

30  
25



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRIANGULACIONES COMPLETAS DE  
SUPERFICIES DE ORDEN PEQUEÑO**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**  
**M A T E M A T I C O**  
**P R E S E N T A:**  
**RICARDO STRAUZ SANTIAGO**

**DIRIGE:**  
**DR. JAVIER BRACHO CARPIZO**



**MEXICO, D. F.**



**1996**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE**

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Ricardo Strausz Santiago

con número de cuenta 8752783-2 con el Título: Triangulaciones Completas de Superficies de Orden Pequeño

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Dr.	Javier	Bracho Carpizo	
Director de Tesis	Victor	Neumann Lara	
Dr.	Luis	Montejano Peimbert	
Dr.	Jorge Luis	Arocha Pérez	
Suplente	Mario	Eudave Muñoz	
Suplente			

A la memoria de mi madre

## §-1. Divertimento in G

En el principio fue el Verbo, y éste preguntó: "¿De qué están hechas las cosas?" Talentosa su voz respondió: "Todas las cosas están hechas de agua."

En ese momento se creó la filosofía.

...mirando su creación, el Verbo se preguntó: "¿Cuál es la figura más perfecta y cuál la más sencilla?" "La esfera ha de ser la perfección misma", contestó y creó tres esferas: una de agua, otra de luz y la tercera de noche. Poniendo a girar las esferas unas alrededor de otras, se detuvo a observar su creación. Vio salir vida del agua y aire de la vida, entonces separó unas aguas de otras con una línea recta y le llamó Firmamento. En ese momento, comenzó un eclipse. Con la noche todavía a mitad del camino entre la luz y la vida, el Verbo afirmó: "La sombra de una esfera será llamada Círculo y a la línea recta que pase por el centro de éste se le llamará Diámetro, y partirá a la figura exactamente en dos mitades."

Finalmente quería saber cuál sería la piedra angular de lo demás. Buscaba la figura elemental, mientras contemplaba sus esferas en movimiento. Fue trazando líneas en su imaginación hasta crearse la idea fundamental: "La figura más sencilla ha de ser el Triángulo. Además, si éste se inscribe en un Círculo con un lado sobre el Diámetro y la suma interna de sus ángulos es  $\pi$ , entonces contiene un ángulo recto."

De esta manera se creó un día, la Geometría.

Al día siguiente, quiso ir a ver la vida, así que secó parte de las aguas y se posó ahí. Jugando con su creación, hizo una pirámide. Pasmado por su belleza, quiso compartirla con alguien y creó un triángulo al cual dio vida.

Dijo el Verbo:

—Te he creado para que, admirando esta figura, el Tetrahedrón, escribas toda la Geometría. Pero cuídate de no perder la orientación de tus actos: sería fatídico. Por último, tu nombre será Dama porque naciste del Amo.

El Verbo enmudeció y se retiró.

La Dama corrió para comenzar su misión pero no sabía cómo, así que se puso a dibujar. No podía trazar más que garabatos, le hacían falta herramientas. Se procuró una escuadra, para trazar líneas y ángulos rectos y construyó un compás, que le permitiría delinear círculos de cualquier diámetro y en torno a cualquier punto.

Dedicó el resto del día a jugar con su nueva creación. Aprendió a dibujarse a sí misma y a enamorarse de su belleza; excitada por su propia imagen, copuló con sí misma y parió al mismísimo Proyectivo.

En ese momento se perdió la orientabilidad para siempre.

El Verbo, al percatarse de lo acontecido, dijo:

¡ Hágase la luz!

Comenzó un nuevo día.

Te he dicho que cuidaras de la orientación de tus actos, y mira lo que has hecho.

D. — Perdonad mis actos, no lo he pensado, tan sólo me he dejado llevar por el momento; después de todo no soy más que un simple triángulo.

El Proyectivo al ver a su Dama agredida, saltó en su defensa, y repuso:

P. — Señor, si hay alguna trasgresión a tu medida, no es sino culpa mía.

S. — ¡ Calla ahora y para siempre!

En su ira le extrajo un vértice y lo convirtió en una retorcida banda Möebiana. A ella le hizo perder un disco para transformarla en la imagen de un Cilindro.

M. — ¿ Cómo te atreves? Yo me encargaré de estropear tu creación, los no-orientables seremos más en número y dominaremos el Universo Entero.

C. — No hagas caso Señor, tan sólo está ofuscado.

S. — Al oír tus súplicas no puedo hacer otra cosa que perdonaros. Lo que antes sucedió será olvidado y hoy será el día cero. En cuanto a tí, diabólico ser, de pegarte a otro de tu tipo, no harás sino perder tu capacidad de ser triangulable, al igual que ahora tu creadora. Para lo cual, ¡ Que sea el Toro la única triangulación con siete vértices!

En ese momento se creó una Relledona... sin relleno.

## §0. Introducción

El problema central de esta tesis fué encontrar la mínima  $n$  para la cual la gráfica completa  $K_n$  triangula a la misma superficie de dos maneras combinatoriamente no isomorfas. Se demuestra que esta  $n$  es 9. Además, se incluyen otros resultados originales relacionados con el problema.

En la parte I se definen los conceptos básicos, y se hace un bosquejo de la historia de este problema.

La parte II se divide en dos capítulos. En el primero se estudian las  $n$  pequeñas ( $n \leq 7$ ) demostrándose que admiten inmersiones únicas. Aunque estos resultados son del "folcklor", no conocemos una referencia en la literatura donde aparezcan explícitamente. El segundo capítulo consta de material original.

Finalmente, quisiera agradecer a Víctor Neumann-Lara por transmitirme ese inmenso placer por el trabajo en la teoría de las gráficas. También agradezco a Luis Montejano y a Jorge L. Arocha su amistad y apoyo constante. A mi compañero Luis Blackaller (el Skin) le debo las imágenes de 'La Mosca' y 'La Manta', sin las cuales la presente no sería lo que es. A mi hermana Liz le debo la paciente lectura que hizo a la presente para corregir mi español. A mi padre le debo agradecer toda la vida el placer por el conocimiento y su apoyo incondicional. Por último, mil gracias a Javier Bracho (Roli-san) sin el cual la presente sería un sueño.

R. Strausz  
'el Dino'

Marzo 1996.

(19 3 1996)

## PARTE I

### *El problema*

La Biblia, aunque fue al principio un obstáculo para la aceptación del sistema copernicano, pronto se descubrió que admite interpretaciones que permiten a hombres de piedad ejemplar, como el mismo Newton, aceptar la inspiración verbal de las Escrituras y también las enseñanzas de la astronomía

*Bertrand Russell*

En lugar alguno mejor que en el análisis combinatorio puede verse la falacia contenida en la bien conocida sentencia de Kronecker: "Dios creó los números naturales; lo demás es obra nuestra". Una descripción más acertada sería: "Dios creó el infinito, y el hombre, incapaz de comprenderlo, tuvo que inventar los conjuntos finitos".

*Gian Carlo Rota*

## §1. Coloración de Mapas

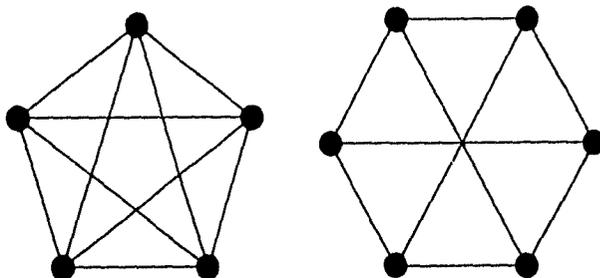
Desde su creación, existe una estrecha relación entre la Teoría de las Gráficas y la Topología (cf. E[1]). De hecho, dada una gráfica  $G = (V, \Lambda)$  se le puede asignar de manera natural un espacio topológico. Por ejemplo, por cada vértice  $v \in V$  escójase un punto  $P_v \in \mathbf{R}^3$  de tal forma que cada cuatro de ellos no sean coplanares. Denótese por  $(P_v, P_u)$  el segmento de recta abierto que se encuentra entre los puntos  $P_v$  y  $P_u$ , entonces se puede identificar a la gráfica  $G$  con el espacio (cf. B[1])

$$T(G) := \bigcup_{v \in V} P_v \cup \{(P_v, P_u) | vu \in \Lambda\}$$

Con este enfoque, se puede decir que  $G$  es encajable en una superficie  $\Sigma$  si y solo si  $T(G)$  es homeomorfo a un subespacio de  $\Sigma$ . En particular se dirá que  $G$  es plana si y solo si  $G$  es encajable en  $\mathbf{R}^2$ .

La primera caracterización de las gráficas planas fue hecha por Kuratowski (K[1]) al final de los años 20 cuando demostró el

**Teorema 1.1.** Una gráfica es plana si y solo si no contiene subgráficas homeomorfas a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .



Inspirado en este resultado, Erdős conjeturó (cf. H[1] p.117) que debía existir una familia finita de gráficas prohibidas como subgráficas de las gráficas "Toroidales". Hoy día se sabe que esto es cierto (cf. B[1] p.245).

Además de la estructura topológica arriba mencionada, hay especial interés en cierta información de índole totalmente combinatorio; a saber, el número cromático.

Defínase una  $n$ -coloración de la gráfica  $G = (V, \Lambda)$  como una función  $f: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$  de  $V$  sobre un conjunto de  $n$  'colores' (o índices) de tal forma que bicolora todas las aristas (i.e.,  $uv \in \Lambda \Rightarrow f(u) \neq f(v)$ ). El número cromático de  $G$ ,  $\chi(G)$ , es el mínimo  $n$  para el que existe una  $n$ -coloración de  $G$ . Se dirá además que la gráfica es crítica si y solo si toda subgráfica propia de  $G$  tiene número cromático menor. Es claro que toda gráfica contiene una subgráfica crítica con el mismo número cromático. Menos evidente es el siguiente:

**Teorema 1.2.** Si  $G$  es crítica con  $\chi = \chi(G)$ , entonces cada vértice de  $G$  tiene valencia al menos  $\chi - 1$ . (i.e.,  $\forall v \in V: \text{Val}(v) \geq \chi - 1$ ).

**Demostración.** Supóngase que existe  $v_0 \in V$  tal que  $\text{Val}(v_0) = n < \chi - 1$ . Sean  $v_1, \dots, v_n$  los vértices adyacentes a  $v_0$  en  $G$ . Considérese ahora la gráfica  $G \setminus v_0$  que por ser una subgráfica propia de  $G$  debe tener número cromático menor (i.e.,  $\chi(G \setminus v_0) < \chi(G)$ ) y se puede colorear usando no más de  $\chi - 1$  colores. En tal coloración no se usan más de  $n \leq \chi - 2$  para colorear los vértices  $v_1, \dots, v_n$ , lo que deja un color libre que se puede usar para colorear al vértice  $v_0$  extendiendo la coloración a una  $(\chi - 1)$ -coloración de  $G$ . Esto contradice el hecho de que  $\chi$  era el número cromático de  $G$ .  $\square$

De aquí en adelante cuando se diga que  $G(\alpha_0, \alpha_1)$  es una gráfica se quiere decir que tiene  $\alpha_0$  vértices y  $\alpha_1$  aristas. Así

**Teorema 1.3.** Si  $G(\alpha_0, \alpha_1)$  es crítica y  $\chi = \chi(G)$ , entonces

$$(\chi - 1)\alpha_0 \leq 2\alpha_1$$

**Demostración .** Al sumar la valencia de todos los vértices de  $G$ , se cuentan todas las aristas de  $G$  dos veces. Usando el teorema anterior se sigue el resultado.  $\square$

Antes de continuar con la teoría, es de mencionar uno de esos famosos resultados en Matemáticas, sumamente fáciles de enunciar y endemoniadamente difíciles de probar, que es inspiración del trabajo que continúa.

**Teorema 1.4.** Toda gráfica plana es 4-colorable.

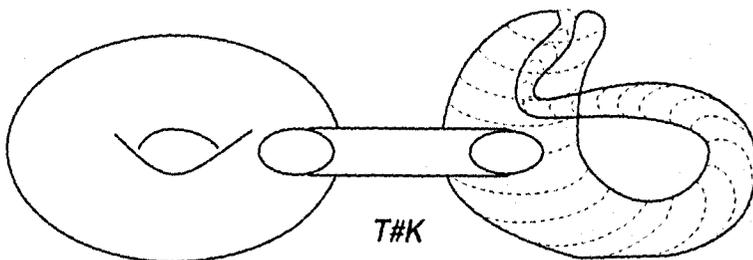
La demostración de esto es demasiado extensa y enredada para los propósitos de la presente tesis. (véase AH[1] y AHK[1] )

Este teorema (antes conocido como la Conjetura de los Cuatro Colores) ha sido sumamente prolífico en cuanto a la teoría que se ha desarrollado para tratar de demostrarlo. En un intento por lograrlo, Heawood demostró un resultado 'más general' que, para su desgracia, no contenía la C.C.C. como caso particular (H[2]).

Para comprender lo que hizo, se necesitan algunos conceptos de topología de dimensión baja: Una superficie  $\Sigma$  es un espacio topológico que localmente es homeomorfo al plano euclídeo.

Ejemplos de superficies son la Esfera, el Toro, el plano Projectivo, la Botella de Klein, la banda de Möbius, un Disco, etc., que se denotarán por  $S$ ,  $T$ ,  $P$ ,  $K$ ,  $M$  y  $D$ , respectivamente.

Una herramienta útil en el estudio de la superficies es una operación llamada Suma Conexa, que lo que hace es "pegar" dos superficies para generar otra que, en general, es algo más 'complicada'. En concreto, si se tienen dos superficies  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , se extraen de cada una de ellas un disco abierto (se puede demostrar que no importa cuál) y se identifican las fronteras de éstos.



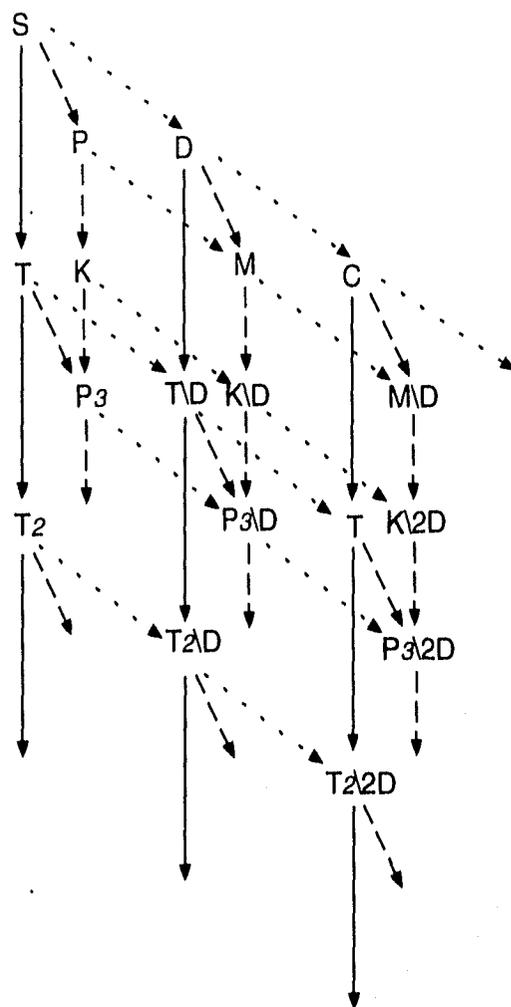
Otra herramienta muy útil en el estudio de estos espacios es la llamada Característica de Euler (ver E[2]). Considérese un encaje  $G \hookrightarrow \Sigma$  en una superficie. El complemento del encaje,  $\Sigma \setminus G$ , es una colección de  $\alpha_2$  componentes conexas abiertas disjuntas. Si son discos (que se llamarán caras) se dice que el encaje es Celular. El número

$$E(\Sigma) = E(G, \Sigma) := \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

es un invariante de vital importancia que se puede demostrar que sólo depende de la superficie y se le conoce como su *Característica de Euler*.

No es la intención de esta tesis el mostrar una caracterización completa de las superficies, sin embargo se mencionará sin demostración cómo se logra ésta (para un tratamiento detallado véase R[1] cap.3 ó E[3] cap.15).

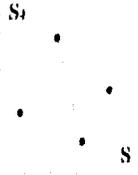
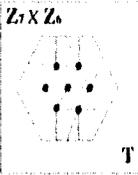
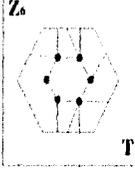
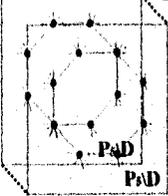
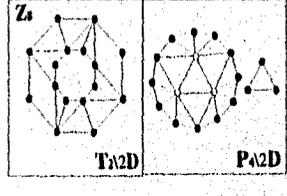
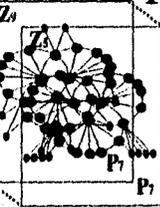
La esfera es un elemento neutro de la suma conexas. A una superficie se le pueden sumar básicamente dos cosas: un Toro, que disminuye su característica de Euler en dos (i.e.,  $E(\Sigma \# T) = E(\Sigma) - 2$ ), o un Proyectivo, que disminuye la característica en uno y además transforma la superficie en no-orientable (unilateral). Finalmente a toda superficie se le puede extraer un disco, transformándola en una superficie con frontera. De aquí en adelante cuando se diga superficie, se entenderá una superficie con o sin frontera. Es claro que cada vez que se extrae un disco se aumenta en uno el número de componentes en la frontera y se reduce la característica en uno. Así, se obtiene el siguiente diagrama, en el cual se representa con una flecha punteada la operación de extraer un disco, con una rayada la de sumar un Proyectivo y finalmente con una continua la de sumar un Toro:



En el diagrama anterior (y de aquí en adelante) se denotó por  $T_\gamma$  a la suma conexa de  $\gamma$  toros, o, en otros términos, al toro de género  $\gamma$ . Análogamente se hizo con  $P_{\bar{\gamma}}$  para denotar a la superficie no orientable (en particular  $K = P_2$ ) de género  $\bar{\gamma}$ . De lo anterior se deduce que para conocer completamente una superficie es necesario y suficiente conocer tres valores: La característica de Euler, el número de componentes en la frontera y si es o no orientable la superficie.

Ésto inspiró la creación de la siguiente tabla en la que el eje de las abscisas representa el número de componentes en la frontera y las ordenadas son la característica de Euler. El signo diferencia la orientabilidad (+ : orientable, - : no-orientable). Nótese que  $E(S) = 2$ ,  $E(T_\gamma) = 2 - 2\gamma$  y  $E(P_{\bar{\gamma}}) = 2 - \bar{\gamma}$ .

# TABLA APERIÓDICA DE LAS SUPERFICIES

	0		1		2	
	+	-	+	-	+	-
2						
1						
0						
-1						
-2						
-3						
-4						
-5						

Sea  $\Sigma$  una superficie cerrada, es decir, sin frontera. Es claro que, dado un encaje celular  $G(\alpha_0, \alpha_1) \hookrightarrow \Sigma$  con  $\alpha_2$  caras, cada cara tiene al menos 3 aristas en su frontera y que cada arista está en 2 caras, entonces  $3\alpha_2 \leq 2\alpha_1$ , lo que implica el siguiente

**Teorema 1.5.** Sea  $G(\alpha_0, \alpha_1)$  una gráfica encajable en la superficie cerrada  $\Sigma$ , entonces

$$\alpha_1 \leq 3(\alpha_0 - E(\Sigma))$$

**Corolario 1.1.** Si existe un encaje triangular de la gráfica  $G$  en la superficie  $\Sigma$ , entonces

$$\alpha_1 = 3(\alpha_0 - E(\Sigma))$$

**Definición 1.1.** El Número Cromático  $\chi(\Sigma)$  de una superficie cerrada  $\Sigma$  es el máximo número cromático de las gráficas encajables en  $\Sigma$ . i.e.,

$$\chi(\Sigma) = \max_{G \hookrightarrow \Sigma} \chi(G)$$

En 1890 Heawood encontró una cota superior al número cromático de cada superficie, cuando demostró el siguiente

**Teorema 1.6.** Si  $\Sigma$  es una superficie cerrada con característica de Euler  $E = E(\Sigma)$ , entonces

$$\chi(\Sigma) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24E}}{2} \right\rfloor$$

**Demostración** . Sea  $G(\alpha_0, \alpha_1)$  una gráfica crítica encajable en alguna superficie  $\Sigma$  con el mismo número cromático (i.e.,  $\chi(G) = \chi(\Sigma)$ ), entonces por los Teoremas 1.3 y 1.5 tenemos que

$$(\chi(G) - 1)\alpha_0 \leq 2\alpha_1 \quad \text{y} \quad \alpha_1 \leq 3(\alpha_0 - E(\Sigma)),$$

$$(\chi - 1)\alpha_0 \leq 6\alpha_0 - 6E$$

$$(*) \quad (\chi - 1) \leq 6 - \frac{6E}{\alpha_0}.$$

Considérese por separado los casos:  $E \leq 0$ ,  $E = 1$  y finalmente  $E = 2$ .

Supóngase  $E \leq 0$ . Como  $\alpha_0 \geq \chi$ , entonces

$$\chi - 1 \leq 6 - \frac{6E}{\chi}$$

$$\chi^2 - 7\chi + 6E \leq 0.$$

Por lo tanto

$$\left( \chi - \frac{7 + \sqrt{49 - 24E}}{2} \right) \left( \chi - \frac{7 - \sqrt{49 - 24E}}{2} \right) \leq 0.$$

Luego, como  $E \leq 0$ ,  $\sqrt{49 - 24E} \geq 7$ . Además  $\chi \geq 1$ , entonces el segundo factor es siempre positivo y el primero negativo.

Supóngase ahora que  $E = 1$  (i.e.,  $\Sigma$  es el Plano Proyectivo). De (\*) se deduce que

$$\chi - 1 \leq 6 - \frac{6}{\alpha_0} < 6$$

Como  $\chi$  debe ser un número entero se sigue que

$$\chi \leq 6 = \frac{7+5}{2} = \frac{7 + \sqrt{49 - 24E}}{2}$$

El tercer caso,  $E = 2$ , es el caso de la celebrada C.C.C. □

Desde entonces se conoce como la *Conjetura de Heawood* que la desigualdad anterior es realmente una igualdad, para lo cual hay que exhibir un encaje  $G \hookrightarrow \Sigma$  de una gráfica que iguale su número cromático a la cota de anterior. Este problema dio lugar al monumental trabajo de Ringel-Youngs (R[1]) en el que se aborda la siguiente pregunta:

Dada la superficie  $\Sigma$ , ¿cuál es la máxima  $n$  para la cual existe un encaje de  $K_n$  en  $\Sigma$ ?  
o de manera equivalente:

Dado  $n$  ¿qué superficies  $\Sigma$  tienen la propiedad de que  $K_n$  puede ser encajable en  $\Sigma$ ?

**Definición 1.2.** El género (orientable)  $\gamma(G)$  de una gráfica  $G$  es el mínimo  $\gamma$  para el cual  $G \hookrightarrow T_\gamma$ , es decir,  $\gamma = \gamma(G) \Leftrightarrow G \hookrightarrow T_\gamma$  y  $\neg(G \hookrightarrow T_{\gamma-1})$ .

De lo anterior se deduce que si  $\gamma = \gamma(G)$

$$\alpha_1 \leq 3\alpha_0 - 6 + 6\gamma$$

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\alpha_1 - 3\alpha_0 + 6}{6} \right\rceil$$

Así, se puede definir el problema (conocido en la literatura Inglesa como "Thread Problem") de encontrar el género de una gráfica completa. Si  $G = K_n$ ,  $\alpha_0 = n$  y  $\alpha_1 = \binom{n}{2}$ , entonces

$$\gamma(K_n) \geq \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil \quad n \geq 3.$$

Es en R[1] que se demuestra que la fórmula anterior es realmente una igualdad exhibiendo encajes de  $K_n$  en  $T_\gamma$  y de manera análoga se demuestra que el género no-orientable  $\bar{\gamma}(K_n)$  es

$$\bar{\gamma}(K_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil, & \text{si } 7 \neq n \geq 3; \\ 3, & \text{si } n = 7. \end{cases}$$

## §2. Triangulaciones Tensas

El problema central de esta tesis es el problema del isomorfismo:

Dos encajes  $i : K_n \hookrightarrow \Sigma$  y  $j : K_n \hookrightarrow \Sigma$  son equivalentes si y solo si existe un homeomorfismo  $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$  de tal forma que  $h(i(K_n)) = j(K_n)$ . En estos términos se puede plantear la pregunta:

¿Cuál es el mínimo  $n$  para el cual existen dos encajes “triangulares” de  $K_n$  en la misma superficie  $\Sigma$  que *no* sean equivalentes?

Ringel en su trabajo R[1] no deja huella de haberse formulado ésta. Más aún, exhibe dos encajes orientables no isomorfos de  $K_{12}$  en la misma superficie y no lo menciona.

Se abordará este problema traduciéndolo a un lenguaje puramente combinatorio. Para ésto, se comienza por definir una clase de hipergráficas (cf. ABN[1],W[1]):

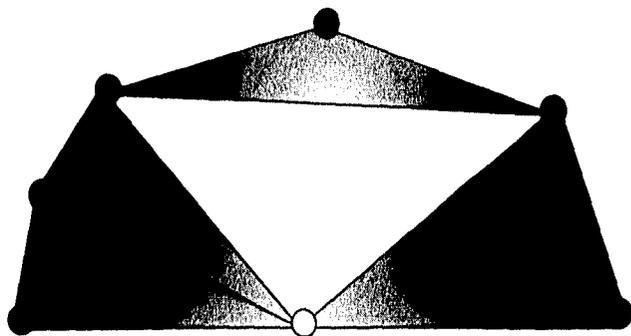
**Definición 2.1.** Una 3-gráfica  $H = (V, \Delta)$  consta de un conjunto (finito)  $V$  de vértices y una familia  $\Delta$  de subconjuntos de  $V$  todos de cardinalidad tres, los que se llamarán triángulos. Es decir,

$$\Delta \subset V^{(3)} := \{X \subset V \mid |X| = 3\}.$$

Con esta terminología, una 2-gráfica sería lo que se conoce simplemente como gráfica. De hecho, dada una 3-gráfica  $H = (V, \Delta)$  existe una 2-gráfica asociada  $\mathcal{S}(H) = (V, \Lambda)$  donde  $\Lambda = \{xy \in V^{(2)} \mid \text{existe } xyz \in \Delta\}$  que se conoce como el 1-esqueleto de  $H$ . Otra gráfica que se asocia a las 3-gráficas es, dada  $H = (V, \Delta)$  y un vértice  $v \in V$

**Definición 2.2.**  $\mathcal{T}_H(v) := (V \setminus v, \Lambda)$  es la traza de  $v$  en  $H$ , donde

$$\Lambda := \{uw \in V^{(2)} \mid uww \in \Delta\}$$



$\mathcal{T}(v)$

La figura anterior representa una 3-gráfica en gris y la traza del vértice blanco en negro.

Además, las 3-gráficas vienen acompañadas naturalmente de una noción de isomorfismo, a saber, una biyección de los vértices que preserve a la familia de triángulos.  $f: V \rightarrow V'$  es un isomorfismo entre  $H$  y  $H'$  si  $f$  es una biyección y

$$\delta \in \Delta \iff f(\delta) \in \Delta'.$$

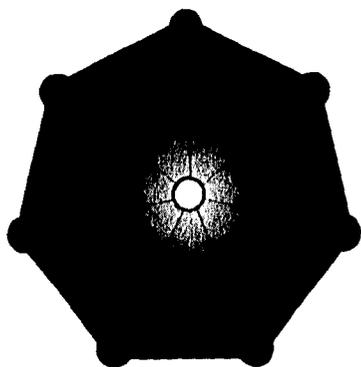
**Definición 2.3.** El conjunto de todos los isomorfismos de una 3-gráfica  $H$  sobre sí misma operando con la composición de funciones define un grupo, llamado el grupo de automorfismos de la hipergráfica,  $\text{Aut}(H)$ .

Se dirá que el grupo de automorfismos actúa transitivamente si dados dos vértices cualesquiera, existe un elemento del grupo que tomando como argumento a uno, tiene como imagen al otro, i.e., si existe un automorfismo que manda uno en el otro.

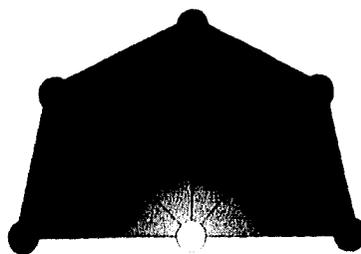
Es claro que si dos hipergráficas son isomorfas en el sentido anterior, entonces sus respectivos grupos de automorfismos lo son en el sentido usual de la teoría de grupos. Agraciada o desgraciadamente el regreso no es cierto, por lo que la condición de tener el mismo grupo de automorfismos es una herramienta que sirve para distinguir cuando dos 3-gráficas no son isomorfas (tienen distinto grupo de automorfismos) pero no sirve para certificar que sí lo sean.

Ahora se enfocará la atención un poco más, para dedicarla a estudiar una subclase de la clase de todas las 3-gráficas, misma que se describe en la siguiente

**Definición 2.4.** Una 3-gráfica  $H = (V, \Delta)$  es un 3-ciclo, o una 3-cadena, si para cada vértice  $v \in V$ , la traza de  $v$  en  $H$  es un ciclo, o respectivamente una cadena (pasco).

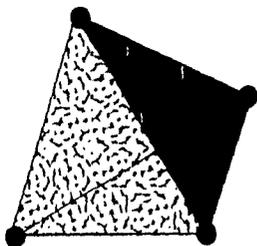


3-Ciclo



3-Cadena

Ejemplos de estas estructuras son: un tetraedro y un triángulo respectivamente.



Notación: cuando se haga referencia a la traza de un vértice  $v$  en una 3-cadena (3-ciclo) se hará diciendo simplemente  $\mathcal{T}(v)$  o exhibiendo una permutación (cíclica) de los vértices restantes:

$$v.v_1v_2 \dots v_{n-1}$$

Nótese que los 3-ciclos corresponden precisamente a encajes triangulares de gráficas completas en superficies cerradas, debido a que la vecindad de cada vértice es esencialmente un disco en el que están todos los demás vértices. Además, dado el orden  $n$  (cardinal de  $V$ ), el tamaño (cardinal de  $\Delta$ ) del 3-ciclo está determinado por  $\frac{n(n-1)}{3}$ . Ésto es porque si se cuentan los triángulos alrededor de cada vértice, son  $n - 1$  y si se hace esto en todos los vértices, se cuenta cada triángulo exactamente tres veces.

Por lo tanto la característica de Euler está ya determinada:

$$E(H) = n - \binom{n}{2} + \frac{n(n-1)}{3} = \frac{n(7-n)}{6}.$$

Nótese también que lo anterior tiene sentido sólo cuando  $\frac{n(n-1)}{3}$  es entero, i.e.,

$$n \equiv 0, 1 \pmod{3}.$$

Estos objetos son una subclase de los objetos con los que se enfrentó Ringel en  $R[1]$  y por él se sabe que existen siempre que la relación anterior se cumpla.

Las 3-cadenas, sin embargo, son objetos nuevos de estudio. Corresponden a encajes de gráficas completas en superficies con frontera que en el problema de coloración de mapas no eran de importancia. La frontera de una 3-cadena  $H = (V, \Delta)$  es la gráfica  $\partial H := (V, \Lambda)$  donde  $uv \in \Lambda$  si y solo si  $v$  es un vértice terminal de la cadena  $\mathcal{T}_H(u)$  (si y solo si  $u$  es vértice terminal de  $\mathcal{T}_H(v)$ ), es decir, la frontera consta de las aristas del 1-esqueleto que sólo están contenidas en un triángulo. De esto se desprende que la frontera es una gráfica regular de valencia 2 y por tanto es la unión disjunta de ciclos.

Análogamente, dado el orden  $n$  de una 3-cadena, su tamaño es  $\frac{n(n-2)}{3}$  y su característica está dada por  $\frac{n(5-n)}{6}$ .

Con los términos anteriores se puede plantear el problema de esta tesis como sigue,

**PROBLEMA:.** *¿Cuál es la mínima  $n$  para la cual existen dos 3-ciclos (3-cadenas) de orden  $n$  que triangulen la misma superficie y no sean isomorfos?*

Antes de continuar, quisiera hacer una breve reseña de cómo surgió la inquietud de saber cuál es el orden más pequeño de dos encajes no isomorfos de una gráfica completa en la misma superficie.

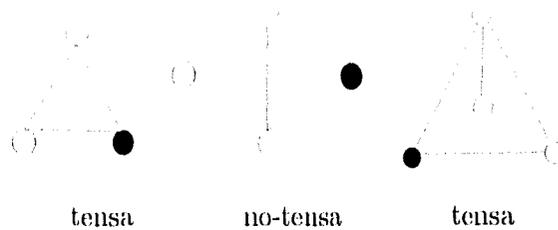
Como se dijo antes, el interés por este tipo de encajes surge, quizá por primera vez, en el estudio de coloraciones de mapas en superficies. Sin embargo, Ringel aparentemente no se preguntó el problema del isomorfismo. Más aún, los teoremas que giran alrededor de las inmersiones de gráficas hablan, casi todos, de existencia y no de unicidad.

Por otro lado, más recientemente ha habido teóricos en combinatoria que han puesto especial atención en "contar" triangulaciones en general, problema que hasta donde yo sé permanece abierto (cf. FG[1]).

A pesar de lo anterior, el presente problema surge de manera independiente, en el estudio de un concepto que generaliza de alguna manera la noción de conexidad para gráficas:

una gráfica se dice que es conexa si y solo si no existe una bipartición del conjunto de vértices sin aristas transversales; esto es, que para toda 2-coloración de los vértices, existe una arista que usa los dos colores. Análogamente,

**Definición 2.5.** Una 3-gráfica es Tensa si y solo si para toda 3-coloración de sus vértices, existe un triángulo heterocromático, i.e. que usa los tres colores.



A su vez, el concepto de tensión está basado en el de Número Heterocromático de Hipergráficas introducido en ABN[1], mismo que se inspira en la Desconexión Libre-de-Triángulos de Digráficas N[1].

Con estos conceptos se puede extender también la noción de árbol: un árbol es una gráfica minimal en aristas que es conexa, un 3-árbol es una 3-gráfica minimal en triángulos que es tensa. Estudiando estos objetos, surgió una familia infinita de 3-árboles, que se define a continuación.

De ahora en adelante  $p = 2n + 1$  denotará un número primo y  $\mathbf{Z}_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}$  el campo de  $p$  elementos. Además, sea  $\mathbf{Z}_p^* = \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$  el grupo multiplicativo de  $\mathbf{Z}_p$ . Denótese por  $V_n := \mathbf{Z}_p^* / \{-1, 1\}$  al conjunto de  $n$  vértices y a sus elementos por  $[x] \in V_n$  cuando se quiera hacer énfasis en que son clases de equivalencia,  $[x] = \{x, -x\}$ , o simplemente por  $x \in V_n$ .

**Definición 2.6.** Sea

$$\mathcal{L}_n := (V_n, \Delta_p)$$

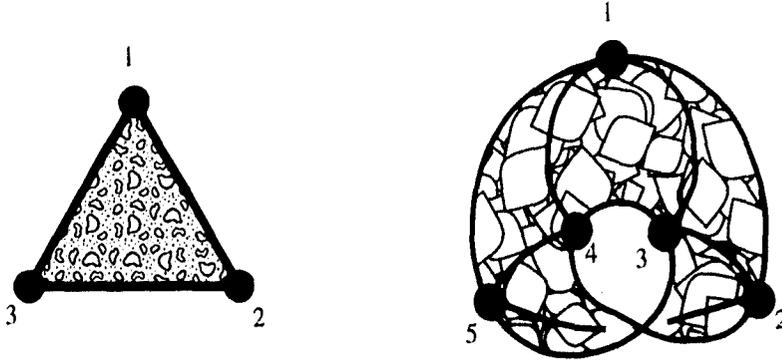
la 3-gráfica cuyos triángulos son las 3-aristas  $\{[x], [y], [z]\}$  tales que  $x + y = z$ .

**Lema 2.1.**  $\mathcal{L}_n$  es una 3-cadena.

**Demostración .** Basta demostrar que para todo vértice  $v$  de  $\mathcal{L}_n$ ,  $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_n}(v)$  es una cadena. El paseo  $2, 3, \dots, n = \frac{(p-1)}{2}$  es la traza del 1 pues,  $2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, \dots, n - 1 + 1 = n$  y el 1 no aparece en ninguna otra igualdad  $x + y = z$  con tres elementos distintos. De la definición se desprende inmediatamente que el grupo  $\mathbf{Z}_p^*$  actúa transitivamente en los

vértices, pues para todo vértice  $v$  de  $\mathcal{L}_n$  hay un automorfismo que mapea el 1 a  $v$ , a saber, la multiplicación por  $v$ . Tal automorfismo debe ser un isomorfismo entre  $\mathcal{T}(1)$  y  $\mathcal{T}(v)$  y, por tanto,  $\mathcal{T}(v)$  es un paseo.  $\square$

Ejemplos de ésta familia son:  $\mathcal{L}_3$  y  $\mathcal{L}_5$



J.L. Arocha, J. Bracho y V. Neumann-Lara en su siguiente artículo (ABN[2]) aportan una operación combinatoria que “copula” la información de dos 3-cadenas para construir un 3-ciclo. A partir de ésta y de la familia antes descrita, se construye de manera natural una familia infinita de 3-ciclos. La construcción es como sigue:

**Definición 2.7.** Sean  $H_0 = (V_0, \Delta_0)$  y  $H_1 = (V_1, \Delta_1)$  dos 3-cadenas con fronteras  $\partial H_0 = (V_0, \Lambda_0)$  y  $\partial H_1 = (V_1, \Lambda_1)$  respectivamente. Sea además  $\varphi: V_1 \rightarrow V_0$  un isomorfismo entre sus fronteras. Fíjese alguna orientación para cada ciclo de  $\partial H_1$  (denotando  $\vec{\partial H_1} = (V_1, \vec{\Lambda}_1)$  la digráfica inducida por ésta), y asígnese a  $\partial H_0$  la orientación que hereda a través de  $\varphi$ . Entonces se define

$$H = H_0 \diamond_{\varphi} H_1$$

la Cópula de  $H_0$  y  $H_1$  como  $H := (V, \Delta)$ , donde  $V$  es la unión disjunta de  $V_0$  y  $V_1$ ,

$$V := V_0 \sqcup V_1,$$

$$\text{y si } xyz \in \Delta_0 \Rightarrow xyz \in \Delta,$$

$$xyz \in \Delta_1 \Rightarrow \varphi(x)yz \in \Delta,$$

$$xy \in \vec{\Lambda}_1 \Rightarrow xy\varphi(y) \in \Delta \quad \text{y} \quad \varphi(x)\varphi(y)y \in \Delta.$$

En ABN[2] se demuestra que  $H_0 \diamond_{\varphi} H_1$  es efectivamente un 3-ciclo.

Nótese que con esta construcción a la mano, por cada 3-cadena se pueden construir varios 3-ciclos; a saber, la cópula con signo misma y diferentes  $\varphi$ . Y por cada 3-ciclo de orden  $n$  se pueden construir, en principio,  $n$  3-cadenas de orden  $n - 1$  que, además, tienen frontera conexa; basta extraerle un vértice (junto con los triángulos en los que incide) para convencerse de esto.

También, así como podemos extraer a un 3-ciclo un vértice para crear una 3-cadena con frontera conexa,

**Definición 2.8.** Dada una 3-cadena  $H = (V, \Delta)$  con frontera conexa  $\partial H = (V, \Lambda)$ ,  $H^+ := (W, \Delta^+)$  es un 3-ciclo donde  $W := V \sqcup \{x\}$  y  $\Delta^+ := \Delta \cup \{xyz \mid yz \in \Lambda\}$

Un ejercicio interesante es demostrar  $\mathcal{L}_3 \diamond \mathcal{L}_3 \cong \mathcal{L}_5^+$ , que es la triangulación del Plano Proyectivo.

En la siguiente parte se demostrará que la solución al problema del isomorfismo para 3-cadenas es  $n = 8$ , donde existen cinco 3-cadenas diferentes, tres de las cuales “viven” en la misma superficie. Además se demostrará que existen dos 3-ciclos de orden  $n = 9$ .

El capítulo 3 demostrará, en orden creciente de  $n$ , que los casos donde  $n \leq 7$  son únicos. En el capítulo 4, se acercará la cota superior en orden decreciente, tal como aconteció históricamente, para dar lugar a un teorema general que involucra a las construcciones  $\diamond$  y  $^+$  y a una conjetura sobre los números primos.

(19 3 1996)

## PARTE II

### *La solución*

Tenemos una intuición sobre cuáles son los casos adecuados, intuición que, si bien es extremadamente falible, basta para descartar una cantidad de tipos falaces de inducción que los lógicos pueden inventar, pero que ninguna persona cuerda aceptaría. Nuestro propósito debe ser sustituir esta intuición por algo que, aunque no vaya contra ella, sea al mismo tiempo más explícito y más confiable.

*Bertrand Russell*

La matemática pura consiste enteramente en afirmaciones tales como la de que si tal o cual proposición es verdadera para cualquier cosa, entonces tal otra proposición es verdadera para dicha cosa. Lo esencial es no discutir si la primera proposición es realmente verdadera y no mencionar cuál es esa cosa cualquiera para la que se supone serlo (...). Si nuestra hipótesis se refiere a una cosa cualquiera, y no a algunas o varias cosas particulares, entonces nuestra deducción forma parte de la matemática. Y así puede definirse la matemática como aquel campo en el que no sabemos nunca de qué estamos hablando ni si lo que decimos es verdad.

*Bertrand Russell*

### §3. Los Casos Únicos ( $n \leq 7$ )

En lo que sigue, se demostrará que tanto la Esfera como el plano Proyectivo y el Toro sólo aceptan una triangulación completa. Se exponen también resultados análogos para estas superficies menos un Disco. Se desprenderá de esto que la Botella de Klein no es triangulable con una gráfica completa.

**Lema 3.1.** *Para que exista una única 3-Cadena  $H$  de orden  $n$  con frontera conexa es necesario y suficiente que exista un único 3-Ciclo  $H^+$  de orden  $n+1$  cuyo grupo de automorfismos actúe transitivamente en sus vértices.*

**Demostración . Necesidad.** Sea  $H$  la única 3-cadena de orden  $n$  con frontera conexa. Sean  $H^+$  y  $G$  dos 3-ciclos de orden  $n + 1$ . Pero  $G \setminus v \cong H \cong G \setminus v'$ , para cualesquiera  $v$  y  $v'$  vértices de  $G$ , entonces existen isomorfismos  $h : G \setminus v \rightarrow H$  y  $h' : H \rightarrow G \setminus v'$ , que se pueden extender a isomorfismos de  $G$  sobre  $H^+$ . Además su composición  $h \circ h'$  se extiende de manera natural a un automorfismo de  $G$  que manda  $v$  en  $v'$ .

**Suficiencia.** Sea  $H^+$  el único 3-ciclo de orden  $n + 1$  cuyo grupo de automorfismos actúa transitivamente. Sean  $H$  y  $G$  3-cadenas con frontera conexa de orden  $n$ , entonces  $H^+ \cong G^+$ . Por la acción transitiva del grupo, tanto en una triangulación como en otra, existe un isomorfismo que manda el vértice extra de una en el vértice extra de la otra y por tanto  $H \cong G$ . □

Aunque trivial, se tiene el siguiente

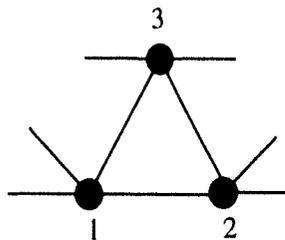
**Lema 3.2.**  $\mathcal{L}_3$  es la única 3-Cadena de orden 3

**Corolario 3.1.** Existe una única triangulación completa de la Esfera, a saber el Tetrahedro.

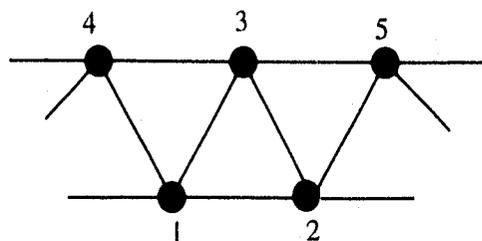
Menos trivial, es el siguiente

**Lema 3.3.**  $\mathcal{L}_5$  es la única 3-Cadena de orden 5

**Demostración .** Sea  $H$  una 3-Cadena de orden 5. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el triángulo 123 es una 3-arista de  $H$ .



Al menos dos de las aristas del 1-esqueleto del triángulo 123 son internas (i.e. no están en la frontera) pues de lo contrario la traza del vértice entre las dos aristas frontera se desconectaría, sean éstas la 13 y la 23. Ésto induce dos triángulos más que se puede suponer son 134 y 235.



Así, se completa la traza del vértice 3. Sólo faltan las aristas 24, 15 y 45, y un par de triángulos. Suponer que esos dos triángulos no son 145 y 245 llevaría a una contradicción.

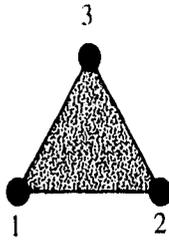
De aquí que  $H \cong \mathcal{L}_5$ . □

**Corolario 3.2.** Existe una única triangulación completa del plano Projectivo, a saber  $\mathcal{L}_5^+ \cong \mathcal{L}_3 \diamond \mathcal{L}_3$ .

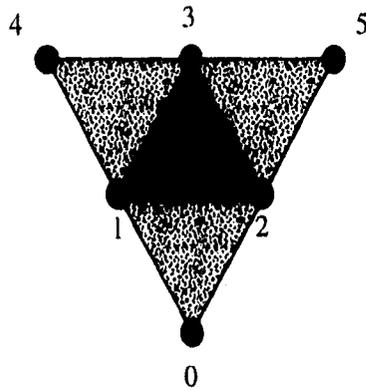
**Demostración .**  $\mathbf{Z}_{11}^*$  actúa transitivamente en los vértices de  $\mathcal{L}_5$  □

**Lema 3.4.** Existe un único 3-ciclo de orden 7.

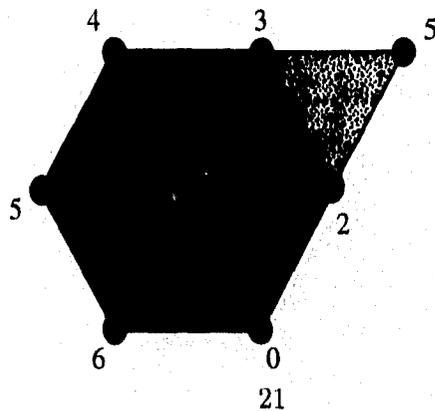
**Demostración .** Sea  $H$  un 3-Ciclo de orden 7. Se verá que la estructura de  $H$  está forzada. Comiencese por reconstruir ésta alrededor de un triángulo, por ejemplo el 123.



Todas las aristas del 1-esqueleto de éste triángulo son internas lo que induce tres triángulos distintos más, sean éstos 012, 134 y 235.



Para Completar la traza del vértice 1 faltan las aristas 15 y 16. Se puede suponer que los triángulos 145 y 160 son 3-aristas de  $H$  (Suponer las 3-aristas 146 y 150 es totalmente análogo y simétrico al caso que se está analizando). Se tiene entonces,

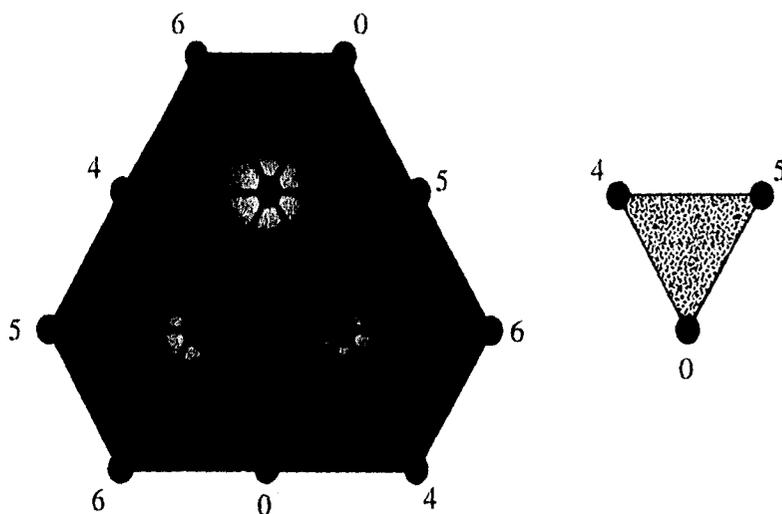


Para completar la traza del 2 faltan los vértices 4 y 6. Suponer que el triángulo 026 es una 3-arista de  $H$  'cerraría' la traza de 0, por lo que tiene que estar el 024. Y entonces la traza del 2 tiene que ser

$$2. 1 3 5 6 4 0.$$

Y análogamente la traza del 3 es

$$3. 5 2 1 4 6 0.$$



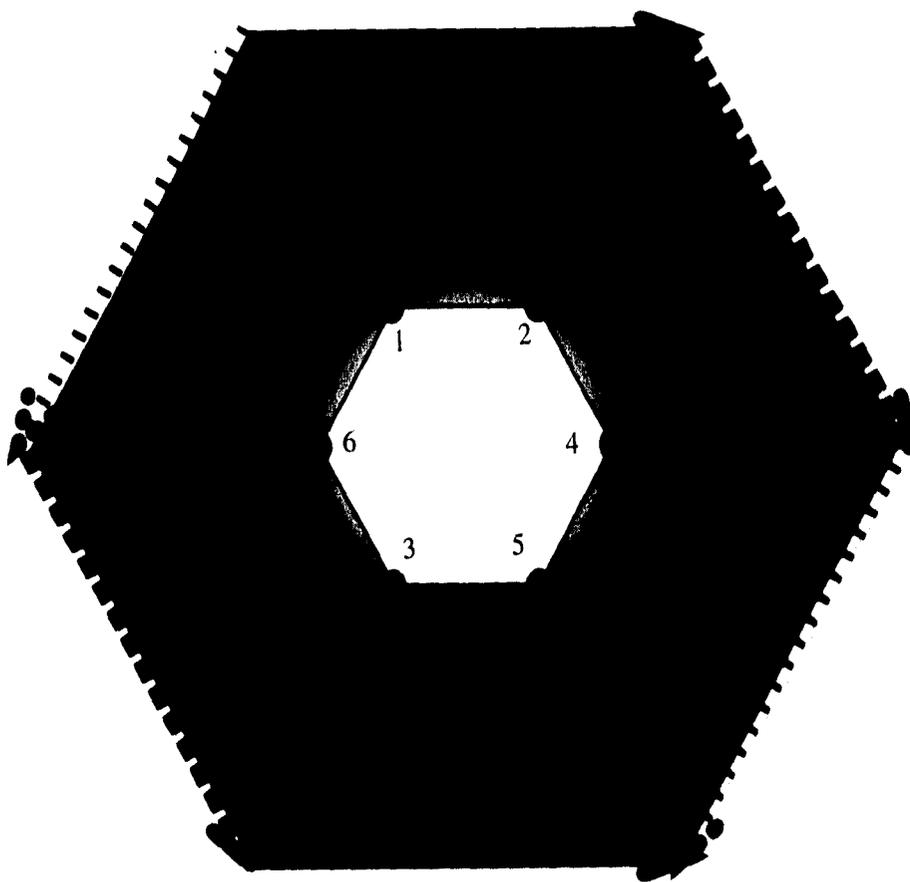
Sólo falta un triángulo. Obsérvese que la traza del 6 ya es un ciclo y que las trazas del 0,4 y 5 son trayectorias que forzan la inclusión del triángulo 045 para completar las catorce 3-aristas que tiene  $H$ . Lo que demuestra que  $H$  estaba determinado.  $\square$

**Corolario 3.3.** *La Botella de Klein no es triangulable con una gráfica completa.*

**Demostración .** De serlo, los números de Euler nos dicen que sería  $K_7$  la gráfica que lo haría, pero el único 3-ciclo de orden 7 corresponde a una triangulación del Toro. Para convencerse de ésto basta observar el diagrama anterior y hacer las identificaciones correspondientes.  $\square$

**Corolario 3.4.**  $\mathcal{L}_6$  es la única 3-cadena de orden 6

**Demostración .** Basta extraer el vértice 0 de la configuración anterior y el isomorfismo está dado. □



$\mathcal{L}_6$

#### §4. Y de Ahí en Adelante ( $8 \leq n$ )

Éste es el último capítulo de la presente y en él se exponen varios resultados originales relacionados con encajes de gráficas completas en superficies. Los primeros dos forman parte de un artículo (inspiración de la presente) y no se demuestran, propiamente dicho, aquí. Los siguientes junto con la conjetura son resultado del trabajo conjunto (Sampai-Kohai) del director de esta tesis y del autor.

**Teorema 4.1.** *Existen al menos dos 3-Ciclos de orden 30.*

**Demostración .** Éstos son:  $\mathcal{L}_{29}^+$  y  $((\mathcal{L}_8 \diamond \mathcal{L}_8) \setminus v) \diamond (\mathcal{L}_8 \diamond \mathcal{L}_8) \setminus v$ . El primero es tenso y el segundo no (Cf. ABN[2]).  $\square$

**Teorema 4.2.** *Existen al menos tres 3-Ciclos de orden 16.*

**Demostración .** Éstos son: los dos 3-ciclos no-tensos minimales (cf. ABN[2]) uno de los cuales es  $\mathcal{L}_8 \diamond \mathcal{L}_8$  y el otro es la cópula con síglo misma de la otra 3-cadena de orden 8 con frontera disconexa (ver Corolario 4.1); el tercero es el encaje de Ringel que resulta si ser tenso.  $\square$

**Teorema 4.3.** Existen al menos dos 3-Ciclos de orden 10.

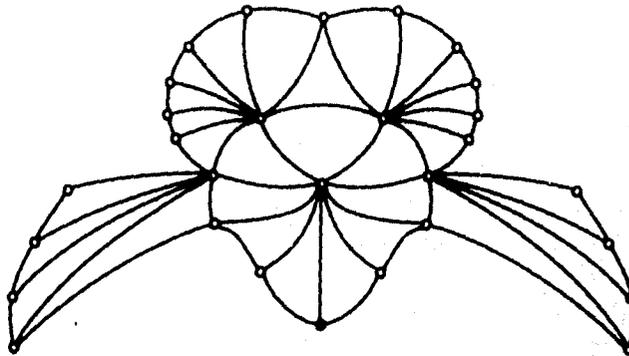
**Demostración .** Para esto, basta demostrar que  $\mathcal{L}_9^+ \not\cong \mathcal{L}_5 \diamond \mathcal{L}_5$ . En efecto, comiencese por construir dos copias de  $\mathcal{L}_5$ : sean sus vértices  $V' = \{1, \dots, 5\}$ ,  $V'' = \{a, \dots, e\}$ , sea  $\varphi: V'' \rightarrow V'$  la biyección obvia, y sea  $V = V' \sqcup V''$ . La cópula está definida en tres pasos; por el primero, están los triángulos 123, 134, 145, 235 y 245 (nótese que este último está porque  $2 + 4 = 6$  y  $6 \equiv -5 \pmod{11}$ ). Por cada uno de estos triángulos  $xyz$  en la segunda copia, aparecen tres más de la forma  $\varphi(x)yz$ ,

$$\begin{array}{ccccc} 1bc & 1cd & 1de & 2cc & 2de \\ a2c & a3d & a4e & b3c & b4c \\ ab3 & ac4 & ad5 & bc5 & bd5 \end{array}$$

y finalmente, por cada arista  $x \rightarrow y$  en la frontera dirigida  $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow e$  aparecen otros dos de la forma  $xy\varphi(y)$  y  $\varphi(x)\varphi(y)y$ ,

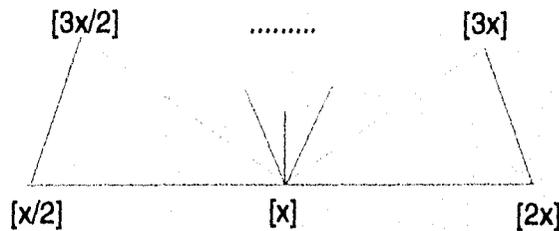
$$\begin{array}{ccccc} ab2 & bd4 & dc3 & ce5 & ea1 \\ 12b & 24d & 43c & 35e & 51a \end{array}$$

Esta información da el siguiente diagrama de  $\mathcal{L}_5 \diamond \mathcal{L}_5$ , que le impuso el sobrenombre de "La Mosca".



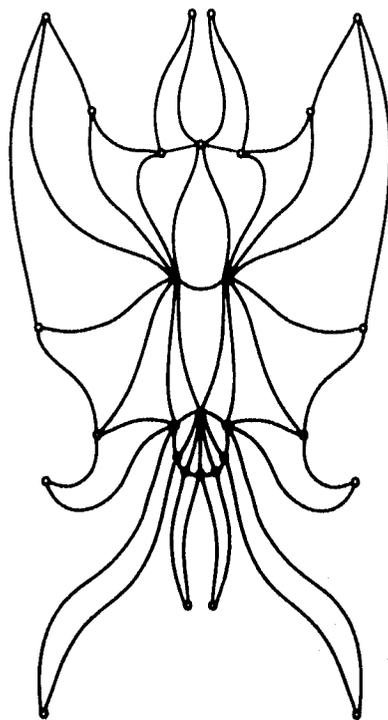
La Mosca

Ahora constrúyase una copia de  $\mathcal{L}_9$ : sean sus vértices  $W' = \{1, \dots, 9\}$ . Por definición están todos los triángulos  $xyz$  de la forma  $x \pm y \equiv \pm z \pmod{19}$ . Su frontera está generada multiplicativamente por 2 en  $\mathbf{Z}_{19}^*/\{-1, 1\}$



Y el  $\langle 2 \rangle$  actúa transitivamente ahí, entonces la frontera es conexa y es el ciclo  $(124836759)$ .  
 Prosigase finalmente agregando un vértice  $W = W' \cup \{0\}$  y los triángulos

012	024	048
083	036	067
075	059	091



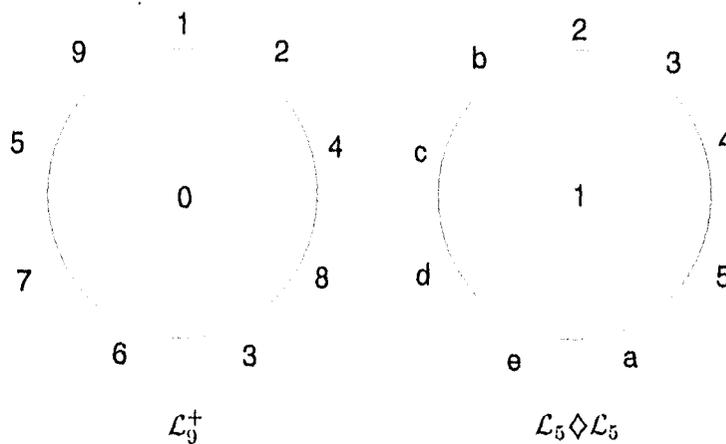
*La Mantaraya*

En las construcciones anteriores se definen los dos objetos que se quieren comparar y su información combinatoria queda resumida en sus matrices de trazas:

0.124836759	1.2345aedcb
1.023456789	2.1354decab
2.013579864	3.4125ebadc
3.069741258	4.2513caebd
4.026951378	5.3241adbce
5.072386149	a.1e4c2b3d5
⋮	⋮
$\mathcal{L}_9^+$	$\mathcal{L}_5 \diamond \mathcal{L}_5$

Supóngase ahora que existe un isomorfismo  $\phi: W \rightarrow V$  entre estos objetos, entonces la traza del 0 en  $\mathcal{L}_9^+$  debe ir a dar bajo  $\phi$  a alguna traza de  $\mathcal{L}_5 \diamond \mathcal{L}_5$ . Como  $\mathbf{Z}_{11}^*$  actúa transitivamente en los vértices de  $\mathcal{L}_5$ , actúa también en la cópula induciendo dos órbitas en los vértices (una por cada copia de  $\mathcal{L}_5$ ), entonces se puede suponer que  $\phi(0) \in \{1, a\}$ .

**Caso 1** ( $\phi(0) = 1$ ) Como  $\mathbf{Z}_{19}^*$  actúa transitivamente en los vértices de  $\mathcal{L}_9$ , sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $\phi(1) = 2$ . Y dado que la traza de un vértice representa un ciclo que puede tener una de dos orientaciones, bajo los supuestos anteriores,  $\phi(2) \in \{3, b\}$ .



Si  $\phi(2) = 3 \Rightarrow \phi(4) = 4, \phi(8) = 5, \dots, \phi(9) = b \Rightarrow \phi(123) = 23a \notin \mathcal{L}_5 \diamond \mathcal{L}_5 \quad (\nabla)^*$

Análogamente, si  $\phi(2) = b \Rightarrow \phi(123) = 2be \notin \mathcal{L}_5 \diamond \mathcal{L}_5 \quad (\nabla)$

Por lo tanto suponer que  $\phi(0) = 1$  es un absurdo.

**Caso 2** ( $\phi(0) = a$ ) Como en el caso anterior, se puede suponer que  $\phi(1) = 1$  y por lo tanto  $\phi(2) \in \{e, 5\}$ .

Si  $\phi(2) = e \Rightarrow \phi(123) = 1e2 \notin \mathcal{L}_5 \diamond \mathcal{L}_5 \quad (\nabla)$

Si  $\phi(2) = 5 \Rightarrow \phi(123) = 15b \notin \mathcal{L}_5 \diamond \mathcal{L}_5 \quad (\nabla)$

Por lo tanto suponer que  $\phi(0) = a$  es otro absurdo. □

El teorema anterior (que las mantarayas no son moscas) se puede generalizar. Sin embargo sigue siendo un caso de análisis en la demostración general.

\* el símbolo  $(\nabla)$  denota que se ha encontrado una contradicción

**Teorema 4.4.**  $\mathcal{L}_n \diamond \mathcal{L}_n \cong \mathcal{L}_{2n-1}^+ \implies n = 3$

**Demostración .** En efecto, sean  $p = 2n + 1$  y  $q = 2m + 1$  primos tales que  $2n = m + 1$  y  $\langle 2 \rangle = \mathbf{Z}_q^* / \{-1, 1\}$ . De esto último se deduce que  $\mathcal{L}_m$  tiene frontera conexa y por tanto existe  $G := \mathcal{L}_m^+$  que además debe ser del mismo orden que  $H := \mathcal{L}_n \diamond \mathcal{L}_n$ . Sean sus vértices

$$H^{(0)} := V_{\hat{n}} \sqcup V_n = \{\hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{n}, 1, 2, \dots, n\}$$

y

$$G^{(0)} := \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

Ahora, con la definición de cópula, constrúyase  $\mathcal{L}_n \diamond \mathcal{L}_n$ : Comiencese por observar la traza del 1. (cf. ABN[2])



Ésta debe tener la forma:

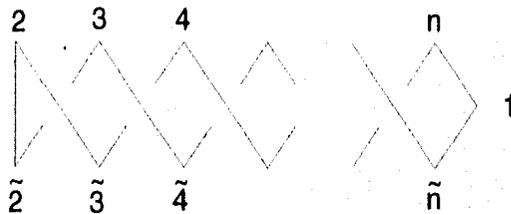
$$1. \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \quad n \quad \hat{1} \quad \hat{n} \quad \dots \quad \hat{4} \quad \hat{3} \quad \hat{2}$$

y análogamente, la traza del 2 es:

$$2. \quad 4 \quad 6 \quad \dots \quad 3 \quad 1 \quad \hat{2} \quad \hat{1} \quad \hat{3} \quad \dots \quad \hat{6} \quad \hat{4}$$

(todos los vértices en  $V_n$  tienen trazas similares).

Obsérvese ahora cómo deben ser las trazas de los vértices en  $V_{\hat{n}}$ :



Así, la traza del  $\hat{1}$  debe ser

$$\hat{1}: \hat{2} \ 3 \ \hat{4} \ \dots \ (n-1 \ \hat{n}) \ \dots \ 4 \ \hat{3} \ 2$$

y análogamente las demás trazas de los vértices en  $V_{\hat{n}}$

Por el otro lado, constrúyase la matriz de trazas de  $\mathcal{L}_m^+$  como sigue,

$$\begin{array}{cccccc} 0. & 1 & 2 & 4 & 8 & \dots & m \\ 1. & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & m \\ 2. & 0 & 4 & 6 & 8 & \dots & 1 \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

Una vez descrita la estructura combinatoria de estos objetos en esta forma, procédase a suponer que son isomorfas, i.e., supóngase que  $\phi: G^{(0)} \rightarrow H^{(0)}$  es una biyección que preserva triángulos. Es claro que la imagen del 0 cae en uno de las dos partes  $V_n$  o  $V_{\hat{n}}$ .

**Caso 1.** ( $\phi(0) \in V_n$ ) Como  $\mathbf{Z}_{2n+1}^*$  actúa transitivamente en los vértices de  $\mathcal{L}_n$ , actúa en los vértices de  $H$  induciendo las dos órbitas obvias, entonces sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $\phi(0) = 1$ . Es claro que  $\phi^{-1}(2) \in G^{(0)} \setminus \{0\}$ , es decir, es un vértice de  $\mathcal{L}_m$ , y  $\mathbf{Z}_{2m+1}^*$  actúa ahí transitivamente por lo que se puede suponer también que  $\phi(1) = 2$ . De aquí, debido a que se puede orientar en una de dos formas un ciclo,  $\phi(2) \in \{3, \hat{2}\}$ .

Si  $\phi(2) = 3$ , entonces  $\phi(4) = 4, \phi(8) = 5$  y en general

$$\phi^{-1}(x) = 2^{x-2} \quad 2 \leq x \leq n$$

Entonces,  $\phi^{-1}(\{2, 4, 6\}) = \{1, 4, 16\}$ , lo que implica que

$$16 \equiv \pm 3 \pmod{q} \quad \text{o que} \quad 16 \equiv \pm 5 \pmod{q}.$$

$$16 \equiv 3 \Rightarrow q|13 \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_6 \quad \left( \begin{array}{c} \nabla \\ \diamond \end{array} \right) \text{ (pues } m \text{ es impar)}$$

$$-16 \equiv 3 \Rightarrow q|19 \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_9 \quad \left( \begin{array}{c} \nabla \\ \diamond \end{array} \right) \text{ (teo. 4.3)}$$

$$16 \equiv 5 \Rightarrow q|11 \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_5 \quad (\Rightarrow n = 3)$$

$$-16 \equiv 5 \Rightarrow q|21 \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_3 (\Rightarrow n = 2) \quad \left( \begin{array}{c} \nabla \\ \diamond \end{array} \right)$$

Si  $\phi(2) = \hat{2}$ , entonces  $\phi(4) = \hat{3}$  y en general, abusando de la notación

$$\phi^{-1}(\hat{x}) = 2^{\hat{x}-1} \quad \hat{2} \leq \hat{x} \leq \hat{n}$$

Entonces,  $\phi^{-1}(\{2, \hat{4}, \hat{6}\}) = \{1, 8, 32\}$ , lo que implica que

$$\pm 32 \equiv 8 - 1 \pmod{q} \quad \text{o que} \quad \pm 32 \equiv 8 + 1 \pmod{q}.$$

$$32 \equiv 8 - 1 \Rightarrow q|25 \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_2 \quad \left( \begin{array}{c} \nabla \\ \diamond \end{array} \right)$$

$$-32 \equiv 8 - 1 \Rightarrow q|39 \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_6 \quad \left( \begin{array}{c} \nabla \\ \diamond \end{array} \right)$$

$$32 \equiv 8 + 1 \Rightarrow q|23 \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{11}$$

$$-32 \equiv 8 + 1 \Rightarrow q|41 \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{20} \quad \left( \begin{array}{c} \nabla \\ \diamond \end{array} \right)$$

**Caso 2.** ( $\phi(0) \in V_{\hat{n}}$ ) Como en el caso anterior, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\phi(0) = \hat{1}$ ,  $\phi(1) = 2$  y que  $\phi(2) \in \{\hat{3}, \hat{2}\}$ . De manera análoga a los anteriores, sólo son factibles:

Si  $\phi(2) = \hat{3}$ , entonces  $\phi^{-1}(x) = 2^{x-2}$ , que a su vez implica que

$$\phi^{-1}(\{2, 4, 6\}) = \{1, 4, 16\} \Rightarrow 16 \equiv 5 \pmod{q} \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_5$$

Si  $\phi(2) = \hat{2}$ , entonces  $\phi^{-1}(\hat{x}) = 2^{\hat{x}-1}$  que implica

$$\phi^{-1}(\{2, \hat{4}, \hat{6}\}) = \{1, 8, 32\} \Rightarrow 32 \equiv 9 \pmod{q} \Rightarrow \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{11}$$

Con las cosas así, bastaría demostrar que  $\mathcal{L}_6 \diamond \mathcal{L}_6 \not\cong \mathcal{L}_{11}^+$ , que en efecto se demuestra de manera análoga al teorema 4.3.  $\square$

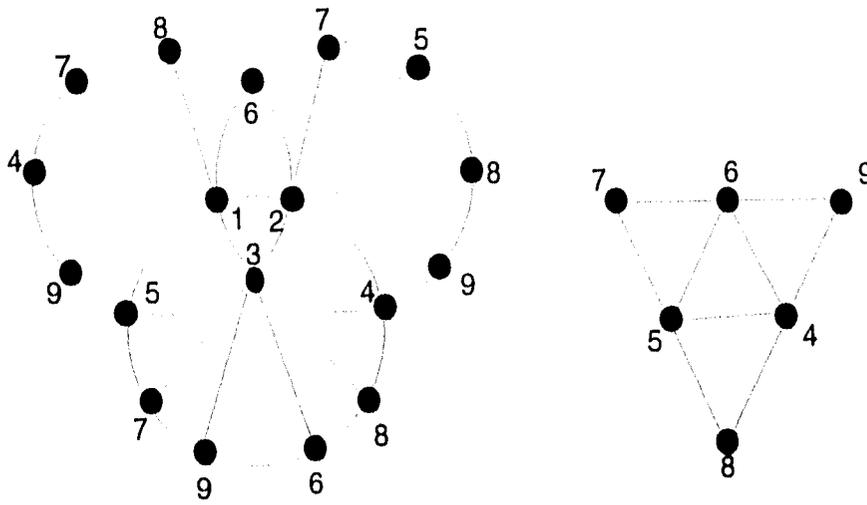
Con este teorema demostrado surge de manera natural la pregunta: ¿Cuántas parejas  $\mathcal{L}_n$  y  $\mathcal{L}_m$  existen con la propiedad anterior? Obsérvese que de las condiciones del teorema 4.4 se infiere que  $p = 2n + 1$ ,  $m = 2n - 1$ ,  $q = 4n - 2$ ,  $q = 2p - 3$ , y con esto, surge la siguiente

**Conjetura .** Existe una infinidad de parejas de números primos de la forma

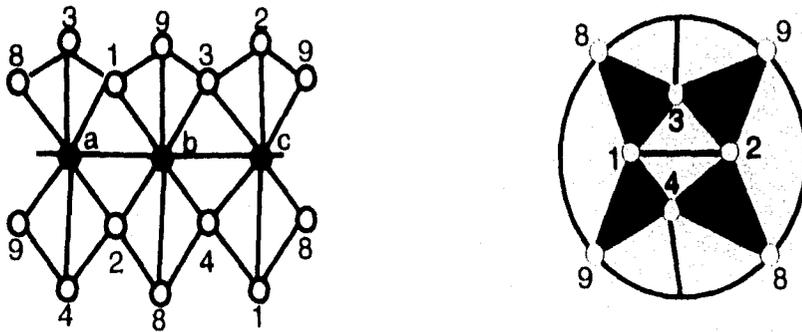
$$q = 2p - 3$$

**Teorema 4.5.** *Existen exactamente dos 3-Ciclos de orden 9.*

**Demostración .** Para demostrar este teorema se hizo uso de una computadora con la cual se busco exhaustivamente con un algoritmo de busqueda en profundidad de todas las triangulaciones de nueve puntos. El algoritmo aparece en el apendice A.



La inmersión de Ringel



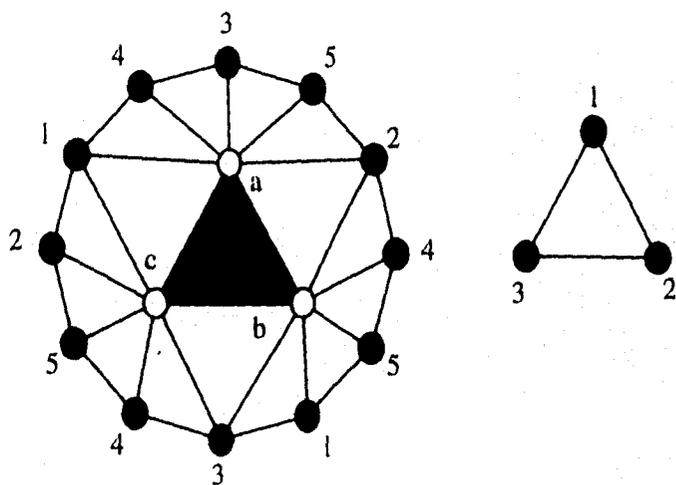
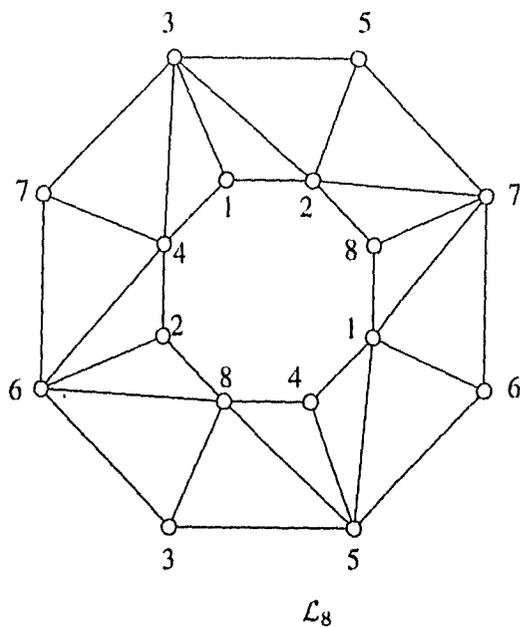
La nueva inmersión

□

**Corolario 4.1.** *Existen exactamente cinco 3-Cadenas de orden 8.*

**Demostración .** De las configuraciones del teorema 4.5 se desprenden tres: La inmersión de Ringel es transitiva en vértices, lo que induce una 3-cadena con frontera conexa; La nueva inmersión no es transitiva - en la acción de su grupo de automorfismos ( $\mathbb{Z}_6$ ) se parten los vértices en dos órbitas - lo que induce dos 3-cadenas más.

Las otras dos son (cf. ABN[2]):



La 3-cadena con frontera  $C_3 \cup C_5$

□

## Algoritmo

```
AVolar[ k_ ]:=  
Block[ ( ) ,  
    TiempoInicio = TimeUsed[];  
    n = k ; p = 3 ;  
    j[1] = 1 ;  
    j[2] = 2 ;  
    j[3] = 3 ;  
    Triang = ( ) ;  
    Buenas = ( ) ;  
    Isom = ( ) ;  
    menores = 0 ; /* para checar en MeteNodo */  
    ExOf = ( ( Table[n+1, ( ( i, (n-1)(n-3) ) ) ] ) ) ;  
    ExOficio = ( ( 0 ) ) ;  
    Do[ Podados[i] = 0 , ( ( i, n ) ) ] ;  
    Do[ Do[ Val[i,j] = 0  
        , ( ( j, i, n+1 ) ) ]  
        , ( ( i, n+1 ) ) ] ;  
    Do[ Traza [i] = Complement[ Table[ ( ( j ) ) , ( ( j, n ) ) ] ,  
        ( ( i ) ) ] ,  
        ( ( i, n ) ) ] ;  
    If[ n < 3 , AcabeQ = False , AcabeQ = True ] ;  
    While[ Not[ AcabeQ ] ,  
        If[ ChecaTriang , Actualiza ] ;  
        PaLante  
    ] ;  
    Length[ Buenas ]  
];  
ChecaTriang :=  
ChidaTraza[1] &&  
ChidaTraza[2] &&  
ChidaTraza[3]
```

**Actualiza :=**

```
Block[ ( ( ) ,  
    Triang = Append[ Triang , Table[ J[i] , ( ( i,3 ) ) ] ] ;  
    Do[ Traza[ J[i] ] = NT[i] ;  
        Do[ Val[ J[i] , J[j] ] ++  
            , ( ( j,i,3 ) ) ]  
        , ( ( i,3 ) ) ] ;  
    ]
```

**ChidaTraza[ i\_ ] :=**

```
Block[ ( ( T = Traza[ J[i] ] ,  
    arista = Complement[ Table[ J[j] , ( ( j,3 ) ) ]  
        , ( ( J[i] ) ) ] ,  
    i1 , j1 ,  
    i2 , j2 ) ) ,  
    ( ( i1 , j1 ) ) = Position[ T , arista[[1]] ][[1]] ;  
    ( ( i2 , j2 ) ) = Position[ T , arista[[2]] ][[1]] ;  
    If[ i1 == i2  
        , If[ Length[ T ] == 1  
            , T = Flatten[ T ]  
            , Return[ False ]  
        ]  
        , If[ j1 < 1 , j1 = -1 ] ;  
        If[ j2 < 1 , j2 = -1 ] ;  
        T = Pegalos[ T , i1 , j1 , i2 , j2 ]  
    ] ;  
    NT[i] = T ;  
    True ]
```

**Pegalos[ Tr\_ , x1\_ , y1\_ , x2\_ , y2\_ ] :=**

```
Block[ ( ( Tloc = Complement[ Tr , ( ( Tr[[x1]] , Tr[[x2]] ) ) ] ,  
    T1 = Tr[[x1]] , T2 = Tr[[x2]] ) ) ,  
    Which[ y1 == 1 && y2 == 1 ,  
        Append[ Tloc , Join[ Reverse[ T2 ] , T1 ] ] ,  
    y1 == -1 && y2 == 1 ,  
        Append[ Tloc , Join[ T1 , T2 ] ] ,  
    y1 == 1 && y2 == -1 ,  
        Append[ Tloc , Join[ T2 , T1 ] ] ,  
    y1 == -1 && y2 == -1 ,  
        Append[ Tloc , Join[ T1 , Reverse[ T2 ] ] ]  
    ]  
];
```

**PaLante :=**

```
If[ Val[ J[1], J[2] ] == 2
    , Mueve[2]
    , Mueve[3]
    ];
```

**Mueve[1]:=**

```
If[ Drop[ Triang, n-1 ] == ExOficio
    , ExOf = Rest[ ExOf ];
    ExOficio = Partition[ DesEnCera[ First[ ExOf ] ] , 3 ];
    Podados[ J[1] ] = Podados[ J[1] ]+1;
    PaTras
    , If[ J[1] != p, NuevoNodo ];
    J[1] = J[1]+1;
    While[ Val[ J[1],J[1] ] == n-1
        J[1] = J[1]+1
        ];
    If[ J[1] < n
        , Completa;
        PaTras
        , J[2] = J[1];
        Mueve[2]
        ]
    ];
```

**Mueve[2]:=**

```
If[ Val[ J[1],J[1] ] == n-1
    , Mueve[1]
    , J[2] = J[2]+1;
    While[ Val[ J[1],J[2] ] == 2
        , J[2] = J[2]+1
        ];
    J[3] = J[2];
    Mueve[3]
    ];
```

**Mueve[3]:=**

```
Block[ (()),  
  J[3] = J[3]+1;  
  While[ Val[ J[1],J[3] ] == 2    Val[ J[2],J[3] ] == 2  
    J[3] = J[3]+1  
  ];  
  If[ J[3] < n , PaTras ]  
];
```

**DesEnCera[Y.]:=**

```
Block[ ( ( Z=Y ) ),  
  While[ 0 == Z[[-1]]  
    , Z = Drop[ Z,-1 ]  
  ];  
  Z  
];
```

**PaTras:=**

```
Block[ ( ( ultimo = Triang[[-1]] ) ),  
  If[ ultimo == ( ( 1,n-1,n ) )  
    , AcabeQ = True  
    , ( ( J[1],J[2],J[3] ) ) = ultimo;  
    Triang = Drop[ Triang,-1 ];  
    Do[ RompeTraza[i];  
      Do[ Val[ J[i],J[j] ] = Val[ J[i],J[j] ]-1  
        , ( ( j,i,3 ) ) ]  
      , ( ( i,3 ) ) ];  
    PaLante  
  ]  
];
```

**NuevoNodo:=**

```
If[ J[1] == 1
  , T1 = Traza[1];
  j2 = Position[ T1,2 ][[1,1]];
  If[ j2 == (Position[ T1,3 ][[1,1])-1
    , T1 = RotateLeft[ T1,j2-1 ]
    , T1 = RotateLeft[ Reverse[ T1 ],n-j2-1 ]
  ]
  , Do[ HazFun[ trs[ J[1] ][[i]] ];
    Y = Ordena[ g[ Triang ] ];
    If[ MenorQ[ Triang,Y ]
      , X = EnCera[ Flatten[ Drop[ Y,n-1 ] ] ];
      MeteNodo
      , If[ Not[ Triang == Y ] , menores = menores+1 ]
    ]
  , (( i,Length[ trs[ J[1] ] ] )) ]
];
```

**MeteNodo:=**

```
Block[ ((j)),
  ExOf = Union[ ExOf, ((X)) ];
  j = Position[ ExOf, X ] [[1,1]];
  If[ j > 1 && SubNodoQ[ ExOf[[j-1]] , X ]
    , ExOf = Drop[ ExOf, ((j)) ]
    , While[ Length[ ExOf ] > j && SubNodoQ[ X, ExOf[[j+1]] ] ,
      ExOf = Drop[ ExOf, ((j+1)) ] ];
  If[ j==1, ExOficio=Partition[ DesEnCera[X], 3 ] ]
];
```

**SubNodoQ[ (()) , M\_ ]:= True;**

**SubNodoQ[ L\_ , (()) ]:= False;**

**SubNodoQ[L\_ , M\_ ]:=**

```
First[L] == 0 ||
(First[L] == First[M]
&& SubNodoQ[ Rest[L], Rest[M] ] )
```

## Bibliografía

### ABN

- [1] J. L. Arocha, J. Bracho y V. Neumann-Lara, "On the minimum size of tight hypergraphs". *J. Graph Theory*. Vol. 16, No. 4, 319-326 (1992).
- [2] J. L. Arocha, J. Bracho y V. Neumann-Lara, "Tight and untight triangulated surfaces". Por aparecer en *J. Combinatorial Theory*, ser. B.

### AH

- [1] K. Appel y W. Haken, "Every planar map is four-colorable, Part I: discharging". University of Illinois, Urbana (1976)

### AHK

- [1] K. Appel, W. Haken y J. Koch, "Every planar map is four-colorable, Part II: reducibility". University of Illinois, Urbana (1976)

### B

- [1] B. Bollobás, "Extremal graph theory". Academic Press (1978)

### E

- [1] L. Euler, "The Königsberg bridges". *Sci. Amer.* No. 189, 66-70 (1953)
- [2] L. Euler, "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". *Comment. Academiae Sci. I Petropolitanae* No. 8, 128-140 (1736)
- [3] H. Eves, "Estudio de las geometrias". UTEHA (1969)

### FG

- [1] J. L. Gross and M. L. Furst, "Hierarchy for Imbedding-Distribution Invariants of a Graph". *J. Graph Theory*, Vol. 11, No. 2, 205-220 (1987).

### H

- [1] F. Harary, "Graph theory". Addison-Wesley (1969)
- [2] P. J. Heawood, "Map colour theorems". *Quart. J. Math.* No. 24, 332-338 (1890)

### K

- [1] K. Kuratowski, "Sur le problème des courbes gauches en topologie". *Fund. Math.* No. 15, 271-283 (1930)

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

N

- [1] V. Neumann-Lara, "The acyclic disconnection of a digraph". En preparación.

R

- [1] G. Ringel, "Map Color Theorem". Springer-Verlag (1974)

W

- [1] A. T. White, "Graphs, groups and surfaces". North-Holland mathematics studies 8 (1984)

## Contenido

§-1. Divertimento in G	...i
§0. Introducción	...iii
<b>PARTE I: El problema</b>	...1
§1. Coloración de Mapas	...2
§2. Triangulaciones Tensas	...11
<b>PARTE II: La Solución</b>	...18
§3. Los Casos Únicos ( $n \leq 7$ )	...19
§4. Y de Ahí en Adelante ( $8 \leq n$ )	...24
Algoritmo	...33
Bibliografía	...38
Contenido	...40