9
2Gj

[illegible]

CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA MODERNA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA:

OSCAR GÓMEZ JIMÉNEZ

DIRECCIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

DIRIGIDO POR: DR. PABLO BARRERA SÁNCHEZ

Facultad de Ciencias
de la UNAM

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
CONCEPTOS BASICOS DE GEOMETRIA MODERNA

realizado por OSCAR GOMEZ JIMENEZ

con número de cuenta 6306188-6 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Ciudad Universitaria, México, D.F. 22 Abril 1996.

Director de Tesis Propietario	DR. PABLO BARRERA SANCHEZ
Propietario	DR. JESUS LOPEZ ESTRADA
Propietario	M. en C. MARIA ELENA GARCIA ALVAREZ
Suplente	DR. DARIO MORENO OSORIO
Suplente	M. en C. FRANCO TOLEDO DE LA CRUZ

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Conceptos Básicos de Geometría Moderna

Primavera de 1996.

PROLOGO

1. Este trabajo, "Conceptos Básicos de Geometría Moderna", se elaboró como Tesis de Licenciatura de Matemático. Se compone de cuatro capítulos, tres apéndices y dos apartados. Se pensó en un trabajo de geometría que se pudiera utilizar como texto en un curso semestral de geometría moderna elemental y que sirviera de antecedente para un curso de geometría analítica. El capítulo cero se extrajo de Basic Goemetry cuyos autores son George David Birkhoff y Ralph Beatley, y los capítulos uno, dos y tres es material de Euclidean Geometry and Transformations cuyo autor es Clayton W. Dodge.

2. *Basic Geometry* es un libro de texto de geometría euclidiana para un curso anual de geometría plana a nivel bachillerato. Difiere en varios aspectos esenciales respecto de otros textos actuales que cubren los mismos temas. La naturaleza de estas diferencias es más bien aparente para cualquier profesor con experiencia en geometría.

El desarrollo tradicional de geometría demostrativa incluye cuidadoso estudio de ciertos teoremas los cuales el principiante está ansioso de aceptar sin demostración y que él muy bien podría tomar por dado como suposición o postulado. Tales desarrollos intranquilizan al educando en un momento temprano quien tiende a oponer cierta resistencia al aprendizaje de la geometría. El empleo de superposición en la demostración de algunos de estos teoremas es todavía más desmoralizante. Este método de demostración sale de la armonía con el propósito de la instrucción en geometría que a pesar de su validez, su uso se debe restringir comunmente a aquellos pocos casos para los que no hay mejor método. En un curso elemental se deben ignorar detalles matemáticos sutiles que no son apropiados para las mentes de estudiantes en este trance. Sin embargo, siempre que la presentación incluya una incompletés sustancial es conveniente indicarlo tan pronto como sea posible.

En el libro a que nos estamos refiriendo, los autores utilizan únicamente cinco postulados fundamentales para la geometría plana, que no son todos los de Euclides y que tienen su base en regla con escala y transportador. Consideran que estos cambios son con la intención de simplificar y condensar. Y como resultado obtienen una geometría bidimensional construída con solamente cinco postulados fundamentales, siete teoremas básicos y otros diecinueve teoremas, junto con siete de lugares geométricos. Indican que el incremento de conocimiento y la creciente demanda que hace la civilización, es más importante que nuestras instrucciones sean tan compactas y provechosas como sean posibles para el estudiante ya que esto lleva en seguida al corazón de la geometría.

Observan que en un curso en geometría demostrativa nuestro primer interés debe ser buscar que el estudiante articule alrededor de la clase de cosas que el mismo discurre. Hacerlo crítico de sus propios razonamientos y de otros más. Hacer que él vea la necesidad para suposiciones, definiciones y términos indefinidos detrás de todo cuerpo lógico; que distinga entre buenos y malos argumentos; que vea y establezca relaciones correctamente y bosqueje conclusiones propias de ello.

Recomiendan que en clases de geometría en el aula, es un procedimiento excelente elegir las sugerencias de los estudiantes en la demostración de la validez de los teoremas y consideran que es la mejor manera de demostrarlos. Creen, que desafortunadamente, no obstante, los teoremas no siempre se pueden demostrar en el orden propuesto por los estudiantes. Por lo tanto los autores escogen el orden de los teoremas en los diferentes ejercicios. Pero aprueban todo esfuerzo de parte del profesor para elegir la cooperación de los estudiantes en la construcción de la geometría.

Juzgan que es difícil demostrar que el estudio de la geometría necesariamente lleva en gran medida a aquellos hábitos y actitudes que tan ansiosamente se reclaman en la enseñanza; pero que es aún más difícil demostrar que otros temas de instrucción puedan producir estos resultados tan fácil y seguramente como puede lograrlo la geometría demostrativa en las manos de un profesor capacitado que se lo proponga.

3. *Euclidean Geometry and Transformation* es un libro de texto para estudiantes que se inician en el estudio de la geometría moderna a nivel licenciatura, tal que los capítulos uno, dos y tres se puedan cubrir durante un curso de un semestre de cuarenta y cinco horas, considerando dos secciones por cada tres horas. Los tres primeros capítulos de este libro se han incluído en este trabajo, tal libro contiene además tres capítulos más que son: Vectores y Números Complejos en Geometría; Inversión; e Isometrías en el Espacio.

El autor explica que el primer capítulo de cada sección de este libro está destinado a una discusión de la historia de la geometría, específicamente una historia para el tipo de material cubierto en el capítulo referido. Que estas secciones, aunque contienen pocos ejercicios, no son parte integral del material del texto en general, así que pueden ser leídas en tiempo conveniente. Que con algunas excepciones, estas secciones históricas, progresan cronológicamente, así que su lectura en el orden dado es la sugerida.

Considera que justamente como la geometría analítica se reconoce hoy en día como una herramienta importante en geometría, así también las isometrías y similitudes son herramientas importantes en la geometría. Indica que se sabe muy bien que la geometría euclidiana es el estudio de aquellas propiedades de puntos que son invariantes bajo isometrías y similitudes, pero que así como tales propiedades se exhiben utilizando estas transformaciones no se ha discutido ampliamente en libros de texto. Dice que un primer propósito de este libro es proporcionar una fuente para teoría y práctica en la aplicación de estas transformaciones a la geometría para estudiantes de nivel licenciatura de matemáticas en general y para prospectos a profesores de geometría en particular. Explica que el espíritu de la geometría moderna elemental se presenta con tópicos tales como los teoremas de Menelao y Ceva, construcciones euclidianas y la geometría de líneas y puntos especiales asociados con un triángulo. Sugiere que el profesor de geometría de bachillerato que se prepare con este texto puede confiar que está preparado para manejar problemas de geometría que surgen en clases de nivel medio superior. Aclara que los prerrequisitos para este material incluye álgebra, geometría y trigonometría elemental de bachillerato. Que alguna familiaridad con el concepto de función le será de utilidad. Que la meta primera de este libro es preparar al lector a hacer geometría euclidiana. Sugiere que el lector se detenga un momento después de leer la proposición de cada teorema en el texto, que trace una figura apropiada e intente una demostración antes de leerla. Que compare su intento de demostración con la dada en el texto. Que trabaje una abundancia de ejercicios, buscando primero en el apartado de "Sugerencias" cuando sea incapaz de obtener una solución y luego que busque en el apartado de "Respuestas" solamente como un último recurso para que obtenga el progreso hacia un entendimiento genuino. Opina que la geometría, cuando se entiende, es ciertamente un estudio fascinante.

4. Observo que, siendo la geometría tan rica, desde un punto de vista científico, desde un punto de vista técnico, desde un punto de vista artístico, desde un punto de vista heurístico, desde un punto de vista de desarrollo de procesos mentales,etc., actualmente la actividad de enseñanza y aprendizaje de esta rama de las matemáticas en niveles anteriores a licenciatura, ha caído en abandono. Creo que las causas de este abandono son fundamentalmente: Que se sigue trabajando en la enseñanza con textos obsoletos y a veces con los "fundamentos" tal como lo estableció Euclides; Que algunos profesores trabajan con los fundamentos actuales sin darse cuenta que para un principiante no es lo apropiado para que aprenda a hacer geometría: Que no hay claridad de ¿Qué se debe buscar en la enseñanza de la geometría?; Que no se ha trabajado suficientemente bien en la elaboración de textos. Que a los profesores de bachillerato nos falta una preparación más amplia en el estudio de la geometría.

5. El capítulo cero de este trabajo, que es material entresacado de Basic Geometry, tiene la intención de recordar estudios de geometría de nivel bachillerato, se busca conseguir la comprensión del vínculo entre los conceptos clásicos y modernos de la geometría. Se aprovecha la presentación de hacer geometría como lo plantean los autores Birkhoff y Beatley, cuyas propuestas siguen vigentes para la enseñanza de esta materia, a pesar que este libro es edición de 1941.

6. Algunas características que observo del libro Basic Geometry son: Naturalidad en vez de detalles matemáticos sutiles que no son apropiados para el estudiante que se inicia en el estudio de la geometría; tomar como verdaderas, sin demostración, algunas proposiciones que son teoremas pero que no es el momento de analizar sus demostraciones, ya que ante ellas, el educando está ansioso de aceptarlas como suposiciones o

postulados; tomar pocos principios y definiciones como inicio ya que la profusión de ideas que no se utilizarán inmediatamente tiende a dispersar la atención del alumno; con la aceptación del principio cinco, principio uno de semejanza "Dos triángulos son semejantes si un ángulo de uno es igual a un ángulo del otro triángulo y los lados que incluyen a estos ángulos son proporcionales", los fundamentos lógicos de esta geometría son independientes de cualquier idea de movimiento, otros libros de geometría se refieren a veces a triángulos iguales como triángulos "congruentes", lo hacen así para indicar que no solamente son iguales los lados y ángulos correspondientes, sino que también esta igualdad se puede mostrar al mover un triángulo y colocarlo sobre el otro; definen "congruente" en términos de la idea indefinida de "mover" y "acomodar". Que las medidas de distancias y ángulos lo establecen desde un punto de vista práctico, considerando el uso de regla y transportador graduados; que sin perder de vista el carácter deductivo de la geometría, el alumno llega rápidamente al corazón de los problemas geométricos. Considero que este texto proporciona un enfoque para desarrollar la geometría elemental en forma accesible para un estudiante de bachillerato y al mismo tiempo con un alto grado de rigor lógico, procurando hasta donde es posible, reducir las abstracciones a un mínimo, de suerte que el estudiante no corra el riesgo de perder el hilo de la estructura lógica con demasiadas sutilezas y abstracciones.

7. Los capítulos uno, dos y tres, que conservan la numeración del texto original, son el interés principal de este trabajo, ya que con ellos se puede dar por cubierto un curso de geometría moderna. Además, con los capítulos dos y tres se quiere difundir principalmente los conceptos de isometrías y similitudes en la forma que el autor lo hace, ya que en libros en español tampoco se han discutido ampliamente estos temas.

8. Con el capítulo Uno se da uno cuenta de una mayor profundidad, de otros refinamientos y otros conceptos sofisticados que corresponden a la geometría moderna, comparado con la geometría euclidiana plana; Se encuentra la alegría que produce el conocimiento y en particular el de la geometría, al encontrarse con una variedad de teoremas como los de Ceva, Menelao, Dos Triángulos de Desargues, Papus, El Círculo de los Nueve Puntos y con una variedad de propiedades del triángulo. También disfruta uno el entusiasmo que producen algunas elegantes demostraciones. Varios de los problemas tratados son verdaderamente bellos, interesantes y aleccionadores.

9. Los capítulos dos y tres en donde el autor introduce y desarrolla las teorías de isometrías y similitudes en el plano, lo hace en una primera sección en forma explicativa y en secciones posteriores lo formaliza y desarrolla; con lo que logra se obtenga una mayor comprensión. En estos capítulos aumenta el grado de abstracción de los conceptos ya que entran al campo del álgebra y de las transformaciones. El manejo de la simbología de estas transformaciones requiere buena dosis de práctica para adquirir la habilidad necesaria en las demostraciones de teoremas y en la resolución de otros problemas.

10. Los apéndices que se incluyen al final, aunque a veces son repetitivos con el material que aparece en el cuerpo del texto, tienen la finalidad de presentarlos a manera de resumen y también tienen el propósito de ampliar un poco más la información acerca de algunos aspectos de la geometría.

11. Igual que en el texto original se acompañan dos apartados: Sugerencias para ejercicios seleccionados y Respuestas a ejercicios, que corresponden únicamente a los capítulos uno, dos y tres.

12. Considero que este material, que está pensado para un curso semestral de geometría moderna, dará ánimo continuo al estudiante: Pues los teoremas y demostraciones, en general, son relativamente sencillos y fáciles de comprender, sin avanzar más allá de un curso elemental; ya que no hay grandes saltos en el desarrollo de los temas; debido a que la simbología utilizada es sencilla y fácil de manipular; en virtud de que las series de problemas están cuidadosamente seleccionadas; y también porque la presentación en el idioma materno, ayuda al lector que tiene cierta dificultad con el idioma inglés. Asimismo la historia y comentarios de los temas tratados en cada capítulo que son breves reseñas históricas de algunos temas o detalles curiosos o anécdotas biográficas de algunos matemáticos, hacen más interesante la enseñanza y le dan un toque especialmente atractivo y relajante al curso.

13. Agradezco ampliamente el apoyo, consejo y tolerancia que me brindó el Dr. Pablo Barrera Sánchez en la elaboración de este trabajo. También agradezco a familiares, amigos y compañeros que me animaron, aconsejaron y ayudaron para llevarlo a buen fin. Manifiesto mi profundo agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México que me cobijó en sus aulas y a los profesores que me guiaron.

14. Dedico esta faena a mis hijos Armando y Ariadna.

15. Oscar Gómez Jiménez.

Primavera de 1996.

CONTENIDO

CAPITULO 0 UN ENFOQUE DE GEOMETRIA BASICA

SECCION A | RAZONAMIENTO Y NATURALEZA DE LA DEMOSTRACION

A.1 En la vida diaria tenemos que enfrentar diferentes tipos de problemas: familiares, de trabajo, políticos, económicos, etc. En cada caso debemos tomar una determinación. Para ello requerimos elaborar un argumento para convencer o convencernos que la determinación tomada es la apropiada o la más adecuada. No es fácil elaborar argumentos. Se requieren: conocimiento del asunto, técnicas y práctica. También se necesita capacidad para distinguir entre razonamiento bueno y razonamiento malo. La geometría nos proporciona una buena instrucción en elaboración de argumentaciones.

A.2 **Definiciones y términos indefinidos** Muchas veces es complicado explicar asuntos que son muy claros para nosotros. El problema es, a veces, que algunas de las palabras que utilizamos tienen significados, para otras personas, diferentes de las que tienen para nosotros. Para evitar malos entendidos, es importante que definamos cuidadosamente, tanto como sea posible, cada palabra que utilicemos.

Puesto que una buena definición utiliza solamente conceptos que son más simples que el concepto que se define, algunos de los conceptos más simples deberán permanecer indefinidos. Debemos ser cuidadosos en distinguir entre el significado coloquial de las palabras, con el significado preciso de esas palabras.

A.3 **Ejercicios**

1. ¿Significa lo mismo en las tres expresiones siguientes la palabra derecho? ¿Es clara cada expresión?
   a) Vaya derecho al asunto.
   b) Por derecho esta propiedad le corresponde al hermano de Juán.
   c) El pino es más derecho que el mango.
2. Argumente en cada caso.
   a) Diga si el azúcar se disuelve, se derrite o se licúa en café caliente.
   b) La gasolina se utiliza, a veces, para limpiar delgadas capas de aceite que quedan en latas vacías de aceite. ¿Diga si la película de aceite se disuelve o se derrite en la gasolina?
3. Distinga entre "está contento" y "está alegre".
4. ¿Qué es una proposición ambigüa?
5. ¿Es ambigüo lo siguiente:? Nada es tan bueno para él.
6. ¿Es sur opuesto de norte?
7. Dos hombres están en el Polo Norte. Uno de ellos va al sur, el otro va en dirección opuesta. ¿Hacia donde va el segundo?
8. Una plomada, ¿está en línea vertical o perpendicular?
9. Una línea simple, ¿jamás puede ser perpendicular?
10. Si dos líneas son perpendiculares, ¿una debe ser vertical y la otra horizontal?
11. ¿Se pueden cortar tres líneas en un punto, de tal manera que cada una sea perpendicular a cada una de las otras?

A.4 **Suposiciones** Las ideas que se definen o las que se dejan sin definir, generalmente se representan con palabras simples, algunas veces se representan con frases, pero nunca completan una oración. Podemos combinar estas palabras definidas e indefinidas para formar oraciones o expresiones que sean ciertas o falsas. A tales expresiones se les llama *proposiciones*. Por ejemplo, cada una de las expresiones "4 veces 8 es 32" y "4 veces 8 es 28" es una proposición.

A veces oímos a dos personas discutir un asunto, esto es, una proposición. Cada uno argumenta lógicamente pero sin persuadir al otro para alterar su postura en lo más mínimo. Generalmente ninguno ha intentado hallar proposiciones anteriores que se están tomando *dadas válidas* en el argumento de su oponente y tampoco es conciente de las proposiciones anteriores de las cuales depende su argumento. Aun la proposición más familiar de aritmética se basa en proposiciones anteriores que tenemos el hábito de omitir. Ordinariamente consideramos que $4X8 = 32$ es una proposición cierta; pero es cierta solamente cuando tomamos, por *aceptado o dado válido*, que la base del sistema que estamos utilizando es 10. Si consideramos que la base del sistema es 12, encontramos que 4 veces 8 es 28 y que $4X8 = 32$ es falso. Ver Fig. A.4.

Aquí hay 4 veces 8 asteriscos

******** ******** ******** ********

una docena — una docena — 8 unidades

Son 2 docenas 8 unidades: 28 en base 12.

Figura A.4

El primer paso, para discutir una proposición, para demostrar su verdad o falsedad, es descubrir las primeras proposiciones de las que depende. Algunas, pocas, de estas proposiciones deberán permanecer sin demostración y ser tomadas como aceptadas. No se pueden probar todas las cosas. La proposición que se acepta sin prueba se le llama *suposición*. Cuando critiquemos un argumento o aseguremos que una proposición es cierta o falsa, primero debemos encontrar las suposiciones de las que depende el argumento o proposición.

Un conjunto de suposiciones puede parecer muy extraño; pero si ninguna de esas suposiciones está en contradicción con las otras, toda proposición que se deduzca lógicamente de ellos, será cierta con respecto a ellas. Cuando decimos que alguna proposición es cierta, entendemos que la proposición se sigue lógicamente de las suposiciones en las cuales se apoya. Si aceptamos las suposiciones, debemos admitir la verdad de la proposición que se deduzca de ellas. Considerando conjuntos diferentes de suposiciones, la misma proposición puede ser o no ser cierta. Las suposiciones mismas no son ni ciertas ni falsas. Solamente se dice que son *ciertas* en el sentido de que su verdad haya sido supuesta.

Ni en matemáticas, ni en otros asuntos de la vida, se puede demostrar toda proposición. Algunas, pocas, deberán permanecer sin demostración y ser tomadas como *dadas válidas*. Las proposiciones que se pueden deducir lógicamente de las suposiciones, a veces se les llama *teoremas*. Las proposiciones que se eligen como suposiciones se les llama a veces *postulados* o *axiomas*. Las tres palabras *suposición*, *postulado*, *axioma*, todas tienen el mismo significado. Suposiciones, está relacionado con teoremas, del mismo modo que términos indefinidos, está relacionado con términos definidos, en el sentido de que no podemos definir toda idea, ni podemos demostrar toda proposición.

A.5 Ejercicios

1. Suponga que el plomo es más pesado que el fierro y que el plomo se derrite a una temperatura menor que el fierro. ¿Diga cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?
   a) El fierro sólido flota en plomo fundido.
   b) El fierro sólido se hunde en plomo fundido.
   c) El plomo sólido flota en fierro fundido.
   d) El plomo sólido se hunde en fierro fundido.
2. Suponga que el fierro es más pesado que el plomo y que el fierro se derrite a una temperatura menor que el plomo. ¿Cuál de las proposiciones del ejercicio A.5(1) es cierta?
3. Suponga que el plomo es más pesado que el fierro y que el fierro se derrite a una temperatura menor que el plomo. ¿Cuál de las proposiciones del ejercicio A.5(1) es cierta?
4. Suponga que el fierro es más pesado que el plomo y que el plomo se derrite a una temperatura menor que el fierro. ¿Cuál de las proposiciones del ejercicio A.5(1) es cierta?
5. Suponga que ombligo es más pesado que oreja, y que oreja se derrite a una temperatura menor que ombligo. Establezca una proposición que se siga lógicamente de estas suposiciones, o en otras palabras, que sea cierta con respecto a ellas.
6. ¿Diríamos que $4+4 = 13$ es una proposición totalmente falsa o diríamos que es cierta en el sistema numérico de base 5?
7. Vendedor: "Usted debería comprar nuestra faja de agua, porque recientemente, en competencia con otros once proveedores, pasó una rigurosa prueba gubernamental con clasificación de eficiencia de 93%"
   ¿Qué suposiciones hace este vendedor para convencer al comprador?

A.6 La naturaleza de la demostración geométrica Ahora, intentemos demostrar algunas proposiciones geométricas utilizando únicamente las tres suposiciones siguientes.

SUPOSICION 1 Si en dos triángulos, dos lados y el ángulo incluido de uno, son iguales respectivamente, a dos lados y el ángulo incluido del otro, entonces los dos triángulos son iguales.(Lado, ángulo, lado: *LAL*)

SUPOSICION 2 Si en dos triángulos, un lado y dos ángulos adyacentes de uno, son iguales respectivamente a un lado y dos ángulos adyacentes del otro, entonces los dos triángulos son iguales.(Angulo, lado, ángulo: *ALA*).

SUPOSICION 3 Por un punto dado, existe una y sólo una perpendicular a una línea recta dada.

Antes que utilice estas suposiciones para demostrar cualquier proposición, asegúrese, que está de acuerdo con otros estudiantes, en el significado de todos los términos utilizados en estas suposiciones. Deberá tener claros los términos *triángulo*, *perpendicular*, *bisecar*, *punto medio* e *incluido*.

Ahora intentemos demostrar el teorema siguiente. Lo podemos llamar el Teorema A.

A.7 **Teorema A** Si dos lados de un triángulo son iguales, los ángulos opuestos a estos lados son iguales.

DADO: Triángulo ABC (Fig. A.7) en el cual AB = AC.

POR DEMOSTRAR: $\angle B = \angle C$.

ANALISIS: Puesto que las suposiciones 1 y 2 consideran las únicas formas de disponer de longitudes o ángulos iguales, debemos hacer un arreglo para tener dos triángulos en el diagrama que consideren a los ángulos B y C separadamente. Hagamos un intento trazando AD perpendicular a BC. Observemos que nuestras suposiciones no nos capacitan demostrar que los triángulos ABD y ACD son iguales. Si, en vez de lo anterior, trazamos AD tal que biseque al ángulo BAC, podemos completar la demostración.

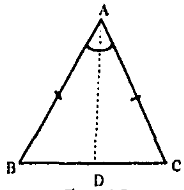


Figura A.7

DEMOSTRACION: Tracemos AD tal que biseque al ángulo BAC. Entonces en los triángulos ABD y ACD,
AB = AC (Dado),
$\angle BAD = \angle CAD$ (Por construcción),
AD = AD,
y así, triángulo ABD = triángulo ACD (por Suposición 1),
por lo tanto las partes correspondientes de estos triángulos son iguales.
En particular, $\angle B = \angle C$, lo cual es lo que se quería demostrar.□
(Con el rectángulo □, se indica que aquí termina la demostración.)

A.8 Al agregar este teorema a nuestra lista de definiciones y suposiciones, podemos demostrar también, que AD es perpendicular a BC.

No es necesario escribir todas las demostraciones en esta forma; sin embargo este modelo será de utilidad. Cada forma de demostración que motive, es deseable. Al demostrar teoremas es importante conservar en mente, exactamente, lo que se dá y lo que se debe demostrar; y distinguir entre estas dos ideas. Observe que lo que se dá y lo que será demostrado se establecen en términos de la figura.

En un teorema, lo que se dá, algunas veces se llama *hipótesis* y lo que se debe demostrar, a veces se llama *conclusión*. En un teorema, la hipótesis a veces se encuentra en una cláusula que inicia con "si" o "cuando" o algo parecido, o la primer parte de la hipótesis se encuentra en una cláusula tal; y, la conclusión es generalmente el resto de la proposición. Señale la hipótesis y la conclusión en el Teorema A.

Algunas veces el Teorema A se establece en la forma de una simple oración declarativa: *Los ángulos opuestos a los lados iguales* de un triángulo isósceles *son iguales*. En esta forma es más difícil determinar la hipótesis y la conclusión. La hipótesis ahora se esconde en una parte del sujeto de la oración, en la frase "de un triángulo isósceles". Estas cuatro palabras indican que se da un triángulo con dos lados iguales. La conclusión, en itálicas, está dividido entre el sujeto y el predicado. Si tiene dificultad para determinar la hipótesis y la conclusión de los teoremas expresados de esta manera, será útil que lo reestablezca en la forma "Si...,(entonces)...".

¿Qué hemos logrado hasta aquí? Hemos adquirido una noción de lo que significa demostrar una proposición y hemos reconocido la necesidad de aceptar ciertas suposiciones, definiciones y términos indefinidos. Pero, las tres suposiciones anteriores no son suficientes para demostrar todos los teoremas de la geometría elemental, así que en la siguiente sección iniciaremos otra vez con cinco nuevas suposiciones que adoptaremos como la base de nuestra geometría. Indicaremos los términos que tomaremos como indefinidos e introduciremos definiciones de otros términos cuando se requieran.

A.9 Ejercicios

1. En la Fig. A.9a la línea PM es perpendicular a la línea AB en su punto medio M. Demuestre que PA = PB.
2. Establezca un teorema sugerido por la Fig. A.9b en la cual AB = AC y BD = CD. Su proposición del teorema puede estar en términos del diagrama. Demuestre su teorema.

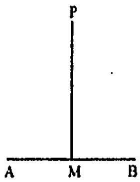


Figura A.9a

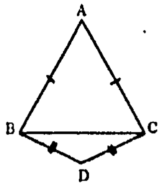


Figura A.9b

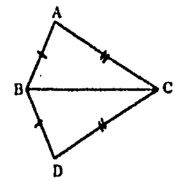


Figura A.9c

3. Establezca un segundo teorema sugerido por la Fig. A.9b y demuéstrelo.
4. Establezca un teorema sugerido por la Fig. A.9c en la cual AB = BD y AC = CD. Demuestre su teorema.
5. Señale qué se dá y qué será demostrado en cada una de las siguientes proposiciones. Puede hacer esto sin conocer el significado de cada término.
   a) Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos de estos ángulos son iguales.
   b) Si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, su cuarto ángulo también es un ángulo recto.
   c) Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo.
   d) Un radio perpendicular a una cuerda de una circunferencia, biseca a la cuerda.
   e) La suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados.
   f) Si Firulais estaba solo en la casa entre las 3 y 4 de la tarde, entonces fue él quien se comió las galletas de la caja de pastel.
   g) Si su perro está ladrando, hay un extraño en el local.
6. Exprese en la forma "Si..., entonces..". las siguientes proposiciones.
   a) Cuerdas iguales de una circunferencia, están igualmente distantes del centro de la circunferencia.
   b) Los ángulos opuestos de un paralelogramo, son iguales.
   c) Un niño hambriento, llora.

A.10 Proposición inversa Considere las dos proposiciones siguientes, en donde se intercambian la hipótesis y la conclusión en la primera proposición, para obtener la segunda.

1. Si dos lados de un triángulo son iguales, los ángulos opuestos a estos lados son iguales.
2. Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a estos ángulos son iguales.

Esta segunda proposición se llama *inversa* de la primera, y la primera proposición también es inversa de la segunda. Cada proposición es inversa de la otra.

Frecuentemente, si se ha demostrado que una proposición es cierta, su inversa también es cierta. Sin embargo no siempre es así. Algunas veces se demuestra que el inverso es falso. Vea los ejemplos siguientes en los cuales el inverso es falso.

1. Si una línea recta pasa por el centro de una circunferencia, corta a la circunferencia en dos puntos distintos.
2. Si una circunferencia se corta con dos líneas paralelas, los arcos entre las líneas son iguales.
3. Si sale de casa demorado, llega tarde a la escuela.

A.11 Ejercicios

Escriba el inverso de las siguientes proposiciones y establezca en cada caso si el inverso es cierto o falso.

1. Si los tres lados de un triángulo son iguales, también son iguales los tres ángulos del triángulo.
2. Si los cuatro lados de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.
3. Si dos triángulos son iguales, los ángulos de los dos triángulos son iguales respectivamente.
4. Si dos rectángulos son iguales, las diagonales de un rectángulo son iguales a las diagonales del otro.
5. Si ha caído rocío, la yerba está húmeda.
6. Si el repartidor de agua electropura ha llegado, tenemos agua electropura.
7. Si tía Eduviges ha llegado, comeremos un guizado sabroso.
8. Una ardilla es un animal que tiene una gruesa cola tupida de pelo.
9. Un niño hambriento, llora.
10. Cada punto en una línea AB es un punto en la línea ABC.

A.12 Falla en el razonamiento Al demostrar proposiciones geométricas deberá estar alerta para evitar fallas en el razonamiento. "Si A está a 10 metros de B; y B está a 7 metros de C; entonces A está a 17 metros de C". En esta proposición hay falla en el razonamiento. No hay nada que establezca que A, B y C están en una línea recta.

Otro error común en un razonamiento es como el que se presenta en el intento de demostración de la proposición siguiente: "Si un lado de un triángulo se biseca por la perpendicular desde el vértice opuesto, los otros dos lados del triángulo son iguales.

DADO: El triángulo ABC (Fig. A.12) en el cual CD es perpendicular a AB y AD = DB.

POR DEMOSTRAR: AC = BC.

DEMOSTRACION: En los triángulos ACD y BCD, se tiene que $\angle ADC = \angle BDC$ ya que CD es perpendicular a AB,
AD = DB (dado),
$\angle CAD = \angle CBD$ porque si dos lados de un triángulo son iguales, los ángulos opuestos a estos lados son iguales.
Por lo tanto el triángulo ACD es igual al triángulo BCD porque dos triángulos son iguales si un lado y dos ángulos adyacentes de uno son iguales respectivamente a un lado y dos ángulos adyacentes del otro.
Por lo tanto AC = BC.□

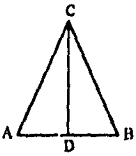


Figura A.12

La falla de este argumento está en el tercer paso. En este paso consideramos que tenemos un triángulo con dos lados iguales. Esto, no obstante, es lo que estamos intentando demostrar.

A veces es en el diagrama y no en el argumento donde está la falla. O bien el diagrama no llena todas las condiciones establecidas en la proposición o la construcción de una línea se ha hecho en forma errática y engaña la vista.

A.13 Ejercicios

Señale los errores de razonamiento en los siguientes ejercicios.

1. Todas las vías que van al sur llevan a Xochimilco. Esta vía va hacia el oriente y por lo tanto por esta vía no llegaremos a Xochimilco.
2. Mamá: "No, David, es suficiente nieve por hoy".
   David: "Pero, mamá, cuando tuve fiebre tifoidea el doctor dijo que me dieras la nieve que deseara".

B.1 En la sección anterior hemos aprendido que no podemos demostrar proposiciones en geometría, sin primero haber hecho un cuidadoso examen de lo que estamos suponiendo. Hemos examinado la necesidad de ciertas definiciones y términos indefinidos. Estas cosas las hemos aprendido al considerar únicamente unas cuantas proposiciones geométricas. Habríamos avanzado demostrando otras proposiciones; pero, en algún momento descubriríamos que necesitamos más suposiciones, incluyendo algunas de una naturaleza más general, para tener una base adecuada para la geometría.

Por lo tanto, en esta sección, empezaremos haciendo un cuidadoso examen de las suposiciones en las que descanse nuestra geometría. Necesitaremos únicamente cinco y generalmente nos referiremos a ellas como a los cinco principios fundamentales. Estas cinco suposiciones son completamente diferentes de aquellas que establecimos anteriormente. Parecidas a aquellas, éstas se referirán a puntos, líneas, distancias, ángulos y triángulos. Ciertos términos como *número, orden, igual, punto, línea recta, distancia entre dos puntos y ángulo entre dos líneas*, los tomaremos como términos indefinidos. También necesitaremos términos indefinidos empleados comunmente en toda clase de razonamiento lógico, por ejemplo: *es, son, no, y, o, pero, si, entonces, todo, cada*. La palabra *línea* se entenderá comunmente como línea recta.

No estamos obligados a aceptar esta lista particular de cinco principios fundamentales. Son posibles muchas otras listas. Es posible que algunos de sus compañeros estudien geometría en libros enteramente diferentes que éste y sean otros sus principios fundamentales.

En seguida discutiremos los cinco principios o suposiciones, a la vez que las ideas relacionadas que tomaremos como base de nuestra geometría. El lenguaje le puede parecer extraño y nuevo; pero las ideas le serán familiares.

B.2 **Principio 1** *Medida de línea* Los puntos en cualquier línea recta se pueden numerar tal que la diferencia de números mida distancias.

Nuestro primer principio trata con puntos, líneas y con la noción de distancia entre puntos. Se llama el Principio de Medida de Línea y nos dice, en efecto, que podemos medir la distancia entre dos puntos por medio de una escala o regla, justamente como lo hemos hecho siempre. La regla puede tener una escala en centímetros o pulgadas u otras unidades de longitud, marcada en ella.

La idea es suficientemente obvia por sí misma, ejemplo, la figura B.2 muestra cuatro puntos A, B, C y D en una línea recta. Estos cuatro puntos y todos los otros puntos de la línea se pueden numerar en orden y luego

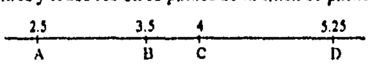


Figura B.2

podemos decir que la distancia AB es igual a la diferencia entre los números correspondientes de A y B. En forma análoga podemos medir la distancia BC, la distancia AC y así sucesivamente. En vez de poner, de hecho, los números en la línea, es fácil colocar una regla, ya marcada, a lo largo de la línea. En vez de escribir "la distancia BC", de aquí en adelante simplemente escribiremos BC o CB. "La distancia BC", "la longitud BC", "la distancia CB", "la longitud CB", "BC" y "CB" tendrán todas el mismo significado; el orden de las letras no tiene significado.

Aunque no hay diferencia en la unidad particular que utilicemos, debemos emplear la misma unidad en cada trabajo.

Medida de Línea (Principio 1) nos dice que la distancia BD se obtiene por la diferencia entre los números correspondientes a B y a D. Hablando estrictamente, esta diferencia no tiene signo. Si queremos, sin embargo, podemos distinguir entre "la distancia BD" y "la distancia dirigida BD", definiendo la última como *el número que corresponde a* D *menos el número correspondiente a* B. Esta "distancia dirigida BD", cuyo símbolo es **BD**, será positivo o negativo: Positivo cuando los números crecen (algebraicamente) cuando recorremos de B a D, y negativo cuando los números decrecen cuando vamos de B a D. Vemos además que, despreocupándonos de la manera como se numere la línea, **BD** = −**DB**. Por ahora no nos interesaremos en estas distancias dirigidas. La distancia entre dos puntos, tal como B y D, será simplemente la diferencia numérica entre los números correspondientes a B y D. Esto es, la distancia BD (Fig. B.2) es 1.75, análogamente la distancia DB también es 1.75.

Podemos ver del Principio 1 que si un punto Q en una línea se numera con 7, entonces hay dos puntos distintos en la línea a una distancia 2 de Q. Estos puntos corresponden a los números 7−2 y 7+2. Para cada punto Q en una línea hay dos y únicamente dos puntos distintos en la línea a una distancia d de Q. Si Q tiene asignado el número q, estos dos puntos serán numerados con $(q-d)$ y $(q+d)$.

B.3 Noción de un punto *estar entre* dos puntos en una línea Como se estableció en el Principio 1, los puntos en una línea recta, extendida indefinidamente, se pueden numerar tal que diferencias de números midan distancias; hay diferentes maneras como se puede hacer. Supongamos que por un método, al numerar los puntos en una línea recta, el número 3 corresponde al punto A y el número 5.2 corresponde al punto C, como se muestra en la Fig. B.3. Entonces cualquier punto cuyo número esté entre 3 y 5.2 estará entre los puntos A y C en la línea.

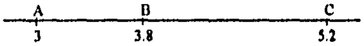


Figura B.3

B.4 Definición Se dice que cualquier punto B que esté en la línea que pasa por los puntos A y C, *está entre* A y C si los números que corresponden a A, B y C están en ese orden. Aquellos puntos extremos A y C y todos los puntos entre ellos se llama *segmento de línea* AC.

Si el punto B corresponde al número 3.8 (Fig. B.3), entonces la parte de la línea que contiene a B y C y todos los puntos cuyos números están entre 3.8 y 5.2 se llama el segmento de línea BC. La expresión "segmento de línea", significa literalmente, "una parte cortada de la línea". Hablando estrictamente, "la línea AC" es la línea sin fin que pasa por los puntos A y C, y seremos cuidadosos en llamar aquella parte de la línea que está entre A y C "el segmento de línea AC". Pero a veces, cuando no cause confusión, diremos "línea AC" abreviando, cuando realmente queramos decir "segmento de línea AC".

B.5 Definición Si AB = BC, se dice que B *biseca* al segmento de línea AC. También se le llama a B, *punto medio* del segmento de línea AC.

B.6 Ejercicios

1. Encuentre las distancias AB, BC, CD, AC, BC y AD en la Fig. B.2, y muestre numéricamente que:
   a) AB + BC = AC
   b) AB + BC + CD = AD
   c) AD = AB + BD = AC + CD
2. a) En la Fig. B.2 ¿Cuántas veces es más largo CD que BC?
   b) Si los números asignados a los puntos A, B, C y D, en la Fig. B.2, se cambiara para representar números en pulgadas en vez de centímetros ¿Sería AB todavía doble de largo que BC?
3. ¿Cuántos grados hay desde el punto de congelamiento al punto de ebullición del agua cuando se mide en
   a) el termómetro ordinario Fahrenheit?
   b) el termómetro en centígrados?
4. a) Ruth mide 160 cm de altura y Juan 180 cm. ¿Cuánto es más alto Juan que Ruth?
   b) ¿Qué parte fraccionaria es la altura de Ruth con respecto a la de Juan?

B.7 Principio 2 Existe una y solamente una línea recta que pasa por dos puntos dados.

Nuestro segundo principio trata también con puntos y líneas. Se debe pensar que esta línea se extiende indefinidamente, sin puntos extremos, aun cuando nuestro diagrama muestre que tal línea tiene dos puntos extremos, Fig. B.3.

B.8 Intersección de dos líneas De acuerdo con el Principio 2 podemos demostrar que dos líneas rectas distintas no pueden tener más que un punto en común. Para demostrar esto, veamos qué sucede si las dos líneas rectas tienen dos puntos en común. Entonces por estos dos puntos pasarían dos líneas rectas diferentes, lo que es contrario al Principio 2. Por lo tanto dos líneas rectas distintas no pueden tener dos puntos en común, o tres, o cuatro, o cualquier número mayor.

B.9 Definición Cuando dos líneas tengan un punto en común, diremos que se *intersecan* y al punto en común le llamaremos *punto de intersección*.

B.10 En seguida formularemos el Principio de Medida de Angulo. Como nuestra noción de *ángulo* se sostiene en la noción de *rayo*, primero explicaremos qué significa rayo.

B.11 **Definición** Si seleccionamos un punto P en una línea recta, podemos pensar que este punto divide a la línea en dos rayos, cada uno de los cuales tiene a P como punto extremo.

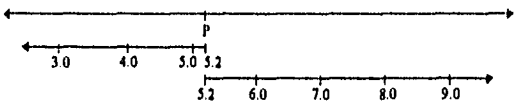


Figura B.11

Como, por Principio 1, los puntos de una línea recta se pueden numerar tal que la diferencia de números miden distancias, podemos definir sus dos *rayos* como sigue: Un rayo con punto extremo P comprende el punto P y todos los puntos cuyos números son mayores que el número correspondiente a P; el otro es el punto P y todos los puntos cuyos números son menores que el número correspondiente a P. Cada uno de estos rayos tiene únicamente un punto extremo. Ver Fig. B.11.

B.12 **Definición** Si dos rayos tienen el mismo punto extremo, Fig. B.12, se dice que forman dos *ángulos*. Cuando hablamos del ángulo entre VA y VB, casi siempre pensamos en el menor de los dos ángulos. La referencia a este ángulo generalmente es ángulo AVB, en el que la letra de en medio siempre representa los extremos en común de los dos rayos. Este punto se llama *vértice* del ángulo. A los rayos VA y VB se les llama *lados del ángulo*. A y B simplemente sirven para distinguir los dos lados del ángulo, y representan puntos diferentes de V en sus rayos respectivos. No hay distinción entre el ángulo AVB y el ángulo BVA; ambas expresiones denotan al menor de los ángulos formados por los rayos VA y VB.

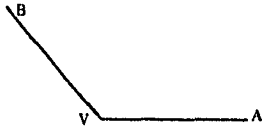


Figura B.12

Figura B.13

B.13 **Definición** Cuando dos rayos con un punto extremo común, forman una línea recta, como en la Fig. B.13, cada ángulo formado por estos dos rayos se llama *ángulo llano*.

B.14 Nuestro tercer principio se refiere a la medida de ángulos. Es decir, que el ángulo se puede medir por medio de un transportador de la manera que hemos aprendido a medirlo. Si, por ejemplo, tomamos una rueda con doce marcas distanciadas igualmente en la orilla y numeramos cada marca con 30, 60, 90, 120, ... ,360, podemos decir que la medida del ángulo entre la marca 90 y la 150 es 60. Esto seguiría siendo cierto si los números fueran 31, 61, 91, 121, ..., 361, o si hubiéramos utilizado otra escala cuya unidad para medir ángulos no sea la sugerida por la costumbre, el grado. En seguida diremos todo más brevemente.

B.15 **Principio 3** *Medida de ángulo* Todos los rayos que tienen el mismo extremo se pueden numerar tal que las diferencias de números midan ángulos.

B.16 Por ejemplo, la Fig. B.16 muestra cinco rayos que tienen el extremo común O. Estos cinco rayos y todos los demás rayos con extremo común O se pueden numerar en orden y entonces podemos decir que la medida del ángulo entre cualesquiera dos de estos rayos es igual a la diferencia entre sus números. Por conveniencia en su lectura arreglaremos estos números alrededor de una circunferencia trazada con centro O. Colocando letras A, B, C, D, E, en el corte de los cinco rayos con la circunferencia, podemos ver que la medida del ángulo entre los rayos OA y OB es 40–10, es decir 30. El ángulo entre los rayos OB y OC, generalmente se

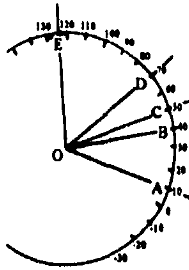


Figura B.16

lee "ángulo BOC", que tiene medida 50-40 = 10. ¿Qué medida tiene el ángulo COD? ¿Cuál es la medida del ángulo AOC?

Las expresiones "ángulo AOB", "ángulo BOA", "$\angle AOB$" y "$\angle BOA$" significan lo mismo. El orden de las letras no tiene significado.

Como la medida del ángulo AOC (Fig. B.16) es igual a la medida del ángulo AOB más la medida del ángulo BOC, podemos decir que el ángulo AOC es igual al ángulo AOB más el ángulo BOC; o, más breve, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$. Y puesto que la medida del ángulo AOC es igual a cuatro veces la medida del ángulo BOC, podemos decir que $\angle AOC = 4\angle BOC$.

B.17 Definición Si $\angle AOB = \angle BOC$, se dice que el rayo OB *biseca* al ángulo AOC, y OB es *bisectriz* del ángulo AOC.

B.18 Ejercicios

Considerando la Fig. B.16 muestre que:

1. $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$.
2. $\angle AOD = \angle AOC - \angle BOC + \angle BOD$.
3. $\angle BOE = \angle AOC + \angle BOD - \angle COE - \angle AOB - \angle BOC - \angle COD$.

B.19 Algunas formas, de una variedad inacabable, en las que se pueden numerar los rayos tal que la diferencia de números mida ángulos se muestran en las Figs. B.19a a B.19d. Es costumbre numerar con números positivos a los rayos contrarios a las manecillas del reloj y con números negativos a los rayos en el sentido de las manecillas del reloj. Esto es una mera conveniencia y no es absolutamente necesario.

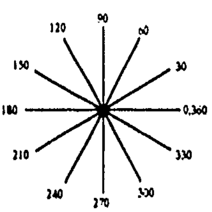


Figura B.19a

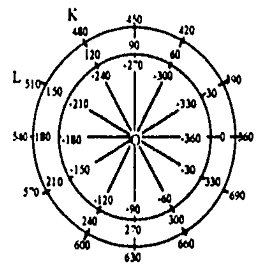


Figura B.19b

Usualmente no tenemos necesidad de continuar numerando después de completar una vuelta. Si queremos, no obstante, podemos continuar numerando indefinidamente; el ángulo KOL (Fig. B.19b) tiene la medida 30, ya sea que se considere como 150–120 o como 510–480 o como (–210)–(–240). En efecto, podríamos considerar la medida del ángulo KOL como 510–120 o como 30+360; o aun como $30+n\cdot 360$ donde $n = 0,1,2,3...$ o $n = -1,-2,-3,...$. Sin embargo, no es fácil hacer esto y evitar confusión. Para ser estrictamente exactos, debemos introducir la idea de "ángulo dirigido KOL" definiéndolo como "el número correspondiente al rayo OL menos el número correspondiente al rayo OK". Debemos indicar, además, que cuando esta diferencia es un número positivo, el ángulo dirigido KOL se considera contrario a las manecillas del reloj; y cuando es negativo, el ángulo dirigido KOL se considera en el sentido de las manecillas. La medida de cada uno de los correspondientes ángulos dirigidos LOK sería el negativo de cada uno de los mencionados anteriormente. Generalmente no estaremos interesados en tales distinciones y tomaremos como la medida del ángulo entre dos rayos, la diferencia numérica más pequeña de los números de los rayos.

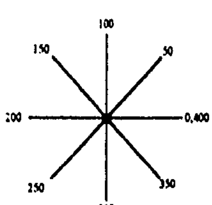


Figura B.19c

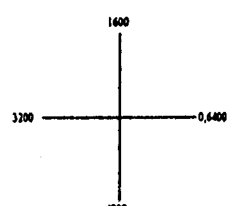


Figura B.19d

B.20 **Principio 4** Todos los ángulos llanos tienen la misma medida.

B.21 El método más común de numeración de rayos tal que la diferencia de números mida ángulos es el método que se muestra en la Fig. B.19a, donde 0 y 360 son los números que corresponden al mismo rayo. En este caso la medida del ángulo unitario se llama *grado.* Una definición precisa de esta unidad de medida de ángulo, que se escribe 1°, es aquella que es la medida de $^1/_{180}$ de un ángulo llano. Sin embargo, estrictamente, no tenemos derecho a utilizar esta definición sin asegurarnos primero que todos los ángulos llanos tienen la misma medida. Lo podríamos demostrar en este momento si introdujeramos ahora el Principio 5; pero la demostración es algo larga y un poco inusual en su forma. En consecuencia, en vez de demostrarlo como un teorema, lo tomaremos como suposición, como se ha establecido en B.20.

Al utilizar un grado como la unidad de medida de ángulo, observamos que un ángulo se puede considerar con muchas medidas que difieren por múltiplos de 360°. Ordinariamente, sin embargo, consideraremos la medida de un ángulo, etiquetado con letras tal como KOL en la Fig. B.19b, menor que 360°.

B.22 **Definición** Un ángulo de 90 grados se llama *ángulo recto.* Los ángulos menores de 90 grados se llaman *ángulos agudos* y ángulos mayores que 90 grados pero menores que 180 grados se llaman *ángulos obtusos.*

B.23 **Definición** Si dos líneas se cortan en un punto O tal que el ángulo entre dos de sus rayos mide 90°, se dice que las líneas son *perpendiculares.*

Si, por ejemplo, las líneas LL' y MM' en la Fig. B.23 se cortan en O tal que ángulo LOM = 90°, las líneas LL' y MM' se dice que son perpendiculares. Además, los ángulos MOL', L'OM' y M'OL también son ángulos rectos. Como LL' es una línea recta, el ángulo LOL' será un ángulo llano, es decir, de 180°. El rayo OL', en este caso, tendrá el número 180 y el ángulo MOL' tendrá la medida 180−90, es decir 90°.

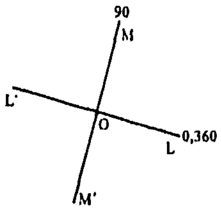


Figura B.23

B.24 **Ejercicios**

1. Muestre que los ángulos L'OM' y M'OL en la Fig. B.23 también son ángulos rectos.
2. ¿Cuántos grados gira el minutero de un reloj al ir de "diez después" de la hora a "veinticinco después"? ¿De "diez después" a "veinte después"? ¿De 6:05 a 6:15? ¿De 6:15 a 7:05? ¿De 6:05 a 7:05?
3. ¿Cuántos grados gira el minutero de un reloj al ir de 8:10 a 9:20? ¿De 10:50 a 2:35? ¿De 3:13 a 3:51?
4. ¿Qué hora será cuando el minutero haya girado 72 grados de su posición a las 8:19 en punto?
5. ¿Qué hora será cuando el minutero haya girado 726 grados de su posición a las 11:47 P.M?
6. Si en la Fig. B.12, el ángulo menor AVB es igual a 117°, ¿Qué medida en grados tiene el ángulo mayor AVB?
7. Si en la Fig. B.24, el rayo VA se numera con 45, ¿Cómo se debe numerar el rayo VB? (Recuerde que estamos midiendo ángulos en grados.)

Figura B.24

8. En general, si un rayo VA de una línea recta AB se numera con r, ¿Cómo se debe numerar el otro rayo VB?
9. Si en la Fig. B.24 el rayo VA se numera 0, 360 y $\angle AVC = 132°$, ¿Cómo se deben numerar los rayos VC, VB y VD?
10. En la Fig. B.24 el rayo VA se numera a, $a+360$ y $\angle AVC = r°$, ¿Cómo se deben numerar los rayos VC, VB y VD?
11. Si en la Fig. B.24 $\angle AVC = 125.8°$, ¿Cuánto mide $\angle CVB$?, ¿$\angle BVD$? y ¿$\angle DVA$? ¿Cuál es la suma de estos cuatro ángulos?
12. Si en la Fig. B.24 $\angle AVC = s°$, ¿Cuánto mide $\angle CVB$?, ¿$\angle BVD$? y ¿$\angle DVA$? ¿Cuál es la suma de estos cuatro ángulos?
13. Compruebe de los ejercicios 10 y 12 que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
14. Si en la Fig. B.24 $\angle AVC$ fuera igual a $\angle CVB$, ¿Qué medida tiene cada ángulo?
15. Muestre que las líneas que bisecan a los ángulos AVC y CVB (Fig. B.24) son perpendiculares.
16. Si en la Fig. B.24 el ángulo menor AVC tiene la medida $s°$, ¿Qué medida tiene el ángulo mayor AVC?

B.25 **Definición** A los ángulos AVC y BVD de la Fig. B.24, se les llama *ángulos opuestos por el vértice.*

B.26 **Difinición** Dos polígonos que tienen iguales sus ángulos y proporcionales sus lados correspondientes, se llaman *polígonos semejantes.*

El orden de los ángulos y lados en una figura puede ser el mismo o de orden invertido a los ángulos y lados correspondientes de la otra figura (Ver Fig. B.26). Observe que los vértices, esquinas, correspondientes en los tres triángulos semejantes de la figura, están marcadas con las mismas letras excepto por los apóstrofos.

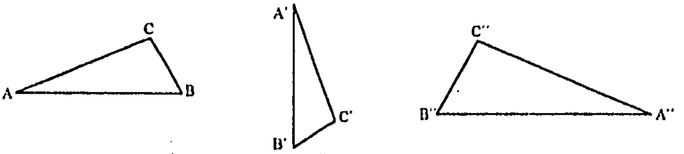


Figura B.26

B.27 Definición Cuando digamos que el polígono ABCDE es, digamos, 3 veces más grande que el polígono semejante A'B'C'D'E', cada lado y diagonal correspondiente, será 3 veces más grande que cada lado y diagonal correspondiente del polígono A'B'C'D'E'. Al número 3 le llamamos *factor de proporcionalidad.* El factor de proporcionalidad nos dice cómo se comparan las distancias del polígono A'B'C'D'E' con aquellas del polígono ABCDE. Podemos expresar esta comparación como una proporción, de dos maneras. Podemos escribir $AB = 3 \cdot A'B'$, $BC = 3 \cdot B'C'$, $AD = 3 \cdot A'D'$; o podemos escribir $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'} = 3.$

Las dos proporciones que se muestran anteriormente se pueden utilizar para establecer la relación entre las distancias correspondientes de cualesquiera dos polígonos semejantes, si en vez de utilizar 3 como el factor de proporcionalidad utilizamos k, donde k puede ser cualquier número real. Entonces escribimos $AB = k \cdot A'B'$, $BC = k \cdot B'C'$, $AD = k \cdot A'D'$ o bien $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'} = k.$

El quinto y último principio que tomaremos dado, incluye triángulos semejantes. Como el principio 5 es la primera de tres situaciones relacionadas con esta clase, nos referiremos a ella como el Caso 1 de semejanza. Después consideraremos los Casos 2 y 3.

B.28 Principio 5 *Caso 1 de semejanza.* Dos triángulos son semejantes si un ángulo de uno es igual a un ángulo del otro y los lados que incluyen cada ángulo son proporcionales.

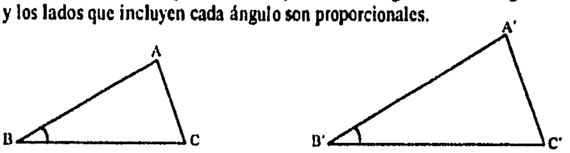


Figura B.28

En los triángulos ABC y A'B'C' de la figura B.28,

Si $\angle A'B'C' = \angle ABC$, $A'B' = k \cdot AB$ y $B'C' = k \cdot BC$,

entonces $C'A' = k \cdot CA$, $\angle B'C'A' = \angle BCA$ y $\angle C'A'B' = \angle CAB$.

B.29 Por lo tanto, se sigue que al suponer el Caso 1 de Semejanza, estamos suponiendo, en efecto, que *un triángulo dado se puede reproducir dondequiera, ya sea, exactamente, amplificado o reducido.* Lo mismo es cierto para polígonos, ya que se puede pensar que un polígono está compuesto de cierto número de triángulos. Ver Fig. B.29.

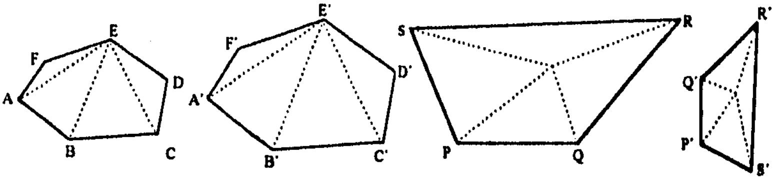


Figura B.29

El Principio 5 (Caso 1 de Semejanza) es muy útil cuando queremos demostrar que ciertos ángulos son iguales o que cierto segmento de línea es múltiplo de otro. Cuando el factor de proporcionalidad es 1, podemos utilizar el Principio 5 para demostrar que dos segmentos de línea son iguales.

B.30 Dos triángulos semejantes en los que k es 1 se llaman *triángulos iguales* porque sus lados y ángulos correspondientes son iguales. Otros libros de geometría se refieren a veces como "triángulos congruentes". Lo hacen así, no sólo para indicar que los lados y ángulos correspondientes son iguales sino también para indicar que esta igualdad se puede mostrar al mover un triángulo acomodándolo en el otro. Definen "congruente" en términos de ideas indefinidas de "mover" y "colocar". El fundamento lógico de nuestra geometría es independiente de cualquier idea de movimiento.

B.31 Ejercicios

1. En el triángulo ABC, AB = 6, BC = 8 y ∠ABC = 62°. En el triángulo A'B'C', A'B' = 9, B'C' = 12 y ∠A'B'C' = 62°.¿Cuántas veces mayor que CA es C'A'?
2. En los triángulos ABC y A'B'C', A'B' = 3AB, B'C' = 3BC y ∠A'B'C' = ∠ABC. ¿Qué puede decir acerca de C'A' y CA? ¿Y Qué acerca de ∠B'C'A'?
3. Por medio de una regla, marcada o graduada en centímetros o pulgadas, y un transportador, amplifique el triángulo ABC Fig. B.31a en la razón 3 a 2. Sugerencia: Trace primero A'B' = $^3/_2$ AB; luego haga ∠A'B'C' = ∠ABC y trace B'C' = $^3/_2$ BC.

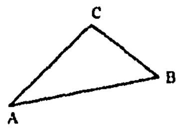


Figura B.31a

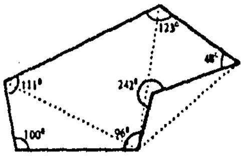


Figura B.31b

4. Reproduzca el polígono de la Fig. B.31b mediante un trazo tal que sea amplificado en la razón 5 a 4.
5. Al unir los puntos medios de los lados de un triángulo ABC, se obtienen cuatro triángulos pequeños. Demuestre que tres de estos pequeños triángulos son semejantes al triángulo ABC.
6. ¿Qué necesita saber para demostrar que el cuatro triángulo pequeño del problema anterior también es semejante al triángulo ABC?
7. Si en la Fig. B.31c, AB' = 1.5AB y AC' = 1.5AC. Encuentre la razón B'C'/BC. Sugerencia: Para encontrar la razón BB'/ AB de la Fig. B.31c, sólo necesitamos observar que BB' = AB' - AB; y por lo *tanto* BB'/AB = (AB'/AB) - 1, en este caso (3/2) - 1, es *decir*, (1/2). Este es un método general de gran importancia que es de mucha utilidad.
8. De la Fig. B.31c, si AB'/AB = 5/3, encuentre BB'/AB.
9. De la Fig. B.31c, si AB'/AB = 1.2, encuentre BB'/AB.
10. Dado AB'/ AB = n/m, encuentre BB'/ AB .
11. Encuentre la razón CC'/AC de la Fig. B.31c. Recuerde el ejercicio B.31(7) que le da información acerca de la figura .
12. Encuentre la razón (B'C' - BC)/BC (Fig. B.31c) .
13 Demuestre que AB/BB'= AC/CC' (Fig. B.31c).
14. Dado BB'/AB = 1/2 (Fig. B.31c), ¿Cómo podría encontrar la razón AB'/AB? (Observe que AB'= BB'+ AB.)
15 De la Fig. B.31c, si BB'= 2/3, encuentre AB'/AB.
16 De la Fig. B.31c, si BB'= 1/5, encuentre AB'/AB.
17 Dado BB'/ AB = n/m, encuentre la razón AB'/AB.

Figura B.31c

C.1 Con base en las cinco suposiciones del capítulo anterior, Principios 1 a 5, procederemos a demostrar siete proposiciones fundamentales, o teoremas, que les llamaremos Principios 6 a 12. Con estos doce principios podemos demostrar todas las proposiciones subsecuentes en geometría.

Aunque podemos demostrar estos siete nuevos principios, preferimos tomar en este momento cuatro de ellos como dados, sin demostración. Estos son los Principios 6, 7, 8 y 11. La mayoría de las personas podrían considerarlos obviamente válidos, en el acto, estos cuatro principios; además, siempre es enfadoso efectuar demostraciones de aquello que parece obvio. Al tomar en este momento estos cuatro principios como suposiciones, podremos demostrar las proposiciones en los ejercicios de este capítulo y también demostrar los Principios 9, 10 y 12.

C.2 **Principio 6** *Caso 2 de Semejanza.* Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno son iguales a dos ángulos del otro.

Compárelo con el Principio 5 para ver cómo, el Caso 2 de Semejanza difiere del Caso 1 de Semejanza.

C.3 **Ejercicios**

1. Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno iguales a dos ángulos del otro, el tercer ángulo de cada triángulo también es igual uno a otro. ¿Por qué?
2. En el triángulo ABC (Fig. C.3a). AB = 6, $\angle A = 40^0$ y $\angle B = 100^0$. En el triángulo A'B'C', A'B' = 9, $\angle A' = 40^0$ y $\angle B' = 100^0$. ¿Cómo es el tamaño de A'C' comparado con AC? ¿Qué tan grande es $\angle C'$ comparado con $\angle C$?
3. En los triángulos KLM y K'L'M', $\angle K = \angle K'$, $\angle M = \angle M'$ y KM = 1.3K'M'. Compare KL con K'L'; y LM con L'M'.
4. Utilizando una regla marcada en centímetros y un transportador, amplifique el triángulo ABC Fig. (C.3a) en la razón 5 a 4. Sugerencia: Trace primero A'C' igual a $^5/_4$ AC; luego haga $\angle A' = \angle A$ y $\angle C' = \angle C$.
5. ¿Cuál es la longitud del segmento sin marca en la Fig. C.3b ?
6. Si la sombra de un poste vertical de 3 metros es 1.8 m. ¿Cuál es la altura de un árbol que en el mismo momento tiene una sombra de 4.5 m.?
7. La Fig. C.3c muestra una escalera de 5 m reclinada contra una casa, con el pié de la escalera separada de la casa 1 m. ¿A qué altura se encuentra el timbre si la distancia desde el pié de la escalera hasta la altura del timbre, sobre la escalera, es 2 m?
8. Un poste vertical de 3 m produce una sombra horizontal de 1.8 m. Encuentre el ángulo de elevación del sol mediante una tabla de tangentes.
9. Demuestre que en el triángulo ABC (Fig. C.3d), $bh = ck$, donde h y k son las alturas a los lados b y c, respectivamente. Sugerencia: Busque un par de triángulos semejantes.
10. Demuestre la proposición del Ejercicio C.3(9) cuando uno de los ángulos del triángulo es recto. Demuestre la misma proposición para cuando uno de los ángulos es obtuso. Trace una figura en cada caso.

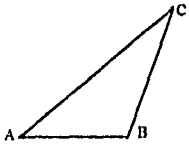


Figura C.3a

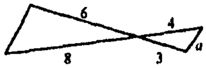


Figura C.3b

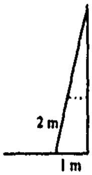


Figura C.3c

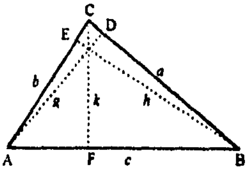


Figura C.3d

11. La proposición anterior se puede generalizar para incluir las tres alturas, como sigue $ag = bh = ck$. Esto es, el producto de una altura y el lado correspondiente de un triángulo dado es constante para el triángulo. Demuéstralo.

C.4 **Principio 7** Si dos lados de un triángulo son iguales, los ángulos opuestos a estos lados son iguales; e inversamente, si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos de estos ángulos son iguales.

C.5 **Ejercicios**

1. Demuestre que si los tres lados de un triángulo son iguales, entonces los tres ángulos también son iguales.
2. Demuestre que si los tres ángulos de un triángulo son iguales, los lados del triángulo también son iguales.
3. De la Fig. C.5a, dos triángulos isósceles ABD y CBD, tienen un lado común BD. Demuestre que $\angle ABC = \angle ADC$.

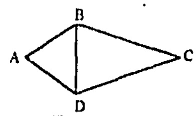


Figura C.5a

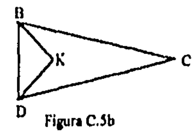


Figura C.5b

4. De la Fig. C.5a, demuestre que la línea que pasa por A y C biseca a $\angle BCD$.
5. Dos triángulos isósceles, BKD y BCD (Fig. C.5b) tienen un lado común BD. Demuestre que $\angle KBC = \angle KDC$.
6. En la Fig. C.5c, $\angle p = \angle q$. Demuestre que AB = BC.

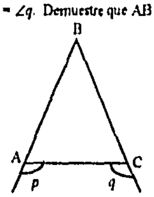


Figura C.5c

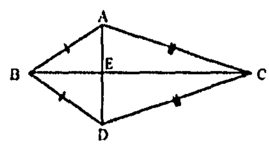


Figura C.5d

7. En la Fig. C.5d, AB = BD y AC = CD. Demuestre que $\angle BAC = \angle BDC$, que $\angle ABC = \angle DBC$ y que AD es perpendicular a BC.

C.6 **Principio 8** *Caso 3 de semejanza.* Dos triángulos son semejantes si sus lados son respectivamente proporcionales.

C.7 **Ejercicios**

1. En la Fig. C.7a, si se triplica la magnitud de cada segmento de línea, ¿Qué ángulos permanecen sin cambiar su medida? ¿Qué ángulos cambian sus medidas? ¿Por qué?

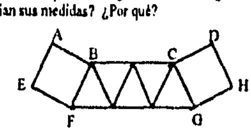


Figura C.7a

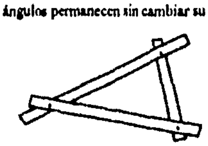


Figura C.7b

2. Si se construye un triángulo con tres reglillas, con un solo clavo en cada vértice, como se muestra en la Fig. C.7b. ¿Es rígido este triángulo? ¿Hágalo y obsérvelo? ¿Por qué sucede esto?
3. El pórtico del corral del Sr. Anastacio se aflojó; así que le puso de refuerzo un adorno en diagonal, como se muestra en la Fig. C.7c. ¿Cómo ayuda esto? ¿Qué principio matemático utilizó?
4. Se clavan cinco reglillas para formar un pentágono, con un solo clavo en cada vértice. ¿Cuántos tirantes, de esquina a esquina, se requieren para que haga una figura rígida? ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

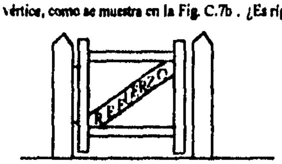


Figura C.7c

5. Demuestre que la línea trazada desde el vértice, de los lados iguales de un triángulo isósceles, al punto medio del lado opuesto, biseca al ángulo de ese vértice y además es perpendicular al lado opuesto. Esto es, dado el triángulo ABC Fig. C.7d, en el que $AC = BC$ y $AM = MB$, demostrar que $\angle ACM = \angle BCM$. Demostrar también que $\angle BMC = 90°$.

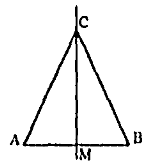


Figura C.7d

C.8 PRINCIPIO 9 La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°.

La verdad de este principio no es tan obvia como de los principios 6, 7 y 8. En seguida se discutirá parte de la demostración y el resto se le dejará para que usted lo complete.

DADO: El triángulo ABC (Fig. C.8).

POR DEMOSTRAR: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

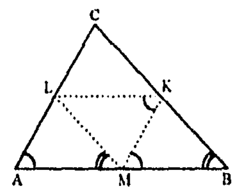


Figura C.8

ANALISIS: En el ejercicio B.31(5), estuvimos incapacitados para demostrar que uno de los cuatro triángulos (Ver triángulo KLM en Fig. C.8) era semejante al triángulo ABC porque en ese momento no habíamos demostrado el Caso 3 de Semejanza. Con el Caso 3 de ayuda podemos demostrar ahora que $\angle KML = \angle C$ y así demostrar este principio muy importante que se refiere a la suma de ángulos de un triángulo.

DEMOSTRACION: Sean K, L y M los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente.
En los triángulos MBK y ABC,
$MB = \frac{1}{2}AB$ (Por construcción),
$\angle MBK = \angle ABC$,
y $BK = \frac{1}{2}BC$ (Por construccion)
Por lo tanto $MK = \frac{1}{2}AC$ y $\angle BMK = \angle A$ (Por Caso 1 de Semejanza).
Utilizando los triángulos AML y ABC, puede demostrar de manera análoga que $ML = \frac{1}{2}BC$ y $\angle LMA = \angle B$ y que $LK = \frac{1}{2}AB$.
Como se ha demostrado que los lados del triángulo KLM son respectivamente iguales a una mitad de los lados del triángulo ABC, es claro (del Caso 3 de Semejanza) que $\angle KML = \angle C$.
Hemos demostrado que $\angle A = \angle BMK$, $\angle C = \angle KML$ y $\angle B = \angle LMA$.
Por lo tanto $\angle A + \angle B + \angle C =$ al ángulo llano $BMA = 180°$.□

C.9 Podemos ilustrar el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° al mover un lápiz alrededor de un triángulo como se muestra en la Fig. C.9. El lápiz se coloca primero en la posición 1. Luego se rota contrario a las manecillas del reloj por el ángulo A a la posición 2. En seguida el lápiz se mueve a lo largo de la línea AB a la posición 3. ¿sobre qué ángulo se rota para llegar a la posición 4? ¿A lo largo de qué línea se mueve ahora para llegar a la posición 5? ¿Sobre qué ángulo se rota para alcanzar la posición 6? ¿Está ahora el lápiz en la misma línea como en el inicio? ¿Cuántos grados giró el lápiz?

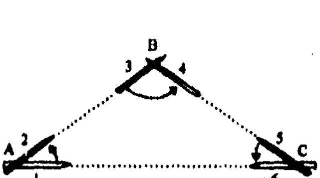


Figura C.9

También podríamos demostrar el inverso del Principio 9, es decir, que si tenemos tres ángulos cuya suma es 180° hay un triángulo que tiene estos tres ángulos. La demostración no tiene dificultad; pero es muy larga y no nos detendremos por ello.

C.10 **Definición** Un triángulo cuyos ángulos son agudos se llama *triángulo acutángulo*. Un triángulo uno de cuyos ángulos es recto se llama *triángulo rectángulo*. Un triángulo con un ángulo obtuso se llama *triángulo obtusángulo*.

C.11 Ejercicios

1. Demuestre que el triángulo KLM de la Fig. C.11a, es igual a cada uno de los triángulos AML, MBK y LKC.

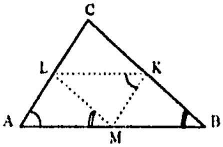


Figura C.11a

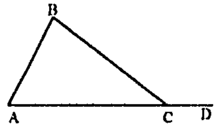


Figura C.11b

2. Demuestre que el ángulo exterior BCD del triángulo ABC de la Fig. C.11b es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes A y B.
3. Demuestre que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°. *Sigerencia:* Dividir al cuadrilátero en dos triángulos.
4. Demuestre que la suma de los ángulos de un pentágono es 3 veces 180°, es decir 540°.
5. Demuestre que la suma de los ángulos de un hexágono es 4 veces 180°, es decir 720°.
6. Demuestre que la suma de los ángulos de un polígono convexo de n lados es $(n - 2)180°$. *Un polígono es convexo si cada uno de sus ángulos interiores miden menos de 180°.*
7. ¿Cuántos grados mide cada uno de los ángulos de un pentágono regular? *Se dice que un polígono es regular si tiene iguales sus ángulos y también sus lados.*
8. ¿Cuántos grados mide cada uno de los ángulos de un polígono regular de n lados?
9. Cada ángulo de un polígono regular mide 144°. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
10. Demuestre que dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de un triángulo es igual a un ángulo agudo del otro triángulo.
11. Demuestre que dos triángulos rectángulos son iguales si la hipotenusa y un ángulo adyacente de un triángulo son iguales, respectivamente, a la hipotenusa y un ángulo adyacente del otro.
12. Demuestre que la altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa. Es decir, en la Fig. C.11c demostrar que $h^2 = mn$. *Un número m es la media proporcional entre otros dos números a y b cuando* $\frac{a}{m}=\frac{m}{b}$ *esto es, cuando* $m^2 = ab$.

Figura C.11c

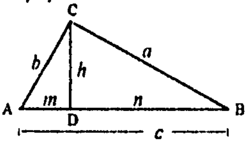


Figura C.11d

13. En el triángulo rectángulo ABC de la Fig. C.11d, CD es perpendicular a AB. Demuestre que $b^2 = cm$ y que $a^2 = cn$.
14. La altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en segmentos de 5 y 8 cm. Encontrar la longitud de la altura y de los otros dos lados del triángulo.
15. Los lados que incluyen el ángulo recto de un triángulo miden 5 y 12 cm. Encontrar la longitud de la altura y de los segmentos en que queda dividida la hipotenusa.
16. La altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en segmentos que tienen la razón 1 a 3. Encuentre la razón de los otros dos lados del triángulo.
17. Si en el Ejercicio C.11(16), los segmentos de la hipotenusa tienen la razón 1 a k, encontrar la razón de los otros dos lados.

C.12 PRINCIPIO 10 **Todos los puntos equidistantes de los extremos de un segmento de linea, y no otros, están en la mediatriz del segmento de línea.**

Aunque la verdad de este principio parace obvio, no lo consideraremos dado válido. Estudie la demostración cuidadosamente.

DADO: **El segmento de línea AB y cualquier punto P tal que AP = BP. Ver Fig. C.12.**

POR DEMOSTRAR: 1) P está en la mediatriz de AB.
2) Cualquier punto Q en la mediatriz de AB será equidistante de A y B.

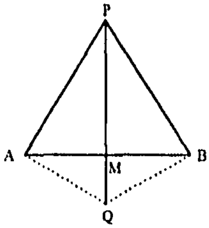


Figura C.12

Observe la afirmación "Todos los puntos equidistantes, . . . , y no otros, están en la mediatriz" significa también "*Sí y sólo si* un punto es equidistante. . . , está en la mediatriz".

ANALISIS: Para demostrar que P está en la mediatriz de AB, podemos trazar una línea desde P perpendicular a AB y demostrar que el punto medio de AB está en esta perpendicular; o podemos conectar P y el punto medio M de AB y demostrar que PM es perpendicular a AB. El segundo método es más directo.

DEMOSTRACION: 1) Trazar PM de P al punto medio M de AB. En los triángulos AMP y BMP, AP = BP, AM = BM y MP = MP; así que $\angle AMP = \angle BMP$. ¿Por qué? Cada uno de estos ángulos es un ángulo recto. ¿Por qué? Así que PM es la mediatriz de AB.

2) Podemos ahora demostrar que esta mediatriz no tiene puntos que no estén equidistantes de A y B. Sea Q cualquier punto en la mediatriz PM, no importa qué tanto esté extendido PM. Entonces QA = QB. ¿Por qué?□

C.13 PRINCIPIO 11 Por un punto que no esté en una línea hay una y sólo una perpendicular a la línea.

C.14 PRINCIPIO 12 *El Teorema de Pitágoras* En cualquier triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (*catetos*); e inversamente.

Este principio es muy interesante e importante. Fue conocido por los matemáticos hace como 2600 a.c. Estudie la demostración de este principio cuidadosamente.

DADO: Un triángulo ABC, Fig. C.14a, en el cual $\angle C = 90°$

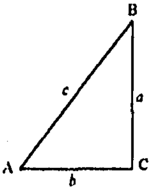


Figura C.14a

POR DEMOSTRAR: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$, o $c^2 = b^2 + a^2$.

ANALISIS: No podemos analizar esta proposición al considerar que la conclusión es cierta y demostrar que C debe ser un ángulo recto. Los números al cuadrado sugieren que podemos intentar encontrar una serie de medias proporciones. No obstante, la demostración de esta proposición probablemente no se obtuvo de esta forma. Más problablemente la demostración fue establecida de la misma manera en que la porposición fue descubierta, es decir, por generalizaciones sucesivas basadas en la observación y contemplación de muchos casos especiales.

Hay varios métodos para demostrar este teorema. El siguiente ejemplo especial muestra el método que seguiremos.

Observe en la Fig. C.14b que podemos amplificar el triángulo rectángulo A para formar el triángulo B y también el triángulo C. ¿Cuántas veces más grandes son los lados del triángulo B con respecto a los lados correspondientes del triángulo A? ¿Cómo se comparan los lados del triángulo C con aquellos del triángulo A? Si colocamos los triángulos B y C juntos tal que sus lados iguales coincidan, podemos formar un triángulo rectángulo que es semejante a cada uno de estos dos triángulos. Los lados que incluyen el ángulo recto de este triángulo compuesto son x veces los correspondientes lados del triángulo A. Pero podríamos haber amplificado el triángulo A directamente para formar un triángulo con cada lado, x veces tan grande como el lado correspondiente del triángulo A, como se muestra por el triángulo D en la Fig. C.14b. Como el triángulo D es bastante parecido al triángulo compuesto anterior, vemos que $x^2 = 9 + 16$ de donde $x = 5$. Así, la hipotenusa del triángulo A es 5 y $5^2 = 3^2 + 4^2$.

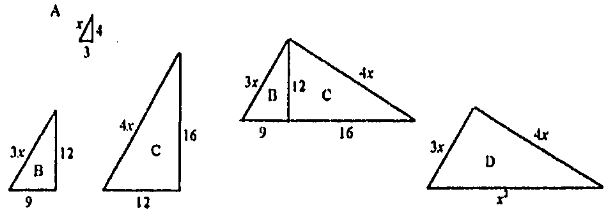


Figura C.14b

DEMOSTRACION: Tomemos a, b, c como longitudes de los lados del triángulo dado ABC como se muestra en la Fig. C.14c.

Este triángulo se puede amplificar tal que cada lado del nuevo triángulo A'B'C' sea b veces más grande que el anterior. Ver triángulo A'B'C' en la Fig. C.14c.

Ahora construyamos el triángulo B'C'D' tal que $\angle C'B'D' = \angle A$ y $\angle B'C'D' = 90°$. Ver Fig. C.14c. Se sigue del Caso 2 de Semejanza que cada lado del triángulo B'C'D' es a veces el lado correspondiente del triángulo ABC.

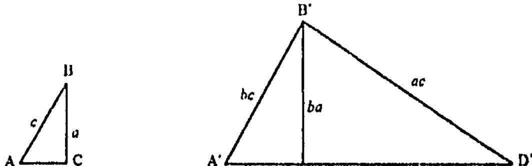


Figura C.14c

Ahora demostremos que $A'B'D' = 90°$. Ya que $\angle A'B'D' = \angle C$ (¿Por qué?), y como $\angle A' = \angle A$ por construcción, dos ángulos del triángulo A'B'D' son iguales respectivamente a dos ángulos del triángulo ABC y por lo tanto los triángulos A'B'D' y ABC son semejantes, por Caso 2 de Semejanza.

Pero $A'B' = cb = c \cdot AC$, indicando que el factor de proporcionalidad es c.
Por lo tanto $A'D' = c \cdot AB$, es decir, c^2.
Pero A'D' también es igual a $b^2 + a^2$.
Y se concluye que $c^2 = b^2 + a^2$.□

Para demostrar el inverso de esta proposición, procederemos como sigue.

DADO: Las longitudes a, b, c tal que $c^2 = b^2 + a^2$.

POR DEMOSTRAR: Hay uno y sólo un triángulo rectángulo que tiene estas longitudes por lados.

DEMOSTRACION: Construyamos un triángulo ABC tal que AC = b, $\angle$C = 90° y CB = a.
Entonces $(AB)^2 = b^2 + a^2$. (¿Por qué?)
Pero $c^2 = b^2 + a^2$ (Dado);
Por lo tanto $(AB)^2 = c^2$, de donde AB = c.
Así que existe al menos un triángulo rectángulo con lados a, b, c. Si existiera otro triángulo, estos triángulos serían iguales, porque si fueran diferentes violarían el Principio 8.□

Inmediatamente se siguen varias proposiciones del teorema pitagórico que casi no requieren prueba para establecerlo. A cualquiera de estas proposiciones se le llama *corolario* del teorema precursor.

C.15 Corolario 12a Si la hipotenusa y otro lado de dos triángulos rectángulos están en proporción, los dos triángulos son semejantes.

DADO: Los triángulos ABC y A'B'C' (Fig. C.15) en los que $\angle C' = \angle C = 90°$, $c' = k \cdot c$ y $a' = k \cdot a$.

POR DEMOSTRAR: Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

DEMOSTRACION: Si demostramos simplemente que $b' = k \cdot b$, se sigue del Caso 3 de Semejanza, que los triángulos son semejantes.
$b'^2 = c'^2 - a'^2$ (Por Teorema de Pitágoras).
Pero $c'^2 - a'^2 = k^2c^2 - k^2a^2 = k^2(c^2 - a^2)$, y
$c^2 - a^2 = b^2$ (Por Teorema de Pitágoras).
Por lo tanto $b'^2 = k^2 \cdot b^2$, de donde $b' = k \cdot b$. □

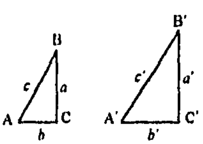


Figura C.15

C.16 Corolario 12b Dos triángulos rectángulos son iguales si la hipotenusa y otro lado de uno son iguales respectivamente a la hipotenusa y otro lado del otro.

C.17 Corolario 12c La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado.

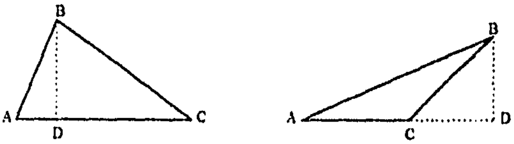


Figura C.17

DADO: El triángulo ABC (Fig. C.17).

POR DEMOSTRAR: AB + BC > AC.

DEMOSTRACION: **Por B trazar BD perpendicular a AC y que corte AC, o la extensión de AC, en D.**
$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$ **(Por Teorema de Pitágoras).**
Por lo tanto $(AB)^2 > (AD)^2$**, de donde AB > AD.**
Análogamente BC > DC.

Por lo tanto AB + BC > AD + DC y AB + BC > AC.□

Compruebe que esta demostración vale cuando D cae en A o en C; también cuando A está entre D y C, y cuando C está entre A y D.

C.18 **Corolario 12d** La distancia más corta de un punto a una línea, es la medida de la perpendicular del punto a la línea.

DADO: Un punto P, una línea AB y PD perpendicular a AB. Ver Fig. C.18.

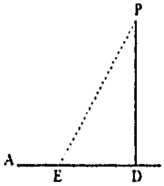


Figura C.18

POR DEMOSTRAR: PD es menor que cualquier otra línea por P a AB, tal como PE.

DEMOSTRACION: $(PE)^2 = (PD)^2 + (DE)^2$ (Por Teorema de Pitágoras).
Por lo tanto $(PE)^2 > (PD)^2$, de donde PE > PD.□

De aquí en adelante cuando hablemos de la DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA LINEA, entenderemos la *distancia perpendicular*, por ejemplo, PD en Fig. C.18. El punto D en esa figura, se llama pié de la perpendicular desde P a AB.

C.19 **Corolario 12e** De dos líneas oblicuas trazadas desde un punto a una línea, la más lejana es la mayor; e inversamente.

DADO: Un punto P, una línea AB, PD perpendicular a AB y FD > DE. Ver Fig. C.19.

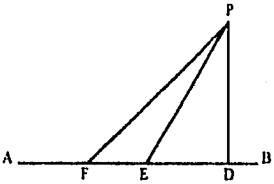


Figura C.19

POR DEMOSTRAR: PF > PE.

Proporcione la demostración completa y también la del inverso.

C.20 Ejercicios

1. Encuentre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, dados los otros dos lados como en los incisos siguientes, limitando sus respuestas a figuras significativas.

a) 3, 4	e) s, s	i) $1, \sqrt{4}$	m) $p^2 - q^2,\ 2pq$
b) 21, 28	f) $1, \sqrt{2}$	j) $1, \sqrt{5}$	n) 14, 9
c) 20,48	g) $1, \sqrt{3}$	k) $1, \sqrt{6}$	o) 6.2, 9.5
d) 1,1	h) $s, s\sqrt{3}$	l) $1, \sqrt{n}$	p) 272, 403

2. Dada la hipotenusa y un lado de un triángulo rectángulo, como en los incisos siguientes, encuentre el tercer lado limitando sus respuestas a figuras significativas.

a) 17, 8	d) $\sqrt{2}, 1$	g) $s, \frac{s}{2}$	j) 9.4, 3.5
b) 2, 1	e) $2s, s$	h) $s\sqrt{2}, s$	k) 204, 111
c) $2, \sqrt{3}$	f) $2s, s\sqrt{3}$	i) 18, 13	

3. El camino de A a B está hacia el este 17 km y luego hacia el norte 11 km más. ¿Qué tan lejos está A de B en línea recta?
4. Por medio de los diagramas en la Fig. C.20, demuestre de dos maneras que un triángulo rectángulo, con los otros dos ángulos de 30° y 60°, el lado menor es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

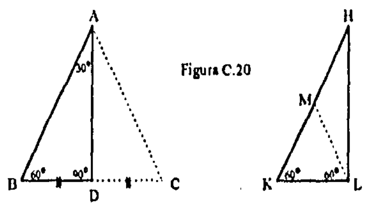


Figura C.20

5. Demuestre que un triángulo rectángulo en el cual el lado más corto es la mitad de la hipotenusa tiene dos ángulos de 30° y 60°. Inténtelo de dos maneras.
6. Demuestre que las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con dos ángulos de 30° y 60° están en la razón $1:\sqrt{3}:2$.
7. Demuestre que un triángulo cuyos lados están en la razón $1:\sqrt{3}:2$ es un triángulo rectángulo $30^\circ;60^\circ$.
8. En el triángulo ABC, AB = 5, BC = 12 y CA = 13. ¿Cuántos grados tiene el $\angle ABC$?
9. En el triángulo DEF, DE = 6 = EF y FD = $6\sqrt{2}$. ¿Cuántos grados tiene cada uno de los ángulos del triángulo?
10. En el triángulo GHK, GH = 4, HK = $4\sqrt{3}$ y KG = 8. ¿Cuántos grados tiene cada uno de los ángulos del triángulo?
11. Cierta caja tiene 12 cm de largo, 4 cm de ancho y 3 cm de altura. ¿Qué medida tiene la diagonal de cada una de las caras de la caja?
12. Encontrar la longitud de la diagonal que pasa por el centro de la caja del ejercicio anterior.
13. Demostrar que un triángulo, con lados $p^2 - q^2$, $2pq$ y $p^2 + q^2$, donde p y q son cualesquiera números enteros positivos, considerando que p es más grande que q, es rectángulo.
14. Encontrar los números p y q que produzcan un triángulo rectángulo

CAPITULO 1 GEOMETRIA ELEMENTAL MODERNA

SECCION 1 | LOS INICIOS DE LA GEOMETRIA

1.1 La primera sección en cada uno de los capítulos 1, 2 y 3 de este trabajo, está destinado a una discusión de la historia de la geometría, específicamente al tipo de material cubierto por esos capítulos. Aunque estas secciones contienen algunos ejercicios apropiados a la historia discutida, estos, no son parte fundamental al material del texto, así que pueden ser leídos en cualquier tiempo disponible.

Estas secciones históricas avanzan cronológicamente, así que es sugerente leerlos en el orden dado.

1.2 La Geometría, y realmente toda la matemática que ha llegado a nosotros por conducto de Europa, tuvo sus orígenes en la ingeniería práctica y la agricultura de los antigüos Babilonios y Egipcios, entre los años 5000 y 2000 a.c. Estos primeros "matemáticos prácticos" estuvieron interesados solamente con soluciones a problemas como: cuántos granos le cabe a un granero, qué área de terreno tiene un agricultor para propósitos de impuestos, etc. El alcance de estos primeros hábiles matemáticos es bastante visible en las grandiosas pirámides Egipcias y otras estructuras. La pirámide de Gizeh, por ejemplo, fue construída aproximadamente en el año 2900 a.c., utilizando más o menos dos millones de enormes piedras con peso aproximado de 54 toneladas cada una, acarreadas unos 800 kilómetros y cortadas con una aproximación de una parte en diez mil Causa gran admiración este difícil trabajo, por su estructura magnificente. Por supuesto, el trabajo manual pesado fue hecho por alrededor de 100,000 esclavos trabajando aproximadamente 30 años. A tales proyectos precedió mucho pensamiento matemático cuidadoso.

1.3 En el papiro de Rhind, decifrado en 1877 y copiado por los años 1700 a.c. por el escriba Ahmes, de un trabajo del año 3400 a.c. aproximadamente, encontramos "Directrices para Obtener Conocimiento de Todas las Cosas Oscuras". Aquí, el área de un triángulo isósceles de lado 10 y base 4 se toma como 20; esto es, la mitad de la base por el *lado*. El área de un círculo está dado como el cuadrado de ocho novenos el diámetro, una buena aproximación que supone a $\pi = 3.1604...$. El área de un cuadrilátero está dado como $(a + c)(b + d)/4$, que es correcto para un rectángulo, pero no para cualquier otro cuadrilátero.

1.4 Fueron dadas muchas fórmulas correctas, tales como la del área de un trapecio, la del área de un triángulo, la del volumen de un cilindro circular recto. Lo más asombroso de todo es la fórmula correcta para

$$V = \frac{1}{3}(B^2 + Bb + b^2)h$$

el volumen de una pirámide cuadrada truncada de arista B en la base mayor, arista b en la base menor y altura h, dado en el papiro de Moscú (*ca.* 1850 a.c.). "La Más Grande Pirámide Egipcia" que es como E.T. Bell se refiere al conocimiento de los Egipcios sobre esta fórmula. Es bastante curioso que los Egipcios hubieran conocido esta fórmula y no una fórmula correcta para el área de un cuadrilátero.

1.5 En Egipto, las matemáticas declinaron después del año 2000 a.c. La pobre notación y la carencia completa de cualquier evidencia de razonamiento lógico, parecen las causas más probables para este estancamiento. Aunque utilizaron nudos en una cuerda para formar un triángulo de lados 3-4-5 para obtener ángulos rectos, no hay evidencia de qué tanto estaban concientes del teorema de Pitágoras.

1.6 Las matemáticas de la antigüa China eran muy semejantes a las de Egipto, pero ellas continúan su desarrollo en los siglos siguientes sacando adelante un teorema ocasional, tal como el método de Horner para reducir cada una de las raíces de una ecuación polinomial a una constante.

1.7 Los Babilonios fueron los mejores matemáticos. Fueron los babilonios quienes dividieron al círculo en 360 partes. Sabían que la altura desde la base de un triángulo isósceles biseca a la base, que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto; conocían el teorema de Pitágoras, y que los lados de triángulos semejantes son proporcionales. En varios lugares tienen a π igual a 3 y a $3\frac{1}{8}$ En La Biblia (I Reyes 7:23 y II Crónicas 4:2) también se dá la aproximación $\pi = 3$.

1.8 Al construir una tabla de valores para $n^3 + n^2$, estaban capacitados para resolver ecuaciones cúbicas de la forma $n^3 + n^2 = c$. Quizá la tabla más avanzada de todas es la que se conoce como *Plimpton 322*, de aproximadamente el año 1800 a.c. En esta tabla de barro se listan triadas pitagóricas y los valores de $\sec^2\theta$ obtenida por ellos para ángulos de 45° a 31°, con asombrosos incrementos regulares en los valores de las funciones. Tales cálculos indican un avanzado entendimiento de trigonometría y del teorema de Pitágoras.

1.9 Los Babilonios nunca descubrieron el volumen correcto de una pirámide truncada. Por analogía dijeron que sería la mitad de la suma de las áreas de las bases por la altura, ya que es la idea correcta para el área de un trapecio. Muchos matemáticos posteriores cayeron en la misma trampa: A causa de que una fórmula que vale para cierta figura bidimensional, se adopta para la correspondiente figura tridimensional.

1.10 Todas las matemáticas recordadas alrededor de 600 a.c. fueron de naturaleza muy práctica, careciendo de generalizaciones y de estructura lógica. Cada caso especial de problema fue tratado separadamente.

1. Ejercicios

1. Encuentre el área correcta de un triángulo isósceles con base 4 y lado 10.
2. Muestre que cuando uno toma al área de un círculo como el cuadrado de ocho novenos el diámetro, entonces se está considerando a $\pi = 3.1604...$
3. Muestre que $(a + c)(b + d)/4$ es más grande que el área de un cuadrilátero no rectangular cuyos lados sucesivos tienen longitudes *a, b, c, d.* Encuentre una fórmula correcta para esta área.
4. Determine la fórmula $V = \frac{1}{3}(B^2 + Bb + b^2)h$ para el volumen de una pirámide truncada de base cuadrada de arista de la base mayor B, arista de la base menor b y altura h.
5. Muestre cómo se puede utilizar la figura siguiente para demostrar que un triángulo 3-4-5 es rectángulo.

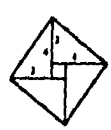


Figura 1.5

6. Revise I Reyes 7:23 y II Crónicas 4:2 en la Biblia. Trace una figura para mostrar el valor de π que allí se está considerando.
7. Construya una tabla de valores para $n^3 + n^2$ con $n = 1,2,...,12$. Luego utilice esta tabla para encontrar una raíz de cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $x^3 + x^2 - 1452 = 0$,
   b) $x^6 + 2x^5 + x^4 = 88000$ (encontrar dos raíces),
   c) $2x^3 + x^2 = 468$,
   d) $x^3 + 3x^2 = 2160$.

1.7 Los Babilonios fueron los mejores matemáticos. Fueron los babilonios quienes dividieron al círculo en 360 partes. Sabían que la altura desde la base de un triángulo isósceles biseca a la base, que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto; conocían el teorema de Pitágoras, y que los lados de triángulos semejantes son proporcionales. En varios lugares tienen a π igual a 3 y a $3\frac{1}{8}$ En La Biblia (I Reyes 7:23 y II Crónicas 4:2) también se dá la aproximación $\pi = 3$.

1.8 Al construir una tabla de valores para $n^3 + n^2$, estaban capacitados para resolver ecuaciones cúbicas de la forma $n^3 + n^2 = c$. Quizá la tabla más avanzada de todas es la que se conoce como *Plimpton 322*, de aproximadamente el año 1800 a.c. En esta tabla de barro se listan triadas pitagóricas y los valores de $\sec^2\theta$ obtenida por ellos para ángulos de 45° a 31°, con asombrosos incrementos regulares en los valores de las funciones. Tales cálculos indican un avánzado entendimiento de trigonometría y del teorema de Pitágoras.

1.9 Los Babilonios nunca descubrieron el volumen correcto de una pirámide truncada. Por analogía dijeron que sería la mitad de la suma de las áreas de las bases por la altura, ya que es la idea correcta para el área de un trapecio. Muchos matemáticos posteriores cayeron en la misma trampa: A causa de que una fórmula que vale para cierta figura bidimensional, se adopta para la correspondiente figura tridimensional.

1.10 Todas las matemáticas recordadas alrededor de 600 a.c. fueron de naturaleza muy práctica, careciendo de generalizaciones y de estructura lógica. Cada caso especial de problema fue tratado separadamente.

1. Ejercicios

1. Encuentre el área correcta de un triángulo isósceles con base 4 y lado 10.
2. Muestre que cuando uno toma al área de un círculo como el cuadrado de ocho novenos el diámetro, entonces se está considerando a $\pi = 3.1604...$.
3. Muestre que $(a + c)(b + d)/4$ es más grande que el área de un cuadrilátero no rectangular cuyos lados sucesivos tienen longitudes *a, b, c, d.* Encuentre una fórmula correcta para esta área.
4. Determine la fórmula $V = \frac{1}{3}(B^2 + Bb + b^2)h$ para el volumen de una pirámide truncada de base cuadrada de arista de la base mayor B, arista de la base menor b y altura h.
5. Muestre cómo se puede utilizar la figura siguiente para demostrar que un triángulo 3-4-5 es rectángulo.

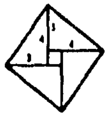


Figura 1.5

6. Revise I Reyes 7:23 y II Crónicas 4:2 en la Biblia. Trace una figura para mostrar el valor de π que allí se está considerando.
7. Construya una tabla de valores para $n^3 + n^2$ con $n = 1,2,...,12$. Luego utilice esta tabla para encontrar una raíz de cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $x^3 + x^3 - 1452 = 0$,
   b) $x^6 + 2x^5 + x^4 = 88000$ (encontrar dos raíces),
   c) $2x^3 + x^2 = 468$,
   d) $x^3 + 3x^2 = 2160$.

2.1 Iniciaremos con teoremas adicionales a los cursos de geometría de enseñanza media y media superior, para refrescar y reingresar al pensamiento geométrico. No se establecerán aquí los axiomas y postulados de la geometría euclidiana (Ver Apéndice A). En esta sección se introduce el concepto de segmento y ángulo dirigido, idea muy útil en geometría moderna, como veremos después.

2.2 Se debe cuidar escribir los miembros correspondientes u homólogos de figuras congruentes o semejantes, en el mismo orden relativo uno de otro. Así, cuando $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (el triángulo ABC es congruente al triángulo DEF), se requiere que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $AB \cong DE$, etc.

2.3 **Teorema** Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

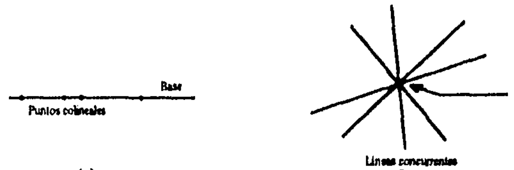
Demostración.

Consideremos $AB \cong AC$ en el triángulo ABC. Se tiene $\angle BAC \cong \angle CAB$ por identidad. Puesto que $AB \cong AC$ y $AC \cong AB$, entonces $\Delta BAC \cong \Delta CAB$ por *LAL*(son congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre los lados de un triángulo con las partes correspondientes del otro triángulo). Y $\angle B \cong \angle C$ puesto que son partes correspondientes de figuras congruentes.□

2.4 **Definición** Una *línea* propiamente es un término indefinido, sin embargo entenderemos la palabra *línea* como una línea recta sin punto inicial ni punto final y de longitud infinita. Si entre los puntos A y B está el punto C, entonces estos tres puntos son distintos y todos ellos están en una línea. Inversamente, si A, B, C son tres puntos distintos en una línea, entonces exactamente uno de estos tres puntos está entre los otros dos. Un *segmento* AB es el conjunto de puntos que consiste de los puntos A y B y de todos los puntos entre A y B.

2.5 Puesto que una línea o un segmento es un conjunto de puntos, utilizaremos la notación $P \in m$ y $Q \notin m$ para simbolizar que el punto P está en la línea *m* y Q no está en la línea *m*. Por supuesto, una línea también es una generalización del concepto físico de una arista de una mesa o de una hoja de papel. En forma análoga, un punto es la idealización de una mancha o una señal o una ubicación. En efecto, la geometría euclidiana básicamente es el estudio idealizado de ciertas propiedades que describen al mundo físico real.

2.6 **Definición** Puntos que están en una línea se llaman *colineales*, y forman un *rango* de puntos con la línea como *base*. Líneas que pasan por un punto se llaman *concurrentes* y este punto se llama su *vértice*. Todas las líneas que concurren o todas las que son paralelas se dice que forman un as (ver Fig. 2.6).



(a) (b)

Figura 2.6

2.7 **Definición** Simbolizaremos con AB bien a la línea que pasa por los puntos A y B o al segmento determinado por A y B. El contexto aclarará el sentido del uso que se dé. La *medida* (longitud) del segmento AB se simbolizará con $m(AB)$. Si A y B coinciden, escribiremos $A = B$ o $m(AB) = 0$. Análogamente $\angle BAC$ simbolizará al ángulo determinado por los rayos AB y AC. También se utilizará la notación $\angle A$ para $\angle BAC$ cuando no surja confusión. La medida (en grados generalmente) de $\angle BAC$ o $\angle A$ se simbolizará por $m(\angle BAC)$ o $m(\angle A)$.

2.8 De la definición 2.7, se sigue que podemos escribir $\angle A = \angle B$ solamente cuando estos ángulos conciden. Si estos ángulos tienen la misma medida, escribimos $\angle A \cong \angle B$ ($\angle A$ *es congruente con* $\angle B$). Análogamente, $m(AB) = m(CD)$ o $AB \cong CD$ significa que los segmentos AB y CD tienen la misma longitud, mientras que $AB = CD$ indica que estos segmentos (o líneas) coinciden.

2.9 **Definición** Elijamos una dirección como *positivo* a lo largo de una línea l. Definamos la *longitud dirigida* de A a B, simbolizada con $d(AB)$, por

$$d(AB) = m(AB)$$

cuando la dirección de A a B es positiva, y

$d(AB) > 0$

Figura 2.9

$$d(AB) = -m(AB)$$

cuando la dirección de B a A es positiva.(Ver Fig.2.9).

2.10 **Teorema** Para cualesquiera dos puntos A y B ,

$$d(AB) + d(BA) = 0.$$

2.11 **Teorema** Si A, B, C son cualesquiera tres puntos colineales, entonces

$$d(AB) = d(CB) - d(CA).$$

2.12 **Teorema** Si O, A, B son tres puntos colineales, entonces el punto medio M del segmento AB satisface la relación

$$d(OM) = \frac{1}{2}\,(d(OA) + d(OB)).$$

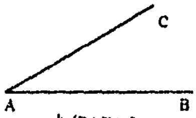
2.13 **Definición** La *medida dirigida* de $\angle BAC$, simbolizada por $d(\angle BAC)$, se define por

$$d(\angle BAC) = m(\angle BAC)$$

cuando $\angle BAC$ se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj (una rotación contraria a las manecillas lleva al rayo AB sobre el rayo AC), y

$$d(\angle BAC) = -m(\angle BAC)$$

cuando $\angle BAC$ se mide en el sentido de las manecillas.(Ver Fig. 2.13)



$d(\angle BAC) > 0$

Figura 2.13

2.14 **Teorema** Para cualquier ángulo BAC, $d(\angle BAC) + d(\angle CAB) = 0$.

2.15 Convención. Debido a que, en este trabajo, con mucha frecuencia se utilizarán distancia y ángulo dirigidos, simbolizaremos con mayúscula negrita a las magnitudes con sentido y con mayúscula ligera a las magnitudes sin sentido, en las fórmulas donde sea clara la implicación de distancia[*]. En otros casos se utilizarán los símbolos *m* y *d*. Así que, escribiremos

$$m(\mathrm{AB}) = \mathrm{AB} \quad \text{y} \quad d(\mathrm{AB}) = \mathbf{AB},$$
$$m(\angle\mathrm{BAC}) = \angle\mathrm{BAC} \quad \text{y} \quad d(\angle\mathrm{BAC}) = \angle\mathbf{BAC}.$$

2.16 Teorema *Teorema de Euler.* Si A, B, C, D son cuatro puntos colineales, entonces

$$\mathbf{AB}\cdot\mathbf{CD} + \mathbf{AC}\cdot\mathbf{DB} + \mathbf{AD}\cdot\mathbf{BC} = 0.$$

Demostración

Por el teorema 2.11, se tiene

$$\mathbf{AB} = \mathbf{DB} - \mathbf{DA}, \quad \mathbf{AC} = \mathbf{DC} - \mathbf{DA}, \quad \text{y} \quad \mathbf{BC} = \mathbf{DC} - \mathbf{DB}.$$

Por lo tanto la expresión dada se convierte en

$$\begin{aligned}\mathbf{AB}\cdot\mathbf{CD} + \mathbf{AC}\cdot\mathbf{DB} + \mathbf{AD}\cdot\mathbf{BC} &= \\ &= (\mathbf{DB} - \mathbf{DA})\cdot\mathbf{CD} + (\mathbf{DC} - \mathbf{DA})\cdot\mathbf{DB} + \mathbf{AD}\cdot(\mathbf{DC} - \mathbf{DB}) \\ &= -(\mathbf{DB} - \mathbf{DA})\cdot\mathbf{DC} + (\mathbf{DC} - \mathbf{DA})\cdot\mathbf{DB} - \mathbf{DA}\cdot(\mathbf{DC} - \mathbf{DB}) \\ &= 0. \square\end{aligned}$$

2.17 Teorema El área K del triángulo ABC está dado por

$$\mathrm{K} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\operatorname{sen}\mathrm{B};$$

es decir, el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de cualesquiera dos lados y el seno del ángulo comprendido entre ellos.

2.18 Por conveniencia, en las fórmulas que siguen, acordaremos que a/b = c/d será válido siempre que ad=bc aún cuando ambos, b y d sean cero. Esta convención mostrará su utilidad cuando consideremos expresiones algebraicas en los teoremas de Menelao y Ceva en las secciones 4 y 5.

2.19 Teorema Consideremos cualquier triángulo ABC y tomemos cualquier punto L en BC. Entonces

$$\frac{\mathbf{BL}}{\mathbf{LC}} = \frac{\mathrm{AB}\cdot\operatorname{sen}\angle\mathbf{BAL}}{\mathrm{CA}\cdot\operatorname{sen}\angle\mathbf{LAC}}.$$

Demostración

Observar primero que las magnitudes AB y CA no son dirigidas; pero todas las otras medidas si lo son.

Consideremos que *h* simboliza la longitud de la altura desde el vértice A del triángulo ABC. Las áreas K_1 y K_2 de los triángulos ABL y ALC están dadas por

$$\mathrm{K}_1 = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{BL}\cdot\mathrm{h} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AL}\cdot\operatorname{sen}\angle\mathbf{BAL}$$
$$\mathrm{K}_2 = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{LC}\cdot\mathrm{h} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AL}\cdot\mathrm{CA}\cdot\operatorname{sen}\angle\mathbf{LAC},$$

[*] Sugerencia. En escritura manuscrita es difícil *escribir en negrita* los segmentos dirigidos. Para ello se sugiere utilizar barra encima de las letras. Ejemplo: $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CB}} - \overline{\mathrm{CA}}$

de lo que se obtiene, siempre que $L \neq C$,

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{BL}{LC} = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} \angle BAL}{CA \cdot \operatorname{sen} \angle LAC}.$$

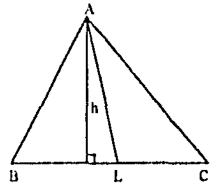


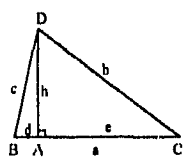
Figura 2.19

Ahora, **BL/LC** y (sen∠BAL) / (sen∠LAC) son positivos ambos o ambos negativos según que L se encuentre entre B y C o fuera del segmento BC. Si L = B, entonces son cero ambos numeradores. De esta manera se concluye que, en todos los casos, estas dos fracciones tienen el mismo signo, y por lo tanto el teorema vale cuando $L \neq C$. Si $L = C$, entonces el teorema se sigue de 2.18, ya que ambos denominadores son cero.□

2. Ejercicios

1. Demuestre que si A, B, C son cualesquiera tres puntos colineales, entonces $d(AB) + d(BC) + d(CA) = 0$.
2. Demuestre el teorema 2.10.
3. Demuestre el teorema 2.11.
4. Demuestre el teorema 2.17.
5. Demuestre que la bisectriz de un ángulo interno en un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.
6. Demuestre el teorema 2.12.
7. Sean A, B, C, D puntos colineales. Si M y N son puntos medios de AB y CD, demuestre que $2MN = AC + BD = AD + BC$.
8. Si A, B, C, D son puntos colineales y si los puntos medios de AB y CD coinciden, demostrar que $d(AC) = d(DB)$.
9. Si A, B, C, D son cuatro puntos colineales cualesquiera, demuestre que
$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0.$$
10. *Teorema de Stewart.* Demuestre que la fórmula del Ejercicio 2.9 vale aún cuando el punto D no esté en la línea ABC.
11. Demuestre que si A, B, C, D son puntos colineales tal que $d(AC) = d(DB)$, entonces los puntos medios de AB y CD coinciden.
12. Utilice el Ejercicio 2.10 para encontrar las longitudes de las medianas de un triángulo.
13. Utilice el Ejercicio 2.10 para encontrar las longitudes de las bisectrices interiores de un triángulo.
14. Considere que las longitudes de los lados del triángulo DBC son a, b, c para los lados BC, CD, DB. Considere que la altura DA tiene longitud h, que $d(BA) = d$ y $d(AC) = e$ tal que $a = d + e$. Entonces $c^2 = d^2 + h^2$. Vea figura y utilice Ejercicio 2.10 para demostrar que

$$h^2 = \frac{2(c^2a^2 + a^2b^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{4a^2}$$



Ejercicio 2.14

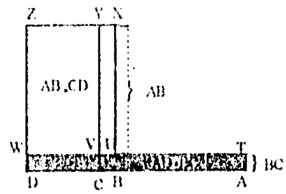
15. Utilice Ejercicio 2.14 para demostrar la fórmula de Herón para el área K de un triángulo con lados a, b, c y semiperímetro $s = (a + b + c) / 2$:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

Esto demuestra también que la altura h del lado a está dado por

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

15. Utiliza la figura siguiente para comprobar el teorema de Euler, teorema 2.16



Ejercicio 2.16

3.1 Aunque trabajaremos principalmente en el plano euclidiano, ocasionalmente utilizaremos el espacio euclidiano de tres dimensiones. La siguiente definición permitirá ambas consideraciones. No se presentarán dibujos de elementos ideales ya que simplemente no aparecen como figuras ordinarias euclidianas. Se exhorta al lector que responda y complete cuidadosamente los Ejercicios 3.1 y 3.2 para reforzar los conceptos de elementos ideales.

Observe que varias propiedades de la geometría euclidiana tienen deficiencias. Por ejemplo, dos puntos distintos siempre determinan exactamente una línea (que pasa por los dos puntos); y dos líneas coplanares distintas (líneas que se encuentran en el mismo plano) determinan un punto (de intersección) solamente cuando no son paralelas. Estas deficiencias se pueden remediar al imaginar un *punto al infinito* en el cual se cortan las dos líneas paralelas. La definición 3.2 proporcionará los detalles de tales elementos infinitos. Las razones de división de un segmento, sirven de vínculo para ambas ideas de elementos infinitos y medidas dirigidas. En las secciones 4 y 5 se utilizarán estas ideas.

3.2 **Definición** De aquí en adelante, a cada línea euclidiana, que se le llamará *línea ordinaria*, se le agregará un *punto ideal* (punto al infinito) que tendrá las siguientes propiedades.

1. Líneas ordinarias paralelas comparten el mismo punto ideal.
2. Líneas ordinarias que se intersecan tienen puntos ideales distintos.
3. Todos los puntos ideales que pertenecen a las líneas ordinarias de un plano euclidiano dado, que de aquí en adelante se le llamará *plano ordinario*, forman la *línea ideal* de ese plano.
4. Planos ordinarios paralelos comparten la misma línea ideal.
5. Planos ordinarios que se intersecan tienen líneas ideales distintas
6. Todos los puntos ideales (y líneas ideales) en el espacio, forman *el plano ideal*.
7. Todo punto ideal se considera que está infinitamente separado, lejos de cualquier otro punto (ordinario o ideal).

Al plano euclidiano así aumentado se le llama *plano extendido* y al espacio euclidiano así aumentado se le llama *espacio extendido*. Los puntos, así como las líneas y planos, que no son ideales se les llama *ordinarios*.

3.3 **Definición** Sean A y B puntos ordinarios y sea P cualquier punto colineal con A y B. Se define la *razón r en la que* P *divide al segmento* AB, de la siguiente manera

$r = AP/PB$	si P es un punto ordinario y $P \neq B$,
$r = \infty$	si $P = B$,
$r = -1$	si P es el punto ideal de la línea AB.

Si P está entre A y B, entonces se dice que P *divide* AB *internamente*; si $P = A$ o $P = B$, entonces P *divide* AB *impropiamente*; de otra manera P *divide* AB *externamente*. En todos los casos se escribirá $r = \mathbf{AP/PB}$.

3.4 De esta manera la razón r en la que P divide al segmento AB puede ser cualquier número real; $r = 1$ si P es el punto medio de AB. Por ejemplo: Si P está entre A y B, entonces $r > 0$; $0 < r < 1$ si P está próximo a A, internamente; y $r > 1$ si P está más cerca de B, internamente; si B está entre A y P, entonces $r < -1$, y $r \to -\infty$ cuando $P \to B$. Si A está entre B y P, entonces $-1 < r < 0$. Si P es ideal, entonces $r = -1$. Si $P = A$, $r = 0$; y si $P = B$, $r = \infty$. En la Fig. 3.4 se indican, para diferentes puntos, razones de división del segmento AB.

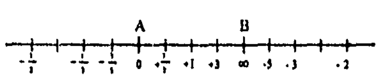


Figura 3.4

3.5 Teorema Si $AP/PB = AQ/QB$, donde A y B son puntos ordinarios diferentes y P y Q están sobre la línea AB, entonces P = Q.

Demostración

De la ecuación dada tenemos

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AP+PB}{PB} = \frac{AP}{PB}+1 = \frac{AQ}{QB}+1 = \frac{AQ+QB}{QB} = \frac{AB}{QB}.$$

Ya que la primera y la última fracciones tienen numeradores iguales diferentes de cero, sus denominadores también son iguales. Así $PB = QB$, y entonces P = Q.□

3.6 Definición La *razón cruzada* de cuatro puntos colineales A, B, C, D, denotado por (AB, CD), se define como

$$(AB,CD) = \left(\frac{AC}{CB}\right) + \left(\frac{AD}{DB}\right).$$

3.7 Definición La *razón cruzada* de cuatro líneas concurrentes VA, VB, VC, VD, denotado por V(AB, CD), se define como

$$V(AB,CD) = \left(\frac{\operatorname{sen}\angle AVC}{\operatorname{sen}\angle CVB}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}\angle AVD}{\operatorname{sen}\angle DVB}\right).$$

3.8 Teorema Si una transversal ordinaria m corta cuatro líneas concurrentes VA, VB, VC, VD, en cuatro puntos A, B, C, D, entonces la razón cruzada de las cuatro líneas es igual a la razón cruzada de los cuatro puntos. Esto es, V(AB, CD) = (AB, CD).

3.9 Teorema Si A, B, C, D son puntos ordinarios colineales, entonces

$$(AB, CD) = (CD, AB) = (BA, DC) = (DC, BA).$$

3.10 Definición Las igualdades del teorema 3.9 se utilizan para definir (AB, CD) en caso de que A o B sea punto ideal; y C y D sean puntos ordinarios diferentes. Esto es, (AB, CD) = (CD, AB).

3.11 Definición Si (AB, CD) = −1, entonces se dice que los puntos C y D *dividen armónicamente* AB. El punto D se llama *conjugado armónico* de C con respecto al segmento AB.

3.12 Teorema Si C y D dividen AB armónicamente, entonces A y B también dividen a CD armónicamente.

3.13 Teorema El conjugado armónico del punto medio de un segmento es el punto ideal de esa línea.

3. Ejercicios

1. Indique cuándo es cierta o cuando es falsa cada una de las proposiciones siguientes, en el espacio extendido.
   a) Cada línea tiene exactamente un punto ideal.
   b) Cada plano tiene exactamente una línea ideal.
   c) Dos planos distintos se cortan en exactamente una línea.
   d) Hay un número infinito de líneas ideales.
   e) Hay un número infinito de planos ideales.
   f) Hay un número infinito de puntos ideales.

2. Indique [illegible]
   a) Toda línea [illegible] punto ideal.
   b) Toda línea tiene al menos un punto ideal.
   c) Cualesquiera dos líneas de [illegible] se cortan (tienen un punto en común).
   d) Por un punto dado P fuera de una línea dada *m*, pasa exactamente una línea que corta a la línea *m* en un punto ideal (una línea paralela a la línea dada).
   e) Si las líneas *m* y *n* se cortan en un punto ideal y además las líneas *n* y *p* se cortan en un punto ideal, entonces las líneas *m* y *p* también se cortan en un punto ideal.
   f) Hay un número infinito de puntos ideales.
   g) Hay un número infinito de líneas ideales.
3. Trazar un triángulo que tenga exactamente:
   a) Cero vértices ideales.
   b) Un vértice ideal.
   c) Dos vértices ideales.
   d) Tres vértices ideales.
4. Encuentre el punto P que divide al segmento AB en la razón indicada, donde A y B son puntos con coordenadas cartesianas (0,0) y (1,0), respectivamente.
   a) 1 b) 2 c) 0 d) ∞ e) -1 f) -2 g) $\frac{1}{2}$
   h) -1/2 i) 1/10 j) -1/10.
5. Verifique las proposiciones en 3.4
6. Encuentre dos fracciones equivalentes con numeradores iguales y denominadores diferentes. ¿Invalida esto la demostración del teorema 3.5?
7. a) Demuestre que si dos puntos dividen a los lados AB y AC del triángulo ABC en la misma razón, entonces la línea que une estos puntos es paralela al lado BC.
   b) Si "AC" se reemplaza por "CA" ¿Sigue valiendo el teorema?
8. Demuestre el teorema 3.8.
9. Demuestre el teorema 3.9.
10. Demuestre que si D es conjugado armónico de C con respecto AB, entonces C es conjugado armónico de D con respecto de AB.
11. a) Demuestre que si (AB, CD) = (AB, CE), entonces D = E.
    b) Demuestre que el conjugado armónico de un punto dado con respecto a un segmento dado colineal con el punto dado, es único.
12. Demuestre el teorema 3.12.
13. Demuestre el teorema 3.13.
14. Hay 24 maneras diferentes de tomar la razón cruzada para cuatro puntos distintos A, B, C, D, cuatro de las cuales fueron desplegadas en el teorema 3.9. Demuestre que estos 24 arreglos producen 6 razones cruzadas diferentes únicamente, y que, si (AB, CD) = r, los otros valores son 1-r, 1/r, r/(r-1), 1/(1-r) y (r-1)/r.
15. Dada (AB, CD) = r, demuestre que:
    a) Intercambiando el primero con el segundo par de puntos, o intercambiando los puntos dentro del primer par y también aquellos dentro del segundo par, no cambia el valor de la razón cruzada.
    b) Intercambiando los puntos únicamente dentro del primer par, o únicamente dentro del segundo par, cambia el valor de la razón cruzada a 1/r.
    c) Intercambiando solamente el primer y cuarto puntos, o solamente el segundo y tercer puntos, el valor de la razón cruzada cambia a 1-r.
    d) Intercambiando únicamente el primer y tercer puntos, o únicamente el segundo y cuarto puntos, el valor de la razón cruzada cambia a r/(r-1).
16. En el plano cartesiano, considere A(0,0) y B(1,0). Demuestre que el punto P que divide al segmentoAB en la razón r, tiene coordenadas (r/(r-1), 0).

4.1 **Definición** Cualquier punto P en una línea de un triángulo ABC se llama *Punto de Menelao* para esa línea. Se llama *punto propio de Menelao* si el punto no es un vértice del triángulo.

4.2 **Teorema** *Teorema de Menelao.* Consideremos que los puntos L, M, N son puntos de Menelao para los lados BC, CA, AB del triángulo ABC. Entonces los puntos L, M, N son colineales sii*

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1.$$

Demostración

Primero, tomar L, M, N puntos propios de Menelao y colineales en una línea base m. Trazar las perpendiculares AR, BS, CT de longitudes r, s, t a la línea m desde los puntos A, B, C como se ve en la Fig.4.2. Los pares siguientes de triángulos rectángulos son semejantes ya que comparten un ángulo agudo o tienen un ángulo opuesto por el vértice:

$\Delta BLS \sim \Delta CLT$, así que $\frac{BL}{LC}=\frac{s}{t}$,

$\Delta CMT \sim \Delta AMR$, así que $\frac{CM}{MA}=\frac{t}{r}$;

$\Delta ANR \sim \Delta BNS$, así que $\frac{AN}{NB}=\frac{r}{s}$;

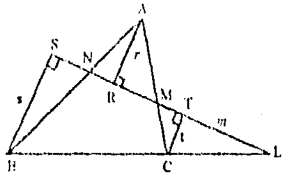


Figura 4.2

De donde

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\pm\frac{s}{t}\cdot\frac{t}{r}\cdot\frac{r}{s}=\pm 1.$$

Puesto que una de las tres divisiones debe ser externa, este producto es negativo.

Para establecer el inverso, consideremos L, M, N puntos de Menelao propios tal que

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1.$$

Hagamos que la línea que une a los puntos L y M corte a la línea AB en un punto N'. Entonces L, M, N' son tres puntos colineales de Menelao para el triángulo ABC, que por la primera parte de esta prueba se tiene,

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN'}{N'B}=-1.$$

De donde AN/NB = AN'/N'B, así que N = N', por el teorema 3.5. □

4.3 **Teorema** *Forma trigonométrica del teorema de Menelao.* Sean L, M, N puntos de Menelao para los lados BC, CA, AB de un triángulo ordinario ABC. Entonces los puntos L, M, N son colineales sii

$$\frac{\text{sen}\,\angle BAL}{\text{sen}\,\angle LAC}\cdot\frac{\text{sen}\,\angle CBM}{\text{sen}\,\angle MBA}\cdot\frac{\text{sen}\angle ACN}{\text{sen}\angle NCB}=-1.$$

Demostración

Este teorema se concluye fácilmente de los teoremas 4.2 y 2.19.□

---

* La expresión sii significa "si y sólo si".

El teorema siguiente es un ejemplo de aplicación del teorema de Menelao.

4.4 **Teorema** La línea que une puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.

Demostración

Considerar M y N puntos medios de los lados AB y CA del triángulo ABC. (Ver Fig.4.4) Suponer que la línea MN corta al lado BC en el punto L. Por el teorema de Menelao se tiene,

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1.$$

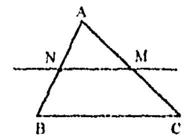


Figura 4.4

Pero CM/MA = AN/NB = 1, ya que M y N son puntos medios. Así BL/LC = −1, y por lo tanto L es un punto ideal; esto es, las líneas BC y MN son paralelas.□

4.5 **Teorema** Las líneas tangentes al circuncírculo en los vértices de un triángulo, cortan a los lados opuestos del triángulo en tres puntos colineales.

Demostración

Consideremos que la tangente al circuncírculo en A corta a la línea BC en L como se ve en la Fig.4.5. Entonces $\angle BAL \cong \angle C$, ya que la medida de cada ángulo es la mitad del arco AB. Igualmente tenemos que $\angle LAC = 180^{0} - \angle ABC$, ya que las medidas de estos ángulos son, respectivamente, la mitad de la medida de los arcos opuestos. Entonces

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB \cdot \operatorname{sen}\angle BAL}{CA \cdot \operatorname{sen}\angle LAC} = \pm \frac{AB \cdot \operatorname{sen}\angle C}{CA \cdot \operatorname{sen}\angle ABC} = \pm \frac{(AB)^2}{(CA)^2},$$

por el teorema 2.19 y la ley de los senos. El signo menos vale ya que claramente la división es externa.

$$\frac{CM}{MA} = -\frac{(BC)^2}{(AB)^2} \quad \text{y} \quad \frac{AN}{NB} = -\frac{(CA)^2}{(BC)^2}$$

donde M y N son intersecciones correspondientes de las tangentes a la circunferencia en B y C con las líneas CA y AB. Ahora

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1,$$

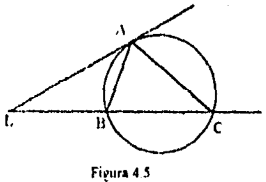
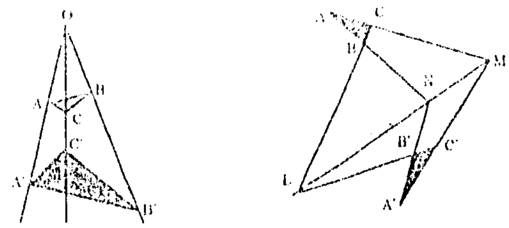


Figura 4.5

así que el teorema se concluye del teorema de Menelao.□

4.6 **Definición** Se dice que dos triángulos ABC y A'B'C' son *copolares* sii las tres líneas AA', BB', CC', que unen vértices correspondientes, son concurrentes (en un punto ordinario o ideal); y se dice que son *coaxiales* sii los tres puntos de intersección L, M, N de los lados correspondientes BC y B'C', CA y C'A', AB y A'B' son colineales (en una línea ordinaria o ideal). (Ver Fig. 4.6.)



Triángulos Copolares
(a)

Triángulos Coaxiales
(b)

Figura 4.6

4.7 Teorema *Teorema de los triángulos de Desargues.* Si dos triángulos son copolares, entonces son coaxiales; inversamente, si dos triángulos son coaxiales, entonces son copolares.

Demostración

Supongamos que los triángulos ABC y A'B'C' son copolares en O. (Ver Fig. 4.7.) Aplicando el teorema de Menelao al triángulo OBC con puntos de Menelao colineales L, C', B'; al triángulo OCA con puntos M, A', C'; y al triángulo OAB con puntos N, B', A', obtenemos

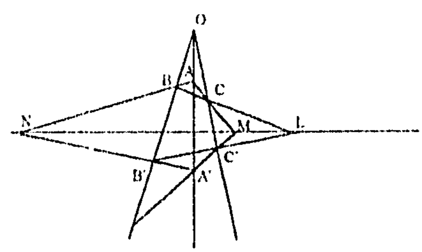


Figura 4.7

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{B'B} = -1, \qquad \frac{CM}{MA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C} = -1, \qquad \frac{AN}{NB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A} = -1.$$

Multiplicando las tres ecuaciones anteriores lado a lado se obtiene

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB} = -1.$$

Así, puesto que L, M, N son puntos de Menelao para el triángulo ABC, entonces L, M, N son colineales; esto es, los triángulos ABC y A'B'C' son coaxiales.

Inversamente, supongamos que los triángulos ABC y A'B'C' son coaxiales en los puntos L, M, N. Hagamos que BB' y CC' se corten en O. Ahora los triángulos MCC' y NBB' son copolares en L. De donde, por la primera parte de la prueba, estos triángulos son coaxiales; esto es, los puntos A, A', O son colineales. Así, los triángulos ABC y A'B'C' son copolares en O.□

4.8 Teorema *Teorema de Papus.* Si el hexágono ABCDEF tiene sus vértices A, C, E en una línea y sus vértices B, D, F están en otra línea, entonces los tres puntos L, M, N de intersección de pares de lados opuestos AB y DE, BC y EF, CD y FA son colineales.

Demostración

Supongamos que AB corta a CD en P, y a EF en R, y consideremos que CD y EF se cortan en Q, como se muestra en la Fig. 4.8. Aplicando el teorema de Menelao al triángulo PQR que es cortado por las líneas FAN, MBC y ELD, obtenemos

$$\frac{QF}{FR}\cdot\frac{RA}{AP}\cdot\frac{PN}{NQ}=-1,\qquad \frac{QM}{MR}\cdot\frac{RB}{BP}\cdot\frac{PC}{CQ}=-1,\qquad \frac{QE}{ER}\cdot\frac{RL}{LP}\cdot\frac{PD}{DQ}=-1.$$

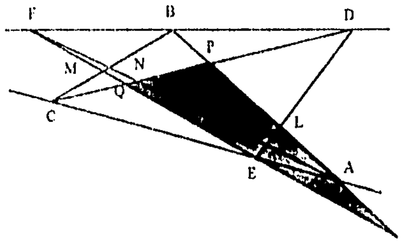


Figura 4.8

Ahora, multiplicando estas tres ecuaciones lado a lado, y reagrupando factores se obtiene

$$\left(\frac{QM}{MR}\cdot\frac{RL}{LP}\cdot\frac{PN}{NQ}\right)\left(\frac{QF}{FR}\cdot\frac{RB}{BP}\cdot\frac{PD}{DQ}\right)\left(\frac{QE}{ER}\cdot\frac{RA}{AP}\cdot\frac{PC}{CQ}\right)=-1.$$

Ya que F, B, D y E, A, C son dos conjuntos de puntos colineales de Menelao para el triángulo PQR, entonces cada uno de los dos últimos productos triples en paréntesis es igual a -1. Asl que esta expresión se reduce a

$$\frac{QM}{MR}\cdot\frac{RL}{LP}\cdot\frac{PN}{NQ}=-1,$$

estableciendo, por la parte inversa del teorema de Menelao, que L, M y N son colineales.□

4.9 En esta sección hemos visto una prueba más conveniente para la colinealidad de tres puntos. En la sección siguiente encontraremos una prueba semejante para la concurrencia de tres líneas. Estas ideas se llaman *duales* una de otra. Esto es, dos proposiciones se llaman duales una de otra si cada una se transforma en la otra por el intercambio de las palabras "punto" y "llnea"; y, por supuesto, también los términos asociados como "colineal" y "concurrente". Una ilustración apropiada de dualidad es el teorema de Desargues, porque triángulos copolares y triángulos coaxiales son conceptos duales. El teorema establece que estos dos conceptos duales son equivalentes, considerando, por supuesto, que permitimos elementos ideales.

4.10 En geometría proyectiva, en la cual son básicos los teoremas de Desargues y de Papus, siempre se utiliza el espacio extendido y el *teorema de dualidad*, un teorema acerca de teoremas, que establece que el dual de cualquier teorema proyectivo es otro teorema proyectivo. Observe que el teorema de Desargues es su propio dual. Cerramos esta sección al establecer sin demostración el dual del teorema de Papus. Comparar esta proposición palabra por palabra con el teorema de Papus, observando que cada concepto es dualizado.

4.11 Teorema [illegible]. Si un hexágono (con lados) a, b, c, d, e, f tiene sus lados a, c, e concurrentes en un punto P y sus lados b, d, f concurrentes en otro punto Q, entonces las tres líneas l, m, n que unen vértices opuestos (en las intersecciones de) ab y de, bc y ef, cd y fa, son concurrentes (en un punto R). (Ver Fig. 4.11.)

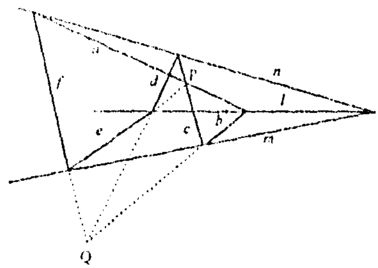


Figura 4.11

4.12 Ahora que ha sido establecido e ilustrado el teorema 4.11, encontramos que el frasco puede ser mejorado. Este hecho no menoscaba la utilidad de la dualidad por que hemos obtenido al menos una proposición del teorema y hay muy pocas expresiones cuyo frasco no puede ser esclarecido. Reestablecemos el teorema como sigue: Si los lados de un hexágono pasan alternadamente por dos puntos, entonces las tres diagonales que unen vértices opuestos son concurrentes.

4. Ejercicios

1. En la demostración del teorema de Menelao se consideró que los puntos de Menelao eran propios. Complete la demostración de este teorema al establecerlo para el caso en el cual uno o más puntos de Menelao no son propios.
2. Restablezca y demuestre el teorema de Menelao para un triángulo que tiene un vértice ideal.
3. ¿Se puede aplicar el teorema de Menelao a un triángulo que tiene dos o tres vértices ideales?
4. Demostrar el teorema 4.3.
5. Dado que P y Q son puntos en las líneas AB y AC del triángulo ABC, demostrar que PQ es paralelo a BC sii AP/PB = AQ/QC.
6. Escoger un punto P en el lado AB de un triángulo ABC. Considerar que la paralela a BC que pasa por P corta al lado AC en Q; que la paralela a AB que pasa por Q corta a BC en R; que la paralela a AC que pasa por R corta a AB en S; que la paralela a BC que pasa por S corta a AC en T; y, que la paralela a AB que pasa por T corta a BC en U. Demostrar que PU es paralela a AC.
7. Demuestre el teorema dos triángulos de Desargues (Teorema 4.7) para el caso en el cual O es un punto ideal.
8. Demuestre que las tres bisectrices de los ángulos externos de un triángulo cortan a los lados opuestos en tres puntos colineales.
9. Demuestre que las bisectrices de dos ángulos internos de un triángulo y la bisectriz externa del tercer vértice corta a los lados opuestos en tres puntos colineales.
10. Los puntos P y Q son *conjugados isotómicos* con respecto al segmento AB sii A, B, P, Q son colineales y $d(AP) = -d(BQ)$; esto es, sii P y Q están en la línea AB y son simétricos con respecto al punto medio del segmento AB. Demostrar que cuando L, M, N son puntos de Menelao colineales del triángulo ABC, entonces sus conjugados isotómicos L', M', N' también son colineales.
11. Las líneas AP y AQ son *conjugadas isogonales* con respecto al ángulo BAC sii AP y AQ son simétricos con respecto a la bisectriz de $\angle BAC$; esto, es, sii $d(\angle BAP) = -d(\angle CAQ)$. Consideremos que AL', BM', CN' son conjugadas isogonales de AL, BM, CN, con L y L', M y M', N y N' en las líneas BC, CA, AB. Demostrar que si L, M, N son colineales, entonces L', M', N' son colineales.
12. Generalice el concepto de un punto de Menelao al aplicarlo a un cuadrilátero. Luego demuestre que los puntos de Menelao L, M, N, O para los lados AB, BC, CD, DA del cuadrilátero ABCD son colineales solamente cuando

$$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DO}{OA} = +1.$$

¿Es cierto el inverso?

13. Considere que el incírculo (círculo inscrito) del triángulo ABC toca a los lados BC, CA, AB en los puntos X, Y, Z, y extienda YZ hasta cortar a BC en K. Demuestre que $BX/XC = -BK/KC$.
14. Sea P el punto medio de la mediana AA' en el triángulo ABC, y considere que CP corta AB en Q. Demuestre que $AQ/QB = 1/2$.
15. Los topógrafos tienen el problema de trazar una línea entre dos puntos que tienen una obstrucción (tal como un edificio o una montaña). Demuestre cómo se puede utilizar el teorema dos triángulos de Desargues para localizar el otro punto sobre la línea determinada por los dos puntos considerados.
16. *El problema ε-regla.* Demuestre cómo trazar la línea AB cuando los puntos A y B están más allá que la longitud de una regla disponible.
17. Demuestre cómo trazar una línea por un punto P y por un punto inaccesible de intersección de dos líneas m y n dadas.

5.1 **Definición** Una línea que pasa por el vértice de un triángulo se llama *ceviana* para tal vértice. Si no coincide con un lado de un triángulo, la ceviana se llama *ceviana propia*. Acordaremos que, cuando digamos AL es una ceviana, implicará que A es el vértice y L es el punto de intersección de la ceviana con el lado opuesto del triángulo.

5.2 **Teorema** *Teorema de Ceva.* Tres cevianas AL, BM, CN de un triángulo ABC concurren sii

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=+1.$$

Demostración

Supongamos que las cevianas propias AL, BM, CN se cortan en O, como en la Fig. 5.2. Entonces C, O, N y B, O, M son triadas colineales de puntos de Menelao para los triángulos ABL y ALC, respectivamente. Así que, por el teorema de Menelao

$$\frac{BC}{CL}\cdot\frac{LO}{OA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1 \qquad \text{y} \qquad \frac{LB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AO}{OL}=-1.$$

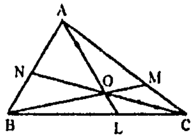


Figura 5.2

Ahora, multiplicando estas ecuaciones lado a lado, obtenemos

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

El inverso de este teorema se establece de la misma manera que el inverso del teorema de Menelao.□

5.3 **Teorema** *Forma trigonométrica del teorema de Ceva.* Tres cevianas del triángulo ABC concurren sii

$$\frac{\operatorname{sen}\angle BAL}{\operatorname{sen}\angle LAC}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle CBM}{\operatorname{sen}\angle MBA}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle ACN}{\operatorname{sen}\angle NCB}=1.$$

5.4 **Teorema** Consideremos que el incírculo (círculo inscrito) del triángulo ABC toca a los lados BC, CA, AB en los puntos X, Y, Z. Entonces las cevianas AX, BY, CZ concurren en un punto llamado *punto Gergonne* del triángulo.

Demostración

Ya que BX y BZ son tangentes desde un punto a un círculo (ver Fig. 5.4), entonces ZB = BX Análogamente XC = CY y YA = AZ. Entonces

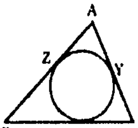


Figura 5.4

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\pm\frac{BX}{CY}\cdot\frac{CY}{AZ}\cdot\frac{AZ}{BX}=\pm 1.$$

El signo más vale ya que los puntos X, Y, Z dividen internamente al triángulo. El teorema se sigue del teorema de Ceva.□

5.5 **Teorema** Las tres alturas de un triángulo concurren.

Demostración

Refiriéndonos a la Fig. 5.5, consideremos que D, E, F son los piés de las alturas desde los vértices A, B, C del triángulo ABC. Del triángulo rectángulo BAD,

$$90^\circ \pm \angle BAD = \angle B,$$

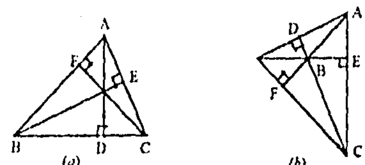


Figura 5.5

cuando $\angle B$ es agudo se utiliza el signo menos y cuando $\angle B$ es obtuso el signo más. De esta manera sen $\angle BAD = \pm\cos\angle B$. Ocurren relaciones semejantes en los otros cinco triángulos rectángulos que tienen como un lado a una altura del triángulo ABC, produciendo

$$\frac{\text{sen}\,\angle BAD}{\text{sen}\,\angle DAC}\cdot\frac{\text{sen}\,\angle CBE}{\text{sen}\,\angle EBA}\cdot\frac{\text{sen}\angle ACF}{\text{sen}\angle FCB} = \frac{\cos\angle B}{\cos\angle C}\cdot\frac{\cos\angle C}{\cos\angle A}\cdot\frac{\cos\angle A}{\cos\angle B} = \pm 1.$$

Pero es el signo más el que vale ya que en un triángulo solamente puede haber un ángulo mayor de 90° y por lo tanto ninguno o bien dos de esos piés cortan externamente a los lados del triángulo.□

5.6 **Teorema** Si AL, BM, CN son tres cevianas concurrentes del triángulo ABC, y si L', M', N' son conjugados Isotómicos (ver Ejercicio 4.10) de L, M, N con respecto a los lados BC, CA, AB, entonces AL', BM', CN' concurren. Los dos puntos de concurrencia se dice que son *puntos conjugados isotómicos* del triángulo ABC.

Demostración

Puesto que L y L' son equidistantes del punto medio del lado BC, entonces **BL = L'C** y **BL' = LC**. (Ver Fig. 5.6.) Se mantienen relaciones semejantes para M y M' y para N y N'.

De estas relaciones se sigue que

$$\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM'}{M'A}\cdot\frac{AN'}{N'B} = \frac{LC}{BL}\cdot\frac{MA}{CM}\cdot\frac{NB}{AN} = \frac{1}{+1} = 1$$

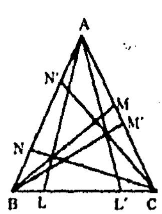


Figura 5.6

por el teorema de Ceva, ya que AL, BM y CM concurren. Por lo tanto AL', BM', CN' concurren por el teorema de Ceva.□

En la sección [illegible] se mostró [illegible] Menelao [illegible] general, luego en esta sección se demostró el teorema de Ceva como una consecuencia del teorema de Menelao. El proceso se puede invertir. En los ejercicios, se le pedirá que demuestre el teorema de Ceva sintéticamente. De esta manera, suponiendo que el teorema de Ceva vale, usted demostrará el teorema de Menelao. Su inverso no requiere ser demostrado de nuevo.

5.4 Teorema El teorema de Ceva implica el teorema de Menelao.

Demostración

Hagamos que L, M, N sean tres puntos de Menelao colineales para los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, como se muestra en la Fig. 5.8a. Consideremos que CN corta a BM en P y AL en Q, y supongamos que AL y BM se cortan en R. Apliquemos el teorema de Ceva para cada uno de

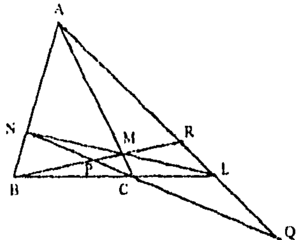


Figura 5.8a

los seis triángulos listados en la Fig. 5.8b. Al multiplicar estas seis ecuaciones lado a lado, obtenemos

$$\left(\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}\right)^2 = 1,$$

de lo cual se obtiene el resultado del teorema, ya que bien uno o tres de los puntos de Menelao colineales cortan externamente a los lados.□

Triángulo	Cevianas	Puntos de concurrencia	Ecuación resultante
ΔLAB	LN, AC, BR	M	$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BC}{CL}\cdot\frac{LR}{RA} = 1$
ΔMBC	ML, BA, CP	N	$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MP}{PB} = 1$
ΔNCA	NM, CB, AQ	L	$\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AB}{BN}\cdot\frac{NQ}{QC} = 1$
ΔLMA	LC, MR, AN	B	$\frac{MC}{CA}\cdot\frac{AR}{RL}\cdot\frac{LN}{NM} = 1$
ΔMNB	MN, NP, BL	C	$\frac{NA}{AB}\cdot\frac{BP}{PM}\cdot\frac{ML}{LN} = 1$
ΔNLC	NB, LQ, CM	A	$\frac{LB}{BC}\cdot\frac{CQ}{QN}\cdot\frac{NM}{ML} = 1$

Figura 5.8b

5.9 *Teorema* Si AL, BM, CN son tres cevianas concurrentes del triángulo ABC y si MN corta a BC en L', entonces (BC, LL') = −1; es decir,

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{BL'}{L'C}.$$

Demostración

Aplicando el teorema de Ceva al triángulo ABC de la Fig. 5.9 y las cevianas concurrentes AL, BM, CN, y aplicando el teorema de Menelao al triángulo ABC y los puntos de Menelao colineales L', M, N, obtenemos

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB} = 1 \qquad\qquad \frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB} = -1.$$

El teorema queda demostrado cuando dividimos estas ecuaciones lado a lado.□

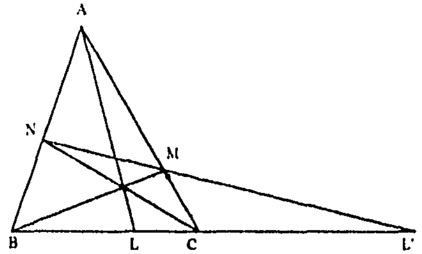


Figura 5.9

5.10 Ahora que hemos establecido, demostrado y examinado el teorema de Ceva, es apropiado recordarle los comentarios en 4.9, de que los teoremas de Ceva y Menelao son duales. En primer lugar, un triángulo es una figura que es su propio dual: Es la figura formada por tres puntos no colineales y las tres líneas que unen pares de los puntos; es también la figura formada por tres lineas no concurrentes y los tres puntos de intersección de pares de las líneas. Así, un *triángulo* también es un *trilátero.*

Al tratar el teorema de Menelao se discutió la *colinealidad* de tres puntos en las líneas (lados) de un triángulo, en el teorema de Ceva se consideró la *concurrencia* de tres líneas en (que pasa por) los *puntos* (vértices) de un triángulo. Así, cada uno es dual del otro. Es raro que aunque el teorema de Menelao era conocido desde 100 d.c., el teorema de Ceva escapó su detección hasta 1678, más de 1500 años después.

5. Ejercicios

1. Demuestre el inverso del teorema de Ceva.
2. En la prueba del teorema de Ceva dado en el texto se consideró que las cevianas eran propias. Demuestre el teorema sin está restricción.
3. Demuestre el teorema 5.3.
4. Demuestre sintéticamente el teorema de Ceva. [Sugerencia: Trace una línea por A paralela a BC que corte a BM en S y CN en T. Luego utilice triángulos semejantes.]
5. Demuestre el teorema 5.5 para el caso en el cual $\angle B = 90°$.
6. Muestre cómo construir el conjugado armónico de un punto C que está en la línea AB con respecto al segmento AB.
7. Sean AL, BM, CN cevianas del triángulo ABC. Sean L', M', N' los puntos de intersección de MN y BC, NL y CA, LM y AB. Demuestre que L', M', N' son colineales sii AL, BM, CN concurren.
8. Muestre que las medianas de un triángulo concurren. Su punto de concurrencia se llama *centroide o baricentro* del triángulo.
9. Muestre que el centroide es el único punto cuyas cevianas dividen a los lados del triángulo en razones iguales.
10. Muestre que el centroide es el único punto que divide a sus cevianas en razones iguales.
11. Muestre que las bisectrices internas de un triángulo concurren. Su punto de concurrencia se llama *incentro.*
12. Muestre que concurren una bisectriz interna y dos externas de un triángulo.
13. Muestre que si concurren tres cevianas, entonces concurren sus isogonales conjugadas. (vea Ejercicio 4.11).
14. Considere que un círculo interseca a los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC en los puntos L y L', M y M', N y N'. Muestre que AL, BM, CN concurren sii concurren AL', BM', CN'.

6.1 Para [illegible] un triángulo dado ABC, es conveniente introducir alguna terminología y simbología estándar. La existencia de algunos de estos objetos se establecerá después en este capítulo. Comenzando en la definición 6.2 y continuando en la sección 7, se presentarán varios teoremas referentes a estos elementos. El propósito de este desarrollo es familiarizar al lector con algunas de las propiedades básicas de triángulos y con los métodos de tratarlos. Tal vez el asunto de mayor interés en las Secciones 6 y 7 es el que describe la famosa circunferencia (frecuentemente se dirá círculo) de los nueve puntos. La información relacionada está contenida en la Definición 6.2 y los teoremas 7.13 y 7.14; y recopilada en el teorema 7.15.

6.2 Definición En el triángulo ABC, la medida de los ángulos A, B, C se denotarán por A, B, C. Los lados opuestos a estos vétices tendrán longitud a, b, c, respectivamente; y el semiperímetro $(a+b+c)/2$ se simbolizará con s. El término *lado* de un triángulo se referirá al segmento o bien a la línea completa en la que se encuentra el segmento. El contexto proporcionará el uso claro.

Los puntos medios de los lados a, b, c se simbolizan con A', B', C'. Las líneas AA', BB', CC' se llaman *medianas* y tienen longitudes m_a, m_b, m_c. El triángulo A'B'C' se llama el *triángulo medial.* Los piés de las alturas se denotan con D, E, F. Las alturas AD, BE, CF tienen longitudes h_a, h_b, h_c. El triángulo DEF se llama el *triángulo órtico.* Las bisectrices internas cortan a los lados opuestos en U, V, W; y las longitudes de las bisectrices AU, BV, CW son t_a, t_b, t_c.

El círculo dentro del triángulo ABC y tangente a sus lados es el *círculo inscrito* (*incírculo*) con centro I y radio r. Los tres círculos exteriores al triángulo ABC y tangentes a sus lados (Ver Fig. 6.2) se llaman *excírculos* y tienen centros I_a, I_b, I_c; y radios r_a, r_b, r_c. El incírculo toca los lados del triángulo ABC en X, Y, Z; y el excírculo I_j toca a los lados en X_j, Y_j, Z_j (para $j = a,b,c$). Estos cuatro círculos también se llaman *equicírculos.*

El círculo que pasa por los vértices A, B, C se llama *circuncírculo* y su centro y radio se simbolizan con O y R.

Utilizamos G para denotar el *centroide* (donde se cortan las medianas), H para el *ortocentro* (corte de las alturas) y N para el *centro del círculo de los nueve puntos* (centro del círculo que pasa por los puntos medios de los lados). El área del triángulo ABC se simboliza con K y con K_{ABC}.

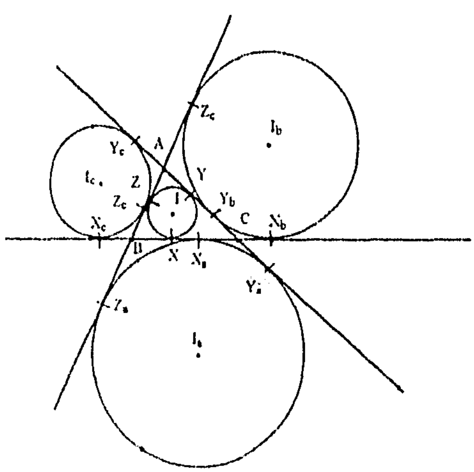


Figura 6.2

6.3 **Teorema** El triángulo medial de un triángulo dado (considerar el triángulo ABC) tiene lados paralelos y con la mitad de longitud de los lados del triángulo dado.

Demostración

Ya que $AC' = AB/2$ y $AB' = AC/2$ y $\angle C'AB' = \angle BAC$ (Ver figura 6.3), entonces ΔBAC ~(es semejante a) $\Delta C'AB'$ por *LAL* (lado ángulo lado). De esta manera $C'B' \cong BC/2 \cong BA'$. En forma análoga $A'B' \cong BC'$, así que $BA'B'C'$ es un paralelogramo. Y el teorema se concluye facilmente.□

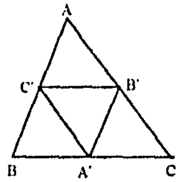


Figura 6.3

6.4 **Corolario** El triángulo medial parte al triángulo dado en cuatro triángulos congruentes.

6.5 **Corolario** El radio del círculo de los nueve puntos mide la mitad del circunradio del triángulo dado.

6.6 **Teorema** Las tres medianas concurren en un punto (*centroide*) que triseca a cada mediana.

Demostración

Sea G la intersección de las medianas BB' y CC', como se muestra en la Fig. 6.6; y sean P y Q puntos medios de los segmentos BG y CG. Por el teorema 6.3, cada uno de los segmentos B'C' y PQ son paralelos y mitad de BC, entonces PQB'C' es un paralelogramo, así que las diagonales PB' y QC' se bisecan mutuamente. Esto es, $PG = GB'$ y $QG = GC'$. Y como también $BP = PG$ y $CQ = QG$, se sigue que BB' y CC' se trisecan uno al otro. Por simetría, AA' también es trisecado por G.(Ver Ejercicio 5.8.)□

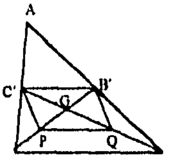


Figura 6.6

6.7 **Teorema** Las medianas de un triángulo, como vectores, forman un triángulo cuya área es tres cuartos el área del triángulo dado.

Demostración

Duplicar la longitud de la mediana AA' hasta P para formar $\Delta PCB \cong \Delta ABC$. (Ver Fig. 6.7.) Sea B'' el punto medio de PC. Ahora BB''CC' es un paralelogramo, tal que el vector CC' es igual al vector B''B. Como el segmento B'B'' es paralelo y tiene longitud igual a la mitad de AP, entonces el vector B'B'' es igual al vector AA'. Así que el triángulo BB'B'' está formado de vectores iguales a las medianas del triángulo ABC. El resto de la prueba se deja como ejercicio.□

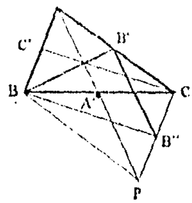


Figura 6.7

6.8 **Teorema** Un triángulo y su triángulo medial tienen el mismo centroide.

6.9 **Teorema** Si dos medianas de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

Demostración

Supongamos $m_b = m_c$. Utilice el teorema 6.6 para obtener $\Delta BGC' \cong \Delta CGB'$.□

6.10 **Teorema** Las bisectrices internas de un triángulo concurren en el incentro del triángulo.

Demostración

Denotemos con I la intersección de las bisectrices internas de los ángulos A y B en el triángulo ABC, como se ve en la Fig. 6.10. Tracemos perpendiculares IX, IY, IZ desde I a los lados BC, CA, AB. Ya que BI es la bisectriz del ángulo B, entonces los triángulos BIX y BIZ son congruentes (por *AAL*), así $IX \cong IZ$. Análogamente $IZ \cong IY$. Entonces I es equidistante de los tres lados, así I es

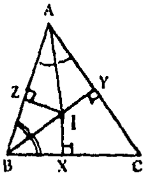


Figura 6.10

ciertamente el incentro del triángulo. Como $\Delta CIY \cong \Delta CIX$ por tener iguales la hipotenusa y un cateto, entonces CI biseca al ángulo C.□

6.11 **Teorema** Dos bisectrices externas y la bisectriz interna del tercer ángulo de un triángulo concurren en cada excentro del triángulo.

6.12 **Teorema** Las bisectrices interna y externa de un ángulo de un triángulo dado, cortan al circuncírculo otra vez en las extremidades del circundiámetro perpendicular al lado opuesto del triángulo.

Demostración

Si el triángulo ABC es isósceles con vértice A, entonces la bisectriz AU es el circundiámetro perpendicular a BC, y la bisectriz externa del ángulo A es tangente al cincuncírculo. Así, el teorema es cierto cuando el punto de tangencia se considera que es el segundo punto de intersección de la bisectriz externa y el circuncírculo.

Consideremos AB no congruente a AC. Hagamos que las bisectrices interna y externa del ángulo A corten al circuncírculo nuevamente en S y T. (Ver Fig. 6.12.) Puesto que AS biseca al ángulo BAC, también biseca al arco BC. Así el circundiámetro por S es la mediatriz del lado BC. Unicamente necesitamos demostrar que ST es un diámetro. Esto es cierto ya que $\angle SAT = 90°$.□

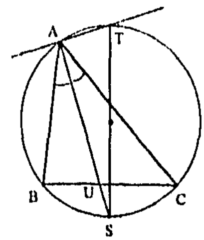


Figura 6.12

6.13 **Corolario** El incentro de un triángulo es el ortocentro del triángulo $I_a\ I_b\ I_c$ formado por los tres excentros del triángulo dado y los vértices del triángulo dado son los piés de las alturas del triángulo $I_a\ I_b\ I_c$.

6.14 **Corolario** Cada bisectriz interna de un triángulo biseca al arco del circuncírculo cortado por el lado opuesto del triángulo. De donde este bisector y la mediatriz de este lado opuesto se cortan en el circuncírculo del triángulo.

6.15 **Teorema** El área de un triángulo es igual al producto de su inradio y semiperímetro; esto es, K = rs.

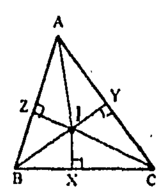


Figura 6.15

Demostración

En el triángulo ABC con Incentro I (ver Fig. 6.15), las áreas de los triángulos BCI, CAI y ABI están dadas por

$$\tfrac{1}{2}ar \qquad \tfrac{1}{2}br \qquad y \qquad \tfrac{1}{2}cr.$$

El teorema se concluye al hacer la suma de estas tres cantidades.□

6.16 **Teorema** El área de un triángulo es igual al producto de un exradio dado r_j y el semiperímetro restándole el lado j. Esto es,

$$K_{ABC} = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c).$$

6.17 **Teorema** *Fórmula de Herón.* El área de un triángulo ABC está dado por

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Demostración

En el triángulo ABC, sea $x = m(BD)$, como se muestra en la Fig. 6.17. Entonces

$$c^2 - x^2 = h_a^2 = b^2 - (a-x)^2,$$

y obtenemos

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

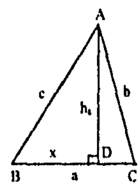


Figura 6.17

Ahora

$$\begin{aligned}
h_a^2 &= c^2 - x^2\\
&= (c-x)(c+x)\\
&= \left(c - \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\\
&= \frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\cdot\frac{(c+a)^2-b^2}{2a}\\
&= \frac{(b-a+c)(b+a-c)}{2a}\cdot\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{2a}\\
&= \frac{(2s-2a)(2s-2c)(2s)(2s-2b)}{4a^2}\\
&= \frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

De esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
K_{ABC} &= \frac{1}{2}ah_a\\
&= \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.\square
\end{aligned}$$

6.18 Para una prueba geométrica sintética de la fórmula de Herón, ver *An Introduction to the History of Mathematics* de H. Eves, tercera edición, páginas 171-172.

6.19 **Corolario** El área de un triángulo está dado por

$$K = \sqrt{r r_a r_b r_c}\ .$$

6.20 **Teorema** El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto del circundiámetro y la altura del tercer lado.

Demostración

El circundiámetro AO del triángulo ABC corta de nuevo al circuncírculo en P. (Ver Fig. 6.20.) Entonces $\angle ABC \cong \angle APC$, ya que cada ángulo tiene la mitad de la medida del arco AC.

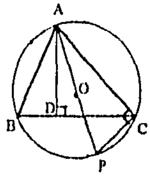


Figura 6.20

De este modo los triángulos ABD y APC son semejantes, y entonces

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC} \qquad \text{y} \qquad AB \cdot AC = AP \cdot AD.$$

Esto es, $cb = 2Rh_a$.□

6.21 **Corolario** El área del triángulo ABC está dado por

$$K = \frac{abc}{4R}$$

6.22 **Teorema** El punto medio de un lado de un triángulo es el punto medio del segmento sobre ese lado cuyas extremidades son los puntos de contacto del incírculo y del excírculo para ese lado.

Demostración

En la Fig. 6.22, como las dos tangentes al círculo, desde un punto fuera, son congruentes, tenemos

$$\begin{aligned} 2s &= c + a + b = c + BX_a + X_aC + b \\ &= c + BZ_a + CY_a + b = AZ_a + Ay_a\,. \end{aligned}$$

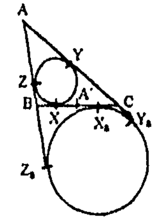


Figura 6.22

Pero $AZ_a = AY_a$, así que $s = AZ_a = Ay_a$.

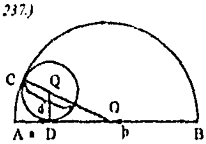
Y por lo tanto $CX_a = CY_a = AY_a - AC = s - b$.
También $BX = BZ = AB - AZ = c - AY$ y $BX = BC - XC = a - YC$, de donde

$2BX = a + c - AY - YC = a + c - b$, entonces $BX = \dfrac{a + c - b}{2} = s - b = CX_a$,

Y el teorema se concluye.□

6. Ejercicios

1. Revise los teoremas del Libro I de *Los Elementos* de Euclides.
2. Demuestre el corolario 6.4.
3. Demuestre el corolario 6.5.
4. Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan uno al otro.
5. Complete la demostración del teorema 6.7.
6. Demuestre el teorema 6.8
7. Complete la demostración del teorema 6.9.
8. Demuestre el teorema 6.11.
9. Demuestre que las bisectrices internas y externas de un ángulo dado son perpendiculares.
10. Demuestre el corolario 6.13.
11. Demuestre el corolario 6.14.
12. Demuestre el teorema 6.16.
13. Demuestre el corolario 6.19.
14. Demuestre el corolario 6.21.
15. Al diámetro de un semicírculo se divide en dos segmentos a y b por el punto de contacto de un círculo inscrito como se muestra en la figura siguiente. Compruebe que el diámetro d del círculo inscrito es la media armónica de a y b; es decir, $d = 2ab/(a + b)$. *(Pi Mu Epsilon Journal, primavera 1970, pag. 237.)*



Ejercicio 6.15

16. Dado que un ángulo central y el arco en un círculo se intersersecan, tienen la misma medida, demuestre los teoremas siguientes.
    a) La medida de un ángulo inscrito en un círculo o del ángulo entre una cuerda y una tangente es la mitad del arco que intersecan.
    b) La medida del ángulo entre dos tangentes, dos secantes, o una tangente y una secante a un círculo es la mitad de la diferencia de la medida de los arcos que intersecan.
    c) La medida del ángulo entre dos cuerdas que se cortan dentro de un círculo es la semisuma de los arcos que intersecan.
17. Demuestre que las dos tangentes desde un punto a un círculo son congruentes.
18. Demuestre que el producto de la secante completa y su segmento externo trazado desde un punto a un círculo es igual al cuadrado de la tangente desde ese punto.
19. Demuestre que si dos cuerdas en un círculo se intersecan, entonces el producto de los segmentos en el cual queda dividida una cuerda es igual al producto de los segmentos de la otra.
20. Demuestre que $1/r = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$.
21. Demuestre que $r_br_c + r_cr_a + r_ar_b = s^2$.
22. a) Demuestra que en cualquier triángulo $\text{sen}\angle A = a/2R$.
    b) Deduzca la ley de los senos: $a/\text{sen}\angle A = b/\text{sen}\angle B = c/\text{sen}\angle C$.
23. Demuestre que la bisectriz de un ángulo de un triángulo también biseca al ángulo entre la altura y el circundiámetro desde el mismo vértice.

7.1 **Teorema** Las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en el circuncentro del triángulo.

Demostración

Como el circuncentro O es equidistante de los tres vértices, es equidistante de los puntos extremos de cualquier lado del triángulo. De esta manera, se encuentra en la mediatriz de cada lado.□

7.2 **Teorema** En cualquier triángulo, $R=(r_a + r_b + r_c - r)/4$.

Demostración

En la Fig. 7.2, hagamos que IA' corte a I_aX_a en P, y consideremos que el circundiámetro por A' corte al circuncírculo y a las bisectrices interna y externa del ángulo A en S y T (por teorema 6.12). Ya que A' biseca a XX_a (por teorema 6.22) y las rectas IX y PX_a son ambas perpendiculares a XX_a, entonces $IXPX_a$ es un paralelogramo, así $IX = PX_a$, e $I_aP = r_a - r$.

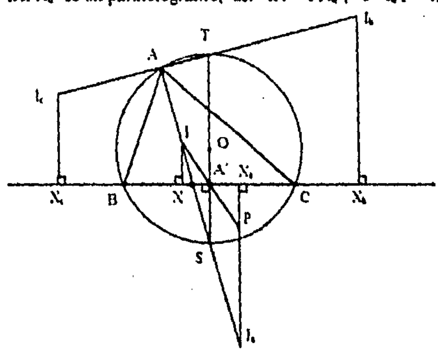


Figura 7.2

Ya que A'S es perpendicular a XX_a en A', se sigue que A'S une a los puntos medios de los lados IP e II_a del triángulo IPI_a. De donde $A'S = (I_aP)/2 = (r_a - r)/2$.

Por el corolario 6.13, $\angle I_cBI_b = \angle I_cCI_b = 90°$, tal que el círculo en I_cI_b como diámetro pasa por B y C. Se sigue que T es el punto medio de I_cI_b. Del trapezoide $I_cX_cX_bI_b$, tenemos

$$TA' = \tfrac{1}{2}(I_cX_c + I_bX_b) = \tfrac{1}{2}(r_c + r_b).$$

Así que
$$2R = TS = TA' + A'S = \tfrac{1}{2}(r_c + r_b) + \tfrac{1}{2}(r_a - r),$$

de lo cual se sigue el teorema.□

7.3 **Corolario** El círculo con diámetro en cualesquiera dos excentros, pasa por los dos vértices del triángulo, que no son colineales con los excentros. (Ver Fig. 7.2.)

7.4 **Corolario** El punto medio de un lado de un triángulo es el punto medio del segmento determinado por los puntos de tangencia, sobre ese lado, de los dos excírculos no referidos a ese lado. (Ver Fig. 7.2.)

7.5 **Corolario** El segmento que une dos excentros de un triángulo es bisecado por el circuncírculo del triángulo. Si el triángulo no es isósceles visto desde el vértice colineal con los equicentros, entonces tal punto medio no es un vértice. (Ver Fig. 7.2.)

7.6 **Teorema** Las alturas de un triángulo son bisectrices del triángulo órtico.

Demostración

El círculo con diámetro el lado BC del triángulo ABC pasa por los piés E y F de las alturas BE y CF, ya que $\angle BFC = \angle BEC = 90°$. (Ver Fig. 7.6.) Así BCEF es un *cuadrilátero cíclico* (puede ser inscrito en una circunferencia), así que $\angle FEC + \angle B = 180°$. De esta manera $\angle FEC = \angle DEA$, ya que BDEA también es cíclico, y puesto que BE es perpendicular a AC, entonces BE biseca al ángulo DEF. Análogamente las otras dos alturas bisecan a los otros ángulos del triángulo órtico.□

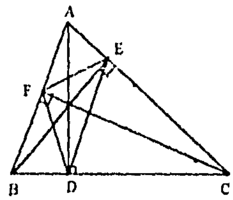


Figura 7.6

7.7 **Corolario** El círculo sobre el lado de un triángulo como diámetro pasa por los vértices opuestos del triángulo órtico.

7.8 **Corolario** Los lados del triángulo órtico forman con aquellos del triángulo dado tres triángulos semejantes al triángulo dado.

Demostración

En la figura 7.6, $\angle B = 180° - \angle FEC = \angle FEA$. De donde $\Delta ABC \sim \Delta AEF$ por *AA* (dos ángulos de un triángulo son congruentes a los correspondientes dos ángulos de un segundo triángulo). Análogamente $\Delta ABC \sim \Delta DBF \sim \Delta DEC$.□

7.9 **Teorema** La tangente al circuncírculo de un triángulo en un vértice del triángulo es paralelo al lado opuesto del triángulo órtico.

Demostración

Este teorema se sigue de la demostración del teorema 4.5 y del corolario 7.8.□

7.10 **Corolario** El ángulo que forma un extremo de un lado del triángulo órtico con el lado del triángulo dado en el que termina, es congruente al ángulo entre los otros dos lados del triángulo dado.

Demostración

El resultado se sigue del corolario 7.8.□

7.11 **Corolario** Las alturas de un triángulo concurren.

Demostración

Por el teorema 6.10 aplicado al triángulo órtico.□

7.6 Teorema Las alturas de un triángulo son bisectrices del triángulo órtico.

Demostración

El círculo con diámetro el lado BC del triángulo ABC pasa por los piés E y F de las alturas BE y CF, ya que $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$. (Ver Fig. 7.6.) Así BCEF es un *cuadrilátero cíclico* (puede ser inscrito en una circunferencia), así que $\angle FEC + \angle B = 180^\circ$. De esta manera $\angle FEC = \angle DEA$, ya que BDEA también es cíclico, y puesto que BE es perpendicular a AC, entonces BE biseca al ángulo DEF. Análogamente las otras dos alturas bisecan a los otros ángulos del triángulo órtico.□

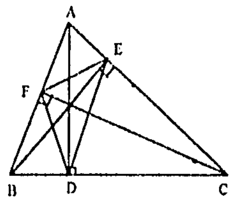


Figura 7.6

7.7 Corolario El círculo sobre el lado de un triángulo como diámetro pasa por los vértices opuestos del triángulo órtico.

7.8 Corolario Los lados del triángulo órtico forman con aquellos del triángulo dado tres triángulos semejantes al triángulo dado.

Demostración

En la figura 7.6, $\angle B = 180^\circ - \angle FEC = \angle FEA$. De donde $\Delta ABC \sim \Delta AEF$ por *AA* (dos ángulos de un triángulo son congruentes a los correspondientes dos ángulos de un segundo triángulo). Análogamente $\Delta ABC \sim \Delta DBF \sim \Delta DEC$.□

7.9 Teorema La tangente al circuncírculo de un triángulo en un vértice del triángulo es paralelo al lado opuesto del triángulo órtico.

Demostración

Este teorema se sigue de la demostración del teorema 4.5 y del corolario 7.8.□

7.10 Corolario El ángulo que forma un extremo de un lado del triángulo órtico con el lado del triángulo dado en el que termina, es congruente al ángulo entre los otros dos lados del triángulo dado.

Demostración

El resultado se sigue del corolario 7.8.□

7.11 Corolario Las alturas de un triángulo concurren.

Demostración

Por el teorema 6.10 aplicado al triángulo órtico.□

7.12 **Teorema** El producto de los segmentos en los cuales divide el ortocentro a cada altura, es constante para un triángulo dado.

Demostración

Cualesquiera dos alturas, digamos AD y BE (ver Fig. 7.6), son cuerdas del mismo círculo, por corolario 7.7. De aquí que los productos de los segmentos en el cual se dividen uno al otro son iguales, por ejercicio 6.19. Esto es, AH•HD = BH•HE. Por simetría, se sigue que este valor común también es igual a CH•HF.□

7.13 **Teorema** Los piés de las alturas de un triángulo se localizan en su círculo de los nueve puntos.

Demostración

Refiriéndonos a la Fig. 7.13, AC' ≅ C'D, ya que C' es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo ABD. Así, el triángulo C'DA es isósceles, y ya que C'B'A'B es un paralelogramo, se sigue que C'B'A'D es un trapecio isósceles, de esta manera el círculo que pasa por C', B' y A' también pasa por D. Análogamente E y F están en este círculo, el círculo de los nueve puntos.□

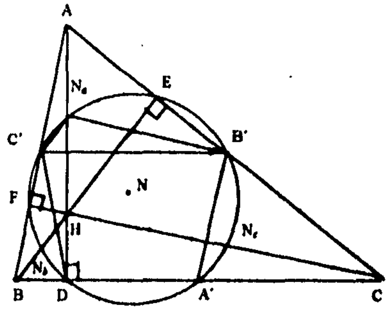


Figura 7.13

7.14 **Teorema** Los puntos medios N_a, N_b, N_c de los segmentos AH, BH, CH que unen los vértices con el ortocentro, se encuentran en el círculo de los nueve puntos del triángulo ABC.

Demostración

En la Fig. 7.13, C'N_a une a los puntos medios de los lados AB y AH del triángulo ABH, así que C'N_a es paralelo a BE y por lo tanto perpendicular a AC y a A'C'. Esto es, $\angle N_a C'A' = 90°$. Análogamente N_aB' es paralelo a CH, así que $\angle N_a B'A' = 90°$. De donde el círculo con N_a A' como diámetro, pasa por los puntos B' y C', que están en el círculo de los nueve puntos. Análogamente el círculo de los nueve puntos también pasa por N_b y N_c.□

7.15 Vemos que los nueve puntos en el círculo de los nueve puntos son: los puntos medios de los lados, los piés de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen al ortocentro con cada uno de los vértices del triángulo.

7.16 **Corolario** El centro del círculo de los nueve puntos está a la mitad del ortocentro y el circuncentro. De hecho, cualquier segmento que une al ortocentro con un punto del circuncírculo es biseccado por el círculo de los nueve puntos.

Demostración

Puesto que el centro del círculo de los nueve puntos N está en la mediatriz de DA' y de B'E, se concluye la primera parte de este corolario. (Ver Fig. 7.16.) □

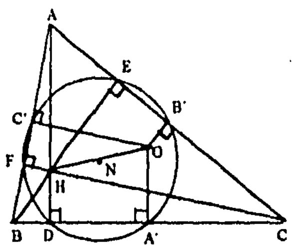


Figura 7.16

7.17 **Teorema** Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Entonces A, B, C son los ortocentros, respectivamente, de los triángulos HBC, AHC, ABH.

7.18 **Definición** Cuatro puntos, tal que cada uno es el ortocentro del triángulo formado por los otros tres, se dice que forman un *cuadrángulo ortocéntrico*.

7.19 **Teorema** Los cuatro triángulos de un cuadrángulo ortocéntrico tienen el mismo triángulo órtico, el mismo círculo de los nueve puntos e iguales circunradios. (Ver Figs. 7.6 y 5.5.)

7.20 **Teorema** Los circuncentros de los cuatro triángulos de un cuadrángulo ortocéntrico forman otro cuadrángulo ortocéntrico que tiene el mismo círculo de los nueve puntos. Además, los cuatro puntos de uno u otro cuadrángulo son los circuncentros de los triángulos del otro cuadrángulo.

Demostración

Simbolicemos con O, O_a , O_b , O_c a los circuncentros de los triángulos ABC, HBC, AHC, ABH

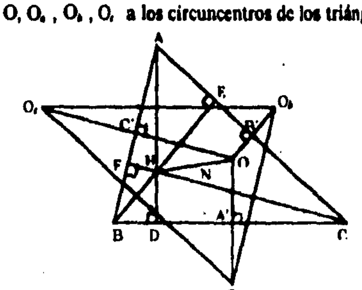


Figura 7.20

como se ve en la Fig. 7.20. Como O_b O_c es la mediatriz de AH, entonces es paralela a BC. Ya que OO_a es perpendicular a BC, O está sobre la altura del triángulo O_a O_b O_c en el vértice O_a . Se sigue que O es el ortocentro de este triángulo. De donde los cuatro circuncentros forman un cuadrángulo ortocéntrico.

Como N biseca a HO (por corolario 7.16), entonces N también biseca a AO_a, el segmento correspondiente al triángulo HBC. Se sigue que el cuadrángulo $OO_aO_bO_c$ es simétrico al cuadrángulo HABC en el punto N. Ahora, ya que O_bO_c es la mediatriz de AH, entonces BC es mediatriz de O_aO. Así A', B', C'son los puntos medios de los segmentos que unen a los vértices O_a, O_b, O_c al ortocentro O del triángulo $O_aO_bO_c$. Y el teorema se concluye.□

7.21 Aquí encontramos ocho triángulos que, todos tienen el mismo círculo de los nueve puntos. Para mostrar una mayor riqueza de tal figura, comentamos sin demostración que en el siglo diecinueve el mátematico alemán Karl Wilhelm Feuerbach demostró que el círculo de los nueve puntos es tangente a cada uno de los cuatro equicírculos del triángulo dado. Del teorema 7.19, los cuatro triángulos de un cuadrángulo ortocéntrico proporciona un total de 16 equicírculos, todos tangentes al círculo de los nueve puntos del cuadrángulo. (Intente trazar todos estos círculos.) Por el teorema 7.20, sus circuncentros proporcionan cuatro triángulos más, que tienen este mismo círculo de nueve puntos, y estos cuatro triángulos proporcionan otros 16 equicírculos tangentes al círculo de los nueve puntos. Por lo tanto de un triángulo obtenemos un total de 32 equicírculos, todos tangentes al círculo de los nueve puntos!

7.22 Concluímos esta sección con una "prueba" defectuosa de un "teorema" falso. Recuerde los teoremas que se han demostrado en esta sección y las anteriores para localizar la falacia en el argumento. Le podría ayudar si hace trazos de figuras muy aproximadas.

7.23 **"Teorema" Falso** Todos los triángulos son isósceles.

Demostración

Si AB ≅ AC, la afirmación es cierta. Supongamos que no es cierto que AB ≅ AC. Consideremos que la bisectriz del ángulo A y la mediatriz de BC se cortan en P. (Ver Fig. 7.23.) Tracemos BP y CP, y las perpendiculares PQ y PR a los lados CA y AB. Entonces ΔAPR ≅ ΔAPQ por *AAL*, así que AR ≅ AQ y PR ≅ PQ. Igualmente ΔBPA' ≅ ΔCPA' por *LAL*, así BP ≅ CP. Ahora ΔBPR ≅ ΔCPQ por hipotenusa y un cateto iguales, así que RB ≅ QC. Entonces

$$AB = AR + RB = AQ + QC = AC,$$

por lo tanto el triángulo ABC es isósceles.□(?)

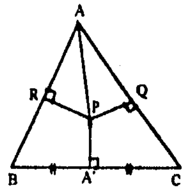
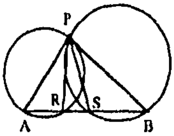


Figura 7.23

7. Ejercicios

1. Demuestre el corolario 7.3.
2. Demuestre el corolario 7.4.
3. Demuestre el corolario 7.5.
4. Demuestre que los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico convexo son suplementarios.
5. Demuestre el corolario 7.7.
6. Demuestre el corolario 7.11.
7. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de sus tres vértices.
8. Demuestre la segunda parte del corolario 7.16.
9. Demuestre el teorema 7.17.
10. Demuestre el teorema 7.19.
11. Encuentre la falacia en la "prueba" del "teorema" 7.23.
12. Trace los diámetros PA y PB en dos círculos que se intersequen en P, como se muestra en la figura siguiente. Considere que AB corta a los dos círculos en R y S como se muestra. Entonces $\angle PRA = 90^0$ y $\angle PSB = 90^0$, ya que cada ángulo está inscrito en un semicírculo. Así que PR y PS son *dos* perpendiculares desde un punto P a una línea AB. Encuentre la falacia en este argumento.



Ejercicio 7.12

13. Demuestre que On_a y AA' en el triángulo ABC se bisecan uno al otro Vea Fig. 7.13.
14. Demuestre que $(AH)^2 + (BC)^2 = 4(AO)^2$ en el triángulo ABC, de la Fig. 7.16.
15. Demuestre que, en el triángulo ABC, que HA'y AO concurren en el circuncírculo.
16. Demuestre que los cuatro centroides de los triángulos de un cuadrángulo ortocéntrico forman un cuadrángulo ortocéntrico semejante.
17. Demuestre que los cuatro vértices de un cuadrángulo ortocéntrico son los centroides de otro cuadrángulo ortocéntrico semejante.
18. Demuestre que los equicentros de un triángulo forman un cuadrángulo ortocéntrico cuyo círculo de los nueve puntos es el circuncírculo del triángulo dado.
19. Demuestre que el radio del circuncírculo en los vértices de un triángulo son perpendiculares a los lados opuestos del triángulo órtico.
20. Demuestre algebraicamente el teorema 7.2 utilizando los teoremas del 6.15 al 6.21.

8.1 Uno de los juegos más antigüos en el mundo es el juego de las construcciones euclidianas. Se ha gastado bastante energía buscando qué cantidades se pueden construir utilizando únicamente compás y regla (regla sin escala).

8.2 También mucho esfuerzo se ha dedicado para demostrar que ciertas cantidades no se pueden construir, que es *imposible* construirlas. No se ha encontrado una construcción, en un número finito de pasos, utilizando solamente herramientas euclidianas, que lleve a trisecar cualquier ángulo (*trisección de un ángulo*), trazar un cuadrado que tenga exactamente la misma área que la de un círculo dado (*cuadrar un círculo*), o construir la arista de un cubo que tenga exactamente el doble del volumen de un cubo cuya arista es dada (*duplicar un cubo*). A estos problemas se les ha llamado "los tres problemas clásicos de construcción".

Geómetras aficionados que no están familiarizados con el contenido de las pruebas de imposibilidad, aún inventan construcciones que parecen resolver estos problemas antigüos. Un examen completo de cada construcción revela los errores. Cualquier construcción es solamente una aproximación (y algunas son excelentes aproximaciones) o al contrario, se ha usado impropiamente la herramienta euclidiana o se han utilizado otras herramientas.

8.3 Se puede demostrar que, dado cualquier conjunto de números (longitudes de segmentos), podemos construir la suma, la diferencia, el producto y el cociente de cualesquiera dos números del conjunto, de aquí que, cualquier combinación de estos números. Igualmente podemos construir raíces cuadradas de números (Ver 8.11). Y éstas son las únicas magnitudes construibles. Por lo tanto raíces cúbicas, raíces quintas o números trascendentes no se pueden construir en general. Cada uno de los problemas clásicos de construcción incluye la búsqueda de un número inconstruible. Los ejercicios posteriores persiguen este fin.

8.4 **Notación** Simbolizaremos a la circunferencia con centro A y radio $r = BC$ con A(r) o A(BC). La circunferencia con centro A y que pasa por el punto P se denotará con A(P).

8.5 Suponemos que el lector está familiarizado con las construcciones básicas de la suma y diferencia de longitudes dadas, de ángulos congruentes a ángulos dados, y de líneas perpendiculares y paralelas a líneas dadas.

8.6 Los tres primeros postulados de *Los Elementos* de Euclides describen el uso de la regla y el compás. Ellos establecen:

1. Se puede trazar un segmento que pase por dos puntos dados.
2. Un segmento de línea se puede extender indefinidamente.
3. Se puede trazar una circunferencia teniendo cualquier punto dado como centro y que pase por cualquier otro punto dado.

Los primeros dos postulados indican cómo se utiliza la regla y el tercero describe el uso del compás. (Una lista completa de los postulados de Euclides aparecen en el Apéndice A.)

8.7 De acuerdo al tercer postulado, el compás de Euclides no se puede utilizar para transferir distancias. Su compás se puede colocar en dos puntos y trazar un arco, pero al levantarlo del papel en un punto podría causar que el compás perdiera su abertura y pierda su medida. El compás moderno se puede utilizar para transferir distancias. Esto es, una forma de trazar la circunferencia A(BC) con un compás moderno al colocarlo en los puntos B y C, luego alzando el compás y moviéndolo al punto A.

Surge la pregunta si el compás moderno puediera desplazar al compás Euclidiano. Ciertamente no lo hace menos. Para demostrar que los dos compases son equivalentes, presentamos el teorema siguiente.

8.8 **Teorema** Los compases moderno y Euclidiano son equivalentes.

Construcción

Construiremos la circunferencia A(BC) utilizando un compás Euclidiano. Obsérvese que la construcción no requiere la ayuda de una regla.
Dados los puntos A, B, C, como en la Fig. 8.8, tracemos las circunferencias A(B) y B(A) que se intersequen en P y Q. Ahora tracemos las circunferencias P(C) y Q(C) que se corten en D. La circunferencia A(D) es la deseada A(BC).•

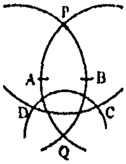


Figura 8.8

Demostración

La construcción se demuestra al observar que P y Q están en la mediatriz de AB y CD. Así A y D son las reflexiones de B y C con la línea PQ como eje de simetría, se tiene que AD ≅ BC.□

8.9 Como se muestra en el teorema 8.8, una construcción consiste de dos partes; primero, la explicación de los pasos que uno da para encontrar al objeto deseado; y segundo, una demostración de que el objeto construído es precisamente el que se deseaba. En lo que resta de esta sección las demostraciones se dejan para que las proporcione el lector.

8.10 **Problema** Construir la media proporcional entre dos segmentos.

Construcción

Damos dos segmentos de longitudes a y b; y queremos encontrar su ***media proporcional***; esto es, necesitamos encontrar una longitud x tal que $a/x = x/b$; es decir, $x = \sqrt{ab}$. Sobre una línea (Ver Fig. 8.10) marcamos AP = a y PB = b. Tracemos una semicircunferencia sobre AB como diámetro y hagamos que la perpendicular a AB en P corte a la semicircunferencia en el punto X. Ahora PX = x.•

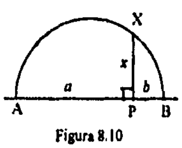


Figura 8.10

8.11 Para construir $\sqrt{a}$, utilítice la construcción del problema 8.10, tomando $b = 1$. Es necesario tener un segmento unitario disponible cuando se tomen raíces cuadradas de longitudes. Igualmente se requiere un segmento unitario para la multiplicación y para la división, como se muestra en el problema 8.12.

8.12 **Problema** Encontrar el producto de dos segmentos.

Construcción

Dados los segmentos de longitudes a, b, y 1, utilizaremos proporciones en triángulos semejantes para construir una longitud $x = ab$. Sobre una línea, marquemos PU = 1 y UB = b. Sobre cualquier otro rayo por P, marquemos PA = a (ver Fig. 8.12). Tracemos la paralela a AU que pase por B y corte PA en X. Entonces AX tiene longitud $x = ab$.•

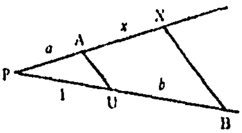


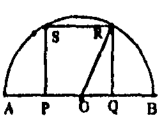
Figura 8.12

8.13 **Problema** Inscribir un cuadrado dentro de una semicircunferencia dada.

Construcción

Del problema resuelto como se muestra en la Fig. 8.13a, consideremos que el lado del cuadrado PQRS tiene longitud s y la semicircunferencia AOB tiene radio r. Por simetría, OQ = $s/2$. Como OR = r y QR = s, entonces $(s/2)^2 + s^2 = r^2$, de donde $s = 2r/\sqrt{5}$. Por lo tanto debemos construir $2r/\sqrt{5}$.

Dada la semicircunferencia AOB, trazar el triángulo rectángulo EFG que tenga el cateto EG igual al doble de la longitud del cateto FG. (Ver Fig. 8.13b.) Sobre la hipotenusa EF, marcar EH = r. Entonces EJ = s, donde J es el pié de la perpendicular trazada desde H a EG. Ahora marquemos la longitud $s/2 = m$(HJ) sobre cualquier lado del punto O sobre la línea AB para obtener los puntos P y Q. El cuadrado se puede completar facilmente. •



Firgura 8.13a

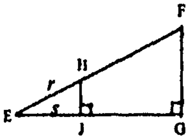


Figura 8.13b

8.14 **Problema** Sobre un segmento dado como hipotenusa, construir un triángulo rectángulo igual (en área) a un triángulo dado.

Construcción

Consideremos que el segmento es PQ y el triángulo ABC, como en la Fig. 8.14a. Tracemos la

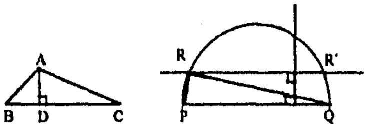


Figura 8.14a

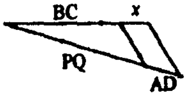


Figura 8.14b

altura AD. En seguida construir x = AD BC/PQ, como se muestra en la Fig. 8.14b. Trazar una paralela a PQ a una distancia x y que corte en R y R'a la semicircunferencia con diámetro PQ. Entonces PQR es el triángulo deseado.•

8.15 **Problema** Construir un triángulo ABC dados t_a, h_b, c.

Construcción

En un punto E sobre la línea base m, levantar una perpendicular con medida h_b hasta B, como se ve en la Fig. 8.15. Trazar la circunferencia B(c) que corte a m en A. Bisecar ambos ángulos en A y sobre estas bisectrices marcar los segmentos AU_1 y AU_2, de longitud t_a. Trazar BU_1 y BU_2, tal que corten a m en C_1 y C_2. Entonces cada uno de los triángulos ABC_1 y ABC_2 es una solución.•

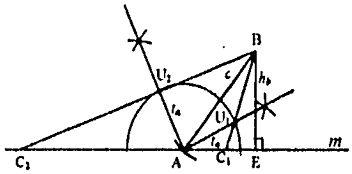


Figura 8.15

8.16 **Definición** Un *compás rústico* es un compas cuya abertura es fija y no se puede alterar.

8.17 Ocurren muchos problemas interesantes cuando el uso de la herramienta euclidiana permitida es alterada un poco. Considere el problema de elaborar varias construcciones con un compás cuya abertura no se puede cambiar (tal vez por que está oxidado). Estos problemas llamados de *compás rústico* pueden ser un gran reto. Se ha demostrado que toda construcción posible con regla y compás se puede hacer con regla y compás rústico (siempre que los objetos deseados sean puntos y líneas). Para una discusión completa, ver *Survey of Geometry* de Eves (Vol. 1, Sección 4.5).

8.18 **Problema** Construir una perpendicular en un punto sobre una línea utilizando un compás rústico.

Construcción

Dado un punto P en la línea m y colocando el compás fijo con abertura r, trazar la circunferencia P(r) tal que corte a m en A y B. Trazar las circunferencias A(r) y B(r) que corten a la semicircunfe-

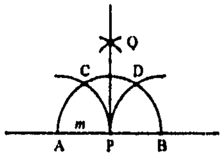


Figura 8.18

rencia P(r) en C y D, como se muestra en la Fig. 8.18. Ahora consideremos que las circunferencias C(r) y D(r) se cortan en Q (también se cortan en P). Entonces PQ es la perpendicular buscada.•

8.19 **Problema** Utilizando un compás rústico, construir un segmento de longitud dada AB en un punto P sobre una línea m.

Construcción

Trazar AP. Construir una línea n que pase por P y paralela a AB, como sigue (ver Fig. 8.19).

Levantar una perpendicular p a la línea AB tal que la distancia de p a P sea menor que la abertura del compás. En seguida trazar n perpendicular a la línea p y que pase por P. Análogamente, trazar una paralela a AP que pase por B y que corte a la línea n en C. Ahora PC ≅ AB. Trazar r bisectriz del ángulo entre las líneas m y n, y trazar desde C la perpendicular a r que corte a m en el punto Q. Entonces PQ ≅ AB.•

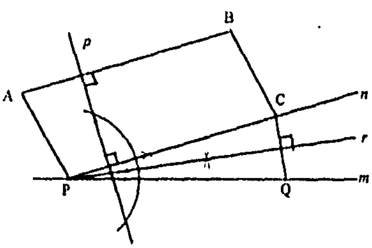


Figura 8.19

8. Ejercicios

1. Complete cada problema al demostrar que la construcción dada es correcta.
   a) Problema 8.10 b) Problema 8.12 c) Problema 8.13 d) Problema 8.14
   e) Problema 8.15 f) Problema 8.18 g) Problema 8.19.
2. Construya el cociente de dos segmentos.
3. Muestre como bisecar un ángulo mayor de 120^0 utilizando un compás rústico.
4. En un punto dado sobre una línea dada construir un ángulo congruente a un ángulo dado utilizando regla y compás rústico.
5. Mostrar como encontrar raíces cuadradas con una regla y un compás rústico.
6. Construya un triángulo semejante a un triángulo dado y de cuatro novenos de área del triángulo dado.
7. Construya un trapecio semejante a un trapecio dado y dos tercios de grande, en área.
8. Sobre un segmento dado como base, construir un rectángulo igual a un paralelogramo dado.
9. Construir un triángulo isósceles sobre un segmento de línea dado como base e igual, en área, a un triángulo dado.
10. Construir un triángulo isósceles igual a un paralelogramo, dada la longitud de sus lados iguales. ¿Es posible siempre la construcción?
11. Construya el triángulo ABC, dado
    a) B, t_b, h_b b) h_a, m_a, B c) b, h_b, c d) A, C, t_c e) b, m_a, C f) C, A, h_c
12. "Dada una circunferencia, tomar un cuarto del perímetro de la circunferencia como lado de un cuadrado. Como el cuadrado y la circunferencia tienen ahora iguales perímetros, tienen iguales áreas. Esto cuadra al círculo." ¿Qué es lo equivocado en este argumento?
13. Dado el ángulo AOB, extender BO y trazar cualquier círculo con centro O que corte a los lados del ángulo en A y B.(Vea Fig. siguiente.) En una regla marcar un segmento CD igual a OA. Deslizar la regla por el punto A con el punto D moviéndose en la línea BO hasta que el punto C esté en el círculo. Trazar esta línea. Mostrar que el ángulo ADB triseca al ángulo AOB.

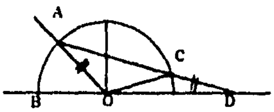


Figura 8.13

¿Resuelve esta construcción el antiguo problema de trisección?

14. En seguida aparece la "trisección de un ángulo", algo simplificada de su forma original en asuntos de *Mecánica Ilustrada* de febrero de 1966. Encuentre la falacia en el argumento. Trazar un círculo con centro O que corte a los lados de un ángulo dado en los puntos A y B. Extienda AO y BO hasta cortar otra vez al círculo en C y D como en la figura. Considere que la bisectriz del ángulo AOB corta a la cuerda CD en G y al círculo en R, como se muestra. Marque H en OR tal que HR = RG. Haga que el círculo G(H) corte a BC y AD en C' y D'. Entonces $\angle C'OD' = \angle(AOB)/3$.

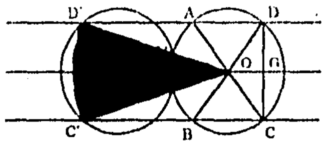


Figura 8.20b

Demostración

El círculo con radio igual a OA y que pasa por C' y D' como se muestra, corta al primer círculo en los puntos M y N donde OD' y OC' cortan a ese círculo. Entonces $\angle RON = \angle NC'C = \angle NCC' = (\angle NOB)/2$, demostrando que $\angle RON$ triseca a $\angle ROB$, y el teorema se sigue inmediatamente.□ (?)

15. En la "trisección" del ejercicio anterior, tome $\angle AOB = 120^\circ$ y encuentre $\angle C'OD'$ utilizando trigonometría.
16. Demuestre las proposiciones listadas abajo, de las cuales se sigue que $\sqrt[3]{2}$ no se puede construir, así que la duplicación del cubo es imposible. Puesto que π es trascendente, entonces $\sqrt{\pi}$ también es trascendente, de donde el círculo no se puede cuadrar. Finalmente, ya que sen20° es una raíz de la ecuación $8x^3 - 6x - 1 = 0$, la cual no tiene raíces racionales, entonces sen20° no se puede construir, así que un ángulo de 60° no se puede trisecar.
    a) Muestre cómo construir las suma, diferencia, producto y cociente de dos longitudes dadas, y la raíz cuadrada de una longitud dada, con la presencia de un segmento unitario.
    b) Dado el segmento unitario OU, donde O(0,0) y U(1,0) son puntos en el plano Cartesiano, mostrar cómo construir un punto que tenga coordenadas racionales.
    c) Muestre que la ecuación de una línea por dos puntos con coordenadas racionales tiene coeficientes racionales.
    d) Muestre que el punto de intersección de dos líneas cuyas ecuaciones tienen coeficientes racionales tiene coordenadas racionales.
    e) Muestre que dada una regla y puntos con coordenadas racionales, entonces uno puede construir solamente puntos con coordenadas racionales.
    f) Muestre que la ecuación del círculo A(B), donde A y B son puntos con coordenadas racionales, tiene coeficientes racionales.
    g) Muestre que los puntos de intersección de dos círculos o de un círculo y una línea, cuyas ecuaciones tienen coeficientes racionales, tiene coordenadas que son racionales o que incluyen sólo raíces cuadradas de números racionales.
    h) Muestre que con una regla y un compás se pueden construir solamente puntos cuyas coordenadas se pueden obtener por un número finito de aplicaciones de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y raíces cuadradas aplicadas a las coordenadas de puntos dados.
    i) Muestre que los comentarios al principio de este ejercicio, tienen validez ahora.

SECCION 9 | LOS ASOMBROSOS GRIEGOS

9.1 El inicio de la nueva era en matemáticas se establece por el año 600 a.c. La gente empieza a preguntar "¿Por qué?" y exigir respuestas lógicas. Mucho tiempo ocioso y una sociedad que pone énfasis creciente en el razonamiento lógico, hace que el pensamiento acerca de las matemáticas cambie de práctica a más teórica. El resultado fue lo que se dió en llamar "material axiomático" que dominó al razonamiento matemático por más de 2000 años. En el material axiomático se considera un cuerpo de matemática aplicada tal como la geometría del mundo real. Ciertos hechos obvios acerca de este estudio se aceptan como ciertos, sin prueba, como los axiomas o postulados. Luego todos los otros hechos son deducidos lógicamente de los postulados.

9.2 El método del material axiomático alcanza completa madurez aproximadamente en 300 años, floreciendo brillantemente en *Los Elementos* de Euclides alrededor del año 300 a.c.

9.3 El primer hombre que demostró teoremas simples fue el comerciante Tales (640-546 a.c.) de la isla de Mileto. En sus viajes por el Mar Mediterráneo, aprendió matemáticas de Egipto y de otros países orientales. Luego *demostró* algunos teoremas simples tales como que un diámetro de una circunferencia biseca a la circunferencia y que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

9.4 Se dice que Tales asombró al Rey Amasis, mientras residía en Egipto, al calcular la altura de una pirámide midiendo su sombra y la sombra de una vara vertical de altura conocida, utilizando proporciones. Muy probablemente Tales calculó la altura de la pirámide utilizando sombras y proporciones, pero es absurdo imaginar que haya utilizado el método descrito, porque uno no puede medir directamente la longitud de la sombra de la pirámide.

Adquirió gran fama por predecir un eclipse solar en 585 a.c.. Se dice que, una noche mientras estudiaba las estrellas durante un paseo, cayó en una zanja. Una anciana quien le ayudó a levantarse le reclamó: "¿Cómo puede usted ver cosas en el cielo cuando no puede advertir qué hay a sus piés?"

9.5 Arropado en mucho misticismo y envuelto en muchas leyendas, Pitágoras (572?-500? a.c.), de la isla Egea de Samos, y sus seguidores, contribuyeron enormemente a las matemáticas. La Sociedad Pitagórica que él fundó, con un secreto de fraternidad valorado altamente por compañeros y matemáticos, acreditaba todos los descubrimientos a Pitágoras; lo que no facilita decir qué es lo que desarrolló él y qué sus seguidores.

9.6 Se cree, no obstante, que Pitágoras demostró el teorema que toma su nombre. Se dice que estaba tan eufórico con ese descubrimiento, que sacrificó cien bueyes. Indudablemente esta historia no es cierta ya que los pitagóricos creían en la transmigración del alma. De hecho, un día a Pitágoras le informaron que un hombre estaba golpeando a un perro; le gritó al hombre que se detuviera, pués, en los aullidos del perro podía reconocer la voz de un amigo fallecido.

9.7 No se puede omitir la gran Academia de Platón (429-348 a.c.), sobre cuya puerta estaba el lema, "No entre aquí quien no esté versado en geometría." Cuando le preguntaron que lugar ocupaba la Deidad, Platón respondió inmediatamente, "Dios geometriza continuamente." Eudoxio (408-355 a.c.), el más brillante de los primeros matemáticos, inventó una teoría de proporciones que tomaba en cuenta números irracionales. Dos mil años después Richard Dedekind (1831-1916) mostró qué tan acertado había estado Eudoxio en su teoría. Aristóteles (384-322 a.c.), aunque primeramente se le conoce por su sistematización de la lógica deductiva, mejora continuamente algunas definiciones y discusiones geométricas.

9.8 El tratado científico más famoso de toda la antigüedad, que ha sido publicado en más ediciones que cualquier otro libro, excepto la Biblia, es *Los Elementos* por Euclides (365?-300? a.c.), escrito alrededor del año 325 a.c. Es difícil encontrar mucha información acerca de matemáticos anteriores a Euclides. Los trece libros de *Los Elementos* abarca no sólo geometría básica sino también teoría de números y álgebra elemental. Es difícil comprobar qué tanto del material se debe al propio Euclides, pero se cree que contribuyó con muchas pruebas nuevas.

9.9 Se sabe poco de la vida de Euclides, pero hay relatos de ser el primer profesor de matemáticas en la gran Universidad de Alejandría. Cuando Tolomeo le preguntó si había una manera fácil de aprender geometría, Euclides respondió, "No hay camino real en la geometría." Tal vez la geometría tratada por medios algebráicos —utilizando geometría analítica, isometrías y similitudes— es actualmente el "camino real" que no existió en los días de Euclides.

9.10 El más grande matemático de toda la antigüedad fue Arquímedes (272-212 a.c.) de Siracusa. Sus logros en geometría y mecánica hicieron época. Situó a π entre $\frac{10}{71}$ y $3\frac{1}{7}$ al inscribir y circunscribir polígonos de 96 lados dentro y fuera de un círculo. Sus maravillas fueron máquinas de palos, para la guerra que sostenían, para lanzar de Siracusa a los romanos. Cuando finalmente la ciudad fue conquistada, durante un festival cuando sus guardias estaban dormidos, un soldado romano cayó sobre el viejo Arquímedes que estaba trabajando con una figura geométrica en una palangana de arena; su recomendación de no molestar el trabajo, enfureció al soldado quien atravezó con su espada a Arquímedes.

9.11 Muy pocos matemáticos siguieron, cada uno contribuyendo con su parte, pero ninguno recuperó la gran gloria que alcanzó la cúspide con Arquímedes. Eratóstenes (ca. 230 a.c), Apolonio (262?,-190? a.c), Hiparco (ca. 140 a.c.), Herón (ca. 110 a.c.), Menelao (ca. 100 a.c.), Claudio Tolomeo (85?-165?), Papus (*ca.* 340), Theón de Alejandría (ca. 390) y su hija Hipatia (375-415), la primer mujer matemática que se recuerda, pero muy poco.

9.12 Mujer de belleza sobresaliente y exelente maestra, Hipatia fue devota propagandista pagana en los inicios de la era cristiana. Tanto que un día en marzo de 415, una banda de cristianos la arrastró de su carro, la apedreó y la mató con ostras de almejas, la desmembró para luego quemar su cuerpo y asegurar que el trabajo estuviera bien hecho para el afecto propio cristiano.

9.13 La famosa Universidad de Alejandría, fundada por Tolomeo alrededor del año 300 a.c. y centro de todo el conocimiento de más de 900 años, se empieza a apagar cuando la sociedad romana comenzó a romperla, su gloria se convirtió en una sombra de lo que fue. Finalmente, en 641, los árabes conquistaron Alejandría, quemando lo que no había sido destruído por los cristianos. Grecia murió y el oscurantismo cubrió Europa.

9. Ejercicios

1. Explique por qué Tales no pudo haber calculado la altura de una pirámide como se indica en 9.4, y muestre cómo podría haber calculado su altura por simple proporción, utilizando dos sombras de observaciones en diferentes horas del día.
2. Encuentre varias demostraciones del teorema de pitagórico..
3. a) Muestre que cuando x es el lado de un polígono regular inscrito en un círculo de radio r, entonces
   $$y = (2r^2 - r(4r^2 - x^2)^{1/2})^{1/2}$$
   es la longitud del lado de un polígono regular que tiene el doble del número de lados e inscrito en el mismo círculo.

   b) Muestre que el perímetro de un polígono regular de 96 lados inscrito en un círculo de diámetro 1 nos lleva a la fórmula
   $\pi > 48(2 - (2 + (2 + (2 + \sqrt{3})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}$.
4. Encuentre fórmulas análogas a las del ejercicio 9.3 para polígonos circunscritos.

10.1 Si un primer triángulo ABC es congruente con un segundo triángulo A'B'C', entonces es posible mover al primer triángulo y quizá voltearlo para que coincida con el segundo triángulo. A tal movimiento se le llama una isometría. Esto es, una *isometría* es un movimiento rígido (mapeo o transformación) de los puntos del plano. La propiedad de la definición de una isometría es que preserva distancias. Si la isometría α mapea P y Q en P' y Q', entonces $PQ \cong P'Q'$. Se sigue que a cada punto se le mapea justamente en un punto (su *imagen*) y cada punto P'es la imagen de exáctamente un punto P (la *preimagen* de P'). Escribiremos $\alpha(P) = P'$ para representar que α mapea P en P'.

10.2 Si la isometría α mapea al triángulo ABC en el triángulo congruente A'B'C' y si las longitudes de los segmentos AA', BB', CC' son iguales y estos segmentos son paralelos uno al otro y similarmente dirigidos, entonces α se llama una *traslación* mediante el vector * $\overrightarrow{AA'}$.(Ver Fig. 10.2a.) Nuestro punto de vista es que

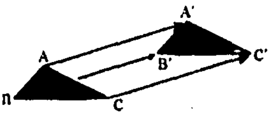


Figura 10.2a

una traslación mueve a *todos* los puntos del plano. Esto es, una traslación mediante el vector $\overrightarrow{AA'}$ mapea cada punto P del plano a un punto P' también del plano tal que $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{PP'}$ son paralelos, iguales en longitud y tienen la misma dirección; esto es, son vectores iguales (Ver Fig. 10.2b). Así, si las líneas AA' y PP' no

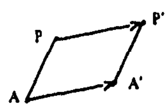


Figura 10.2b

coinciden, entonces AA'P'P es un paralelogramo. En el instante en que estas líneas coincidan, aún llamaremos paralelogramo a la figura, pero degenerado. Observe que el triángulo ABC se traslada al triángulo A'B'C' sii AB, CA, BC están similarmente orientados y paralelos a, o se inciman en la misma línea que A'B', C'A', B'C', respectivamente.

10.3 Consideremos O un punto fijo en el plano y θ un ángulo fijo dirigido. Una *rotación alrededor del punto* O (llamado *centro* de la rotación) *mediante un ángulo* θ es una isometría que mapea a cada punto P en un punto P' tal que $OP \cong OP'$ y $\angle POP' = \theta$, medido contrario a las manecillas del reloj. La Fig. 10.3 muestra una rotación aplicada a un triángulo ABC. El punto O es su propia imagen. Cualquier punto que sea su propia

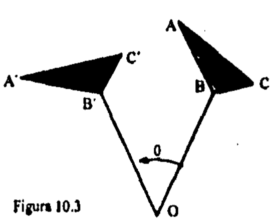


Figura 10.3

imagen bajo una isometría dada se llama *punto fijo* (o *punto invariante*) para tal isometría. Así, el centro de una rotación es un punto fijo, y ningún otro punto es fijo por una rotación mediante un ángulo que no sea

---

* Tomamos un vector como una distancia dirigida, pero no un segmento dirigido específico. Así los vectores $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ de la Fig. 10.2a se consideran iguales.

múltiplo de 360°. Una traslación mediante un vector no cero, no tiene puntos fijos. Observe que, aunque una rotación preserva distancias, no es cierto que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ son cada uno igual a los vectores $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$ cuando el triángulo ABC se rota en el triángulo A'B'C' mediante un ángulo que no es múltiplo de 360°. Esto es, cada lado del triángulo, como vector, no es igual al lado correspondiente de su imagen.

10.4 La tercer isometría que consideraremos en esta sección es quizá la isometría más básica y más importante de todas. Una *reflexión en una línea m* mapea cada punto P del plano en su "imágen simétrica" P'con la línea *m* como *eje de simetría*. La Fig. 10.4 muestra esta reflexión, con un triángulo ABC y su imagen bajo la reflexión. Así P'es la reflexión de P en la línea *m* sii *m* es la mediatriz de PP' o P y P' coinciden sobre la línea *m*. Por lo tanto todos los puntos de *m* son puntos fijos. Si uno lee los vértices del triángulo ABC (Fig. 10.4) en orden cíclico, esto es, "A-B-C-A," uno está viajando alrededor del triángulo en dirección contraria a las manecillas del reloj; por otra parte, en el triángulo A'B'C'A' el viaje es en el sentido del reloj.

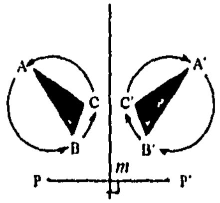


Figura 10.4

Así que una reflexión invierte el sentido de un triángulo. Cualquier isometría que invierte el sentido de un triángulo se llama *opuesta*. Una reflexión es una isometría opuesta. Una isometria que preserva el sentido de un triángulo se llama *directa*. Las traslaciones y rotaciones son isometrías directas.

10.5 La reflexión es la base de construcción de toda isometría. Toda traslación y toda rotación se puede escribir como un producto de dos reflexiones. Simbolicemos la reflexión en la línea *m* por σ_m. Si σ_m mapea P a P' y luego σ_n mapea P' a P'', entonces el *producto* de las reflexiones en las líneas *m* y *n*, en ese orden, mapea P a P'', y escribimos

$$(\sigma_n\sigma_m)(P) = \sigma_n(\sigma_m(P)) = \sigma_n(P') = P''.$$

Observe cuidadosamente que $\sigma_n\sigma_m$ significa ejecutar primero σ_m y en seguida ejecutar σ_n para el resultado. Esta definición de "producto" se mantiene para transformaciones en general; no está restringido únicamente para reflexiones.

10.6 Sean *m* y *n* dos líneas paralelas y sea **v** el vector de la línea *m* a la línea *n* (considerado perpendicular a estas lineas). Consideremos P cualquier punto con $\sigma_m(P) = P'$ y $\sigma_n(P') = P''$, simbolicemos con $2\mathbf{x}$ al vector de P a P' y con $2\mathbf{y}$ al vector de P' a P''. (Ver Fig. 10.6.) Entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{v}$, así $2\mathbf{x} + 2\mathbf{y} = 2\mathbf{v}$. Es decir, $\sigma_n\sigma_m$ traslada cada punto P mediante el vector $2\mathbf{v}$. Se sigue que el producto de dos reflexiones $\sigma_n\sigma_m$ en líneas paralelas *m* y *n* es una traslación dos veces el vector de la primera a la segunda línea.

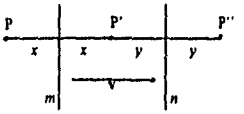


Figura 10.6

Inversamente, cada traslación mediante un vector $2\mathbf{v}$ se puede factorizar en un producto de dos reflexiones en las líneas *m* y *n* , siendo la línea *m* escogida arbitrariamente de cualquier línea perpendicular en la dirección de **v**, y luego la línea *n* es aquella línea paralela a *m* tal que la distancia dirigida de *m* a *n* es **v**.

10.7 Es importante repetir que escribiremos $\beta\alpha$ para simbolizar el producto de las transformaciones α y β en ese orden. Algunos autores prefieren hacerlo de izquierda a derecha.

10.8 Ahora sean m y n dos lineas que se intersecan en un punto O tal que el ángulo dirigido de la linea m a la linea n es θ. Sean P cualquier punto, $\sigma_m(P) = P'$ y $\sigma_n(P') = P''$. Tomemos los ángulos dirigidos POP' y P'OP'' como 2x y 2y. (Ver Fig. 10.8.) Entonces $x + y = \theta$, asi que el ángulo dirigido POP'' es $2x + 2y = 2\theta$.

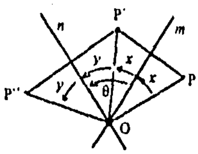


Figura 10.8

Además, OP ≅ OP' ≅ OP'', pués $\sigma_n\sigma_m$ es una rotación alrededor del punto O un ángulo 2θ. Inversamente, toda rotación alrededor de un punto O en un ángulo 2θ se puede factorizar en un producto de reflexiones en dos líneas, siendo la primera m escogida arbitrariamente de las que pasan por O, luego la segunda n es aquella línea que pasa por O y forma un ángulo dirigido θ de la línea m a la línea n.

10. Ejercicios

1. Por definición, una isometría preserva longitudes. Muestre que una isometría también preserva ángulos.
2. Si ABB'A' es un rectángulo, ¿cuáles dos isometrías mapean al segmento AB en A'B'?
3. En el plano Cartesiano, si uno efectúa una traslación al mover los ejes coordenados en vez de los puntos del plano, ¿cómo son movidos los ejes por la traslación mediante al vector AB ?
4. Muestre que el producto de dos traslaciones es una traslación.
5. Muestre que cualesquiera dos triángulos directamente congruentes están relacionados uno con el otro, por una traslación o bien por una rotación.
6. Dados dos triángulos directamente congruentes, encuentre el vector de traslación o el centro y ángulo de rotación que mapea uno al otro.
7. Describa dos triángulos congruentes con lados correspondientes paralelos que estén relacionados por una rotación y ninguna traslación. ¿Cuál es el ángulo de rotación?
8. Utilice una reflexión para demostrar que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.
9. Muestre que un producto de reflexiones en tres líneas paralelas, es igual a una reflexión en otra línea del mismo as.
10. Muestre que un producto de reflexiones en tres líneas concurrentes es igual a una reflexión en otra línea de ese as.

11.1 Una isometría α está determinada completamente por cualesquiera tres puntos A, B, C que formen un triángulo y sus imágenes, ya que las distancias de cualquier punto P en el plano: $m(AP)$, $m(BP)$, $m(CP)$, son únicas. Por lo tanto su imagen P' está determinada, ya que la isometría preserva esas distancias. (La Fig. 13.6 de la sección 13, muestra esta idea).

11.2 Se sigue que cada isometría en el plano es el producto de a lo más tres reflexiones, porque el mapeo de un triángulo ABC a un triángulo congruente A'B'C' requeriría a lo más tres reflexiones, esencialmente una reflexion por vértice, como se muestra en la Fig. 13.13. Así, cada isometría directa, que es producto de un número par de reflexiones, es producto de dos reflexiones, de donde, es una traslación o una rotación. Toda isometría opuesta es una reflexión o un producto de tres reflexiones.

11.3 Simbolicemos con ι a la isometría que deja fijo todos los puntos; esto es, $\iota(P) = P$ para todo punto P. Llamaremos ι (letra minúscula iota griega) al *mapeo idéntidad*. Si m es cualquier línea, entonces $\sigma_m\sigma_m = \iota$, la Fig. 10.4 muestra que siempre que una línea m refleja un punto P a un punto P', también refleja P'a P; esto es, la reflexión de la reflexión de un punto es el mismo punto. Además, si m y n son cualesquiera dos líneas, entonces

$$(\sigma_m \sigma_n)(\sigma_n \sigma_m)=\sigma_m(\sigma_n \sigma_n)\sigma_m = \sigma_m \iota \sigma_m = \sigma_m \sigma_m = \iota,$$

ya que la multiplicación de transformaciones es asociativa. Es claro que ι es una isometría directa, ya que se puede escribir como producto de un número par de reflexiones.

11.4 Si α y β son transformaciones tal que $\alpha\beta = \beta\alpha = \iota$, entonces β se llama *transformación inversa* de α. Si $\alpha(P) = Q$, entonces $\beta(Q) = P$. Siempre existe una transformación inversa y es única, así que escribimos α^{-1} para la inversa de α. Ya que $\sigma_m \sigma_m = \iota$, entonces una reflexión es su propia inversa, $\sigma_m^{-1} = \sigma_m$. La letra σ se reserva para isometrías que son sus propias inversas. Escribiendo α^2 para $\alpha\alpha$, una transformación α diferente de la identidad ι, que es su propia inversa ($\alpha^2 = \iota$) se llama *involutoria*. Generalmente las rotaciones no son involutorias y las traslaciones mediante vectores no cero nunca son involutorias.

11.5 El inverso de la rotación $\alpha = \sigma_n\sigma_m$ está dado por $\alpha^{-1} = \sigma_m\sigma_n$ y es una rotación alrededor del mismo punto mediante el ángulo opuesto. El inverso de la traslación $\alpha = \sigma_n\sigma_m$ está dado de nuevo por $\alpha^{-1} = \sigma_m\sigma_n$ y es una traslación en dirección opuesta y con la misma distancia. Las Figs. 10.6 y 10.8 muestran que si se invierte el orden de las reflexiones de $\sigma_n\sigma_m$ a $\sigma_m\sigma_n$, entonces el punto P'' se mapea primero a P' y luego a P, invirtiendo justamente la traslación o rotación, por lo tanto se produce su inverso.

11.6 Existe justamente una rotación que es involutoria, la rotación alrededor de un punto A mediante 180° (o un múltiplo impar de 180°), llamado *media vuelta* (o *reflexión en*) *en el punto* A y denotado por σ_A. En la Fig. 11.6 se muestra al triángulo PQR y su triángulo imagen P'Q'R' en media vuelta en A. Observe que las

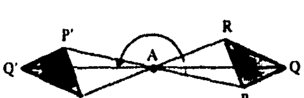


Figura 11.6

isometrías involutorias con subíndices minúsculas (como en σ_m) representan reflexiones sobre líneas, mientras que aquellas con subíndices mayúsculas (como en σ_A) representan medias vueltas alrededor de puntos.

11.7 Una media vuelta alrededor de un punto A es el producto de dos reflexiones en cualesquiera dos líneas perpendiculares *m* y *n* en el punto A (Ver Fig. 11.7a). Así $\sigma_A = \sigma_n\sigma_m$. Como también *n* y *m* son dos líneas perpendiculares por A, se tiene asimismo que $\sigma_A = \sigma_m\sigma_n$. Igualando estas dos expresiones para σ_A , obtenemos $\sigma_n\sigma_m = \sigma_m\sigma_n$. De hecho, $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r$ sii $r = s$ o r y s son perpendiculares.

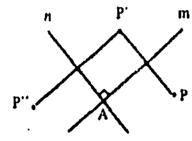


Figura 11.7a

El producto $\sigma_B\sigma_A$ de dos medias vueltas es una traslación mediante el vector $2\overrightarrow{AB}$. La Fig. 11.7b muestra que si $\sigma_A(P) = P'$ y $\sigma_B(P') = P''$, entonces A y B son puntos medios de los lados PP' y P'P'' del

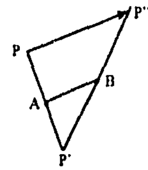


Figura 11.7b

triángulo P'PP''. Se sigue que PP'' es paralelo y doble de AB. Ahora al dar los puntos A, B y C, tomemos el punto D tal que ABCD sea un paralelogramo (Fig. 11.7c). Entonces $\sigma_D\sigma_C\sigma_B\sigma_A = \iota$, ya que $\sigma_D\sigma_C$ y $\sigma_B\sigma_A$ son traslaciones inversas, de donde

$$\sigma_D = \sigma_D\iota = \sigma_D(\sigma_D\sigma_C\sigma_B\sigma_A) = (\sigma_D\sigma_D)\sigma_C\sigma_B\sigma_A = \iota\sigma_C\sigma_B\sigma_A = \sigma_C\sigma_B\sigma_A;$$

esto es, el producto de tres medias vueltas ($\sigma_C\sigma_B\sigma_A$) es una media vuelta (σ_D) en el cuarto vértice del paralelogramo del que sus tres primeros vértices son los tres primeros puntos en su orden dado.

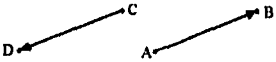


Figura 11.7c

11.8 En seguida volvemos la atención a productos de reflexiones en las líneas *m* , *n* y *p*. Si *m* , *n* y *p* concurren en un punto ordinario A, sea *r* la línea por A tal que sean iguales las rotaciones $\sigma_n\sigma_m$ y $\sigma_p\sigma_r$ (Ver Fig. 11.8a). Entonces

$$\sigma_p\sigma_n\sigma_m = \sigma_p(\sigma_n\sigma_m) = \sigma_p(\sigma_p\sigma_r) = (\sigma_p\sigma_p)\sigma_r = \sigma_r .$$

Análogamente, si *m*, *n*, *p* son paralelas, consideremos una línea *r* paralela a ellas tal que las traslaciones $\sigma_n\sigma_m$ y $\sigma_p\sigma_r$ sean iguales (Ver Fig. 11.8b). Aquí de nuevo tenemos $\sigma_p\sigma_n\sigma_m = \sigma_r$.

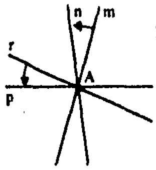


Figura 11.8a

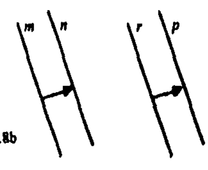


Figura 11.8b

Así, si las tres líneas *m*, *n*, *p* forman un as, entonces el producto $\sigma_p\sigma_n\sigma_m$ de reflexiones en estas líneas se reduce a una reflexión en alguna línea del mismo as.

11.9 Cualquier otra isometría opuesta α se puede factorizar en un producto de tres reflexiones $\alpha = \sigma_p\sigma_n\sigma_m$ con m paralela a n, y p perpendicular a ambas m y n,(Ver Teorema 16.4). Esta isometría se llama *reflexión planificada*; y es el producto de la traslación $\sigma_n\sigma_m$ seguida por la reflexión σ_p en la linea p paralela a la dirección de la traslación. Observe que

$$\alpha = \sigma_p\sigma_n\sigma_m = \sigma_n\sigma_p\sigma_m = \sigma_n\sigma_m\sigma_p$$

ya que p es perpendicular a las líneas m y n. El inverso de esta reflexión planificada $\alpha = \sigma_p\sigma_n\sigma_m$ se puede escribir como

$$\alpha^{-1} = \sigma_m\sigma_n\sigma_p = \sigma_m\sigma_p\sigma_n = \sigma_p\sigma_m\sigma_n.$$

y en esta última forma de α^{-1} se ve que es otra reflexión planificada, a saber, la traslación inversa a la de la planificada dada, y la reflexión igual a la reflexión dada. Así, en la Fig. 11.9, $\alpha = \sigma_p\sigma_n\sigma_m$ lleva el punto A al punto A' mientras que α^{-1} regresa el punto A' (líneas punteadas) al punto A.

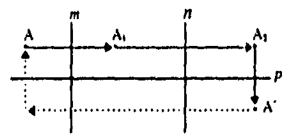


Figura 11.9

11.10 En la tabla del teorema 16.14 se hace un resumen de los principales resultados de isometrías. En los teoremas de la sección 17 se dan otras propiedades geométricas.

11. Ejercicios

1. Para un triángulo dado ABC en el plano coordenado con A(0,0), B(1,0) y C(0,2), encuentre las coordenadas para los vértices del triángulo imagen A'B'C' bajo cada una de las siguientes isometrías:
   a) Una traslación de 5 unidades en la dirección positiva del eje de las "x".
   b) Una traslación de $2\sqrt{2}$ unidades a 45^0 en el primer cuadrante.
   c) Una rotación de 90^0 alrededor del punto P(3,0).
   d) Una rotación de -45^0 alrededor del punto P(3,0).
   e) Una rotación de -90^0 alrededor del punto Q(2,-3).
   f) Una reflexión en el eje de simetría $y = 0$.
   g) Una reflexión en el eje de simetría $y = x$.
   h) Una reflexión en el eje de simetría $x - y = 4$.
   i) Una media vuelta alrededor de P(3,0).
   j) Una media vuelta alrededor de Q(2,-3).
   k) Una reflexión planificada de 5 unidades en la dirección positiva de las "x" con eje de simetría $y = 2$.
   l) Una reflexión planificada de $2\sqrt{2}$ unidades a 45^0 en el primer cuadrante con eje de simetría $x - y = 4$.
   m) La identidad ι.
2. Escriba cada isometría del ejercicio 11.1 como una reflexión o como un producto de reflexiones.
3. Ninguna traslación o reflexión planificada (con vector diferente de cero) puede mapear un rectángulo en él mismo. Encuentre todas las rotaciones, medias vueltas y reflexiones que mapeen un rectángulo dado en él mismo.
4. Repita el ejercicio 11.3 para los figuras siguientes:
   a) Cuadrado, b) Paralelogramo, c) Rombo,
   d) Triángulo equilátero, e) Hexágono regular, f) Pentágono regular.
5. Escriba el inverso de cada una de las isometrías del ejercicio 11.1.
6. Indique cuál de las isometrías del ejercicio 11.1 son involutorias..
7. Indique para cada isometría α del ejercicio 11.1 cuando haya un entero positivo n tal que $\alpha^n = \iota$. Si es así, encuentre la n más pequeña. A esa n se le llama el *orden* de la *isometría*. Las isometrías involutorias *tienen* orden 2, ι tiene *orden* 1. Las traslaciones y las reflexiones planificadas mediante vectores no cero y muchas rotaciones no tienen tal número positivo n, así que el orden de tales isometrías se define como cero.
8. Dadas las líneas m, n, p con ecuaciones $y = 0$, $y = 2x$, $x = 0$, encontrar la línea q tal que
   a) $\sigma_q = \sigma_p\sigma_n\sigma_m$ b) $\sigma_q = \sigma_m\sigma_n\sigma_p$ c) $\sigma_q = \sigma_m\sigma_p\sigma_n$ d) $\sigma_q = \sigma_p\sigma_m\sigma_n$
9. Repita el Ejercicio 11.8 tomando $y = 0$, $y = 2$, $y = 3$ como ecuaciones para las líneas m, n, p.
10. Muestre que una traslación se puede escribir como un producto de dos rotaciones. Además, muestre que un centro de rotación y un ángulo de rotación ($\neq 0^0$) se pueden escoger arbitrariamente.
11. Muestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices; utilice una media vuelta alrededor del punto medio.

12.1 En esta sección encontraremos un tratamiento formal de la teoría de transformaciones que se requiere para un tratamiento formal de isometrías. Se supone que el lector ha leído el panorama dado en las Secciones 10 y 11, tal que esté familiarizado con la dirección que tome este desarrollo.

12.2 **Definición** Una *transformación del plano*, o simplemente una *transformación*, α es un mapeo o función *uno a uno* de los puntos del plano *sobre* el mismo. Esto es, α mapea cada punto del plano en un punto imagen único y cada punto en el plano es la imagen de exactamente un punto.

12.3 **Definición** Si α y β son transformaciones, definimos su *producto* (o *composición*) $\beta\alpha$ por $(\beta\alpha)(P) = \beta(\alpha(P))$ para cada punto P. También escribimos α^2 para $\alpha\alpha$, α^3 para $\alpha\alpha^2$, etc.

12.4 Ya que una transformación es una función, se sigue que dos transformaciones α y β son iguales sii son idénticas, esto es, sii para cada punto P en el plano $\alpha(P) = \beta(P)$.

12.5 **Teorema** Si α y β son transformaciones, entonces $\beta\alpha$ es una transformación.

12.6 **Teorema** La multiplicación de transformaciones es asociativa; esto es, si α, β, γ son transformaciones, entonces $(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$.

Demostración

Para un punto dado P, sea $\alpha(P) = Q$, $\beta(Q) = R$ $\gamma(R) = S$. Entonces

$$((\gamma\beta)\alpha)(P) = (\gamma\beta)(\alpha(P)) = (\gamma\beta)(Q) = \gamma(\beta(Q)) = \gamma(R) = S,$$

y

$$(\gamma(\beta\alpha))(P) = \gamma((\beta\alpha)(P)) = \gamma(\beta(\alpha(P))) = \gamma(\beta(Q)) = \gamma(R) = S,$$

Por lo tanto $(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$.□

12.7 **Definición** Para una transformación α y un punto P, si $\alpha(P) = P$, entonces P se llama *punto fijo* (*punto invariante* o *punto doble*) para la transformación α.

12.8 **Definición** La transformación ι, definida como $\iota(P) = P$ para todo punto P en el plano, se llama la *transformación idéntica* o el *mapeo idéntico*. Esto es, ι es aquella transformación que deja fijo a todos los puntos.

12.9 **Teorema** Si α es una transformación, entonces $\alpha\iota = \iota\alpha = \alpha$.

12.10 **Definición** Si α y β son transformaciones y $\beta\alpha=\iota$, entonces se dice que β es el inverso de α.

12.11 **Teorema** Si β es inverso de α, entonces α es inverso de β.

Demostración

Sea $\beta(P) = Q$ y $\alpha(Q) = R$ para un punto dado P. Ya que $\beta\alpha = \iota$, entonces

$$Q = (\beta\alpha)(Q) = \beta(\alpha(Q)) = \beta(R).$$

Ya que β es una transformación, es uno a uno; esto es, ya que $\beta(R) = \beta(P)$, entonces $R = P$.
Ahora

$$(\alpha\beta)(P) = \alpha(\beta(P)) = \alpha(Q) = R = P,$$

así que $\alpha\beta = \iota$; esto es, α es inverso de β.□

12.12 Teorema Si β y γ son inversas de α, entonces $\beta = \gamma$. Esto es, una transformación tiene a lo más un inverso.

Demostración

Se tiene $\beta = \beta\iota = \beta(\alpha\gamma) = (\beta\alpha)\gamma = \iota\gamma = \gamma$ por los Teoremas 12.6, 12.9 y 12.11.□

12.13 Teorema Toda transformación tiene una transformación inversa.

Demostración

Dada la transformación α y cualquier punto P en el plano, sea $\alpha(Q) = P$. Esto es posible siempre ya que α es un mapeo sobre. Definamos ahora β por $\beta(P) = Q$. Entonces β es una transformación ya que α es una transformación, y $\beta\alpha=\iota$. □

12.14 Definición Si α es una transformación, denotamos a su inverso único con α^{-1}.

12.15 Definición Un conjunto G con una operación binaria *, se llama *grupo* sii se satisfacen los cuatro postulados siguientes:

G1: Siempre que $a, b \in$ G, entonces $a*b \in$ G,

G2: Si $a, b, c \in$ G, entonces $(a*b)*c = a*(b*c)$,

G3: Existe un elemento i en G tal que, si $a \in$ G, entonces $a*i = i*a$, y

G4: Para todo $a \in$ G, existe un elemento a^{-1} en G tal que $a*a^{-1} = a^{-1}*a = i$.

12.16 Definición Un grupo se llama *abeliano* sii satisface la ley conmutativa:

G5: Para todo $a, b \in$ G, $a*b = b*a$.

12.17 Teorema El conjunto T de todas las transformaciones del plano, junto con la multiplicación de transformaciones, es un grupo.

Demostración

Por los Teoremas 12.5, 12.6, 12.9 y 12.13.□

12.18 Después se demostrará que no es abeliano el grupo del Teorema 12.17 (Ver Ejercicio 12.3).

12.19 La geometría se puede definir por medio de sus grupos de transformaciones. La geometría Euclidiana es el estudio de aquellas propiedades (congruencia de figuras, igualdad de longitudes, paralelismo, etc.) que son invariantes bajo las transformaciones del grupo de transformaciones que contiene todas las reflexiones y productos de reflexiones (traslaciones, rotaciones y reflexiones planificadas).

12.20 En cursos de geometría de nivel medio también se estudian figuras semejantes. Este estudio se llama *geometría plana equiforme*, el estudio de propiedades invariantes bajo el grupo de todas las semejanzas, es decir, reflexiones, productos de reflexiones, homotecias (ampliación uniforme del plano), y todos los productos de estas transformaciones.

12.21 Si en el grupo de transformaciones, se incluyen todas las proyecciones de los puntos del plano (proyecciones de un plano sobre el otro), el estudio resultante es *geometría proyectiva*. Cada teorema de geometría proyectiva también vale en equiforme y en euclidiana ya que cada propiedad conservada por todas las transformaciones de geometría proyectiva será conservada por cualquier subconjunto de estas transformaciones. Análogamente, cada teorema de geometría equiforme es cierto en geometría euclidiana.

12.22 En 1872 Felix Klein (1849-1925) concibió la definición de una *geometría* como el estudio de aquellas propiedades de un conjunto de puntos que son invariantes bajo las transformaciones de algún grupo de transformaciones. Así, cuando estudiamos geometría euclidiana determinada por isometrías, estamos interesados con congruencia, longitudes, medidas de ángulos, semejanzas, concurrencia de líneas, colinealidad de puntos, etc. En geometría plana equiforme, la congruencia y la longitud no se conservan. En geometría proyectiva solamente son invariantes en la lista anterior la colinealidad de puntos y la concurrencia de líneas. Cada vez se amplia el grupo de transformaciones, el campo de estudio se estrecha, ya que se conservan pocas propiedades cuando se consideran más transformaciones. Inversamente, todas las propiedades que se conservan bajo un grupo dado de transformaciones ciertamente serán conservadas bajo cualquier subgrupo de estas transformaciones.

12.23 Euclides consideró (Ver Apéndice A) que "cosas que coinciden con otra son iguales". Fue su intento de "levantar y mover" una figura tal que pudiera ser superpuesta sobre otra figura como una prueba para congruencia. Ya que los fundamentos lógicos de este *método de superposición* no son claros, el tratamiento moderno postula la condición *LAL* para congruencia de triángulos. Donde la superposición es nebulosa (¿cómo puede usted levantar una línea genuina?, y ¿qué le sucede si usted administra el levantador?), el postulado *LAL* es preciso. Ahora, una isometría es exáctamente el movimiento que Euclides tuvo en mente, y por lo tanto nosotros desarrollamos la teoría de isometrías para dar claridad a las transformaciones euclidianas. De esta manera, un tratamiento moderno de superposición establecerá que "dos triángulos son congruentes si una reflexión o un producto de reflexiones mapea un triángulo en otro," con lo que se evita la idea vaga de "levantar y mover". Estudiantes principiantes de geometría de nivel medio tienen en las transformaciones, bases para su curso de geometría. Este material está escrito para tal nivel.

12. Ejercicios

1. *Demuestre el Teorema 12.5.*
2. *Demuestre el Teorema 12.9.*
3. Encuentre transformaciones α y β tales que $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.
4. Demuestre que ι es único.
5. Demuestre que $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$.
6. Demuestre que $(\beta\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\beta^{-1}$.
7. Si $\alpha^2 = \alpha$, entonces se dice que la transformación α es *idempotente*.
   a) *Muestre que si α es idempotente, entonces $\alpha = \iota$.*
   b) *Muestre que existen transformaciones diferentes de ι tal que $\alpha^2 = \alpha$.*
8. Para las transformaciones α y β dadas, muestre que existen transformaciones únicas γ y δ tal que $\gamma\alpha = \beta$ y $\alpha\delta = \beta$. Encuentre expresiones para γ y δ en términos de α y β.
9. Muestre que si $\alpha\gamma = \beta\gamma$, o si $\gamma\alpha = \gamma\beta$, para las transformaciones α, β, γ, entonces $\alpha = \beta$.
10. Muestre que si $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$ para las transformaciones α y β, entonces $\alpha\beta = \beta\alpha$.
11. a) Encuentre transformaciones α, β, γ tal que $\gamma\alpha = \beta\gamma$ y $\alpha \neq \beta$.
    b) Si son dadas α y γ, encontrar una expresión para β.
    c) *¿Se puede encontrar siempre β para α y γ dadas?*
12. Muestre que cualquier conjunto S de transformaciones forman un grupo bajo la multiplicación de transformaciones cuando:
    1) S es diferente del vacío,
    2) Siempre que $\alpha \in S$, entonces $\alpha^{-1} \in S$, y
    3) Siempre que $\alpha, \beta \in S$, entonces $\beta\alpha \in S$.
13. Muestre que las tres condiciones del ejercicio 12.12 se pueden reemplazar por las dos condiciones siguientes:
    1) S es diferente del vacío, y
    2') Si $\alpha, \beta \in S$, entonces $\beta^{-1}\alpha \in S$.
14. Muestre que cada conjunto de las isometrías que se encontraron en los ejercicios 11.3 y 11.4 es un grupo.

13.1 Para tener un punto de partida, postularemos que dos triángulos son congruentes si satisfacen la condición *LAL*; esto es, si dos lados y el ángulo comprendido entre esos dos lados de un triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo. Después, en este capítulo, se demostrarán otras condiciones suficientes para congruencia de triángulos.

13.2 Definición Una *isometría* es un mapeo de los puntos del plano que preserva distancias; esto es, α es una isometría sii para cada par de puntos P y Q en el plano, cuando $\alpha(P) = P'$ y $\alpha(Q) = Q'$, entonces $PQ \cong P'Q'$.

13.3 Teorema Una isometría mapea segmentos de línea en segmentos de línea congruentes.

Demostración

Sea α una isometría y PQ un segmento. Sean $\alpha(P) = P'$ y $\alpha(Q) = Q'$. Entonces $PQ \cong P'Q'$. Tomemos cualquier punto A en el segmento PQ. Entonces $PA + AQ = PQ$. Así, si $\alpha(A) = A'$, entonces $P'A' + A'Q' = P'Q'$ ya que α conserva distancias. Por lo tanto A' está en el segmento $P'Q'$ y el teorema se concluye.□

13.4 Corolario Una isometría mapea líneas en líneas y círculos en círculos.

13.5 Definición Si S es un conjunto de puntos y α una transformación, simbolicemos con $\alpha(S)$ al conjunto de todas las imágenes de los puntos de S bajo el mapeo α; esto es, $P \in S$ sii $\alpha(P) \in \alpha(S)$.

13.6 Teorema Para cualquier punto X en el plano existen tres distancias únicas a tres puntos no colineales dados P, Q, R.

Demostración

Existe una circunferencia (que se puede reducir a un simple punto) de puntos Y tal que $PX \cong PY$ y una circunferencia de puntos Y tal que $RX \cong RY$. Estas dos circunferencias se cortan en a lo más dos puntos Y_1 y Y_2. Ya que PQR es un triángulo, Q no está en PR, la mediatriz de Y_1Y_2. Por lo tanto $QY_1 \not\cong QY_2$, pués a lo más uno de estos segmentos puede ser congruente con QX. Así, desde X existen tres distancias únicas a tres puntos no colineales P, Q, R dados. (Ver Fig. 13.6.)□

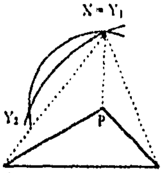


Figura 13.6

13.7 Corolario Si un mapeo de los puntos del plano al plano conserva distancias, entonces es uno a uno y sobre; esto es, una isometría es una transformación del plano.

13.8 Teorema Si PQR es un triángulo y α y β son isometrías tal que $\alpha(P) = \beta(P)$, $\alpha(Q) = \beta(Q)$, y $\alpha(R) = \beta(R)$, entonces $\alpha = \beta$.

Demostración

Por el Teorema 13.6, para cada punto X en el plano, $\alpha(X) = \beta(X)$ ya que α y β conservan distancias. Así, $\alpha = \beta$.□

13.9 Definición Un mapeo del plano α se llama una *reflexión en la línea m*, o una *reflexion*, sii siempre que $B = \alpha(A)$ para los puntos A y B, entonces m es la mediatriz del segmento AB, o bién A = B y $A \in m$. La reflexión en la línea m se denota por σ_m y la linea m se llama su *eje de simetrla*.

13.10 Teorema Una reflexión es una isometría.

Demostración

Supongamos que A y B son cualesquiera dos puntos; y sean $A' = \sigma_m(A)$ y $B' = \sigma_m(B)$. Supongamos que AA' y BB' cortan a m en los puntos F y G, y consideremos que A, B y A' no son colineales, como se muestra en la Fig. 13.10. Entonces los triángulos AGF y A'GF son congruentes por *LAL* ya que $AF \cong A'F$, $FG = FG$ y $\angle AFG \cong \angle A'FG = 90°$. Así, $AG \cong A'G$. Además $\angle AGB \cong \angle A'GB'$ y $BG \cong B'G$. Por lo tanto los triángulos ABG y A'B'G son congruentes por *LAL*.

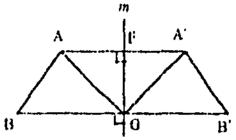


Figura 13.10

Ahora, $AB \cong A'B'$. El caso cuando A, B y A' son colineales no es difícil. Así que σ_m conserva distancias y cada punto tiene una imagen. Así σ_m es un mapeo que conserva distancias. Por lo tanto es una isometría.□

13.11 Corolario Todo producto de reflexiones es una isometría.

13.12 Teorema Para toda reflexión σ_m, $\sigma_m^{-1} = \sigma_m$.

13.13 Teorema Toda isometría es producto de a lo más tres reflexiones.

Demostración

Consideremos que la isometría α mapea el triángulo ABC en el triángulo A'B'C'.

Caso 1. Si $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$, entonces $\alpha = \iota$, el cuadrado de cualquier reflexión dada σ_m.

Caso 2. Si $A = A'$ y $B = B'$, pero $C \neq C'$ como en la Fig. 13.13a, entonces AB es la mediatriz de CC' ya que C y C' son equidistantes de A y de B. Por lo tanto una reflexión en la línea AB mapea el triángulo ABC al A'B'C'.

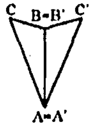


Figura 13.13a

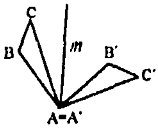


Figura 13.13b

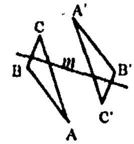


Figura 13.13c

Caso 3. Si $A = A'$ pero $B \neq B'$ como en la Fig. 13.13b, entonces A está en m, la mediatriz de BB'. Entonces σ_m mapea B en B' y deja fijo A, reduciéndose este caso a uno de los dos casos anteriores.

Caso 4. Si $A \neq A'$ (Ver Fig. 13.13c), reflejemos al triángulo ABC en la línea m, la mediatriz de AA', tal que $\sigma_m(A) = A'$. Ahora este caso se reduce a uno de los tres casos anteriores.□

13.14 Definición Toda isometría que sea producto de un número par de reflexiones se llama *directa*. Una isometría *opuesta* es producto de un número impar de reflexiones.

13.15 Definición El *sentido* de un triángulo ABC es el *sentido del reloj* sii uno viaja en la dirección de las manecillas del reloj cuando se leen los vértices en orden cíclico A-B-C-A; es *contrario al reloj* sil uno va en dirección contraria a las manecillas del reloj cuando uno lee A-B-C-A. Cuando los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes y ambos se leen en el mismo sentido, se dice que son *directamente* congruentes; si sus sentidos no son el mismo, se dice que son *opuestamente* congruentes. (Fig. 13.15).

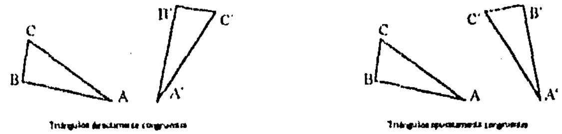


Figura 13.15

13.16 Teorema Una reflexión mapea un triángulo en un triángulo congruente. Además, la congruencia es opuesta.

Demostración

Primero debemos demostrar, considerando únicamente la condición *LAL* para congruencia de triángulos, que si σ_m (ABC) = A'B'C', entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Haremos esto en tres casos.

Caso 1. Supongamos que A y B están ambos en el eje de simetría *m*, y consideremos que CC' corta a *m* en R (Ver Fig. 13.16a). Ahora, cualesquiera dos segmentos correspondientes son congruentes ya que σ_m es una isometría. Como CC'es perpendicular a *m*, entonces $\Delta ACR \cong \Delta AC'R$ y $\Delta BCR \cong \Delta BC'R$ por *LAL*. Al menos uno de estos dos triángulos no es degenerado, así que al menos una de las dos proposiciones $\angle BAC \cong \angle BAC'$ y $\angle ABC \cong \angle ABC'$ deberá ser cierta. Ahora los triángulos ABC y ABC' son congruentes por *LAL*.

Caso 2. Si A está en el eje de simetría *m*, pero B y C no están en *m*, entonces A no puede estar en ambos BB' y CC'. Supongamos que A no está en CC', y sea que CC'corte a *m* en R como en la Fig. 13.16b. Por el Caso 1, $\Delta CAR \cong \Delta C'AR$ y $\Delta BAR \cong \Delta B'AR$, así que $\angle CAR \cong \angle C'AR$ y $\angle BAR \cong \angle B'AR$. Entonces $\angle BAC \cong \angle B'AC'$. Por lo tanto $\Delta ABC \cong \Delta AB'C'$ por *LAL*.

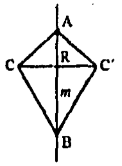


Figura 13.16a

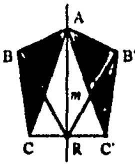


Figura 13.16b

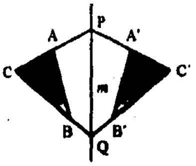


Figura 13.16c

Caso 3. **En cualquier otro caso, a lo más en un lado, digamos AB, del triángulo ABC puede ser paralelo al eje de simetría *m*, así, supongamos que CA corta *m* en P y BC lo corta en Q. Por el Caso 1, $\Delta PCQ \cong \Delta PC'Q$, así $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Ahora $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ por *LAL*.**

La figura 10.4 da al lector una base para una demostración de la segunda parte de este teorema.□

13.17 Corolario Una isometría opuesta mapea un triángulo en un triángulo opuestamente congruente.

13.18 Corolario Una isometría directa mapea un triángulo en un triángulo directamente congruente.

13.19 Teorema Ninguna isometría es a la vez directa y opuesta; pero toda isometría es directa u opuesta.

13.20 Teorema Existen justamente dos isometrías, una directa y otra opuesta, que lleva un segmento dado AB a otro segmento congruente A'B' y que mapea A en A'y B en B'.

Demostración

Tomemos otro punto C tal que ABC sea un triángulo. Hay en el segmento A'B' exáctamente dos triángulos A'B'C' y A'B'C'' congruentes al triángulo ABC. Además, A'B'es mediatriz de C'C'', así que A'B'C'' es la reflexión en la línea A'B' del triángulo A'B'C'. Así, estos dos triángulos son opuestamente congruentes, entonces uno de ellos deberá ser directamente congruente y el otro opuestamente congruente al triángulo ABC. De esta manera las isometrías que mapean al triángulo ABC en estos dos triángulos serán directa y opuesta, respectivamente.□

13. Ejercicios

1. Demuestre el Corolario 13.4.
2. Demuestre el Corolario 13.7.
3. Demuestre el Teorema 13.10 para el caso cuando A, B y A' son colineales.
4. Utilice inducción matemática para demostrar el Corolario 13.11.
5. Demuestre el Teorema 13.12.
6. Indique los números de reflexiones posibles para los casos del Teorema 13.13.
7. Complete la demostración del Teorema 13.16.
8. Demuestre el Corolario 13.17.
9. Demuestre el Corolario 13.18.
10. Demuestre el Teorema 13.19.
11. Utilice inducción matemática y los Corolarios 13.4, 13.17 y 13.18 para demostrar que una isometría mapea a cualquier polígono en un polígono congruente.
12. Sean P(a,0), Q(b,0), R(0,c) puntos cartesianos con $a \neq b$ y $c \neq 0$.
    a) Muestre que hay justamente dos puntos X tal que PX = s y QX = t, donde $|s - t| < PQ < s + t$. Considerando que uno de estos puntos X tiene coordenadas (u, v), encontrar las coordenadas para el otro punto X.
    b) Encuentre m(RX) para ambos puntos X, y muestre que estas dos distancias nunca son iguales.
13. Encuentre imágenes para cada uno de los puntos A(0,0), B(1,0), C(0,3), D(1,1), E(2,3), F(15,12), G(-3,-5) con reflexión en el eje de simetría:
    a) $y = 0$ b) $x = 0$ c) $y = 2$ d) $x = -1$ e) $y = x$ f) $x + y = 2$
14. Trace dos triángulos congruentes tal que no coincidan vértices correspondientes y construya las reflexiones que llevan uno al otro. Encuentre cada par de triángulos que requieran exactamente:
    a) una reflexión b) dos reflexiones c) tres reflexiones d) cuatro reflexiones.

14.1 **Definición** Un mapeo α del plano se llama *traslación mediante el vector* $\overrightarrow{PQ}$ sii para cada punto A, $\alpha(A) = B$ donde $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$; esto es, AB y PQ son segmentos paralelos, congruentes y con la misma dirección.

14.2 **Teorema** Si las líneas *m* y *n* son paralelas y el vector normal de *m* a *n* es v, entonces $\sigma_n\sigma_m$ es una traslación mediante el vector 2v.

14.3 Observe en el Teorema 14.2 que el vector 2v es perpendicular a *m* y a *n*, dirigido de *m* hacia *n*, y de longitud el *doble* de la distancia entre *m* y *n*. (Ver Fig. 10.6.)

14.4 **Teorema** Toda traslación es una isometría y se puede factorizar en un producto de dos reflexiones con ejes de simetría *m* y *n* paralelos, siendo una de estas líneas escogida arbitrariamente y perpendicular al vector de traslación 2v, entonces el otro eje de simetría *n* es paralelo al primero y colocado a una distancia dirigida de *m* a *n* igual a v.

14.5 **Teorema** El inverso de la traslación mediante el vector $\overrightarrow{PQ}$ es la traslación mediante el vector $\overrightarrow{QP}$. Si la traslación se escribe como $\sigma_n\sigma_m$, entonces su inverso es $\sigma_m\sigma_n$.

14.6 **Teorema** Las traslaciones conmutan.

Demostración

Por método vectorial, 2v + 2w = 2w + 2v, ya que en uno u otro caso este vector es una diagonal del paralelogramo determinado por los vectores 2v y 2w. (Ver Fig. 14.6.)□

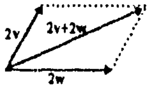


Figura 14.6

14.7 El teorema 14.6 también se puede demostrar algebraicamente. Tal prueba se deja al lector en el Ejercicio 15.11.

14.8 **Definición** Sea O un punto y θ la medida de un ángulo dirigido. Un mapeo α del plano se llama una *rotación alrededor del punto* O *mediante un ángulo* θ sii para cada punto A, $\alpha(A) = B$ donde $A = B = O$ u $OB \cong OA$ y $d(\angle AOB) = \theta$. El punto O se llama el *centro* de rotación.

14.9 **Teorema** **Si las líneas *m* y *n* se intersecan en el punto O con ángulo dirigido de *m* a *n* de medida θ, entonces $\sigma_n\sigma_m$ es una rotación alrededor del punto O mediante el ángulo 2θ.**

Demostración

Sean $\sigma_m(P) = P'$ y $\sigma_n(P') = Q$. Si $P \notin m$, entonces OPP' es un triángulo isósceles con *m* bisectriz del ángulo POP'. Análogamente, si $P' \notin n$, entonces *n* es bisectriz del ángulo P'OQ del triángulo isósceles OP'Q. (Ver Fig. 14.9.) Se sigue que $\angle POQ = \angle POP' + \angle P'OQ$, así $\angle POQ$ es el doble del ángulo de la línea *m* a la línea *n*. También, ya que los triángulos OPP' y OP'Q son isósceles ambos, entonces $OP \cong OQ$. El caso cuando $P \in m$ o cuando $P' \in n$ es más simple. Y el teorema se sigue.□

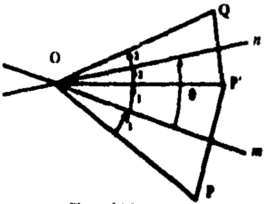


Figura 14.9

14.10 Teorema Toda rotación es una isometría y se puede factorizar en un producto de dos reflexiones en las líneas m y n que se intersecan. Además, uno de los ejes de simetría se puede escoger arbitrariamente por el centro de rotación O, luego el otro eje de simetría es aquella línea que pasa por O, tal que el ángulo dirigido de m a n es la mitad del ángulo de rotación.

14.11 Teorema Toda isometría directa es una rotación o una traslación.

14.12 Teorema El producto de dos traslaciones es una traslación.

Demostración

Geométricamente, la prueba es trivial. El vector del producto de las dos traslaciones es el vector suma de los vectores de las dos traslaciones dadas. Por lo tanto el producto es una traslación.

Alternativamente, daremos una prueba utilizando los Teoremas 14.2 y 14.4. Consideremos las traslaciones α y β y tomemos $\alpha = \sigma_n\sigma_m$ y $\beta = \sigma_q\sigma_p$. Si m, n, p, q son todas paralelas o coincidentes, entonces sea r otra línea de este as tal que $\sigma_p\sigma_r = \sigma_n\sigma_m$.(Ver Fig. 14.11a.) Ahora

$$\beta\alpha = \sigma_q\sigma_p\sigma_n\sigma_m = \sigma_q\sigma_p\sigma_p\sigma_r = \sigma_q\iota\sigma_r = \sigma_q\sigma_r\,,$$

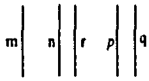


Figura 14.11a

es una traslación ya que es el producto de dos reflexiones en ejes de simetría paralelos.

Si n y p no son paralelas o coincidentes, consideremos que se cortan en A. (Ver Fig.14.11b). Supongamos que n' y p' pasan por A tal que n' es perpendicular a m y $\sigma_{p'}\sigma_{n'} = \sigma_p\sigma_n$. Entonces p' es perpendicular a q por los Teoremas 14.9 y 14.10. (Ver Fig. 14.11c). Consideremos que m y n' se cortan en B, y p' y q en C. Simbolicemos con r a la línea BC y con m' y n' las perpendiculares a r en B y C, respectivamente. (Ver Fig. 14.11d.) Por los Teoremas 14.9 y 14.10 otra vez, $\sigma_q\sigma_{p'} = \sigma_{q'}\sigma_r$ y $\sigma_r\sigma_{m'} = \sigma_{n'}\sigma_m$. Entonces

$$\beta\alpha = \sigma_q\sigma_p\sigma_n\sigma_m = \sigma_q\sigma_{p'}\sigma_{n'}\sigma_m = \sigma_{q'}\sigma_r\sigma_r\sigma_{m'} = \sigma_{q'}\sigma_{m'}\,,$$

es una traslación ya que m' y q' son ejes de simetría paralelos.□

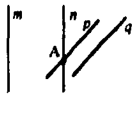


Figura 14.11b

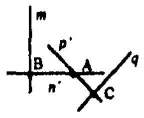


Figura 14.11c

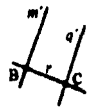


Figura 14.11d

14.13 Teorema **El inverso de una rotación alrededor de O mediante un ángulo θ es la rotación alrededor de O mediante el ángulo −θ. Si la rotación se puede escribir como $\sigma_n\sigma_m$, entonces su inverso es $\sigma_m\sigma_n$ (Ver Fig. 14.9).**

14.14 Teorema El producto de dos rotaciones alrededor del mismo centro O es una rotación alrededor de O, y el producto conmuta.

Demostración

Sean α y β rotaciones con ángulos θ_1 y θ_2. Por el Teorema 14.10, escribimos $\alpha = \sigma_n\sigma_m$ y $\beta = \sigma_p\sigma_n$ donde *m*, *n*, *p* son tres líneas escogidas apropiadamente a través de O (Ver Fig.14.14). Entonces

$$\beta\alpha = \sigma_p\sigma_n\sigma_n\sigma_m = \sigma_p\iota\sigma_m = \sigma_p\sigma_m\,,$$

una rotación alrededor de O con ángulo $\theta_1 + \theta_2$. Ya que $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$, se sigue que las rotaciones conmutan.□

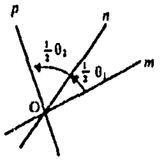


Figura 14.14

14.15 Teorema El producto de dos rotaciones es una rotación o una traslación y, en general, no es conmutativo.

Demostración

Si los centros de las rotaciones son el mismo, entonces se aplica el Teorema 14.14. Así que supongamos que los centros A y B no son el mismo. Simbolicemos con *p* a la línea AB. (Ver Fig. 14.15.) Por el Teorema 14.10, existen líneas *m* y *n* que pasan por A y B respectivamente tal que las dos rotaciones α y β están dadas por

$$\alpha = \sigma_p\sigma_m \quad \text{y} \quad \beta = = \sigma_n\sigma_p\,.$$

Ahora tenemos

$$\beta\alpha = \sigma_n\sigma_p\sigma_p\sigma_m = \sigma_n\sigma_m\,,$$

una traslación si *m* es paralela a *n*, o una rotación si *m* y *n* se cortan en un punto ordinario.□

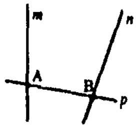


Figura 14.15

14.16 Definición Una *reflexión planificada* es el producto de una traslación y una reflexión en un eje de simetría paralelo a la dirección de la traslación (Ver Fig. 11.9.)

14.17 La reflexión planificada completa nuestra lista de isometrías opuestas. En la sección siguiente mostraremos que toda isometría opuesta es una reflexión planificada o, como una reflexión planificada especial, una reflexión. Como cada isometría directa es una rotación o una traslación, hemos introducido suficientes isometrías básicas. No obstante, en la sección siguiente introduciremos, por conveniencia, una isometría directa más, para completar nuestra lista de isometrías.

14.18 Teorema La traslación y reflexión de una reflexión planificada conmutan.

14. Ejercicios

1. Demuestre el Teorema 14.2.
2. Demuestre el Teorema 14.4.
3. Demuestre el Teorema 14.5.
4. Demuestre el Teorema 14.10.
5. Demuestre el Teorema 14.11.
6. Demuestre el Teorema 14.13.
7. Muestre que dos rotaciones alrededor de centros diferentes, en general, no conmutan, al examinar la naturaleza de los productos $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ donde α y β son rotaciones de 90° alrededor de los puntos A(-1,0) y B(1,0).
8. ¿Qué deberá ser cierto de dos rotaciones α y β si su producto $\beta\alpha$ es una traslación?
9. Si el producto $\beta\alpha$ de dos rotaciones α y β es una traslación, ¿qué se puede decir acerca del producto $\alpha\beta$?
10. Demuestre el Teorema 14.18.
11. Explique cómo es que una reflexión es una reflexión planificada especial. ¿Es cierto que una traslación también es una reflexión planificada especial?
12. Demuestre que una reflexión planificada es una isometría. ¿Es directa u opuesta?
13. Encuentre la inversa de una reflexión planificada.
14. ¿Qué clase de isometría puede ser el producto de dos reflexiones planificadas? ¿Podría ser una reflexión planificada? Explique.
15. ¿El producto de dos reflexiones nunca es una reflexión? Explique.
16. Encuentre las imágenes para cada uno de los puntos A(0,0), B(1,0), C(0,3), D(1,1), E(2,3), F(15,12), G(-3,-5) bajo una rotación con el centro y ángulo indicados.
    a) (0,0), 90° b) (0,0), 180° c) (0,0), -90° d) (1,0), 90°
    e) (1,1), 90° f) (2,3), 180° g) (-1,-3), -90° h) (1,-2), 45°
17. Encuentre las imágenes para los puntos listados en el Ejercicio 14.16 bajo cada una de las traslaciones con vector $\overrightarrow{PQ}$:
    a) P(0,0) y Q(5,0) b) P(0,0) y Q(2,-3) c) P(2,5) y Q(1,7) d) P(3,-2) y Q(3,-5)
18. Demuestre que el producto de una rotación y una traslación es una rotación.
19. El centro de la rotación $\beta\alpha$ del Teorema 14.15 está en la intersección de las líneas m y n. Localice el centro de la rotación $\alpha\beta$. ¿Cuándo $\alpha\beta$ es una traslación?

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

15.1 **Teorema** Una isometría conserva ángulos.

Demostración

Del Teorema 13.16, una reflexión conserva ángulos; esto es, una reflexión mapea un ángulo en un ángulo congruente. Entonces el teorema se concluye del Teorema 13.13 de la sección 13.□

15.2 Se concluye que una isometria es una transformación de congruencia, y que toda transformación de congruencia es una isometría. Así, las isometrías son las mismas transformaciones que buscábamos por superposición euclidiana.

15.3 **Definición** Una isometría *involutoria* es cualquier isometría no idéntica tal que su cuadrado es el mapeo identidad.

15.4 Observe que es costumbre *no* llamar involutoria a ι aun cuando $\iota^2 = \iota$. El Ejercicio 11.7 le ayudará aclarar esta idea.

15.5 **Definición** Una *media vuelta alrededor de un punto* P (o una *reflexión en un punto* P) es una rotación alrededor de P mediante un ángulo de 180°. Se simboliza con σ_P. (Ver Fig. 11.6.)

15.6 El término "reflexión en un punto P" es bastante indicativo de cómo mapea esta isometría a los puntos del plano. En este capítulo, sin embargo, reservaremos estríctamente el término "reflexión" para una reflexión en una línea. Por supuesto, el término "media vuelta" también indica completamente bien la idea de esta isometría. Auque una media vuelta es justamente una rotación (especial), se le ha dado un nombre (*media vuelta*) debido a su importancia y sus propiedades únicas. Es la única rotación involutoria y, de hecho, la única isometría involutoria directa. El teorema 15.7 establece que las medias vueltas y las reflexiones son las únicas isometrías involutorias.

15.7 **Teorema** Toda isometría involutoria es una reflexión o una media vuelta.

Demostración

Sea σ cualquier isometria involutoria y $\sigma(A) = B$ con $A \neq B$. Como $A = \sigma^2(A)$, entonces $\sigma(B) = \sigma(\sigma(A)) = \sigma^2(A) = A$. Escojamos P equidistante de A y B tal que PAB sea un triángulo isósceles. Sea $\sigma(P) = P'$ tal que $\sigma(\Delta PAB) = \Delta P'BA$. Ahora P' tiene exáctamente dos localizaciones posibles: asi que $P = P'$ o bien PAP'B es un rombo. En el primer caso, σ es una reflexión en la mediatriz de AB, y en el segundo caso σ es una media vuelta alrededor del punto medio de AB por Teorema 13.8.□

15.8 **Teorema** Si σ_P es una media vuelta alrededor de P; y a y b son cualesquiera dos líneas perpendiculares que pasan por P, entonces $\sigma_P = \sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_b$.

15.9 **Corolario** Las reflexiones en dos líneas perpendiculares conmutan.

15.10 Solamente las isometrías involutorias se denotarán con σ (sigma minúscula griega); esto es, solamente las reflexiones y las medias vueltas. Se deja como ejercicio elaborar una prueba de que una media vuelta es involutoria. Donde se quiera dar claridad a una isometria involutoria se subindicará la sigma; letras mayúsculas siempre se referirán a puntos y letras minúsculas a líneas. Entonces σ_a es una reflexión y σ_A es una media vuelta.

15.11 Teorema El producto $\sigma_B\sigma_A$ es una traslación mediante el vector $2\overrightarrow{AB}$.

Demostración

Sea $\sigma_A(P) = P'$ y $\sigma_B(P') = P''$ (Ver Fig. 11.7b). En el triángulo $PP'P''$, el segmento AB une los puntos medios de dos lados, así AB es paralelo y congruente a la mitad del tercer lado PP''. Por lo tanto $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{AB}$, y el teorema se sigue.□

15.12 Teorema El producto $\sigma_C\sigma_B\sigma_A$ es una media vuelta alrededor del punto D, el cuarto vértice del paralelogramo ABCD.

Demostración

El teorema se puede demostrar fácilmente como un corolario del Teorema 15.11.□

Es bastante instructivo demostrar los Teoremas 15.11 y 15.12 escribiendo cada media vuelta dada, como producto de dos reflexiones en líneas perpendiculares, una de las cuales se escoge sobre (o paralela a) AB en cada caso.□

15. Ejercicios

1. Demuestre el Teorema 15.1.
2. Explique cómo puede ser que una media vuelta sea "reflexión en un punto".
3. Demuestre que una reflexión es involutoria.
4. Demuestre que una media vuelta es involutoria.
5. Demuestre el Teorema 15.8.
6. Demuestre el Teorema 15.12 como un corolario del Teorema 15.11.
7. Demuestre el Teorema 15.12 al escribir cada media vuelta como un producto de reflexiones como se sugiere en el texto.
8. Encuentre las imágenes para cada uno de los puntos A(0,0), B(1,0), C(0,3), D(1,1), E(2,3), F(15,12), G(-3,-5) bajo una reflexión planificada con vector PQ y con la ecuación dada para el eje de simetría.
   a) P(0,0), Q(1,0) y $y = 0$ b) P(0,0), Q(1,0) y $y = 5$ c) P(2,5), Q(2,-1), y $x = -4$ d) P(0,0), Q(1,1) y $y = x$
9. Repita el Ejercicio 15.8 para una media vuelta alrededor del punto dado:
   a) (0,0) b) (5,0) c) (2,3) d) (-3,7).
10. Demuestre el Teorema 15.11 al factorizar σ_B y σ_A en producto de reflexiones que tienen un eje de simetría común $m = AB$.
11. Utilice el Teorema 15.12 y el inverso al Teorema 15.11 para demostrar que dos traslaciones conmutan (Teorema 14.6).

16.1 **Teorema** Si las líneas a, b, c están en un as, entonces hay una línea d en ese mismo as tal que $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_d$ Inversamente, si $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_d$, entonces las líneas a, b, c,d pertenecen a un as.

Demostración

Demos las líneas a, b, c de un as, luego busquemos una línea d tal que $\sigma_b\sigma_a = \sigma_c\sigma_d$ por uno de los Teoremas 14.4 y 14.10 (Ver Figs. 11.8a y 11.8b). Entonces $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_d$. Invertir el argumento para obtener el inverso.□

16.2 **Corolario** Si las líneas a, b, c forman un as, entonces $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$.

16.3 **Teorema** Si $\sigma_g\sigma_b\sigma_a$ es una reflexión planificada con a y b perpendiculares a g, entonces, haciendo $B = g \cap b$ y $A = g \cap a$, tenemos

$$\sigma_g\sigma_b\sigma_a = \sigma_b\sigma_g\sigma_a = \sigma_b\sigma_a\sigma_g = \sigma_B\sigma_a = \sigma_b\sigma_A \ .$$

16.4 **Teorema** Todo producto $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ es una reflexión planificada. (Una reflexión es una reflexión planificada especial.)

Demostración

El teorema es trivial si a, b, c forman un as. Así que, supongamos (por ejemplo) que solamente a y b se intersecan en P (Ver Fig. 16.4a). Rotemos a y b alrededor de P en las líneas a' y b'tal que $\sigma_{b'}\sigma_{a'} = \sigma_b\sigma_a$ y b' es perpendicular a c en un punto Q (Fir. 16.4b). Análogamente rotemos b' y c alrededor de Q en las líneas b'' y c' tal que $\sigma_c\sigma_{b'} = \sigma_{c'}\sigma_{b''}$ y a' es perpendicular a b'' (Fig. 16.4c). Ahora tenemos

$$\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_c\sigma_{b'}\sigma_{a'} = \sigma_{c'}\sigma_{b''}\sigma_{a'} ,$$

una reflexión planificada, ya que a' y c' son ambas perpendiculares a b''.□

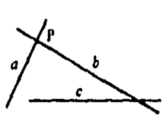


Figura 16.4a

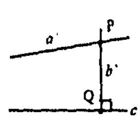


Figura 16.4b

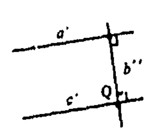


Figura 16.4c

16.5 **Teorema** Toda isometría se puede escribir como un producto de la forma $\sigma_b\sigma_a$ o de la forma $\sigma_P\sigma_a$.

16.6 **Teorema** Todas las reflexiones y productos de reflexiones, esto es, todas las isometrías, forman un subgrupo del grupo de transformaciones del Teorema 12.17.

16.7 **Teorema** **Todas las rotaciones y traslaciones forman un subgrupo del grupo del Teorema 16.6.**

16.8 **Teorema** **Todas las medias vueltas y traslaciones forman un subgrupo del grupo del Teorema 16.7.**

16.9 **Teorema** **Todas las traslaciones forman un subgrupo del grupo del Teorema 16.8.**

16.10 Teorema Todas las traslaciones con eje una línea fija, forman un subgrupo del grupo del Teorema 16.9.

16.11 Teorema Una isometría sin punto invariante es una traslación o una reflexión planificada según que sea directa u opuesta.

Demostración

Una tal isometría no podría ser una reflexión o una rotación ya que cada una de estas isometrías tiene al menos un punto invariante. El centro de una rotación es invariante y cada punto en el eje de una reflexión es fijo.□

16.12 Teorema Una isometría con al menos un punto invariante es una rotación o una reflexión según que sea directa u opuesta.

16.13 Teorema Una isometría con más de un punto invariante es la identidad o una reflexión según que sea directa u opuesta.

16.14 Teorema El cuadro de la Fig. 16.14 resume las relaciones entre cada isometría y su representación en términos de reflexiones.

Isometría	Sentido	Puntos fijos	Líneas fijas	Número mínimo de reflexiones
Reflexiones en una línea m	Opuesto	Puntos en la línea m	m y todas las líneas perpendiculares a m	1 en la línea m
Mapeo idéntico	Directo	Todos	Todas	2 en cualquier línea
Rotación alrededor de O en ángulo $\theta \neq 180^0$	Directo	O (solamente)	Ninguna	2 en líneas que se intersecan en O en ángulo $\theta/2$
Media vuelta alrededor de O	Directo	O (solamente)	Todas las líneas que pasan por O	2 en líneas perpendiculares en O
Traslación con vector PQ	Directo	Ninguno	Todas las líneas paralelas a PQ	2 en líneas perpendiculares a PQ y separadas la mitad de la distancia P a Q
Reflexión planificada por m y en m	Opuesto	Ninguno	m (solamente)	3, en m y dos líneas perpendiculares a m

Figura 16.14

16.15 Los teoremas de esta sección vinculan las propiedades algebraicas de reflexiones y productos de reflexiones con las propiedades geométricas de líneas y puntos. Esta interrelación entre álgebra y geometría es suficientemente importante para justificar una sección más (Sección 17) de recolección, clasificación y enfatizar teoremas que muestren esta relación.

16. Ejercicios

1. Complete el detalle de la demostración del Teorema 16.1.
2. Demuestre el Teorema 16.3.
3. Demuestre el Teorema 16.5.
4. Demuestre el Teorema 16.6.
5. Demuestre los Teoremas 16.7 al 16.10.
6. Demuestre el Teorema 16.12.
7. Demuestre el Teorema 16.13.
8. Justifique los argumentos acerca de puntos y líneas fijos en el Teorema 16.14.
9. Muestre que una rotación que no es media vuelta no es involutoria.
10. Muestre que ni una traslación ni una reflexión planificada con un vector diferente de cero es involutoria.
11. Las líneas m y n se cortan en P. Muestre que cuando ambas m y n son líneas fijas bajo una isometría, entonces P es un punto fijo.
12. Dados un punto A y una línea m, encuentre un punto B y una línea n tal que $\sigma_A\sigma_m = \sigma_n\sigma_B$.
13. Indique cuándo cada conjunto de transformaciones forman un subgrupo del grupo de todas las isometrías.
    a) Todas las reflexiones en ejes de simetría que pasan por un punto dado P y todas las rotaciones alrededor de P (recuerde que la identidad se puede considerar una rotación).
    b) Todas las rotaciones.
    c) Todas las rotaciones alrededor de un punto fijo P.
    d) Todas las reflexiones en ejes de simetría paralelos a una dirección dada y todas las traslaciones que tienen vectores perpendiculares a los ejes.
    e) Todas las medias vueltas.

17.1 Los teoremas de esta sección recolectan las propiedades algebráicas y geométricas de isometrías y especialmente las relaciones entre el álgebra y la geometría de isometrías. Recuerde que letras minúsculas representan líneas y mayúsculas representan puntos. Aunque todos los teoremas de esta sección son de interés, quizá se dé especial énfasis a los teoremas 17.3, 17.4, 17.8, 17.13 y 17.15. Estos resultados serán de bastante utilidad en aplicaciones en las tres secciones que siguen. Trazando una gráfica para ilustrar cada teorema y relacionando cada parte del teorema con la figura, hará al teorema fácil de recordar. Asegúrese trazar tal ilustración para cada teorema.

17.2 **Teorema** Las condiciones siguientes son equivalentes.
1) $A \in b$,
2) $\sigma_A\sigma_b = \sigma_b\sigma_A$,
3) $A = \sigma_b(A)$,
4) $b = \sigma_A(b)$,
5) $\sigma_b\sigma_A$ (o $\sigma_A\sigma_b$) es involutoria, y
6) $\sigma_b\sigma_A$ es una reflexión en el eje que pasa por A perpendicular a b.

17.3 **Teorema** Las condiciones siguientes son equivalentes:
1) $a = b$ o a y b son perpendiculares,
2) $\sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_b$,
3) $a = \sigma_b(a)$,
4) $(\sigma_b\sigma_a)^2 = \iota$, y
5) $\sigma_b\sigma_a$ es la identidad o una media vuelta.

17.4 **Teorema** Las condiciones siguientes son equivalentes:
1) a, b, c, d pertenecen a un as y el ángulo o distancia dirigidos de a a b es igual al de c a d.
2) $\sigma_b\sigma_a = \sigma_d\sigma_c$,
3) $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ es involutoria (y por lo tanto es la reflexión σ_d),
4) $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ es una reflexión (es decir σ_d),
5) $\sigma_d\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \iota$, y
6) $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$.

17.5 **Teorema** Si $a \neq c$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:
1) b está a la mitad entre a y c o b bisecca al ángulo entre a y c.
2) $\sigma_c\sigma_b = \sigma_b\sigma_a$,
3) $c = \sigma_b(a)$, y
4) $\sigma_c = \sigma_b\sigma_a\sigma_b$.

17.6 **Teorema** Si $A \neq C$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:
1) b es mediatriz de AC,
2) $\sigma_C\sigma_b = \sigma_b\sigma_A$,
3) $C = \sigma_b(A)$, y
4) $\sigma_C = \sigma_b\sigma_A\sigma_b$.

17.7 **Teorema** Si $a \neq c$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:
1) a es paralelo a c y B se encuentra a la mitad entre ellos.,
2) $\sigma_c\sigma_B = \sigma_B\sigma_a$,
3) $c = \sigma_B(a)$, y
4) $\sigma_c = \sigma_B\sigma_a\sigma_B$.

17.8 **Teorema** Las condiciones siguientes son equivalentes:

1) ABCD es un paralelogramo,
2) $\sigma_B\sigma_A = \sigma_C\sigma_D$,
3) $\sigma_D = \sigma_C\sigma_B\sigma_A$, y
4) $\sigma_D\sigma_C\sigma_B\sigma_A = \iota$.

17.9 **Teorema** Si $A \neq C$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1) B es el punto medio de AC,
2) $\sigma_C\sigma_B = \sigma_B\sigma_A$,
3) $C = \sigma_B(A)$, y
4) $\sigma_C = \sigma_B\sigma_A\sigma_B$

17.10 **Teorema** Las condiciones siguientes son equivalentes:

1) $A = B$,
2) $A = \sigma_B(A)$,
3) $\sigma_B\sigma_A = \sigma_A\sigma_B$, y
4) $\sigma_B\sigma_A = \iota$.

17.11 **Teorema** Si $\sigma_C\sigma_b\sigma_A$ es involutoria, entonces es una reflexión.

17.12 **Teorema** Si $\sigma_c\sigma_B\sigma_a$ es involutoria, entonces es una media vuelta.

17.13 **Teorema** $\sigma_C\sigma_B\sigma_A$ es siempre involutoria, y así $\sigma_C\sigma_B\sigma_A = \sigma_A\sigma_B\sigma_C$.

17.14 **Teorema** σ_a y σ_A son involutorias siempre.

17.15 **Teorema** $(\sigma_c\sigma_B\sigma_a)^2$ es una traslación.

Demostración

El Teorema establece que el cuadrado de cada reflexión planificada es una traslación. El Teorema 16.3 implica que la planificada y la reflexión de una reflexión planificada conmutan. El cuadrado de la reflexión planificada, entonces, se reduce al cuadrado de su traslación ya que las reflexiones se pueden acomodar hasta cancelarse.□

17.16 Para concluir esta sección mostraremos una relación interesante, un producto de 22 reflexiones que es igual a la identidad! La importancia de este resultado está no en ser un teorema vital que todo estudiante debe saber y recordar instantáneamente. Tampoco es probable que la relación de Thomsen sea un tópico apropiado de conversación en una cena. Es de interés para nosotros por la simplicidad de su demostración. Antes de leer la demostración dada en el texto, intente imaginar cómo lo demostraría usted.

17.17 **Teorema** *Relación de Thomsen* Para cualesquiera tres líneas *a*, *b*, c

$$\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_b\sigma_c\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_a\sigma_c\sigma_b\sigma_a\sigma_c\sigma_b\sigma_c\sigma_b\sigma_a\sigma_c\sigma_b = \iota.$$

Demostración

Puesto que $(\sigma_a\sigma_b\sigma_c)^2$ y $(\sigma_b\sigma_c\sigma_a)^2$ son traslaciones por Teorema 17.15, entonces conmutan. Además,

$$((\sigma_a\sigma_b\sigma_c)^2)^{-1} = (\sigma_c\sigma_b\sigma_a)^2 \qquad \text{y} \qquad ((\sigma_b\sigma_c\sigma_a)^2)^{-1} = (\sigma_a\sigma_c\sigma_b)^2.$$

Ahora la relación deseada es simplemente la identidad

$$(\sigma_a\sigma_b\sigma_c)^2(\sigma_b\sigma_c\sigma_a)^2(\sigma_c\sigma_b\sigma_a)^2(\sigma_a\sigma_c\sigma_b)^2 = \iota.□$$

17. Ejercicios

1. Los Teoremas de 17.3 a 17.12 se pueden aparear tal que el segundo teorema diga para las líneas y puntos, aproximadamente lo mismo que diga el primer teorema del par para los puntos y líneas. Los dos teoremas de cada par se llaman *duales* uno del otro. Por Ejemplo, los Teoremas 17.6 y 17.7 son duales.
   a) Arregle los teoremas 17.3 a 17.12 en pares duales.
   b) Encuentre duales para los Teoremas 17.2 y 17.14.
   c) ¿Qué se puede decir acerca de un dual del Teorema 17.13?
2. Demuestre los Teoremas 17.2 a 17.14.
3. Para cualesquiera tres líneas *a*, *b*, *c*, demuestre que,

$$\sigma_a\sigma_b\sigma_c(\sigma_a\sigma_b)^2(\sigma_c\sigma_a)^2\sigma_b\sigma_c\sigma_a\sigma_c\sigma_b\sigma_a(\sigma_c\sigma_b)^2(\sigma_a\sigma_c)^2\sigma_b\sigma_a\sigma_c = \iota.$$

4. Muestre que, para cualesquiera cuatro líneas paralelas *a*, *b*, *c*, *d*,

$$\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_d\sigma_b\sigma_c\sigma_d\sigma_d\sigma_c\sigma_b\sigma_d\sigma_d\sigma_c\sigma_b\sigma_c\sigma_b\sigma_d\sigma_d\sigma_c\sigma_b\sigma_d = \iota.$$

5. Muestre que la relación de Thomsen y las fórmulas de los ejercicios 17.3 y 17.4 todavía son ciertos si cada reflexión σ_x se reemplaza por una media vuelta σ_X. Explique cómo deberán ser cambiadas las demostraciones.

18.1 Estamos listos para aplicar la teoría de isometrías desarrollada en las secciones anteriores de este capítulo, a problemas en geometría euclidiana. Empezaremos con las propiedades más básicas y progresaremos hacia ideas más avanzadas en las Secciones 19 y 20. Si se presentan suficientemente pronto las isometrías, muchos de los teoremas y demostraciones presentados aquí se pueden utilizar en clases de nivel medio. Varios de los teoremas de las secciones 18 y 19 aparecen en textos de geometría de nivel medio (con pruebas diferentes). El estudiante de nivel medio que comprenda el trabajo con isometrías encontrará los métodos de transformaciones completamente lógicos y comprensibles.

Al procedimiento que estamos utilizando se le puede llamar mejor: *transformar-resolver-transformar*, porque cuando damos un problema, primero *transformamos* en un nuevo problema mediante el uso de isometrías, *resolvemos* el nuevo problema, y luego *transformamos* la solución regresando al problema original. En el Teorema 18.4, por ejemplo, el problema dado se transforma a uno en el cual los dos triángulos comparten un lado común, luego el problema es resuelto (el teorema es demostrado) para este caso, y finalmente esta solución se aplica al problema dado que consiste en demostrar que dos triángulos que satisfacen la condición *LLL* de congruencia son congruentes.

Recuerde que hemos adoptado como un postulado, la condición *LAL* para congruencia, así que cualquier otra condición de congruencia deberá ser demostrada..

18.2 **Teorema** Angulos opuestos por el vértice son congruentes.

Demostración

Sean AB y CD que se corten en P como en la Fig. 18.1. Entonces $\sigma_P(\angle APC) = \angle BPD$ y $\sigma_P(\angle APD) = \angle BPC$, ya que las líneas por P son fijas bajo el mapeo σ_P.□

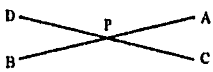


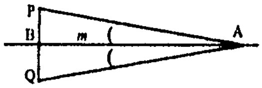
Figura 18.1

18.3 **Teorema** Si un punto es equidistante de dos puntos, entonces está en la mediatriz del segmento que une los dos puntos.

Demostración

Sea A equidistante de P y Q como en la Fig. 18.3. Sea *m* la bisectriz del ángulo PAQ. Entonces σ_m mapea a la línea AP en la línea AQ, y ya que $AP \cong AQ$, $\sigma_m(P) = Q$. Por lo tanto *m* es la mediatriz de PQ.□

Figura 18.3



18.4 **Teorema** Dos triángulos son congruentes y satisfacen la condición *LLL*; esto es, si los tres lados del primer triángulo son congruentes respectivamente a los lados correspondientes del segundo triángulo.

Demostración

Supongamos congruentes los lados del triángulo ABC a los lados correspondientes del triángulo A'B'C'. Utilicemos una isometría que mapee el triángulo A'B'C' al triángulo ABC'' con C y C'' en el lado opuesto de la línea AB (Fig. 18.4). Ya que A y B son equidistantes ambos de C y de C'', entonces la línea AB es la mediatriz de CC''. Por lo tanto la reflexión en la línea AB lleva el triángulo ABC'' en el triángulo ABC. Ahora, ya que una isometría es una transformación de congruencia, se sigue el teorema; es decir, los triángulos ABC y A'B'C'son congruentes.□

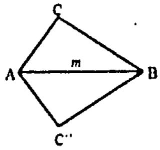


Figura 18.4

18.5 **Teorema** Dos triángulos son congruentes si satisfacen la condición *ALA*; esto es, si dos ángulos y el lado entre esos dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente a las partes correspondientes del otro triángulo.

18.6 **Teorema** Dos triángulos son congruentes si satisfacen la condición *AAL*; esto es, si dos ángulos y un lado opuesto a uno de esos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente a las partes correspondientes del otro triángulo.

18.7 **Teorema** Los ángulos correspondientes y los alternos formados por dos líneas paralelas cortadas por una transversal, son congruentes.

Demostración

Sea p que corte a las líneas m y n en los puntos A y B (Fig. 18.7). Una traslación mediante el vector AB lleva a los ángulos en A en aquellos en B (ya que las líneas m y n son paralelas), estableciendo el teorema.□

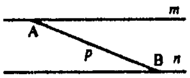


Figura 18.7

18.8 **Teorema** Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

18.9 **Teorema** Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.

Demostración

Sea N el punto medio de la diagonal AC del paralelogramo ABCD. Entonces $\sigma_A\sigma_N = \sigma_N\sigma_C$. Debemos demostrar que N es el punto medio de BD; esto es, que $\sigma_D\sigma_N = \sigma_N\sigma_B$.□

18.10 **Corolario** Un paralelogramo es simétrico con respecto al punto de intersección de sus diagonales.

18.11 **Corolario** Un paralelogramo y cualquiera de sus diágonales forman dos triángulos congruentes.

18.12 **Teorema** La mediatriz de la base mayor de un trapecio isósceles también es mediatriz de la base menor.

Demostración

Reflejemos al trapecio isósceles ABCD en su base AB como eje, en el trapecio imagen ABC'D' (Fig. 18.12). Sean CC' y DD' que corten AB en E y F. Los ángulos en E y F son rectos y DF ≅ CE. Ahora, es dado AD ≅ BC, de donde AD ≅ AD', BC ≅ BC' y CC' ≅ DD'. De este modo los triángulos isósceles ADD' y BCC'son congruentes. Entonces sus alturas correspondientes AF y

BE son congruentes. Por lo tanto la mediatriz de AB es la mediatriz de EF, de donde también de CD, ya que CDFE es un rectángulo.□

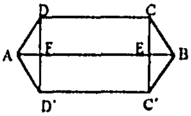


Figura 18.12

18.13 Corolario

a) Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son congruentes.
b) Los ángulos superiores de un trapecio isósceles son congruentes.
c) Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.
d) Un trapecio isósceles es simétrico con respecto a la mediatriz de sus bases.

18.14 Teorema Si los ángulos de la base mayor (o base menor) de un trapecio son congruentes, entonces el trapecio es isósceles.

18.15 Teorema En la Fig. 18.15, si AB ≅ BC ≅ DE, AD ≅ BE, y BD ≅ CE, entonces A, B y C son colineales.

Demostración

Los triángulos ABD y BCE son congruentes por *LLL* y BCED es un paralelogramo, así BD es paralelo a CE. Análogamente, AD es paralelo a BE. Entonces hay una traslación que mapea al triángulo ADB en el triángulo BEC. Ya que una traslación conserva direcciones de líneas, se sigue que A, B y C son colineales.□

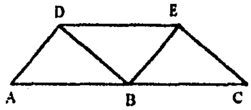


Figura 18.15

18. Ejercicios

1. Demuestre el Teorema 18.5.
2. Demuestre el Teorema 18.6.
3. Demuestre que dos triángulos rectángulos son congruentes si satisfacen la condición *hipotenusa cateto.*
4. Demuestre el Teorema 18.8 como un corolario del Teorema 18.3.
5. Demuestre el Teorema 18.8 por geometría sintética utilizando como una línea auxiliar desde la *cúspide* (el vértice entre los dos lados congruentes) de un triángulo isósceles,
   a) La mediana.
   b) La altura.
   c) La bisectriz.
6. a) Demuestre el Teorema 18.8 al reflejar en la bisectriz del ángulo de la cúspide.
   b) Demuestre el Teorema 18.8 mostrando que los triángulos ABC y ACB son congruentes por el postulado *LAL* (donde los lados AB y AC son dados congruentes).
7. Demuestre el Teorema 18.9.
8. Demuestre el Corolario 18.10.
9. Demuestre el Corolario 18.11.
10. Demuestre el Corolario 18.13.
11. Demuestre el Teorema 18.14.
12. Demuestre que (a) las medianas, (b) las alturas y (c) las bisectrices, trazadas desde los ángulos de la base de un triángulo isósceles, son congruentes.
13. Demuestre que ninguna mediana de un triángulo escaleno es perpendicular al lado que biseca.
14. Demuestre que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
15. Demuestre que si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, entonces el paralelogramo es un rombo.
16. Demuestre el Teorema 18.12 para un rectángulo (considerado cierto en la demostración de tal teorema).

19.1 **Teorema** Una circunferencia es simétrica en cualquier diámetro.

19.2 **Teorema** Un diámetro perpendicular a una cuerda de una circunferencia, biseca a la cuerda.

19.3 **Teorema** Dos cuerdas de una circunferencia son congruentes sii son equidistantes del centro.

Demostración

Dado que las cuerdas son equidistantes del centro, entonces se reflejan en el diámetro que biseca al ángulo entre los radios perpendiculares a las cuerdas. El inverso se establece por una rotación.□

19.4 **Corolario** Cuerdas congruentes de una circunferencia interceptan arcos congruentes de la circunferencia e inversamente.

19.5 **Teorema** Los ángulos de intersección de dos circunferencias que se intersecan son congruentes.

Demostración

Cada uno de los centros A y B de las dos circunferencias es equidistante de los puntos P y Q de intersección de las circunferencias, así A y B están en la mediatriz de PQ. Reflejando la figura en la línea AB. Las circunferencias se mapean en ellas mismas por el Teorema 19.1 y P se mapea en Q. Y el teorema se sigue.□

19.6 **Teorema** El área de un paralelogramo es igual al de un rectángulo con la misma base y altura; es decir, es el producto de su base por la altura a esa base.

Demostración

En el paralelogramo ABCD (Fig. 19.6), hay una traslación α que lleva AD a BC. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que el ángulo A sea menor que un ángulo recto, trazar la perpendicular DE al lado AB. Sea $\alpha(\Delta ADE) = \Delta BCF$. Entonces E, B y F son colineales, así DEFC es un rectángulo, y su área es igual a la del paralelogramo ABCD.□

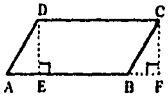


Figura 19.6

19.7 **Teorema** El área de un trapecio es igual al producto de su altura y la semisuma de sus bases.

Demostración

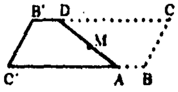


Figura 19.7

Ejecutar una media vuelta alrededor del punto medio M de un lado no paralelo AD para formar un paralelogramo B'C'BC como se muestra en la Fig. 19.7. Luego aplicar el Teorema 19.6 para establecer el teorema.□

19.8 **Teorema** El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquier lado como base y la altura a esa base.

19.9 **Teorema** Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman un paralelogramo.

Demostración

Sea ABCD un cuadrilátero que tiene M, N, O, P como puntos medios de sus lados, como se muestra en la Fig. 19.9. Ahora $\sigma_P\sigma_O\sigma_N\sigma_M$ es una traslación, y una traslación mediante un vector no cero no tiene puntos fijos. Pero

$$(\sigma_P\sigma_O\sigma_N\sigma_M)(A) = (\sigma_P\sigma_O\sigma_N)(B) = (\sigma_P\sigma_O)(C) = \sigma_P(D) = A,$$

así que debemos tener $\sigma_P\sigma_O\sigma_N\sigma_M = \iota$. Así MNOP es un paralelogramo.□

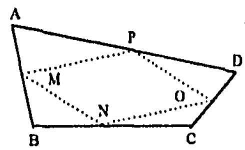


Figura 19.9

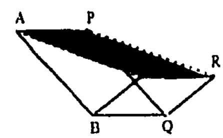


Figura 19.10

19.10 **Teorema** Si ABQP y BCRQ son paralelogramos, entonces también ACRP es un paralelogramo.

Demostración

Tenemos (Ver Fig. 19.10)

$\sigma_A\sigma_C\sigma_R\sigma_P = \sigma_A(\sigma_C\sigma_R\sigma_P) = \sigma_A\sigma_P\sigma_R\sigma_C = (\sigma_B\sigma_Q\sigma_P\sigma_A)(\sigma_A\sigma_P\sigma_R\sigma_C) = \sigma_B\sigma_Q\sigma_R\sigma_C = \iota$,

así que ACRP es un paralelogramo.□

19.11 **Teorema** Si ABPQ y BCQR son paralelogramos, entonces también ACPR es un paralelogramo (Fig. 19.11).

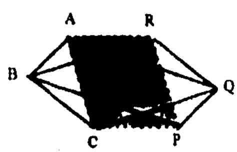


Figura 19.11

19.12 **Teorema** Si A, B, C, D, E, F son seis puntos que están en una circunferencia, y las líneas *a*, *b*, *c* son

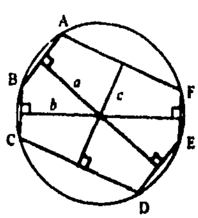


Figura 19.12

concurrentes, donde *a* es la mediatriz de AB y DE, *b* es la mediatriz de BC y EF, y *c* es la mediatriz de CD, entonces *c* también es mediatriz de FA (Fig. 19.12).

19.13 Teorema Si P es punto medio de los segmentos AB y DE, Q punto medio de BC y EF, y R punto medio de CD, entonces R es también punto medio de FA.

Demostración

Ver Fig. 19.13. Ya que $(\sigma_R\sigma_Q\sigma_P)^2 = \iota$, entonces tenemos
$$\sigma_R(A) = (\sigma_Q\sigma_P\sigma_R\sigma_Q\sigma_P)(A) = F,$$
entonces R es el punto medio de AF.□

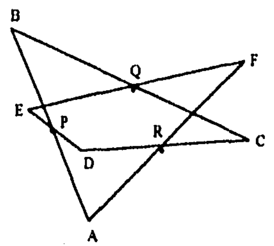


Figura 19.13

19. Ejercicios

1. Demuestre el Teorema 19.1.
2. Demuestre el Teorema 19.2.
3. Demuestre el Teorema 19.3.
4. Demuestre el Corolario 19.4.
5. Demuestre el Teorema 19.8.
6. Demuestre el Teorema 19.11.
7. Demuestre el Teorema 19.12.
8. ¿Que figura forman las cuatro bisectrices de un cuadrilátero?
9. Demuestre que las medianas de un triángulo, como vectores, forman un triángulo.
10. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices.
11. Demuestre que las dos líneas tangentes desde un punto a una circunferencia son congruentes.
12. Revise la demostración del Teorema 8.8 (que los compases euclidiano y moderno son equivalentes).
13. Considere que las líneas *a*, *b*, *c* forman un triángulo cuyo triángulo órtico es DEF. Demuestre que $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ es la reflexión planificada cuyo eje de simetría es la línea DF, y cuyo vector está dirigido de D a F y tiene longitud igual al perímetro del triángulo órtico.

20.1 **Teorema** Las mediatrices de los lados de un triángulo concurren.

20.2 *Primera demostración*

Denotemos con d, e, f las mediatrices de los lados a, b, c del triángulo ABC. (Ver Fig. 20.2.) Entonces

$$(\sigma_f\sigma_e\sigma_d)(B) = (\sigma_f\sigma_e)(C) = \sigma_f(A) = B,$$

así que $\sigma_f\sigma_e\sigma_d$ es una isometría opuesta con un punto fijo. Por el Teorema 16.14 es una reflexión en una línea; esto es, d, e, f concurren, por Teorema 16.1.□

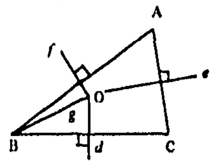


Figura 20.2

20.3 *Segunda demostración.* Utilizando la Fig. 20.2 otra vez, consideremos que d y f se cortan en O y simbolicemos a la línea BO con g. Entonces la isometría $\sigma_d\sigma_g\sigma_f$ es una reflexión en una línea m que pasa por O. Ya que

$$(\sigma_d\sigma_g\sigma_f)(A) = C; \text{ esto es, } \sigma_m(A) = C,$$

se sigue que m es la mediatriz de AC.□

20.4 **Teorema** Las bisectrices de los ángulos de un triángulo, concurren.

Demostración

Simbolicemos con e y f a las bisectrices de los ángulos B y C en el triángulo ABC. Supongamos que e y f se cortan en I (Ver Fig. 20.4). Entonces $\sigma_f\sigma_g\sigma_e$, donde g es la perpendicular desde I al lado a, es una reflexión en una línea m que pasa por I por Teorema 16.1. Ya que $(\sigma_f\sigma_g\sigma_e)(c) = b$, entonces m es la bisectriz del ángulo A por Teorema 17.5.□

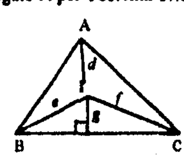


Figura 20.4

20.5 Observe que cualesquiera dos bisectrices en el Teorema 20.4 se pueden tomar como externas y la tercera interna.

20.6 **Teorema** Si $\sigma_C\sigma_A\sigma_B = \sigma_U$, $\sigma_A\sigma_B\sigma_C = \sigma_V$ y $\sigma_B\sigma_C\sigma_A = \sigma_W$, entonces
$\sigma_U\sigma_C = \sigma_C\sigma_V = \sigma_B\sigma_A$, $\sigma_V\sigma_A = \sigma_A\sigma_W = \sigma_C\sigma_B$ y $\sigma_W\sigma_B = \sigma_B\sigma_U = \sigma_A\sigma_C$.

Demostración

Tenemos ambos $\sigma_U\sigma_C$ y $\sigma_C\sigma_V$ son iguales a

$$\sigma_U\sigma_C = \sigma_C\sigma_V = \sigma_C\sigma_A\sigma_B\sigma_C = (\sigma_C\sigma_A\sigma_B)\sigma_C = \sigma_B\sigma_A\sigma_C\sigma_C = \sigma_B\sigma_A.$$

Las otras ecuaciones se obtienen de una manera similar.□

20.7 Los teoremas 20.6 y 20.9 son puramente algebráicos en afirmaciones y demostraciones, basados solamente en el grupo de propiedades de medias vueltas. Las interpretaciones geométricas de estos teoremas algebráicos se dan en los corolarios que siguen a los teoremas. Resultados como estos, ilustran las conexiones íntimas entre álgebra y geometría.

20.8 **Corolario** Si CABU, ABCV y BCAW son paralelogramos, entonces ABC es el triángulo medial para el triángulo UVW. Además, las alturas del triángulo ABC concurren por Teorema 20.1 ya que son mediatrices de los lados del triángulo UVW (Fig. 20.8).

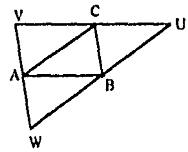


Figura 20.8

20.9 **Teorema** Si $\sigma_C(U) = V$, $\sigma_A(V) = W$ y $\sigma_B(W) = U$, entonces $\sigma_U = \sigma_B\sigma_A\sigma_C$, $\sigma_V = \sigma_A\sigma_B\sigma_C$ y $\sigma_W = \sigma_B\sigma_C\sigma_A$

Demostración

Ya que la media vuelta $\sigma_B\sigma_A\sigma_C$ deja fijo al punto U, entonces es la media vuelta alrededor del punto U, etc.□

20.10 **Corolario** El triángulo (ABC) formado por la unión de puntos medios de los lados de un triángulo (UVW) tiene lados paralelos y congruentes a las mitades de los lados del triángulo dado (Fig. 20.8).

20.11 **Teorema** Las medianas de un triángulo se cortan en un punto de trisección de cada mediana.

Demostración

Tomemos G a dos tercios desde A al punto medio del lado opuesto A′ del triángulo ABC (Fig. 20.11). Ya que el vector $\overrightarrow{AG}$ es dos veces el vector $\overrightarrow{GA'}$, entonces $\sigma_A\sigma_G = \sigma_G\sigma_{A'}\sigma_G\sigma_{A'}$. Debemos demostrar que $\sigma_C\sigma_G = \sigma_G\sigma_{C'}\sigma_G\sigma_{C'}$, donde C′ es el punto medio del lado AB. Por Teorema 17.9, ya que A′ y C′ son puntos medios de sus lados respectivos, entonces $\sigma_B = \sigma_{A'}\sigma_C\sigma_{A'}$ y $\sigma_B\sigma_{C'}\sigma_A\sigma_{C'} = \iota$, tal que $\sigma_{C'} = \sigma_B\sigma_{C'}\sigma_A = \sigma_{A'}\sigma_C\sigma_{A'}\sigma_{C'}\sigma_A$.

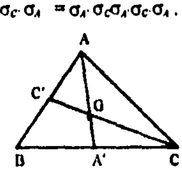


Figura 20.11

Ahora tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_C\sigma_G\sigma_{C'}\sigma_G\sigma_{C'}\sigma_G &= \sigma_C\sigma_G(\sigma_{A'}\sigma_C\sigma_{A'}\sigma_{C'}\sigma_A)\sigma_G\sigma_{C'}\sigma_G \\
&= \sigma_C(\sigma_G\sigma_{A'}\sigma_C)\sigma_{A'}(\sigma_{C'}\sigma_A\sigma_G)\sigma_{C'}\sigma_G \\
&= \sigma_C\sigma_C\sigma_{A'}\sigma_G\sigma_{A'}\sigma_G\sigma_A\sigma_{C'}\sigma_{C'}\sigma_G \\
&= \sigma_{A'}\sigma_G\sigma_{A'}\sigma_G\sigma_A\sigma_G \\
&= \iota
\end{aligned}$$

ya que G está a dos tercios desde A a A′. Análogamente, G está a dos tercios desde B a B′ y el teorema se sigue.□

20.12 Teorema Si las Cevianas a', b', c' de un triángulo concurren, entonces sus isogonales conjugadas a'', b'', c''también concurren. [*Líneas isogonales conjugadas* son dos líneas por el vértice de un ángulo y simétricas con respecto a la bisectriz del ángulo.]

Demostración

Estamos dando la (Fig. 20.12) $\sigma_c\sigma_{a'} = \sigma_{a''}\sigma_b$, $\sigma_b\sigma_{c'} = \sigma_{c''}\sigma_a$, $\sigma_a\sigma_{b'} = \sigma_{b''}\sigma_c$ y $(\sigma_{a'}\sigma_{b'}\sigma_{c'})^2 = \iota$. Debemos demostrar que $(\sigma_{a''}\sigma_{b''}\sigma_{c''})^2 = \iota$. Lo que nos lleva al final del teorema.

$$\begin{aligned}
(\sigma_{a''}\sigma_{b''}\sigma_{c''})^2 &= ((\sigma_c\sigma_{a'}\sigma_b)(\sigma_a\sigma_{b'}\sigma_c)(\sigma_b\sigma_{c'}\sigma_a))^2\\
&= ((\sigma_b\sigma_{a'}\sigma_c)(\sigma_c\sigma_{b'}\sigma_a)(\sigma_a\sigma_{c'}\sigma_b))^2\\
&= (\sigma_b(\sigma_{a'}\sigma_{b'}\sigma_{c'})\sigma_b)^2\\
&= \sigma_b(\sigma_{a'}\sigma_{b'}\sigma_{c'})^2\sigma_b = \sigma_b\sigma_b = \iota. \square
\end{aligned}$$

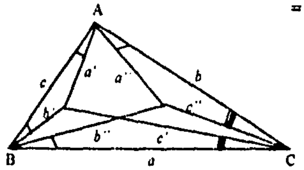


Figura 20.12

20.13 Teorema Sea P cualquier punto que no esté sobre los lados del triángulo ABC y sean D, E, F las reflexiones de P en los lados a, b, c. Entonces el circuncentro O del triángulo DEF es el punto isogonal conjugado del punto P en el triángulo ABC. [Dos puntos son *puntos isogonales conjugados* con respecto a un triángulo sii las tres cevianas que determinan un punto son líneas isogonales conjugadas de las cevianas que determinan el otro punto.]

Demostración

Por el Ejercicio 20.1 aplicado al triángulo PEF, la mediatriz de EF es la isogonal conjugada de la línea AP en el ángulo CAB (Fig. 20.13).□

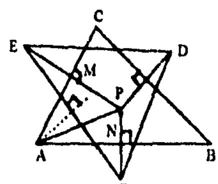


Figura 20.13

20.14 Teorema El ortocentro y el circuncentro de un triángulo son puntos isogonales conjugados.

Demostración

En el Teorema 20.13 consideremos que el triángulo dado sea ABC y su circuncentro P. Entonces los triángulos PEF y ABC tienen puntos medios comunes M y N para los lados PE y AC, y los lados PF y AB (Ver Fig. 20.13). Se sigue que EF es paralelo y congruente a BC. Análogamente para AB y DE, y para CA y FD. Por lo tanto los triángulos ABC y DEF son congruentes. Ahora el circuncentro P del triángulo ABC es el ortocentro del triángulo DEF. De donde el circuncentro del triángulo DEF es el ortocentro del triángulo ABC. El teorema se concluye del Teorema 20.13.□

20.15 **Teorema** En el triángulo ABC, S es el centroide sii

$$\sigma_S\sigma_C\sigma_S\sigma_B\sigma_S\sigma_A = \iota.$$

Demostración

Primero, supongamos que damos $\sigma_S\sigma_C\sigma_S\sigma_B\sigma_S\sigma_A = \iota$. Ya que A′ es el punto medio del lado BC, entonces $\sigma_B = \sigma_{A'}\sigma_C\sigma_{A'}$, por el Teorema 17.9. Ahora

$$\begin{aligned}\iota &= \sigma_S\sigma_C\sigma_S\sigma_B\sigma_S\sigma_A\\ &= \sigma_S\sigma_C\sigma_S\sigma_{A'}\sigma_C\sigma_{A'}\sigma_S\sigma_A\\ &= \sigma_S\sigma_C\sigma_C\sigma_{A'}\sigma_S\sigma_{A'}\sigma_S\sigma_A\\ &= \sigma_S\sigma_{A'}\sigma_S\sigma_{A'}\sigma_S\sigma_A\\ &= (\sigma_S\sigma_{A'})^2(\sigma_S\sigma_A),\end{aligned}$$

lo que establece que S está a dos tercios de la distancia de A hasta A′. Por lo tanto S es el centroide G (Ver Fig. 20.15.)

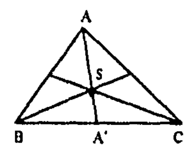


Figura 20.15

Inversamente, si S es el centroide, entonces $(\sigma_S\sigma_C)(\sigma_S\sigma_B)(\sigma_S\sigma_A) = \iota$, ya que las tres medianas, como vectores, forman un triángulo, por teorema 6.7. También ver Ejercicio 19.9 y Respuesta 19.9.□

20.16 **Corolario** El centroide de un triángulo está en un punto de trisección de cada mediana.

20.17 **Teorema** *Problema de Fagnano.* En un triángulo acutángulo dado inscribir un triángulo RST con el perímetro mínimo.

Construcción

Elijamos cualesquiera tres puntos R, S, T en los tres lados del triángulo dado ABC, como se muestra en la Fig. 20.17. Sea $\sigma_b(R) = R'$ y $\sigma_c(R) = R''$. Entonces el perímetro p del triángulo RST está dado por

$$p = RS + ST + TR = R'S + ST + TR'',$$

así, para R fijo, p es el menor cuando R′STR″ es un a línea recta.

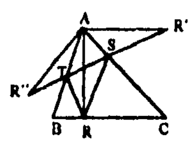


Figura 20.17

Ya que AR″ ≅ AR ≅ AR′ y ∠R″AR′ ≅ 2∠A por construcción de R′ y R″, entonces el triángulo AR′R″ está determinado cuando R es fijo y la longitud de R′R″ varía directamente con la de AR. Así R′R″ es un mínimo cuando AR es tan corto como es posible; esto es, cuando AR es perpendicular a BC. Análogamente S y T también deberán ser los piés de las alturas del triángulo ABC. Del Teorema 7.6, si RST es el triángulo órtico, entonces R′STR″ es una línea recta. Por lo tanto el triángulo órtico es la única solución.□

20. Ejercicios

1. Como un corolario al Teorema 20.1, muestre que el ángulo dirigido de d a g es congruente al de e a f.
2. Demuestre el Teorema 20.4 para una bisectriz interna y dos externas.
3. Demuestre el Corolario 20.8.
4. Complete la demostración del Teorema 20.9.
5. Demuestre el Corolario 20.10.
6. En la demostración del Teorema 20.11 muestre que G está a dos tercios sobre la mediana BB'.
7. Demuestre el Teorema 20.14 *como* un corolario al Teorema 6.20.
8. En la demostración del Teorema 20.14 muestre que el triángulo DEF es la imagen del triángulo ABC en una media vuelta alrededor del centro del círculo de los nueve puntos.
9. Demuestre el Corolario 20.16.
10. Demuestre que un cuadrilátero con tres ángulos rectos tiene cuatro ángulos rectos.
11. Demuestre que las bisectrices de un triángulo concurren, al tomar X, Y, Z como los puntos de contacto del incírculo con los lados a, b, c del triángulo, y d, e, f como las bisectrices de los ángulos A, B, C. Luego muestre que $(\sigma_f\sigma_e\sigma_d)(Y) = Y$. Complete la demostración
12. Sea ABCD un cuadriátero con ángulos rectos en A y C. Sea $Q = \sigma_A(D)$ y $R = \sigma_C(D)$. Demuestre que H, el punto medio de QR, es el ortocentro del triángulo ABC.
13. *Teorema de Hjelmslev.* Si α es una isometría tal que $\alpha(m) = n$, entonces para cada punto P en m, hay un punto Q en n, tal que $\alpha(P) = Q$. Demuestre que los puntos medios de tales segmentos PQ, coinciden todos o todos son distintos.
14. *Problema de Eves.* Un granjero tiene su casa y establo en el mismo lado de un río derecho, a distancias c y e del río, con el establo d unidades corriente abajo de la casa. ¿Hacia qué punto sobre el eje del río deberá dirigirse desde su casa para llenar una cubeta con agua y acarrearla al establo recorriendo la distancia más corta?
15. Demuestre que las perpendiculares trazadas desde dos vértices de un triángulo sobre la mediana del tercer vértice, son congruentes.
16. Por un punto dado P trace una línea equidistante de los puntos dados A y B.
17. Demuestre que un trapecio inscrito en una circunferencia es isósceles.
18. Los triángulos ABC y DEF tienen áreas iguales y bases congruentes BC y EF que están sobre la misma línea. Los vértices A y D están en lados opuestos de tal línea. Muestre que la línea biseca al segmento AD.
19. Las medianas BB' y CC' del triángulo ABC son extendidas una longitud igual a su longitud hasta los puntos B'' y C''. Muestre que A está sobre la línea B''C''.
20. Desde un punto dentro de un círculo, se pueden trazar más de dos segmentos congruentes hasta la circunferencia. Demuestre que el punto es el centro de la circunferencia.
21. Una tangente a una circunferencia con centro O, interseca en A y B a dos tangentes paralelas. Demuestre que la circunferencia con diámetro AB pasa por O.
22. [De "Demostraciones dinámicas de teoremas euclidianos" por R.L. Finney, *Mathematics Magazine* 43 (1970) páginas 177-185.]
    a) Si ABM y CDM son triángulos rectángulos isósceles semejantemente orientados con ángulos rectos en M, demostrar que AC y BD son congruentes y perpendiculares.
    b) Si X y Y son los centros de cuadrados construidos externamente sobre los lados AB y BC del triángulo ABC, demuestre que XB' y YB' son congruentes y perpendiculares en B', el punto medio del lado AC.
    c) Sean W, X, Y, Z los centros de cuadrados (en orden) construidos externamente en los lados de un cuadrilátero. Demuestre que WY y XZ son segmentos congruentes y perpendiculares.
    d) Demuestre que el segmento que une los centros de dos cuadrados construidos externamente en dos lados de un triángulo es congruente y perpendicular al segmento que une al centro del tercero de los cuadrados al vértice opuesto.
    e) Muestre que la palabra "externamente" se puede reemplazar por "internamente" en las partes (b), (c) y (d).

21.1 Parecería lógico escribir primero la representación para una reflexión, luego encontrar un método de multiplicar transformaciones ya que todas las otras isometrías son productos de reflexiones. No obstante es mucho más simple encontrar representaciones para traslaciones y rotaciones directamente de sus propiedades geométricas. En efecto, en la sección siguiente utilizaremos los resultados encontrados aquí para calcular la forma de la reflexión general!

En contraste a los métodos y fórmulas generalmente desarrollados en cursos de cálculo y geometría analítica, consideraremos la traslación, la rotación y la reflexión de todos los puntos del plano en vez de mover los ejes coordenados. En tal caso nuestros mapeos son justamente inversos a los mapeos considerados en cálculo.

21.2 Supongamos que cada punto $P(x,y)$ se traslada mediante el vector $v = \overrightarrow{OA}$ al punto $P'(x', y')$ donde $A(h, k)$ (Fig. 21.2). Entonces P se mueve h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba, tal que $x' = x + h$ y $y' = y + k$. Estas ecuaciones definen la traslación, así que hemos demostrado el teorema siguiente.

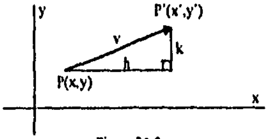


Figura 21.2

21.3 **Teorema** Sea $v = \overrightarrow{OA}$ donde $O(0,0)$ y $A(h,k)$. Entonces la traslación, que mapea cada punto $P(x, y)$ mediante el vector v al punto $P'(x', y')$, está dada por

$$\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k. \end{cases}$$

21.4 **Definición** Se dice que el vector v del Teorema 21.3 tiene *componentes* h y k y escribimos $v = (h, k)$ para este vector o para cualquier vector $v = \overrightarrow{CD}$ donde $C(a, b)$ y $D(a+h, b+k)$.

21.5 Consideremos la rotación de cada punto $P(x, y)$ alrededor del punto $O(0,0)$ mediante el ángulo θ al punto $P'(x', y')$. Sea ϕ el ángulo dirigido del eje positivo de las "x" al rayo OP, y sea $m(OP) = r$. Entonces (Ver Fig. 21.5)

$$x = r\cos\phi \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\phi.$$

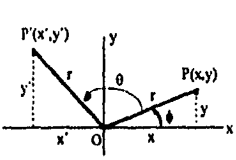


Figura 21.5

El ángulo desde el eje positivo de las "x" al rayo OP' es entonces $\theta + \phi$, y tenemos

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\theta + \phi) \\ &= r\cos\theta\cos\phi - r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\ &= x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y' &= r\,\text{sen}(\theta + \phi) \\ &= r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi + r\cos\theta\,\text{sen}\,\phi \\ &= x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones determinan la rotación, así que hemos demostrado el teorema siguiente.

21.6 **Teorema** La rotación alrededor del origen mediante un ángulo θ, que lleva cada punto $P(x, y)$ sobre $P'(x', y')$, está dada por

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, \\ y' = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

21.7 Sean α y β dos transformaciones del plano, y sean $\alpha(x, y) = (x', y')$ y $\beta(x', y') = (x'', y'')$. Entonces, por definición de multiplicación de transformaciones, tenemos $(\beta\alpha)(x, y) = (x'', y'')$.

21.8 Podemos lograr una rotación alrededor del punto $C(h, k)$ mediante el ángulo θ, primero al trasladar mediante el vector $v = (-h, -k)$ tal que el punto $C(h, k)$ sea movido al origen, segundo al rotar mediante un ángulo θ alrededor del origen, y tercero al trasladar de regreso mediante el vector $-v = (h, k)$. Simbolizando con α, β y α^{-1} estas isometrías, tenemos

$$\alpha: \begin{cases} x' = x - h, \\ y' = y - k, \end{cases}$$

$$\beta: \begin{cases} x'' = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta, \\ y'' = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

y

$$\alpha^{-1}: \begin{cases} x''' = x'' + h, \\ y''' = y'' + k. \end{cases}$$

Calculando $\alpha^{-1}\beta\alpha$ al eliminar x', y', x'' y y'' de las ecuaciones anteriores, tenemos el teorema siguiente.

21.9 **Teorema** La rotación alrededor del punto $C(h, k)$ mediante el ángulo θ se logra por

$$\begin{cases} x' = (x - h)\cos\theta - (y - k)\operatorname{sen}\theta + h \\ y' = (x - h)\operatorname{sen}\theta + (y - k)\cos\theta + k. \end{cases}$$

21.10 Las ecuaciones del teorema 21.9 son bastante complicadas tal que es conveniente que el lector recuerde el *método* (trasladar al origen, rotar alrededor del origen, luego trasladar hacia atrás de nuevo) en vez de memorizar las fórmulas.

21.11 Así, las traslaciones y rotaciones alrededor del origen tienen formulaciones relativamente simples, de esta manera sus formas analíticas se pueden utilizar siempre que sea conveniente. Rotar alrededor de otros puntos, probablemente sería evitado siempre que sea posible cuando utilice representaciones analíticas. Por supuesto, líneas y otras curvas cuyas ecuaciones se conocen se pueden rotar y trasladar haciendo uso de las ecuaciones dadas en los Teoremas 21.3, 21.6 y 21.9. Mucho más convenientes son las formas implícitas que se encuentran al resolver estas ecuaciones para x y y en términos de x' y y'. Para una rotación esto se logra más fácilmente al observar que $P(x, y)$ se obtiene de $P'(x', y')$ por el inverso de la rotación dada. Las ecuaciones implícitas para la traslación y la rotación alrededor del origen son

$$\begin{cases} x = x' - h, \\ y = y' - k, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x = x'\cos(-\theta) - y'\operatorname{sen}(-\theta) \\ y = x'\operatorname{sen}(-\theta) + y'\cos(-\theta). \end{cases}$$

Las ecuaciones para la rotación se pueden escribir en la forma más simple

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta \\ y = -x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

aunque en suma, puede ser mayor confusión intentar recordar esta forma más simple que la forma de rotación original. Esto es, aquí otra vez es probablemente mejor recordar la idea de que la forma implícita proviene de una rotación mediante un ángulo $-\theta$ al mapear P' a P en vez de recordar las ecuaciones específicas.

21.12 Ejemplo Rotar la línea $2x + 3y = 5$ mediante 90° alrededor del origen. Tenemos

$$x = x'\cos 90° + y'\operatorname{sen} 90° = y'$$

y

$$y = -x'\operatorname{sen} 90° + y'\cos 90° = -x'.$$

Haciendo estas sustituciones en la ecuación dada para la línea, obtenemos $2y' - 3x' = 5$. Se deja al lector hacer las gráficas de ambas ecuaciones para mostrar que el resultado es correcto.

Concluimos esta sección al declarar las ecuaciones para una media vuelta.

21.13 Teorema La media vuelta alrededor del punto $C(h, k)$ está dada por

$$\begin{cases} x' = -x + 2h \\ y' = -y + 2k \end{cases}$$

21. Ejercicios

1. Para los puntos O, A, C, D dados en el Teorema 21.3 y la Definición 21.4, calcular analíticamente el producto $\sigma_C\sigma_D\sigma_A\sigma_O$ para mostrar que OADC es un paralelogramo.
2. Haga la gráfica para las líneas del Ejemplo 21.12.
3. Demuestre el Teorema 21.13 desde una gráfica geométrica.
4. Demuestre el Teorema 21.13 como un caso especial del Teorema 21.9.
5. Muestre analíticamente que el producto de dos traslaciones es una traslación.
6. Muestre que el producto de dos rotaciones alrededor del origen mediante los ángulos θ y ϕ es una rotación alrededor del origen mediante el ángulo $\theta + \phi$.
7. Muestre que el producto de las dos rotaciones alrededor del origen con ángulo θ y alrededor del punto $C(h, k)$ con ángulo ϕ es una traslación sil $\theta + \phi$ es un múltiplo entero de $360°$.
8. Encuentre una representación analítica para el inverso de la traslación general como se da en el Teorema 21.3.
9. Encuentre una representación analítica para el inverso de la rotación alrededor del origen como se da en el Teorema 21.6.
10. Encuentre una representación analítica para el inverso de la rotación general como se da en el Teorema 21.9.
11. Encuentre una representación analítica para el inverso de la media vuelta como se da en el Teorema 21.13.
12. Muestre que la rotación alrededor de $C(h, k)$ mediante un ángulo θ se puede escribir en la forma de abajo, y encuentre r y s en términos de h, k y θ:
$$x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta + r \quad \text{y} \quad y' = x\operatorname{sen}\theta - y\cos\theta + s.$$
13. Muestre que las ecuaciones del ejercicio 21.12 muestran que toda rotación se puede escribir como una rotación alrededor del origen seguido por una traslación.
14. Dado que $a^2 + b^2 = 1$, muestre que cada transformación de la forma
$$x' = ax - by + c \quad \text{y} \quad y' = bx - ay + d$$
representa el producto de una rotación y una traslación, y encuentre el ángulo de rotación.
15. Muestre que la isometría del ejercicio 21.14 es una traslación cuando $a = 1$; por lo tanto muestre que estas ecuaciones representan todas las isometrías directas.
16. Rote $A(1,0)$ mediante $120°$ y mediante $240°$ alrededor del origen para ubicar los vértices de un triángulo equilátero. Muestre que $x = -\frac{1}{2}$ es uno de sus lados, y gire mediante la misma rotación para encontrar las ecuaciones para los otros dos lados.

22.1 Una reflexión en un eje de coordenadas tiene una forma muy simple. El teorema siguiente es obvio.

22.2 **Teorema** La reflexión σ_x en el eje de las "x" y la reflexión σ_y en el eje de las "y" están dadas, respectivamente, por

$$\sigma_x \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \sigma_y\text{:} \begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$$

22.3 Las reflexiones en otras líneas que pasan por el origen se manipulan sin gran dificultad. Sea m una línea que pasa por el origen con ángulo de inclinación θ como se muestra en la Fig. 22.3. Simbolicemos con σ_x a la reflexión en el eje de las "x" y con α una rotación alrededor del origen en un ángulo 2θ. Ya que $\sigma_m \sigma_x = \alpha$, tenemos

$$\sigma_m = \alpha\sigma_x;$$

esto es, la reflexión en la línea m es el producto de una reflexión en el eje de las "x" seguida por una rotación alrededor del origen con ángulo 2θ. Ya que σ_x y α tienen las representaciones

$$\sigma_x \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \alpha\text{:} \begin{cases} x'' = x'\cos 2\theta - y'\operatorname{sen} 2\theta \\ y'' = x'\operatorname{sen} 2\theta + y'\cos 2\theta, \end{cases}$$

entonces $\sigma_m = \alpha\sigma_x$ tiene la representación

$$\sigma_m\text{:} \begin{cases} x'' = x\cos 2\theta + y\operatorname{sen} 2\theta \\ y'' = x\operatorname{sen} 2\theta - y\cos 2\theta. \end{cases}$$

Al tomar a $\theta = 0$, $\theta = 90°$ y comparar los resultados con aquellos dados en el Teorema 22.2, uno puede ver que las ecuaciones para la reflexión σ_m como se dió arriba son en efecto correctas para las reflexiones en los ejes de las "x" y de las "y". Los resultados que hemos obtenido se establecen como el Teorema 22.4.

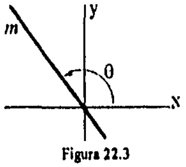


Figura 22.3

22.4 **Teorema** Una reflexión σ_m en la línea m que pasa por el origen con ángulo de inclinación θ tiene la representación

$$\sigma_m\text{:} \begin{cases} x' = x\cos 2\theta + y\operatorname{sen} 2\theta \\ y' = x\operatorname{sen} 2\theta - y\cos 2\theta. \end{cases}$$

22.5 Cuando su eje de simetría no pasa por el origen, podemos manipular la reflexión justo como lo hicimos para una rotación fuera del origen. Así, supongamos que la línea m pasa por el punto $A(h, k)$ con inclinación θ. Primero, trasladémos A al origen, luego reflejémos en la línea n por el origen y paralela a la línea m, y finalmente trasladémos hacia atrás de nuevo. Los resultados se establecen en el teorema siguiente.

22.6 **Teorema** Las ecuaciones para la reflexión σ_m en la línea m que pasa por $A(h, k)$ con ángulo de inclinación θ son

$$\sigma_m\text{:} \begin{cases} x' = (x - h)\cos 2\theta + (y - k)\operatorname{sen} 2\theta + h \\ y' = (x - h)\operatorname{sen} 2\theta - (y - k)\cos 2\theta + k. \end{cases}$$

22.7 Esta forma general del Teorema 22.6 es otra vez complicada también para memorizar, pero es fácilmente reconstruible cuando se necesite.

22.8 Por último, consideremos una reflexión planificada α cuyo eje de simetría m pasa por el origen con inclinación θ y cuya traslación β está a r unidades sobre m medido positivamente hacia arriba, o por una línea horizontal, positiva a la derecha. La traslación y la reflexión están dadas por

$$\beta: \begin{cases} x' = x + r\cos\theta \\ y' = y + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \sigma_m: \begin{cases} x' = x\cos 2\theta + y\,\mathrm{sen}\,2\theta \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,2\theta - y\cos 2\theta. \end{cases}$$

Ahora la reflexión planificada $\alpha = \sigma_m\beta = \beta\sigma_m$ está dada en el Teorema 22.9.

22.9 **Teorema** Una reflexión planificada cuyo eje de simetría m pasa por el origen con ángulo de inclinación θ y cuya traslación está sobre la línea m mediante r unidades, r medido positivo desde el origen dentro de los primeros dos cuadrantes o a lo largo del eje positivo de las "x", y negativo de otra manera, está dada por

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\theta + y\,\mathrm{sen}\,2\theta + r\cos\theta \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,2\theta - y\cos 2\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

22.10 Cuando el eje de simetría de la reflexión planificada pasa por el punto $A(h, k)$ en vez de por el origen, las ecuaciones para su representación son prontamente desarrolladas de la misma manera que lo hemos hecho antes para la reflexión y para la rotación. Esta formulación para la reflexión planificada general se deja como un ejercicio.

22. Ejercicios

1. Demuestre el Teorema 22.2
2. Demuestre el Teorema 22.6.
3. Muestre analíticamente que el producto de reflexiones en las líneas m y n por el origen con inclinaciones θ y ϕ es una rotación alrededor del origen con ángulo $2(\phi - \theta)$.
4. Muestre analíticamente que el producto de reflexiones en líneas paralelas m y n de inclinación θ con m que pasa por el origen, y n que pasa por $A(h, k)$, es una traslación. Encuentre su vector.
5. Muestre que las ecuaciones del Teorema 22.9 para una reflexión planificada dependen de cuando utiliza uno analíticamente $\alpha = \sigma_m\beta$ o $\alpha = \beta\sigma_m$, donde β y σ_m son la traslación y reflexión dada en 22.8.
6. Encuentre una representación analítica para el inverso de la reflexión del Teorema 22.4.
7. Encuentre una representación analítica para el inverso de la reflexión del Teorema 22.6.
8. Encuentre una representación analítica para el inverso de la reflexión planificada del Teorema 22.9.
9. Formule las ecuaciones para la reflexión planificada general.
10. Encuentre una representación analítica para el inverso de la reflexión planificada general encontrada en el jercicio 22.9.
11. Muestre que cada reflexión se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases} \qquad \text{en el cual } a^2 + b^2 = 1.$$

12. Muestre que cada reflexión planificada también tiene la forma del ejercicio 22.11. Por lo tanto toda isometría opuesta tiene esta forma.
13. Muestre que la forma del ejercicio 22.11 representa una reflexión en una línea que pasa por el origen, seguido por una traslación en el vector (c, d) no necesariamente paralelo al eje de simetría de la reflexión. Por lo tanto todas esas ecuaciones representan isometrías opuestas.

14. Muestre que toda isometría tiene la forma analítica

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = \pm(bx + ay) + d \end{cases} \qquad \text{con } a^2 + b^2 = 1,$$

y que es directa si vale el signo más y opuesta si se aplica el signo menos. Inversamente, muestre que toda transformación dada por las ecuaciones anteriores es una isometría. Por lo tanto estas ecuaciones caracterizan analíticamente a las isometrías.

15. Muestre que el producto de dos isometrías de la forma dada en el ejercicio 22.14 es otra isometría de esa misma forma.
16. Muestre que toda isometría se puede escribir como el producto de una rotación alrededor del origen o una reflexión en una línea por el origen, seguido de una traslación.
17. Encuentre formas implícitas para:
    a) Las reflexiones del Teorema 22.2.
    b) La reflexión del Teorema 22.4.
    c) La reflexión del Teorema 22.6.
    d) La reflexión planificada del Teorema 22.9.
    e) La reflexión planificada general encontrada en el ejercicio 22.9.
18. De las formas implícitas para una reflexión encontradas en el Ejercicio 22.17, encuentre una ecuación para la imagen de una circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ en una reflexión en la línea $y = x$. Encuentre algún punto fijo en la circunferencia y elabore una gráfica.
19. Muestre que, en la forma dada para una reflexión planificada, si hacemos que la traslación sea un vector $\overrightarrow{OA}$, tomando r siempre positivo y θ el ángulo dirigido (menor que 360^0) del lado positivo del eje de las "x" al rayo OA, entonces las fórmulas dadas son correctas todavía.
20. Muestre analíticamente que un producto de tres reflexiones en ejes de simetría que pasan por el origen es una reflexión en un eje por el origen.
21. Muestre analíticamente que un producto de tres reflexiones en ejes de simetría paralelos es una reflexión en un eje de simetría paralelo a los ejes de simetría dados.

CAPITULO 3 SIMILITUDES EN EL PLANO

SECCION 23 | EL RENACIMIENTO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO

23.1 Durante la edad media, iniciando con la caída de Alejandría en 641, el pensamiento matemático se hundió en la oscuridad. Auque aparecieron descubrimientos pequeños de cuando en cuando, los mil años siguientes fueron completamente estériles. Además, absolutamente ningún progreso ocurrió en métodos matemáticos sino hasta el siglo diecinueve. Así, transcurrieron más de 2000 años antes de un segundo florecimiento desde la primer época de oro alrededor de la etapa de Arquímedes.

23.2 Los árabes acarreando desde lejos y traduciendo al árabe, algo de la biblioteca de Alejandría, conservaron bastante del conocimiento griego, que trasmitieron después de regreso a Europa. Adoptaron también el sistema de numeración indú que trasmitieron a los matemáticos de occidente en años posteriores. Así que los árabes fueron custodios de la erudición griega.

23.3 A finales de la edad media, empezó a filtrarse a Europa un poco del conocimiento. En el siglo doce que fue de traductores, se tradujeron las enseñanzas griegas del árabe al latín (lenguage que emergió de los eruditos). En el siglo trece empezaron a surgir universidades en el continente, con gente que empezaba a hurgar de nuevo en los misterios del conocimiento griego.

23.4 El siglo catorce estuvo marcado por la peste negra y la guerra de los cien años, en detrimento de las matemáticas. Los siglos quince y dieciseis empezaron a mostrar promesas de luminoso futuro con avances en aritmética, álgebra y trigonometría. Se inventó la imprenta; y así se dispersó el conocimiento mucho más rápido y ampliamente que antes jamás. En estos siglos, quince y dieciseis, fue puesto el escenario para la gran escena que empezó a funcionar en el siglo diecisiete.

23.5 En 1647 William Oughtred (1574-1660) utilizó π/δ como símbolo para la razón $\pi = 3.14159....$ Dió un total de más de 150 símbolos, principalmente en álgebra. Su invención fue la regla recta logarítmica deslizable. También él y uno de sus estudiantes, cada uno independientemente, inventaron la regla circular deslizable.

23.6 Johannes Kepler (1571-1630), amigo cercano de Galileo Galilei (1564-1642), pasó 22 años analizando datos observados de teorías que supuso para el movimiento de los planetas. Finalmente concluyó que todos los planetas viajan en órbitas elípticas con el sol en un foco, que el radio vector del sol a un planeta dado barre áreas iguales en tiempos iguales y que el cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita. Al dividir una circunferencia en una infinidad de triángulos isósceles congruentes, anticipó el cálculo.

23.7 Pierre de Fermat (1601-1665), tuvo una vida personal tranquila. Aunque su trabajo principal fue en teoría de números, anticipó el cálculo con su *De maximus et minimis*.

23.8 En su tiempo se sustentaba comunmente que no era posible la comprensión del concepto del infinito por el hombre quien tiene una mente finita. No obstante antes de 200 años la matemática infinita fue comprendida.

23.9 René Descartes (1596-1650, fue el descubridor de la geometría analítica en 1637. Aunque otros antes que él (Apolonio, Vieta, Oresme, Cavalieri, Roberval y Fermat) habían aplicado álgebra y coordenadas a curvas específicas, Descartes fue el primero en introducir un sistema de coordenadas para ser aplicado a todas las curvas geométricas. Introdujo los exponentes (como x^3 para xxx) y la regla de los signos que lleva su nombre y se utiliza para determinar raíces de un polinomio como números positivos y negativos.

23.10 Fermat criticó una vez a Descartes causando que su infame temperamento explotara. Descartes atacó con rencor al anterior "método de tangentes" de Fermat. La controversia continuó mucho tiempo después de la muerte de Descartes.

23.11 En 1639 Girard Desargues (1593-1662) introduce la geometría proyectiva. Su trabajo, casi dos años después de la geometría analítica de Descartes y escrito en un estilo muy excéntrico, atrajo poca atención y se perdió pronto por casi doscientos años. Introdujo el concepto de un as de líneas o planos y demostró su famoso teorema "dos triángulos".

23.12 A Blaise Pascal (1623-1662) no le permitieron estudiar matemáticas hasta que hubiera dominado completamente latín y griego, estableció sus propios axiomas y definiciones para geometría elemental y luego demostró que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Pascal escribió su tratado en cónicas cuando apenas tenía 16 años de edad. De su teorema del hexagrama místico dedujo más de 400 corolarios.

23.13 John Wallis (1616-1703) fue el primero en tratar analíticamente las secciones cónicas como polinomios de segundo grado. Introdujo el símbolo ∞ para el concepto de infinito y descubrió el interesante producto infinito

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots.$$

23.14 El descubrimiento del cálculo en 1665 por Isaac Newton (1642-1727) e independientemente en 1675 por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) convirtió en muy productivo a este siglo en el cual el pensamiento matemático se desarrolló de nuevo siguiendo el ejemplo de la expansión que habían alcanzado los griegos. El descubrimiento del cálculo fue un progreso natural de la geometría analítica y del "método de indivisibles" que se habían aplicado en muchas situaciones individuales por investigadores anteriores.

23.15 Ahora los matemáticos, se emborrachaban con el poder del cálculo, aplicando sus métodos ciegamente a toda suerte de problemas, ignorando completamente los fundamentos inseguros sobre los cuales había sido construido. Surgieron muchas contradicciones que serían resueltas en el siglo diecinueve con la teoría de límites. Y después, con la aplicación de los métodos de álgebra y análisis a la geometría, nació la geometría moderna. Y el productivo siglo diecinueve llegó a un final.

23. Ejercicios

1. Demuestre sintéticamente el Teorema "dos triángulos de Desargues" (Teorema 4.7) para el caso donde los dos triángulos están en planos distintos que se intersecan.
2. El teorema del hexagrama místico de Pascal establece que si un hexágono no necesariamente convexo se inscribe en una sección cónica, entonces los tres puntos de intersección de pares de lados opuestos son colineales. Demuestre este teorema para el caso donde la sección cónica es un círculo.
3. Dados cinco puntos que están en una sección cónica, utilice el teorema del hexagrama místico de Pascal, ejercicio 23.2, para localizar otros puntos en la cónica.
4. Utilice una calculadora de bolsillo o computadora, para calcular el valor del producto de los primeros 10 o 100 factores de la expresión de Wallis para $\pi/2$ (vea 23.13). ¿Qué tan rápido converge este producto?
5. En 1806, mientras era estudiante, C.J. Brianchon (1785-1864) demostró que si un hexágono se circunscribe en una sección cónica, entonces las tres diagonales que unen vértices opuestos son concurrentes. Muestre que el teorema de Brianchon es dual (ver 4.9) del teorema de Pascal (Ejercicio 23.2).

24.1 En este capítulo haremos para *similitudes* –mapeos que llevan figuras a figuras semejantes– análogamente a lo que hicimos con isometrías en el Capítulo 2. Empecemos con una *homotecia*, una simple amplificación o estrechamiento del plano que multiplica, por la misma razón $k \neq 0$, a todas las distancias desde un punto fijo llamado *centro*. Este mapeo es una similitud directa que lleva cada línea en una línea paralela y su centro es el único punto invariante. Inversamente, si dos figuras semejantes tienen lados correspondientes paralelos, entonces existe una homotecia que mapea una de ellas en la otra y su centro es el punto de concurrencia de las líneas que unen vértices correspondientes (Fig. 24.1).

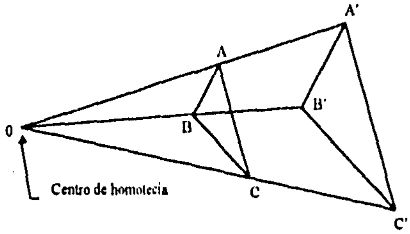


Figura 24.1

24.2 Dos circunferencias no concéntricas tienen dos centros de homotecia. Estos centros se localizan en la línea de los centros de las circunferencias y se pueden encontrar al trazar diámetros paralelos AB y A'B' en las dos circunferencias (Fig. 24.2). Entonces las líneas AA' y BB' se cortan en un centro de homotecia y las líneas AB' y A'B se cortan en el otro. Estos centros de homotecia, también llamados *centros de similitud*, dividen armónicamente a la línea de los centros de las dos circunferencias.

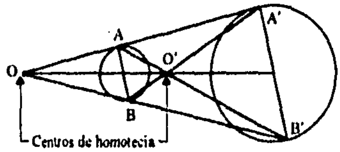


Figura 24.2

24.3 Dos homotecias conmutan cuando y solamente cuando tienen el mismo centro o al menos una de las razones es +1. El producto de dos homotecias es una homotecia o una traslación, lo último ocurre cuando sus razones son recíprocas (Ver Teorema 25.9).

24.4 Una similitud es la composición de una isometría y una homotecia. Toda similitud que no sea una isometría es una rotación seguida por una homotecia con el mismo centro o es una reflexión seguida por una homotecia cuyo centro está en el eje de simetría, siendo el primer producto, directo y el segundo opuesto (Ver Teoremas 26.9 y 26.10).

24.5 Cualesquiera dos segmentos dados AB y A'B' están relacionados justamente por dos similitudes (con A' imagen de A y B' imagen de B), una directa y la otra opuesta. Cualesquiera dos triángulos semejantes están relacionados justamente por una similitud. En este sentido, si la similitud α mapea el triángulo ABC en el triángulo A'B'C', convendremos que α^{-1} mapea el triángulo A'B'C' en el triángulo ABC que no constituye una similitud diferente entre estos triángulos.

24.6 La teoría descrita anteriormente se desarrollará en las dos secciones siguientes. Con tales fundamentos tendremos bases suficientes para proceder a tres secciones de aplicaciones en geometría elemental. Se destina una sección final a la representación analítica de similitudes, capacitándonos para utilizar estas transformaciones en el plano cartesiano. Así, este capítulo es parecido, pero más breve, al capítulo 2.

24. Ejercicios

1. Demuestre que una similitud conserva ángulos.
2. ¿Dónde están los dos centros de homotecia para las bases de un trapecio isósceles?
3. Demuestre que el producto de dos homotecias con el mismo centro es una homotecia. Encuentre la razón y su centro.
4. Demuestre que si dos triángulos semejantes tienen sus lados correspondientes paralelos, entonces las líneas que unen vértices correspondientes concurren, así, están relacionados por una homotecia.
5. Dados dos triángulos directamente semejantes, muestre cómo encontrar una rotación y una homotecia (no necesariamente con el mismo centro) cuyo producto mapee a un triángulo en el otro.
6. Dados dos triángulos opuestamente semejantes, muestre cómo encontrar una reflexión y una homotecia (cuyo centro no esté necesariamente en el eje de simetría) cuyo producto mapee a un triángulo en el otro.
7. Encuentre los centros de homotecia de dos circunferencias que no se corten, con radios 3 y 5, y encuentre las razones en las cuales estos centros dividen a la línea de los centros de las circunferencias.
8. Demuestre que los centros de homotecia de dos circunferencias dividen armónicamente a la línea de los centros de las circunferencias
9. Demuestre que la construcción para los centros de homotecia de dos circunferencias, dado en 24.2, es correcto.
10. Encuentre una homotecia diferente del mapeo identidad (homotecia con razón = +1) que lleve un rectángulo dado en él mismo (no necesariamente punto por punto).
11. Simbolice la homotecia con centro A y razón k por H(A,k). Dado que O(0,0), P(1,0) y Q(0,2) son puntos en el plano cartesiano, encuentre la imagen del triángulo OPQ bajo cada homotecia.
    a) H(0,3), b) H(0,2), c) H(0,-1), d) H(0,$^1/_3$),
    e) H(A,2) donde A(2,0), f) H(A,-1/2), g) H(B,2) donde B(4,0), h) H(B,-1/4).
12. Encuentre todas las homotecias que son involutorias.
13. Encuentre al inverso de la homotecia con centro y razón dados.
14. Demuestre que, para una homotecia dada α, el entero positivo más pequeño para lo cual $\alpha^n = \iota$
    a) es 1 sii $\alpha = \iota$,
    b) es 2 sii la razón de la homotecia es -1, y
    c) no existe en cualquier otro caso.

25.1 Definición Una *homotecia* H(O,k), donde O es un punto fijo en el plano y k un número real diferente de cero, es aquella transformación que mapea al punto O en él mismo y mapea cualquier otro punto P en un punto P', tal que O, P, P' son colineales y **OP'** = k·**OP**. El punto O se llama *centro* y k *razón* de la homotecia.

La homotecia es una base de construcción para mapeos por similitudes, en forma análoga como la rotación es una base para isometrías. No se pueden obtener todos los mapeos de similitudes únicamente como productos de homotecias, sino que, son necesarias y básicas para similitudes. En esta sección estudiaremos las propiedades elementales de homotecias y sus productos. En la sección siguiente mostraremos las relaciones entre homotecias y similitudes.

25.2 Teorema La homotecia H(O,k) mapea un segmento de línea AB en un segmento paralelo A'B' con A'B' = $|k|$·AB.

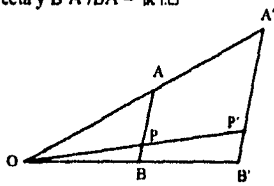
Demostración

Consideremos que H(O,k) mapea A en A', B en B' y cualquier otro punto P del segmento AB en P' (Fig. 25.2). Entonces ∠BOP = ∠B'OP' y

$$\frac{OB'}{OB}=\frac{OP'}{OP}=|k|.$$

Por lo tanto los triángulos BOP y B'OP' son semejantes, así que B'P'/BP = $|k|$ y B'P' es paralelo a BP. Análogamente P'A'/PA = $|k|$ y P'A' es paralelo a PA. Ahora, ya que BPA es una línea recta, entonces también B'P'A' es una línea recta y B'A'/BA = $|k|$.□

Figura 25.2



25.3 Corolario Una homotecia mapea cualquier triángulo dado en un triángulo semejante. En general, mapea cada polígono en un polígono semejante.

25.4 Corolario Una homotecia preserva ángulos entre líneas.

25.5 Teorema Un homotecia H(O,k) mapea una circunferencia de radio r en otra circunferencia cuyo radio r' es $|k|$·r y cuyo centro C' es la imagen homotética del centro C de la circunferencia dada.

Demostración

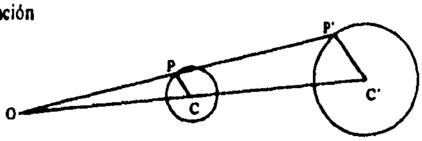


Figura 25.5

Consideremos que H(O,k) mapea al centro C de la circunferencia dada en C' y cualquier punto P en la circunferencia en el punto P', como se ve en la Fig. 25.5. Ya que CP = r, el radio de la circunferencia dada, entonces C'P' = $|k|$·r por el Teorema 25.2. Esto es, el lugar geométrico de las imágenes del punto P en la circunferencia dada es otra circunferencia de radio $|k|$r y centro C', la imagen homotética de C.□

25.6 Teorema Para cualesquiera dos circunferencias dadas existe una homotecia que mapea una en la otra. Si son de radios diferentes y no concéntricas, entonces hay dos tales homotecias.

Demostración

Si las circunferencias no concéntricas de radios diferentes r y r' no se intersecan, entonces los centros están en la intersección de sus tangentes externas comunes (cuya razón de homotecia es r'/r) y en la intersección de sus tangentes internas comunes (con razón −r'/r). En todos los casos podemos localizar estos centros (Fig. 25.6) al tomar los centros de las circunferencias dadas como C y C'; y en seguida levantar perpendiculares a la línea de los centros CC'en C y C'. Consideremos que estas perpendiculares cortan a la circunferencia C en P y Q y a la circunferencia C'en P'y Q'. Los centros de homotecia están en la intersección de PP' y QQ' y de PQ' y P'Q. Simbolicemos estos centros por I y E, siendo I el centro *interno* de similitud que está entre C y C' y E el centro *externo* de similitud que está fuera del segmento CC'.□

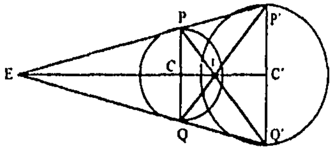


Figura 25.6

25.7 Teorema Si dos triángulos semejantes no congruentes están orientados tal que cada lado de uno es paralelo al lado correspondiente del otro, entonces existe una homotecia que mapea un triángulo en el otro.

Demostración

Consideremos los triángulos ABC y A'B'C', como en la Fig. 25.7. Como son paralelos pares de lados correspondientes, entonces las dos líneas de cada par se cortan en la línea al infinito; esto es, los dos triángulos son coaxiales. Por el teorema "dos triángulos de Desargues" (Teorema 4.7), estos triángulos también son copolares en un punto O. Se sigue que el punto O se comporta como centro de homotecia y la razón de homotecia es **OA'/OA** = ±A'B'/AB.□

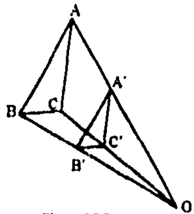


Figura 25.7

25.8 Teorema Una homotecia está determinada por dos puntos diferentes y sus imágenes.

Demostración

Consideremos la homotecia que mapea los puntos A y B en A' y B', respectivamente. Entonces el centro de homotecia es el punto de intersección de las líneas AA' y BB'. Su razón es ±A'B'/AB, es válido el signo menos si el centro está entre A y A', sucede el signo más en otro caso.□

25.9 **Teorema** Si $jk \neq 1$, entonces el producto de las dos homotecias H(O,k) y H(Q,j) es la homotecia H(P,jk) donde P es colineal con O y Q. Si $jk = 1$, entonces P se convierte en ideal y el producto de las dos homotecias es una traslación.

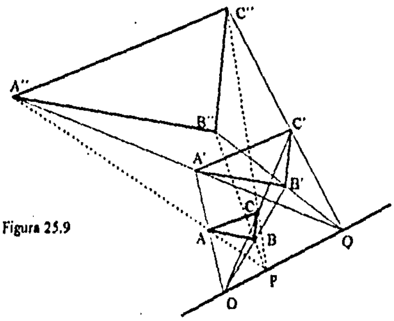


Figura 25.9

Demostración

Puesto que cada homotecia mapea un triángulo en un triángulo semejante con lados paralelos al triángulo dado, se sigue que su producto es el mismo. Así que el producto es una homotecia de razón $jk \neq 1$ ó es una traslación cuando $jk = 1$.

Hagamos que H(O,k) mapee al ΔABC en el ΔA'B'C' y que H(Q,j) mapee al ΔA'B'C' en el ΔA''B''C'' (Ver Fig. 25.9). Ya que AB, A'B' y A''B'' son paralelos, se cortan en un punto ideal I. Así que los triángulos AA'A'' y BB'B'' son copolares en I. Por el teorema de Desargues, son coaxiales; de esta manera, los puntos O, P, Q son colineales.□

25.10 **Teorema** El producto de dos homotecias que tienen el mismo centro, es conmutativo y es una homotecia con el mismo centro y con razón igual al producto de las razones de las homotecias dadas.

25.11 **Teorema** El centro de una homotecia de razón diferente a +1 es el único punto fijo de la homotecia. Las líneas que pasan por el centro son las únicas líneas fijas.

25.12 Los conceptos de *directo* u *opuesto* se aplican a figuras semejantes así como a figuras congruentes. Se deja como ejercicio escribir las definiciones apropiadas.

25.13 **Teorema** Una homotecia es una transformación directa.

25.14 **Teorema** Una homotecia de razón +1 es el mapeo identidad.

25.15 **Teorema** El inverso de la homotecia H(O,k) es la homotecia H(O, 1/k).

25.16 **Teorema** Todas las homotecias y traslaciones forman un grupo de transformaciones.

25.17 **Teorema** Todas las homotecias que tienen el mismo centro forman un grupo de transformaciones.

25. Ejercicios

1. Demuestre el Corolario 25.3.
2. Demuestre el Corolario 25.4.
3. Localice el centro de homotecia y encuentre su razón para dos circunferencias iguales no concéntricas.
4. Demuestre que los centros de homotecias de dos circunferencias están en la línea de los centros de las circunferencias.
5. Demuestre que, como se estableció en la demostración del Teorema 25.6, las intersecciones de las tangentes comunes de dos circunferencias que no se intersecan son sus centros de homotecia.
6. Demuestre que la construcción en la demostración del Teorema 25.6 que se aplica "en todos los casos" ciertamente da los centros de similitud.
7. En la demostración del Teorema 25.8, demuestre que el centro está entre A y A' sii está entre B y B'.
8. En el Teorema 25.9, muestre que P divide OQ en la razón $(j-1)/(j(k-1))$.
9. Utilice el resultado del Ejercicio 25.8 para demostrar que cuando $j \neq 1$ y $k \neq 1$, entonces las homotecias del Teorema 25.9 no conmutan. Ilustre con una figura esta no conmutatividad.
10. Demuestre el Teorema 25.10.
11. Demuestre el Teorema 25.11.
12. El producto $H(B,1/k) \cdot H(A,k)$ es una traslación. ¿Qué traslación?
13. Demuestre el Teorema 25.13.
14. Demuestre el Teorema 25.14.
15. Demuestre el Teorema 25.15.
16. Demuestre el Teorema 25.16.
17. Demuestre el Teorema 25.17.
18. Defina *figuras semejantes directas* y *opuestas*.
19. Muestre que el producto de tres homotecias es una homotecia o una traslación.
20. Generalice el Ejercicio 25.19 a un producto de cuatro o más homotecias.

26.1 **Definición** Una *similitud* es un mapeo del plano que lleva cada par de puntos A, B en un par de puntos A', B', tal que para un número real positivo k, A'B'= k·AB. El número k se llama la *razón* de similitud. El término *semejanza* se utiliza también para este mapeo.

Esta sección completa nuestro estudio de similitudes y sus propiedades, así que rápidamente podemos proceder a las aplicaciones en las Secciones 27 a 29. Aunque la teoría desarrollada aquí no es tan extensa como para isometrías en el Capítulo 2, es bastante suficiente para nuestros propósitos.

26.2 **Teorema** Una similitud de razón 1 es una isometría.

26.3 **Teorema** Una similitud mapea segmentos en segmentos.

Demostración

Consideremos una similitud de razón k que mapee A en A' y B en B'. Tomemos cualquier punto P entre A y B y supongamos que la imagen de P es P'. Entonces

$$A'B' = k\cdot AB = k(AP + PB) = k\cdot AP + k\cdot PB = A'P' + P'B',$$

así que P' está en el segmento A'B'.□

26.4 **Teorema** Una similitud es una transformación del plano.

26.5 **Teorema** Una similitud conserva ángulos.

Demostración

Marquemos puntos B y C en los dos lados del ángulo A para formar un triángulo ABC. Consideremos que la similitud mapea al triángulo ABC en el triángulo A'B'C' por el Teorema 26.3. Entonces

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Así que los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes por *LLL*. Por lo tanto $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ y el teorema se concluye.□

26.6 **Corolario** Una similitud mapea un triángulo en un triángulo semejante. Más generalmente, mapea un polígono en un polígono semejante.

26.7 **Teorema** Una similitud queda determinada por cualesquiera tres puntos no colineales y sus imágenes.

26.8 **Teorema** Existen exactamente dos similitudes, una directa y otra opuesta, que mapean cualquier par de puntos A, B en cualquier otro par de puntos A', B' (entendiéndose que A ≠ B, A' ≠ B', A' es la imagen de A y B' es la imagen de B).

26.9 **Teorema** Toda similitud directa de razón k que no sea una isometría, es producto de una rotación y una homotecia de razón k que tienen el mismo centro. Además, tal producto es conmutativo.

Demostración

Claramente un producto tal, es una similitud directa. Por Teorema 26.8, esta similitud está determinada por un segmento AB y su imagen A'B'. Supongamos que AA' y BB' se cortan en Q, y tracemos las circunferencias por A, B, Q y por A', B', Q que se corten en O, como se muestra en la Fig. 26.9. Entonces tenemos

$$\angle AOB \cong \angle AQB \cong \angle A'QB' \cong \angle A'OB'$$

y

$$\angle BAO \cong \angle BQO \cong \angle B'QO \cong \angle B'A'O$$

por las propiedades de ángulos inscritos en una circunferencia. De donde los triángulos ABO y A'B'O son semejantes. Ahora, si AB se rota alrededor de O mediante un ángulo AOA' a A_1B_1, entonces A_1B_1 es paralelo a A'B' y los triángulos OA_1B_1 y OA'B' son semejantes, así que B_1 está en la línea OB'. Así que la homotecia H(O,k) mapea A_1B_1 en A'B'. Esta rotación y la homotecia satisfacen el teorema. Ahora, si la figura que se forma con O, A_1, B_1, A', B' se rota alrededor de O mediante el ángulo A'OA (el inverso de $\angle$AOA'), entonces A_1B_1 coincide con AB. Se sigue que la homotecia y rotación conmutan.□

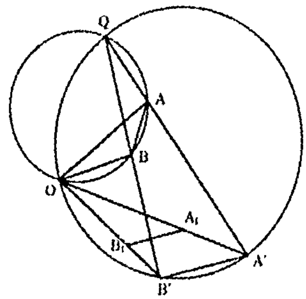


Figura 26.9

26.10 **Teorema** Cualquier similitud opuesta de razón k que no sea una isometría es producto de una reflexión y una homotecia cuyo centro está en el eje de simetría. Además, tal producto es conmutativo.

Construcción

Consideremos la similitud que mapea al segmento AB en CD, y supongamos que las líneas AB y CD se cortan en Q (Fig. 26.10). De las dos bisectrices de los ángulos en Q, llamemos a una *n* tal que σ_n mapee AB en EF donde EF y CD tienen el mismo sentido. Tracemos cualquier otra línea n_1 paralela a (y distinta de) *n*. Reflejemos AB en la línea n_1 a A_1B_1. Supongamos que O_1 sea el centro de la homotecia que mapea A_1B_1 en CD. Tracemos la línea *p* por O_1 perpendicular a *n*. Reflejemos AB en la línea *p* a A''B''. Ahora el centro O de la homotecia que lleva A''B'' a CD está en *p*. Tracemos la línea *m* por O y paralela a *n*, y sea $\sigma_m(AB)$ = A'B'. Entonces *m* es el eje de simetría de la reflexión y O es el centro de homotecia que mapea AB en CD.•

26.9 Teorema Toda similitud directa de razón k que no sea una isometría, es producto de una rotación y una homotecia de razón k que tienen el mismo centro. Además, tal producto es conmutativo.

Demostración

Claramente un producto tal, es una similitud directa. Por Teorema 26.8, esta similitud está determinada por un segmento AB y su imagen A'B'. Supongamos que AA' y BB' se cortan en Q, y tracemos las circunferencias por A, B, Q y por A', B', Q que se corten en O, como se muestra en la Fig. 26.9. Entonces tenemos

$$\angle AOB \cong \angle AQB \cong \angle A'QB' \cong \angle A'OB'$$

y

$$\angle BAO \cong \angle BQO \cong \angle B'QO \cong \angle B'A'O$$

por las propiedades de ángulos inscritos en una circunferencia. De donde los triángulos ABO y A'B'O son semejantes. Ahora, si AB se rota alrededor de O mediante un ángulo AOA' a A_1B_1, entonces A_1B_1 es paralelo a A'B' y los triángulos OA_1B_1 y OA'B' son semejantes, así que B_1 está en la línea OB'. Así que la homotecia H(O,k) mapea A_1B_1 en A'B'. Esta rotación y la homotecia satisfacen el teorema. Ahora, si la figura que se forma con O, A_1, B_1, A', B' se rota alrededor de O mediante el ángulo A'OA (el inverso de $\angle AOA'$), entonces A_1B_1 coincide con AB. Se sigue que la homotecia y rotación conmutan.□

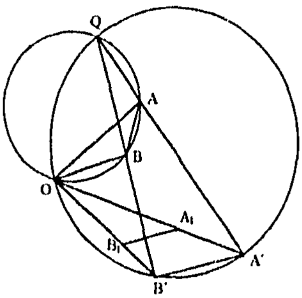


Figura 26.9

26.10 Teorema Cualquier similitud opuesta de razón k que no sea una isometría es producto de una reflexión y una homotecia cuyo centro está en el eje de simetría. Además, tal producto es conmutativo.

Construcción

Consideremos la similitud que mapea al segmento AB en CD, y supongamos que las líneas AB y CD se cortan en Q (Fig. 26.10). De las dos bisectrices de los ángulos en Q, llamemos a una *n* tal que σ_n mapee AB en EF donde EF y CD tienen el mismo sentido. Tracemos cualquier otra línea n_1 paralela a (y distinta de) *n*. Reflejemos AB en la línea n_1 a A_1B_1. Supongamos que O_1 sea el centro de la homotecia que mapea A_1B_1 en CD. Tracemos la línea *p* por O_1 perpendicular a *n*. Reflejemos AB en la línea *p* a A''B''. Ahora el centro O de la homotecia que lleva A''B'' a CD está en *p*. Tracemos la línea *m* por O y paralela a *n*, y sea $\sigma_m(AB)$ = A'B'. Entonces *m* es el eje de simetría de la reflexión y O es el centro de homotecia que mapea AB en CD.•

Demostración

La demostración de la validez de la construcción y de la conmutatividad del producto de estas transformaciones se dejan para que las proporcione el lector.

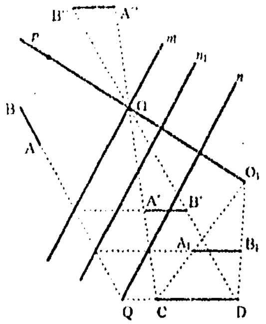


Figura 26.10

Para verificar la construcción, primero mostrar que todos los puntos A_i y A', reflexiones de A en ejes de simetría paralelos a n, están en una línea por A y perpendicular a n. Luego mostrar que todos los centros O_i están en otra línea p perpendicular a n. Mostrar que las reflexiones de AB a A''B'' en p transforman a A''B'' paralelo a CD y en sentido opuesto, tal que el centro O de homotecia que lleva A''B'' a CD está en p. Mostrar que $H(O,-k)\cdot\sigma_p$ mapea AB (en A''B'' y luego) en CD. Mostrar que este mapeo es igual a $H(O,k)\cdot\sigma_n\cdot\sigma_p = H(O,k)\cdot\sigma_m$.

Para establecer la conmutatividad, reflejar la figura formada por O, A'B'y CD en la línea m y considerar su imagen.□

26.11 Teorema Todas las similitudes forman un grupo de transformaciones.

26.12 Teorema Todas las similitudes directas forman un grupo de transformaciones.

26. Ejercicios

1. Demuestre el Teorema 26.2.
2. Demuestre el Teorema 26.4.
3. Demuestre que una similitud mapea circunferencias en circunferencias.
4. Demuestre el Corolario 26.6.
5. Demuestre el Teorema 26.7 como un corolario al Teorema 13.6.
6. Demuestre el Teorema 26.8.
7. a) Discuta el caso cuando las circunferencias en la demostración del Teorema 26.9 son tangentes.
   b) Discuta el caso cuando uno o ambas circunferencias de la demostración del Teorema 26.9 se reducen a una línea recta; esto es, cuando A, B, Q son colineales o cuando A', B', Q son colineales.
8. Demuestre la conmutatividad del Teorema 26.9 como se sugiere en el texto.
9. En una hoja de papel limpia trace los dos segmentos de la Fig. 26.9 etiquetada con AB y A'B'. Reetiquete el primero con BA; esto es, intercambie las etiquetas en sus extremos. Efectúe la construcción del Teorema 26.9 para estos nuevos segmentos.
10. Repita el ejercicio 26.9 para los segmentos AB y CD de la Fig. 26.10 utilizando la construcción del Teorema 26.10.
11. Demuestre la construcción del Teorema 26.10.
12. Demuestre la conmutatividad del Teorema 26.10.
13. Demuestre el Teorema 26.11.
14. Demuestre el Teorema 26.12.
15. En general hay dos homotecias que mapean una circunferencia en otra, y una homotecia es una similitud directa. El Teorema 26.8 establece que hay solamente una similitud directa que mapea un segmento en otro.
    a) Explique esta aparente paradoja.
    b) Encuentre una similitud opuesta que mapee a una circunferencia en otra.
    c) ¿Hay más de dos similitudes directas que mapean una circunferencia en otra? Argumente su respuesta.
    d) ¿Cuántas similitudes opuestas mapean una circunferencia en otra?
    e) En ese mismo sentido, ¿Cuántas similitudes directas y opuestas mapean a un triángulo equilátero en otro? Se puede permitir que el vértice A del triángulo ABC se mapee en cualquiera de los tres vértices del triángulo imagen.
    f) Repita la parte (e) para un cuadrado.
    g) Repita la parte (e) para un rectángulo en general.

27.1 En ésta y en la sección siguiente se presentan aplicaciones de similitudes a geometría de nivel medio. En la Sección 29 se presentan aplicaciones más avanzadas, que son aplicaciones del dominio de nivel superior. Ciertamente muchos de estos teoremas, aún de la Sección 29, son utilizados fácilmente en clases de geometría de nivel medio.

27.2 **Teorema** Tres líneas paralelas cortan segmentos proporcionales de dos transversales.

Demostración

Si las transversales son paralelas, entonces el teorema se sigue inmediatamente ya que los lados opuestos del paralelogramo resultante son congruentes. Así, supongamos que las transversales ABC y A'B'C' se cortan en P (Fig. 27.2). Entonces H(P,PB/PA) mapea al triángulo PAA' en PBB', y H(P,PC/PB) mapea al triángulo PBB' en PCC'. Ahora

$$AB/BC = A'B'/B'C'$$

se sigue de triángulos semejantes.□

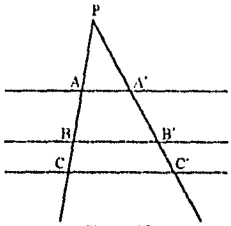


Figura 27.2

27.3 **Corolario** Una línea paralela a un lado de un triángulo corta a los otros dos lados en segmentos proporcionales.

27.4 **Teorema** En el trapecio ABCD con lados paralelos AB y CD, consideremos que las diagonales se cortan en E. Entonces los triángulos ABE y CDE son semejantes.

Demostración

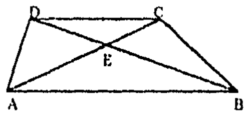


Figura 27.4

Bajo la homotecia H(E,-AE/EC) el punto C se mapea en A; y D se mapea en un punto en EB (Fig. 27.4). Ya que la línea CD se mapea en una paralela a ella que pasa por A, se sigue que D se mapea en B. Por lo tanto la imagen del triángulo CDE es el triángulo ABE, de tal manera que $\Delta ABE \sim \Delta CDE$.□

27.5 **Teorema** Las tangentes internas comunes de dos circunferencias que no se intersecan se cortan en la línea de los centros de las circunferencias.

Demostración

Consideremos que las tangentes TT' y UU' se cortan en C como en la Fig. 27.5. La homotecia $H(C,-CT'/CT)$ mapea una circunferencia en la otra. Por el Teorema 25.5 mapea un centro en el otro. Pero un punto y su imagen son colineales con el centro de homotecia. Y el teorema se sigue.□

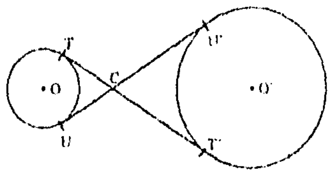


Figura 27.5

27.6 **Teorema** La figura que se forma al unir los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrado, es un cuadrado que tiene área igual a la mitad del cuadrado dado.

Demostración

Consideremos O centro del cuadrado $ABCD$ (Fig. 27.6). Entonces O es el corte de las medianas $A'C'$ y $B'D'$. Ya que las diagonales y también las medianas se cortan en ángulos rectos y son bisecadas por el centro, se sigue que la similitud compuesta de una rotación de 45° y una homotecia de razón OA/OA', ambas con centro O, mapean al cuadrado $ABCD$ en el cuadrilátero $A'B'C'D'$. Ya que $OA/OA' = \sqrt{2}$, el teorema se concluye.□

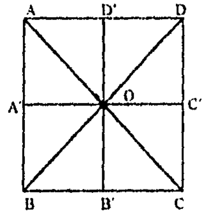


Figura 27.6

27.7 **Problema** Tomemos un punto fijo P en una circunferencia. Encontrar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas PA.

Solución

Todos los puntos medios M están en la imagen homotética de la circunferencia dada bajo la homotecia $H(P,1/2)$ (Fig.27.7). Por lo tanto su lugar geométrico es una circunferencia con radio igual a la mitad del radio de la circunferencia dada, y tangente internamente a ella en P.□

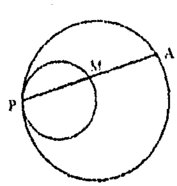


Figura 27.7

27.8 Teorema Si PT es una tangente y PAB una secante desde un punto externo P a una circunferencia, entonces $PA \cdot PB = (PT)^2$.

Demostración

Reflejemos al triángulo PAT en la bisectriz interna del ángulo P, y luego apliquemos la homotecia H(P,PB/PT) al resultado. Entonces PT se mapea en PB y A se mapea en un punto en PT (Fig. 27.8) Ya que ∠PBT y ∠PTA son medidos ambos por la mitad del arco AT, estos ángulos son congruentes. Así la homotecia y reflexión mapean ∠PTA en ∠PBT y se concluye que el triángulo PAT se mapea en el triángulo PTB. Ahora tenemos PA/PT = PT/PB, y se concluye el teorema.□

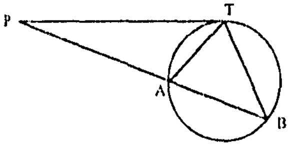


Figura 27.8

27.9 Teorema La altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre los segmentos en que se divide la hipotenusa.

Demostración

Sea CF la altura a la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC como se muestra en la Fig. 27.9. En el triángulo rectángulo ACF, $\angle ACF = 90° - \angle A$. Por lo tanto $\angle ACF = \angle B$. De esta manera, existe una similitud (una rotación de 90° y homotecia con centro F) que mapea al triángulo ACF en el triángulo CBF. Por lo tanto AF/FC = FC/FB, estableciendo el teorema.□

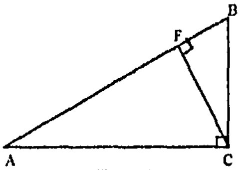


Figura 27.9

27.10 Teorema La longitud de la mediana de un trapecio es igual a la mitad de la suma de las bases del trapecio.

Demostración

Supongamos que M y N son los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio ABCD, así que MN es la mediana. Consideremos que los lados AD y BC se cortan en P (Fig. 27.10). Entonces H(P,PM/PD) mapea la base superior DC en la mediana MN y H(P,PM/PA) mapea a la base AB sobre la mediana MN. Por lo tanto

$$\frac{MN}{DC} = \frac{PM}{PD} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{MN} = \frac{PA}{PM},$$

de lo cual, al escribir la primer ecuación ligeramente diferente y multiplicando las dos ecuaciones lado a lado, obtenemos

$$\frac{MN}{DC}=\frac{PD+DM}{PD}=1+\frac{DM}{PD} \qquad \text{y} \qquad \frac{AB}{DC}=\frac{PA}{PD}=\frac{PD+2DM}{PD}=1+\frac{2DM}{PD}.$$

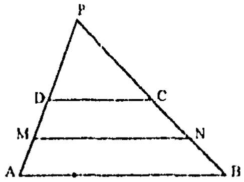


Figura 27.10

Resolviendo cada una de estas ecuaciones para DM/PD, obtenemos

$$\frac{DM}{PD}=\frac{MN}{DC}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{DC}-1\right), \qquad \frac{MN}{DC}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{DC}+1\right),$$

y finalmente,

$$MN=\frac{1}{2}(AB+DC).\square$$

27. Ejercicios

1. Demuestre el Corolario 27.3.
2. Demuestre el Teorema 27.6 al reflejar los triángulos AA'D', BB'A', CC'B' y DD'C' en sus hipotenusas.
3. Desde un punto dado A, trace líneas rectas a los puntos P en un segmento dado BC. Encuentre el lugar geométrico de todos los puntos M que dividen a estos segmentos en una razón dada r.
4. Encuentre la razón de las áreas de los dos triángulos ABE y CDE en el trapecio de la Fig. 27.4.
5. Demuestre que las diagonales de un trapecio se intersecan en un punto que los divide en segmentos proporcionales y encuentre la razón de proporcionalidad.
6. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio tiene longitud (b - s)/2 cuando b y s son las longitudes de las bases mayor y menor, respectivamente.
7. Las cuerdas AB y CD de una circunferencia dada se cortan en el punto E. Encuentre la similitud que mapea al triángulo ACE en el triángulo DBE.
8. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de todos los segmentos trazados a una circunferencia desde un punto fijo P en el plano de la circunferencia.
9. Demuestre que las tangentes externas comunes a dos circunferencias se cortan en la línea de sus centros.
10. Dos circunferencias son tangentes internamente y sus radios están en razón 2:1. Demuestre que una cuerda de la circunferencia más grande, desde su punto de tangencia, es bisecada por la circunferencia más pequeña.
11. Dos circunferencias de radios 3 y 7 son tangentes externamente. Sus tangentes externas comunes se cortan en P. Encuentre la longitud de la tangente desde P a la circunferencia más grande.
12. Dadas PAB y PCD cualesquiera dos secantes desde un punto P externo a una circunferencia, encuentre la similitud que mapea al triángulo PAC sobre el triángulo PDB.
13. Extienda el lado BA del rombo ABCD hasta un punto E. Por E trace una paralela a BC, y por A una paralela a la diagonal BD; considere que estas paralelas se cortan en F. Demuestre que el triángulo EAF es isósceles.
14. Desde un punto P en el cateto AC del triángulo rectángulo ABC trace una perpendicular PQ a la hipotenusa AB. Demuestre que los triángulos APQ y ABC son semejantes. Establezca qué similitud mapea al triángulo APQ en ABC.
15. Trace perpendiculares a los catetos BC y CA en los puntos dados D y F, respectivamente, de un triángulo rectángulo ABC, a los puntos E y G sobre la hipotenusa AB. Demuestre que los triángulos AFG y DBE son semejantes.
16. Las medianas AA' y BB' de un triángulo ABC se cortan en G. Demuestre que los triángulos ABG y A'B'G son semejantes y encuentre su mapeo por similitud.

28.1 **Teorema** Sea A el punto medio del arco CD de una circunferencia dada. Consideremos que la cuerda AB corta a la cuerda CD en M. Entonces AM·AB es independiente de la localización de B en la circunferencia.

Demostración

En la Fig. 28.1 los ángulos ACD y CBA son congruentes, ya que sus medidas son mitades de los arcos congruentes AD y CA. Así que los triángulos AMC y ACB son semejantes, entonces existe una similitud que mapea un triángulo en el otro. Entonces AM/AC = AC/AB y por lo tanto AM·AB = $(AC)^2$, que es constante.□

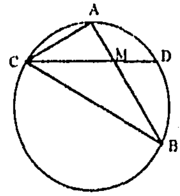


Figura 28.1

28.2 **Teorema** Los triángulos ACD y BCE que se forman con las alturas AD y BE de un triángulo ABC, son semejantes.

Demostración

Ya que estos triángulos rectángulos comparten un ángulo agudo en C (Fig. 28.2), se sigue que hay una similitud (una reflexión en la bisectriz del ángulo C y una homotecia con centro C) que mapea estos triángulos uno sobre el otro.□

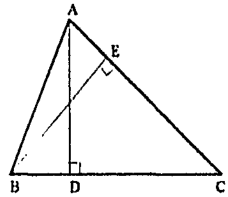


Figura 28.2

28.3 **Problema** Sea P un punto variable en la semicircunferencia de diametro AOB. Supongamos que la perpendicular desde el punto B a la tangente en P corta a la línea AP en el punto X. Encontrar el lugar geométrico de X.

Solución

Ya que OP es perpendicular a la tangente en P, entonces OP y BX son paralelas como se muestra en la Fig. 28.3. Por lo tanto H(A,2) mapea OP en BX. Luego el lugar geométrico de X es la imagen homotética de la semicircunferencia en la que está P, una semicircunferencia con centro B y radio BA. □

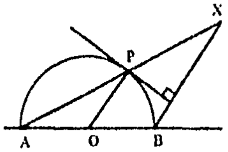


Figura 28.3

28.4 Teorema Consideremos las perpendiculares levantadas en puntos arbitrarios, sobre los lados del triángulo ABC, que se corten en pares de puntos P, Q, R. Entonces el triángulo PQR es semejante al triángulo dado.

Demostración

Ver Fig. 28.4. Una rotación de 90° del triángulo ABC en el triángulo A'B'C' deja los lados del triángulo A'B'C' paralelos a los lados correspondientes del triángulo PQR. Por Teorema 25.7, mediante una homotecia apropiada se mapea al triángulo A'B'C'en el triángulo PQR. Y el teorema se sigue.□

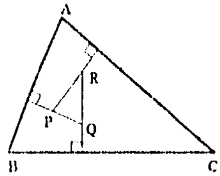


Figura 28.4

28.5 Teorema Sean AB, CD y EF cada una perpendicular a BD tal que AD y BC se corten en E, y los puntos A y C estén en el mismo lado de BD. Entonces EF es igual a la mitad de la media armónica de AB y CD.

Demostración

Recordar que la media armónica de a y b es $2ab/(a+b)$. Sea AB = a, CD = b, EF = x, BF = u y FD = v (Fig. 28.5). Entonces H(B,$u/(u+v)$) mapea al triángulo BCD en BEF, así $x/b = u/(u+v)$. También H(D,$v/(u+v)$) mapea al triángulo DAB en DEF, de tal modo que $x/a = v/(u+v)$. Entonces tenemos

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{v}{u+v}+\frac{u}{u+v}=1 \qquad \text{y} \qquad x=\frac{ab}{a+b},$$

así que EF es la mitad de la media armónica de AB y CD.□

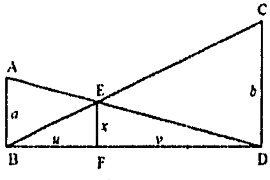


Figura 28.5

28.6 Teorema La bisectriz de un ángulo interno de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.

Demostración

Supongamos que AU biseca al ángulo A del triángulo ABC (Ver Fig. 28.6). Sea H(B,BC/BU) que mapee al triángulo BAU en el triángulo BPC. Entonces ∠BAU ≅ ∠APC. Se sigue también que BU/UC = BA/AP. Además, ya que AU es paralelo a PC, entonces

$$\angle PCA \cong \angle CAU \cong \angle BAU \cong \angle APC,$$

así que el triángulo APC es isósceles y AP ≅ AC. Por lo tanto BU/UC = BA/AC.□

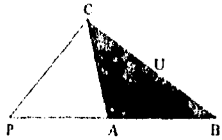


Figura 28.6

28.7 Teorema Considerando que las mediatrices de los lados de un triángulo concurren, entonces sus alturas también concurren.

Demostración

Supongamos que H(G,−2) mapea al triángulo ABC en el triángulo $A_1B_1C_1$ (Fig. 28.7). Entonces los vértices A, B, C se convierten en los puntos medios de los lados del triángulo $A_1B_1C_1$, y puesto que los lados correspondientes son paralelos, las alturas AD, BE, CF se convierten en mediatrices de los lados del triángulo $A_1B_1C_1$. El teorema se concluye, ya que hemos supuesto que las mediatrices de los lados de un triángulo concurren.□

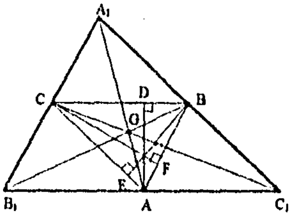


Figura 28.7

28.8 Comparar la prueba del Teorema 28.7 con el Corolario 20.8.

28.9 El método de homotecias es bastante útil para construcciones. El principio básico se ilustra en los dos artículos que siguen. En cada caso no es posible satisfacer inmediatamente todas las condiciones requeridas. Así que resolveremos el problema parcialmente al omitir una de las condiciones. Luego que una homotecia mapee la solución parcial para la solución completa. Uno recuerda el gambito en ajedrez, donde un jugador da una pieza a su oponente para obtener una posición de ganador.

28.10 Problema Localice puntos D y E en AB y AC de un triángulo dado ABC tal que BD ≅ DE ≅ EC.

Solución

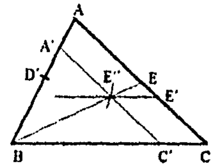


Figura 28.10

Escojamos arbitrariamente puntos D' y E' en los lados AB y AC (Fig. 28.10) tal que BD' ≅ E'C. [Aquí consideramos la condición que D'E' será congruente a las otras dos longitudes.] Supongamos que la circunferencia D'(B) corte en E'' dentro del triángulo a la paralela a BC que pasa por E'. Tracemos A'C' por E'' y paralela a AC. Observemos que los triángulos ABC y A'BC' son semejantes y que el problema está resuelto para el triángulo A'BC'. [Hemos recuperado la condición BD' ≅ D'E'' ≅ E''C'a reserva de la medida del triángulo.] La homotecia H(B,BC/BC') mapea esta solución sobre el triángulo ABC. Con este mapeo se logra encontrar uno de los puntos deseados E en AC, al trazar y prolongar BE'.□

28.11 Problema Inscribir un cuadrado en una semicircunferencia dada.

Solución

En el problema resuelto, claramente el centro O de la semicircunferencia es el punto medio de un lado del cuadrado. Conservemos esta condición y temporalmente tengamos a la vista la condición que dos vértices deberán estar en la semicircunferencia. En el diámetro AOB de la semicircunferencia, construyamos algún cuadrado conveniente P'Q'R'S' con O el punto medio del lado P'Q' que está en AB (Fig. 28.11). Ahora, con O como centro, proyectemos los vértices R' y S' sobre la semicircunferencia a los puntos deseados R y S. Los otros dos vértices P y Q son simplemente los piés de las perpendiculares a AB desde S y R.□

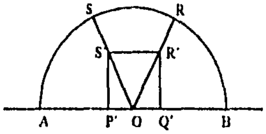


Figura 28.11

28.12 Compare la construcción del Problema 28.11 con la del Problema 8.13.

28. Ejercicios

1. La cuerda AB es congruente al radio de una circunferencia dada con centro O, OM es perpendicular a AB en M, y D es el pié de la perpendicular trazada desde M a OA. Encuentre el área del triángulo MDA.
2. En una circunferencia las cuerdas AB y AC son congruentes. La cuerda AD corta al segmento BC en E. Demuestre que los triángulos ABD y AEB son semejantes.
3. Tres circunferencias con centros A, B, C pasan por O. Están trazados los diámetros OAA', OBB', OCC'. Demuestre que los lados del triángulo A'B'C' pasan por los otros puntos de intersección de las circunferencias.
4. Las longitudes de las bases de un trapecio son b y s. Encuentre la razón en la cual divide a la altura del trapecio un segmento de línea MN que es paralelo a las bases, sus extremos están en los lados no paralelos del trapecio y tiene longitud m.
5. Tome cualquier punto F en el lado AB del paralelogramo ABCD y suponga que DF corta a la diagonal AC en E y al lado CB (extendido) en G. Demuestre que $(DE)^2 = EF \cdot EG$.
6. Demuestre que el ángulo entre la base de un triángulo isósceles y la altura a uno de los lados congruentes es congruente a la mitad del ángulo del vértice.
7. En el triángulo isósceles ABC con AB ≅ AC, considere que la altura desde B corta a la perpendicular a BC en C en un punto D. Tome el punto E en BD tal que DE ≅ EC. Demuestre que los triángulos ABC y ECD son semejantes.
8. Tome los puntos X y Y en los lados AB y AC del triángulo ABC tal que XY sea paralelo a BC. Desde el punto medio A' del lado BC trace la línea A'X que corte a CA en M, y la línea A'Y que corte a BA en N. Demuestre que MN es paralelo a BC.
9. Demuestre que la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo divide externamente al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.
10. Tome los puntos D, E, F en los lados BC, CA, AB del triángulo equilátero ABC tal que BD ≅ CE ≅ AF. Demuestre que el triángulo DEF es equilátero.
11. En al triángulo ABC, $\angle A \cong \angle B \cong 2\angle C$ y AU es la bisectriz del ángulo A. Demuestre que $(AB)^2 = BU \cdot BC$.
12. Construya un triángulo ABC dadas las medidas de $\angle A$, $a + c$ y $a + b$.
13. Construya un cuadrado tal que un lado esté sobre la línea base BC que es lado del triángulo dado ABC y sus otros dos vértices estén en los rayos BA y CA fuera del triángulo.
14. En un triángulo dado inscriba un triángulo homotético a otro triángulo dado.
15. En un triángulo dado inscriba un paralelogramo homotético a un paralelogramo dado.
16. Inscriba un cuadrado en un sector circular dado.
17. Inscriba un cuadrado en un triángulo dado.
18. Inscriba un rectángulo semejante a un rectángulo dado:
    a) En una circunferencia dada.
    b) En una semicircunferencia dada.
    c) En un triángulo dado.
    d) En un cuadrado dado tal que un vértice del rectángulo esté en cada lado del cuadrado.

homotecia H(B,BC/BC') mapea esta solución sobre el triángulo ABC. Con este mapeo se logra encontrar uno de los puntos deseados E en AC, al trazar y prolongar BE'.□

28.11 **Problema** Inscribir un cuadrado en una semicircunferencia dada.

Solución

En el problema resuelto, claramente el centro O de la semicircunferencia es el punto medio de un lado del cuadrado. Conservemos esta condición y temporalmente tengamos a la vista la condición que dos vértices deberán estar en la semicircunferencia. En el diámetro AOB de la semicircunferencia, construyamos algún cuadrado conveniente P'Q'R'S' con O el punto medio del lado P'Q' que está en AB (Fig. 28.11). Ahora, con O como centro, proyectemos los vértices R' y S' sobre la semicircunferencia a los puntos deseados R y S. Los otros dos vértices P y Q son simplemente los piés de las perpendiculares a AB desde S y R.□

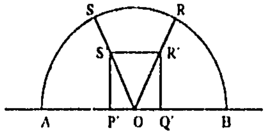


Figura 28.11

28.12 Compare la construcción del Problema 28.11 con la del Problema 8.13.

28. Ejercicios

1. La cuerda AB es congruente al radio de una circunferencia dada con centro O, OM es perpendicular a AB en M, y D es el pié de la perpendicular trazada desde M a OA. Encuentre el área del triángulo MDA.
2. En una circunferencia las cuerdas AB y AC son congruentes. La cuerda AD corta al segmento BC en E. Demuestre que los triángulos ABD y AEB son semejantes.
3. Tres circunferencias con centros A, B, C pasan por O. Están trazados los diámetros OAA', OBB', OCC'. Demuestre que los lados del triángulo A'B'C' pasan por los otros puntos de intersección de las circunferencias.
4. Las longitudes de las bases de un trapecio son b y s. Encuentre la razón en la cual divide a la altura del trapecio un segmento de línea MN que es paralelo a las bases, sus extremos están en los lados no paralelos del trapecio y tiene longitud m.
5. Tome cualquier punto F en el lado AB del paralelogramo ABCD y suponga que DF corta a la diagonal AC en E y al lado CB (extendido) en G. Demuestre que $(DE)^2 = EF \cdot EG$.
6. Demuestre que el ángulo entre la base de un triángulo isósceles y la altura a uno de los lados congruentes es congruente a la mitad del ángulo del vértice.
7. En el triángulo isósceles ABC con AB ≅ AC, considere que la altura desde B corta a la perpendicular a BC en C en un punto D. Tome el punto E en BD tal que DE ≅ EC. Demuestre que los triángulos ABC y ECD son semejantes.
8. Tome los puntos X y Y en los lados AB y AC del triángulo ABC tal que XY sea paralelo a BC. Desde el punto medio A' del lado BC trace la línea A'X que corte a CA en M, y la línea A'Y que corte a BA en N. Demuestre que MN es paralelo a BC.
9. Demuestre que la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo divide externamente al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.
10. Tome los puntos D, E, F en los lados BC, CA, AB del triángulo equilátero ABC tal que BD ≅ CE ≅ AF. Demuestre que el triángulo DEF es equilátero.
11. En el triángulo ABC, $\angle A \cong \angle B \cong 2\angle C$ y AU es la bisectriz del ángulo A. Demuestre que $(AB)^2 = BU \cdot BC$.
12. Construya un triángulo ABC dadas las medidas de $\angle A$, $a + c$ y $a + b$.
13. Construya un cuadrado tal que un lado esté sobre la línea base BC que es lado del triángulo dado ABC y sus otros dos vértices estén en los rayos BA y CA fuera del triángulo.
14. En un triángulo dado inscriba un triángulo homotético a otro triángulo dado.
15. En un triángulo dado inscriba un pararelogramo homotético a un paralelogramo dado.
16. Inscriba un cuadrado en un sector circular dado.
17. Inscriba un cuadrado en un triángulo dado.
18. Inscriba un rectángulo semejante a un rectángulo dado:
    a) En una circunferencia dada.
    b) En una semicircunferencia dada.
    c) En un triángulo dado.
    d) En un cuadrado dado tal que un vértice del rectángulo esté en cada lado del cuadrado.

29.1 **Teorema** Las medianas de un triángulo concurren.

Demostración

Como el triángulo medial A'B'C' tiene lados paralelos a los del triángulo dado ABC, hay una homotecia que mapea un triángulo en el otro. El centro de la homotecia es el punto de concurrencia de las líneas que unen vértices correspondientes, esto es, las medianas del triángulo ABC.□

29.2 **Teorema** El ortocentro H, el circuncentro O y el centroide G de un triángulo están en una línea que se llama *línea de Euler* del triángulo; y HG = 2GO

Demostración

En el Teorema 28.7 se demostró que $H(G,-\frac{1}{2})$ mapea al triángulo ABC y su ortocentro H en el triángulo A'B'C' y su ortocentro que es el circuncentro O para el triángulo ABC. Por lo tanto el teorema es válido.□

29.3 **Corolario** La distancia desde el circuncentro a un lado de un triángulo es la mitad de la distancia desde el ortocentro al vértice opuesto.

29.4 **Teorema** *El teorema de la circunferencia de los nueve puntos.* Los puntos medios A', B', C' de los lados, los piés de las alturas D, E, F; y los puntos medios N_a, N_b, N_c de los segmentos que unen al otrocentro H con los vértices del triángulo ABC, están todos en una circunferencia cuyo centro N es el punto medio del segmento de Euler HO.

Demostración

Demostraremos que la homotecia H(H,2) mapea los nueve puntos listados, sobre la circuncircunferencia, de lo cual se sigue el teorema (Fig. 29.4).

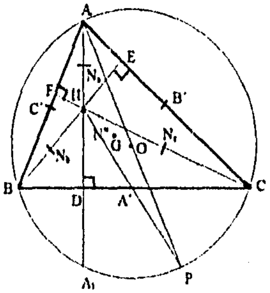


Figura 29.4

Consideremos que el diámetro AO corta otra vez a la circunferencia en P. Entonces ∠ABP = ∠ACP = 90°, ya que cada ángulo está inscrito en una semicircunferencia. Ahora PC y BE son perpendiculares ambos a AC; y BP y FC son ambos perpendiculares a AB. Así BPCH es un paralelogramo, así, sus diagonales se bisecan mutuamente; esto es, HP pasa por A' y HP = 2HA'. Por lo tanto la homotecia H(H,2) mapea A' en P en la semicircunferencia. Análogamente B' y C' también son mapeados sobre la circuncircunferencia por H(H,2).

La altura AD corta de nuevo a la circuncircunferencia en A_1. Entonces

$$\angle A_1CB = \angle A_1AB = 90° - \angle ABC = \angle BCF,$$

ya que los primeros dos ángulos son inscritos en un arco BA_1 y en las últimas igualdades se ve de los triángulos rectángulos BAD y BCF. Como CD es perpendicular a HA_1 y $\angle A_1CD \cong \angle DCH$, el triángulo CHA_1 es isósceles, así su altura CD biseca a su base HA_1. Por lo tanto H(H,2) mapea D en A_1. Análogamente los otros piés E y F de las alturas del triángulo ABC son mapeados en la circuncircunferencia por H(H,2).

Claramente H(H,2) mapea N_a, N_b, N_c sobre A, B, C en la circuncircunferencia. Por lo tanto los nueve puntos A', B', C', D, E, F, N_a, N_b, N_c están todos en una circunferencia con mitad la medida de la circuncircunferencia, y con centro de homotecia H. Así H(H,2) también mapea el centro N de esta circunferencia de los nueve puntos en el centro O de la circuncircunferencia. Esto es, N está a la mitad entre H y O.□

29.5 **Teorema** La altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes.

Demostración

Sea CF la altura a la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC. Como los triángulos ACF y CBF son semejantes (Ver Fig. 27.9), entonces

$$\frac{AC}{AF} = \frac{CB}{CF} \qquad \text{y} \qquad \frac{AC}{CF} = \frac{CB}{BF}.$$

Al multiplicar estas ecuaciones lado a lado, obtenemos

$$\frac{AC^2}{AF} = \frac{CB^2}{BF}.□$$

29.6 **Problema** Construir un triángulo rectángulo, dado su perímetro y la razón de los cuadrados de sus catetos.

Solución

Supongamos que p simboliza el perímetro y m/n la razón dada como se muestra en la Fig. 29.6a. En una línea base marquemos los segmentos $A'F' = m$ y $F'B' = n$. Tracemos una semicircunferencia cuyo centro sea O en A'B' como diámetro (Fig. 29.6b). Consideremos que la perpendicular a A'B' en F' corta a la semicircunferencia en C'. Así, el triángulo A'B'C' es semejante al triángulo deseado, por Teorema 29.5. En la tangente a la semicircunferencia en B', marquemos B'P' igual al prerímetro del triángulo A'B'C' y también $B'Q = p$. Sea que la perpendicular a B'Q en Q corte OP' en P. La paralela a B'P' por P corta a la línea A'B' en B. Los puntos A y C se localizan homotéticos a A' y C' con centro O y en la circunferencia O(B). La prueba de la construcción se deja como ejercicio.□

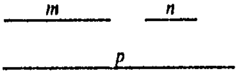


Figura 29.6a

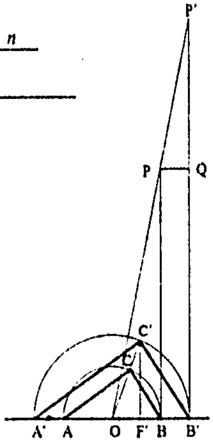


Figura 29.6b

29.7 Problema Construir un triángulo dados sus ángulos y su área m^2.

Solución

Dados sus ángulos, podemos construir un triángulo semejante A'B'C' y su altura A'D' con longitud m, como se muestra en la Fig. 29.7a. Ahora $\frac{1}{2}$BC·AD = m^2, así m es la media proporcional entre $\frac{1}{2}$BC y AD. Construir la media proporcional m' entre $\frac{1}{2}$B'C' y A'D' en un segmento de línea P'Q'R', donde P'Q' ≅ $\frac{1}{2}$B'C' y Q'R' ≅ A'D' (Fig. 29.7b). Trazar la semicircunferencia que tiene centro O en P'R' como diámetro. Consideremos que la semicircunferencia anterior corta a la perpendicular a P'R' desde Q' en S'. Entonces Q'S' es la media proporcional m' entre $\frac{1}{2}$B'C' y A'D'. Localizar S en OS' tal que QS = m y QS sea perpendicular a P'R' en Q. Entonces QS y Q'S' son homotéticos con centro O. La circunferencia con centro O y radio OS corta a la línea P'R' en los puntos P y R tal que PQ ≅ $\frac{1}{2}$BC y QR ≅ AD. El triángulo deseado se construye fácilmente al marcar A en A'D' tal que AD' ≅ QR. Entonces AB y AC se trazan paralelas a A'B' y A'C'.□

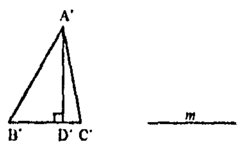


Figura 29.7a

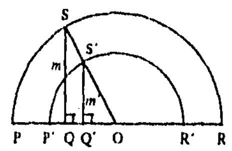


Figura 29.7b

29.8 Problema Por un punto dado P trazar una línea que pase por el punto de intersección inaccesible de dos líneas dadas m y n.

Solución

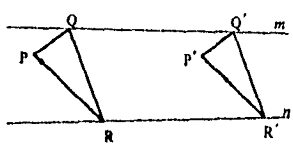


Figura 29.8

Trazar dos líneas PQ y PR por P tal que Q esté en m y R en n, como se muestra en la Fig. 29.8. Ahora trazar Q'R' de m a n paralela a QR. Trazar líneas paralelas a PQ y PR por Q' y R' que se corten en P'. Entonces los triángulos PQR y P'Q'R' son homotéticos, así que la línea PP' pasa por el punto de intersección de QQ' y RR'.□

29. Ejercicios

1. En el triángulo ABC, muestre que G y H dividen a NO en la misma razón interna y externamente, razónes ½ y -½.
2. En el triángulo ABC, muestre que H(G, -2) mapea también a la circunferencia de los nueve puntos en el circuncírculo, por lo tanto H y G son los dos centros de homotecia para estas circunferencias.
3. Demuestre que las cuatro líneas de Euler de los cuatro triángulos de un cuadrángulo ortocéntrico ABCH son concurrentes. Encuentre sus puntos de concurrencia.
4. Demuestre el Corolario 29.3.
5. Demuestre la construcción del Problema 29.6.

6. Demuestre la construcción del Problema 29.7.
7. Por uno de los dos puntos de intersección de dos circunferencias, trace una línea en la cual las dos circunferencias intersequen cuerdas congruentes (pero no la cuerda común de las dos circunferencias).
8. Por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias trace una línea en la cual las dos circunferencias intercequen cuerdas que tengan una razón dada r.
9. Dadas tres circunferencias concéntricas, trace una secante tal que el segmento entre la primera y la segunda circunferencia sea congruente al de entre la segunda y la tercer circunferencia.
10. Construya un triángulo, dado un ángulo, la longitud de la bisectriz de este ángulo y la razón de los dos segmentos en el cual esta bisectriz divide al lado opuesto.
11. Construya un trapecio dados los lados no paralelos, el ángulo entre ellos y la razón de los lados paralelos.
12. Construya un cuadrado dados la suma de su lado y diagonal.
13. Construya un triángulo rectángulo, dado el perímetro y la razón de sus catetos.
14. Demuestre que los cuatro centroides de un cuadrángulo ortocéntrico forman un cuadrángulo ortocéntrico homotético al dado.
15. Demuestre que la circunferencia de los nueve puntos de un cuadrángulo ortocéntrico es concéntrica con la del cuadrángulo ortocéntrico formado con los cuatro centroides.
16. Demuestre que los cuatro puntos de un cuadrángulo ortocéntrico son los centroides de otro cuadrángulo ortocéntrico homotético.[Este es el inverso del ejercicio 29.14]
17. Los circuncentros y los centroides de un cuadrángulo ortocéntrico forman dos cuadrangulos ortocéntricos que tienen el mismo centro de los nueve puntos, el centro de similitud de estos cuadrángulos. Demuestre este teorema y encuentre la razón de similitud.
18. Demuestre que el ortocentro del triángulo formado por los centroides de los triángulos HBC, HCA, HAB (H es el ortocentro del triángulo ABC) es el centroide del triángulo ABC.
19. Demuestre que el lugar geométrico del tercer vértice de todos los triángulos semejantes a un triángulo dado y que tienen el primer vértice en un punto fijo y el segundo vértice en una línea recta, es una línea recta.
20. Si el segundo vértice del triángulo del ejercicio 29.19 se encuentra en una circunferencia en vez de en una línea recta, demuestre que el lugar geométrico del tercer vértice es una circunferencia homotética.
21. Construya un triángulo semejante a un triángulo dado, que tiene un vértice en un punto fijo y los otros dos vértices se encuentren en dos líneas fijas.
22. Construya un triángulo semejante a un triángulo dado que tiene sus tres vértices en tres líneas dadas.
23. Demuestre que la mediana AA' y el segmento B'C' que une los puntos medios de los lados CA y AB de un triángulo ABC se bisecan mutuamente.
24. Encuentre el lugar geométrico del centroide de un triángulo que tiene un lado y el circuncírculo fijo.
25. Demuestre que el producto de dos lados de un triángulo es igual al producto del circundiámetro y la altura del tercer lado. [Este es el Teorema 6.20.]

30.1 **Teorema** La homotecia H(O,k) con centro el origen O(0,0) está determinada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases}$$

Demostración

Claramente las ecuaciones indicadas multiplican cada distancia desde el origen por el factor $|k|$.□

30.2 Trasladando desde un punto $P(a,b)$ al origen aplicando la homotecia H(O,k), luego trasladando P hacia atrás de regreso, obtenemos las ecuaciones para una homotecia con razón k y centro P:

$$\begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = k(y - b) + b, \end{cases}$$

que se reducen a las que se indican en el Teorema 30.3.

30.3 **Teorema** Una homotecia H(P,k) con centro en el punto $P(a,b)$ tiene la representación analítica

$$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b, \end{cases}$$

que es una homotecia con centro en el origen seguido por una traslación.

30.4 Vemos que cada homotecia se puede escribir como una homotecia con centro en el origen seguida por una traslación. Observe también que, cuando k se factoriza en cada lado derecho, la homotecia se puede escribir como una traslación seguida por una homotecia con centro en el origen:

30.5 **Teorema** Una homotecia H(P,k) con centro en el punto $P(a,b)$ tiene la representación analítica

$$\begin{cases} x' = k(x + a/k - a) \\ y' = k(y + b/k - b), \end{cases}$$

que es una traslación seguida por una homotecia con centro en el origen.

Por el Ejercicio 22.14, toda isometría tiene una ecuación de la forma

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = \pm(bx + ay) + d \end{cases} \qquad \text{donde } a^2 + b^2 = 1,$$

directa si es válido el signo más y opuesta si es el signo menos. Entonces, toda similitud que sea producto de una homotecia y una isometría, se puede escribir en la forma siguiente.

30.6 **Teorema** Toda similitud se puede escribir analíticamente en la forma

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = \pm(bx + ay) + d, \end{cases}$$

donde $(a^2 + b^2)^{1/2} = k$, la razón de la homotecia. Es directa para el signo más y opuesta para el signo menos.

30.7 **Teorema** Todo conjunto de ecuaciones de la forma dada en el Teorema 30.6 representa una similitud, siempre que $a^2 + b^2 \neq 0$.

30.8 Ejemplo Encontrar ecuaciones para las dos similitudes que mapean el segmento OA en el segmento BC donde O(0,0), A(1,0), B(2,3) y C(5,7). Por la isometría directa como se escribió en el Teorema 30.6, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{matrix} 2 = c \\ 3 = d \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} 5 = a + c \\ 7 = b + d, \end{matrix}$$

que produce

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 2 \\ y' = 4x + 3y + 3. \end{cases}$$

Para la isometría opuesta del Teorema 30.6, tenemos

$$\begin{matrix} 2 = c \\ 3 = d \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} 5 = a + c \\ 7 = -b + d, \end{matrix}$$

que produce

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2 \\ y' = 4x - 3y + 3. \end{cases}$$

30. Ejercicios

1. Demuestre el Teorema 30.1.
2. Muestre algebraicamente la equivalencia de las formas de los Teoremas 30.3 y 30.5.
3. Muestre geométricamente la equivalencia de las formas de los Teoremas 30.3 y 30.5.
4. Demuestre el Teorema 30.6.
5. Demuestre el Teorema 30.7.
6. Encuentre el valor de la razón k en las similitudes del Ejemplo 30.8.
7. Encuentre el ángulo de rotación para cada una de las similitudes del Ejemplo 30.8.
8. Escriba analíticamente las similitudes del Teorema 30.6 como productos de (1) una homotecia con centro el origen, (2) una rotación alrededor del origen, (3) una reflexión si es posible, y (4) una traslación.
9. Muestre que el producto de dos similitudes de las formas dadas en el Teorema 30.6 es otra similitud de la misma forma.
10. Encuentre la similitud directa que mapea al segmento AB en el segmento A'B' donde estos cuatro puntos tienen las coordenadas:
    a) A(1,0), B(2,0), A'(1,0), B'(2,0)
    b) A(1,0), B(2,0), A'(2,0), B'(1,0)
    c) A(1,0), B(2,3), A'(-1,2), B'(-3,-3)
    d) A(1,0), B(2,3), A'(-3,-3), B'(-1,2)
11. Encuentre la similitud opuesta que mapea a cada segmento AB en A'B' para los conjuntos de puntos dados en el ejercicio 30.10.
12. Encuentre ecuaciones para la similitud que lleva al triángulo ABC, donde A(0,0), B(1,0) y C(0,2) en el triángulo A'B'C', donde
    a) A'(3,0), B'(3,2), C'(7,0)
    b) A'($^9/_2$,4), B'(4,4), C'($^9/_2$,5)
    c) A'(0,0), B'(3,0), C'(0,6)
    d) A'(-3,-2), B'(-4,-2), C'(-3,-4)
    e) A'(-5,5), B'(-6,$^7/_2$), C'(-2,3)

Los Axiomas (Nociones Comunes)

1. Cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Cuando iguales se agregan a iguales, entonces las sumas son iguales.
3. Cuando iguales se restan de iguales, entonces las diferencias son iguales.
4. Cosas que coinciden una a otra son iguales.
5. El total es mayor que cualquiera de sus partes.

Los Postulados

1. Se puede trazar un segmento de línea entre cualesquiera dos puntos.
2. Se puede extender indefinidamente un segmento de línea.
3. Se puede trazar una circunferencia teniendo cualquier punto como centro y que pase por cualquier otro punto.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.
5. Si una transversal corta a dos líneas tal que la suma de los dos ángulos interiores en un lado de la transversal es menor que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas se cortan en ese mismo lado.

Selección de las 48 Proposiciones del Libro I

1. Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado.
2. Construir un segmento congruente a un segmento dado desde un punto dado como un punto extremo.
3. Cortar de un segmento dado un segmento congruente a un segmento más pequeño dado.
4. Dos triángulos que satisfacen la condición *LAL son congruentes.*
5. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.
6. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.
7. En un lado de un segmento congruente a la base de un triángulo dado, únicamente se puede construir un triángulo directamente congruente al triángulo dado.
8. Dos triángulos que satisfacen la condición *LLL* son congruentes.
9. Bisecar un ángulo dado.
10. Bisecar un segmento dado.
11. Levantar una perpendicular en un punto dado en una línea.
12. Desde un punto dado trazar una perpendicular a una línea dada.
13. Si sale un rayo desde un punto de una línea, entonces los dos ángulos formados del mismo lado de la línea son rectos o tienen suma igual a dos rectos.
14. Si de un punto salen dos rayos en direcciones opuestas y sus ángulos adyacentes miden dos ángulos rectos, entonces tales rayos están en una línea.
15. Los ángulos opuestos por el vértice, formados por la intersección de dos líneas, son congruentes.
16. Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo interior y opuesto.
17. La suma de cualesquiera dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.
18. En un triángulo el lado mayor es opuesto al ángulo mayor.
19. En un triángulo el ángulo mayor es opuesto al lado mayor.
20. En un triángulo la suma de cualesquiera dos lados es mayor que el tercer lado.
22. Con tres segmentos dados construir un triángulo.
23. En un punto dado sobre una línea construir un ángulo congruente a un ángulo dado.
24. Si dos lados de un triángulo son respectivamente congruentes a dos lados de otro triángulo, y el ángulo comprendido entre los dos lados del primer triángulo es mayor que el del segundo, entonces el lado opuesto del primero es mayor que el del segundo.
25. Si dos triángulos tienen dos lados congruentes a dos lados respectivamente, pero el tercer lado del primero es mayor que el del segundo, entonces el ángulo del primero que está entre los dos lados es mayor que el del segundo.
26. Dos triángulos que satisfacen la condición *ALA* o la condición *AAL* son congruentes.

27. Si una transversal corta dos líneas tal que los ángulos interiores y alternos son congruentes, entonces las dos líneas son paralelas.
29. Una transversal que corta líneas paralelas, forma ángulos alternos congruentes y ángulos correspondientes congruentes.
30. El paralelismo de líneas es transitivo.
31. Por un punto dado fuera de una línea dada, trazar una línea paralela a la línea dada.
32. Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.
33. Los segmentos que unen puntos extremos correspondientes de dos segmentos pararelos congruentes igualmente dirigidos, son congruentes y paralelos.
34. Los lados opuestos y ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, y cada diagonal biseca el área.
36. Los paralelogramos en bases congruentes y dentro de las mismas paralelas tienen áreas iguales.
38. Los triángulos en bases congruentes y alturas congruentes, tienen áreas iguales.
40. Triángulos de áreas iguales en bases congruentes y sobre el mismo lado de la línea base, están también dentro de las mismas paralelas.
41. Si un paralelogramo tiene la misma base y está entre las mismas paralelas que un triángulo, entonces el paralelogramo tiene doble área que la del triángulo.
46. Trazar un cuadrado sobre un segmento dado.
47. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
48. Si el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo con el ángulo recto opuesto al primer lado.

B.1 **Notación** Simbolizaremos una circunferencia con centro A y radio $r = m(CD)$ por A(r) o A(CD). La circunferencia con centro A que pasa por el punto B se simbolizará con A(B). A menos que se establezca de otra manera, en este apéndice r y s simbolizarán longitudes arbitrarias convenientes.

B.2 Las construcciones que aparecen aquí, no pretende que formen una relación exhaustiva. Son construcciones básicas que todo estudiante serio de geometría deberá tener disponible cuando lo necesite. Se le sugiere que practique estas construcciones, guardando en mente que se requiere precisión. Los lápices que se utilicen deberán estar perfectamente afilados y nunca usar borrador. Asegúrese que sus líneas y círculos pasen precisamente por los puntos que se quiere, no aproximados a ellos. *Nunca* ponga mancha grande para indicar el lugar del punto! Si es necesario, trace una pequeña flecha dirigida hacia el punto, pero no borre o cubra. Observe que estas técnicas se siguen en las construcciones de abajo, imítelos. Asegúrese que sus construcciones sean exactas, cheque sus ángulos con un transportador y mida sus distancias con una regla.

B.3 **Construcción** Trazar un triángulo ABC dadas las longitudes de sus tres lados a, b, c.

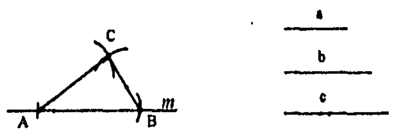


Figura B.3

Desde un punto A en una línea m tracemos una circunferencia A(c) que corte a la línea m en un punto B. Luego trace las circunferencias A(b) y B(a) que se corten en C (Ver Fig. B.3).

B.4 **Construcción** Trazar un ángulo C'A'B' congruente a un ángulo dado CAB en un punto A' en una línea dada m.

Tracemos la circunferencia A(r) que corte AB en D y AC en E; y la circunferencia A'(r) que corte a la línea m en B' (Ver Fig. B.4). Tracemos la circunferencia B'(DE) que corte a la circunferencia A'(r) en C'.

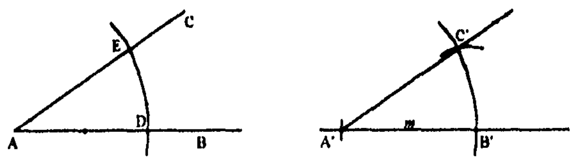


Figura B.4

B.5 **Construcción** Bisecar un ángulo dado CAB.

Tracemos la circunferencia A(r) que corte AB en D y AC en E. Tracemos las circunferencias D(s) y E(s) que se corten en T. Entonces AT es la bisectriz deseada.

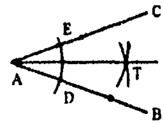


Figura B.5

B.6 **Construcción** Bisecar un segmento dado AB o bien levantar su mediatriz.

Tracemos las circunferencias A(r) y B(r) que se corten en C y D con $r > \frac{1}{2}$AB. Entonces CD es la mediatriz del segmento AB que corta AB en el punto medio M (Ver Fig. B.6).

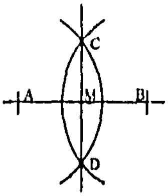


Figura B.6

B.7 **Construcción** Trazar una perpendicular desde un punto P dado fuera de una línea dada m.

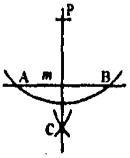


Figura B.7

Tracemos la circunferencia P(r) que corte a la línea m en dos puntos A y B. Tracemos las circunferencias A(s) y B(s) que se corten en C como en la Fig. B.7. Entonces la línea PC es la perpendicular deseada

B.8 **Construcción** Levantar una perpendicular en un punto P sobre una línea dada m.

Primer método. Tracemos la circunferencia P(r) que corte a m en A y B. Ver Fig. B.8a. Con $s > r$, tracemos las circunferencias A(s) y B(s) que se corten en C. Entonces CP es la perpendicular deseada.

Segundo método. Elijamos cualquier punto Q fuera de m y de la perpendicular deseada, como en la Fig. B.8b. Tracemos la circunferencia Q(P) que corte a la línea m de nuevo en R y tracemos el diámetro RQT. Entonces PT es la perpendicular deseada.

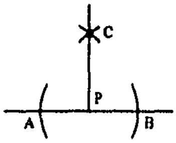


Figura B.8a

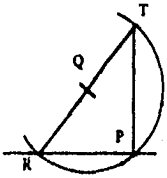


Figura B.8b

B.9 **Construcción** Trazar una línea n paralela a una línea dada m y que pase por un punto dado P.

Tracemos cualquier línea por P que corte a la línea m en A. Utilizando la Construcción B.4, tracemos un ángulo en P congruente al ángulo en A y en el lado opuesto de la línea PA. Entonces la línea n es el lado final de este ángulo construído. (Ver Fig. B.9).

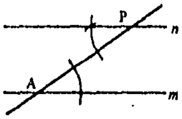


Figura B.9

B.10 **Construcción** Dividir internamente un segmento dado AB en una razón dada $a{:}b$.

En un rayo conveniente AD que no esté en la línea AB, marquemos AC' de longitud a y C'B' de longitud b como se muestra en la Fig. B.10. Tracemos BB' y una línea por C' paralela a BB' y que corte AB en C, el punto deseado.

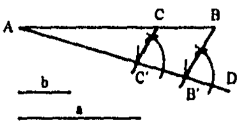


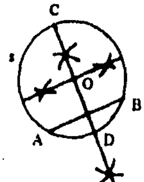
Figura B.10

B.11 La construcción B.10 es alterada fácilmente al proporcionarle el punto C que divida AB en la razón $a{:}b$ externamente. Si $a>b$, entonces que el punto B' esté entre A y C' en vez de C' entre A y B'. El resto de la construcción es inalterada. Si $a<b$, entonces se intercambian los papeles que juegan A y B; y a y b antes de iniciar la construcción.

B.12 **Construcción** Localizar el centro de una circunferencia s dada.

Tracemos cualquier cuerda AB y consideremos que su mediatriz (Construcción B.6) corte a la circunferencia en C y D. El punto medio de CD (Construcción B.6 de nuevo) es el centro O de la circunferencia s. (Fig. B.12).

Figura B.12



B.13 **Construcción** Trazar una tangente a una circunferencia s en un punto dado T en la circunferencia.

Considerando que es dado el centro O de la circunferencia, trazar el radio OT. La línea perpendicular a OT en T (Construcción B.8) es la tangente deseada.

B.14 **Construcción** Trazar una tangente a una circunferencia s desde un punto externo a la circunferencia.

Considerando que es dado el centro O de la circunferencia, tracemos OP y localicemos su punto medio M (Construcción B.6). Tracemos la circunferencia M(O) que corte a la circunferencia s en el punto T. Entonces PT es la línea tangente deseada (Fig. B.14).

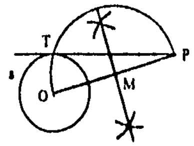


Figura B.14

C.1 En el principio, la geometría fué una colección de reglas para calcular longitudes, áreas y volúmenes. En muchos casos, fué una aproximación burda que llegó por prueba y error. Este cuerpo de conocimiento, desarrollado y utilizado en construcción, navegación y agrimensura por los Babilonios y Egipcios, pasó a los Griegos quienes con una inclinación hacia el pensamiento especulativo y el ocio, transformaron a la geometría en una ciencia deductiva. Alrededor del año 300 a.c., Euclides de Alejandría organizó algo del conocimiento de sus días, en sus "*Elementos*", en una forma tan efectiva, que hizo que todos los geómetras de los siguientes 2000 años, utilizaran y siguieran este libro como su punto de partida, dejando en el olvido muchos de los trabajos anteriores a él.

C.2 Euclides, definió primero los términos que utilizaría: puntos, líneas, planos, etc. Luego escribió cinco postulados que le parecieron claros tal que uno pudiera aceptarlos válidos sin prueba. De estos, procedió a demostrar casi 500 proposiciones o teoremas geométricos. La verdad de estos postulados era en varios casos no del todo evidente por si mismos, pero los teoremas estaban garantizados por el hecho de que habían sido derivados estrictamente de acuerdo a las leyes aceptadas de la lógica y de estas afirmaciones.

C.3 Para procedimientos modernos, los métodos euclidianos son imperfectos. Para empezar, intentó definir todas las cosas en términos de una noción más familiar, creando algunas veces más confusión que claridad. Los ejemplos siguientes proporcionan una ilustración:

> Un *punto* es lo que no tiene partes. Una *línea* es una longitud sin anchura. Una línea recta es una línea que está uniforme con los puntos de ella misma. Un *ángulo plano* es la inclinación de una a otra de dos líneas que se cortan. Cuando una línea recta está colocada tal que hace ángulos adyacentes iguales uno a otro, cada uno de los ángulos iguales es un *ángulo recto*.

C.4 Euclides no definió longitud, distancia o inclinación. Una vez que hubo hecho sus definiciones, nunca los utilizó. En su lugar utilizó "reglas de interacción" entre los objetos definidos, sus cinco postulados y otros postulados que supuso sin establecerlos. Los cinco postulados de Euclides son los siguientes:

I. Trazar una línea recta desde un punto a cualquier otro punto.
II. Una línea recta se extiende continuamente en ambos lados.
III. Un centro y una distancia describen una circunferencia.
IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
V. Si una línea recta corta a dos líneas rectas haciendo los ángulos interiores del mismo lado de la recta menor que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortan del lado en el que los ángulos son menos que dos ángulos rectos.

C.5 Euclides no consideró necesario enunciar el postulado siguiente, aún cuando lo utilizó en su primer teorema:

> Dos circunferencias, la suma de cuyos radios es mayor que la distancia entre sus centros y la diferencia de cuyos radios es menor que tal distancia, deberán tener un punto de intersección.

C.6 Es natural preguntar ¿Por qué Euclides no explica su quinto postulado? Después de Euclides, los matemáticos intentaron hacer explícito el quinto postulado que Euclides había desatendido hacerlo. El quinto postulado atrajo mucha atención. Fue embarazoso pero intuitivamnte atractivo y la gente sintió que podía ser deducida de las otras proposiciones de Euclides. Se propusieron muchas demostraciones del quinto postulado; pero ellas contenían alguna suposición equivalente escondida que debería ser demostrada. Tres condiciones equivalentes son:

i. Dos líneas que se intersecan no pueden ser paralelas a una misma línea recta. (Playfair)
ii. Las líneas paralelas permanecen a una distancia constante una de otra. (Proclo)
iii. Los ángulos interiores de un triángulo hacen dos ángulos rectos. (Legendre)

C.7 En 1763 Klügel escribió una disertación en Göttingen en la que evaluaba todos los intentos significativos para demostrar el postulado de las paralelas que 2000 años antes, Euclides lo había establecido. De las 28 demostraciones que examinó ninguna fue satisfactoria. De interés particular fué el trabajo del Jesuita Saccheri (1667-1733). Saccheri consideró la negación del quinto postulado y dedujo consecuencias lógicas, esperando llegar a una contradicción. Dedujo muchos resultados extraños, algunos de los cuales consideró que eran inconsistentes con otros postulados de Euclides. De hecho, había descubierto algunos resultados fundamentales acerca de lo que ahora se llama geometría hiperbólica.

C.8 Gauss (1777-1855) fué, aparentemente, el primer matemático a quien se le ocurrió que esta negación nunca podría llevar a una contradicción y que podían ser posibles geometrías que difirieran de la de Euclides. Consideró que era una idea tan revolucionaria en su tiempo que no lo podía hacer público. En 1829 escribió que tuvo temor a las "críticas de sus contemporaneos" atrincherados en las ideas de Euclides. Lovachevsky (1793-1856) y Bolyai (1802-1860) independientemente, trabajaron geometrías que parecían consistentes negando el quinto postulado de Euclides. Estos trabajos fueron publicados en 1829 y 1832, respectivamente. La experiencia demostró que Gauss había sobreestimado a sus contemporaneos. Ellos no pusieron atención a las nuevas teorías.

C.9 Casi 40 años después Beltrami (1835-1900) y Klein (1849-1925) produjeron modelos dentro de la geometría Euclidiana de la geometría de Bolyai y Lobachevsky (llamada ahora *geometría hiperbólica*). De esta manera se estableció que si la geometría de Euclides estaba libre de contradicción, entonces también la hiperbólica. Ya que la geometría hiperbólica satisfacía todas las suposiciones de la de Euclides excepto el postulado de las paralelas. Finalmente se determinó que era imposible una demostración del postulado quinto.

C.10 Con esta bifurcación de la geometría en euclidiana y no euclidiana, fué necesario categorizar resultados de acuerdo a su dependencia del quinto postulado. Cualquier teorema de Euclides que no hiciera uso del postulado de las paralelas se le llamó un teorema de *geometría absoluta*. Era igualmente válido en euclidiana e hiperbólica. Por contraste, ciertos teoremas euclidianos que dependieran sólo de los postulados I, II y V se le dió el nombre de *geometría afín*. A los teoremas comunes a geometría absoluta y afín se les llamó teoremas de *geometría ordenada*.

C.11 El estudio de proyección central forzó a los matemáticos por los problemas de perspectiva enfrentado por artistas tales como Leonardo da Vinci (1452-1519). La imagen hecha en lienzos por un pintor se puede apreciar como una proyección del original sobre los lienzos con el centro de proyección en el ojo del pintor. En este proceso, se deforman las longitudes de manera que dependen de la posición relativa de los diferentes objetos representados. ¿Cómo es posible que la estructura geométrica del original se pueda reconocer aún en los lienzos? Ello debe ser porque hay propiedades geométricas invariantes bajo proyección central. *La geometría proyectiva* es el cuerpo de conocimiento que se desarrolla de estas consideraciones. Muchos de los resultados básicos de la geometría proyectiva fueron descubiertos por el ingeniero francés Poncelet (1788-1867) en 1813 mientras era prisionero de guerra en Rusia, privado de libros,. La geometría afín y la geometría proyectiva están estrechamente relacionadas también, porque el estudio de aquellas propiedades de figuras que permanecen invariantes bajo proyección paralela también se mantiene en geometría afín. Este aspecto de la geometría afín fue reconocido por Euler (1707-1783).

C.12 El progreso en geometría frecuentemente se estancó por carencia en la facilidad de cálculo. La invención de la *geometría analítica* por Descartes (1596-1650) hace simple la aproximación a un mayor número de problemas posibles. Por ejemplo, permite un tratamiento fácil de la teoría de cónicas, un asunto que anteriormente había sido muy complicado. Desde los tiempos de Descartes, los métodos analíticos han continuado siendo fecundos porque han permitido a los geómetras hacer uso de nuevos desarrollos en álgebra y cálculo.

C.13 El alcance de la geometría ha sido amplificado por Riemann (1826-1866). Se dió cuenta que la geometría de superficies proporciona numerosos ejemplos de nuevas geometrías. Supuso que una curva en la superficie se llama una línea si cada pequeño segmento de ella es la curva más corta que une sus extremos.

Así, por ejemplo, si la superficie es una esfera, las líneas son las circunferencias más grandes. En esta geometría, llamada *geometría elíptica doble*, son válidos los teoremas siguietes:

i. Todo par de líneas rectas tiene dos puntos de intersección. Estos puntos son antipodales; esto es, están en lados opuestos del mismo diámetro.
ii. Todo par de puntos no antipodales determinan exactamente una línea. Por un par antipodal pasan muchas líneas.
iii. La suma de los ángulos de un triángulo es mayor que π.

C.14 Riemann y Schläfli (1814-1895) consideraron espacios esféricos y euclidianos de mayor dimensión, y, Riemann, en su célebre conferencia inaugural en Göttingen en 1854, estableció los fundamentos de la geometría como un estudio de espacios generales de cualquier dimensión, que ahora se llaman multiformes riemanianos. Estos espacios son el objeto principal de estudio en *geometría diferencial* moderna. Como lo sugiere el nombre, los métodos utilizados dependen del cálculo. La geometría de Riemann fue utilizada por Einstein (1879-1955) como una base para su teoría general de la relatividad (1916).

C.15 Aunque Gauss observó la relación entre la suma de ángulos de un triángulo y la curvatura de la superficie en la que ocurre, Riemann y quienes lo siguieron llevaron estas ideas a los multiformes riemanianos. Así, la curvatura todavía es un importante fenómeno en geometría diferencial e indica cómo mucha de la geometría del espacio que está siendo estudiada difiere de ser euclidiana.

C.16 Aunque Euclides creyó que su geometría contenía hechos ciertos acerca del mundo físico, se dió cuenta que estaba tratando con una idealización de la realidad. No quiso decir que había una cosa física tal como longitud sin anchura. Pero se atuvo en muchas de las propiedades intuitivas de objetos reales. Para liberar que la geometría se confiara en conceptos físicos para sus demostraciones, Hilbert (1862-1943) reescribió los fundamentos de la geometría en 1899. Hilbert inició con objetos indefinidos (ejemplo: puntos, líneas, planos), relaciones indefinidas (ejemplo: colinealidad, congruencia, estar entre) y ciertos axiomas expresados en términos de los objetos y relaciones indefinidas. Cualquier cosa que puediera ser deducida de esto por las reglas usuales de lógica, sería un teorema geométrico válido en esa geometría particular. La elección de axiomas fué un asunto de gusto. Por supuesto, algunas geometrías serían interesantes y otras no, pero es un asunto de juicio subjetivo. Los teoremas no dependen de la naturaleza de los objetos indefinidos sino solamente en los axiomas que satisfacen.

C.17 Viendo todas estas geometrías alrededor de él, Klein, en 1872, se propuso clasificarlos de acuerdo al grupo de transformaciones bajo el cual permanecen ciertas sus proposiciones. Desde entonces, la teoría de grupos ha aumentado en importancia en los geómetras. Las nuevas geometrías de Riemann dieron surgimiento a grupos de transformaciones complicados. Pronto se desarrollaron técnicas de estudio de estos grupos. En tal asunto, Sophus Lie (1842-1899) elaboró abundante trabajo y en su honor se le dió el nombre de *grupos de Lie* a estos grupos.

C.18 Actualmente, los grupos de Lie y la geometría diferencial son áreas activas y corrientes en investigación matemática de transformaciones.

1.1 Trace una altura desde el vértice opuesto a la base del triángulo isósceles y aplique el teorema de Pitágoras.
1.2 Tome $(\frac{8}{9} d)^2 = \pi(\frac{1}{2} d)^2$ y resuelva para π.
1.3 Trace las diagonales y utilice Teorema 2.17.
1.4 Considere que la pirámide original tiene altura H. Muestre que H/(H - h) = B/b y resuelva esta ecuación para H. Luego reste el volumen de la pirámide pequeña cortada de la original.
1.5 Considere los valores numéricos de las áreas.
1.6 Algunas personas consideraban que el "mar fundido" era de forma oval por ello su circunferencia era solamente tres veces su diámetro (máximo).
1.7 c) Haga $y/2 = x$.
d) Haga $3y = x$.

2.2 Considere que $|d(AB)| = |d(BA)|$ pero AB y BA son directamente opuestos.
2.4 Trace la altura h_c al lado AB.
2.5 Utilice Teorema 2.19.
2.6 Aplique Teorema 2.11, utilizando $d(AM) = d(MB)$.
2.9 Reemplace **AB**, **BC**, **CA** en términos de **DA**, **DB**, **DC**.
2.10 Considere E pié de la perpendicular desde D a la línea ABC. Por Ejercicio 2.9, vale la fórmula para A, B, C y E. Reste esta fórmula de la fórmula deseada y utilice el Teorema de Pitágoras para mostrar que la diferencia es cero.
2.12 En Teorema de Stewart, reemplace A, B, C, D por B, L, C, A, respectivamente, en el triángulo ABC para la mediana AL. Recuerde que **BL** = **LC**.
2.13 Vea Sugerencia 2.12. En este caso **BL** / **LC** = c/b por Ejercicio 2.5.
2.16 Observe las áreas representadas en términos del teorema de Euler. Considere segmentos dirigidos.

3.1 b) Considere el plano ideal.
3.2 b) Considere la línea ideal.
d) Suponga que m es la línea ideal y P un punto ordinario.
3.3 d) Tres puntos ideales no colineales ocurren solamente en el plano ideal del espacio extendido. No se puede mostrar en una figura.
3.6 Se debe violar algo de los "numeradores" en la demostración del Teorema 3.5.
3.8 Aplique dos veces el Teorema 2.19 al triángulo VAB.
3.12 Vea Teorema 3.9.

4.1 Utilice 2.18.
4.2 Debe estar de acuerdo que, si C es el vértice ideal del triángulo ABC, entonces 0·**CX** = 0 para cualquier punto X; si L y M son puntos ordinarios, entonces **LC** = −**CM**; y si L (o M) está en C, entonces **LC** (o **CM**) es cero.
4.4 Inicie con Teorema 4.2 y utilice Teorema 2.19.
4.6 Utilice Ejercicio 4.5 seis veces.
4.7 Utilice Ejercicio 4.2.
4.8 Utilice la forma trigonométrica del Teorema de Menelao, mostrando que, cuando AL es la bisectriz externa del ángulo BAC, entonces los ángulos BAL y LAC son suplementarios en magnitud y opuestos en sentido.
4.10 Utilice Teorema 4.2. Muestre que **BL** = **L'C**, etc.
4.11 Utilice Teorema 4.3 e ideas análogas a las de la Sugerencia 4.10.
4.12 Deberá mostrar que, si los cuatro puntos dados son colineales, entonces vale la ecuación dada. Trace la diagonal AC que corte a la línea LMNO en el punto X. Luego aplique el teorema de Menelao a los dos triángulos ABC y ACD.
4.13 Las tangentes desde un punto a una circunferencia son congruentes.

4.14 Utilice triángulo ABA' cortado por la línea CPQ.
4.16 Vea Respuesta 4.15.
4.17 Vea Respuesta 4.15.

5.1 Vea demostración del inverso del Teorema 4.2.
5.2 Considere válido el Ejercicio 4.1.
5.3 Utilice Teorema 2.19.
5.4 Muestre, por ejemplo, que BL/OL = AS/AO, CM/MA = BC/AS y dos relaciones análogas.
5.6 Vea Teorema 5.9. Observe que esta construcción requiere regla solamente.
5.7 Utilice Teorema 5.9.
5.10 Tome la razón común AO/OL = BO/OM = CO/ON = r. Luego utilice el triángulo BOC y las cevianas BN, CM y OL.
5.11 Utilice forma trigonométrica del Teorema de Ceva.
5.12 Vea Sugerencia 5.11.
5.13 Vea Ejercicio 4.11.
5.14 Utilice Teorema 5.2 y recuerde que el producto de una secante a una circunferencia desde un punto externo P y su segmento externo es constante. Así, por ejemplo, AM·AM'= AN·AN'. Vea Ejercicio 6.18.

6.4 Considere O punto medio de la diagonal AC en el paralelogramo ABCD. Muestre que los triángulos ABO y CDO son congruentes.
6.6 En la Fig. 6.3, muestre que AA' y B'C' se bisecan mutuamente.
6.8 Vea Teorema 6.10.
6.12 Vea Teorema 6.15.
6.14 Utilice Teorema 6.20.
6.16 b) Considere PT tangente y PAB una secante a una circunferencia dada y trace la línea AT. Entonces ∠TAB es un ángulo externo del triángulo PTA. Luego aplique la parte (a).
6.18 Vea Sugerencia 6.16(b).
6.20 Utilice Teoremas 6.15 y 6.16.
6.21 Utilice Ejercicio 6.20, Teorema 6.15 y Corolario 6.19.
6.22 Utilice Teorema 6.20.

7.2 Utilice parte de la última ecuación desplegada en la demostración del Teorema 7.2.
7.3 Utilice Corolario 7.4.
7.8 Vea Teorema 29.4.
7.10 Utilice Teorema 7.17.
7.11 Trace una figura aproximada.
7.13 Muestre que son diagonales de un paralelogramo.
7.14 Utilice el triángulo rectángulo BA'O de la Fig. 7.16.
7.18 Utilice Ejercicio 6.9.
7.20 Inicie con el lado derecho de la ecuación y utilice los teoremas indicados.

8.1 a) Trace AX y BX.
b) Utilice triángulos semejantes.
f) Trace AC, CQ, CP, PD, BD y DQ.
g) ¿Qué clase de triángulo es PQC?
8.2 Utilice Problema 8.12.
8.4 Forme un triángulo isósceles en el ángulo dado como base y los lados congruentes con la misma longitud de la abertura del compás. Transfiera por Problema 8.19 la distancia base al punto dado en la línea dada, etc.
8.5 En una línea marque AP y PB de longitudes a y 1. En una línea paralela trace una semicircunferencia A'B' utilizando la abertura del compás como el radio dado. Utilice proporciones.
8.6 Las dimensiones lineales serán dos tercios de las dimensiones dadas.
8.10 Coloque el triángulo isósceles tal que uno de sus lados congruentes sea la base.

8.11 Trace primero una figura mostrando el triángulo completo en que se han marcado las partes dadas.
8.14 En la "demostración" no es cierta la primera proposición.
8.16 h) Con estas herramientas sólo se pueden construir las intersecciones de circunferencias y líneas.

9.2 Vea Eves, *Survey of Geometry*, vol 1, páginas 44, 50, 233 y 236, por ejemplo.
9.3 b) Inicie con un hexágono y aplique la fórmula de la parte (a) cuatro veces.
9.4 La fórmula de la parte (a) se encuentra rápidamente, pero escribir explícitamente la parte (b) es más complicada. El perímetro del hexágono circunscrito es $2\sqrt{3}$, el del polígono de 96 lados es 3.1427.

10.4 Investigue cómo se suman vectores.
10.6 Si los lados correspondientes de los triángulos no son paralelos y semejantemente dirigidos, el centro de rotación es la intersección de las mediatrices de los segmentos que unen vértices correspondientes de los triángulos.
10.8 Utilice Ejercicio 10.1.

11.8 Vea 11.8.
11.9 Vea 11.8.
11.10 Considere que la traslación lleva el punto A al punto B y que una rotación arbitraria mediante un ángulo θ lleva A a un punto C. Encuentre la rotación mediante un ángulo $-\theta$ que lleve C a B. Vea Ejercicio 10.6.
11.11 Se forma un rectángulo. ¿Qué es cierto de sus diágonales?

12.3 Intente una traslación y una reflexión o rotación.
12.5 Ambos de estos mapeos son inversos de α^{-1}.
12.6 Ambos de estos mapeos son inversos de $\beta\alpha$.
12.7 b) Considere que α es involutoria.
12.8 Multiplique ambos lados de cada ecuación dada por α^{-1}.
12.9 Multiplique ambos lados de cada ecuación dada por γ^{-1}.
12.10 Multiplique ambos lados de la ecuación dada por α^{-1} en el lado izquierdo y por β^{-1} en el derecho.
12.12 En la propiedad (3), haga $\beta = \alpha^{-1}$.

13.2 Aplique Teorema 13.6.
13.10 Vea qué sucede al sentido de un triángulo dado.
13.12 Considere las circunferencias P(s) y Q(t) para la parte (a).
13.14 d) Vea Teorema 13.13.

14.1 Vea Fig. 10.6.
14.5 Utilice Teorema 13.13.
14.10 Factorice la reflexión planificada en un producto de reflexiones en tres líneas, siendo la tercera perpendicular a las otras dos líneas. Muestre que si las líneas m y n son perpendiculares, entonces $\sigma_n\sigma_m = \sigma_m\sigma_n$ (al considerar qué rotación representa cada uno de estos productos).
14.18 Encuentre líneas a, b, c tal que la rotación sea $\sigma_b\sigma_a$ y la traslación $\sigma_c\sigma_b$. Su producto es $\sigma_c\sigma_a$, etc.

15.2 Observe la gráfica.
15.4 Utilice la Respuesta 15.3 como guía.
15.6 Si ABCD es un paralelogramo, entonces $\sigma_D\sigma_C = \sigma_A\sigma_B$ por Teorema 15.11.

16.2 Vea Sugerencia 14.10.
16.4 Recuerde Ejercicio 12.12.
16.6 Elimine traslaciones y reflexiones planificadas.
16.7 Utilice Teorema 16.12 y muestre que ninguna rotación no trivial tiene más de un punto fijo.
16.11 Considere el lugar geométrico de la imagen de P.
16.12 Factorice σ_A en un producto $\sigma_p\sigma_q$ con p paralelo a m.

16.13 b) Recuerde Teorema 14.15.

17.4 Vea Teorema 16.1.
17.8 Vea Teorema 15.12.
17.10 Vea Teorema 15.11.
17.12 Vea Teorema 15.7.
17.16 Este producto se factoriza en cuadrados de productos de cuatro reflexiones cada una, siendo la primera $(\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d)^2$.

18.1 Utilice un mapeo semejante al de la demostración del Teorema 18.4.
18.2 Mapee un triángulo al otro tal que los ángulos congruentes coincidan y los triángulos estén en el mismo lado del lado común.
18.3 Mapee un triángulo al otro tal que formen un triángulo isósceles.
18.6 b) Este es el Teorema 2.3.
18.12 Refleje en la bisectriz del ángulo opuesto a la base.
18.13 Suponga que la mediana AM es perpendicular al lado BC.
18.14 En el rombo ABCD, σ_m (ΔABC) = ΔADC donde m es la línea AC.

19.2 Refleje en ese diámetro.
19.6 Esta demostración es enteramente semejante a la del Teorema 19.10.
19.8 Considere la suma de pares de ángulos opuestos.
19.9 Muestre que $\sigma_{C'}\sigma_C\sigma_B\sigma_{B'}\sigma_{A'}\sigma_A = \iota$ al encontrar la imagen del punto A bajo este producto de medias vueltas que es una traslación.
19.10 Rote el triángulo, media vuelta alrededor del punto medio de su hipotenusa, para formar un rectángulo.

20.8 Los puntos L, M, N son los puntos medios de los lados del triángulo ABC y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices al ortocentro del triángulo DEF.
20.10 Ya que la figura es un paralelogramo, tiene un centro de simetría.
20.12 El triángulo ACH es el triángulo medial para el triángulo QDR.
20.14 Refleje la casa o el establo en la rivera del río. Luego resuelva el problema.
20.15 Aplique una media vuelta alrededor del punto medio del lado del triángulo.
20.16 Aplique Ejercicio 20.15 para una solución. Hay otra solución (¿trivial?)
20.17 Trace el diámetro perpendicular a su base.
20.18 Sus alturas a la línea de la base común son congruentes.
20.19 Muestre que $\sigma_{C'}\sigma_A = \sigma_A\sigma_{B'}$.
20.20 Muestre que una rotación alrededor del punto dado deja fija la circunferencia.
20.21 Trace las líneas OA y OB.
20.22 a) Utilice una rotación de 90° alrededor de M.
b) Considere que el triángulo ABC está orientado contrario a las manecillas del reloj. Haga que α y β representen rotaciones de 90° alrededor de X y Y, respectivamente. Luego $(\sigma_B\alpha\beta)(C) = C$ tal que $\sigma_B\alpha\beta = \iota$ ya que es una traslación. Entonces $(\alpha\beta)(B') = B'$. Sea $\beta(B') = B''$, tal que $\alpha(B'') = B'$. Entonces cada uno de los triángulos B'XB'' y B''YB' son rectángulos isósceles, etc.
c) Trace cualquier diagonal del cuadrilátero y utilice la parte (b).
d) Un triángulo se puede pensar como un cuadrilátero degenerado.

21.6 Recuerde las fórmulas para $\text{sen}(\theta+\phi)$ y $\cos(\theta+\phi)$.
21.10 Proceda como en el Ejercicio 21.9.
21.14 Encuentre el ángulo θ tal que $\text{sen}\,\theta = b/(a^2+b^2)^{1/2}$ y $\cos\theta = a/(a^2+b^2)^{1/2}$. Un método es tomando $\theta = 2\tan^{-1}([(a^2+b^2)^{1/2} - a]/b)$.
21.16 Para la línea utilice las ecuaciones del Ejercicio 21.9.

22.4 Esto es análogo al Ejercicio 22.3.
22.6 Una reflexión es involutoria.
22.8 Ya que solamente la traslación es invertida, reemplace r por $-r$ en el Teorema 22.9.
22.10 Vea Sugerencia 22.8.
22.12 Inicie con las ecuaciones de la Respuesta 22.9.
22.14 Vea Ejercicios 21.13 a 21.15 y 22.11 a 22.13.
22.16 Vea Teoremas 21.6 y 22.4, y Ejercicio 22.14.
22.18 Los puntos fijos son (0,0) y (3,3).

23.1 Considere varios planos en los cuales está cada lado y aquellos en los cuales está cada par de lados correspondientes.
23.2 Extienda cualquier otro lado del hexágono para formar un triángulo y aplique varias veces el teorema de Menelao (Teorema 4.2).
23.4 Los valores obtenidos para π para los factores 1000 y 1001, son 3.1400 y 3.1431, respectivamente.

24.4. Vea Teorema 25.7.
24.6 Refleje en la bisectriz del ángulo formado por un par de lados correspondientes (extendido).
24.8 Vea Ejercicio 24.7.
24.10 Su razón es negativa.
24.12 No hay ninguno con razón positiva.

25.6 Vea Teorema 25.5.
25.8 Muestre que **QB″/B″B′** $= j(1-j)$ y **B′B/BO** $= k - 1$. Utilice el teorema de Menelao en el triángulo OQB′ para obtener **OP/PQ** $= (j-1)/(j(k-1))$.
25.12 Para encontrar el vector de traslación, localice la imagen del punto A bajo este producto de homotecias.
25.16 Por el Teorema 25.9. También se debe demostrar que el producto de una traslación y una homotecia es una homotecia. Considere la imagen de un segmento dado AB bajo tal producto.
25.20 Utilice el Teorema 25.16.

26.2 Vea la prueba del Corolario 13.7.
26.6 Vea Teorema 13.20.
26.10 Considere que n sea la otra bisectriz del ángulo en Q.
26.12 Refleje la figura OA′B′CD en la línea m.
26.14 Este es un corolario al Ejercicio 26.13.
26.15 a) ¿Qué isometría deja fija a una circunferencia?
b) ¿Qué isometría opuesta mapea una circunferencia en ella misma?

27.2 ¿Qué figura se forma con la unión de las cuatro imágenes?
27.4 Recuerde que las áreas de figuras semejantes varían como los cuadrados de las dimensiones lineales.
27.6 Considere que los puntos medios de AC y BD sean M y N en la Fig. 27.4. El resultado deseado se puede obtener al resolver algebraicamente las razones resultantes del hecho que H(E, EA/EM) mapea MN en AB y H(E, EM/EC) mapea CD en MN. El álgebra es algo extenso.
27.8 Vea Problema 27.7.
27.10 Vea Problema 27.7.
27.12 Es opuesto.
27.14 Vea Teorenta 27.9.
27.16 Los segmentos AB y A′B′son paralelos.

28.2 Vea Teorema 28.1.
28.3 Haga que H(O,2) mapee al triángulo ABC en A′B′C′.
28.4 Vea Teorema 27.10.
28.5 Utilice los triángulos DEC y FEA, además DEA y GEC.

28.8 Muestre que si H(M, k) mapea XY en A'C y H(N, j) mapea XY en B A', entonces j = k. Deduzca que M y N están igualmente distantes de BC.

28.9 Vea Teorema 28.6.

28.10 Utilice una rotación y una homotecia apropiadas

28.12 Utilice el Problema 28.10.

28.13 Inicie con un cuadrado que satisfaga casi todas las condiciones.

28.14 Utilice el método de la Respuesta 28.13.

28.18 a) Centre *algún* rectángulo semejante en el centro de la circunferencia.
b) Coloque algún rectángulo semejante simétrico sobre el diámetro.
d) Una diagonal es un eje de simetría.

29.1 Utilice los Teoremas 29.2 y 29.4.

29.2 ¿En donde mapea obviamente H(G, -2)?

29.7 Refleje una de las circunferencias en la línea tangente a ella en el punto de intersección dado.

29.8 Utilice una homotecia de razón -r en vez de la reflexión recomendada en la Sugerencia 29.7.

29.9 Trace un diámetro AOB de la circunferencia más pequeña. Vea qué es cierto si la secante deseada termina en A.

29.10 Recuerde Ejercicio 2..5.

29.11 Primero utilice la medida del ángulo y las longitudes de los lados no paralelos.

29.12 Primero trace algún cuadrado.

29.13 No se preocupe acerca del perímetro, al principio.

29.14 Muestre que la razón de homotecia es 1/3.

29.16 Utilice Ejercicio 29.14.

29.17 Utilice Teorema 7.20.

29.18 Utilizando un punto medio de un lado del triángulo ABC como un centro de homotecia de razón 1/3, encuentre la imagen del vértice opuesto y del ortocentro.

29.21 Utilice Ejercicio 29.19.

29.22 Escoja un punto arbitrario en una de las líneas y aplique Ejercicio 29.21.

30.4 Recuerde Ejercicio 22.14.

Las respuestas incluidas aquí alternan partes de todas las preguntas que tienen más de una parte y todas las preguntas impares de los ejercicios de los capítulos 1, 2 y 3.

1.1 $8\sqrt{6}$.

1.3 Suponga A, B, C, D que simbolice los vértices entre los lados d y a, a y b, b y c, c y d, respectivamente. Ya que el área del triángulo ABC, por ejemplo, está dado por $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}B$, entonces el área K del cuadrilátero ABCD es la mitad de la suma de los cuatro triángulos cortados del cuadrilátero, dos a la vez, por una diagonal. Esto es,

$$K = \tfrac{1}{4}\, ab\operatorname{sen} B + \tfrac{1}{4}\, bc\operatorname{sen} C + \tfrac{1}{4}\, cd\operatorname{sen} D + \tfrac{1}{4}\, da\operatorname{sen} A$$

$$\leq \tfrac{1}{4}(ab + bc + cd + da) = \tfrac{1}{4}(a + c)(b + d),$$

ya que sen $\theta \leq 1$ para toda θ. Además, la igualdad vale sii

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ.$$

1.5 Cada triángulo rectángulo con catetos 3 y 4 tiene área 6, asi que el área total de este cuadrado es $6 \cdot 4 + 1 = 25$, teniendo el otro lado igual a 5. Esto es, el triángulo rectángulo tiene lados de 3, 4 y 5.

1.7 a) 11 c) 6

2.1 Por los Teoremas 2.10 y 2.11, $d(AB) + d(BC) + d(CA) = d(AC) + d(CA) = 0$.

2.3 Supongamos que B está entre A y C. Entonces $d(AB) + d(BC) = d(AC)$, de donde $d(AB) = -d(BC) + d(AC) = d(CB) - d(CA)$. Los otros casos son análogos.

2.5 Utilizando la notación del Teorema 2.19, considerar AL bisectriz del ángulo A. Entonces $\operatorname{sen}\angle BAL = \operatorname{sen}\angle LAC$, así que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\mathbf{BL}}{\mathbf{LC}} = \frac{AB\operatorname{sen}\angle BAL}{CA\operatorname{sen}\angle LAC} = \frac{AB}{CA}.$$

2.7 Por el Teorema 2.12, si O es colineal con A, B, C, D entonces $2\mathbf{ON} = \mathbf{OC} + \mathbf{OD}$ y $2\mathbf{OM} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB}$. Entonces

$$2\mathbf{MN} = 2\mathbf{MO} + 2\mathbf{ON} = \mathbf{AO} + \mathbf{BO} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD} = \mathbf{AC} + \mathbf{BD},$$

etc.

2.9 La expresión dada es igual a

$$DA^2 \cdot (\mathbf{DC} - \mathbf{DB}) + DB^2 \cdot (\mathbf{DA} - \mathbf{DC}) + DC^2 \cdot (\mathbf{DB} - \mathbf{DA}) + (\mathbf{DB} - \mathbf{DA})(\mathbf{DC} - \mathbf{DB})(\mathbf{DA} - \mathbf{DC}),$$

que se reduce a cero cuando se hace el desarrollo.

2.11 Este es el inverso del Ejercicio 2.8. Sean M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Entonces $\mathbf{AM} = \mathbf{MB}$ y $\mathbf{CN} = \mathbf{ND}$. Ahora

$$\mathbf{MN} = \mathbf{MA} + \mathbf{AC} + \mathbf{CN}$$

y también

$$\mathbf{MN} = \mathbf{MB} + \mathbf{BD} + \mathbf{DN} = \mathbf{AM} + \mathbf{CA} + \mathbf{NC} = -(\mathbf{MA} + \mathbf{AC} + \mathbf{CN}) = -\mathbf{MN}.$$

Por lo tanto $\mathbf{MN} = 0$, de donde M y N coinciden.

2.13 Denote con AL a la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC. Ya que BL/LC = AB/CA por el Ejercicio 2.5 y BL + LC = BC, entonces

$$BL = AB\cdot BC/(CA + AB) \qquad y \qquad LC = BC\cdot CA/(CA + AB).$$

Por el teorema de Stewart,

$$AL^2\cdot BC + AB^2\cdot CL + AC^2\cdot LB + LB\cdot BC\cdot CL = 0,$$

de lo que se obtiene

$$AL^2 = \frac{(AB^2\cdot CA + AC^2\cdot AB)(CA + AB) - BC^2\cdot AB\cdot CA}{(CA + AB)^2}$$

y finalmente

$$AL = \left[bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)\right]^{1/2}.$$

2.15 El área $K = ah/2$, tal que $K^2 = (ah/2)^2$. Utilizando el Ejercicio 2.14 para reemplazar h^2, la expresión resultante se factoriza en $s(s-a)(s-b)(s-c)$.

3.1 a) Falso; una línea ideal tiene más de un punto ideal.
c) Cierto.
e) Falso; hay solamente uno.

3.2 a) Falso; una línea ideal tiene más de un punto ideale.
c) Cierto.
e) Falso cuando n es la línea ideal.
g) Falso; hay solamente una línea ideal en el plano extendido.

3.3 a) Un triángulo ordinario tiene tres vértices ordinarios.
c) Trace dos líneas que se intersequen en en un punto ordinario A. Los otros dos vértices están en la línea al infinito en ese plano.

3.4 a) $(^1/_3, 0)$ c) $(0,0)$ e) El punto al infinito g) $(^1/_3, 0)$ i) $(-^1/_4, 0)$.

3.5 Uno necesita considerar únicamente las diferentes posiciones posibles para el punto P.

3.7 a) Considere que son los puntos M y N. Entonces AM/MB = AN/NC, tal que AM/AB = AN/AC. Ya que ∠BAC = ∠MAN, entonces los triángulos ABC y AMN son semejantes por *LAL*.

3.9 Para (AB,CD) = (AC/CB)(DB/AD) = (CA/AD)(BD/CB) = (CD,AB), etc.

3.11 a) Si (AB,CD) = (AB,CE), entonces D y E dividen AB en la misma razón, así D = E por Teorema 3.5.

3.13 Ya que el punto medio de un segmento divide al segmento en la razón 1, su conjugado armónico deberá dividir al segmento en la razón -1. El punto al infinito lo hace así.

3.15 a) Por ejemplo,
(AB,DC) = (AD/DB)/(AC/CB) = 1/((AC/CB)/(AD/DB)) = 1/(AB,CD).
c) Por ejemplo,
(DB,CA) = (DC/CB)/(DA/AB)

$$= \frac{AB}{CB}\cdot\frac{DC}{DA} = \frac{AC+CB}{CB}\cdot\frac{DC}{DA} = \frac{AC}{CB}\cdot\frac{DB+BC}{-AD} + \frac{DC}{DA}$$

$$= -\frac{AC}{CB}\cdot\frac{DB}{AD} + \frac{AC}{CB}\cdot\frac{BC}{-AD} + \frac{DC}{DA}$$

$$= -(AC/CB)/(AD/DB) + 1 = 1 - (AB,CD).$$

4.1 Supongamos, por ejemplo, el punto de Menelao L = B, y L, M, N colineales. Entonces N = B y M está arbitrariamente en la línea AC o N ≠ B y M = A. En el primer caso BL = 0 y NB = 0, así, por 2.18 es válida la ecuación para el teorema de Menelao. Los otros casos son análogos.
Inversamente, si algún factor en el numerador de la fórmula de Menelao es cero, entonces también deberá ser cero un factor en el denominador. Todos estos casos producen tres puntos de Menelao colineales.

4.3 No sin alguna clase de acuerdo en la definición de cómo debe ser la razón en la que un punto ideal divide a un segmento de una linea ideal. Parece ser que no hay ventaja alguna al intentar hacerlo.

4.5 Aplique el teorema de Menelao cuando PQ corte al lado BC en el punto L. Luego, si PQ es paralelo a BC, y tenemos BL/LC = −1.

4.7 Al aplicar el Ejercicio 4.2, la demostración dada en el texto también vale para este caso.

4.9 Vea sugerencia 4.8.

4.11 Dé sen∠BAL = sen∠L'AC, sen∠LAC = sen∠BAL', etc. Luego, aplique la forma trigonométrica del teorema de Menelao. La fórmula de Menelao para L, M, N es igual al recíproco de su fórmula para L', M', N', así, si alguno es igual a −1, entonces el otro también es −1.

4.13 Por el teorema de Menelao, (AZ/ZB)(BK/KC)(CY/YA) = −1. También BZ ≅ BX, CX ≅ CY y AY ≅ AZ, ya que las tangentes desde un punto externo a una circunferencia son congruentes. Ahora la sustitución produce el resultado deseado.

4.15 Sean L y N los puntos como en la Fig. 4.7. Trace líneas NA y NA' por N hacia L. Desde otro punto O, fuera de esas líneas, trace dos líneas OAA' y OBB' que corten NA en A y B, y NA' en A' y B'. Trace BL y B'L. Trace una tercer línea por O que corte BL en C y B'L en C'. Trace AC y A'C' que se corten en M. Ahora los triángulos ABC y A'B'C'son copolares en O, así, son coaxiales. Esto es, L, M, N son colineales.

4.17 Sean *m* y *n* las líneas NA y NA' de la Respuesta 4.15 y sea el punto dado P igual a L.

5.1 Considere que (BL/LC)(CM/MA)(AN/NB) = 1 y suponga que BM y CN se cortan en Q. Suponga que AQ corta a BC en L'. El resto de la demostración es análoga a la del inverso del Teorema 4.2.

Un estudiante dió la prueba siguiente de este inverso. Suponiendo la ecuación dada, consideró que AL corta a BM en O y CN en Q. Entonces, utilizando el teorema de Menelao en los triángulos ALB y ALC cortados por CQN y BOM, respectivamente, obtuvo

$$\frac{BC}{CL}\cdot\frac{LQ}{QA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1 \qquad \text{y} \qquad \frac{LB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AO}{OL}=-1.$$

Al multiplicar estas dos ecuaciones lado a lado y simplificar, obtuvo AQ/QL = AO/OL, así O = Q. Y Y concluyó el teorema.

5.3 Iniciando con la ecuación del Teorema 5.2 podemos utilizar el Teorema 2.19 para hacer el reemplazo

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB\,\text{sen}\angle BAL}{CA\,\text{sen}\angle LAC},\quad \frac{CM}{MA}=\frac{BC\,\text{sen}\angle CBM}{AB\,\text{sen}\angle MBA} \quad \text{y} \quad \frac{AN}{NB}=\frac{CA\,\text{sen}\angle ACN}{BC\,\text{sen}\angle NCB}.$$

Se obtiene la ecuación del Teorema 5.3.

5.5 Cuando ∠B = 90°, entonces B = D = F, así las alturas concurren en B.

5.7 Por el Teorema 5.9, BL/LC = −BL'/L'C, CM/MA = −CM'/M'A y AN/NB = −AN'/N'B así

$$(BL/LC)(CM/MA)(AN/NB) = -(BL'/L'C)(CM'/M'A)(AN'/N'B).$$

5.9 Si BL/LC = CM/MA = AN/NB = r y las cevianas concurren, entonces $r^3 = 1$, así r = 1, ya que r es real.

5.11 Utilice el Teorema 5.3 en las cuales cada fracción se iguala a 1 en este caso.

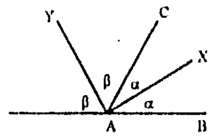
5.13 Vea Respuesta 4.11. Utilice esta misma técnica junto con el Teorema 5.3.

6.3 El triángulo medial es la mitad de largo (en dimensiones lineales) que del triángulo dado, así que sus circuncircunferencias tienen también radios de razón 1/2. Pero la circunferencia de los nueve puntos es la circuncircunferencia del triángulo medial.

6.5 En la Figura 6.7, suponga que BC corte a B'B'' en X. Entonces X biseca CA', y BX = ½BC. Ya que la altura del triángulo BXB' al lado BX es la mitad que la del triángulo ABC, entonces los triángulos ABC y BB'B'' tienen las mismas alturas. Por lo tanto $K_{BB'B''} = \frac{1}{4}K_{ABC}$.

6.7 Por el Teorema 6.6, ya que BB' ≅ CC', entonces ΔBGC' ≅ ΔCGB' por *LAL*. Así BC' ≅ CB', de lo cual AB ≅ AC.

6.9 Sean AX y AY las bisectrices interna y externa del ángulo BAC como se muestra en la figura siguiente. Sean α y β las medidas de los ángulos así formados. Entonces $2\alpha + 2\beta = 180°$, y así $\alpha + \beta = 90°$. Y el teorema se sigue.



Respuesta 6.9

6.11 El circundiámetro ST del Teorema 6.12 biseca al lado BC, ya que es perpendicular a la cuerda BC. El teorema se sigue.

6.13 De los Teoremas 6.15, 6.16 y 6.17, tenemos

$$K^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{K}{r}\cdot\frac{K}{r_a}\cdot\frac{K}{r_b}\cdot\frac{K}{r_c} = \frac{K^4}{r r_a r_b r_c},$$

de lo cual se sigue el teorema.

6.15 En la figura para el Ejercicio 6.15, $OC = (a+b)/2$, $OQ = (a+b-d)/2$, $QD = d/2$ y $OD = (b-a)/2$. Ya que OQD es un triángulo rectángulo, luego aplique el teorema de Pitágoras para obtener el resultado deseado.

6.16 a) Tóme como ángulo inscrito ABC, trace el diámetro BOD y suponga que no coincide con BA. Entonces el triángulo OAB es esósceles, ya que el ángulo externo AOD tiene el doble de la medida de cualquiera de sus ángulos interiores y opuestos, y especificamente el ángulo ABO. Por lo tanto

$$m(\angle ABO) = m(\angle ABD) = {}^1/_2\, m(\angle AOD) = {}^1/_2\, m(\text{arco AD}).$$

Análogamente $m(\angle OBC) = {}^1/_2\, m(\text{arcDC})$, ya sea que el diámetro BOD coincida o no con el lado BC. Ahora los ángulos se pueden sumar o restar para dar el resultado deseado de acuerdo a que O sea interior o exterior al ángulo ABC.

c) Suponga que las cuerdas AB y CD se cortan en E. Ya que AEC es un ángulo exterior para el triángulo ECB, entonces $\angle AEC = \angle ECB + \angle EBC = (\text{arco DB} + \text{arco AC})/2$.

6.17 Sean PT y PU las tangentes desde el punto P, y sea O el centro de la circunferencia. En los triángulos rectángulos POT y POU, PO = PO, OT ≅ OU y $\angle T \cong \angle U = 90°$. Por lo tanto $\Delta POT \cong \Delta POU$ por *HC* (hipotenusa cateto).

6.19 Considere que las cuerdas AB y CD se cortan en E. Ya que $\angle ADC \cong \angle ABC$ y $\angle DAB \cong \angle DCB$ por el Ejercicio 6.16a, entonces $\Delta ADE \sim \Delta CBE$, así AE/DE = CE/BE, y el teorema se concluye.

6.21 Por el Ejercicio 6.20, el Teorema 6.15 y el Corolario 6.19,

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = r_a r_b r_c\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right) = \frac{r_a r_b r_c}{r} = \frac{r_a r_b r_c r}{r^2} = \frac{K^2}{K^2/s^2} = s^2.$$

6.22 a) Sea BP el circundiámetro desde B. Entonces $\angle BPC \cong \angle A$, así $\text{sen}\angle A = \text{sen}\angle BPC = a/2R$.

6.23 Este es un corolario al Teorema 6.20.

7.1 Por el Teorema 6.11, cada par de excentros subtienden un ángulo recto en cada vértice del triángulo no colineal con estos excentros. El teorema se sigue.

7.3 El punto medio de I_aI es T por el último párrafo en la demostración del Teorema 7.2. Ahora AI corta al circundiámetro SOT que es mediatriz del lado BC en el punto S en el circuncírculo. Entonces A = T sii A está en la mediatriz de BC; esto es, sii AB ≅ AC.

7.5 Ya que cada lado (tal como BC) incercepta una ángulo recto en cada uno de los dos vértices (E y F) del triángulo órtico que no está en ese lado, se sigue el teorema.

7.7 Sea M el punto medio de la hipotenusa AB en el triángulo rectángulo ABC, y trace la perpendicular MN al cateto BC. Ya que AC es paralelo a MN, entonces BN ≅ CN. También MN = MN, así $\Delta BMN \cong \Delta CMN$ por *LAL*. Así CM ≅ BM ≅ AM.

7.9 Referido a la Fig. 7.6, ya que CA, CB y CF son perpendiculares, respectivamente a, BH, AH y AB, entonces CA, CB y CF contienen las alturas (AE, BD y HF) del triángulo HAB. Por lo tanto C es su ortocentro.

7.11 El punto P está en el circuncírculo por el Teorema 6.12 y no dentro del triángulo ABC. Ahora, cuando AB < AC, entonces el punto R esta fuera del segmento AB y Q está en el segmento AC. Las congruencias establecidas son todas ciertas, pero en la última ecuación, AB = AR − RB y AC = AQ + QC, así, no es cierto que AB ≅ AC.

7.13 Ya que AN_a es paralelo a OA′ y como AH es el doble de OA′ porque ellos son segmentos de alturas correspondientes para el triángulo dado y su triángulo medial, entonces $AN_a \cong OA'$. Así $AN_aA'O$ es un paralelogramo y sus diagonales AA′ y ON_a se bisecan mutuamente.

7.15 En la Fig. 7.16, OA′es paralelo y con longitud la mitad de AH por Ejercicio 7.13. Por lo tanto AO y HA′ se cortan en un punto P tal que AP = 2OP por los triángulos semejantes AHP y OA′P. Así AP es un circundiámetro y P está en la circuncircunferencia.

7.17 Para el cuadrángulo ortocéntrico ABCH, encontrar sus centroides G_a, G_b, G_c, G. El cuadrángulo deseado, digamos $L_aL_bL_cL$, es a ABCH como ABCH es a $G_aG_bG_cG$. Por lo tanto, ya que $G_aG_bG_cG$ es un tercio de ABCH en medida lineal, extendido cada uno de AG_a, BG_b, CG_c y HG doble de su propia longitud a L_a, L_b, L_c y L, los vértices del cuadrángulo ortocéntrico deseado.

7.19 Este es un corolario al Teorema 7.9.

8.1 a) Ya que AXB es un ángulo recto, como son APX y BPX, ya que $\angle XAB \cong \angle PAX$ y $\angle XBA \cong \angle PBX$, tenemos $\Delta ABX \sim \Delta AXP \sim \Delta XBP$ por *AA* (dos ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes a dos ángulos del otro). De los dos últimos triángulos, AP/PX = PX/BP y el teorema queda demostrado.

c) Ya que $\Delta EHJ \sim \Delta EFG$, entonces $EJ = 2HJ$, así $5HJ^2 = HJ^2 + (2HJ)^2 = EH^2 = r^2$. Así $HJ = r/\sqrt{5}$, y $HJ = s/2$.

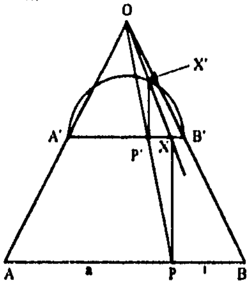
e) La construcción satisface claramente las condiciones dadas.

g) Ya que PCBA es un paralelogramo, PC ≅ AB. El triángulo PCQ es isósceles ya que la bisectriz del ángulo P es también una altura de ese triángulo.

8.3 Considere que la circunferencia A(r) corta a los lados del ángulo BCA en los puntos B y C. Trace las circunferencias B(r) y C(r) que corten a la circunferencia A(r) dentro del ángulo BAC en los puntos D y E. Entonces $\angle DAE = \angle BAC - 120°$ y la bisectriz del ángulo DAE es también la bisectriz del ángulo BAC.

Un procedimiento alternativo, sugerido por un estudiante, es bisecar el suplemento del ángulo dado y luego levantar una perpendicular a esa bisectriz.

8.5 Sobre una línea marcar AP = a y PB = 1, donde $\sqrt{a}$ es lo deseado. Sobre una línea paralela a AB marcar A′B′ = 2r donde r es la abertura del compás. Sean AA′ y BB′ que se corten en O. Sea OP que corte A′B′ en P′. Construir $P'X' = ((A'P')(P'B'))^{1/2}$ por el Problema 8.10. Ya que P′X′es perpendicular a A′B′, sea la perpendicular a AB en P que corte a la línea OX′ en X. Ver la figura que se acompaña. Por triángulos semejantes PX = $\sqrt{a}$

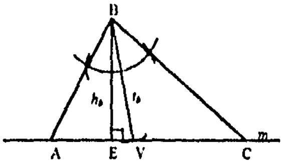


Respuesta 8.5

8.7 Calcule $(^2/_3)^{1/2}$ y marque los puntos B′ y D′ en los lados AB y AD del trapecio ABCD tal que $AB' = (^2/_3)^{1/2}AB$ y $AD' = (^2/_3)^{1/2}AD$. Trace paralelas por B′ al lado BC y por D′ al lado CD que se corten en C′. Entonces AB′C′D′es el trapecio deseado.

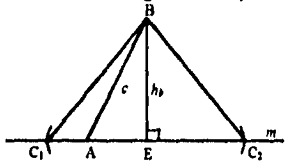
8.9 Sean b y h base y altura, respectivamente, de un triángulo dado y sea dado el segmento de longitud c. Construya x tal que $xc = bh$. En la mediatriz del segmento dado, marque un segmento de longitud x desde la línea base. El punto así construido es el vértice del triángulo deseado.

8.11 a) En un punto E en una línea base m levante una perpendicular BE de longitud h_b. Vea la figura que se acompaña. Trace arcB(t_b) que corte a m en V. Construya en B, en ambos lados de BV, rayos que hagan ángulos iguales a B/2 y que corten a m en A y C.



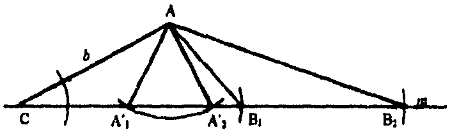
Respuesta 8.11a

c) En el punto E sobre una línea base m levante una perpendicular BE de longitud h_b, como en la figura que se acompaña. Trace la circunferencia B(c) que corte a m en A. Sea la circunferencia A(b) que corte a m en C_1 y C_2. Entonces los triángulos ABC_1 y ABC_2 son las soluciones.



Respuesta 8.11c

e) En un punto C en una línea m construya el segmento CA de longitud b y que haga el ángulo dado C con m. Trace la circunferencia A(m_a) que corte a m en A'_1 y A'_2. Localice B_1 y B_2. en m, tal que A'_1 biseque a B_1C y A'_2 biseque a B_2C, como se ve en la figura que se acompaña. Ambos triángulos AB_1C y AB_2C son soluciones.



Respuesta 8.11e

8.13 Ya que OCA es un ángulo exterior del triángulo COD, entonces $\angle OCA = \angle COD + \angle ODC = 2\angle ODC$. Análogamente $\angle AOB = \angle AOD + \angle ADO = \angle OCA + \angle ODC = 2\angle ODC + \angle ODC = 3\angle ODC$. Ya que se requiere utilizar una regla con escala, no se satisfacen las restricciones euclidianas.

8.15 40°7′.

8.16 c) La línea por (a,b) y (c,d) tiene la ecuación $y - b = (x - a)(d - b)/(c - a)$.

e) Por las partes (a) y (d), ya que solamente se pueden trazar las líneas y puntos, entonces sólo se pueden construir números racionales.

g) La circunferencia $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ y la línea $y = vx + u$ se cortan en los puntos (p,q) donde

$$p = \frac{-(a + bv + 2uv) \pm ((a + bv + 2uv)^2 - 4(1 + v^2)(u^2 + bu + c))^{1/2}}{2(1 + v^2)}$$

y $q = vp + u$. Dos circunferencias $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ y $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ se cortan en la línea $(a - d)x + (b - e)y + (c - f) = 0$, si se cortan en todos los puntos, así, este caso se reduce al de una circunferencia y una línea.

i) Ninguna de estas cantidades incluye sólo raíces cuadradas y operaciones racionales que se apliquen a números racionales.

9.1 La medición de la sombra de una pirámide requiere se localice el punto base de la altura directamente debajo de la cúspide de la pirámide, cuyo punto es inaccesible. Con dos observaciones de sombras, la distancia entre las puntas de las dos sombras de la pirámide es a la altura de la pirámide como la medidas entre las dos sombras de la vara es a su altura.

9.3 a) Sea AB un lado del polígono dado en la circunferencia con centro O. Sea M el punto medio del arco AB y N el punto medio de la cuerda AB. Entonces $y = m(AM)$ y $x = m(AB)$. Ahora utilice el teorema de Pitágoras en los triángulos OAN y AMN.

10.1 Vea Teorema 15.1.
10.3 Mediante el vector de B a A, el negativo del vector dado.
10.5 Vea Teorema 14.11.
10.7 180°.
10.9 Vea Teorema 16.1.

11.1 a) (5,0), (6,0), (5,2) c) (3,-3), (3,-2), (1,-3) e) (5,-1), (5,-2), (7,-1) g) (0,0), (0,1), (2,0)
i) (6,0), (5,0), (6, -2) k) (5,4), (6,4), (5,2) m) (0,0), (1,0), (0,2)

11.2 a) $x = 0$, $x = {}^5/_2$ c) $y = 0$, $y = x - 3$ e) $y = x - 5$, $y = -3$ g) $y = x$
i) $x = 3$, $y = 0$ k) $x = 0$, $x = {}^5/_2$, $y = 2$ m) $x = 0$, $x = 0$

11.3 Una mediavuelta alrededor de su centro y una reflexión en cualquiera de las dos línea por su centro y paralela a un par de lados, y, por supuesto, el mapeo indentidad ι.

11.4 a) Lo mismo que en la Respuesta 11.3. También una rotación de 90° o de 270° alrededor de su centro. También una reflexión en cualquier diagonal.
c) La identidad, una mediavuelta alrededor de su centro y reflexiones en las diagonales.
e) Rotaciones múltiplos de 60°, reflexiones en las mediatrices de sus lados y reflexiones en sus diagonales que pasan por su centro.

11.5 a) Una traslación de 5 unidades en la dirección negativa de las "x"-
c) Una rotación de 270° alrededor del punto (3,0).
e) Una rotación de 90° alrededor de Q.
g) Es su propio inverso.
i) Es su propio inverso.
k) Una reflexión planificada de 5 unidades en dirección negativa de las "x" con eje de simetría $y = 2$.
m) La identidad.

11.6 Las isometrías de (g) e (i) son involutorias, aquellas de (a), (c), (e), (k) y (m) no son.

11.7 a) No hay c) 4 e) 4 g) 2 i) 2 k) No hay m) 1

11.8 a) $y = x/2$ c) $y = -x/2$

11.9 a) $y = 1$ c) $y = -1$

11.11 El triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en C y el punto medio M de la hipotenusa y su imagen bajo la mediavuelta alrededor de M forma un rectángulo ACBC' cuyas diagonales son congruentes y se bisecan mutuamente en M, estableciéndose el teorema.

12.1 Para cualquier punto A en el plano, sea $\alpha(A) = B$ y $\beta(B) = C$. Entonces $(\beta\alpha)(A) = C$. Ya que β es uno a uno, ningún punto diferente de B se mapea en C por β. Análogamente, A es el único punto que se mapea en B por α. Por lo tanto $\beta\alpha$ es uno a uno.

Para cualquier punto X en el plano, ya que β es sobre, hay un punto Y tal que $\beta(Y) = X$. Análogamente, hay un punto Z tal que $\alpha(Z) = Y$. Entonces $(\beta\alpha)(Z) = X$, así, $\beta\alpha$ es sobre.

12.3 Sea α una traslación de unidad 1 en la dirección positiva del eje de las "x" y sea β una reflexión en el eje de las "y". Entonces $\beta\alpha$ mapea el origen en (-1,0) y $\alpha\beta$ mapea el origen en (1,0). Por lo tanto $\beta\alpha \neq \alpha\beta$.

12.5 Ya que α y $(\alpha^{-1})^{-1}$ ambos son inversos de α^{-1} por Teorema 12.11, como $\alpha = (\alpha^{-1})^{-1}$ por Teorema 12.12.

12.7 a) Tenemos $\alpha = \alpha\iota = \alpha(\alpha\alpha^{-1}) = \alpha^2\alpha^{-1} = \alpha\alpha^{-1} = \iota$.

12.9 Suponga que $\alpha\gamma = \beta\gamma$. Entonces $\alpha = \alpha\iota = \alpha(\gamma\gamma^{-1}) = (\alpha\gamma)\gamma^{-1} = (\beta\gamma)\gamma^{-1} = \beta(\gamma\gamma^{-1}) = \beta\iota = \beta$. El otro caso es análogo.

12.11 a) Sean α, β, γ una reflexión en el eje de las "y", una reflexión en la línea $x = 1$ y una traslación de unidad 1 en la dirección positiva del eje de las "x".

c) Si, pero $\alpha = \beta$ si α y β conmutan.

12.13 Por (1), tome $a \in S$. Por (2*), ya que $a \in S$ y $a \in S$, entonces $\iota = a^{-1}a \in S$. Por (2*), utilizando a e ι, $a^{-1} = a^{-1}\iota \in S$. Por lo tanto la condición (2) se satisface. Ahora, para a y b dados en S, entonces a^{-1} y b están en S por (2), así $ab = (a^{-1})^{-1} b$ está en S por (2*). Por lo tanto se satisface (3).

13.1 El teorema 13.3 muestra que una isometría α mapea cualesquiera tres puntos colineales en tres puntos colineales. Por lo tanto las líneas se mapean en líneas. Si P es algún punto en una circunferencia de radio r y centro O, sean P' y O' las imágenes de P y O. Ya que α es una isometría, $m(OP) = m(O'P')$, así que P' está en la circunferencia de centro O' y radio r. Análogamente, todos los puntos P' a una distancia r de O' son imágenes de los puntos en la circunferencia dada con centro en O.

13.3 Si A, B y A' son colineales, entonces B' también es colineal con ellos. Haga que la línea ABA'B' corte el eje de simetría en F. Por definición de una reflexión, **AF = FA'** y **BF = FB'**. Entonces **AB = AF + FB = FA' + B'F = B'A'**.

13.5 Para cualquier punto A, $\sigma_m(A) = A'$ sii $A = A'$ o m es la mediatriz de A'A. Pero entonces $A' = A \in m$ o m es la mediatriz de A'A, así que $\sigma_m(A') = A$. Así $\sigma^{-1}_m = \sigma_m$.

13.7 En la Fig. 13.6c, los segmentos (tal como AB) generalmente paralelos al eje de simetría m tienen generalmente el mismo sentido que sus imágenes. Esto es, AB y A'B' ambos están generalmente en el sentido que el de m. Los segmentos (tal como CA) aproximadamente perpendiculares a m tienen sus sentidos aproximadamente en orden inverso. Esto es, CA y C'A' están dirigidos más o menos hacia el eje de simetría, pero en sentido opuesto, así, cuando CA está dirigido hacia la derecha, C'A' es dirigido hacia la izquierda. Así, el sentido del ángulo BAC es opuesto al del ángulo B'A'C'. Se sigue que el sentido de cualquier triángulo es invertido por una reflexión.

13.9 Toda reflexión invierte el sentido de un triángulo, así un producto de dos reflexiones preserva el sentido. Se sigue que cualquier isometría directa, que es producto de un número par de isometrías, preserva el sentido de un triángulo.

13.11 Los Corolarios 13.17 y 13.18 establecen este teorema para un triángulo (un polígono de 3 lados). Suponga que el teorema es válido para cualquier polígono de k lados, $k \geq 3$. Sea $A_1A_2 \ldots A_{k+1}$ un polígono de k + 1 lados y sea α una isometría. Entonces $\alpha(A_1A_2\ldots A_k) \cong A_1A_2\ldots A_k$ y $\alpha(\Delta A_kA_{k+1}A_1) \cong \Delta A_kA_{k+1}A_1$ por hipótesis. Debe haber al menos un vértice A_i, $i < k$, tal que A_1, A_i y A_k no sean colineales. Ya que $\alpha(A_i A_{k+1}) \cong A_i A_{k+1}$, se sigue que $\alpha(A_{k+1})$ está del mismo lado que $\alpha(A_1A_k)$, relativo al resto del polígono imagen, como lo está A_{k+1} relativo a A_1A_k, y el polígono dado. Ahora tenemos $\alpha(A_1A_2\ldots A_{k+1}) \cong A_1A_2\ldots A_{k+1}$ por suma de regiones.

13.13 a) A'(0,0), B'(1,0), C'(0,-3), D'(1,-1), E'(2,-3), F'(15,-12), G'(-3,5)

c) A'(0,4), B'(1,4), C'(0,1), D'(1,3), E'(2,1), F'(15,-8), G'(-3,9)

e) A'(0,0), B'(0,1), C'(3,0), D'(1,1), E'(3,2), F'(12,15), G'(-5,-3)

14.1 La demostración dada en 10.6 es completamente suficiente.

14.3 Este es un corolario a los Teoremas 14.2 y 14.4.

14.5 Por el Teorema 13.13, cualquier isometría α es un producto de a lo más tres reflexiones. Ya que es directa, es un producto de exactamente dos reflexiones en los ejes de simetría *m* y *n*, una rotación si *m* y *n* se intersectan o una traslación si *m* y *n son* paralelas, siendo el mapeo identidad un caso especial de una rotación o una traslación.

14.7 Por $(\beta\alpha)(A) = \beta(A) = (1,-2)$ y $(\alpha\beta)(A) = \alpha(1,-2) = (1,2)$.

14.9 También es una traslación, el inverso de la traslación $\beta\alpha$.

14.11 Una reflexión es una reflexión planificada cuya planificación es cero. No, una traslación es directa y una reflexión planificada es opuesta.

14.13 Sea la reflexión planificada $\alpha=\sigma_g\sigma_b\sigma_a$, en la cual *g* es perpendicular a ambas *a* y *b*. Entonces $\alpha^{-1} = \sigma_a\sigma_b\sigma_g = \sigma_g\sigma_a\sigma_b$ por Sugerencia 14.10, así α^{-1} es el inverso de la planificada dada, seguida de una reflexión.

14.15 No, un producto tal, es una isometría directa.

14.16 a) (0,0), (0,1), (-3,0), (-1,1), (-3,2), (-12,15), (5,-3)
c) (0,0), (0,-1), (3,0), (1,-1), (3,-2), (12,-15), (-5,3)
e) (2,0), (2,1), (-1,0), (1,1), (-1,2), (-10,15), (7,-3)
g) (2,-4), (2,-5), (5,-4), (3,-5), (5,-6), (14,-19), (-3,-1)

14.17 a) (5,0), (6,0), (5,3), (6,1), (7,3), (20,12), (2,-5)
c) (-1,2), (0,2), (-1,5), (0,3), (1,5), (14,14), (-4,-3)

14.19 El centro de la rotación $\alpha\beta$ es el punto simétrico al centro de rotación $\beta\alpha$ en el punto medio de AB como centro de simetría. Cuando *n* y *m* son paralelas, esto es, cuando los ángulos de las rotaciones son opuestos, el producto $\beta\alpha$ es una traslación y $\alpha\beta$ es su traslación inversa.

15.1 Ya que, para un ángulo dado ABC, cualquier reflexión mapea al triángulo ABC en un triángulo congruente, mapea al ángulo ABC en un ángulo congruente. Pero cada isometría es un producto de reflexiones.

15.3 Por el Teorema 13.12, $\sigma^2_m = \iota$, pero allí hay puntos A y B tal que $\sigma_m(A) = B$ y $A \neq B$, así $\sigma_m \neq \iota$. Por supuesto, A se puede tomar como cualquier punto fuera de *m*.

15.5 Ya que *b* y *a* son perpendiculares, entonces ambos $\sigma_b\sigma_a$ y $\sigma_a\sigma_b$ representan rotaciones de 180° alrededor de su punto P de intersección por el Teorema 14.9.

15.7 Sea *m* la línea en A y B, y sean *a* y *b* las líneas por A y B y perpendiculares a *m*. Sean las líneas *c* y *d* trazadas paralelas a *a* y *b* y espaciadas tal que la distancia dirigida de *a* a *b* sea igual que la de *d* a *c* y con el punto C en la línea *c*. Finalmente, sea la línea *n* que pase por C perpendicular a c y sea n que corte a *d* en D. Entonces $\sigma_C\sigma_B\sigma_A = \sigma_D\sigma_D\sigma_C\sigma_B\sigma_A = \sigma_D\sigma_d\sigma_n\sigma_n\sigma_c\sigma_b\sigma_m\sigma_m\sigma_a = \sigma_D\sigma_d\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_D$, ya que $\sigma_d\sigma_c = \sigma_a\sigma_b$.

15.8 a) (1,0), (2,0), (1,-3), (2,-1), (3,-3), (16,-12), (-2,5)
c) (-8,-6), (-9,-6), (-8,-3), (-9,-5). (-10,-3), (-23,6), (-5,-11)

15.9 a) (0,0), (-1,0), (0,-3), (-1,-1), (-2,-3), (-15,-12), (3,5)
c) (4,6), (3.6), (4,3), (3,5), (2.3). (-11,-6), (7,11)

15.11 Si α y β son traslaciones, entonces hay puntos A, B, C tal que $\alpha = \sigma_B\sigma_A$ y $\beta = \sigma_C\sigma_B$. Entonces $\beta\alpha = \sigma_C\sigma_B\sigma_B\sigma_A = \sigma_C\sigma_A$. Ahora, tomando D tal que ABCD sea un paralelogramo, entonces $\alpha = \sigma_B\sigma_A = \sigma_C\sigma_D$ y $\beta = \sigma_C\sigma_B = \sigma_D\sigma_A$, así que

$$\alpha\beta = \sigma_C\sigma_D\sigma_D\sigma_A = \sigma_C\sigma_A = \beta\alpha.$$

16.1 Sí *a*, *b*, *c* son todas paralelas, entonces tome *d* tal que la distancia dirigida de *c* a *d* sea igual a la de *b* a *a*. Si las líneas dadas son concurrentes, entonces reemplace "distancia" por "ángulo" en la primer proposición de esta respuesta.

Inversamente, sí $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_d$, entonces $\sigma_b\sigma_a = \sigma_c\sigma_d$, así $\sigma_c\sigma_d$ es la misma traslación o rotación que $\sigma_b\sigma_a$. Por lo tanto las cuatro líneas pasan por el centro de rotación o todas son perpendiculares en la dirección de la traslación. En cualquier caso, forman un as y los ángulos o distancias dirigidas se establecen en el primer párrafo de esta respuesta.

16.3 Toda isometría directa es producto de dos reflexiones. Cada isometría opuesta es una reflexión planificada por el Teorema 16.4, así, se puede escribir como un producto $\sigma_g\sigma_b\sigma_a$, donde *g* es perpendicular a ambas a y b. Ahora, sea B el punto de intersección de las líneas b y g, tal que $\sigma_a = \sigma_g\sigma_b$.

16.5 Las trasformaciones de cada conjunto forman un subconjunto de aquellas de arriba y en cada caso, las condiciones del Ejercicio 12.12 se satisfacen.

16.7 Una rotación no trivial tiene justamente fijo su centro, pero si una rotación α tiene un punto fijo X, entonces sea $\alpha = \sigma_b\sigma_a$ donde la línea a pasa por X. Ya que $\sigma_a(X) = X$, tenemos que $X = \alpha(X) = (\sigma_b\sigma_a)(X) = \sigma_b(X)$, y X es un punto fijo bajo σ_b, también. Así X está en la línea b, también. Esto es posible solamente cuando X es el centro de rotación o cuando las líneas a y b coinciden tal que la rotación es el mapeo identidad.

16.9 Si es involutoria una rotación mediante el ángulo θ, entonces su cuadrado, una rotación mediante el ángulo 2θ, es el mapeo identidad. Esto implica que 2θ es un múltiplo de $360°$, así θ es un múltiplo de $180°$. Ya que la identidad no se llama involutoria, entonces θ es múliplo impar de $180°$, y la rotación es una media vuelta.

16.11 Ya que la isometría α mapea m en m y n en n, entonces $\alpha(P)$ deberá estar en m, ya que P está en m y m es una línea fija. Análogamente, $\alpha(P)$ deberá estar en n ya que P está en n y n es una línea fija. Por lo tanto $\alpha(P) = P$, el único punto en ambos m y n.

16.13 a) Si c) Si e) No; el producto de dos medias vueltas es una traslación.

17.1 Otros pares duales son 17.4 y 17.8, 17.5 y 17.9, 17.11 y 17.12.

17.3 Si $a = b$ o si a es perpendicular a b, entonces claramente se siguen las otras condiciones, principalmente por el Corolario 15.9.

Si $\sigma_b\sigma_a = \alpha = \sigma_a\sigma_b$, entonces $(\sigma_b\sigma_a)^2 = \iota$, asi, se aplica el Ejercicio 16.11. Los otros casos son análogos o se siguen del Teorema 16.14.

17.5 Las condiciones (1), (2) y (3) son equivalentes por los Teoremas 14.4 y 14.10. Las condiciones (2) y (4) son equivalentes algebraicamente; simplemente multiplique en la derecha de ambos lados de cada ecuación por σ_b.

17.7 Estos resultados son análogos al Teorema 17.5.

17.9 Este teorema es dual del Teorema 17.5, así que su demostración es análoga.

17.11 Ya que $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ es un producto de un número impar de reflexiones, es una reflexión planificada. Luego aplique el Teorema 15.7.

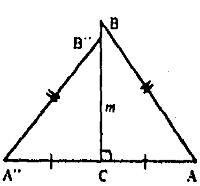
17.13 Aplique el Teorema 15.12.

17.15 Esta identidad es equivalente a $(\sigma_a\sigma_b\sigma_c)^2(\sigma_c\sigma_a\sigma_b)^2(\sigma_b\sigma_c\sigma_a)^2(\sigma_c\sigma_b\sigma_a)^2(\sigma_a\sigma_c\sigma_b)^2(\sigma_b\sigma_a\sigma_c)^2 = \iota$, que es cierta, ya que el primer y cuarto factores son inversos uno de otro, así como el segundo y el último y el tercero y el quinto.

17.17 En la relación de Thomsen, cada producto $(\sigma_A\sigma_B\sigma_C)^2$ es el cuadrado de una media vuelta, por lo tanto es la identidad. En el Ejercicio 17.16, cada tal producto es una traslación.

18.1 Sea $m(AB) = m(A'B')$, $m(\angle A) = m(\angle A')$ y $m(\angle B) = m(\angle B')$ en los triángulos ABC y A'B'C'. Sea α una isometría que mapea $\Delta A'B'C'$ en $\Delta ABC''$ así que C y C'' están en lados opuestos de AB, como en la Fig. 18.4. Haciendo que m denote la línea AB, sea $\sigma_m(C) = X$. Ya que AB es bisectriz del ángulo CAC'', X está en el rayo AC''. Análogamente, X está en el rayo BC''. Por lo tanto X = C'', el punto de intersección de los dos rayos. Ahora $(\alpha^{-1}\sigma_m)(\Delta ABC) = \alpha^{-1}(\Delta ABC'') = \Delta A'B'C'$, y el teorema se concluye.

18.3 Sean los triángulos rectángulos ABC y A'B'C' que tienen $m(\angle C) = m(\angle C') = 90°$, $m(AC) = m(A'C')$ y $m(AB) = m(A'B')$. Sea α una isometría que mapee al triángulo A'B'C' en el triángulo A''B''C, con B'' en el rayo CB y A y A'' en lados opuestos de BC. Haciendo que m denote la línea BC, entonces $\sigma_m(A) = A''$. Así $m(BA) = m(BA'') = m(B''A'')$, así que B = B''. Ahora $\sigma_m(\Delta ABC) = \Delta A''B''C \cong \Delta A'B'C'$. Vea la figura.



Respuesta 18.3

18.5 a) Si AM es la mediana, entonces los triángulos ABM y ACM son congruentes por *LLL*.
c) Si AU es la bisectriz, entonces los triángulos ABU y ACU son congruentes por *LAL*.

18.6 a) Sea la bisectriz del ángulo A que corte a la base BC en U, y sea m que denote la línea AU. Ahora σ_m mapea la línea AB en AC y ya que $m(AB) = m(AC)$, $\sigma_m(B) = C$. Así que $\sigma_m(\angle ABC) = \angle ACB$.

18.7 Por el Teorema 17.8, $\sigma_D = \sigma_C\sigma_B\sigma_A$, de donde $\sigma_D\sigma_N = \sigma_C\sigma_B\sigma_A\sigma_N = \sigma_C\sigma_B\sigma_N\sigma_C = \sigma_N\sigma_B\sigma_C\sigma_C = \sigma_N\sigma_B$, la siguiente a la última igualdad utilizando el Teorema 17.13.

18.9 Por el Teorema 18.9, $\sigma_N(\Delta ABN) = \Delta CDN$ y $\sigma_N(\Delta BCN) = \Delta DAN$.

18.11 En el trapecio ABCD, sea $m(\angle A) = m(\angle B)$ y sea m la mediatriz de AB. Ahora el rayo BC = σ_m(rayo AD). Sea $\sigma_m(D) = X$. Entonces X está en el rayo BC y ya que AB es paralelo a CD, entonces X también está en CD. Por lo tanto X = C. Esto es, $\sigma_m(AD) = BC$, así que el trapecio es isósceles.

18.13 Si la mediana AM es perpendicular al lado BC, entonces $\sigma_m(B) = C$, donde m es la línea AM. Pero el triángulo ABC es isósceles.

18.15 Sean las diagonales perpendiculares AC y BD que se corten en N. Por el Teorema 18.9, $m(BN) = m(DN)$. Haciendo que m simbolice a la línea AC, entonces $\sigma_m(B) = D$, así que $m(AB) = m(AD)$ y $m(CB) = m(CD)$. Y el teorema se sigue.

19.1 Sea P cualquier punto en una circunferencia con centro O, y sea m cualquier diámetro. Si $\sigma_m(P) = P'$, entonces $\sigma_m(OP) = OP'$, así $OP \cong OP'$ y P′ está en la circunferencia siempre que P lo esté.

19.3 Para el inverso, supongamos que son congruentes las cuerdas AB y CD. Sea α una rotación alrededor del centro de la circunferencia que lleva AB a CD. Esto es, consideremos que $\alpha(A) = C$ y $\alpha(B)$ está del mismo lado de C como está D. Ya que $\alpha(B)$ está en la intersección de la circunferencia dada y la circunferencia C(AB), entonces $\alpha(B) = D$. Ya que la distancia desde el centro de la circunferencia a una cuerda se preserva por α, el teorema se sigue.

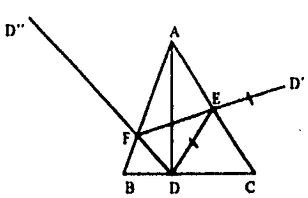
19.5 Rote el triángulo una media vuelta alrededor del punto medio de cualquier lado, formando un paralelogramo. Ahora aplique el Teorema 19.6.

19.7 Para $(\sigma_b\sigma_d\sigma_c\sigma_b\sigma_a)(A) = (\sigma_b\sigma_d\sigma_c\sigma_b)(B) = (\sigma_b\sigma_d\sigma_c)(C) = (\sigma_b\sigma_d)(D) = \sigma_b(E) = F$. Pero $\sigma_b\sigma_d\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_e$, así $\sigma_e(A) = F$.

19.9 Ya que $\sigma_{C'}\sigma_C\sigma_{B'}\sigma_B\sigma_{A'}\sigma_A$ es una traslación, es la identidad sii tiene un punto fijo. Ahora $(\sigma_{C'}\sigma_C\sigma_{B'}\sigma_B\sigma_{A'}\sigma_A)(A) = (\sigma_{C'}\sigma_C\sigma_{B'}\sigma_B\sigma_{A'})(A) = (\sigma_{C'}\sigma_C\sigma_A\sigma_B\sigma_{B'})(A) = (\sigma_{C'}\sigma_C\sigma_A\sigma_B)(C) = (\sigma_{C'}\sigma_B\sigma_{A'}\sigma_C)(C) = (\sigma_{C'}\sigma_B\sigma_{A'})(C) = (\sigma_{C'}\sigma_B)(B) = \sigma_{C'}(B) = A$. Y el teorema de sigue.

19.11 Una tangente se mapea en la otra por una reflexión en el diámetro que pase por el punto dado.

19.13 La línea DF es fija bajo la reflexión planificada $\sigma_f\sigma_e\sigma_d$ (vea Teorema 7.6), así DF es el eje de simetría. El punto D es fijo bajo σ_d y lo mapea en un punto D′ en el rayo FE bajo σ_e tal que $m(ED') = m(DE)$. Finalmente, σ_f lleva D′ al punto D″ en el rayo DF tal que FD″ = FD′ = FE + ED′ = FE + ED. Ahora DD″= DF + FD″ = DF + FE + ED.



Respuesta 19.13

20.1 Ya que $\sigma_d\sigma_e\sigma_f = \sigma_c$, entonces $\sigma_d\sigma_e = \sigma_c\sigma_f$.

20.3 Ya que, por ejemplo, CABU es un paralelogramo, entonces $\sigma_C\sigma_A\sigma_B\sigma_U = \iota$, así $\sigma_U = \sigma_C\sigma_A\sigma_B$. Ya que $\sigma_U\sigma_C = \sigma_C\sigma_V$, entonces C es el punto medio de UV, etc.

20.5 La condición $\sigma_C(U) = V$ establece que C es el punto medio de UV, etc. Ahora $\sigma_U = \sigma_B\sigma_A\sigma_C$ implica $\sigma_B\sigma_U = \sigma_A\sigma_C$, así $m(BU) = m(AC)$, pero $BU = \frac{1}{2}WU$, etc.

20.7 En el Teorema 6.20, ya que los triángulos ABD y APC son semejantes, entonces AD y AP son conjugados isogonales. Esto es, la altura y el circundiámetro que se relacionan desde un vértice de un triángulo son conjugados isogonales. Y el teorema se sigue.

20.9 La demostración del Teorema 20.15 muestra que S triseca a la mediana AA'. Análogamente S triseca a las medianas BB' y CC'.

20.11 Como se estableció, $(\sigma_d\sigma_e\sigma_f)(Y) = (\sigma_d\sigma_e)(Z) = \sigma_d(X) = Y$, ya que las tangentes desde un punto a una circunferencia son congruentes. Así, $\sigma_d\sigma_e\sigma_f$ tiene un punto fijo, así que no es una reflexión planificada, sino solamente una reflexión en una línea que pasa por ese punto fijo y también por el punto de intersección de estos tres ejes de simetría por Teorema 16.1. Esto es, d, e y f concurren.

20.13 Supongamos que los puntos medios no son todos distintos. Entonces hay puntos distintos P y S en m con imágenes $\alpha(P) = Q$ y $\alpha(S) = T$ en n, tal que algún punto R es el punto medio común de PQ y ST. Ahora $\sigma_R(PS) = QT$. Ya que σ_n deja fijos a los puntos de n, entonces $(\sigma_n\sigma_R)(PS) = QT$, también. Por el Teorema 13.20, entonces $\alpha = \sigma_R$ o $\alpha = \sigma_n\sigma_R$. En cualquier caso todos los puntos medios deseados coinciden en R.

20.15 Sean BB_1 y CC_1 perpendiculares trazadas desde los vértices B y C sobre la mediana AA'. La media vuelta $\sigma_{A'}$ lleva A'B en A'C y el rayo $A'B_1$ en el rayo $A'C_1$. Ya que hay solamente una perpendicular desde C a la línea AA', se sigue que $\sigma_{A'}(B_1) = C_1$. Por lo tanto los triángulos $BA'B_1$ y $CA'C_1$ son congruentes y se sigue el teorema.

20.17 Sea ABCD un trapecio cíclico con lados AB y CD paralelos. Refleje en ese diámetro perpendicular a AB y CD. Entonces A y D mapean a los puntos en las líneas AB y CD, respectivamente. Pero ellos también mapean a los puntos en la circunferencia. Por lo tanto mapean a B y C. Así $m(AD) = m(BC)$.

20.19 Tenemos $\sigma_{C''} = \sigma_{C'}\sigma_C\sigma_{C'}$ y $\sigma_{B''} = \sigma_{B'}\sigma_B\sigma_{B'}$ por Teorema 17.9. También,

$$\sigma_{C'}\sigma_A = \sigma_B\sigma_{C'} \qquad \text{y} \qquad \sigma_{B'}\sigma_A = \sigma_C\sigma_{B'}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\sigma_{C''}\sigma_A\sigma_{B''}\sigma_A &= (\sigma_{C'}\sigma_C\sigma_{C'})\sigma_A(\sigma_{B'}\sigma_B\sigma_{B'})\sigma_A = \sigma_{C'}\sigma_C(\sigma_{C'}\sigma_A)\sigma_B\sigma_{B'}(\sigma_{B'}\sigma_A) = \sigma_{C'}\sigma_C\sigma_B\sigma_{C'}\sigma_B\sigma_B\sigma_C\sigma_{B'}\\ &= \sigma_{C'}(\sigma_C\sigma_B\sigma_C)\sigma_{B'}(\sigma_B\sigma_C\sigma_B) = \sigma_B\sigma_C\sigma_C\sigma_B = \iota,\end{aligned}$$

utilizando el Teorema 17.13 también. Por lo tanto $\sigma_{C''}\sigma_A = \sigma_A\sigma_{B''}$, así que A es el punto medio de B''C'' por Teorema 17.9.

20.21 Las bisectrices a y b de los ángulos interiores en A y B pasan por O. Ya que $\sigma_b\sigma_a$ lleva m en n, entonces $\sigma_b\sigma_a$ es una media vuelta (ya que m y n son paralelas). Así a y b se intersectan en O en ángulo recto. Así la circunferencia en AB como diámetro pasa por el vértice O de ese ángulo recto.

20.22 a) Una rotación de 90° alrededor de M, lleva a uno de los triángulos AMC y BMD en el otro.

c) Tome M el punto medio de cualquier diagonal del cuadrilátero. Luego aplique la parte (b). Finalmente aplique la parte (a). Observe que WY y XZ, en general, no se cortan en M.

e) Las demostraciones son las mismas.

21.1 Las ecuaciones para las medias vueltas son:
para σ_O, $x' = -x$ y $y' = -y$; para σ_A, $x' = -x + 2h$ y $y' = -y + 2k$;
para σ_C, $x' = -x + 2a$ y $y' = -y + 2b$; para σ_D, $x' = -x + 2a + 2h$ y $y' = -y + 2b + 2k$.
Entonces para $\sigma_C\sigma_D\sigma_A\sigma_O$,

$$x' = -(-[-(-x) + 2h] + 2a + 2h) + 2a = x \qquad \text{y} \qquad y' = -(-[-(-y) + 2k] + 2b + 2k) + 2b = y,$$

así $\sigma_C\sigma_D\sigma_A\sigma_O = \iota$.

21.3 Ya que C es el punto medio del segmento que une $P(x,y)$ y $P(x',y')$, entonces $h = (x + x')/2$ y $k = (y + y')/2$, de lo cual se siguen las ecuaciones deseadas.

21.5 Suponga que α tiene las ecuaciones $x' = x + h$ y $y' = y + k$, y β tiene las ecuaciones $x' = x + m$ y $y' = y + n$. Entonces las ecuaciones para $\beta\alpha$ son $x' = (x + h) + m = x + (h + m)$ y $y' = (y + k) + n = y + (k + n)$, ecuaciones para una traslación.

21.7 Sean α y β las rotaciones dadas. Entonces $\beta\alpha$ tiene las ecuaciones

$$\begin{aligned}x' &= (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta - h)\cos\phi - (x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta - k)\,\mathrm{sen}\,\phi + h\\ &= x(\cos\theta\cos\phi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) - y(\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) + h(1 - \cos\phi) + k\,\mathrm{sen}\,\phi\end{aligned}$$

$= x\cos(\theta + \phi) - y\,\mathrm{sen}(\theta + \phi) + h(1 - \cos\phi) + k\,\mathrm{sen}\phi$

y de una manera semejante,

$$y' = x\,\mathrm{sen}(\theta + \phi) + y\cos(\theta + \phi) + k(1 - \cos\phi) - h\,\mathrm{sen}\phi.$$

Para que estas ecuaciones representen una traslación, debemos tener $\mathrm{sen}(\theta + \phi) = 0$ y $\cos(\theta + \phi) = +1$. Esto ocurre únicamente cuando $\theta + \phi$ es múltiplo de 360°.

21.9 Reemplace θ por $-\theta$ para obtener $x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\theta$ y $y' = -x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta$.

21.11 Ya que una media vuelta es involutoria, utilice las mismas ecuaciones.

21.13 La traslación es $x'' = x' + r$ y $y'' = y' + s$.

21.15 Si $a = 1$, entonces $b = 0$, así $x' = x + c$ y $y' = y + d$.

22.1 La imagen reflejada del punto $P(a,b)$ en el eje de las "x" es el punto $P'(a,-b)$. Así $x' = x$ y $y' = -y$ definen la reflexión en el eje de las "x". Las ecuaciones para la reflexión en el eje de las "y" se obtienen en forma análoga.

22.3 Haciendo que α y β simbolicen estas reflexiones y utilizando las ecuaciones como se dió en el Teorema 22.4, tenemos, para $\beta\alpha$,

$$\begin{aligned} x' &= (x\cos 2\theta + y\,\mathrm{sen}2\theta)\cos 2\phi + (x\,\mathrm{sen}2\theta - y\cos\theta)\mathrm{sen}2\phi \\ &= x(\cos 2\theta\cos 2\phi + \mathrm{sen}2\theta\,\mathrm{sen}2\phi) + y(\mathrm{sen}2\theta\cos 2\phi - \mathrm{sen}2\phi\cos 2\theta) \\ &= x\cos(2\phi - 2\theta) - y\,\mathrm{sen}(2\phi - 2\theta), \end{aligned}$$

y de manera semejante obtenemos

$$y' = x\,\mathrm{sen}(2\phi - 2\theta) + y\cos(2\phi - 2\theta)$$

que son las ecuaciones para la rotación deseada.

22.5 Esta es una sustitución directa.

22.7 Lo mismo que para la reflexión dada.

22.9 Ellas son $x' = (x - h)\cos 2\theta + (y - k)\mathrm{sen}2\theta + h + r\cos\theta$ y

$y' = (x - h)\mathrm{sen}2\theta - (y - k)\cos 2\theta + k + r\,\mathrm{sen}\theta.$

22.11 En las ecuaciones del Teorema 22.6, tome $a = \cos 2\theta$, $b = \mathrm{sen}2\theta$, $c = h - h\cos 2\theta - k\,\mathrm{sen}2\theta$, y $d = k - h\,\mathrm{sen}2\theta + k\cos 2\theta$.

22.13 Hay un ángulo θ tal que $a = \cos 2\theta$ y $b = \mathrm{sen}2\theta$. Y se sigue el resultado fácilmente.

22.15 Tomemos α con las ecuaciones $x' = ax - by + c$ $y' = e(bx + ay) + d$, y β con $x' = fx - gy + h$ y $y' = j(gx + fy) + k$, donde $e = \pm 1$, $j = \pm 1$, $a^2 + b^2 = 1$ y $f^2 + g^2 = 1$. Entonces $\beta\alpha$ tiene las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= f(ax - by + c) - g(ebx + eay + d) + h \\ &= (fa - geb)x - (fb + gea)y + (fc - gd + h) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y' &= j(g(ax - by + c) + f(ebx + eay + d)) + k \\ &= je((gea + fb)x + (fa - geb)y) + (jgc + jfd + k). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones tienen la forma propia. Todas las restantes muestran que la suma de los cuadrados de los coeficientes de x y y es 1. Para tal fin, observe que $e^2 = 1$, y tenemos

$$\begin{aligned} (fa - geb)^2 + (fb + gea)^2 &= f^2a^2 - 2fageb + g^2e^2b^2 + f^2b^2 + 2fbgea + g^2e^2a^2 \\ &= f^2(a^2 + b^2) + g^2(a^2 + b^2) = f^2 + g^2 = 1. \end{aligned}$$

22.17 a) Tenemos $x = x'$ y $y = -y'$; y $x = -x'$ y $y = y'$.

c) Tenemos $x = (x' - h)\cos 2\theta + (y' - k)\mathrm{sen}2\theta + h$ y $y = (x' - h)\mathrm{sen}2\theta - (y' - k)\cos 2\theta + k$.

e) Ahora $x = (x' - h)\cos 2\theta + (y' - k)\mathrm{sen}2\theta + h - r\cos 2\theta$ y

$y = (x' - h)\mathrm{sen}2\theta - (y' - k)\cos 2\theta + k - r\,\mathrm{sen}2\theta.$

22.19 Esto es cierto, ya que $\mathrm{sen}(\theta + 180°) = -\mathrm{sen}\theta$ y $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$.

22.21 Considere que los ejes de simetría m, n, p pasan por los puntos (a,b), (c,d), (e,f), respectivamente, cada uno con inclinación θ. Entonces, utilizando ecuaciones como en el Teorema 22.6, encontramos que $\sigma_p\sigma_n$ tiene las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= ((x - c)\cos 2\theta + (y - d)\mathrm{sen}2\theta + c - e)\cos 2\theta + ((x - c)\mathrm{sen}2\theta - (y - d)\cos 2\theta + d - f)\mathrm{sen}2\theta + e \\ &= x + e - c + (c - e)\cos 2\theta + (d - f)\mathrm{sen}2\theta \end{aligned}$$

y

$$y' = ((x-c)\cos 2\theta + (y-d)\operatorname{sen} 2\theta + c - e)\operatorname{sen} 2\theta - ((x-c)\operatorname{sen} 2\theta - (y-d)\cos 2\theta + d - f)\cos 2\theta + f$$
$$= y + f - d + (c-e)\operatorname{sen} 2\theta - (d-f)\cos 2\theta.$$

Se sigue que $\sigma_l\sigma_m\sigma_n$ tiene las ecuaciones

$$x' = (x-a)\cos 2\theta + (y-b)\operatorname{sen} 2\theta + a + e - c + (c-e)\cos 2\theta + (d-f)\operatorname{sen} 2\theta \quad \text{y}$$
$$y' = (x-a)\operatorname{sen} 2\theta - (y-b)\cos 2\theta + b + f - d + (c-e)\operatorname{sen} 2\theta - (d-f)\cos 2\theta.$$

Ahora, al trasladar el punto (a,b) por el producto $\sigma_l\sigma_m$ a

$$(a + e - c + (c-e)\cos 2\theta + (d-f)\operatorname{sen} 2\theta, b + f - d + (c-e)\operatorname{sen} 2\theta - (d-f)\cos 2\theta) = (g,h).$$

Luego un poco de álgebra muestra que $\sigma_l\sigma_m\sigma_n$ es una reflexión en una línea paralela a las líneas dadas y que tiene las ecuaciones $x' = (x-g)\cos 2\theta + (y-h)\operatorname{sen} 2\theta + g$ y

$$y' = (x-g)\operatorname{sen} 2\theta - (y-h)\cos 2\theta + h.$$

23.1 Sean copolares en O los triángulos ABC y A'B'C'. Considere que los planos de los dos triángulos se intersecan en la línea m. Entonces ambos AB y A'B' están en el plano ABO y se sigue que se cortan en un punto que está en los tres planos ABO, ABC y A'B'C'. Entonces estas líneas se cortan en un punto en la línea m. Análogamente, BC y B'C'se cortan en m, y CA y C'A' se cortan en m. Por lo tanto los triángulos son coaxiales en la línea m. El inverso se establece como en el Teorema 4.7.

23.3 Sean A, B, C, D, E los cinco puntos. Supoñga que AB y DE se cortan en L. Considere que cualquier línea por L corta a BC en M y CD en N. Ahora ME y NA se cortan en F, es sexto vértice del hexágono inscrito ABCDEF por el inverso del teorema del hexagrama místico de Pascal.

24.1 Es suficiente mostrar que una homotecia conserva ángulos. Utilizando la Fig. 24.1, haga que la homotecia mapee el ángulo BAC en B'A'C'. Ya que B'O/BO = A'O/AO y ∠AOB = ∠A'OB', entonces los triángulos AOB y A'OB' son semejantes. Análogamente, los triángulos AOC y A'OC' son semejantes. Al restar ángulos congruentes tenemos $m(\angle BAC) = m(\angle B'A'C')$.

24.3 La razón es el producto de las dos razones y el centro es el centro común para las dos homotecias.

24.5 Utilizando cualquier centro, rote un triángulo tal que sus lados sean paralelos al otro, luego aplique el Ejercicio 24.4.

24.7 Haciendo que las circunferencias de radios 3 y 5 tengan centros en (0,0) y $(a,0)$ con $a>8$, los centros de homotecia están en $({}^{3a}/_8,0)$ y $(-{}^{3a}/_2,0)$. Las razones son $\pm{}^5/_3$.

24.9 Por triángulos semejantes cualesquiera tales puntos O y O' dividen a la línea de los centros interna y externamente en la razón de sus radios. Por lo tanto todos tales puntos O y O' coinciden. Así estos puntos son los centros de similitud.

24.11 a) (0,0), (1,0), (0,2), c) (0,0), (−1,0), (0,−2),
e) (−2,0), (0,0), (−2,4), g) (−4,0), (−2,0), (−4,4).

24.13 Una homotecia con el mismo centro y cuya razón es el recíproco de la razón de la homotecia dada.

24.14 a) Obvio.
c) Ya que la razón de un producto de homotecias es el producto de las razónes y ya que $r^2 = 1$ sii $r = \pm 1$, y para $n>2$, $r^n = 1$ solamente cuando $r = 1$ o quizá -1 (para r real) y los casos para $r = 1$ y $r = -1$ ya están cubiertos, entonces la n más pequeña nunca es mayor que 2.

25.1 El resultado para los triángulos se sigue del Teorema 25.2. Para el polígono utilice el método de la Respuesta 13.11.

25.3 El centro es el punto medio de la línea de los centros y la razón es −1.

25.5 Este es un corolario directo al Teorema 25.5.

25.7 El centro está entre A y A' sii es negativa la razón de homotecia. Análogamente para B y B'.

25.9 Si $j \neq 1$ y $k \neq 1$, entonces el producto de las dos homotecias en orden inverso es una homotecia de razón $(k-1)/k(j-1)$.

25.11 Por la Definición 25.1, el centro es un punto fijo. Para cualquier otro punto P, sea su imagen P'. Entonces OP' = k·OP. Así, P = P' sólo si $k = 1$. Del mismo modo, si una línea está a una distancia d de O, entonces su imagen está a una distancia kd de O. Por lo tanto las únicas líneas fijas son aquellas que pasan por O.

25.13 Sea la homotecia H(O,k) que mapee al ángulo ABC en A'B'C'. Si la razón k es positiva, entonces como un punto P, interior a ∠ABC, se mueve lejos del centro de homotecia O, su imagen P' se mueve

en la misma dirección dentro de $\angle A'B'C'$. Se sigue que los ángulos ABC y A'B'C' están semejantemente orientados, y por lo tanto, los triángulos ABC y A'B'C' son directamente semejantes.

25.15 Aplique los Teoremas 25.10 y 25.14.

25.17 Por el Teorema 25.10.

25.19 Aplique el Teorema 25.9 y Sugerencia 25.16.

26.1 Por Definición 13.2.

26.3 Este resultado es análogo al del Teorema 13.4.

26.5 Suponga que cada una de las similitudes α y β mapean al triángulo ABC en A'B'C'. Ya que α y β son transformaciones (Teorema 26.4), entonces $\beta^{-1}\alpha$ es una transformación y, de hecho, una similitud. Ya que $\beta^{-1}\alpha$ mapea al triángulo ABC en él mismo, es el mapeo identidad. Por lo tanto $\alpha = \beta$.

26.7 a) Entonces AB y A'B' son paralelos tal que el punto Q es el centro de homotecia, y la rotación se reduce a la identidad.

26.9 El punto Q estará entre A y A' y entre B y B'.

26.11 Siga la sugerencia dada en el texto.

26.13 Sean α y β similitudes de razones j y k. Si $\alpha(AB) = A'B'$ y $\beta(A'B') = A''B''$, entonces $(\beta\alpha)(AB) = A''B''$ y $A''B'' = k\cdot A'B' = jk\cdot AB$. Así $\beta\alpha$ es una similitud de razón jk. Y el teorema se sigue.

26.15 a) Una circunferencia c no es un segmento y cualquier rotación α alrededor de su centro lleva a la circunferencia c a ella misma. Así, si β es una similitud, entonces también $\beta\alpha$ es una similitud, y $\beta(c) = (\beta\alpha)(c)$. Así que hay una infinidad de similitudes que llevan a una circunferencia dada en otra.

c) Sí, una infinidad de similitudes.

e) Tres de cada una.

g) Dos de cada una.

27.1 Trace otra paralela por el tercer vértice y luego aplique el Teorema 27.2. Alternativamente, si una paralela al lado BC del triángulo ABC corta los lados AB y AC en M y N, entonces H(A,AN/AC) mapea BC en MN, y H(A,AM/AB) también mapea BC en MN, así AN/AC = AM/AB, y el teorema se sigue.

27.3 Un segmento de línea paralelo a BC y de longitud r/(r+1) veces la longitud de BC.

27.5 Este es un corolario al Teorema 27.4 y la razón es DC/AB.

27.7 Una reflexión es la bisectriz del ángulo AED seguido por la homotecia H(E,ED/EA).

27.9 Esto es análogo al Teorema 27.5.

27.11 $\frac{7}{2}\sqrt{21} \approx 16.039$.

27.13 Ya que los lados de los triángulos EFA y ADB son directamente paralelos, hay una similitud que mapea un triángulo en el otro. Así el triángulo EFA es isósceles ya que el triángulo ADB es isósceles.

27.15 Aplique dos veces el Ejercicio 27.14 .

28.1 Un cuarto de área del triángulo OAM o $r^2\sqrt{3}/32$, donde r es el radio de la circunferencia.

28.3 La Sugerencia 28.3 establece el teorema.

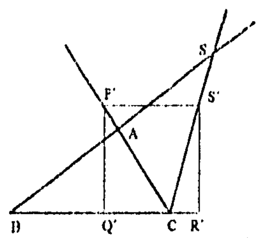
28.5 Los triángulos DEC y FEA y también los triángulos DEA y GEC son semejantes por *A4*. Entonces DE/EF = EC/AE y EC/AE = EG/DE, de lo que se sigue el resultado deseado.

28.7 Una rotación de 90° seguido por una homotecia lleva un triángulo en el otro.

28.9 Sea AU una bisectriz externa del ángulo A del triángulo ABC y utilice la demostración del Teorema 28.6.

28.11 Una reflexión en la bisectriz del ángulo B seguida por la homotecia H(B, BA/BU) mapea al triángulo BAU en el triángulo BCA. El teorema se sigue.

28.13 Desde cualquier punto P' en el rayo CA lejos del punto A trace una perpendicular P'Q' a BC, y construya el cuadrado P'Q'R'S' que contenga al punto A en su interior. Vea la figura. Suponga que CS' corta BA en S. Ahora S es un vértice del cuadrado deseado, homotético a P'Q'R'S' con el punto C como centro.



Respuesta 28.13

28.15 En general, únicamente tres vértices del paralelogramo deseado tocará al triángulo dado. Vea la Respuesta 28.13 asl como el Problema 28.10.

28.17 Utilice el método de la Respuesta 28.13 y el Problema 28.10.

29.1 Por el Teorema 29.4, H divide NO en la razón $-1/2$. Por el Teorema 29.2, $HG/GO = 2$. Entonces

$$\frac{NG}{GO}=\frac{NH+HG}{GO}=\frac{NH}{GO}+2=\frac{NH}{HO}\cdot\frac{HO}{GO}+2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{HG+GO}{GO}+2$$
$$=-\frac{1}{2}(2+1)+2=\frac{1}{2}.$$

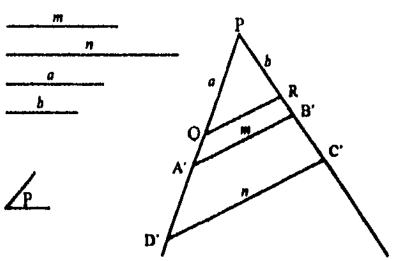
29.3 Concurren en N.

29.5 Primero aplique el Teorema 29.5, luego aplique una homotecia H(O,OP/OP').

29.7 Trace una tangente *m* a una de las circunferencias en el punto P dado. Refleje esa circunferencia en *m* y trace la cuerda común de la circunferencia imagen y de la otra circunferencia dada. Observe que esta reflexión también se puede efectuar por H(P,−1).

29.9 Trace el diámetro AOB de la circunferencia más pequeña y haga la circunferencia B(2*s*), donde *s* es el radio de la segunda circunferencia, corte la tercer circunferencia en C. Entonces AC es la secante deseada. Para mostrar este hecho, haga que AC corte a la segunda circunferencia en D. Luego OD = *s*, así que H(O,AC/AD) = H(O,AB/AO) = H(O,2).

29.11 **En el ángulo P, de la medida dada, construya PQ y PR sobre los lados de longitudes iguales a los lados no paralelos. Vea la figura que se acompaña. Luego trace, uniendo los lados del ángulo P y paralelo a QR, segmentos A'B' y D'C' de longitudes *m* y *n*, donde *m*/*n* es la razón dada. El trapecio A'B'C'D' es semejante al trapecio deseado, así que utilice una homotecia para obtener el trapecio ABCD cuyos lados no paralelos tienen las longitudes apropiadas.**



Respuesta 29.11

29.13 Trace un triángulo rectángulo que tenga la razón apropiada de los catetos, luego utilice una homotecia.

29.15 Ya que O es el ortocentro del triángulo medial A'B'C' de un triángulo ABC bajo la homotecia H(G,−1/2), entonces el centro de la circunferencia de los nueve puntos N' del triángulo medial está a tres cuartos de distancia de H a O. Por el Ejercicio 29.14, H(H,2/3) mapea al triángulo A'B'C' y N' en G,G,G, y su centro de la circunferencia de los nueve puntos N'', así N'' está a dos tercios de la distancia desde H a N'; esto es, N'' está a (2/3)(3/4) = 1/2 de la distancia desde H a O. Por lo tanto N'' = N.

29.17 Por el Teorema 7.20, el cuadrángulo ortocéntrico que se forma con los circuncentros, tiene el mismo centro de la circunferencia de los nueve puntos N como, y es congruente a, el cuadrángulo ortocéntrico dado ABCH. Por lo tanto la razón es 1/2 y el centro es N para la homotecia.

29.19 Una similitud consiste de una homotecia y una rotación con centro en el punto dado que mapea la línea dada en el lugar geométrico del tercer vértice.

29.21 Sea el triángulo dado ABC y el punto dado P. Construya cualesquiera dos triángulos PQR y PST semejantes al triángulo ABC, con Q y S en la primer línea. Entonces RT corta a la otra línea en el vértice deseado.

29.23 La Homotecia H(A, 2) establece rápidamente el resultado.

29.25 Refiriéndonos a la Fig. 6.20, rote el triángulo ABD alrededor de A, un ángulo de $90° - \angle C = \angle DAC$, y aplique la homotecia H(A,AC/AD). Entonces AD se mapea en AC y AB se mapea en AP, ya que $m(\angle BAD) = m(\angle PAC)$ y $m(\angle ADB) = m(\angle ACP) = 90°$. El teorema se concluye de los triángulos semejantes ADB y ACP.

30.1 Ya que $x' = kx$ y $y' = ky$, entonces, si $P(x,y)$ tenemos

$$OP' = (x'^2 + y'^2)^{1/2} = (k^2x^2 + k^2y^2)^{1/2} = k(x^2 + y^2)^{1/2} = k \cdot OP.$$

30.3 Sea P cualquier punto, sea α la traslación mediante el vector $(a/k - a, b/k - b)$, sea $\alpha(P) = Q$ y sea $H(O,k)$ que mapee P y Q en P'y Q'. Entonces el vector $\overline{P'Q'} = k(a/k - a, b/k - b) = (a - ak, b - bk) = (a(1-k), b(1-k))$, el vector del Teorema 30.3. Y el teorema se concluye.

30.5 Sea $pk = a$ y $qk = b$. Entonces $x' = k(px - qy + c/k)$ y $y = \pm k(px + qy + d/k)$, una isometría seguida por una homotecía con centro el origen, en el cual cualquier silimitud se puede factorizar.

30.7 Angulo cuyo coseno es $^3/_5$ en el primero y cuarto cuadrante, respectivamente; esto es, 53°8' y 306°52'.

30.9 Vea Respuesta 22.15.

30.10 a) ι

c) Tenemos $x' = (-17x - y + 7)/10$ y $y' = (x - 17y + 19)/10$.

30.11 a) La reflexión en el eje de las "x": $x' = x$ y $y' = -y$.

c) Tenemos $x' = (13x - 11y - 23)/10$ y $y' = (-11x - 13y + 31)/10$.

30.12 a) Tenemos $x' = 2y + 3$ y $y' = 2x$.

c) Tenemos $x' = 3x$ y $y' = 3y$.

e) Tenemos $x' = -x + {}^1/_2 y - 5$ y $y' = -{}^1/_2 x - y + 5$.

29.21 Sea el triángulo dado ABC y el punto dado P. Construya cualesquiera dos triángulos PQR y PST semejantes al triángulo ABC, con Q y S en la primer línea. Entonces RT corta a la otra línea en el vértice deseado.

29.23 La Homotecia H(A,2) establece rápidamente el resultado.

29.25 Refiriéndonos a la Fig. 6.20, rote el triángulo ABD alrededor de A, un ángulo de $90° - \angle C = \angle DAC$, y aplique la homotecia H(A,AC/AD). Entonces AD se mapea en AC y AB se mapea en AP, ya que $m(\angle BAD) = m(\angle PAC)$ y $m(\angle ADB) = m(\angle ACP) = 90°$. El teorema se concluye de los triángulos semejantes ADB y ACP.

30.1 Ya que $x' = kx$ y $y' = ky$, entonces, si $P(x,y)$ tenemos

$$OP' = (x'^2 + y'^2)^{1/2} = (k^2x^2 + k^2y^2)^{1/2} = k(x^2 + y^2)^{1/2} = k\cdot OP.$$

30.3 Sea P cualquier punto, sea α la traslación mediante el vector $(a/k - a, b/k - b)$, sea $\alpha(P) = Q$ y sea $H(O,k)$ que mapee P y Q en P′ y Q′. Entonces el vector $\overline{P'Q'} = k(a/k - a, b/k - b) = (a - ak, b - bk) = (a(1-k), b(1-k))$, el vector del Teorema 30.3. Y el teorema se concluye.

30.5 Sea $pk = a$ y $qk = b$. Entonces $x' = k(px - qy + c/k)$ y $y = \pm k(px + qy + d/k)$, una isometría seguida por una homotecia con centro el origen, en el cual cualquier silimitud se puede factorizar.

30.7 Angulo cuyo coseno es $^3/_5$ en el primero y cuarto cuadrante, respectivamente; esto es, 53°8′ y 306°52′.

30.9 Vea Respuesta 22.15.

30.10 a) ι

c) Tenemos $x' = (-17x - y + 7)/10$ y $y' = (x - 17y + 19)/10$.

30.11 a) La reflexión en el eje de las "x": $x' = x$ y $y' = -y$.

c) Tenemos $x' = (13x - 11y - 23)/10$ y $y' = (-11x - 13y + 31)/10$.

30.12 a) Tenemos $x' = 2y + 3$ y $y' = 2x$.

c) Tenemos $x' = 3x$ y $y' = 3y$.

e) Tenemos $x' = -x + {}^3/_2 y - 5$ y $y' = -{}^1/_2 x - y + 5$.

REFERENCIAS

Birkhoff, G. D. y Beatley R., *Basic Geometry.* Chicago,...: Scott, Foresman and Company, 1941.

Efimov, N. V., *Geometria Superior.* Editorial Moscú, 1984.

Eves, H. W., *A Survey of Geometry.* Boston: Allyn and Bacon, 1963.

Dodge, C. W., *Euclidean Geometry and Transformations.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1972.

Ryan, P. J., *Euclidean and non Euclidean Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press, 1986.