} & & & & & \\
& A_1 X & & & \geq & b_1 , \\
& -IX & + & MY & \geq & 0 , \\
& & - & A_2 Y & \geq & -b_2 , \\
& X \geq 0 , & & Y = 1,0 , & &
\end{array}
$$

donde los vectores C, f, b y las matrices M, A_1, A_2 son conocidos (as) y conformables. Los vectores X,Y son los que se deben determinar.

Formulación general que ha sido de gran significancia práctica, ya que puede ser usada en numerosas aplicaciones, tanto en el sector público como en el privado.

Una utilidad que se le ha dado es para formular el *Problema de Localización de Servicios o El Problema de Selección de Sitios*, el cual tiene aplicaciones tan diversas como las mencionadas inicialmente, y que pueden ser modelados a partir de alguna de las formulaciones, que serán discutidas a continuación:

- ***Localización de Servicios sin Restricciones (LSS).***
- ***Localización de Servicios con Restricciones de Capacidad (LSC).***
- ***Localización de Servicios con Restricciones Adicionales (LSCA).***

Para formalizar, considere el problema en el cual un número finito de m sitios están disponibles y en los cuales es posible establecer unidades de servicio para atender a una cierta población de usuarios, concentrada en n puntos discretos, cada uno con demanda b_j. Cuando una localización en particular es seleccionada, un costo fijo f_i es incurrido por el establecimiento del servicio y un costo variable $C_{ij}\, x_{ij}$ es realizado por atender la fracción de la demanda x_{ij}, del punto j .

1.2 Problema de Localización de Servicios Simple (LSS)

Suponiendo que la capacidad de cada unidad de servicio es ilimitada y uno o más de los servicios pueden ser requeridos para satisfacer la demanda total. Entonces el problema consiste en decidir cual de las posibles unidades de servicio será usada y que patrón de asignaciones deberá ser hecho; tal que, el costo total de establecer las unidades de servicio (amortización de costos fijos, construcción, equipamiento, etc.) y el costo total de atender la demanda (transporte), sea minimizado en un horizonte finito de planeación. La capacidad de las unidades instaladas es obtenida como un segundo producto de la solución. Entonces el problema puede ser formulado como:

$$
\begin{aligned}
&Min. \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\, y_i \\
&s.a. \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\dots,n \qquad (1.1), \\
&\qquad x_{ij} \le y_i, \; i = 1,\dots,m \;, j = 1,\dots,n \quad (1.2), \\
&\qquad x_{ij} \ge 0, \; y_i = 1,0 \;, \quad i = 1,\dots,m \;, j = 1,\dots,n .
\end{aligned}
$$

Donde:

C_{ij}, costo de distribución del centro de servicio i al sitio de demanda j.

x_{ij}, fracción de demanda total atendida del lugar j, por la unidad de servicio i.

$y_i = 1,0$, indica si el servicio i es abierto o cerrado, respectivamente.

La restricción *(1.1)*, garantiza que la demanda de cada cliente sea satisfecha, mientras que *(1.2)* garantiza que los clientes son atendidos solamente desde centros servicios establecidos. Note que el costo fijo f_i de establecer una unidad de servicio, es independiente de su capacidad, lo cual es una deficiencia de la formulación. Sin embargo éste modelo puede funcionar bien, si un conjunto de unidades de servicio ya existen y el problema se define solo para considerar cual de ellas debe ser expandida en su capacidad.

1.3 Localización de Servicios con Restricciones de Capacidad (LSC)

Si la capacidad de cada centro de servicio fuera limitada (predeterminada), entonces el problema puede ser formulado como:

$$\begin{aligned}
&Min. \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\, y_i \\
&s.a. \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad = \quad 1, \quad j=1,\ldots,n \qquad (1.3), \\
&\quad x_{ij} \quad \leq \quad y_i, \quad i=1,\ldots,m, \; j=1,\ldots,n \qquad (1.4), \\
&\sum_{j=1}^{n} d_j\, x_{ij} \quad \leq \quad a_i\, y_i, \quad i=1,\ldots,m, \qquad (1.5), \\
&x_{ij} \geq 0, \; y_i = 1,0, \quad i=1,\ldots,m \;, j=1,\ldots,n \;.
\end{aligned}$$

Donde:
$C_{ij}, x_{ij}, f_i, y_i,$ representan lo mismo que en el problema anterior *(LSS)*.
$a_i,$ representa la capacidad del servicio i y d_j representa la demanda del sitio j.
Versión del problema que hasta ahora ha recibido la mayor atención en investigaciones y estudios anteriores.

Como en la mayoría de los modelos de optimización, las formulaciones anteriores son una simplificación de la situación real. Generalmente existen otras consideraciones administrativas, las cuales pueden ser ignoradas solamente a riesgo de obtener una solución no óptima y por lo tanto incurrir en una pérdida monetaria. Sin embargo, estas consideraciones son expresables en términos de la programación matemática como restricciones y su introducción en la formulación es en ocasiones complicada y puede limitar el uso de ciertos algoritmos disponibles. Por consecuencia, frecuentemente son omitidas sin preocuparse del costo; sin embargo, cuando se toman en cuenta son formalmente etiquetadas en el modelo bajo el nombre de: ***Restricciones Adicionales.***

La inclusión de este tipo de restricciones serán de interés en nuestra investigación, donde algunos ejemplos pueden ser: ***Limitaciones de presupuesto:*** El costo fijo total de establecer la unidad de servicio, no debe exceder los fondos disponibles para los periodos de inversión. ***Recursos Limitados.*** (Diferente a presupuesto): El número total de unidades de recurso escaso tal como: equipo de propósito especial o personal altamente calificado, no debe exceder la cantidad disponible. ***Configuración del Sistema:*** El número de unidades de servicio establecidas en el área de interés, no debe exceder al límite impuesto por la disponibilidad de tierra, capacidad de construcción, leyes, geografía, riesgo, acceso o políticas de administración, etc., o a la existencia de localizaciones mutuamente excluyentes o dependientes.

1.4 Problema de Localización de Servicios con Restricciones Adicionales (LSCA)

Consideraciones de los tres tipos de restricciones adicionales anteriores en el problema de localización, conducen a la siguiente formulación general:

$$Min. \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\, y_i$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\dots,n, \qquad (1.6)$$

$$x_{ij} \le y_i, \quad i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n, \qquad (1.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j\, x_{ij} \le a_i\, y_i, \quad i = 1,\dots,m, \qquad (1.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_{ij(q)}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} b_{iq}\, y_i \le r_q, \quad \forall j,\; q \in Q, \qquad (1.9)$$

$$x_{ij} \ge 0, \; y_i = 1,0, \quad i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n.$$

Donde:

$C_{ij}, x_{ij}, f_i, y_i, a_i$, representan lo mismo que en los problemas anteriores *(LSS)* y *(LSC)*.

$s_{ij(q)}, b_{iq}, r_q$, representan constantes correspondientes al conjunto de restricciones adicionales.

Las restricciones del tipo *(1.6)*, aseguran que la demanda de cada usuario sea satisfecha; la restricción *(1.7)*, garantiza que los clientes serán atendidos solamente desde servicios abiertos; la restricción *(1.8)*, evita violar las cotas superiores de suministro (capacidad) de las unidades de servicio abiertas y las restricciones *(1.9)*, consideran la posibilidad de imponer limitantes (restricciones lineales) sobre las variables x_{ij}, y_i . En la mayoría de las aplicaciones es común no abrir o instalar un servicio, a menos que se tenga algún nivel mínimo de demanda. Tal cota puede ser establecida al introducirla en la restricción *(1.9)* como límite inferior.

El uso de restricciones adicionales también es muy común en la práctica; es decir, como el primer término involucra a las variables continuas, puede ser útil controlar el flujo en la distribución. Y al considerar el segundo término, es posible acomodar prioridades, reglas de exclusión e inclusión, etc., en la selección de sitios para la ubicación de los servicios.

El problema de localización de servicios simples (LSS), tienen el hecho deseable de permitir la variación en el tamaño de la unidad de servicio, para satisfacer exáctamente la demanda y para poder realizar algún análisis de sensibilidad. Recíprocamente, el problema (LSS) o (LSC) proporcionan una estimación exacta de los costos fijos, pero impiden obtener un costo total menor al mejorar el diseño o patrón de asignación (distribución), el cual puede obtenerse si la capacidad de las unidades de servicio puede ser aumentada o disminuida, como una función de los costos de transporte. Economías de escala en costos de construcción, etc., pueden ser muy significativas en estos problemas y deben ser consideradas si esto es posible. Un planteamiento en el cual se permite que la capacidad del servicio sea una de un conjunto mutuamente exclusivo de tamaños (cada uno con su propio costo fijo), es denominado: *El Problema de Localización de Servicios con Diferentes Capacidades* (LSDC). Omitiendo algunas restricciones adicionales, el problema puede ser formulado como:

$$
\begin{aligned}
\underset{x,y}{Min.}\; & \sum_i \sum_j C_{ij}\, x_{ij} + \sum_i f_i\, y_i \\
s.\ a.\; & \\
& \sum_i x_{ij} = 1, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& x_{ij} \le m_{ij}\, y_i, \; i = 1,\ldots,m, \; j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_i a_i\, y_i \ge \sum_j d_j, \; j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_j d_j\, x_{ij} \le a_i\, y_i, \; i = 1,\ldots,m, \\
& x_{ij} \ge 0, \quad y_i = 1,0, \; i = 1,\ldots,m, \; j = 1,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

Donde m_{ij} es la capacidad de la ruta de distribución (i,j), a_i es la capacidad disponible en el servicio i y d_j la demanda del sitio j. El incremento señalado en el número de variables enteras es notable y una formulación tal, puede requerir un esfuerzo computacional muy grande para obtener una solución óptima, usando algunos algoritmos existente. *De ésta forma el problema (LSDC) es una selección interesante, para realizar el análisis que se pretende, y establecer la eficiencia computacional del algoritmo resultante de nuestra investigación.*

También existen otras variantes para el problema, las cuales pueden ser de significancia práctica, sin embargo ellas no son de interés en nuestra investigación. Esas variaciones pueden ser: i).- ***Localización de Servicios en Multiperiódo***, ii).- ***Localización de Servicios con Multiproducto***, iii).- ***Localización de Servicios con Economías de Escala***, es decir, completa no linearidad donde la aproximación lineal por tramos puede ser usada.

1.5 Aspectos Computacionales

Considerando que el problema de Localización Simple LSS es el más sencillo y pequeño de esta familia, a través de él pretendemos establecer los principales conceptos usados para caracterizar los algoritmos, para contabilizar sus propiedades y establecer desde el punto de vista computacional, que tan difícil es resolver óptimamente los problemas de localización de servicios.

1.5.1 Enumeración

Cuando se pretende resolver un problema por completa enumeración, el esfuerzo total que se invierte en su solución consiste de dos cantidades: una fija y otra que es variable proporcional al número de soluciones factibles a ser evaluadas. La cantidad fija generalmente representa la idea de lo que se está haciendo. Si se olvida por un momento a la cantidad fija, la dificultad para resolver óptimamente el problema puede ser reformulada de la siguiente forma: Para un problema de optimización, llamado OPT y su familia con todos los ejemplos considerados de un tamaño bien definido, medidos en términos de m y n; es decir, el número de servicios a localizar y los sitios de demanda, respectivamente. ¿Cuál es el número de soluciones factibles?.

Sea F1(OPT) el número de soluciones factibles buscadas y considere el problema de localización simple con p servicos abiertos, p-LSS. Entonces para un valor dado de p, existen $\binom{n}{p}$ diferentes formas de localización, para abrir y cerrar servicios. Puesto que no todos los servicios abiertos se consideran activos, es decir atienden demanda, es posible asignar a cada uno de los m clientes hacia algún servicio abierto. Entonces F1(LSS) = $\binom{n}{p}p^m$. Cuando en el problema LSS el valor de p no se especifica, se tiene que: F1(LSS) = n^m . Si se considera al problema p-LSS como *activo*, es decir que todos los servicios abiertos atienden demanda, para cada una de las $\binom{n}{p}$ diferentes formas de abrir y cerrar servicios, $T(p,m)$ denotará el número de asignaciones factibles, por lo cual los p servicios abiertos pueden ser asignados hacia los n clientes $p \leq n$, tal que cada servicio abierto sea activo.

Entonces F1(p-*Activo*) = $\binom{m}{p}T(p,n)$, donde

$$T(p,n) = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{p+j}\binom{p}{j}j^n$$

Note que en un problema del tipo p-LSS no activo, para determinar una de las forma de abrir y cerrar servicios de entre las $\binom{m}{p}$ diferentes maneras que existen de hacerlo, considerando además a todas las p^n diferentes asignaciones de clientes a servicios abiertos, se hace necesario evaluarlas explicitamente, puesto que cada cliente es asignado al servicio abierto más cercano. De esta forma aún para valores moderados de *m, n, p;* los números obtenidos son muy grandes. Por ejemplo para $m=10$, $n=10$ y $p=5$, se tiene que $\binom{10}{5} 5^{10} = 295{,}312{,}500{,}000 \approx 2 \times 0^{12}$, que aún en las computadoras más rapidas una aproximación basada en una enumeración explícita, puede requerir cantidades de tiempo muy grandes, del orden de años.

De esta forma se puede ver que existen problemas de localización no triviales, para los cuales encontrar la solución óptima no es tan simple y lo que se desea es tener algoritmos hábiles que puedan identificar una solución óptima en segundos.

1.5.2 Complejidad Computacional

Como la teoría de complejidad computacional no está totalmente desarrollada para dar respuestas contundentes; sin embargo, es posible establecer una serie de indicios y una cierta base conceptual en terminos de complejidad computacional, para analizar el problema de Localización Simple (LSS).

Para este propósito, considerar a un algoritmo como un procedimiento que se realiza *etapa por etapa,* para resolver problemas en un tiempo finito de cálculo. Es práctica y además comunmente aceptado, caracterizar algoritmos por una medida relacionada a su *función de complejidad de tiempo.* Esto es, para un problema dado del tipo OPT, una familia de ejemplos prueba de tamaño q, con una duración de entrada y un algoritmo específico Ω, se puede denotar a la *función de complejidad de tiempo* del algoritmo como $f_\Omega(q)$, donde esta función expresa el tiempo requerido para resolver el problema, para algún ejemplo arbitrario de ese tamaño.

Obviamente $f_\Omega(q)$ depende del equipo de computación usado y del esquema de codificación utilizado por el algoritmo, pero ninguno de los dos tiene algún efecto significativo sobre los cálculos del algoritmo. Aproximadamente $f_\Omega(q)$ expresa el número máximo de operaciones elementales tales como: sumas, multiplicaciones y comparaciones, ejecutadas por el algoritmo para resolver algún problema de tamaño q.

Para caracterizar el *orden* de la *función de complejidad de tiempo* $f_{\Omega}(q)$, se dice que es $O(g(q))$, siempre que exista alguna constante α , tal que, $|f_{\Omega}(q)| \leq \alpha|g(q)|$ para toda q, y entonces nos referimos al algoritmo Ω como uno de órden $O(g(q))$ para el problema de optimización OPT . Además, un algoritmo Ω con *función de complejidad de tiempo* $f_{\Omega}(q)$ es llamado *polinomial* (tiempo acotado) o bueno, o rápido, o eficiente; si $f_{\Omega}(q)$ es de orden $O(g(q))$, $q=1,2,\ldots$, y si $g(q)$ es algún polinomio de tamaño q. Ahora si $f_{\Omega}(q)$ no puede ser acotado, el algoritmo Ω es llamado exponencial. Puesto que esta definición involucra a todos los problemas, es posible establecer que un algoritmo es polinomial o exponencial en el *peor de los casos*. Y un problema para el cual existe un algoritmo polinomial, es referido como bien resuelto.

Para ejemplificar considere algún problema OPT, un algortimo Ω y para $q=1,2,\ldots$ suponnga que $f_{\Omega}(q) = 7q^5+3q^2+\log q$. Así $g(q) = q^5$ y $|f_{\Omega}(q)| \leq 10g(q)$, entonces, Ω es de orden $O(q^5)$ y por lo tanto un algoritmo polinomial para el problema de optimización OPT.

En contraste a los problemas de optimización, ahora nos referiremos a los *"problemas de decisión π"* como los que tienen dos posibles resultados: *si/no*. La teoría formal de los problemas *NP-Completos*, se basa en el concepto de máquina de Turing determinística y no determinística, diseñada para proporcionar respuestas de tipo *si/no* a problemas de decisión puestos en *"lenguaje de reconocimiento"*. Entonces para un *"alfabeto"* y un *"lenguaje"* dados, una entrada consiste de una *"cadena"* finita de símbolos del alfabeto y es aceptada por la máquina, es decir resuelve el problema de decisión, si y solo si, pertenece al lenguaje.

Si se considera como cadena a los datos del ejemplo y como lenguaje a un tipo de problema o al conjunto de todos sus posibles ejemplos. Entonces un problema de decisión verifica la factibilidad de los datos del ejemplo para un tipo de problema dado y se dice que pertenece a la *clase P*, si la factibilidad o no factibilidad del mismo puede ser determinada, por algún algoritmo en tiempo polinomial. Así $\pi(LSS) \in P$ si, para algún valor dado m, n, C, f, k, es posible en tiempo polinomial confirmar o rechazar su membresía al conjunto de ejemplos factibles. Actualmente no se conoce si $\pi(LSS)$ pertenece o no a P. Sin embargo, es posible considerar que pertenece a la clase NP, la cual puede ser caracterizada de la siguiente forma: Para un problema de decisión γ la factibilidad implica la existencia de una estructura apropiada δ, asociada con γ. Si la longitud de δ esta acotada por algún polinomio de longitud γ , y si para valores de (γ,δ) dados, se puede afirmar la factibilidad de δ en tiempo polinomial, entonces para este problema de decisión, es posible establecer que pertenece a la *clase NP*.

Para ver lo anterior considere el siguiente ejemplo, sea el problema γ definido por *m, n, C, f, k;* entonces γ puede ser considerado factible si es posible asignarle valores 0 o 1 a todas las variables y_i, x_{ij} en la formulación del problema entero de LSS; tal que, todas las restricciones sean satisfechas y el valor de la función objetivo no exceda de un cierto valor k. Aquí la estructura δ asociada al problema de decisión γ, es un vector 0-1 con $n+mn$ elementos, que representan los valores de las $n+mn$ variables y_i, x_{ij}. Entonces, una conversión binaria de δ es de longitud $n+mn$, la cual tiene el mismo orden que la longitud de γ. Para afirmar la factibilidad de δ, o sea para verificar que δ satisface las restricciones y que la función objetivo no excede al valor k, se requieren cálculos del órden $n+mn$. Y como ambas condiciones satisfacen a sus miembros, se confirma que $\pi(LSS) \in NP$.

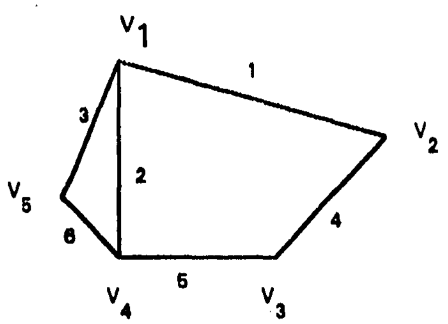
Si para un problema de decisiones π', es posible construir en tiempo polinomial un problema de decisiones π, tal que el ejemplo π' sea factible, si y solo si, el ejemplo π es factible, entonces se dice que π' es transformable a π en tiempo polinomial. Usando la notación $\pi' \propto \pi$ para indicar este proceso, es posible implicar que π' puede ser visto como un caso especial de π y en consecuencia, ser al menos tan difícil de rsolver como π'. Si $\pi' \propto \pi$ para todo $\pi' \in NP$ entonces algún problema perteneciente a la clase *NP* puede ser visto como un caso especial de π y llamarlo *NP-Duro*. Finalmente π es llamado *NP-Completo*, si π es *NP-Duro* y $\pi \in NP$. Además, si algún $\pi' \propto \pi$, π pertenece a la *clase NP* y π' es *NP-Completo*, entonces π es también *NP-Completo*.

Teorema 1. *El problema de localización simple (LSS), es NP-Duro.*

Prueba. Para realizar la prueba, considerar el siguiente problema de *Cobertura de Nodos*. Para lo cual, considere una red $G=(N,A)$ donde N representa al conjunto de nodos y A al conjunto de arcos. Sea el problema (LSS) con el conjunto de sitios potenciales $J=N$ y el conjunto de puntos de demanda (clientes) $I=A$. Sea $C_{ij}=2$, si v_j

$\in V$ es un punto final del arco $a_i \in A$ y sea $C_{ij} = 0$ otra cosa. También sea, $f_i = 1$ para toda $v_j = V$. Esta transformación es polinomial para el tamaño de la red.

Un ejemplo del problema de localización simple (LSS) definido de ésta forma, consiste en cubrir todos los arcos de la red *G*, con el mínimo número de nodos. De ésta forma la solución óptima del problema (LSS), dá la respuesta al problema de cobertura de nodos. Esto prueba que el problema (LSS) es *NP-Duro*. En el ejemplo $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_j = 0$ otra cosa, es una solución óptima del ejercicio de (LSS). Es decir, tres nodos son necesarios para cubrir todos los arcos de *G*.



$$f = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Fig. 2 Transformación de un problema de cobertura de nodos, a un problema tipo (LSS).

Una transformación que reduce un problema conocido *NP-Duro* a un problema *Q*, muestra que *Q* es también *NP-Duro*. Un corolario inmediato del teorema anteior es:

Corolario. *El problema de localización de p-servicios es NP-Duro, puesto que al resolverlo para cada p=1,...,n, proporciona una solución para el problema (LSS). Así que el problema (LSS) es NP-Duro.*

II. Revisión de Algoritmos Existentes, Resultados Teóricos y Aplicaciones

El propósito de este capítulo es establecer una revisión de los trabajos más significativos, que a través del tiempo han contribuido de manera sustantiva, al presente estado del conocimiento. El enfoque se hará basándose en las formulaciones que se presentaron en la sección anterior, especificando el uso de los métodos de solución presentados. El orden de presentación en su análisis es abierta y no se intenta dar prioridad a los modelos de los que se habla. Es decir, el objetivo es presentar una forma de evolución taxonómica, para mostrar como la investigación de operaciones ha impactado en la planeación y diseño de sistemas de localización. Finalizando con número interesante de áreas de aplicación, para las cuales el análisis que aquí se presenta, es adaptable para resolver ese tipo de problemas de localización.

Los modelos de localización, pueden ser clasificados desde diferentes puntos de vista, como por ejemplo:

i).- Si la red bajo consideración (arcos y/o nodos) es con restricciones de capacidad o sin restricciones de capacidad.
ii).- El número de unidades de servicio o niveles (simple o múltiple).
iii).- Los tipos de servicio, (simple o múltiple).
iv).- La estructura de costos en la red, para los arcos y/o nodos, (lineal o no lineal).
v).- El horizonte de planeación, (estático o dinámico).
vi).- Los patrones de demanda, (determinística o estocástica, con influencia en la localización, etc).
vii).- La posibilidad de acomodar restricciones adicionales, (selección simple, elegir uno de un conjunto de candidatos, etc.).

A continuación se presenta la figura (3), en la cual se resume y clasifican los algoritmos que han sido desarrollados, y proporciona una visión de aquellas áreas en donde la investigación ha sido mínima.

	CON CAPACIDAD	MULTI ESCALÓN	MULTI ATRIBUTOS	COSTO NO LINEAL	RESTRCC. ADICIONALES	DINÁMICO	CAPACIDAD DE OPTIMIZACIÓN
Guignard and Opaswongkarn (1990)	X						
Guignard and Spielberg (1979)	X				X		
Geoffrion and Mc Bride (1977)	X				X		X
Guignard (1988)							X
Cornuejol, Sridharan and Thizi (1991)	X						X
Van Roy T. J. (1984)	X						X
Efroyson and Ray (1966)						X	
Spielberg (1969)							X
Khumawala (1972)							X
Erlenkotter (1978)							X
Cabot and Erenguc (1984)							X
Gizelis and Samoulidis (1980)							X
Tcha and Lee (1984)		X					X
Khumawala and Whybark (1976)						X	X
Warszawski (1973)			X			X	
Karkazis and Boffey (1981)			X				X
Khumawala and Neebe (1981)			X				X
Van Roy and Erlenkotter (1982)						X	X
Naus (19789	X						X
Geoffrion and MacBride (1978)	X				X		X
Balachandran and Jain (1976)	X					X	X
Geoffrion and Graves (1974)	X		X		X		X
Geoffrion, Graves and Lee (1978)	X		X		X		X
Laundy (1985)			X				X
Lowell (1976)	X				X		X

Fig. 3 Algoritmos desarrollados

2.1 Problema de Localización Simple (LSS)

Estos modelos, donde se tiene capacidad ilimitada y costos lineales, han sido los más tratados y como consecuencia, se tiene una gama de procedimientos de solución. De esta forma el software asociado al problema, puede ser una buena herramienta de decisión en aplicaciones donde los supuestos del problema son posibles. Por ejemplo, puede ser útil para planear la localización de unidades de gran capacidad de almacenamiento, en las cuales un análisis producto por producto, puede ayudar para la consolidación del mismo y la decisión en la capacidad del servicio.

Numerosos puntos de vista han sido propuestos para resolver el problema. Los intentos iniciales fueron a través del uso de procedimientos heurísticos. El algoritmo desarrollado por *Kuehn y Hamburger [1963]*, a pesar del tiempo aún proporciona una forma genérica estándar, contra el cual los algoritmos diseñados posteriormente compiten por eficiencia computacional. Este algoritmo fue probado con una batería de doce problemas, utilizando las siguientes estrategias heurísticas: a).- El mejor sitio candidato para la localización, deberá estar cerca de la concentración de la demanda. b).- Soluciones aproximadas a las óptimas se pueden lograr, al abrir aquellos servicios; uno a la vez, que proporcionen el mayor ahorro en costo para todo el sistema. c).- Solamente un pequeño subconjunto de los sitios candidatos para la localización, necesitan ser investigados, para determinar la siguiente unidad de servicio a ser abierta.

Un intento por optimizar al problema (LSS) fue hecho por *Efroymson y Ray [1966]*, con un procedimiento branch and bound. Al reformular el problema, fueron capaces de expresarlo como uno de programación lineal, acotándolo de tal forma que puede ser resuelto por inspección. La ventaja obvia de ésta formulación, es la rapidez con la cual los problema acotados de esta forma pueden ser resueltos.

Spielberg [1969], también aplicó un procedimiento de enumeración implícita al problema, pero desde diferente perspectiva. En este esquema, todos los servicios son inicialmente abiertos o cerrados. En cada nodo, dos soluciones factibles pueden ser generadas, una de ellas se obtiene al quitar los costos fijos de algún servicio no usado en la solución del subproblema (con flujo cero), la otra se obtiene al resolver el problema de programación lineal, con todas las variables libres abiertas y las restricciones enteras sobre las variables Y relajadas, entonces se redondean superiormente todos los valores fracciónales de la Y's. Si el mínimo de estas dos soluciones es menor que un cierto valor V^* (valor de beneficio), entonces se hace V^* igual al valor mínimo.

Khumawala [1972], hizo una notable contribución a la eficiencia en la solución del problema (LSS), principalmente al desarrollar reglas eficientes para ramificación y acotamiento. Propuso cuatro criterios para la selección de la ramificación, lo que permitió tener una mejor eficienciencia computacional.

Erlenkotter [1978], reportó datos imprecisos utilizando un método de ajuste multiplicativo y en lugar de resolver el problema (LSS), resuelve un dual condensado mediante el cual reduce de tal forma al problema, que solo contiene a los correspondientes multiplicadores de las restricciones. El procedimiento de ascenso dual comienza con alguna solución inicial dual, y ajusta los multiplicadores incrementándolos de tal forma que, complementariamente la violación de las variables de holgura es reducida. El algoritmo termina cuando no existen futuros ajustes; es decir, algún incremento en las variables duales violaría una o a más de las restricciones del problema dual.

Cabot y Erengue [1984], han contribuido con la implementación de penalidades positivas y negativas, para definir cotas inferiores y además con un procedimiento para "observar hacia adelante" y eliminar nodos, sin la necesidad de enumerar a todos explícitamente.

Gizelis y Samoulidis [1980], ofrecen una variante interesante para el algoritmo de Efroymson y Ray; en el cual se permite la variación del costo fijo. *Kuhmawala y Whybark [1976]*, usan ramificación y acotamiento para resolver la versión dinámica del problema (LSS).

Guignard [1988]; En este trabajo se propone reforzar la relajación Lagrangeana Separable para el problema de localización de Planta, por usar desigualdades de Benders, generadas durante un procedimiento de acenso dual Lagrangeano. Estas desigualdades son expresadas en términos de variables 0-1 solamente y pueden ser usadas como restricciones en el problema tipo mochila. Se muestra como acoplar esta técnica con un buen algoritmo primal heurístico, que puede reducir sustancialmente las brechas de integralidad.

2.2 Problema de Localización con Restricciones de Capacidad (LSC)

La utilización de límites en la capacidad, transforma el problema en uno con restricciones. Este tipo de modelo es de gran utilidad para el análisis de problemas para localización un solo tipo de servicio, donde la capacidad es una consideración importante, esto es, donde la administración desea colocar una limitante a la salida máxima para algún tipo de servicio. Hasta ahora, todas las formulaciones han tratado a las variables en forma continua, como medida de la proporción de la demanda total satisfecha por la unidad de servicio en consideración. Una forma alternativa de tratar a esta variable, es considerarla en unidades de flujo para su análisis.

En la mayoría de las aplicaciones, no se desea abrir una unidad de servicio a menos que su salida de flujo proyectada (atención a la demanda), tuviera algún nivel mínimo. Tal cota inferior puede ser introducida al modelo a través de variables acotadas superiormente, límite entre los que se encuentran los suministros superior e inferior que proporciona la unidad de servicio. De esta forma, un simple cambio en la formulación permite tener cotas inferiores para el suministro (atención).

La técnica de ramificación y acotamiento, ha sido ampliamente aplicada a la solución de estos problemas con bastante éxito. Sin embargo, consideraciones de cálculo han ido en contra para la solución de problemas grandes, generalmente de uso práctico, de tal forma, que los esfuerzos se han enfocado para mejorar el orden de magnitud de los árboles de búsqueda. Esfuerzo que se ha enfocado en tres vertientes:

- *Mejorar las cotas inferiores.*
- *Mejorar la selección del nodo de ramificación o las reglas de retroceso.*
- *Mejorar las cotas superiores para generar beneficio de calidad.*

Akinc y Khumanwala [1977], han generalizado las reglas de acotamiento para el caso con restricciones de capacidad y además, adicionaron otra regla para la selección de nodos, la cual hace uso de dos parámetros. Específicamente, cuando un nodo es sondeado, el siguiente nodo a evaluar es elegido como el de menor cota inferior. Este procedimiento eventualmente resultará con un gran número de nodos no terminales en el árbol de enumeración, puesto que en esta elección se prefiere la terminación de niveles inferiores de nodos, antes de retroceder a los niveles superiores. El procedimiento implementa un esquema de menores cotas inferiores y continúa hasta que el número de nodos no terminales se encuentra en un nivel dado, por uno de los parámetros y entonces elimina algunos de los nodos no terminales. Y cuando el número de nodos no terminales se encuentra en un cierto nivel, el procedimiento se revierte.

Dearing y Newrich [1979], han reportado el uso de un esquema de enumeración implícita, para resolver una versión "cuello de botella" del problema (LSC), en la cual se desea minimizar el máximo costo de transporte, sujeto a una cota superior en costo fijo. En esta variante, especificaciones de variables binarias generan subproblemas que son de transporte, para los cuales existen procedimientos de solución eficientes.

Nauss [1978], ha propuesto un algoritmo de ramificación y acotamiento, el cual es muy semejante al propuesto por Akinc y Khumawala. Nauss utiliza reglas de fijación, las cuales reducen el número de operaciones de ramificación significativamente, al permitir cotas inferiores muy justas y penalizaciones derivadas de la relajación Langrajeana, por mantener a ciertos servicios abiertos o cerrados en forma fija. La relajación de un problema entero mixto, es resuelta eficientemente por métodos de descomposición, especialmente para una configuración fija, resolviendo un problema continuo de la "mochila" para cada unidad de servicio y dando un vector de flujos óptimo. Entonces usando los valores de la solución se resuelve un problema 0-1 de la mochila, lo que proporciona una configuración óptima (para x fija) y una solución para el problema relajado.

Kuffman, Eede y Hausen [1977], proponen un algoritmo el cual resuelve el problema como un sistema de distribución de dos niveles, usando la técnica de ramificación y acotamiento. Este procedimiento localiza simultáneamente unidades de servicio de diferente tamaño y es considerado como una generalización del propuesto por *Efroymson y Ray [1966]*. El procedimiento calcula la reducción de costos que se puede tener para una cierta configuración en particular, si cada servicio libre fuera abierto. Puesto que, los servicios con costos reducidos positivos no pueden conducir a una solución mejorada, pueden ser cerrados para algún nivel inferior siguiente. La habilidad para realizar los cambios netos de costo que ocurren en todas las acciones finales, conducen hacia una cota superior de terminación (esto es , el resultado más optimista de abrir una unidad de servicio libre, es dado como el costo de la configuración corriente, menos el ahorro máximo que puede resultar de alguna terminación). Si el límite inferior excede al beneficio el nodo puede ser analizado. Los autores diseñan un problema ficticio para probar el algoritmo.

Tcha y Lee [1984], extienden el trabajo hecho por Kaufman et.al. para el caso de multi-etapas (múltiple tamaño), y usan una formulación de cadenas de nodos. Aplican el procedimiento Dual-ascendente de *Bilde y Karup [1977]* y *Erlenkotter [1978]*, con ligeras modificaciones. Y con otros dos dispositivos, una simplificación de nodos y un procedimiento dual ascendente, les son útiles para acelerar la convergencia. El algoritmo fue probado en catorce problemas similares a los usados por Kaufman et.al. y fue mejor en términos de tiempo de ejecución y en número de nodos evaluados.

Van Roy [1986], presenta una implementación de la técnica de Descomposición Cruzada de él mismo *[1983]*, para resolver este problema. El método unifica la descomposición de Benders y la relajación Lagranjeana en un solo esquema, el cual resulta en una solución sucesiva para un problema de transporte y un problema del tipo (LSS). Con esta técnica logra resolver un conjunto de problemas prueba en un tiempo diez veces más rápido, que varias de las técnicas anteriores.

Cornuejols, Sridharan y Thizi [1991]. Se comparan desarrollos propuestos en la literatura sobre el problema de Localización de Planta con Restriciones. de Capacidad. Esta comparación se realiza con base en resultados teóricos y computacionales. Y el principal énfasis es sobre los diferentes tipos de relajación. En particular, se identifican relaciones de dominio entre los diferentes tipos de relajación encontrados en la literatura. Se comparan éstos y se establece que varias de esas relajaciones, pueden ser usadas para generar soluciones factibles heurísticas, que resultan ser mejores que las clásicas heurísticas, en términos de tiempo de computación y de calidad de la solución.

2.3 Problema de Localización con Restricciones Adicionales (LSCA)

Geoffrion y Mc Bride [1978], han aplicado la relajación Lagrangeana para una versión generalizada del problema. La generalización consiste en permitir cotas inferiores y superiores, en las restricciones de volumen para cada servicio. Tales restricciones adicionales son muy frecuentes en la práctica. Otro tipo de restricciones adicionales en que se pueden requerir son por ejemplo: De una lista de sitios candidatos para la localización, pueden ser incluidos varios lugares en la misma ciudad. Si la solución óptima favorece uno de esos sitios, puede ser no deseable abrir "uno o más" del conjunto, o al "menos uno" del conjunto, etc. Otro uso importante de las restricciones adicionales, es el caso donde la ubicación de los servicios contribuye a la demanda. Un análisis de mercado puede revelar que la participación está fuertemente correlacionada de alguna manera, con la localización de las unidades de servicio, de tal forma que, las metas de ventas pueden ser trasladadas a las restricciones adicionales. Por ejemplo, la estrategia de ventas puede requerir que la unidad de servicio sea localizada a una cierta distancia de los usuarios, para una cierta región de estudio.

Guignarad y Spielberg [1979]. En este trabajo se presenta un método de solución directo dual, que consiste de varias fases (cada una de ellas es esencial para algunos datos), para resolver una forma relajada fuerte del problema, con restricciones adicionales sobre las variables enteras. Se establece también, que la solución primal que es derivada de las condiciones de ortogonalidad y un algoritmo heurístico simple, son generalmente mucho mejor que aquellas obtenidas de un problema relajado en forma estándar, en el sentido de Lagrange.

Geoffrion y Mac Bride [1977]. La relajación Lagrangeana es estudiada en el contexto de este tipo de problemas. Se realiza un desarrollo geométrico y algebraico completo, de cómo y porqué la relajación Lagrangeana trabaja. Y se encuentra la aplicación para mejorar los procedimientos de cálculo para este tipo de problemas.

De esta forma, el resumen de los diferentes problemas considerados y sus autores, que se presenta en la figura (2), no proporciona un resumen de resultados computacionales, debido a la imposibilidad de realizar comparaciones entre problemas diferentes.

2.4 Áreas de Aplicación

Existen un gran número de situaciones en donde las organizaciones grandes y pequeñas, públicas y privadas, se enfrentan ante decisiones como: ¿donde localizar servicios?, ¿cuantos se deben localizar?, ¿qué capacidad deben tener cada uno de ello?, etc., situaciones que son posibles de analizar y resolver con los resultados teóricos y el algoritmo de solución, que se ha desarrollado en el presente trabajo de investigación. Algunas áreas típicas de aplicación donde se presentan este tipo de problemas son:

Servicios de Emergencia. Los servicios como estaciones de bomberos, policía, urgencias médicas, rescate de accidentes. Tienen el problema de localizar las unidades de respuesta, puesto que el tiempo de traslado es el componente más importante del criterio de costo.

Comunicación. Localizar centros de operación en una red de comunicaciones para optimizar los costos de transmisión. Localizar servicios de computación o de software en una red de computadoras, para minimizar los costos de transmisión y de almacenamiento anual, son el tipo de problemas que han sido resueltos.

Servicios Públicos. Localizar servicios públicos para maximizar el beneficio o minimizar el costo de usuario, también pueden ser formulado. Por ejemplo minimizar el costo de transporte de los habitantes de una región o colonia, mediante la ubicación de un centro comercial, un mercado, una oficina de pagos, etc.

Paradas de Autobuses y Buzones de Correos. El problema de localizar paradas de autobuses y buzones de correos, consiste en ubicar geográficamente a un conjunto de ellos, de tal forma, que la distancia máxima que el usuario debe recorrer, sea minimizada. O localizar el número mínimo de estos servicios, tal que, la distancia máxima que un usuario deba recorrer, sea menor a un determinado valor.

Servicios Educativos. El problema de localizar nuevas escuelas o de ampliar las ya existentes, en los diferentes niveles educativos, es sustancial y puede ser resuelto con esta técnica. Lo mismo que el problema de construir un edificio de salones en el campus de un colegio.

Aplicaciones Militares. Muchos problemas de logística militar consideran la localización de sitios de abastecimiento de municiones y armas. Y como el problema de traslado es un elemento importante en estos problemas, es fundamental la ubicación geográfica de los mismos.

En Interiores. Para el interior de edificios, casas, fabricas, almacenes, etc., también se tiene la necesidad de realizar algún tipo de localización como por ejemplo: Sitios para fuentes de agua y máquinas copiadoras en los edificios para las oficinas, un nuevo aparato para la cocina de una casa, un nuevo torno en un proceso de manufactura, un nuevo componente en un panel de control, un andén de carga en un almacén, etc.

2.5 Comparación

Como se ha establecido los problemas de localización son muy comunes en la práctica, además de que a través de ellos es posible considerar afirmaciones razonables del medio ambiente físico y de las decisiones asociadas con tales problemas, por lo que es posible estudiar combinación de situaciones como: economías de escala, varios periodos, multiservicio, tamaño variable de las unidades de servicio, etc., casos en donde estas disposiciones son la regla y no la excepción. Sin embargo, la sola inspección de la figura (3), muestra que estos casos han sido muy poco considerados y mucho menos combinación de ellos.

Históricamente en alguna clase de problemas, los modelos matemáticos iniciales son generalmente simplificación de situaciones del mundo real, por lo cual se hace necesario continuar la investigación, hasta que la adecuación del modelo quede demostrada, al comparar la solución matemática con los datos observados. Consideraciones sobre un modelo con restricciones adicionales como las indicadas anteriormente, parecen ser una siguiente etapa lógica y deben ser objeto de subsecuentes investigaciones.

El factor común en cada uno de esos casos más complicados, es el gran incremento de: *El número de variables enteras y el número de restricciones lineales, enteras-mixtas y solo enteras.* De esta forma, la cantidad de tiempo requerido para resolver un problema depende de ambas. Hasta ahora la más prometedora aproximación para resolver el problema de Localización de Servicios, parece ser:

- ***El uso de una estrategia de solución a través de la cual, se reduzca al problema original, en una secuencia relacionada de subproblemas:***
  i).- Todo entero
  ii).- Lineal
- ***Al uso de una técnica de enumeración implícita, como procedimiento básico para resolver el problema maestro.***

Estrategia de descomposición utilizada por casi todos los algoritmos anteriormente mencionados.

2.6 Áreas Potenciales de Mejoramiento

Dado el problema básico a ser considerado y la estrategia a seguir, el asunto crítico es identificar las áreas en las cuales existe potencial para desarrollar mejoras en los algoritmos que resuelven el problema de localización de servicios.

Como el mayor cuello de botella al aplicar la técnica descomposición de Benders, es debido a que el problema maestro debe ser resuelto repetidamente. Aún cuando el problema maestro sea uno de programación lineal, como sucede en la aplicación de la técnica de descomposición de Dantzig-Wolfe, en donde el algoritmo no se ejecuta bien, debido a las pobres propiedades de convergencia. Sin embargo, por investigaciones previas, existen varias formas para mejorar la ejecución de los algoritmos, las cuales pueden ser:

- *Hacer una buena selección de cortes iniciales.*

- *Modificar el problema maestro, para explotar la información disponible de soluciones del mismo.*
- *Reducir el número de problemas maestros a ser resueltos, por usar mecanismos alternativos para generar cortes.*
- *Formular el problema propiamente.*
- *Elegir buenos cortes, si existe selección, adicionarlo al problema maestro en cada iteración.*

A continuación se discutirán brevemente este tipo de mejoras.

Cortes Iniciales.- Estudios computacionales previos han demostrado que la selección inicial de cortes, tiene un gran efecto sobre la ejecución del algoritmo de Benders, aplicado al problema de localización de servicios y a otros problemas de optimización discreta. Los cortes iniciales, pueden ser generados de cierto conocimiento previo del problema que se está estudiando, o de métodos heurísticos que proporcionen "buenas" elecciones de variables enteras fijas. Desafortunadamente, existe muy poca teoría disponible para guiar algún tipo de análisis en la elección de cortes iniciales.

Modificar el Problema Maestro.- En el contexto de la descomposición de Dantzig-Wolfe, en investigaciones anteriores se han hecho avances para implementar el método de relajación, en forma más eficientemente al alterar el problema maestro. En otros intentos se ha restringido la solución del problema maestro en cada etapa, a estar centrada a soluciones previas, este procedimiento presenta a la solución, oscilando ampliamente entre iteraciones. Cuando existe una selección, se elige cuidadosamente entre múltiples óptimos del problema maestro, lo que puede resultar en una mejor convergencia.

Se puede modificar la descomposición de Benders, para explotar el anidado de restricciones inherentes a la secuencia de problemas maestros y así evitar resolver un problema entero completo en cada iteración. Esto al usar la técnica denominada Método ε-Óptimo, para resolver el problema maestro de Benders. La implementación de esta técnica, ha sido muy efectiva en la solución de problemas de localización con cierta clase de restricciones adicionales.

***Evitar el Problema Maestro** (Descomposición Cruzada).* Una alternativa para modificar el problema maestro, es reducir el número de éstos que deben ser resueltos.

Este método está diseñado para explotar simultáneamente la estructura primal y dual del problema, lo cual se realiza al usar dos diferentes tipos de restricciones, dando los subproblemas dual y primal. La descomposición cruzada iterativamente resuelve un subproblema Lagrangeano y un subproblema de Benders, y periódicamente el método resuelve un problema maestro lineal, que corresponde al dual Lagrangeano para garantizar la convergencia de la solución.

Mejorando la Formulación del Modelo.- En trabajos anteriores sobre programación entera, se ha enfatizado la importancia de la formulación del problema para mejorar la ejecución de las técnicas de descomposición y de otros algoritmos. Dos formulaciones diferentes del mismo problema, pueden tener idénticas soluciones factibles con diferentes características de cálculo. Por ejemplo, se pueden tener diferente problemas al aplicar la relajación Lagrangeana. Y preferir a uno más que al otro cuando se usen conjuntamente, con algoritmos como ramificación y acotamiento o descomposición de Benders. Puesto que el resultado visto puede ser esencial para asegurar el éxito en el cálculo.

Elegir Cortes Apropiados.- En muchos ejemplos la selección de cortes apropiados en cada iteración, puede mejorar significativamente el desempeño del algoritmo. Para los modelos de localización de servicios, el subproblema de Benders frecuentemente tiene múltiples soluciones óptimas, puesto que resulta ser uno de transporte lineal, el cual es reformulado por su degeneración. De previas investigaciones, se han obtenido algunos métodos y algoritmos para generar y elegir un corte, que en algún sentido sea "el mejor".

Como se mencionó al principio de ésta sección, el mayor "cuello de botella" al usar las técnicas de descomposición para resolver el problema de localización de servicios, es el cálculo repetido del problema maestro. Una estrategia de solución que evita el resolverlo continuamente, es la denominada ***Descomposición Cruzada***. La cual permite utilizarlo periódicamente, con el fin de garantizar la convergencia del algoritmo. Esto permitió a *Van Roy [1984]* desarrollar un algoritmo diez veces más rápido que los existentes.

Con el propósito de establecer un punto de partida para el trabajo de investigación que se pretende realizar, se utilizará el algoritmo más significativo que se ha desarrollado para resolver el problema de Localización con Restricciones de

Capacidad, debido a *Van Roy [1984]*, el cual propone una nueva estrategia para la solución del problema, basada en la unificación de la descomposición de Benders y la relajación Lagrangeana, en un mismo esquema. Estrategia que cuando se aplica al problema de localización, resulta en la solución sucesiva de dos subproblemas incorporando un proceso de ping-pong entre ellos. Además, con este enfoque se explota simultáneamente la estructura primal y dual del problema, lo que trae como consecuencia la reducción del número de problemas maestros que se deben resolver.

III. ESTRATEGIA DE DESCOMPOSICIÓN CRUZADA

Los problema discretos de Localización de Servicios presentan muchos retos para su optimización, tan solo por el tamaño, pueden ser muy difíciles de resolver ya que las aplicaciones del modelo con frecuencia requieren decenas de variables y de restricciones. Además, los modelos por si solos son complicados, puesto que la sola decisión básica de instalar o no instalar un servicio en los sitios candidatos, proporciona a los problemas de localización una compleja estructura combinatoria. Ya que si se tiene un problema con a lo más 30 sitios candidatos, pueden existir más de un millón de combinaciones potenciales para la localización de los servicios. De tal forma que, cuando se trata con problemas de gran tamaño esas complicaciones aumentan, por lo cual la programación matemática como la mayoría de las disciplinas, se ha apoyado fuertemente en varios conceptos claves como son: técnicas de acotamiento, teoría de dualidad y técnicas de descomposición. Fundamentos teóricos considerados el eje principal para muchos avances en programación matemática. Por lo cual, los problemas de optimización encontrados en la localización de servicios no han sido la excepción y se han constituido en un área muy fértil para las diversas ideas de la programación matemática que han servido como un estímulo más para los desarrollos generales en optimización.

En particular, los problemas de localización discretos contienen dos tipos de decisiones inherentes, como son: *donde localizar los servicios y cómo distribuir mejor la demanda hacia los servicios*, característica que los hace un atractivo campo para el uso de las técnicas de descomposición, ya que si la decisión discreta de localizar al servicio se ha realizado, el problema continuo de distribución generalmente es más fácil de resolver. Sin embargo, si no es posible explotar este hecho en el diseño de algoritmos de solución, el utilizar la descomposición aún puede ser muy atractivo, ya que si el problema de localización no estuviera complicado por la decisión discreta de la selección del sitio y fuera formulado como un problema de programación lineal (al relajar las restricciones de integralidad de las variables del problema), aún puede ser muy grande y difícil de resolver. Afortunadamente el problema de localización tiene un estructura especial que puede ser explotada por las técnicas de descomposición.

Cuando se utilizan técnicas de descomposición como Benders o Dantzig-Wolfe en la solución de problemas enteros-mixtos, el mayor "cuello de botella" es el debido al cálculo repetido del problema maestro, el cual es de una compleja estructura combinatoria. Una estrategia que permite resolver en forma parcial esta dificultad , es la denominada Descomposición Cruzada, la cual se utiliza como punto de partida en el presente trabajo de investigación.

El principio de Descomposición en su forma primal o dual, ha servido para elaborar algoritmos muy eficientes para problemas de programación entera-mixta. La técnica permite tomar ventaja de la estructura especial del problema al resolver una secuencia de subproblemas más simples y de ésta forma se explota la subestructura primal o dual del problema. En la siguiente figura se presenta el mapa general de transformaciones de la técnica de descomposición.

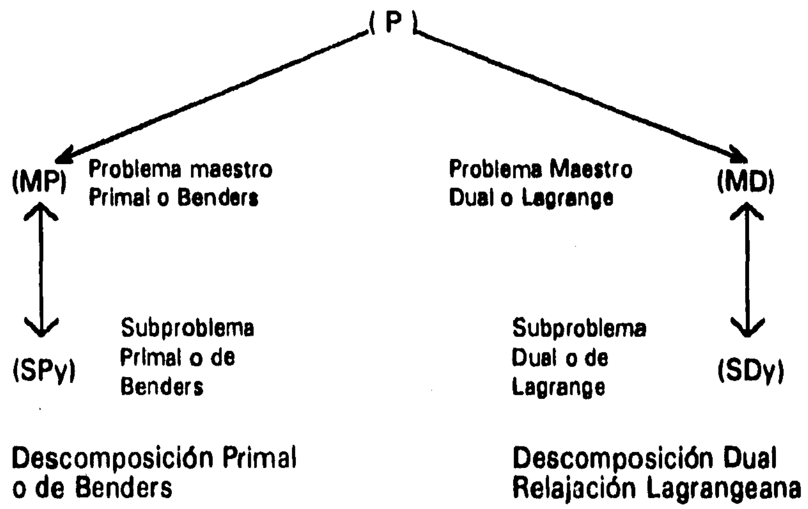


Fig. 4 Mapa de las Transformaciones de la Descomposición

En la programación matemática existen muchos problemas que tienen subproblemas primal y dual fáciles de resolver, un ejemplo es el denominado "Problema Simple de Localización de Servicios" *(LSS)*, el cual se puede reducir, al fijar las variables de decisión binarias, a un problema de transporte y de la otra forma, el subproblema dual de éste se reduce al relajar las restricciones de requerimiento de los usuarios, a un número de problemas del tipo "mochila" continuos *[Geoffrion, 1974]*.

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos de la estrategia de Descomposición Cruzada. Así como la base teórica que establece la relación que existe entre los principios de descomposición primal (Benders) y dual (relajación Lagrangeana), que son su base fundamental. Además se presentan y comparan los diferentes esquemas de relajación Lagrangeana, estableciendo la superioridad de la relajación Lagrangeana Separable, al obtener las mejores cotas. Por último, se establece una conceptualización económica del principio de descomposición.

3.1 Principio de Descomposición de Benders

Considerar el problema de programación entero-mixto siguiente:

$$
(P) \qquad \begin{array}{l} \underset{x \in S}{Min} \quad C\,x \\ s.a. \\ \quad A\,x \;\geq\; b, \\ \quad\quad x \geq 0, \end{array}
$$

donde x en un vector n-dimensional de valores reales, A es una matriz de orden mxn, C y b son vectores con dimensiones conformables. Sea S un subconjunto de R^n restringiendo algunos elementos de x a ser enteros. Cuando la matriz A es particionada con $n = n_1 + n_2$ y $m = m_1 + m_2$, el problema puede ser escrito como:

$$
(P) \qquad \begin{array}{l} \underset{x \in S}{Min} \quad C^1 x_1 + C^2 x_2 \\ s.a. \\ \quad A_1^1 x_1 + A_1^2 x_2 \;\geq\; b_1, \\ \quad A_2^1 x_1 + A_2^2 x_2 \;\geq\; b_2, \\ \quad\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}
$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1, A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{bmatrix}$$

con:

A_1 matriz de orden $m_1 xn$, A_2 matriz de orden $m_2 xn$, A^1 matriz de orden mxn_1 y A^2 matriz de orden mxn_2, A_i^j matriz de orden $m_i xn_j$, con $i = 1,2$ y $j = 1,2$.

Considerar la partición de A de tal forma que x_2 y $A_2 x \geq b_2$ sean las variables y restricciones denominadas "complicadas" de *(P)*. Entonces, la formulación del problema al fijar x_2, o la relajación del mismo al eliminar a $A_2 x \geq b_2$, son subproblemas más fáciles de resolver. Considere el conjunto S definido como:

$$S = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 \in Z\},$$

donde Z es el conjunto de números enteros. Además suponga que el conjunto $\{x \mid x \in S, A_1 x \geq b_1\}$, es no vacío y acotado.

Entonces de acuerdo con el mapa de las transformaciones de la descomposición, al fijar $x_2 \in Z$ se tiene:

$$\underset{x_2 \in Z}{Min} \left\{ \begin{array}{l} \underset{x_1 \geq 0}{Min.} \quad c^1 x_1 + c^2 x_2, \\ s.a. \\ \qquad A_1^1 x_1 \geq b_1 - A_1^2 x_2, \\ \qquad A_2^1 x_1 \geq b_2 - A_2^2 x_2, \\ \qquad\qquad x_1 \geq 0. \end{array} \right\}$$

Obteniendo el dual del problema interior, se tiene:

$$\underset{x_2 \in Z}{Min} \left\{ \begin{array}{l} Max. \quad u_1 (b_1 - A_1^2 x_2) + u_2 (b_2 - A_2^2 x_2) + C^2 x_2 \\ s.a. \\ \qquad u_1 A_1^1 + u_2 A_2^1 \leq C^1, \\ \qquad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

FALTA PAGINA

No. 37

violado en cada iteración. De esta forma, se generan los cortes necesarios y el algoritmo se detiene en un número finito de etapas, después de generar, en el peor de los casos todos los cortes. Con lo cual, la solución óptima exacta se encuentra.

3.1.1 Algoritmo de Descomposición de Benders

Considere el problema de programación entro mixto P formulado inicialmente.

Etapa 1. (Inicio): Seleccionar un valor entero no negativo para x_2, y hacer $Z_u = \infty$, $(X_0 = -\infty)$. E ir a la etapa 2.

Etapa 2. (Fase de programación lineal). Resolver el siguiente problema de programación lineal, considerando a la variable x_2 fija.

$$
\begin{aligned}
&Max. \quad Z_u = u_1\left(b_1 - A_1^2 x_2\right) + u_2\left(b_2 - A_2^2 x_2\right) + C^2 x_2 \\
&s.a. \\
&\qquad u_1 A_1^1 + u_2 A_2^1 \le C^1 , \\
&\qquad\qquad u_1 \ge 0 ,\ u_2 \ge 0 .
\end{aligned}
$$

El problema anterior tiene solución óptima x_2^*, si y solo si, $u\left(b - A^2 x_2^*\right) \le 0$ para todo $u \ge 0$, para el cual $\left(uA^1 \le 0\right)$ sucede. Con lo que se obtienen los valores de u_1, u_2 que son puntos extremos de T_{PA} y $Z_u = Z_u^{'}$. E ir a la etapa 3.

Etapa 3. (Fase de programación entera). Con los valores de u_1, u_2 obtenidos de la etapa anterior, resolver el problema maestro primal entero *(MP)*.

$$
\begin{aligned}
&\underset{x_2 \in Z, x_0}{Min} \quad X_0 \\
&s.a. \\
&u_{1t}\left(b_1 - A_1^2 x_2\right) + u_{2t}\left(b_2 - A_2^2 x_2\right) + C^2 x_2 - X_0 \le 0 , \qquad t \in T_{PA}
\end{aligned}
$$

Una condición necesaria y suficiente para que (X_0, x_2) sea solución óptima del problema anterior y entonces del problema *(P)* original, es que satisfaga todas las restricciones del mismo. Para esto, es suficiente con resolver el problema lineal de la etapa 2. Es decir, sea x_2^*, solución óptima finita del problema dual de la etapa 2, entonces $u(b - A^2x_2^*) \le 0$ para toda $u \ge 0$ para la cual $(uA^1 \le 0)$, entonces es posible establecer que: $C^2x_2 + u(b - A^2x_2) - X_0 \le 0$ es decir se ha obtenido un vértice u del politope restringido $U = \{u | uA^1 \le C_1, u \ge 0\}$ del problema lineal de la etapa 2. Por lo cual es posible escribir, $C^2x_2 + u_t(b - A^2x_2) - X_0 \le 0$ para $t = 1,...,q$ el conjunto de vértices de U. Entonces (X_0, x_2) es la solución óptima para el problema maestro, con lo que se obtiene otro valor para $x_2 = x_2'$ y el mínimo de $X_0 = X_u'$. E ir a la etapa 4.

Etapa 4 . (Terminación). Si $X_0' < Z_u'$ regresar a la etapa 2. De otra forma $X_0' = Z_u'$ y x_2' es óptima, en este caso resolver el subproblema lineal de Benders (SP_x) y obtener el valor óptimo de x_1 . Con lo que (x_2', x_1) y $X_0 = Z_u$ resuelven el problema entero mixto.

3.1.2 Convergencia del Algoritmo de Benders

Teorema 3.1. (Convergencia finita). El procedimiento iterativo anterior termina en un número finito de iteraciones, con la información de que *(P)* es no factible o no acotado o con la solución óptima para *(P)*.

Prueba. Si $X_0' = Z_u'$ entonces x_2' es solución óptima del problema *(P)*.

De otra forma, el algoritmo termina en un número finito de interacciones. Para ver esto, considere por simplificación que el poliedro convexo U es acotado, entonces tendrá un número finito de puntos extremos y será suficiente con establecer que cada vez que el algoritmo pase por la etapa 2, se produce un nuevo vértice $u_t \in U$ hasta obtener la solución óptima. Entonces considere que $X_0' \ne Z_u'$ y que la $\bar{u}_t$ obtenida de la solución del problema lineal de la etapa 2, produce para la solución corriente $(\bar{X}_0, \bar{x}_2)$ que: $C^2\bar{x}_2 + \bar{u}_t(b - A^2\bar{x}_2) - \bar{X}_0 > 0$ lo que muestra que la solución actual $(\bar{X}_0, \bar{x}_2)$ del problema maestro no satisface la restricción $C^2x_2 + \bar{u}_t(b - A^2x_2) - X_0 \le 0$ y por lo tanto la restricción $C^2x_2 + \bar{u}_t(b - A^2x_2) \le X_0$, se debe aumentar al problema maestro. De esta forma a menos que la solución óptima sea encontrada, es decir $C^2\bar{x}_2 + \bar{u}_t(b - A^2\bar{x}_2) - \bar{X}_0 \le 0$ un nuevo punto extremo es generado cada vez que el problema de la etapa 2 es resuelto. Por lo tanto, en el peor de los casos todos los puntos extremos son enumerados y el problema es resuelto, con lo cual se puede

establecer que el algoritmo converge. Sin embargo es conocido que en el óptimo, el número de restricciones consideradas, nunca excederá a $m+1$, donde m es el número de variables x_2.

3.2 Principio de Descomposición Dual Lagrangeana (Dantzig-Wolfe)

Considerar nuevamente el problema *(P)* originalmente planteado como:

$$
(P)\quad
\begin{array}{l}
\underset{x \in S}{Min} \;\; C^1 x_1 + C^2 x_2 \\
s.a. \\
\quad A_1^1 x_1 + A_1^2 x_2 \geq b_1 , \\
\quad A_2^1 x_1 + A_2^2 x_2 \geq b_2 , \\
\quad\quad x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 .
\end{array}
$$

Donde

$$
A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \left[A^1 , A^2 \right] = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{bmatrix}
$$

con:

A_1 matriz de orden $m_1 x n$, A_2 matriz de orden $m_2 x n$, A^1 matriz de orden $m x n_1$ y A^2 matriz de orden $m x n_2$, A_i^j matriz de orden $m_i x n_j$, con $i = 1,2$ y $j = 1,2$.

Entonces paralelamente a la aproximación de Benders, es posible obtener el proceso de descomposición dual por el método de Lagrange. De esta forma, el problema dual Lagrangeano de *(P)* con respecto a la restricción $A_1^2 x_1 + A_2^1 x_2 \geq b_2$ puede ser establecido como:

$$
\underset{u_2 \geq 0}{Max.} \left\{
\begin{array}{l}
\underset{x \in S}{Min.} \;\; C^1 x_1 + C^2 x_2 + u_2 \left(b_2 - A_2^1 x_1 - A_2^2 x_2 \right), \\
s.\ a. \\
\quad A_1^1 x_1 + A_1^2 x_2 \geq b_1
\end{array}
\right\},
$$

El que simplificado puede quedar como:

$$\underset{u_2 \geq 0}{Max.} \left\{ \begin{array}{l} \underset{x \in S}{Min.} \quad Cx + u_2(b_2 - A_2 x) \\ s.\ a. \\ \qquad A_1 x \geq b_1 \end{array} \right\},$$

el cual puede ser escrito como:

$$\underset{u_2 \geq 0}{Max.} \quad Inf. \{ C^2 x_t + u_2(b_2 - A_2 x_t) \ : t \in T_D \}.$$

donde t para $t \in T_D$ son los puntos extremos del contorno convexo del subproblema dual. Entonces el problema dual de *(P)* se puede establecer como:

$$\begin{array}{ll} \underset{u_2 \geq 0, u_0}{Max.} & u_0 \\ s.\ a. & \\ & Cx_t + u_2(b_2 - A_2 x_t) \geq u_0 \ , \ t \in T_D \ , \end{array}$$

que resulta ser el problema maestro dual Lagrangeano, *(MD)*. Y el correspondiente subproblema dual queda como:

$$(SD_{u_2}) \qquad \begin{array}{l} \underset{x \in S}{Min.} \quad Cx + u_2(b_2 - A_2 x) \\ s.\ a. \\ \qquad A_1 x \geq b_1 \ . \end{array}$$

El subproblema dual (SD_{u_2}) es comúnmente llamado el problema Lagrangeano, las restricciones del problema maestro dual *(MD)* son los cortes duales.

Teorema 3.2 [Everett 1963]. Considere al problema original *(P)* escrito como:

$$\begin{aligned} & Min. \quad C\,x \\ & s.a. \\ & \qquad A_1\,x_1 \geq b_1\,, \qquad\qquad (P) \\ & \qquad A_2\,x_2 \geq b_2\,, \\ & \qquad x_1 \geq 0\,,\; x_2 \geq 0 \;\; y \;\; entera\,. \end{aligned}$$

Sea λ un vector no negativo y conformable denominado "multiplicador de Lagrange", entonces el problema puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} & Min. \quad C\,x + \lambda\left(b_2 - A_2\,x_2\right) \\ & s..a. \\ & \qquad A_1\,x_1 \geq b_1\,, \qquad\qquad (LR_\lambda) \\ & \qquad x_1 \geq 0\,,\; \lambda \geq 0\,. \end{aligned}$$

Por conveniencia, suponer que *(P)* es factible y que el conjunto $S = \{x_1 | A_1 x_1 \geq b_1, x_1 \geq 0\}$ de soluciones factibles es finito y acotado. Entonces si existe un $\lambda \neq 0$, tal que, la solución óptima con (x_1^*, x_2^*) hace que $b = A_2 x_2^*$, el problema *(P)* ha sido resuelto.

Prueba. Sean (x_1^*, x_2^*) la solución mínima para el problema (LR_λ), entonces se tiene que:

$$Cx^* + \lambda\left(b - A_2 x_2^*\right) \leq Cx + \lambda\left(b - A_2 x_2\right)$$

Por lo tanto, para toda $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ *y entera*, se cumple que:

$$Cx^* \leq Cx + \lambda\left(A_2 x_2^* - A_2 x_2\right).$$

Entonces para todas las soluciones no negativas se tiene que, $A_2 x_2^* \leq A_2 x_2$ y la desigualdad anterior se cumple. Pero para estas soluciones $A_2 x_2^* - A_2 x_2 \leq 0$, con lo que se tiene que, $Cx^{*} \leq Cx$ puesto que $\lambda \geq 0$. Entonces, (x_1^{*}, x_2^{*}) resuelven al problema *(P)*.

El teorema indica que si los multiplicadores $\lambda \geq 0$ son seleccionados de tal forma que $b = A_2 x_2^{*}$, es posible solucionar el problema *(P)* sin la restricción de desigualdad, con lo que el problema resulta más fácil de resolver. Sin embargo, la dificultad con la relajación Lagrangeana, consiste en encontrar los multiplicadores $\lambda \geq 0$ tales que, $A_2 x_2^{*} = b$.

3.2.1 Relación con el principio de Descomposición de Dantzig-Wolfe

Por otra parte, un aspecto muy interesante es el hecho de que el dual del problema *(MD)* tiene la forma familiar del problema de Dantzig-Wolfe. Para establecer esto, considerar las siguientes definiciones y teorema.

Definición. "Interior relativo" de un conjunto convexo X en R^n , es el interior que resulta cuando X es considerado como subconjunto de su contorno afín.

Definición. "Fase" de un conjunto convexo X, en un subconjunto convexo X' de X, tal que, cada segmento lineal (cerrado) con un punto en el interior relativo de X' tiene ambos puntos finales en X'.

Teorema 3.3 [Rockafellar, 1970]. Sea X un conjunto convexo y compacto en E^n. Sea $E(X)$ el conjunto de puntos extremos y $C[E(X)]$ el contorno convexo de $E(X)$. Entonces $C[E(X)] = X$.

Prueba. El teorema es trivial si la dimensión de $X \leq$ (en cuyo caso $X = \emptyset$ o es un solo punto). Por inducción suponer que el teorema es verdadero para todos los conjuntos convexos cerrados y acotados de dimensión más pequeña que $m > 1$, puesto que X es *m-dimensional*. Entonces:

- Por definición se tiene que $X \supseteq C[E(X)]$, ya que los puntos extremos $E(X)$ pertenecen a X y porque X es contorno convexo de su frontera relativa.

- Ahora sea $X \subseteq C[E(X)]$, entonces cada punto del interior relativo de X pertenece al contorno convexo $C[E(X)]$. Es decir, un punto x del interior relativo está contenido en el interior relativo de alguna "fase" X', diferente de X. Esta X' es cerrada y acotada por suposición (puesto que X es cerrado y acotado) y tiene dimensión más pequeña que X. Entonces, el teorema es válido para X' por el supuesto de inducción. Así que $x \in C[E(X')]$, donde $E[X']$ es el conjunto de puntos extremos de X'. Y como $X' \subset X$ se tiene que $x \in C[E(X)]$.

Ahora para establecer la relación que existe con el principio de descomposición de Dantzig-Wolfe, considere el problema maestro dual *(MD)* escrito como:

$$
\begin{aligned}
&\underset{u_2 \geq 0, u_0}{Max.} \quad u_0 \\
&s.\,a. \\
&\qquad C x^t + u_2 (b_2 - A_2 x^t) \geq u_0 , \\
&\qquad\qquad t \in T_D
\end{aligned}
$$

el dual de *(MD)* se puede establecer como:

$$
\begin{aligned}
&\underset{x \in S}{Min} . \quad C x \\
&s.\,a. \\
&\qquad A_2 x \geq b_2 ,
\end{aligned}
$$

sean $x = \sum_j \lambda_j x_j$, $\sum_j \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$, entonces se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&Min. \quad C \sum_j \lambda_j x_j , \\
&s.\,a. \\
&\qquad A_2 \sum_j \lambda_j x_j \geq b_2 , \\
&\qquad \sum_j \lambda_j = 1 , \\
&\qquad \lambda_j \geq 0,
\end{aligned}
$$

definiendo a:

$$p_j = A_2 x_j \quad y \quad f_j = C x_j ,$$

entonces se tiene la forma familiar del problema maestro de Dantzig-Wolfe

$$\begin{aligned} Min \ . \ & \sum_j f_j \lambda_j \\ s.\ a. \ & \\ & \sum_j p_j \lambda_j = b \quad , \\ & \sum_j \lambda_j = 1 \quad , \\ & \lambda_j = 0 \ , \ \forall \ j . \end{aligned}$$

Ambos problemas, el maestro dual Lagrangeano y el maestro de Dantzig-Wolfe han sido importantes para la formulación y construcción de algoritmos para resolver el problema dual, siendo los desarrollos los más populares: *(i)* método de subgradiente, *(2)* implementaciones del método simplex usando técnicas de generación de columnas, *(3)* métodos de ajuste de multiplicadores.

3.3.- Principio de Descomposición Cruzada

Es conocida la relación que existe entre el principio de descomposición de Benders y de Dantzig-Wolfe, estrategias que son consideradas duales una de otra. Más aún, es posible establecer que el subproblema dual Lagrangeano es un problema maestro relajado en la descomposición de Benders. De igual forma, el subproblema de Benders puede ser considerado como un problema maestro relajado para la descomposición dual. De esta forma, la idea básica de la descomposición cruzada es usar ambos subproblemas primal y dual, en un solo esquema de descomposición. El procedimiento general puede ser representado por el siguiente diagrama.

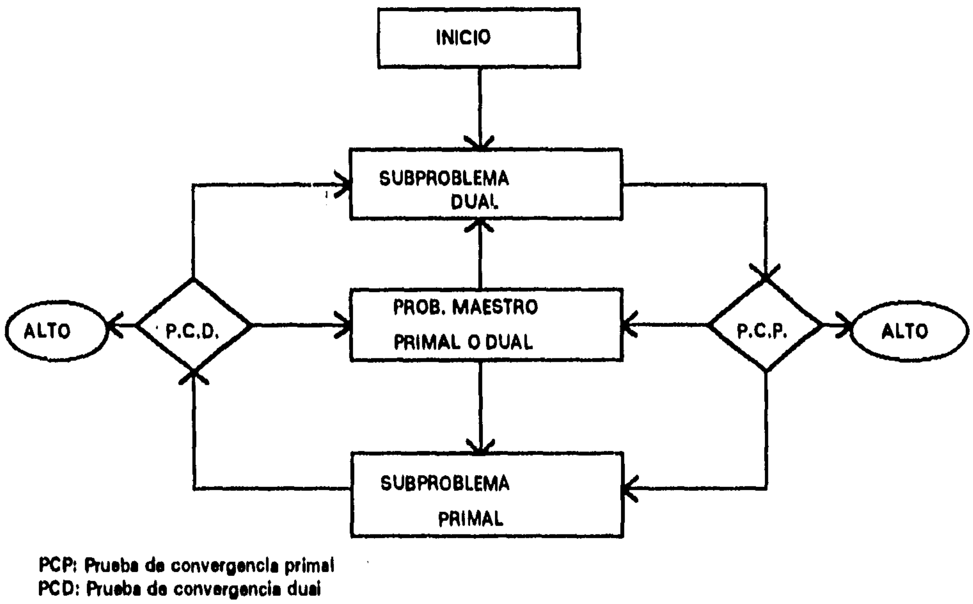


Fig. 5 Proceso General de Descomposición Cruzada

Para mostrar lo anterior, es necesario establecer el siguiente concepto de equivalencia.

Definición 3.1. Un problema Q es equivalente al problema Q' con respecto a un subconjunto Z (primal o dual) de variables, si la solución óptima de Q para Z , es óptima en Q' y viceversa.

Ejemplos del concepto de equivalencia anterior pueden ser, el problema *(P)* y el problema maestro *(MP)* en la descomposición primal, con respecto a la variable x_2 (por construcción). Similarmente *(D)* y *(MD)* son equivalentes con respecto a la variable u_2 . Además como la definición anterior involucra variables primales y duales, es posible considerar en forma más general este concepto de equivalencia; es decir, un problema primal y su dual son equivalentes con respecto a algún

Proposición 3.1. El problema maestro primal $\left(MP_{u_2}\right)$ es equivalente al problema $\left(SD_{u_2}\right)$ con respecto a x_2 y los valores de las funciones objetivo son iguales $v\left(MP_{u_2}\right)=v\left(SD_{u_2}\right)$.

Prueba. El problema (MP_{u_2}) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} &\underset{x_2 \in Z, x_0}{Min.}\ x_0, \\ &s.\ a. \\ &\quad u^t b + (C^2 - u^t A^2) x_2 \le x_0,\ t \in T_{u_2}, \end{aligned}$$

o como:

$$\underset{x_2 \in Z}{Min.}\ \underset{}{Sup.}\ \{u^t b + (C^2 - u^t A^2) x_2,\ t \in T_{u_2}\},$$

o también,

$$\underset{x_2 \in Z}{Min.} \left\{ \begin{array}{l} \underset{u_1 \ge 0}{Max.}\ u^t b + (C^2 - u A^2) x_2, \\ s.\ a. \\ \quad u_1 A_1^1 \le C^1 - u_2 A_2^1 \end{array} \right\},$$

puesto que la solución óptima del problema de maximización interior, es una solución básica que corresponde a un punto extremo del poliedro y además se tienen fijas a x_2 y u_2, el dual del problema interior queda como:

$$\underset{x_2 \in Z}{Min.} \left\{ \begin{array}{l} \underset{x_1 \ge Z}{Min.}\ (C^1 - u_2 A_2^1) x_1 + u_2 b_2 + (C^2 - u_2 A_2^2) x_2 \\ s.\ a. \\ \quad A_1^1 x_1 \le b_1 - A_1^2 x_2 \end{array} \right\}$$

que resulta ser (SD_{u_2}) con x_2 fija,

$$\begin{aligned} &Min.\ \ Cx + u_2(b - A_2 x) \\ &s.a. \\ &\quad A_1^1 x_1 \le b_1 - A_1^2 x_2, \\ &\quad\quad x_1 \ge 0. \end{aligned}$$

Paralelamente a la proposición anterior, se tiene el uso del subproblema de Benders $\left(SP_{x_1}\right)$ como un problema maestro para la descomposición dual. Para lo cual considere la siguiente proposición:

***Proposición** 3.2.* El problema maestro dual $\left(MD_{x_1}\right)$ es equivalente al subproblema primal $\left(SP_{x_1}\right)$ con respecto a u_2 y los valores de las funciones objetivo son iguales $v\left(MD_{x_1}\right) = v\left(SP_{x_1}\right)$.

Prueba. El problema $\left(MD_{x_1}\right)$ puede ser escrito de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} &\underset{u_2 \geq 0,\, u_0}{Max.} \quad u_0 \\ &s.\ a. \\ &\qquad C x^t + u_2\left(b_2 - A_2 x^t\right) \geq u_0 \ , \quad t \in T_{x_1} , \end{aligned}$$

o como,

$$\underset{u_2 \geq 0}{Max.} \quad Inf\left\{C x^t + u_2\left(b_2 - A_2 x\right), \quad t \in T_{x_1}\right\},$$

o también,

$$\underset{u_2 \geq 0}{Max} \cdot \left\{\begin{array}{l} \underset{x_1 \geq 0}{Min} \quad C x + u_2\left(b_2 - A_2 x\right), \\ s.\ a. \\ A_1^1 x_1 \geq b_1 - A_1^2 x_2 , \end{array}\right\}$$

puesto que la solución óptima del problema de minimización interior, es un punto extremo de la región factible obteniendo de la solución del dual del problema interior con u_2 y x_2 fijos, es posible escribir a $\left(MD_{x_1}\right)$ como:

$$\begin{aligned} &\underset{u \geq 0}{Max.} \cdot \quad C^2 x_2 + u_2 b_2 - A_2^2 x_2 + u_1\left(b_1 - A_1^2 x_2\right) \\ &s.\ a. \\ &\qquad u_1 A_1^1 \leq C^1 - u_2 A_2^1 , \end{aligned}$$

o también como,

$$\begin{aligned} &\underset{u \geq 0}{Max.} \quad C^2 x_2 + ub - uA^2 x_2 \\ &s.\ a. \\ &\qquad uA^1 \leq C^1, \end{aligned}$$

el cual es el problema dual de:

$$\begin{aligned} &\underset{x_1 \geq 0}{Min.} \quad C^2 x_2 + C^1 x_1 \\ &s.\ a. \\ &\qquad A^1 x_1 \geq b - A^2 x_2 \end{aligned}$$

que resulta ser $\left(SP_{x_2}\right)$.

3.3.1 Algoritmo de Descomposición Cruzada

El algoritmo de descomposición cruzada puede ser formalizado con las siguientes etapas.

Etapa 1: (Inicio) Seleccionar $u_2^1 \geq 0$. Y hacer $Z_P = (+\infty)$ y $Z_D = (-\infty)$.

Etapa 2: (Subproblema dual) Resolver el problema Lagrangeano $\left(SD_{u_2^k}\right)$; sea x^k una solución óptima, adaptar Z_D si $Z_D <$ *solución* $\left(SD_{u_2^k}\right)$. Terminar, o ir a la etapa 4b, o hacer $x_2^{k+1} = x_2^k$ e ir a la etapa 3.

Etapa 3: (Subproblema primal) Resolver el subproblema de Benders $\left(SP_{x_2^k}\right)$; sea u^k una solución dual óptima; adaptar Z_P , si $Z_P >$ *solución* $\left(SP_{x_2^k}\right)$. Terminar, o ir a la etapa 4a, o hacer $u_2^{k+1} = u_2^k$ e ir a la etapa 2.

Etapa 4: (Problema Maestro). (a).- Resolver *(MD)*; sea u_2^{k+1} una solución óptima. Ir a la etapa 2. O
(b).- Resolver *(MP)*; sea x_2^{k+1} una solución óptima. Ir a la etapa 3.

3.3.2- Convergencia del Algoritmo de Descomposición Cruzada

En la sección anterior se ha presentado la relación que existe entre la descomposición primal (Benders) y la dual (vía relajación Lagrangeana), resultados que son la base para la estrategia de Descomposición Cruzada. También se estableció, que los subproblemas (SP_{x_2}) y (SD_{u_2}) pueden ser considerados problemas maestros uno del otro. Y lo que queda por considerar, son las condiciones bajo las cuales el problema *(P)* puede ser resuelto, por solamente iterar entre ambos subproblemas.

Lema 3.1.

i. Sea u° solución dual óptima de (SP_{x_2}) y x^{+} una solución óptima de (SD_{u_2}). Entonces $x_2^{+} \neq x_2^{\circ}$ a menos de que sus valores objetivo sean iguales $v(SP_{x_2^{\circ}}) = v(P)$.

ii. Sea x° solución óptima de (SD_{u_2}) y u^{+} solución dual óptima de (SP_{x_2}). Entonces $u_2^{+} \neq u_2^{\circ}$ a menos que sus valores objetivo sean iguales $v(SD_{u_2^{\circ}}) = v(P)$.

Prueba.

i. Suponer que lo opuesto sucede, $v(SP_{x_2^{\circ}}) > v(P)$ y que $x_2^{+} = x_2^{\circ}$. Entonces como u° es solución dual óptima de (SP_{x_2}), u_2° será óptima en $MD_{x_2^{\circ}}$ por la proposición *(3.2)* y el hecho de que, $\underbrace{Cx^{+} + u_2^{\circ}(b_2 - A_2 x^{+})}_{Dual\ de\ SP_{x_2^{\circ}}} \geq v(SP_{x_2^{\circ}}) = v(MD_{x_2^{\circ}})$.

Lo cual contradice que x^{+} sea solución óptima de $(SD_{u_2^{\circ}})$, puesto que,
$Cx^{+} + u_2^{\circ}(b_2 - A_2 x^{+}) = v(SD_{u_2^{\circ}}) \leq v(P) \leq v(SP_{x_2^{\circ}})$,

ii. Suponer que lo contrario sucede, $v(SD_{u_2^{\circ}}) < v(P)$ y que $u_2^{+} = u_2^{\circ}$. Entonces como x° es una solución óptima de $(SD_{u_2^{\circ}})$ y por la proposición (3.1) también será óptima en $(MD_{x_2^{\circ}})$ así que, $\underbrace{u^{+}b + x_2^{\circ}(C^2 - u^{+}A^2)}_{Dual\ de\ SD_{u_2^{\circ}}} \leq v(SD_{u_2^{\circ}}) = v(MP_{u_2^{\circ}})$

Lo cual contradice que u^{+} sea una solución óptima de (SP_{x_2}), entonces,
$u^{+}b + x_2^{\circ}(C^2 - u^{+}A^2) = v(SP_{x_2^{\circ}}) \geq v(P) \geq v(SD_{u_2^{\circ}})$. Y la prueba termina.

Ahora bien, considerar que se está iterando entre los subproblemas es decir, se están resolviendo consecutivamente los subproblemas primal y dual: $\left(SP_{x_2^k}\right),\left(SD_{u_2^{k+1}}\right),\left(SP_{x_2^{k+2}}\right),\left(SD_{u_2^{k+3}}\right),\left(SP_{x_2^{k+4}}\right),\ldots$ con lo que se puede establecer que **no puede haber duplicidad** dentro de una serie de cuatro iteraciones, ya que por construcción del problema y por el *Lema 3.1*, se tiene que:

$$x_2^{k+2} = x_2^{k+1} \neq x_2^k .$$

De esta forma, solo puede ser posible que $x_2^{k+3} = x_2^k$ y entonces el subproblema $\left(SP_{x_2^{k+4}}\right)$ con x_2^{k+4}, será igual a $\left(SP_{x_2^{k+3}}\right)$ con x_2^{k+3} y podrá duplicar a $\left(SP_{x_2^k}\right)$, y lo mismo sucede para las variables duales.

El siguiente *Lema* dá las condiciones necesarias para mejorar los valores de la solución corriente, donde T_D, T_P son los conjuntos de cortes duales y primales, respectivamente y $v(\bullet)$ indica la solución del problema, además de que $\bar{v}_{(\bullet)}$ indica la solución corriente.

Lema 3.2.

i. Si $u_2 \geq 0$ satisface $v\left(SD_{u_2}\right) > \bar{v}_D$ entonces,

$Cx^t + u_2\left(b_2 - A_2 x^t\right) \geq \bar{v}_D , \quad t \in T_D$

ii. Si $x_2 \in Z$ satisface $\left(SP_{x_2}\right) < \bar{v}_P$, entonces;

$u^t b + x_2\left(C^2 - u^t A^2\right) < \bar{v}_P , \quad t \in T_P .$

Prueba.

i. Como x^t es factible en $\left(SD_{u_2}\right)$ para algún u_2 seleccionado, se tiene que:

$Cx^t + u_2^*\left(b_2 - A_2 x^t\right) \geq v\left(SD_{u_2}\right), \quad t \in T_D ,$

y como $v\left(SD_{u_2}\right) > \bar{v}_D$, la prueba termina, $\left(\bar{v}_D = \textit{valor de la solución dual corriente}\right)$.

ii. Como u^t es factible en el dual de $\left(SP_{x_2}\right)$, para algún x_2 seleccionado, se tiene que:

$u^t b + x_2\left(C^2 - u^t A^2\right) \leq v\left(SP_{x_2}\right), \quad t \in T_D$

y como $v\left(SP_{x_2}\right) < \bar{v}_P$ por suposición, entonces la prueba termina, $\left(\bar{v}_P = \textit{valor de la solución primal corriente}\right)$.

El *Lema 3.2* garantiza que la estrategia de Descomposición Cruzada no se ciclará en la etapa de solución de los subproblemas. Y el hecho de que el procedimiento de Descomposición Cruzada es finito, se puede establecer con la siguiente proposición.

***Proposición** 3.3.* El algoritmo generado de la estrategia de Descomposición cruzada, es finito y resuelve a (P).

Prueba. La prueba se establece usando los *lemas (3.1)*, *(3.2)* y el hecho de que, los algoritmos de descomposición en su forma *"pura"*, son finitos.

3.4.-Consideraciones Generales sobre la Relajación-Lagranjeana

Dado un problema de programación entero-mixto con dos o más conjuntos de restricciones, tal que los problemas relajados con alguno de esos conjuntos de restricciones son relativamente más fáciles de resolver. Es posible definir una relajación Lagrangeana que lo descomponga en dos o más subproblemas, cada uno sobre un conjunto de restricciones. La técnica usada consiste en introducir una o más copias del vector de variables de decisión, usar una de esas copias en cada conjunto de restricciones y dualizar la condición de identidad.

Este nuevo esquema es interesante ya que los subproblemas Lagrangeanos contienen a todas las restricciones originales, mientras que la relajación convencional inevitablemente pierde al menos, a uno de los conjuntos de restricciones especialmente estructurados.

Antes de establecer la superioridad de la relajación Lagrangeana Separable, es importante considerar los siguientes conceptos fundamentales:

3.4.1. Relajación para Problemas de Optimización

Sean los problemas:

$$(P) \quad Max. \ \{f(x) | x \in X\} \quad y$$

$$(RP) \quad Max. \ \{g(x) | x \in Y\},$$

se dice que (RP) es una relajación del problema (P) si cumple:

i) $Y \supseteq X$,

ii) $\forall x \in X, \ g(x) \geq f(x)$,

por lo tanto, $v(RP) \geq v(p)$.

Gráficamente el concepto de relajación se puede representar como en la siguiente figura.

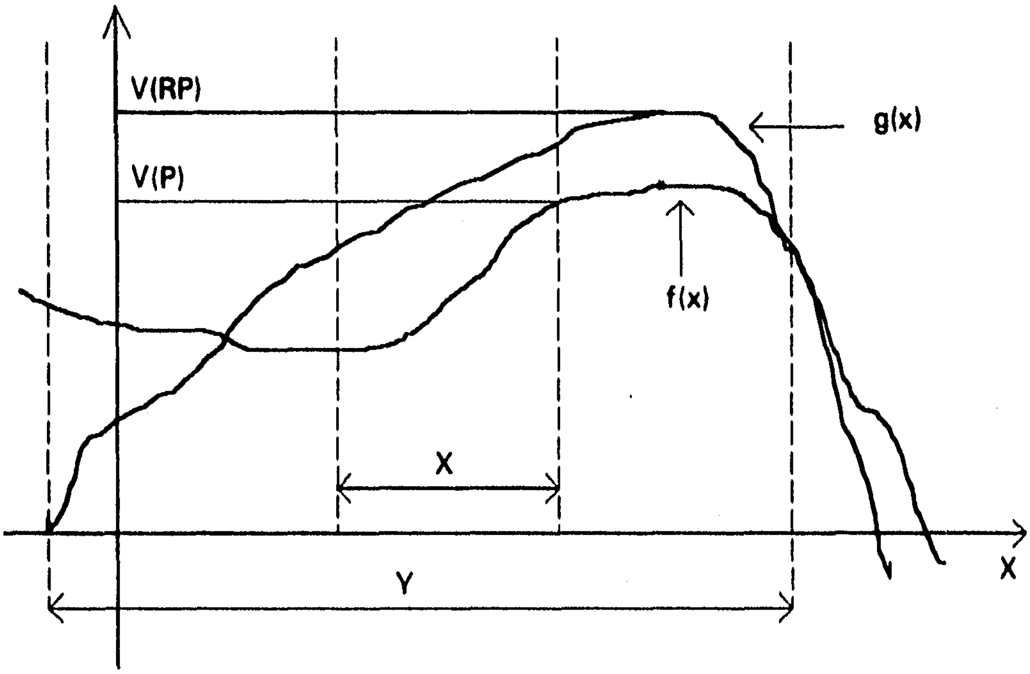


Fig. 6 El concepto de relajación

3.4.2.-Relajación Lagrangeana para Problemas de Optimización

Sea el problema

$$(P) \qquad \underset{x}{Max}.\ \{f\,x \mid Ax \le b\,, Cx \le d\,,\ x \in X\}.$$

Si se conoce como resolver al siguiente problema,

$$\underset{x}{Max}.\ \{f\,x \mid Cx \le d\,,\ x \in X\}$$

es posible construir una **Relajación Lagrangeana de** *(P)*, tal que:

$$(LR_\lambda) \qquad \underset{x}{Max}.\{f\,x + \lambda(b - Ax) \mid Cx \le d\,,\quad x \in X\},$$

donde (LR_λ) es una relajación de *(P)* si cumple con:

i) $FS(LR_\lambda) \supseteq FS(P)$,

ii) $\forall \quad x \in FS(P),\ \ f\,x + \lambda(b - Ax) \ \ge\ fx$,

por lo tanto,

$$v(LR_\lambda) \ge v(P), \quad para\ \forall\ \lambda \ge 0.$$

Donde (LR*)* es llamado el **dual Lagrangeano, tal que:**

$$v(LR) = \underset{\lambda \ge 0}{Min}.\, v(LR_\lambda)$$

3.4.3.-Interpretación Geométrica

Una clara interpretación desde el punto de vista geométrico, de la equivalencia entre la optimización de la descomposición dual Lagrangeana y la función objetivo primal, sobre la intersección de los contornos convexos de sus conjuntos de restricciones *[Guignard, 1994]*, puede ser ilustrada como sigue.

Sea el problema con relajación primal definido como:

$$(PR) \qquad \underset{x}{Max.}\ \{fx \mid Ax \le b\ ,\ x \in Co\{x \in X \mid Cx \le d\}\}$$

entonces, $v(LR) = v(RP)$

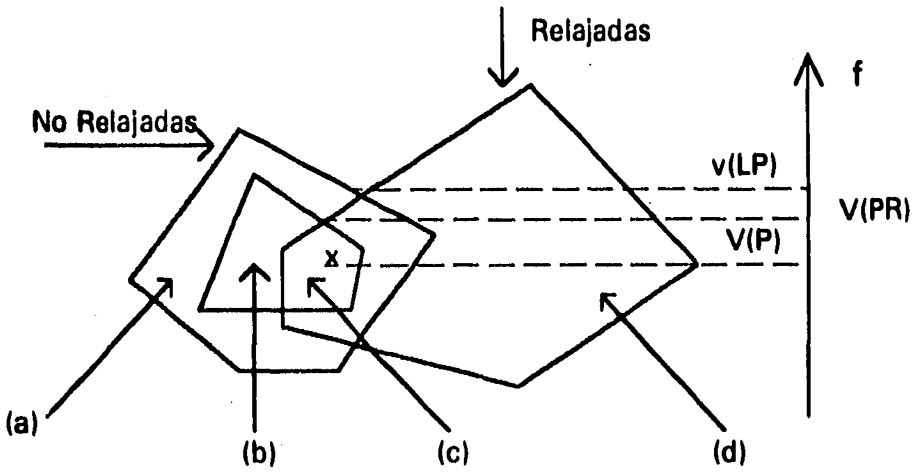


Fig. 7 Interpretación geométrica de la relajación

Donde:

$(a).-\{x \mid Cx \le d\}$,

$(b).-Co\{x \in X \mid Cx \le d\}$,

$(c).-\{x \mid Ax \le b\} \cap Co\{x \in X \mid Cx \le d\}$,

$(d).-\{x \mid Ax \le b\}$.

Si $Co\{x \in X \mid Cx \le d\} = \{x \mid Cx \le d\}$, entonces $v(P) = v(RP) = v(LR) = v(LP)$.

Se dice que si *(LR)* tiene la **Propiedad de Integralidad** *[Geoffrion, 1974]*, entonces la cota generada por la relajación Lagrangeana es **igual**, a la cota generada por *(LP)*. Ahora si $Co\{x \in X \mid Cx \le d\} \subset \{x \mid Cx \le d\}$ entonces $v(P) \le v(RP)\ v(LR) \le v(LP)$ y la cota Lagrangeana puede ser estrictamente mejor que la cota de *(LP)* .

3.5.- Casos Especiales

3.5.1.- Descomposición Lagrangeana Separable

Considerar el siguiente problema de programación:

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} Max. & f\,x \\ s.a. & \\ & Ax \le b, \\ & Cx \le d, \\ & x \in X, \end{array}
$$

el cual también puede ser expresado como:

$Max.\{f\,x | Ax \le b,\ Cx \le d,\ x \in X\} = Max.\{f\,x | Ax \le b,\ Cx \le d,\ x \in X,\ uAx \le ub\}$,
para algún $u \ge 0$. Y para algún $Y \supseteq X$, el problema *(P)* es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
& Max.\ \{f\,x | Ax \le b,\ uAx \le ub,\ Cx \le d,\ x \in X,\ y = x,\ y \in Y\} \\
& \le Max.\ \{fx + \lambda(y - x) | Cx \le d,\ uAx \le ub,\ x \in X,\ Ay \le b,\ y \in Y\} \\
& = \ Max.\{(f - \lambda)x | Cx \le d,\ uAx \le b,\ x \in X\} \ + \ Max.\ \{\lambda y | Ay \le b,\ y \in Y\}
\end{aligned}
$$

Sean $P(x), P(y)$ los problemas en x, y respectivamente, y sean también $v(\cdot)$ el valor óptimo del problema $(\cdot)$, $FS(\cdot)$ su conjunto factible y $OS(\cdot)$ su conjunto óptimo. Entonces,

$$
v(P) \le v(\hat{D}) = \underset{u \ge 0, \lambda}{Min}.\{v(P_x) + v(P_y)\} = \underset{u \ge 0, \lambda}{Min}.(LP_u),
$$

donde $(\hat{D})$ es el dual *Lagrangeano Separable.*

3.5.2.-Comparación con la Relajación Dual Lagrangeana Convencional

Sea (LR_v) el problema con la relajación Lagrangeana convencional:

$$\begin{aligned}(LR_v) \quad & Max.\{fx + v(b - Ax) \mid Cx \le d,\ x \in X\} \\ = \quad & vb + Max.\{(f - vA)x \mid Cx \le d,\ x \in X\},\end{aligned}$$

y sea (D) su corréspondiente dual,

$$(D) \quad \underset{v \ge 0}{Min}.\ v(LR_v).$$

Para $u = 0$, $v \in OS(D)$, $\lambda = vA$ y $Y \supseteq X$,

$$\begin{aligned}v(P_x) + v(P_y) &= Max.\{(f - \lambda)x \mid Cx \le d,\ x \in X\} + Max.\{\lambda y \mid Ay \le b,\ y \in X\} \\ &= Max.\{(f - vA)x \mid Cx \le d, x \in X\} + Max.\{vAy \mid Ay \le b,\ y \in X\} \\ &= Max.\{(f - vA)x \mid Cx \le d, x \in X\} + Max.\{vAy + vb - vb \mid Ay \le b,\ y \in X\} \\ &= Max.\{(f - vA)x \mid Cx \le d, x \in X\} + vb + Max.\{(Ay - b)v \mid Ay \le b,\ y \in X\} \\ &= (LR_v) + Max.\{(Ay - b)v \mid Ay \le b, y \in X\}.\end{aligned}$$

Entonces $v(\hat{D}) \le v(D)$.

3.5.3.-Comparación con el Problema Dual Subrogado

Para $u \ge 0$, la relajación subrogada de (P) está dada como:

$$(SR_u) \quad Max.\{fx \mid uAx \le ub, Cx \le d,\ x \in X\},$$

y el problema dual subrogado es definido como:

$$(SD) \quad \underset{u \ge 0}{Min}.\ v(SR_u),$$

para $\lambda = 0$, $v(P_y) = 0$ y $v(P_x) = v(SR_u)$, entonces se tiene que:

$$v(\hat{D}) \leq v(SD).$$

3.5.4.-Comparación con el Problema Dual Compuesto

Para algún $w \geq 0$, sea $\lambda = wA$, entonces

$$\begin{aligned} v(P_x) &= Max.\{(f - wA)x \mid uAx \leq ub, , Cx \leq d, \ x \in X\} \\ v(P_y) &= Max.\{wAy \mid Ay \leq b, \ y \in Y\} \\ &= Max.\{wAy + wb - wb \mid Ay \leq b, \ y \in Y\} \\ &= Max.\{(Ay - b)w \mid Ay \leq b, \ y \in Y\} + wb \\ &= wb, \end{aligned}$$

donde,

$$v(P_x) + v(P_y) = wb + Max.\{(f - wA)x \mid uAx \leq ub, \ Cx \leq d, \ x \in X\},$$

y si se denota al dual compuesto por (CD), entonces; $v(\hat{D}) \leq v(CD)$.

Con lo que se ha mostrado en las secciones anteriores, es posible establecer que la relajación Lagrangeana Separable es única, de entre todas las estrategias de relajación que existen hasta ahora; lo cual es importante para muchos problemas en los cuales no existen las llamadas restricciones "complicadas". Y como ninguna de las restricciones originales desaparece, con este esquema, no es necesario elegir de entre la calidad de la cota que se obtiene y el grado de dificultad del problema que queda.

Por otro lado, también es posible reforzar a los subproblemas que se obtienen con este tipo de descomposición, al adicionar restricciones válidas, tanto al subproblema en x como al subproblema en y, bajo el principio de que una simple restricción no necesariamente complica más al problema.

Computacionalmente, el hecho de que se obtenga con la relajación Lagrangeana Separable un multiplicador por variable, puede ser visto como una ventaja para los métodos de Ascenso Dual. Ya que en la solución de los problemas Lagrangeanos, la no factibilidad (para un mismo i) solo puede venir de diferentes valores para algún x_i y y_i. Y para aproximarse a la factibilidad uno debe modificar u_i, porque éste aparece como coeficiente de x_i y y_i, por lo cual solamente estas variables son afectadas por los cambios en u_i y por lo tanto es mucho más fácil seguir las implicaciones que se tienen con la modificación de los multiplicadores. Contrario a lo que sucede cuando uno modifica el multiplicador correspondiente a una restricción verdadera, como pasa con la relajación Lagrangeana Convencional. Otra de las ventajas de utilizar la estrategia de descomposición Lagrangeana Separable, es la poder identificar estructuras ocultas especiales, debido a la modelación flexible que tiene, la cual permite obtener una forma block angular en la matriz de restricciones. Situación que no es posible con la relajación Lagrangeana Convencional, *[Guignard y Kim, 1987]*.

Para ver en forma más clara la comparación entre los diferentes tipos de relajación y comprobar la superioridad de la relajación Lagrangeana Separable, se presenta el siguiente ejemplo.

3.6.- Ejemplo de Aplicación

Considere el siguiente problema generalizado del tipo mochila, con variables 0-1.

$$
\begin{array}{lll}
Max. & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \\
s.a. & & \\
 & 12x_1 + 19x_2 + 30x_3 \le 46, & (3.1) \\
(P) & 49x_1 + 40x_2 + 31x_3 \le 76, & (3.2) \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}, &
\end{array}
$$

donde el valor óptimo del problema es: $v(P) = 4$ y el vector de solución es: $(0,0,1)$.

Relajación Tradicional.

Si se dualiza la restricción *(3.1)*, se obtiene el siguiente problema:

$$v(D_1)=\underset{\lambda\geq 0}{Min.}\left\{76\lambda+\underset{x}{Max.}\left\{(2-49\lambda)x_1+(3-40\lambda)x_2+(4-31\lambda)x_3\right\}\middle|\begin{matrix}12x_1+19x_2+30x_3\leq 46,\\ x_1,x_2,x_3\in\{0,1\}\end{matrix}\right\}.$$

La siguiente figura representa la relajación Lagrangeana en términos de λ. Y el valor mínimo del problema es obtenido en $\lambda=2/49$, y el óptimo del problema $v(D_1)=286/49=5.84$

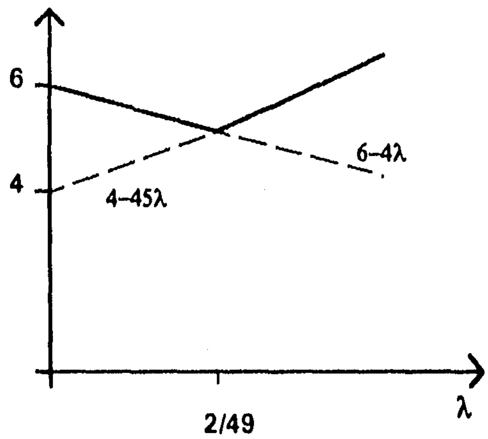


Fig. 8 Solución relajación tradicional

Ahora si se dualiza la restricción *(3.2)*, se tiene este otro problema:

$$v(D_2)=\underset{\mu\geq 0}{Min.}\left\{46\mu+\left\{(2-12\mu)x_1+(3-19\mu)x_2+(4-30\mu)x_3\middle|\begin{matrix}49x_1+40x_2+31x_3\leq 76,\\ x_1,x_2,x_3\in\{0,1\}\end{matrix}\right\}\right\}.$$

Y el mínimo del problema que se obtiene para $\mu=4/30$, es de $v(D_2)=198/30$, lo cual se representa en la siguiente figura:

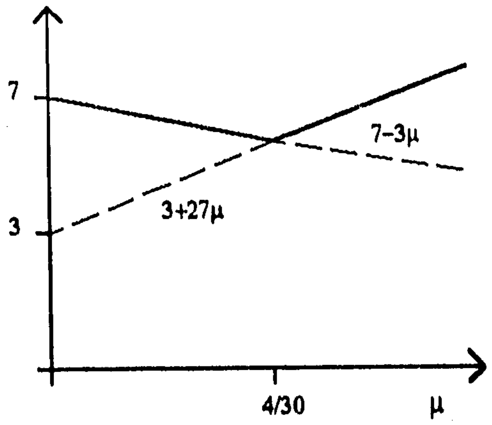


Fig. 9 Valor mínimo relajación tradicional

Relajación Subrogada.

Para este problema en particular, la relajación subrogada que tiene sentido combinando ambas restricciones en una sola y que el problema resultante se conserva como uno del tipo mochila, se puede establecer como:

$$\underset{\mu \geq 0}{Min.} \ (DS) \left\{ \begin{array}{l} \underset{x}{Max.} \ \ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ s.a. \\ (12\mu_1 + 49\mu_2)x_1 + (19\mu_1 + 40\mu_2)x_2 \\ +(30\mu_1 + 31\mu_2)x_3 \leq 46\mu_1 + 76\mu_2 , \\ \quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}. \end{array} \right\}.$$

Problema en el cual, dependiendo del valor que tome μ, serán los cambios del conjunto factible del problema subrogado, así como de su valor óptimo.

La siguiente tabla representa la variación que se tiene en términos de μ_1 *vs* μ_2, con $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Donde el valor óptimo de $v(DS) = 6$.

	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	Fun. Obj.	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	Fun. Obj.
Conjunto Factible del Problema Subrogado	(0,0,1)	4	(0,0,1)	4
	(0,1,0)	3	(0,1,0)	3
	(1,0,0)	2	(1,0,0)	2
	(1,0,0)	6	(0,1,1)	7
	(1,1,0)	5		

Máximo	6	7
Minimizar(Max.)		6

Tabla 1 Solución para relajación subrogada

Relajación Separable.

Con esta estrategia el problema P queda planteado como:

$$
\begin{aligned}
&Max. \quad f\,x + \lambda(y - x) \\
&s.a. \\
&\qquad 12x_1 + 19x_2 + 3x_3 \le 46, \\
&\qquad 49y_1 + 40y_2 + 31y_3 \le 76, \\
&\qquad x, y \in \{0,1\}.
\end{aligned}
$$

Separando en dos subproblemas se tiene:

$$
\begin{aligned}
&(RS_X) = Max.(2-\lambda_1)x_1 + (3-\lambda_2)x_2 + (4-\lambda_3)x_3 \\
&s.a. \\
&\qquad 12x_1 + 19x_2 + 3x_3 \le 46, \\
&\qquad x_i \in \{0,1\}, \forall i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(RS_Y) \;=\; & Max.\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\
& s.a. \\
& \quad 49y_1 + 40y_2 + 31y_3 \le 76, \\
& \quad y_i \in \{0,1\}\ ,\ \forall i .
\end{aligned}
$$

Donde:

$$Max.(RS) \;=\; Max.(RS_X) \;+\; Max.(RS_Y).$$

Resolviendo los subproblemas para valores de $\lambda_3 = 3/2, \lambda_1 \le 2$ y $\lambda_1 - \lambda_2 = 3/2$, el problema tiene dos soluciones alternativas: $(1,0,0)$ y $(0,1,1)$. El valor de la función objetivo está dado por:

$$v(RS_X) + v(RS_Y) = \frac{9}{2} = 4. \;.$$

La siguiente figura representa los valores obtenidos para el mismo problema, por las diferentes estrategias de relajación.

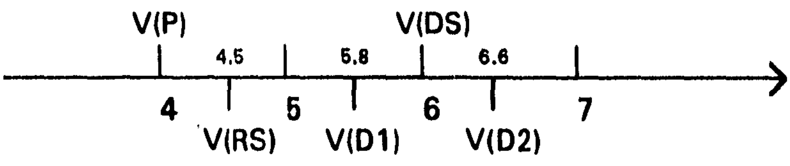


Fig. 10 Comparación de los diferentes tipos de relajación

3.7 Interpretación Económica del Principio de Descomposición

El principio de descomposición de Dantzig-Wolfe tiene una interesante interpretación económica, basada en examinar a los multiplicadores simplex π , como precios. Para establecer esto es necesario considerar lo siguiente: Sea B una base dada y su x_B solución factible básica asociada, está dada por:

$$x_B = B^{-1} b.$$

Si se realizan cambios diferenciales *db* en la disponibilidad de los recursos, la nueva solución quedaría como:

$$x_B = B^{-1}(b+db),$$

la cual debe ser no negativa para un arbitrario *db*. Esto es posible si suponemos que x_B tiene todas las componentes positivas; es decir, es no degenerado. Entonces por definición,

$$\pi = C_B B^{-1}$$
$$Z = C_B x_b = C_B(B^{-1}b) = (C_B B^{-1})b.$$

Así que,

$$Z = \pi b = \sum_i \pi_i b_i.$$

Bajo la suposición de no degeneración π no se modifica, si se realizan cambios pequeños *db*, puesto que *B* necesariamente no cambia. Entonces diferenciando a la expresión de Z, se tiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial b_i} = \pi_i\,, \qquad i = 1,\ldots,m.$$

Si *Z* tiene unidades en pesos, entonces π_i tiene unidades en pesos por unidad de recurso b_i. El multiplicador π_i es llamado ***precio sombra*** para el recurso ***i***, puesto que representa la cantidad que puede ganar (gastar) la función objetivo, al realizar un pequeño incremento en la disponibilidad del recurso b_i, suponiendo que todos los recursos son transformados de acuerdo con los niveles de actividad asociados a la solución. El adjetivo ***sombra*** es utilizado puesto que π_i no es necesariamente el precio del recurso en el mercado. Además notase que *B* no es necesariamente una base óptima y que π_i puede ser positivo o negativo.

Regresando al principio de descomposición, considerar la acción del *i-ésimo* subsistema y la manera de como puede afectar a la función objetivo, vista como un costo total a ser minimizado. Si el subsistema *i* elige un vector de actividades x_i, incurre en un costo directo $C_i x_i$ y en un consumo $A_i x_i$ de recursos disponibles, quitándolos de otros subsistemas con lo que posiblemente se incrementan sus costos. Y el subsistema *i* debe tomar en cuenta esta contribución indirecta al costo total. La forma más simple de hacer esto, es declarar un conjunto de ***precios sombra*** π, para los recursos compartidos y forzar al subsistema a pagar por cualquier cantidad de recursos que utilice. Si a un recurso en particular se le asigna un precio alto, entonces esto debe desalentar al subsistema de usar cantidades excesivas de él. Es fácil ver que el principio de descomposición coordina las acciones de los subsistemas de esta forma.

Entonces, la función objetivo del subproblema i está dada por:

$$Z_i = C_i x_i - \pi A_i x_i$$

donde,

$C_i x_i$: *es la contribución directa sobre el costo total* Z,

x_i : *es el nivel de operación,*

$\pi A_i x_i$: *es el producto del vector de precios unitarios* π *del recurso compartido, por la cantidad del recurso utilizado, (es el costo cargado al subsistema por usar recursos compartidos).*

De esta forma, Z_i la función objetivo del subsistema es una medida del costo total (directos e indirectos), y el signo negativo del producto $\pi A_i x_i$ se justifica puesto que al usar una cantidad positiva del recurso k $\left(\{A_i x_i\}_k \geq 0\right)$, es equivalente a disminuir su disponibilidad. Si el recurso k es muy apreciado (escaso, costoso, etc.), una reducción en su disponibilidad debe incrementar el costo, por lo tanto $\pi_k < 0$. Entonces $-\pi_k$ es positivo, como el término $-\pi_k (A_i x_i)_k$, el cual incrementa el costo del subsistema como debe ser.

Una interpretación similar puede ser utilizada para el criterio de optimalidad, el cual está dado como:

$$\underset{j}{Min}.\bar{f}_{ij} = Z_i^0 - \pi_{oi} \geq 0,$$

o también como:

$$Z_i \geq \pi_{0i}, \quad i = 1, \ldots, p,$$

donde Z_i^0 es el valor óptimo de la función objetivo del subproblema i y π_i^0 es el multiplicador simplex que corresponde a la *i-ésima* restricción convexa:

$$\sum_j \lambda_{ij} = 1.$$

Puesto que π_i^0 es el cambio en Z provocado por un pequeño cambio en el lado derecho de la expresión anterior. Incrementando esta cantidad desde su valor unitario actual, implica que los pesos λ_{ij} asignados a las diferentes propuestas presentadas por el subsistema i pueden a lo más sumar uno; es decir, la propuesta puede jugar un rol mayor en el plan completo. Como se dijo anteriormente, Z_i es una medida del costo total (directo e indirecto) de una nueva propuesta x_i. De esta forma la prueba de optimalidad $Z_i \geq \pi_{0i}$, $i = 1,\ldots,p$ establece que, si se introduce la *"mejor"* nueva propuesta para todos los subsistemas, se incrementarán más los costos, que si se usaran las propuestas actuales, las cuales pesadas apropiadamente pueden ser óptimas. Si el criterio de optimalidad no ocurre, entonces la nueva propuesta remplaza a una de las más anteriores.

Relacionado con esta interpretación de precios, se puede establecer que el esquema de toma de decisiones presentado no es totalmente descentralizado, puesto que la administración central es la que finalmente asigna los pesos a las propuestas de los subsistemas, y la razón para no realizarlo de esta forma, es que el problema puede no quedar totalmente lineal.

IV. APLICACIÓN AL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS

De acuerdo con investigaciones previas, cuando se aplica la estrategia de Descomposición Cruzada al problema de localización de Servicios, resulta en la solución sucesiva de dos subproblemas, incorporando un proceso de ping-pong entre ellos. Procedimiento mediante el cual se explota simultáneamente la estructura primal y dual del problema, reduciendo el número de problemas maestros a resolver. Sin embargo por resultados de nuestra investigación, al incorporar la estrategia de relajación Lagrangeana Separable a éste proceso cruzado, se llega a establecer que no es necesario utilizar el problema maestro, en la solución.

En este capítulo se presentan la aplicación de los supuestos teóricos de la Descomposición Cruzada y de la relajación Lagrangeana Separable, al problema de Localización de Servicios, el algoritmo de solución resultante de nuestra investigación, en el cual el proceso de ping-pong, se realiza entre dos subproblemas del tipo transporte, sin necesidad de resolver el problema maestro primal o dual, para obtener la solución del problema de localización. También se establecen las propiedades que garantizan la convergencia del algoritmo y se presentan un ejemplo de aplicación.

4.1.-Problema de Localización de Servicios

Como una aplicación al uso de la técnica de Descomposición Cruzada utilizando relajación Lagrangeana Separable, considerar el problema de Localización de Servicios con Restricciones de Demanda y Adicionales, el cual puede ser formulado de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{llll}
\underset{x,y}{Min.} & \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} + \sum_i f_i\, y_i & & \\
s.\ a. & & & \\
\sum_i x_{ij} = 1, & \forall j & (4.1), & \\
x_{ij} \leq m_{ij}\, y_i, & \forall i,j & (4.2), & (P) \\
\sum_i a_i\, y_i \geq \sum_j d_j, & \forall j & (4.3), & \\
\sum_j d_j\, x_{ij} \leq a_i\, y_i, & \forall i & (4.4), & \\
x_{ij} \geq 0, \quad y_i = 1,0, & \forall i,j. & &
\end{array}
$$

Donde *(4.1)* asegura la atención total de la demanda, *(4.2)* establece el envío solo de servicios abiertos, *(4.3)* considera la apertura de suficientes plantas para atender la demanda y *(4.4)* considera solamente enviar la capacidad del servicio.

4.2 El Problema Primal o de Benders

Si se aplica el proceso de descomposición de Benders, el subproblema que se obtiene al fijar en P las variables primales y_i a ser *0 ó 1*, es uno de transporte con variables acotadas, para el cual existen métodos de solución muy eficientes.

Entonces el subproblema SP queda como:

$$
\begin{array}{lll}
Min. & \sum_{ij} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_i f_i\, y_i & \\
s.\ a. & & \\
\sum_i x_{ij} = 1, & \forall j, & (SP) \\
\sum_j d_j x_{ij} \leq a_i\, y_i, & \forall j, & \\
0 \leq x_{ij} \leq m_{ij}\, y_i, & \forall i,j. &
\end{array}
$$

Con lo que el dual de SP se puede plantear como:

$$\begin{aligned} & Max.\ \sum_j v_j + \sum_i \left(f_i - a_i u_i - \sum_j m_{ij} w_{ij} \right) y_i \\ & s.a. \\ & \qquad u_i + w_j - v_j \le C_{ij}, \qquad \forall i,j, \qquad (DSP) \\ & \qquad u_i \ge 0, v_j \ge 0, w_{ij} \ge 0 \quad \forall i,j. \end{aligned}$$

En consecuencia, el problema maestro de Benders o primal puede ser expresado:

$$\begin{aligned} & \underset{y \in \{0,1\}, \rho}{Min.} \quad \rho \\ & s.a. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (MP) \\ & \sum_j v_j^t + \sum_i \left(f_i - a_i u_i^t - \sum_j m_{ij} w_{ij}^t \right) y_i \le \rho, \\ & \qquad\qquad t \in T_p, \end{aligned}$$

donde T_p es el conjunto de índices de todas las soluciones duales factibles básicas del conjunto de restricciones del problema DSP, es decir, $t \in T_p$ son los llamados cortes primales o de Benders.

4.3 El Problema Dual Lagrangeano

Como se estableció en el capítulo anterior, la relajación Lagrangeana Separable produce mejores cotas que cualquiera otra de las estrategias de relajación, debido fundamentalmente a que con éste esquema ninguna de las restricciones originales desaparece. Adicionalmente y debido a su modelación flexible, se pueden identificar estructuras especiales ocultas, con lo cual es posible obtener problemas más simples de resolver. Además de que computacionalmente el hecho de tener un multiplicador por variable en lugar de por restricción, puede ser una ventaja al utilizar los métodos de ascenso dual, ya que es más fácil detectar el efecto de alguna modificación en los multiplicadores. Por lo cual este tipo de relajación será utilizada en el presente trabajo.

De esta forma y tomando en consideración las ventajas enunciadas anteriormente, el proceso de análisis con la estrategia de relajación Lagrangeana Separable para el problema P inicialmente planteado, se puede establecer de la siguiente forma:

Propósito:

- **i.** **Inducir la separación** del problema en subproblemas independientes.
- **ii.** Capturar las diferentes **características estructurales del problema.**
- **iii.** Obtener **cotas más fuertes** que con los otros esquemas de relajación.

Cómo:

- **iv.** Identificar las partes del problema que pueden ser **separadas.**
- **v.** Remplazar las variables en cada parte por **copias** o sustituir nuevas expresiones.
- **vi.** **Dualizar** la copia de las variables o la expresión de sustitución.

Observación:

No es necesario que cada subproblema resultante sea de algún tipo especial. Aún así, debe ser **mucho menos complejo o mucho más pequeño** que el problema completo, de tal forma que pueda ser **resuelto** por el software existente o comercial.

Por investigaciones previas *[Chen y Guignard, 1992]*, se ha establecido que uno de los mejores esquemas de relajación Lagrangeana para el problema P, se puede establecer con el siguiente proceso:

- Copiar $\sum_j d_j\, x_{ij} = \sum_j d_j\, x'_{ij}$ y $y_i = y'_i$ en la restricción (4.4).
- Duplicar la restricción (4.3).
- Dualizar las restricciones de igualdad.
- Separar al problema de tal forma que se obtengan dos subproblemas, cada uno con los siguientes conjuntos de restricciones: {(4.1), (4.2), (4.3)} y {(4.2), (4.3), (4.4)}.

De esta forma el problema P sin restricción en flujos, se puede formular como:

$$
(P1)\quad
\begin{aligned}
Min.\ & \sum_i \sum_j C_{ij}\, x_{ij} + \sum_i f_i\, y_i \\
s.a.\ & \\
& \sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall j, && (4.1), \\
& x_{ij} \le y_i, \quad \forall i,j, && (4.2), \\
& \sum_i a_i\, y_i \ge \sum_j d_j, \quad \forall j, && (4.3), \\
& \sum_j d_j\, x'_{ij} \le a_i\, y'_i, \quad \forall i, && (4.4), \\
& \sum_j d_j\, x_{ij} = \sum_j d_j\, x'_{ij}, \forall i, && (4.5), \\
& y_i = y'_i, \quad \forall i, && (4.6), \\
& x_{ij} \ge 0, \quad y_i = 1,0 \quad \forall i,j\ .
\end{aligned}
$$

Relajando las restricciones (4.5) y (4.6), el problema queda como:

$$
(RLS)\quad
\begin{aligned}
Min.\ & \sum_i \sum_j C_{ij}\, x_{ij} + \sum_i f_i\, y_i + \lambda_i \left(\sum_j d_j\, x_{ij} - \sum_j d_j\, x'_{ij} \right) + \mu_i \left(y_i - y'_i \right) \\
s.a.\ & \\
& \sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall j, \\
& x_{ij} \le y_i, \quad \forall i,j, \\
& \sum_i a_i\, y_i \ge \sum_j d_j, \quad \forall j, \\
& \sum_j d_j\, x'_{ij} \le a_i\, y'_i, \quad \forall i, \\
& x_{ij} \ge 0, \quad y_i = 1,0 \quad \forall i,j\ ,
\end{aligned}
$$

o también como:

$$
\begin{array}{ll}
Min. & \sum_j \sum_i \left(C_{ij} - d_j \lambda_i\right) x_{ij} + \sum_i \left(f_i - \mu_i\right) y_i + \sum_i \lambda_i \sum_j d_j x'_{ij} + \sum_i \mu_i y'_i \\
s.a. & \\
& \begin{array}{llll}
\sum_i x_{ij} = 1, & \forall j, & & \\
x_{ij} \le y_i, & \forall i,j, & & \\
\sum_i a_i y_i \ge \sum_j d_j, & \forall j, & & (RLS) \\
\sum_j d_j x'_{ij} \le a_i y'_i, & \forall i, & & \\
x_{ij} \ge 0, \quad y_i = 1,0 & \forall i,j \ . & &
\end{array}
\end{array}
$$

Separando a cada uno de los subproblemas se obtiene:

Subproblema 1:

$$
\begin{array}{ll}
Min. & \sum_i \sum_j \left(C_{ij} - d_j \lambda_i\right) x_{ij} + \sum_i \left(f_i - \mu_i\right) y_i \\
s.a. & \\
& \begin{array}{llll}
\sum_i x_{ij} = 1, & \forall j, & (4.1), & \\
x_{ij} \le y_i, & \forall i,j, & (4.2), & (LS1) \\
\sum_i a_i y_i \ge \sum_j d_j, & \forall j, & (4.3), & \\
\multicolumn{4}{l}{x_{ij} \ge 0\,;\, y_i = 1,0\,;\, \lambda_i, \mu_i \ \textit{no restrigidas}, \forall i,j \ .}
\end{array}
\end{array}
$$

Subproblema 2:

$$
\begin{array}{lllll}
\textit{Min.} & \sum_i \lambda_i \sum_j d_j x'_{ij} + \sum_i \mu_i y'_i & & & \\
s.a. & & & & \\
 & x_{ij} \le y_i, & \forall i,j, & (4.2), & \\
 & \sum_i a_i y_i \ge \sum_j d_j, & \forall j, & (4.3), & (LS2) \\
 & \sum_j d_j x_{ij} \le a_i y_i, & \forall i, & (4.4), & \\
 & x_{ij} \ge 0 ; y_i = 1,0 ; \lambda_i, \mu_i \ \textit{no restringidas}, \forall i,j . & & &
\end{array}
$$

Donde la solución al problema *RLS*, se obtiene como:

$$v(RLS) = v(LS1) + v(LS2).$$

4.3.1.-Simplificación de los Subproblemas *LS1* y *LS2*

Considerar al subproblema *LS2* e ignorar temporalmente a la restricción (4.3). Entonces por el principio de linearización entero (ver apéndice A), el problema se puede separar para cada servicio i, considerando a cada $\{y_i = 1\}$, para $i=1,...,m$, y valores conocidos de λ_i, con $i=1,...,m$ en:

$$
\begin{array}{llll}
\{y_i = 1\}, & v_i & = & \underset{x}{\textit{Min.}}\ \lambda_i \sum_j d_j x'_{ij} \\
 & & & s.a. \\
 & & & \sum_j d_j x_{ij} \le a_i, \\
 & & & 0 \le x_{ij} \le 1, \quad \forall i,j, \\
 & & & \lambda_i \ \textit{no restringida}, \quad \forall i,
\end{array}
$$

que también puede ser expresado como:

$$v_i = \underset{x}{Min.}\left\{\lambda_i \sum_j d_j\, x'_{ij} \,\middle|\, \sum_j d_j x_{ij} \leq a_i,\ 0 \leq x_{ij} \leq 1,\ \lambda_i \textit{ no restrigida}\right\},$$

que resulta ser un problema del tipo **mochila continuo**, para cada i . Y que por su estructura, la solución óptima para cada v_i , $i=1,\ldots,m$, está dada por:

$$v_i = \begin{cases} \lambda_i\, Min.\{a_i\ , D\} & si \quad \lambda_i < 0 \\ 0 & si \quad \lambda_i \geq 0 \end{cases}$$

donde $\sum_j d_j x_{ij} = a_i\ ,\forall i$ y el parámetro $\sum_j d_j = D$, puede ser útil en problemas con capacidad ilimitada.

De esta forma la contribución total estará dada como:

$$\begin{aligned} &\underset{y}{Min.}\ \sum_i \mu_i\, y'_i + \sum_i v_i\, y_i \\ &s.a. \\ &\quad \sum_i a_i\, y_i \ \geq\ \sum_j d_j \\ &\quad y_i = 1,0\ ,\mu_i \textit{ no restringida}, \end{aligned}$$

que en forma equivalente se puede plantear como:

$$\underset{i}{Min.}\left\{\sum_i (\mu_i + v_i) y_i \,\middle|\, \sum_i a_i\, y'_i \geq D,\ \ y'_i = 1,0,\ \mu_i \textit{ irrestricto}, \forall i\right\}.$$

Problema que resulta ser del tipo **mochila** en variables 0-1.

En otras palabras, se requiere resolver un problema v_i , $i=1,\ldots,m$, para cada servicio y después minimizar la contribución total que produce cada uno de ellos, en el problema tipo mochila 0-1.

Ahora examinar al problema *LS1* y considerar el mínimo del segundo sumando y la restricción (4.3), con lo cual es posible formular separadamente al siguiente subproblema:

$$\begin{aligned}
&\underset{y}{Min.} \ \sum_i (f_i - \mu_i) y_i \\
&s.a. \\
&\quad \sum_i a_i y_i \geq D, \quad \forall j, \\
&\quad y_i = 0,1, \ \mu_i \ \textit{no restringida}, \forall i.
\end{aligned}$$

El cual resulta con el mismo conjunto de restricciones, que el subproblema tipo mochila 0-1 que se obtuvo de *LS2*, solo que con diferente función objetivo. Y como ambos subproblemas son función de μ_i, se hacen equivalentes en su función objetivo para un valor de $\mu_i = (f_i - v_i)/2$.

Entonces, sustituyendo el valor de μ_i en cada una de ellas, se tiene:

$$\begin{aligned}
&Min. \ \sum_i \left[f_i - \left(\frac{f_i - v_i}{2} \right) \right] \quad + \quad Min. \ \sum_i \left[v_i + \left(\frac{f_i - v_i}{2} \right) \right] \\
&s.a. \\
&\quad \sum_i a_i y_i \geq D, \ \forall j \qquad\qquad \sum_i a_i y_i \geq D, \ \forall j \\
&\quad y_i = 0,1, \forall i, \qquad\qquad\quad y_i = 0,1, \forall i.
\end{aligned}$$

En donde al efectuar operaciones y reagrupar términos, el problema queda como:

$$\begin{aligned}
&Min. \ \sum_i (f_i + v_i) y_i \\
&s.a. \\
&\quad \sum_i a_i y_i \geq D, \quad \forall j, \\
&\quad y_i = 0,1, \quad \forall i
\end{aligned}$$

que es también en un problema del tipo mochila 0-1, independiente del valor de μ_i, con $i=1,...m$. ***Es decir, resulta innecesario hacer la duplicación de las variables*** $y_i, \forall i$ ***y dualizar (relajar) su correspondiente igualdad. Resultado que permite***

mejorar y simplificar el esquema de relajación propuesto por [Chen y Guignard, 1992].

En consecuencia, el problema dual Lagrangeano *RLS* se puede formular como la suma de los siguientes subproblemas:

$$
\begin{aligned}
Q = \underset{y}{Min.}\ & \sum_i (f_i + v_i) y_i \\
s.a.\ & \\
& \sum_i a_i y_i \geq D, \quad \forall j, \\
& y_i = 0,1, \quad \forall i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S = \underset{x}{Min.}\ & \sum_i \sum_j (C_{ij} - d_j \lambda_i) x_{ij} \\
s.a.\ & \\
& \sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall j, \\
& 0 \leq x_{ij} \leq y_i, \quad \forall i,j, \\
& \lambda_i \ \textit{no restrigida}, \ y_i = 0,1, \ \forall i.
\end{aligned}
$$

Y su solución estará dada como: $\upsilon(RLS) = \upsilon(Q) + \upsilon(S)$. Donde Q es un problema sencillo del tipo mochila y S es un problema del tipo selección múltiple, que por su estructura se puede establecer como uno con $x_{ij} = 0,1, \forall i,j$. Entonces el subproblema dual Lagrangeano *RLS* queda formulado como:

$$Min. \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i y_i + \sum_i \left(v_i y_i - \lambda_i \sum_j d_j x_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned} &s.a. \\ &\sum_i x_{ij} = 1 \ , \ \forall j, \\ &\quad x_{ij} \le y_i \ , \ \forall i,j, \\ &\sum_i a_i y_i \ge D \ , \ \forall j, \\ &x_{ij} \ge 0, y_i = 0,1, \lambda_i \ \textit{no restringida}, \forall i,j \ . \end{aligned}$$

Que es independiente de μ_i , para $i=1,...,m$.

Por otro lado, puesto que $v_i = a_i \lambda_i$ el problema *RLS* anterior se puede formular de la siguiente forma:

$$Min. \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i y_i + \sum_i \lambda_i \left(a_i y_i - \sum_j d_j x_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned} &s.a. \\ &\sum_i x_{ij} = 1 \ , \ \forall j, \\ &\quad x_{ij} \le y_i \ , \ \forall i,j, \\ &\sum_i a_i y_i \ge D \ , \ \forall j, \\ &x_{ij} \ge 0, y_i = 0,1, \lambda_i \ \textit{no restringida}, \forall i,j \ . \end{aligned}$$

Que resulta ser equivalente al problema original *P*, con la restricción (4.4) relajada.

Para ver esto, considere al problema *P* como se formuló originalmente, esto es:

$$(P) = Min.\ \sum_i \sum_j C_{ij}\, x_{ij} + \sum_i f_i\, y_i$$

$$\begin{aligned}
&s.a.\\
&\sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall j, && (4.1),\\
&x_{ij} \le y_i, \quad \forall i,j, && (4.2),\\
&\sum_i a_i\, y_i \ge \sum_j d_j, \quad \forall j, && (4.3),\\
&\sum_j d_j\, x'_{ij} \le a_i\, y'_i, \quad \forall i, && (4.4),\\
&x_{ij} \ge 0, \quad y_i = 1,0 \quad \forall i,j.
\end{aligned}$$

En el cual, relajando la restricción (4.4) se tiene:

$$(P) \ge (LD) = Min.\sum_i \sum_j C_{ij}\, x_{ij} + \sum_i f_i\, y_i + \sum_i \lambda_i \left(a_i\, y_i - \sum_j d_j\, x_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned}
&s.a.\\
&\sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall j,\\
&x_{ij} \le y_i, \quad \forall i,j,\\
&\sum_i a_i\, y_i \ge \sum_j d_j, \quad \forall j,\\
&x_{ij} \ge 0, y_i = 0,1, \lambda_i \ no\ restringida, \forall i,j.
\end{aligned}$$

Suceso que permite concluir, que realizar la relajación simple (tradicional) sobre el conjunto de restricciones (4.4), es otra forma más sencilla y rápida de llegar al mismo resultado. Y en consecuencia, no es necesario partir del esquema de relajación que se propone en [Chen y Guignard, 1992].

Ahora bien, si se considera una solución factible, que además cumpla con la restricción (4.4), se tiene que el producto:

$$\lambda_i\left(a_i y_i - \sum_j d_j x_{ij}\right) \le 0 \quad ,para\ y_i = 1\ y\ \lambda_i < 0,\ con\ i=1,\dots,m.$$

De esta forma, aún se cumple que $P \ge LD1, con\ y_i = 1\ y\ \lambda_i < 0, para\ i = 1,\dots,m$. Es decir:

$$(P) \ge (LD1) = Min.\ \sum_i\sum_j C_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i y_i + \sum_i \lambda_i\left(a_i y_i - \sum_j d_j x_{ij}\right)$$

$$\begin{aligned} &s.a. \\ &\sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall j, \\ &x_{ij} \le y_i, \quad \forall i,j, \\ &\sum_i a_i y_i \ge \sum_j d_j, \quad \forall j, \\ &\sum_j d_j x_{ij} \le a_i y_i, \quad \forall i, \\ &x_{ij} \ge 0,\ y_i = 1,0 \quad \forall i,j\ . \end{aligned}$$

Entonces, es posible incorporar al problema S la restricción (4.4) para reforzarlo, con lo cual ahora es formulado como:

$$S = Min.\ \sum_i\sum_j\left(C_{ij} - d_j\lambda_i\right)x_{ij}$$

$$\begin{aligned} &s.a. \\ &\sum_i x_{ij} = 1, \ \forall j, \\ &\sum_j d_j x_{ij} \le a_i, \ \forall i, \\ &x_{ij} \ge 0, \forall i,j, \lambda_i \ \textit{no restringido},\ \forall i \end{aligned}$$

que resulta ser un problema del tipo transporte. Suceso bastante interesante puesto que existen algoritmos muy eficientes para resolverlo.

Por otro lado, puesto que los problemas Q y S son función de λ_i, para $i=1,\ldots,m$. El problema Q con $v_i = a_i\ \lambda_i$, puede ser formulado como:

$$
\begin{aligned}
Q = Min. & \sum_i \left(f_i + \lambda_i\, a_i\right) y_i \\
s.a. & \\
& \sum_i a_i y_i \geq D, \quad \forall j, \\
& y_i = 0,1\,, \lambda_i \; no\, restringido, \quad \forall i.
\end{aligned}
$$

En el cual, si $\lambda_i = -f_i/a_i$ para $i=1,\ldots,m$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
Q = Min. & \sum_i \left[f_i - \left(\frac{f_i}{a_i}\right) a_i \right] y_i \\
s.a. & \\
& \sum_i a_i y_i \geq D, \quad \forall j, \\
& y_i = 0,1, \quad \forall i.
\end{aligned}
$$

cuya solución es $Q = 0$. ***Por lo que es posible establecer, que cualquier valor de*** $y_i \neq 0\,, i = 1,\ldots,m$, ***cumple para obtener el mínimo del problema dual Lagrangeano RLS.***

Ahora bien, considere la solución del subproblema Q que se obtuvo al aplicar el principio de linearización entero, al inicio de esta sección. Es decir:

$$v_i = \lambda_i\ Min.\{a_i\,, D\} \quad si \quad \lambda_i < 0,$$

$$\text{donde } \sum_j d_j x_{ij} = a_i\,, \forall i.$$

Entonces, el término que se encuentra en la función objetivo del problema Q, para $i=1,\ldots,m$, se puede formular de manera más general como:

$$Q = Min.\ \sum_i \left(f_i + \lambda_i \sum_j d_j x_{ij} \right),$$

con lo cual también es posible establecer que para algún $\mu_i \geq 0$, y un valor de Lamda:

$\lambda_i = -\dfrac{f_i}{\sum_j d_j x_{ij}}$, se tiene que $Q = 0$.

En consecuencia, el problema Q puede quedar formulado de manera más general con $x'_{ij} = x_{ij}/d_j$, como:

$$Q = Min. \sum_i \left[f_i - \left(\frac{f_i}{\sum_j x'_{ij}} \right) \sum_j x'_{ij} \right] y_i$$

$$s.a.$$

$$\sum_i a_i y_i \geq D, \quad \forall j,$$

$$x'_{ij} \geq 0, y_i = 0,1, \quad \forall i, j.$$

Que tiene como resultado Q=0, lo que permite establecer que los orígenes $y_i \neq 0$, para i=1,...,m, que satisfacen la demanda, obtenidos a partir de la solución del problema de transporte S, también podrán minimizar al subproblema dual Lagrangeano RLS.

Como se sabe, el algoritmo para resolver el problema de transporte minimiza costos al saturar las rutas de distribución que resultan ser más económicas, esto implica que para un determinado origen i que contenga a los costos de transporte más baratos, se tendrá en sucesivas iteraciones que:

$$\sum_j x_{ij}^{k-1} \leq \sum_j x_{ij}^{k} \leq \sum_j x_{ij}^{k+1}, \text{ con } \lambda_i^{k-1} \geq \lambda_i^{k} \geq \lambda_i^{k+1},$$

y en consecuencia para los costos de distribución se tendrá que:

$$(C_{ij} + \lambda_i)^{k-1} \geq (C_{ij} + \lambda_i)^{k} \geq (C_{ij} + \lambda_i)^{k+1} \geq \ldots$$

Es decir, las rutas más baratas se harán aún más económicas. De esta forma, $\sum_j x_{ij}^k$ para las i con los costos más bajos, tenderán a incrementarse hasta alcanzar su límite, el cual está definido por su demanda y/o su capacidad a_i. En consecuencia:

$$\sum_j x_{ij}^{k-1} \leq \sum_j x_{ij}^k \leq \sum_j x_{ij}^{k+1} \leq ,\ldots, \leq a_i \ .$$

Por el contrario, para las rutas r con los costos más altos, la $\sum_j x_{rj}^k$ tenderá a disminuir hasta alcanzar su límite que es cero, de esta forma:

$$\sum_j x_{rj}^{k-1} \geq \sum_j x_{rj}^k \geq \sum_j x_{rj}^{k+1} \geq ,\ldots, \geq 0 \text{ , con } \lambda_r^{k-1} \leq \lambda_r^k \leq \lambda_r^{k+1} \ ,$$

y en consecuencia se tendrá que:

$$\left(C_{rj} + \lambda_r\right)^{k-1} \leq \left(C_{rj} + \lambda_r\right)^k \leq \left(C_{rj} + \lambda_r\right)^{k+1} \leq \ldots$$

Es decir, las rutas más caras se harán aún más costosas, después de cada iteración.

De esta forma, a los valores de λ_i^k para $i=1,\ldots,m$, se les puede interpretar como la memoria del algoritmo, puesto que contienen información de la iteración anterior (solución), indicando cuales fueron los caminos más baratos de distribución y los servicios con el costo fijo más bajo. Esto es, para las trayectorias más económicas se tiene que:

$$\left(\frac{f_i}{\sum_j x_{ij}^{k-1}}\right)^k \geq \left(\frac{f_i}{\sum_j x_{ij}^k}\right)^{k+1} \geq \left(\frac{f_i}{\sum_j x_{ij}^{k+1}}\right)^{k+2} \geq \ldots$$

Además, el problema de transporte requiere para que exista solución factible que: $\sum_i a_i \geq \sum_j d_j$ y en la solución óptima, que las restricciones de demanda se cumplan con estricta igualdad, esto es $\sum_i x_{ij} = d_j$, entonces los orígenes i a partir de los cuales se satisface la demanda, serán los valores para los que $y_i = 1$, con $i=1,\ldots,m$, que resultan ser los servicios abiertos para el problema dual Lagrangeano *RLS*. Para ver esto, considerar lo siguiente.

En la solución óptima del problema de transporte, se tiene que:

$$C_{ij} - u_i - v_j = 0 \;\; si \;\; x_{ij} \;\; es \; básica,$$
$$C_{ij} - u_i - v_j \geq 0 \;\; si \;\; x_{ij} \;\; es \; no \; básica,$$

donde: C_{ij}, es la matriz de costos originales del problema de transporte, u_i, v_j son las variables duales que corresponden a los orígenes y destinos, respectivamente.

Ahora sea x^*_{ij} con $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ la solución óptima del problema de transporte y u_i, v_j las correspondientes variables duales para las restricciones de capacidad y demanda, respectivamente. Entonces para la solución se tendrá que $C_{ij} \geq u_i + v_j = \hat{C}_{ij}$ y $C_{ij} = u_i + v_j$, Es decir,

$$\text{si} \begin{cases} x^*_{ij} \neq 0 & \Rightarrow \hat{C}_{ij} - C_{ij} = 0 \\ x^*_{ij} = 0 & \Rightarrow \hat{C}_{ij} - C_{ij} \geq 0 \end{cases},$$

por lo cual, es posible establecer que: $u_i = C_{ij} - v_j$, para las variables básicas y $u_i \leq C_{ij} - v_j = \hat{u}_i$, para las variables no básicas y en consecuencia se tiene que:

$$(f_i + u_i a_i) \leq (f_i + \hat{u}_i a_i), \;\; \text{para} \;\; i=1,...,m.$$

Por lo cual, se puede establecer que los orígenes i que se obtienen de la solución del problema de transporte S, para los cuales $\sum_j x^*_{ij} = d_j$, $i=1,...,m$, serán las $y^*_i = 1$, $i=1,...,m$ de la solución óptima del problema tipo mochila Q. ***Es decir, los orígenes i que satisfacen la demanda del problema de transporte, serán los servicios abiertos en el subproblema dual Lagrangeano SD_λ y como consecuencia en el problema de localización P.***

Entonces, a partir de estos resultados se pueden establecer las siguientes proposiciones:

Proposición 4.1. *En la solución óptima del problema de transporte S, los orígenes i que satisfacen la demanda, son los $y^*_i = 1$, $i=1,...,m$, de la solución óptima del problema de la mochila Q. Y en consecuencia, los servicios que deben ser abiertos en la solución óptima del subproblema dual Lagrangeano SD_λ.*

4.4.-Algoritmo para Resolver el Problema de Localización

De acuerdo con la estrategia de Descomposición Cruzada, es posible usar a los subproblemas primal SP_y y dual SD_λ, en una sola estructura de descomposición y considerarlos como problemas maestros relajados, uno del otro. Además, el problema de interés P ó D, es relativamente más fácil de resolver cuando las variables primales y_i o las variables duales λ_i se fijan. Observación que motiva el siguiente proceso de *ping-pong* entre estos subproblemas. En consecuencia iniciando con alguna suposición para las variables, es posible pasar de una a otra de las siguientes etapas:

-i- *Fijar y_i en su valor actual y resolver el subproblema de Benders SP_y, que es un problema de transporte, para producir un nuevo valor para la cota superior de P.*

-ii- *Fijar λ_i en su valor actual y resolver el subproblema Lagrangeano SD_λ, para producir un nuevo valor para la cota inferior de P.*

Estas etapas, producen sucesivamente cotas superior e inferior para el valor óptimo de la solución. La principal motivación para el uso de la Descomposición Cruzada, es debido al hecho conocido de que la descomposición de Benders y la obtenida por la relajación Lagrangeana, son de alguna forma pares duales. Es decir, SP_y y SD_λ llegan a ser problemas maestros relajados uno del otro, *[Van Roy, 1984]*. Condición que aunada a los resultados obtenidos en las secciones anteriores, permiten establecer el siguiente algoritmo de Descomposición Cruzada:

Etapas del algoritmo

1.-Iniciar. $\upsilon_D(-\infty)$, $\upsilon_P(+\infty)$;
$Y_i^{\circ} = 1$; para $i=1,\ldots,m$,
$\lambda_i^{\circ} = -\dfrac{f_i}{a_i}$, para $i=1,\ldots,m$.

2.-Resolver. Subproblema dual $SD_{\lambda^{\circ}}$ (problema de transporte S), para obtener $y_i^1 =$, $\sum_j x_{ij}$ y $\upsilon(SD_{\lambda^k})$.

2.1.-Calcular. $\lambda_i^k = -\dfrac{f_i}{\sum_j x_{ij}}$, para $i=1,\ldots,m$.

3.-Probar. Si $\lambda_i^{k-1} = \lambda_i^k$ para $y_i^k = 1$, entonces terminar. Otra cosa, identificar cuales $y_i^k = 1$ para $i=1,\ldots,m$.

4.-Resolver. Subproblema primal $SP_{y_i^k}$ (problema de transporte por Benders), para obtener $\upsilon(SP_{y^k})$.

5.-Probar. Si $\upsilon(SP_{y^k}) = \upsilon(SD_{\lambda^k})$, entonces terminar. Otra cosa, regresar al paso 2 pero ahora con λ_i^k.

La siguiente figura muestra el algoritmo de Descomposición Cruzada en forma gráfica.

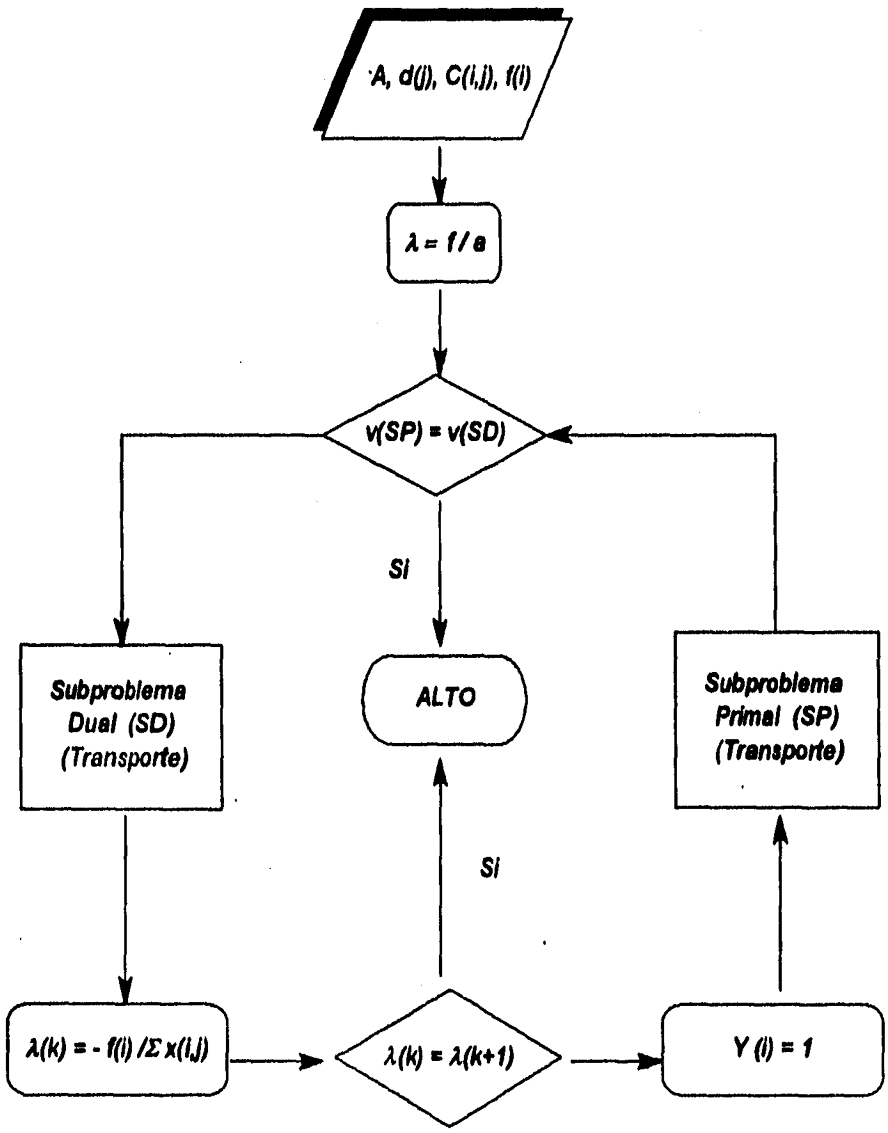


Fig. 12 Diagrama General del Algoritmo

4.5. Convergencia del Algoritmo

El procedimiento anterior termina en un número finito de iteraciones, al considerar los siguientes hechos y que los algoritmos de Benders, Lagrangeano y Descomposición Cruzada, son finitos en su forma pura.

Como se vio en la sección anterior, en sucesivas iteraciones las rutas más baratas se hacen cada vez más baratas y en consecuencia, se les asigna cada vez más hasta que se saturen, ya sea agotando la capacidad del origen o satisfaciendo la demanda, es decir:

$$\sum_j x_{ij}^{k-1} \leq \sum_j x_{ij}^{k} \leq \sum_j x_{ij}^{k+1} \leq,\ldots,\leq a_i \quad \text{con} \quad \lambda_i^{k-1} \geq \lambda_i^{k} \geq \lambda_i^{k+1} \geq,\ldots,\geq \frac{f_i}{a_i}.$$

De esta forma, se pueden utilizar los orígenes que satisfacen la demanda obtenidos de la solución del subproblema dual Lagrangeano SD_λ como servicios abiertos; es decir los $y_i = 1$, con $i=1,\ldots,m$, que se fijarán en el subproblema primal SP_y .

Además, también considere el principio fundamental de la Descomposición Cruzada, mediante el cual se establece que los subproblemas primal SP_y y dual SD_λ, son problemas maestros relajados uno del otro *[Van Roy, 1984]*. Lo cual permite utilizar ambos subproblema en un mismo esquema de descomposición, y buscar la solución del problema de Localización de Servicios al interactuar entre las siguientes etapas:

i. ***Fijar*** λ ***en su valor actual y resolver el subproblema dual Lagrangeano*** SD_λ ***(Transporte) para producir un nuevo valor de*** y ***, además de un valor para la cota inferior del problema P.***

ii. **Fijar** y ***en su valor actual y resolver el subproblema primal*** SP_y ***(Transporte) con lo que se obtiene un valor para la cota superior del problema P.***

Etapas que producen sucesivamente valores para las cotas inferior y superior, respectivamente, hasta obtener en un número finito de iteraciones, la solución al problema de Localización de Servicios.

Para que el algoritmo se desarrolle bien dentro de este esquema de solución, se hace necesario tener como valor inicial para la primera iteración:

$\lambda_i^\circ = f_i^\circ / a_i^\circ$,

y para las subsecuentes iteraciones como:

$\lambda_i^k = f_i / \sum_j x_{ij}^{k-1}$,

Esto debido a que λ_i , $i=1,...,m$, es la memoria del algoritmo puesto que tiene información de la iteración anterior, a través de $\sum_j x_{ij}^{k-1}$ y de la propia λ_i^k , $i=1,...,m$.

De la proposición (4.1) y del algoritmo anterior se puede establecer la siguiente proposición.

***Proposición 4.2.** Los servicios que resulten abiertos en la solución óptima del subproblema dual Lagrangeano SD_λ , corresponden a los servicios que deben ser abiertos en la solución óptima del subproblema primal SP_y , y en consecuencia del problema de Localización P .*

4.6.-Experiencia Computacional

4.6.1 -Ejemplo de Aplicación

El siguiente ejercicio fue tomado de *[Van Roy, 1984]*.

m = 4 n = 3	Costo por unidad (j)			Capaci-dad a_i	Costo Fijo f_i
1	1	0	3	25	40
2	1	3	0	25	40
3	3	0	1	25	40
4	3	3	3	25	0
Deman-da d_j	15	15	15		

Tabla 2 Problema Ejemplo

En la solución óptima el valor de la función objetivo es 95, con los servicios 1 y 2 abiertos. La solución por Benders realiza 4 iteraciones (4 cortes), es decir se deben resolver cuatro problemas maestros. Por el algoritmo propuesto de Descomposición Cruzada, se realizaron 2 iteraciones sin resolver el problema maestro y se llega al mismo resultado.

Iteración No.1.

1.- Iniciar con todos los servicios abiertos y calcular los valores de λ_i° para $i=1,\ldots,m$. Entonces:

i	λ°
1	-1.6
2	-1.6
3	-1.6
4	0

2.- Resolver el subproblema dual $SD_{\lambda_i^\circ}$, que es un problema tipo transporte con el incremento de λ_i° .

	$C_{i,j} - \lambda_i^\circ$			a_i
	2.6	1.6	4.6	25
	2.6	4.6	1.6	25
	4.6	1.6	2.6	25
	3	3	3	25
d_j	15	15	15	

Cuya solución está dada por:

$\upsilon(SD) = 87$

$x_{11} = 10$, $x_{12} = 15$, $x_{21} = 5$,

$x_{23} = 15$.

2.1.- Los nuevos valores para λ_i^k, donde $i=1,...,m$ son:

i	λ_i^1
1	-1.6
2	-2.0
3	-1.6
4	0

3.- Probar si $\lambda_i^\circ = \lambda_i^1$, para los $y_i = 1$, donde $i=1,...,m$, generados por la solución del problema de transporte anterior:

i	λ_i°	λ_i^1
1	-1.6	-1.6
2	-1.6	-2.0
3	-1.6	-1.6
4	0.0	0.0

Los cuales no todos son iguales.

4.- Resolver el subproblema primal $SP_{y_i^k}$ para $y_i = 1$, con $i=1,...,m$. Es decir para $y_1 = 1, y_2 = 1$, los servicios abiertos.

	$C_{i,j}$			a_i
	1.0	0.0	3.0	25
	1.0	3.0	0.0	25
	3.0	0.0	1.0	0
	3.0	3.0	3.0	0
d_j	15	15	15	

Cuya solución está dada por:

$$\upsilon(SP) = 95$$
$$x_{11} = 10\,,\quad x_{12} = 15\,,\quad x_{21} = 5\,,$$
$$x_{23} = 15\,.$$

5.- Probar si $\upsilon(SP) = \upsilon(SD)$ para los valores de las funciones objetivo:

$\upsilon(SP) = 95 \neq 86 = \upsilon(SD)$

Como son diferentes, regresar al paso 2, pero ahora con λ_i^k, donde *i=1,...,m*. Y continuar de esta forma, hasta que los criterios de paro se cumplan.

<u>Iteración No.2</u>

2.- Resolver el subproblema dual $SD_{\lambda_i^1}$, que es un problema tipo transporte con el incremento de λ_i^1.

	$C_{i,j} - \lambda_i^1$			a_i
	2.6	1.6	4.0	25
	3.0	6.0	2.0	25
	4.6	1.6	2.6	25
	3.0	3.0	3.0	25
d_j	15	15	15	

Cuya solución está dada por:

$$\upsilon(SD) = 95$$
$$x_{11} = 10\,,\quad x_{12} = 15\,,\quad x_{21} = 5\,,$$
$$x_{23} = 15\,.$$

2.1.- Los nuevos valores para λ_i^2, donde $i=1,\ldots,m$ son:

i	λ_i^2
1	-1.6
2	-2.0
3	-1.6
4	0

3.- Probar si $\lambda_i^1 = \lambda_i^2$, para los $y_i = 1$, donde $i=1,\ldots,m$, generados por la solución del problema de transporte anterior:

i	λ_i^1	λ_i^2
1	-1.6	-1.6
2	-2.0	-2.0
3	-1.6	-1.6
4	0.0	0.0

Los cuales son todos iguales. Se cumple el primer criterio de paro.

4.- Resolver el subproblema primal SP_{y_i} para $y_i = 1$, con $i=1,\ldots,m$. Es decir para $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, los servicios abiertos.

	$C_{i,j}$			a_i
	1.0	0.0	3.0	25
	1.0	3.0	0.0	25
	3.0	0.0	1.0	0
	3.0	3.0	3.0	0
d_j	15	15	15	

Cuya solución está dada por:

$$\upsilon(SD) = 95$$
$$x_{11} = 10\,,\quad x_{12} = 15\,,\quad x_{21} = 5\,,$$
$$x_{23} = 15\,,\quad y_1 = 1\,,\quad y_2 = 1\,,\quad y_3 = 0\,,\quad y_4 = 0$$

5.- Probar si $\upsilon(SP) = \upsilon(SD)$, para los valores de las funciones objetivo:

$$\upsilon(SP) = 95 = 95 = \upsilon(SD)$$

Como son iguales, el proceso termina y la solución óptima es 95 para el valor de la función objetivo, con $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ como servicios abiertos.

En la siguiente tabla se presentan los **resultados obtenidos, después de 2 iteraciones para obtener la solución óptima del problema. Se da una iteración más para verificar la misma.**

$\upsilon(LD)$ No de Iteración	$\upsilon(LD)$	$\upsilon(SP)$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$\sum_j x_{1j}$	$\sum_j x_{2j}$	$\sum_j x_{3j}$	$\sum_j x_{4j}$
1	86	95	1.6	1.6	1.6	0.0	25	20	0	0
2	95	95	1.6	2.0	1.6	0.0	25	20	0	0
3	95	95	1.6	2.0	1.6	0.0	25	20	0	0

Tabla 3 Resultados problema ejemplo

4.7 -Resultados Computacionales

En las siguientes tablas se resumen los resultados computacionales obtenidos para los problemas prueba, los cuales se obtuvieron de Guignard y Spielberg [1979] y de Guignard y Kim [1983], respectivamente.

Es importante destacar que el algoritmo de solución desarrollado es mucho más eficiente al compararlo con el original de Descomposición Cruzada, puesto que se obtiene una mejor brecha de dualidad y el tiempo de cálculo es sustancialmente mucho menor. Es interesante también establecer que, si bien con el algoritmo de solución propuesto no se anula por completo la brecha de dualidad en todos los problemas, sin embargo la solución se alcanza a través del subproblema primal, lo cual indica que los servicios que deben ser abiertos para resolver al problema de localización, se obtienen.

Adicionalmente, en las tablas No. 7 y 8 se presenta por separado a los problemas No. 1 y 6 , con el fin de establecer un mejor análisis y desempeño del algoritmo propuesto, para estos problemas.

Problema		1	2	3	4	5	6	7
Tamaño		5x4	5x6	5x8	10x10	10x10	10x15	20x35
% Brecha de Dualidad	(DCO)	3.5	0.4	4.3	10.9	5.8	0.9	21
	(DCS)	1.6	0.0	0.18	0.0	1.3	10.6	0.17
CPU seg.	(DCO)	0.63	1.21	1.58	5.42	3.09	11.34	54.23
	(DCS)	0.05	0.06	0.06	0.27	0.06	0.38	3.3
Z^*		412	2622	47710	3108	3550	6127	40438
Z_p		412	2622	47710	3108	3550	6777	40438
Z_d		419	2622	47800	3108	3600	7519	40508
Num. de Iteraciones	DCO)	7	11	9	16	15	21	23
	(DCS)	5	5	3	6	6	6	11

DCO: Descomposición Cruzada Original
DCS: Descomposición Cruzada Separable

Tabla 4 Resultados Computacionales

Num. de Corrida	a_i	b_j	f_i	Z_p	Z_d	Z^*	% Brecha	CPU seg.	Num. Iter.
1	13	12	(1)	412	419	412	1.6	0.05	5
2	13	12	(2)	223	223	223	0.0	0.00	2
3	15	10	(2)	178	178	178	0.0	0.00	2
4	15	10	1000	3160	3160	3160	0.0	0.04	4
5	50	10	(1)	310	310	310	0.0	0.00	3

(1): $f_i = \{60, 60, 70, 30, 50\}$
(2): $f_i = \{6, 6, 7, 3, 5\}$

Tabla 5 Problema 5x4

Num. de Corrida	a_i	b_j	f_i	Z_p	Z_d	Z^*	% Brecha	CPU seg.	Num. Iter.
1	100	31	(1)	6777	7519	6127	10.6	0.38	6
2	100	31	(2)	1656	1656	1656	0.0	0.06	2
3	100	65	(1)	14215	14230	14215	0.1	0.16	3
4	100	65	(2)	3919	3919	3919	0.0	0.17	2
5	123	26	(1)	10179	10249	10179	0.6	0.27	4
6	123	26	(2)	1401	1401	1401	0.0	0.05	5

(1): $f_i = \{1600, 1300, 1200, 400, 1400, 1100, 900, 700, 300, 1500\}$
(2): $f_i = \{16, 13, 12, 4, 14, 11, 9, 7, 3, 15\}$

Tabla 6 Problema 10x15

V. CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

♠ .- En *[Guignard, 1994]* se establece que los tres mejores esquemas de relajación Lagranjeana, para resolver el problema de Localización de Servicios con Restricciones de Capacidad:

$$\underset{x,y}{Min.}\cdot \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} + \sum_i f_i\, y_i$$

$$\begin{array}{lllll} s.\ a. & & & & \\ \sum_i x_{ij} = 1, & \forall i & (5.1), & & \\ x_{ij} \le m_{ij}\, y_i, & \forall i,j & (5.2), & & (P) \\ \sum_i a_i\, y_i \le \sum_i d_j\,, & \forall j & (5.3), & & \\ \sum_j d_j\, x_{ij} \le a_i\, y_i\,, & \forall i & (5.4), & & \\ x_{ij} \ge 0,\ \ y_i = 1,0, & \forall i,j. & & & \end{array}$$

son los siguientes:

(LR) *[Geoffrion y McBride, 1978; Guignard y Ryu, 1992].*

Dualizar *(5.1)* y usar la propiedad de linearización entera. Entonces resolver por servicio, un subproblema del tipo mochila continuo y un subproblema del tipo mochila 0-1, sobre todos los servicios. Con lo que se obtienen cotas fuertes y el costo de cálculo es pequeño.

(LD) *[Guignard y Kim, 1987].*

Con esta estrategia se debe copiar $x_{ij} = x_{ij}'$ y $y_i = y_i'$ en la restricción *(5.4)*. Duplicar la restricción *(5.3)*. Separar en subproblemas de la siguiente forma:

{(4.1), (4.2), (4.3)} ⇒ APLP *[Thizy, 1993 ; Ryu, 1993]*

{(4.2), (4.3), (4.4)} ⇒ como *(LR)*.

Obteniéndose cotas fuertes, pero el costo de cálculo es muy alto.

(LS) *[Chen y Guignard, 1992].*

En esta otra estrategia se establece copiar $\sum_j d_j\, x_{ij} = \sum_j d_j\, x_{ij}'$ y $y_i = y_i'$ en la restricción *(5.5)*. Hacer la misma separación que en *(LD)*, con lo que se obtiene la

misma cota y se trabaja con mucho menos multiplicadores de Lagrange y en consecuencia el costo de cálculo es menor.
Sin embargo, en nuestro trabajo hemos llegado a la conclusión de que no es necesario hacer la duplicación de $y_i = y_i'$, puesto que el multiplicador de Lagrange para su relajación, no afecta el resultado final al que se llega. Esto es, sea:

$$R = \underset{x,y}{Min.} \sum_i f_i y_i + \sum_i \sum_j \lambda_i d_j x_{ij} - \sum_i \sum_j \lambda_i d_j x_{ij} + \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}$$

$s.a.$

$$\sum_i a_i y_i \geq D, \forall j, \qquad \sum_i x_{ij} \geq 1, \forall j,$$

$$y_i = 0,1, \forall i, \qquad \sum_i d_j x_{ij} \leq a_i y_i, \forall i,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_i, \forall i,j,$$

donde $D = \sum_j d_j$, para $j=1,\ldots,n$.

$$R \geq Q = \underset{y}{Min.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_i f_i y_i \\ \sum_i a_i y_i \geq D \\ \quad y_i = 0,1, \forall i. \end{array} \right\} + \underset{x}{Min.} \left\{ \begin{array}{c} \sum_i \sum_j (C_{ij} + \lambda_i d_j) x_{ij} + \sum_i \sum_j -\lambda_i d_j x_{ij} \\ \sum_i x_{ij} = 1, \forall j, \qquad \sum_j d_j x_{ij} \leq a_i, \forall i, \\ 0 \geq x_{ij} \geq 1 \, \forall i,j \end{array} \right\}$$

$$R \geq Q \geq S = \underset{y}{Min.} \sum_i f_i y_i + \underset{x}{Min} \sum_i \sum_j (C_{ij} + \lambda_i d_j) x_{ij} + \sum_i \underset{x}{Min.} -\lambda_i \sum_j d_j x'_{ij}$$

$$\sum_i a_i y_i \geq D \qquad \sum_i x_{ij} = 1, \forall j, \qquad \sum_j d_j x'_{ij} \leq a_i, \forall i,$$

$$y_i = 0,1, \forall i. \qquad \sum_j d_j x_{ij} \leq a_i \, \forall i, \qquad \underbrace{0 \leq x'_{ij} \leq 1, \forall i,j}_{\sum_i -\lambda_i \eta_i y_i}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \forall i,j.$$

Donde la solución con $y_i = 1$, para $i=1,\ldots,m$, del siguiente subproblema,

$$
\begin{aligned}
&\underset{x}{Min.} \; -\lambda_i \sum_j d_j x'_{ij} \\
&s.a. \\
&\quad \sum_j d_j x'_{ij} \le a_i \; \forall i, \\
&\quad 0 \le x'_{ij} \le 1, \forall i,j,
\end{aligned}
$$

está dada por:

$$
v_i = \begin{cases} Min.\{a_i, D\} & si \;\; \lambda_i > 0, \\ 0 & si \;\; \lambda_i \le 0. \end{cases}
$$

En consecuencia si tiene:

$$
R = \underset{\lambda \ge 0}{Opt.} \left\{ \begin{array}{ll} \underset{y}{Min} \sum_i (f_i - \lambda_i v_i) y_i + \sum_j \underset{x}{Min} \sum_i (C_{ij} + \lambda_i d_j) x_{ij} & \\ \sum_i a_i y_i \ge D & \sum_i x_{ij} = 1 \\ y_i = 0,1 & 0 \le x_{ij} \le 1 \\ \lambda_i \ge 0 & \end{array} \right\}
$$

$$
\sum_j d_j x_{ij} \le a_i y_i .
$$

Son los mismos subproblemas S y Q que se obtuvieron con el desarrollo completo.

Otra forma de llegar al mismo resultado, es realizando el siguiente esquema de relajación simple:

$$
\begin{array}{ll}
R = \underset{y}{Min.} \sum_i f_i y_i + \underset{x}{Min} \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij} & \\
\sum_i a_i y_i \ge D & \sum_i d_j x_{ij} \le a_i y_i \\
y_i = 0,1 & \sum_i x_{ij} = 1 \\
& 0 \le x_{ij} \le y_i
\end{array}
$$

Sea $v_i = Min\{a_i, D\}$, la contribución de cada servicio abierto, entonces la formulación del problema queda como:

$$R = \underset{y}{Min.}\sum_i f_i y_i + \underset{x}{Min}\sum_i\sum_j C_{ij}x_{ij} + \sum_i \lambda_i\left(\sum_j d_j x_{ij} - v_i y_i\right)$$
$$\sum_i a_i y_i \geq D \qquad \sum_i x_{ij} = 1 \qquad \sum_i d_j x_{ij} - v_i \leq 0$$
$$y_i = 0,1 \qquad 0 \leq x_{ij} \leq 1$$

Cumpliendo también que:

$$R \geq Q \geq S = \quad \underset{y}{Min.}\sum_i (f_i - \lambda_i v_i) y_i \quad + \quad \sum_j \underset{x}{Min.}\sum_i (C_{ij} + \lambda_i d_j) x_{ij}$$

Optimo $\qquad \sum_i a_i y_i \geq D \qquad \sum_i x_{ij} = 1$

$\lambda_i \geq 0 \qquad y_i = 0,1 \qquad 0 \geq x_{ij} \geq 1$

$$\sum_j d_j x_{ij} \leq v_i y_i$$

$$\lambda_i\left(\sum_j d_j x_{ij} - v_i y_i\right) = 0$$

Que es otro forma de llegar al resultado obtenido.

♠ Otro resultado muy interesante, es la posibilidad de no eliminar a la restricción relajada y utilizarla para reforzar al subproblema, resultando con la siguiente formulación:

$$(LD) \geq T = \quad \underset{y}{Min.}\sum_i (f_i - \lambda_i v_i) y_i \quad + \quad \sum_j \underset{x}{Min.}\sum_i (C_{ij} + \lambda_i d_j) x_{ij}$$
$$\sum_i a_i y_i \geq D \qquad \sum_i x_{ij} \geq d_j, \ \forall j$$
$$y_i = 0,1, \ \forall i \qquad \sum_j x_{ij} \leq a_i, \ \forall i$$
$$\lambda_i \geq 0 \qquad x_{ij} \geq 0, \lambda_i \geq 0, \forall i,j$$

Que resulta en un problema del tipo mochila *(Q)* y uno del tipo transporte *(S)*, ambos función de λ_i , para $i=1,\dots,m$. Formulación que al utilizar $\lambda_i^{\circ} = -f_i/a_i$ como valor inicial y $\lambda_i^{k} = -f_i/\sum_j x_{ij}$, para los subsecuentes valores, hace que: $Q=0$, entonces los valores de $y_i \neq 0$, para $i=1,\dots,m$, generados por la solución del problema de transporte, minimizan al subproblema dual Lagrangeano completo.

♠ Otro aspecto importante que se ha obtenido a partir de este trabajo, es la posibilidad de resolver el problema de Localización de Servicios con solo darle solución a una serie de problemas del tipo transporte, con la siguiente estructura:

$$
\begin{aligned}
&\underset{x}{Min.} \sum_i \sum_j \left(C_{ij} - \lambda_i\right) x_{ij} \\
&s.a. \\
&\quad \sum_i x_{ij} \geq d_j, \qquad \forall j, \\
&\quad \sum_j x_{ij} \leq a_i, \qquad \forall i, \\
&\quad x_{ij} \geq 0, \quad \lambda_i < 0, \quad \forall i, j.
\end{aligned}
$$

Con valores para λ_i , con $i=1,\dots,m$ de:

$$
\begin{aligned}
\lambda_i^{\circ} &= -f_i / a_i, \forall i, && \textit{como valor inicial} \\
\lambda_i^{k} &= -f_i \Big/ \textstyle\sum_j x_{ij}, \forall i, && \textit{para los demás valores}
\end{aligned}
$$

Resultado que ha permitido desarrollar un algoritmo de solución más sencillo, que cualquiera de los obtenidos hasta ahora.

♠ Como se mencionó al inicio del estudio, el mayor "cuello de botella" al usar las técnicas de descomposición para resolver el problema de Localización de Servicios, es el cálculo repetido del problema maestro, situación que se disminuyó al usar la técnica de Descomposición Cruzada, y lo que finalmente se evita en forma total al utilizar nuestro algoritmo.

♠ Otro aspecto interesante con los resultados obtenidos, es la posibilidad de obtener un costo total menor al mejorar el diseño o patrón de distribución, ya que es posible aumentar o disminuir la capacidad de los servicios, al incorporarla por medio de λ_i , con $i=1,\dots,m$, como una función de los costos de transporte.

♠ Puesto que ahora es posible resolver el problema de Localización de Servicios empleando una serie de problemas del tipo transporte, es interesante hacer notar la viabilidad de usar cualquier tipo de software comercial para tal efecto.

♠ Otro aspecto interesante es la posibilidad de utilizar el mismo algoritmo pero ahora, para resolver el problema de Localización de Servicios sin Restricciones de Capacidad, con solo realizar ciertas modificaciones:

- Para la solución con $y_i = 1$, para $i=1,\dots,m$, del siguiente subproblema,

$$\begin{aligned} &\underset{x}{Min.}\ -\lambda_i \sum_j d_j x'_{ij} \\ &s.a. \\ &\quad \sum_j d_j x'_{ij} \le a_i\ \forall i, \\ &\quad 0 \le x'_{ij} \le 1,\ \forall i,j, \end{aligned}$$

dada por:

$$v_i = \begin{cases} Min.\{a_i, D\} & si\ \ \lambda_i > 0, \\ 0 & si\ \ \lambda_i \le 0. \end{cases}$$

Se tendrá que utilizar $\sum_j d_j = D, \forall i$, como solución al problema anterior. Dado que a_i es la capacidad de cada servicio y en este problema se le considera infinita.

- Además en lugar de resolver una serie de problemas del tipo transporte, se debe resolver una serie de problemas del tipo Selección Múltiple, con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} &\underset{x}{Min.}\ \sum_i \sum_j (C_{ij} - \lambda_i) x_{ij} \\ &s.a. \\ &\quad \sum_i x_{ij} \ge 1, \qquad \forall j, \\ &\quad x_{ij} \ge 0,\ \ \lambda_i < 0,\ \ \forall i,j. \end{aligned}$$

Con valores para λ_i, con $i=1,\dots,m$ de:

$$\lambda_i^1 = -f_i / a_i\,, \forall i, \qquad \textit{como valor inicial}$$
$$\lambda_i^k = -f_i \Big/ \sum_j x_{ij}\,, \forall i, \quad \textit{para los demás valores}$$

Resultado que permite utilizar el mismo algoritmo de solución para el problema sin restricciones de capacidad

EXTENSIONES

♠ **Implementar el algoritmo de solución para resolver problemas dinámicos, en diferentes periodos de tiempo.**

♠ **Utilizar la estrategia de solución para analizar otros problemas que tienen similar estructura.**

♠ **Usar la misma estrategia para resolver el problema de localización de servicios con costos de transporte no lineales.**

♠ **Robustecer el algoritmo que se propone, esto con el fin de cerrar la brecha de dualidad que aún resulta en la solución de algunos problemas.**

REFERENCIAS

Aardal, K. and Ari, A.. 1990, "On the resemblance between the Kornai- Liptak and cross decomposition techniques for block-angular linear programs", European Journal of peration Research 46, 393-398.

Aikens, C.H., 1985, "Facility location model for distribution planning", European Journal of Operation Research 22, 263-279.

Aikens, C.H., 1985, "Facility location models for distribution planning", European Journal of Operation Research 22, 263-279.

Akinc, U. and Khumawala, B.M., 1977, "An efficient branch and bound algorithm for the capacitated warehouse location problem", Management Science 23, 585-594.

Baumol, W.J. and Fabian, T., 1964, "Decomposition, pricing for decentralization and external economies", Management Science 11-1, 1-32.

Benders, J.F., 1962, "Partitioning for solving mixed variables programming problemas", Numeriosche Mathematik 4, 238-252.

Bradley, G.H., Brown, G.G. and Graves, G.W., 1977, "Design and implementation of large scale primal transshipment algorithms", Management Science 24, 1-34.

Brandeau, M.L. and Chiu, S.S., 1989, "An overview of representative problems in location research", Management Science 35, 645-674.

Cabot, A.V. and Ergengue, S.S., 1984, "Some branch-and-bound procedure for fixed-cost transportation problems", Naval Research Logistic Quarterly 31, 145-154.

Conn, A.R. and Cornuéjols, G., 1990, "A projection method for the uncapacitated facility location problems", Mathematical Programming 46, 273-298.

Cornuejols, G., Sridharan, R. and Thizy, J.M., 1991, "A comparison of heuristics and relaxations for the capacitated plant location problem", European Journal of Operation Research 50, 280-297.

Dantzig, G.B. and Wolfe, P., 1960, "Decomposition principle for linear programs", Operation Research 8, 101-111.

Dearing, P.M. and Newruck, F.C., 1966, "A branch and bound algorithm for plant location", Operation Research 14, 361-368.

Devine, M. and Lesso, W.G., 1972, "Models for the minimun cost development of offshore oil fields", Management Science 18, B378-B387.

Efroymson, M.A. and Ray, T.L., 1966, "A branch and bound algorithm for plant location", Operation Research 14, 361-368.

Erlenkotter, D., 1978, "A dual-based procedure for uncapacitated facility location", Operation Research 25, 992.1009.

Geoffrion, A.M., 1972, "Generalized Benders decomposition", Journal of Optimization Theort and Applications 10, 237-260.

Geoffrion, A.M. and Graves, G.W., 1974, "Multicommodity distribution system design by Benders decomposition", Management Science 20, 822-844.

Geofrion, A. and McBride, R., 1978, "Lagrangean relaxation applied to capacitated facility location problems", AIIE Transactions 10-1, 40-47.

Geoffrion, A.M. and McBride, R., 1978, "Lagrangean relaxation applied to the capacitated facility location problem", AIIE Transaction 10, 40-47.

Guignard, M. and Kim, S., 1978, "Lagrangean decomposition: A model yielding stronger lagrangean bounds", Mathematical Programming 39, 215-228.

Guignard, M. and Spielberg, K., 1979, "A direct dual method for the mixed plant location problem whit some side constraints", Mathematical Programming 17, 198-228.

Guignard, M. and Opaswongkarn, K., 1990, "Lagrangean dual ascent algorithms for computing bounds in capacitated plant location problems", European Journal of Operation Research 46, 73-83.

Guignard, M., 1988, "A Lagrangean dual algorithm for simple plant location problem", European Journal of Operation Research 35, 193-200.

Guignard, M., 1994, "Primal relaxations for integer programming", Tutorial VII Congreso Latino-Ibero Americano de Investigación de Operaciones e Ingeniería de Sistemas, Santiago de Chile.

Guignard, M. and Kim, S., 1983, "A strong Lagrangean relaxation for capacitated plant location problems", Technical report # 56, Department of Statistics, The Wharton School, University of Pennsylvania.

Guignard, M., 1983, "A Lagrangean dual ascent method based on (Separable) relaxation strengthened by valid inequalities (illustrated for the matching problem)", Technical report # 55, Department of Statistics, The Wharton School, University of Pennsylvania.

Guignard, M., 1984, "Lagrangean decomposition: An improvement over Lagrangean and surrogate duals", Technical report # 62, Department of Statistics, The Wharton School, University of Pennsylvania.

Guignard, M., 1994, "Lagrangean relaxation: A short course", Tutorial VII Congreso Latino-Ibero Americano de Investigación de Operaciones e Ingeniería de Sistemas, Santiago de Chile.

Guignard, M. and Opaswongkarn, K., 1990, "Lagrangean dual ascent algorithms for computing bounds in capacitated plant location problems", European Journal of Operation Research 46, 73-83.

Hohenbalken, B.V., 1977, "Simplicial decomposition in nonlinear programming algorithms", Mathematical Programming 13, 49-68.

Holmberg, K., 1992, "Linear mean value cross decomposition: A generalization of the Kornai-Liptak method", European Journal of Operation Research 62, 55-73.

Holmberg, K. and Jornsten, K.O., 1984, "Cross decomposition applied to the stochastic transportation problem with side constraints", European Journal of Operation Research 17, 361-368.

Holmberg, K., 1990, "On the convergence of cross decomposition", Mathematical Programming 47, 269-296.

Jörnsten, K. and Näsberg, M., 1986, "A new Lagrangian relaxatio approach to the generalized assignment problem", European Journal of Operation Research 27, 313-323.

Kaufman, L., Eede, M.V. and Hansen, P., 1977, "A plant and warehouse location problem", Operational Research Quarterly 28, 547-554.

Khumawala, B.M., 1972, "An efficient branch and bound algorithm for the warehouse location problemm", Management Science 18, B718-B731.

Kornai, J. and Liptak, T., 1965, "Two-level planning", Econométrica 33, 141-169.

Kuehn, A.A. and Hamburger, M.J., 1963, "A heuristic program for location warehouses", Management Science 9, 643-666.

Kuehn, A. and Hamburger, M., 1963, "A heuristic program for locating warehouses", Management Science 9, 643-666.

Lasdon, L., 1970, "Optimization theory for large systems", The MacMillan Co.

Leung, M.Y. and Magnanti, T.L., 1989, "Valid inecualities and facets of the capacitated plan location problem", Mathematical Programming 44, 271-291.

McDaniel, D. and Devine, M., 1977, "A modified Benders partition algorithm for mixed integer programming", Management Science, 312-379.

Mirchandani, P.B. and Francis, R.L., 1990, "Discrete location theory", John Wiley & Sons, Inc.

Nauss, R.M., 1978, "An improved algorithm for the capacitated facility location problem", Journal of the Operational Research Society 29, 1195-1201.

Robinson, J., 1951, "An iterative method of solving a game", Annals of Mathematics 54, 296-301.

Rockafellar, R.T., 1993, "Lagrange multipliers and optimality", SIAM Review 35-2, 183-238.

Spielber, K., 1969, "algorithm for the simple plant-location problem with some side constrints", Operation Research 17, 85-111.

Tcha, D. and Lee, B., 1984, "A branch-and-bound algorithm for the multi-level uncapacitated facility location problem", European Journal of Operational Research 6, 61-66.

Van Roy, T.J. and Gelders, L.F., 1981, "Solving a distribution problema with side constraints", European Journal of Operation Research 6, 61-66.

Van Roy, T.J. and Erlenkotter, D., 1982, "A dual based procedure for dynamic facility location", Management Science 28, 1091-1105.

Van Roy, T.J., 1984, "A cross decomposition algorithm for capacitated facility location", Operation Research Society of America 34, 145-163.

Van Roy, T. J., 1983, " Cross decomposition for mixed integer programming", Mathematical Programming 25, 46-63.

VI. APÉNDICE

A Principio de Linearización Entero

Considerar el siguiente problema de programación mixto:

$$
\begin{aligned}
& Max.\ f\,x + g\,y \\
& s.a. \\
& \quad A_i x_i \leq p_i y_i \quad , \quad \forall i , \\
& \quad B\,y \leq b \quad , \\
& \quad x \in X \ , y_i = 0,1 \ , \forall i ,
\end{aligned}
$$

donde X, puede ser considerado como el conjunto de enteros y x_i puede ser un vector.

Un método para resolver este tipo de problemas utilizando este principio, es como sigue:

i. Ignorar temporalmente las restricciones sobre las variables 0-1.

ii. Separar el problema resultante en uno para cada i, de tal forma que se tenga:

$$
(LR_\lambda) \quad
\begin{aligned}
& Max.\ f_i x_i + g_i y_i \\
& s.a. \\
& \quad A_i x_i \leq p_i y_i \ , \forall i , \\
& \quad x_i \in X \ , y_i = 0,1 ,
\end{aligned}
$$

donde y_i es un parámetro 0-1. Para $y_i = 0, x_i = 0$ y $f_i y_i + g_i y_i = 0$.

Para $y_i = 1$, resolver $\left(LR_\lambda^i \middle| y_i = 1\right)$; es decir:

$$
\begin{aligned}
v_i = \; & Max.\; f_i y_i + g_i \\
& s.a. \\
& \quad A_i x_i \leq p_i\,, \\
& \quad x_i \geq 0\,,
\end{aligned}
$$

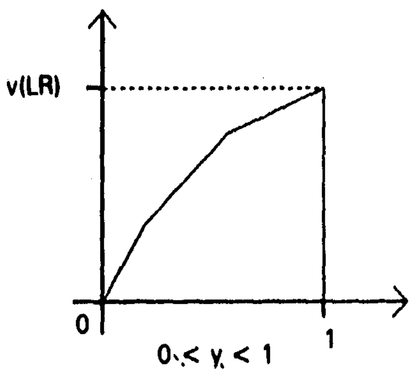
donde v_i es la contribución de $y_i = 1$ en la función objetivo.

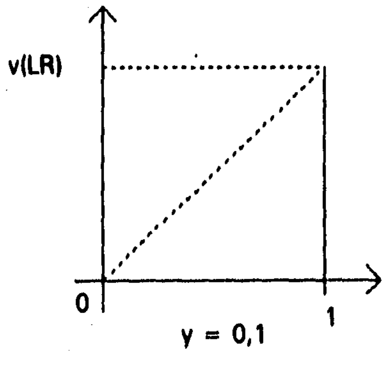
iii. Remplazar $v(LR_\lambda)$ por $v(PL_\lambda)$ donde:

$$
(PL_\lambda) \quad
\begin{aligned}
& Max.\; \sum_i v_i y_i \\
& s.a. \\
& \quad By_i \leq b\,, \\
& \quad y_i = 0,1\,, \forall i\,.
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$v(LR) = Min_\lambda\; v(PL_\lambda) = Min_\lambda\; v(LR_\lambda) < v(LP)\,.$$





Ejemplo. Considere el problema de *p-medios* con restricciones de capacidad.

$$\begin{aligned}
&\underset{x,y}{Min.}\ \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i y_i \\
&s.a. \\
&\quad \sum_i x_{ij} = 1, \ \forall j, \\
&\quad \sum_j d_j x_{ij} \le a_i y_i, \ \forall i, \\
&\quad x_{ij} \le y_i, \ \forall i,j, \\
&\quad \sum_i y_i \le p, \\
&\quad x_{ij} \ge 0, \ y_i = 0,1, \ \forall i,j.
\end{aligned}$$

Relajando la restricción $\sum_i x_{ij} = 1, \forall j$, con multiplicadores $\mu_j \ge 0$, e ignorando temporalmente a la restricción $\sum_i y_i \ge p$, es posible obtener una cota fuerte, tal que:

$$v(LR) = Max._\mu v(LR_\mu) = Max._\mu v(PL_\mu),$$

donde

$$\begin{aligned}
v(PL_\mu) = \ &\underset{y}{Min.} \sum_i v_i y_i \\
&s.a. \\
&\quad \sum_i y_i \le p, \\
&\quad y_i = 0,1,
\end{aligned}$$

el cual es un problema trivial de la mochila en variables y.

Donde:

$$v_i = v(LR_\mu^i | y_i = 1) = \underset{x}{Min}\left\{ \sum_j (C_{ij} + \mu_i) x_{ij} + f_i \middle| \sum_j d_j x_{ij} \le a_i, x_{ij} \le 1 \right\} - \sum_i \mu_i,$$

el cual es un problema del tipo mochila continuo, en las variables x.