

01173

11
W

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA**

**MODELOS COMPUTACIONALES TRIDIMENSIONALES
EN LA MECANICA DE SOLIDOS**

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA
MECANICA**

**PRESENTA
EFREN DE JESUS SOLIS ROMERO**

**DIRECTOR DE TESIS
DR. LUIS A. REYES AVILA**

CIUDAD UNIVERSITARIA

1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

CAPITULO 1

ELASTICIDAD

<i>1.1 Introducción</i>	1
<i>1.2 Fuerzas</i>	1
<i>1.3 Movimiento y Fuerzas</i>	2
<i>1.4 Teorema de Cauchy</i>	3
<i>1.5 Esfuerzo de Piola Kirchhoff</i>	3
<i>1.6 Fuerzas de cuerpo</i>	4
<i>1.7 Balance lineal angular</i>	5

CAPITULO 2

PRINCIPIOS DE TERMODINÁMICA

<i>2.1 Primera ley de la termodinámica</i>	9
<i>2.2 Segunda ley de la termodinámica</i>	10
<i>2.3 Temperatura y tensión termodinámica</i>	12
<i>2.4 Producción de entropía</i>	12
<i>2.5 Producción de entropía total</i>	13
<i>2.6 Desigualdad de Entropía</i>	14

CAPITULO 3

ECUACIONES CONSTITUTIVAS

<i>3.1 Axiomas de la teoría constitutiva</i>	16
<i>3.2 Materiales termoelásticos</i>	19
<i>3.3 Restricciones de la Segunda Ley de la Termodinámica</i>	20
<i>3.4 Cambio de variable</i>	24
<i>3.5 Termoelasticidad lineal</i>	25

CAPITULO 4

ECUACIONES DE ESTADO

4.1 Teoría de la Termoelastodinámica	31
4.2 Problema de la teoría dinámica de la termoelasticidad	34
4.3 Problema de de la teoría de la elastodinámica	36
4.4 Problema de la termoelasticidad	37
4.5 Problema de conducción de calor	38
4.6 Problema de la elasticidad	40
4.7 Problema térmico	41

CAPITULO 5

FORMULACIONES VARIACIONALES

5.1 Problema termoelastodinámico	41
5.1.1 Formulación variacionales	42
5.2 Problema elastodinámico	46
5.2.1 Formulación variacionales	47
5.3 Problema de conducción de calor	48
5.3.1 Formulación variacional	49
5.4 Formulación variacional del problema de termoelasticidad	50
5.5 Formulación variacional del problema de elasticidad	52
5.6 Formulación variacional del problema térmico	53

CAPITULO 6

DISCRETIZACION

6.1 Problema termoelastodinámico	54
6.1.1 Modelado numérico	55
6.2 Problema elastodinámico	59
6.3 Problema de conducción de calor	59
6.4 Problema termoelástico	62
6.5 Problema de elasticidad	62
6.6 Problema térmico	63

CAPITULO 7
SOLUCION DE PROBLEMA DE ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL

<i>7.1 Introducción</i>	65
<i>7.2 Problema elastico material simple</i>	66
<i>7.3 Problema elástico material compuesto</i>	75

CAPITULO 8
IMAGENES

<i>8.1 Resultados de modulef</i>	81
<i>8.2 Desplazamientos</i>	88
<i>8.3 Imágenes de resultados, para vigas de sección rectangular</i>	96
<i>8.4 Comparación de desplazamientos entre el problema con vigas de sección variable y el problema de vigas de sección constante</i>	100

INTRODUCCIÓN

Los ocho capítulos que comprenden este trabajo abarcan desde el planteamiento del marco teórico, hasta la solución de dos problemas de elasticidad: el primero con un material simple y el otro con un material compuesto. El propósito de resolver estos dos problemas es comparar las deformaciones que sufre un cuerpo bajo cierta carga, cuando es un material simple, y cuando a este material se le introduce una cierta cantidad de fibras. También se hace un análisis cuando se modifica ligeramente la geometría del cuerpo, comparando después las dos geometrías, para saber cual de ellas es mas recomendable en cuanto resistencia a la deformación.

En el capítulo 1 se presenta el marco teórico de la elasticidad con el enfoque de la mecánica del medio continuo, concluyendo en las ecuaciones de estado. El capítulo 2 se muestra la deducción de la primera y segunda ley de la termodinámica. El capítulo 3 se presentan las ecuaciones constitutivas para la termoelasticidad y los axiomas que los rigen, además de la linealización de la teoría de la termoelasticidad, concluyendo en las ecuaciones de estado de la termoelasticidad. El capítulo 4 presenta los modelos matemáticos para los modelos: de la termoelastodinámica, de la elastodinámica, de conducción de calor, de la termoelasticidad, de la elasticidad y de distribución de temperatura. El capítulo 5 se presentan los modelos variacionales de los modelos matemáticos presentados en el capítulo 4. En el capítulo 6 se presentan los modelos numéricos de los modelos variacionales presentados en el capítulo 5. El capítulo 7 se presenta el procedimiento para resolver un problema elástico (utilizando un material simple y luego un compuesto), con el paquete de elemento finito Modulf.

En el capítulo 8 se presentan los resultados de Modulf; se hace un análisis gráfico de lo desplazamientos, para comparar la eficiencia de cada material y de la geometría ante ciertas condiciones.y por último se presentan las conclusiones.

CAPITULO 1 ELASTICIDAD

1.1 INTRODUCCIÓN

La mecánica del medio continuo trata con los cuerpos deformables. Estudia las relaciones que existen entre fuerzas y deformaciones. Sea

$$\chi : B \times t \rightarrow B_t \quad (1.1.1)$$

una familia de deformaciones del cuerpo B en los diferentes tiempos, B se llamará la configuración de referencia y $B_t = \chi(B, t)$ la configuración deformada, del cuerpo B .

Dado que el cuerpo tiene una sucesión de deformaciones se forma una historia; a la cual llamaremos trayectoria, definiéndola como el espacio que ocupa el cuerpo en un tiempo t , una deformación.

$$\tau = \left\{ (x, t) / x \in B, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.1.2)$$

Otro concepto necesario para poder definir un sistema de fuerzas, es la normal unitaria, definida a continuación.

$$N = \{ \underline{n} \in V / |\underline{n}| = 1 \text{ y } \underline{n} \perp \partial B \} \quad (1.1.3)$$

1.2 FUERZAS

Las fuerzas que interactúan con un cuerpo pueden ser: fuerzas de contacto y fuerzas de cuerpo como son las: fuerza gravitacional, fuerza magnética, etc. En este trabajo solo nos ocuparemos de las fuerzas de contacto y gravitacionales ref.[1].

DEFINICIÓN 1.2.1.

Sea (S, b) un sistema de fuerzas para B durante una deformación y sus campos son:

$$S: N \times \tau \times \mathbb{R} \rightarrow V \quad b: \tau \times \mathbb{R} \rightarrow V$$

con

- $S(n,x,t)$, para cada $n \in N$ y t , una función suave de χ sobre B_t
- $b(x,t)$, para cada t , una función continua de χ sobre B_t .

A S la llamaremos fuerza de superficie y b fuerza de cuerpo.

DEFINICIÓN 1.2.2

Sea $P_t \subset B_t$ y $\partial P_t \subset \partial B_t$ y las funciones: $f: P \times R \rightarrow R$ y $m: P \times R \rightarrow R$ definidas por:

$$f(P,t) = \int_{\partial P_t} s(n) dA + \int_{P_t} b dV \quad (1.2.1)$$

$$m(P,t) = \int_{\partial P_t} r \times s(n) dA + \int_{P_t} r \times b dV \quad (1.2.2)$$

las cuales son llamadas la fuerza y el momento aplicado a la parte P del cuerpo B en el tiempo t.

Aquí $n \perp \partial P_t$, $|n| = 1$ y r es el vector de posición con respecto al origen.

1.3 MOVIMIENTO Y FUERZAS

La relación entre movimiento y fuerzas está dado por las leyes de balance de momentum lineal y angular, ref.[1].

$$\begin{aligned} f(P,t) &= \dot{l}(P,t) \\ m(P,t) &= \dot{a}(P,t) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

DEFINICION 1.3.1

Sea $\chi: B \times R \rightarrow B_t$ y $P_t \subset B_t$ el momentum lineal $l: P \times R \rightarrow R^3$ y angular

a: $P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un medio continuo. y se define por:

$$l(P,t) = \int_{P_t} v \rho dV \quad (1.3.2)$$

$$a(P,t) = \int_{P_t} r \times v \rho dV \quad (1.3.3)$$

Donde ξ es un espacio euclidiano de puntos y $r: \xi \rightarrow \mathbb{R}^3$ $r(x) = x - 0$ es el vector de posición del punto x .

Relacionando las ecuaciones (1.2.1) (1.3.1) y (1.3.2), tenemos:

$$\int_{\partial P_t} s(n) dA + \int_{P_t} b dV = \dot{\int}_{P_t} v \rho dV \quad (1.3.4)$$

$$\int_{\partial P_t} r \times s(n) dA + \int_{P_t} r \times b dV = \dot{\int}_{P_t} r \times v \rho dV \quad (1.3.6)$$

1.4 TEOREMA DE CAUCHY (Existencia de esfuerzo)

Sea (S,b) un sistema de fuerzas para B durante un movimiento. Entonces una condición necesaria y suficiente, para que las leyes de balance de momentum sean satisfechas es que exista un campo tensorial espacial T (llamado esfuerzo de cauchy), tal que:

a) Para cada vector unitario

$$s(n) = Tn \quad (1.4.1)$$

b) T es simétrico

$$T = T^T \quad (1.4.2)$$

c) T satisface la ecuación de movimiento

$$\operatorname{div} T + b = \rho \dot{v} \quad (1.4.3)$$

La prueba de este teorema esta dado en la referencia [1].

1.5 ESFUERZO DE PIOLA KIRCHHOFF

El esfuerzo de cauchy T es un campo espacial, mide el esfuerzo por unidad de área en la configuración deformada.

$$T: N \times \tau \times R \rightarrow L(V, V) \text{ simétrico}$$

En el estudio de los sólidos es mas conveniente trabajar con la configuración de referencia; dado que es la única que conocemos al iniciar el análisis. Por tal motivo necesitamos un tensor de esfuerzos que tenga como dominio la configuración de referencia .

$$S: N \times B \times R \rightarrow \operatorname{Lin}(V, V)$$

el cual se llama tensor de PIOLA KIRCHHOFF, referencia [1].

Un proceso dinámico (X, E, t) es :

$$i) \chi: B \times R^+ \rightarrow B_t$$

$$ii) T: \tau \rightarrow L(V, V) \text{ simétrico}$$

$$iii) T(\cdot, t): B_t \rightarrow L(V, V) \text{ simétrico y suave}$$

$$\text{Sea } P_t \subset B_t \quad \text{y } P \subset B$$

La fuerza total de superficie en la configuración deformada se relaciona de la siguiente manera, con la fuerza superficial en la configuración de referencia, ref. [1, 6.14]

$$\int_{\partial P_t} T m \, dA = \int_{\partial P} (\det F) T m F^{-T} n \, dA \quad (1.5.1)$$

Donde m y n son los vectores unitarios normales a la superficie deformada y de referencia respectivamente.

DEFINICION 1.5.1.

Sea: $F : B \rightarrow B_t$, $S : N \times B \times R \rightarrow \text{Lin}(V, V)$ entonces al substituir la ecuación (1.3.4) en (1.5.1), se obtiene que:

$$\int_{\partial P_i} T_m dA = \int_{\partial P} S_n dA \quad (1.5.2)$$

1.6 FUERZAS DE CUERPO

Para que haya similitud entre los dos tipos de fuerza, en cuanto a la configuración en donde se maneja; es necesario ver las fuerzas de cuerpo en la configuración de referencia. Sean los campos $b: \tau \times R \rightarrow V$ y $b_0: B \times R \rightarrow V$, los cuales son el campo vectorial de fuerzas de cuerpo en su representación espacial y de referencia respectivamente.

Entonces tenemos la siguiente relación, ref. [1, 6.14]

$$\int_{P_i} b dV = \int_P b_m (\det F) dV \quad (1.6.1)$$

DEFINICION 1.6.1

Al campo $b_0 : B \times R \rightarrow V$ definido por $b_0 = (\det F) b_m$ se le conoce como anteriormente se mencionó.

1.7 BALANCE LINEAL Y ANGULAR

TEOREMA 1.7.1

El esfuerzo de Piola Kirchhoff S satisface las leyes de balance de momentum lineal y angular.

$$\int_{\partial P} S_n dA + \int_P b_0 dV = \int_P \ddot{x} \rho_0 dV \quad (1.7.1)$$

$$\int_{\partial P} (x-0) \times S_n dA + \int_P (x-0) \times b_0 dV = \int_P (x-0) \times \ddot{x} \rho_0 dV \quad (1.7.2)$$

$\forall P \in B$

DEMOSTRACION

Combinando las ecuaciones (1.3.1), (1.5.2) y (1.5.3), se satisface la ecuación (1.7.1).

$$\int_{\partial P} S_n dA + \int_P b_0 dV = \int_P x \rho_0 dV$$

De la igualdad (6.18, 3) referencia [1], tenemos que:

$$\int_{\partial P_i} (x-0) \times T(x) n(x) dAx = \int_{\partial P} (f(p)-0) \times T(f(p)) G(p) n(p) dAp$$

$$\int_{\partial P_i} (x-0) \times T_m dA = \int_{\partial P} (x_m) \times T_m G_n dA$$

De la ecuación (12.7) referencia [1]

$$\int_{P_i} \varphi(x,t) \rho(x,t) dVx = \int_P \varphi_m \rho_0 l_0 dV$$

Y el balance de momento

$$\int_{\partial P_i} r \times s(n) dA + \int_P r \times b dV = \int_{P_i} r \times \overset{\circ}{V} \rho dV$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\int_{\partial P} (x-0) \times S_n dA + \int_P (x-0) \times b_0 dV = \int_P (x-0) \times x \rho_0 dV$$

TEOREMA 1.7.2

El tensor S satisface las siguientes ecuaciones:

$$\text{Div } S + b_0 = \rho_0 \overset{\circ}{x} \quad (1.7.3)$$

$$SF^T = FS^T \quad (1.7.4)$$

DEMOSTRACION

Partiendo del balance de momentum lineal, tenemos que:

$$\int_{\partial P} S_n dA + \int_P b_0 dV = \int_P \rho_0 x dV$$

Utilizando el teorema de la divergencia (ref. [1], pág. 37), el cual pasa un campo de la frontera al interior del cuerpo.

$$\int_P \left(\text{Div } S + b_0 - \rho_0 x \right) dV = 0$$

Ahora utilizando el teorema de localización referencia [1, 5.1].

$$\text{Div } S + b_0 - \rho_0 x = 0$$

Con lo cual queda demostrado la ecuación (1.7.3)

Para demostrar la ecuación (1.7.4), tomamos la definición (1.5.1)

$$S = (\det F) T_m F^{-T}$$

$$T_m = (\det F)^{-1} S (F^{-T})^{-1}$$

$$T_m = (\det F)^{-1} S F^T$$

Consideranso que $T \in L(V,V)$ simétrico

$$T_{m_1} = \left[(\det F)^{-1} S F^T \right]^T$$

$$T_{m_1} = (\det F)^{-1} (F^T)^T S^T$$

$$T_{m_1} = (\det F)^{-1} F S^T$$

Igualando $T_{m1} = T_{m2}$

$$(\det F)^{-1} S F^T = (\det F^{-1}) F S^T$$

$$S F^T = F S^T$$

CAPITULO 2 PRINCIPIOS DE TERMODINÁMICA

2.1 PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

La primera ley de la termodinámica también se conoce como principio de conservación de la energía, el balance de energía de un cuerpo B esta dado por la siguiente ecuación, referencia [4]. donde $K: B \rightarrow R$, $E: B \rightarrow R$, $W: B \rightarrow R$, $U: B \rightarrow R$ son los campos escalares de: energía cinética, energía interna, trabajo hecho sobre el cuerpo por fuerzas externas, trabajo hecho sobre B por fuerzas magnéticas, calóricas, etc. respectivamente. Entonces

$$\text{Sea } B = \{x / x \in R^3\}; P \subset B \quad (2.1.1)$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}(K + E) = W + \sum_{\alpha} u_{\alpha} \quad (2.1.2)$$

Para nuestro caso, u se reducirá solamente al trabajo hecho por el calor Q; Por tanto la ecuación (2.1.2) se reduce a :

$$\frac{d}{dt}(K + E) = W + Q \quad (2.1.3)$$

Considerando que los cambios termoestáticos son independientes del tiempo, el cambio en la energía cinética vale cero.

$$\overset{\circ}{E} = W + Q \quad (2.1.4)$$

A partir del teorema de potencias expandidas obtenemos el trabajo, referencia [1,27.8]

$$\int_{\rho} W dV = \int_{\rho} S \bullet F dV \quad (2.1.5)$$

Definición 2.1.1

Sean $q: B \rightarrow R^3$, $r: B \rightarrow R$, $E: B \rightarrow R$, los campos: vectorial del flujo de calor, escalar de suministro de calor, y escalar de la energía interna del cuerpo B.

Ademas

$N = \{ n : |n| = 1, n \perp \partial B \}$. Entonces la relación siguiente es satisfecha.

$$\int_{\rho} Q dV = - \int_{\partial \rho} q \cdot n dA + \int_{\rho} r dr \quad (2.1.6)$$

sustituyendo la ecuación (2.1.6) en la (2.1.4) obtenemos:

$$\int_{\rho} \dot{\varepsilon} dV = \int_{\rho} S \cdot F dV - \int_{\partial \rho} q \cdot n dA + \int_{\rho} r dV \quad (2.1.7)$$

Aplicando el torema de localización y de divergencia, ref. [1, 5.1 y pág. 37] en la siguiente expresión

$$\int_{\rho} \dot{\varepsilon} dv = \int_{\rho} S \cdot F dv - \int_{\rho} \text{div } q dv + \int_{\rho} r dv \quad (2.1.8)$$

$$\int_{\rho} \left(\dot{\varepsilon} - S \cdot F + \text{div } q - r \right) dr = 0 \quad (2.1.9)$$

Por tanto mediante el torema de localización tenemos:

$$\dot{\varepsilon} - S \cdot F + \text{div } q - r = 0 \quad (2.1.10)$$

La ecuación (2.1.10) se conoce como la primera ley de la termodinámica.

2.2 SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

Definición 2.2.1

La energía interna es un campo escalar dado por la siguiente expresión. ref. [4].

$$f: R \times V \times B \rightarrow R$$

Definido como:

$$\varepsilon = f(\eta, v, v_2, \dots, v_n, x) = \varepsilon(\eta, v, x) \quad (2.2.1)$$

donde:

$\eta \rightarrow$ Entropía específica

$v_\alpha \rightarrow$ Parámetro arbitrario

En el parámetro arbitrario $\alpha=1,2 \dots n$. se toma como un subestado termodinámico. El caso más familiar es cuando $\alpha=1$ y v es el volumen específico.

Para el desarrollo general no se especificará v , solo los distinguiremos como campos tensoriales esto es:

$$v: \xi \rightarrow L(v, v)$$

La energía interna se puede determinar también a partir de un movimiento.

$$\varepsilon = g(x(p, t), t) \quad (2.2.2.)$$

De la ecuación (2.2.1) se observa que la energía interna se puede obtener sin conocer el movimiento y sin considerar el tiempo. En otras palabras, el valor de la energía puede ser obtenido de información universal y estática, mediante el conocimiento de:

- a) Valor del subestado
- b) Valor de la entropía
- c) Forma del funcional

La relación (2.2.1) es llamada ecuación calórica de estado termodinámico; la cual queda totalmente determinada conociendo la entropía específica y el subestado termodinámico.

2.3 TEMPERATURA Y TENSION TERMODINÁMICA

El cambio de energía interna, para cada punto de B está dado por :

$$d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{\partial \eta} d\eta + \frac{d\varepsilon}{\partial v_\alpha} dv_\alpha \quad (2.3.1)$$

Definición 2.3.1

La temperatura termodinámica y la tensión termodinámica son respectivamente:

$$\theta = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \quad \tau_\alpha = \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_\alpha} \quad (2.3.2)$$

En el caso particular de que v_1 sea el volumen específico, τ_1 será la presión termodinámica

Observación 2.3.1

De la definición (2.3.1) se ve claramente que:

$$\theta = \theta(\eta, v) \quad \tau_\alpha = \tau_\alpha(\eta, v_\alpha) \quad (2.3.3)$$

2.4 PRODUCCION DE ENTROPIA

De las ecuaciones (2.3.1), (2.3.2) y (2.1.4) obtenemos:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\theta} \eta + \tau_\alpha \dot{v}_\alpha \quad (2.4.1)$$

$$\dot{\varepsilon} = W_E + Q_E \quad (2.4.2)$$

Definición 2.4.1

De la referencia [4], se obtiene W_I y Q_I los cuales son: trabajo interno y energía cinética respectivamente.

$$W_I = \tau \alpha \dot{v} \alpha \quad (2.4.3)$$

$$Q_I = \theta \dot{\eta} \quad (2.4.4)$$

Considerando el balance de energía, toda energía entrante es igual energía saliente.

$$W_E + Q_E = W_I + Q_I \quad (2.4.5)$$

Tomando en cuenta la definición 2.4.1, tenemos:

$$\theta \dot{\eta} = W_E - W_I + Q_E \quad (2.4.6)$$

Observación 2.4.1

En la ecuación (2.4.6) se ve que el cambio de entropía es afectada por la diferencia de trabajos, mas calor o energía externa suministrada.

2.5 PRODUCCION DE ENTROPIA TOTAL**Definición 2.5.1**

La entropía total de un cuerpo B, ref. [4] esta dada por:

$$H = \int_{B_i} \eta \, dB \quad (2.5.1)$$

De las ecuaciones (2.4.6) y (2.1.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \eta &= W_E - W_I + \text{div } q + r \\ \dot{\eta} &= \frac{(W_E - W_I)}{\theta} + \frac{\text{div } q}{\theta} + \frac{r}{\theta} \\ \dot{\eta} &= \frac{(W_E - W_I)}{\theta} + \text{div} \left(\frac{q}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta^2} \text{div} (q\theta) + \frac{r}{\theta} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Integrando en todo el dominio de B, se tiene:

$$\int_B \dot{\eta} dB - \int_{\partial B} \frac{q \cdot n}{\theta} d\partial B = \int_B [(W_E - W_I) + \text{div} \left(\frac{q\theta}{\theta^2} \right) + \frac{r}{\theta}] dB \quad (2.5.3)$$

2.6 DESIGUALDAD DE ENTROPIA

Por experiencia se sabe que una sustancia con temperatura uniforme y libre de fuentes de calor, puede consumir trabajo mecánico; pero no lo puede devolver. Similarmente un cuerpo en reposo, no sujeto a fuentes de calor, el flujo de calor es de la parte caliente a la fría, ref. [4]

Las dos observaciones anteriores son análogas a:

$$\begin{aligned} \text{i) } W_E - W_I &\geq 0 \quad \text{cuando } q = 0, \quad \theta = \text{constante} \\ \text{ii) } \text{div} (q\theta) &\geq 0 \quad q = 0 \quad W_E - W_I = 0 \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Por lo tanto $\theta > 0$. Considerando las ecuaciones (2.5.1) y (2.5.3) y (2.6.1) tenemos:

$$\dot{H} + \int_{\partial B} \frac{q \cdot n}{\theta} d\partial B \geq \int_B \frac{r}{\theta} dB \quad (2.6.2)$$

La ecuación anterior es conocida como la desigualdad de Clausius- Dunhem. Escrita en su forma local queda:

$$\dot{\eta} \geq \text{div} \left(\frac{q}{\theta} \right) + \frac{r}{\theta} \quad (2.6.3)$$

con las restricciones:

$$\theta > 0 \quad \text{y} \quad \inf \theta = 0 \quad (2.6.4)$$

Combinando la primera ley de la termodinámica y la ecuación (2.6.3) se tiene :

$$-\dot{\eta} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\theta} - \frac{S \cdot F}{\theta} + \frac{\text{div } q}{\theta} - \text{div} \left(\frac{q}{\theta} \right) \leq 0 \quad (2.6.5)$$

Definición 2.6.1

La ecuación de energía libre esta definida por:

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta \quad (2.6.6)$$

Derivando la ecuación de la definición 2.6.1 con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\psi} + \dot{\theta} \eta + \theta \dot{\eta} \quad (2.6.7)$$

De la referencia [4], tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\text{div } q}{\theta} - \text{div} \left(\frac{q}{\theta} \right) &= \frac{\text{div } q}{\theta} - \left(\frac{1}{\theta} \text{div } q \right) + q \cdot \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \\ &= -q \cdot \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta^2} q \cdot \nabla \theta \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.6.7) y (2.6.8) en la (2.6.5), obtenemos:

$$-S \cdot F + \dot{\psi} + \dot{\eta} \theta + \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla \theta \leq 0 \quad (2.6.9)$$

La ecuación (2.6.9) es una forma muy usual de la segunda ley de la termodinámica.

CAPÍTULO 2 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se plantearon las ecuaciones que gobiernan un proceso termomecánico; sin considerar la composición del material, por lo que se genera un modelo matemático incompleto (un sistema de ecuaciones indeterminado), ref.[2]

Las ecuaciones constitutivas solo reflejan las propiedades mecánicas de más peso, causadas por la diferencia en la estructura del material, ref.[2]

3.1 AXIOMAS DE LA TEORÍA CONSTITUTIVA

Son ocho los axiomas que rigen la teoría constitutiva. ref[2]

- 1) Axioma de causalidad
- 2) Axioma de determinismo
- 3) Axioma de equipresencia
- 4) Axioma de objetividad
- 5) Axioma de invarianza de material
- 6) Axioma de vecindad
- 7) Axioma de memoria
- 8) Axioma de admisibilidad

1) Axioma de causalidad

Consideremos el movimiento de los puntos materiales y sus temperaturas como variables independientes. El resto de las variables que interviene en el sistema de ecuaciones, son variables dependientes.

Las variables independientes son:

$$\chi(p, t) : B \rightarrow B_t$$

$$\theta(p, t) : B \rightarrow B_t$$

$$\forall p \in B$$

$$x = \chi(p, t) \quad x \in B_t$$

La velocidad es derivable del movimiento

Sea V un campo vectorial espacial y:

$V : \tau \rightarrow V$ un campo vectorial donde τ es la trayectoria del cuerpo, definida por:

$$\tau = \{ (x, t) / x \in B_t \text{ y } t \in \mathbb{R} \} \quad (3.1.1)$$

Definimos la velocidad como:

$$V(x, t) = \chi((\chi^{-1}(x, t), t)) \quad (3.1.2)$$

que llamaremos descripción espacial de la velocidad.

Definimos la aceleración por:

$$a(x, t) = \ddot{\chi}((\chi^{-1}(x, t), t)) \quad (3.1.3)$$

Las variables dependientes son : S, q, η y ψ . ref. [4].

2) Axioma de determinismo

El valor de las funcionales constitutivas termomecánicas en un punto del cuerpo es determinado por la historia del movimiento y la temperatura en todos los puntos. Los funcionales constitutivos que modelan las propiedades del material son cuatro:

Donde. $S: V \times \mathbb{R} \times B \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Lin}(V, V)$, $\psi, \eta: V \times \mathbb{R} \times B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $q: V \times \mathbb{R} \times B \times \mathbb{R} \rightarrow V$ son: campo tensorial, campos escalares y campo vectorial de funcionales definidos como:

$$S(p, t)_m = \hat{S}(\chi(p, t), \theta(p, t), p, t) \quad (3.1.4)$$

$$\psi(p, t)_m = \hat{\psi}(\chi(p, t), \theta(p, t), p, t) \quad (3.1.5)$$

$$\eta(p, t)_m = \hat{\eta}(\chi(p, t), \theta(p, t), p, t) \quad (3.1.6)$$

$$q(p, t)_m = \hat{q}(\chi(p, t), \theta(p, t), p, t) \quad (3.1.7)$$

3) Axioma de equipresencia

Todos los funcionales constitutivos deben ser expresados en terminos de la lista de variables constitutivas independientes.

4) Axioma de vecindad

El valor de las variables constitutivas independientes en puntos distantes a un punto P, no afectan apreciablemente los valores de las variables constitutivas dependientes en P.

A estos materiales se les llama tipo gradiente. Sus ecuaciones quedan como:

$$S = \hat{S}(F, \theta, g, P, t) \quad (3.1.8)$$

$$\psi = \hat{\psi}(F, \theta, g, P, t) \quad (3.1.9)$$

$$\eta = \hat{\eta}(F, \theta, g, P, t) \quad (3.1.10)$$

$$q = q(F, \theta, g, P, t) \quad (3.1.11)$$

5) Axioma de objetividad

Las ecuaciones constitutivas deben ser formas invariantes con respecto a un cambio de observador. En otras palabras las propiedades del material no cambian si el observador cambia de posición.

6) Axioma de invarianza de material

Las ecuaciones constitutivas deben ser formas invariantes bajo el grupo de transformaciones ortogonales y translaciones de las coordenadas materiales.

Cuando el material es invariante bajo rotaciones decimos que el material es isotrópico y cuando esto no se cumple es un material anisotrópico.

Si las funciones respuesta no dependen de la translación del origen de las coordenadas materiales; entonces llamaremos al material homogéneo.

7) Axioma de memoria

Los valores de las variables constitutivas en pasados distantes del presente no afecta apreciablemente los valores de las funciones constitutivas .

8) Axioma de admisibilidad

Las ecuaciones constitutivas deben ser consistentes con los principios básicos de la mecánica del medio continuo.

3.2 MATERIALES TERMOELASTICOS.

Los materiales termoplásticos son aquellos que soportan en mayor o en menor grado deformaciones y cambios térmicos.

En este tipo de materiales una deformación generalmente produce calor. Inversamente cuando el material se somete a cambios térmicos produce deformaciones, si el cambio es grande produce flujo de material. En los materiales termoelásticos el flujo no se debe de presentar.

De acuerdo a los axiomas antes mencionados un material elástico se define, por las siguientes ecuaciones constitutivas (funcionales constitutivos).

Donde. $S: V \times R \times B \times R \rightarrow \text{Lin}(V,V)$, $\psi, \eta: V \times R \times B \times R \rightarrow R$ y $q : V \times R \times B \times R \rightarrow V$ son: campo tensorial, campos escalares y campo vectorial de funcionales dados por:

$$\begin{aligned} S &= \hat{S}(F, \theta, g, P) \\ \psi &= \hat{\psi}(F, \theta, g, P) \\ \eta &= \hat{\eta}(F, \theta, g, P) \\ q &= \hat{q}(F, \theta, g, P) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Estas funciones respuesta (funcionales constitutivos) se consideran continuamente diferenciables en su dominio.

$$F \in L(V,V) \text{ con } \det F > 0, \quad F = I + \nabla u \tag{3.2.2}$$

$$\theta \in R > 0 \quad (3.2.3)$$

$$g \in V \quad g = \nabla\theta \quad (3.2.4)$$

$$p \in B$$

Suponemos que S cumple con el balance de momentos. ref.[1]

$$SF^T = FS^T \quad (3.2.5)$$

3.3 RESTRICCIONES DE LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA.

La siguiente ecuación es la desigualdad de disipación local (resultado del capítulo 2); la cual impone ciertas restricciones a las ecuaciones constitutivas, referencia [4], dadas por:

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} - S \cdot \dot{F} + \frac{1}{\theta} q \cdot g \leq 0 \quad (3.3.1)$$

Sustituyendo las funciones respuesta (ecuaciones constitutivas) dentro de la desigualdad anterior se obtiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial F} \dot{F} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial g} \dot{g} + \eta \dot{\theta} - S \cdot \dot{F} + \frac{1}{\theta} q \cdot g \leq 0 \quad (3.3.2)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial F} - S \right) \dot{F} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial g} \dot{g} + \frac{1}{\theta} q \cdot g \leq 0 \quad (3.3.3)$$

• • •

Esta desigualdad es lineal en \dot{F} , $\dot{\theta}$ y \dot{g} , y se cumple para todas las variables; solo si los coeficientes desaparecen.

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial F} - S = 0 \quad (3.3.4)$$

$$S = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial F} \quad \therefore \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial F} = 0 \quad (3.3.5)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} + \eta = 0 \quad (3.3.6)$$

$$\eta = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial g} = 0 \quad (3.3.7)$$

$$q \bullet g \leq 0 \quad (3.3.8)$$

De estos resultados se generan las siguientes afirmaciones:

Proposición 3.3.1

i) Las funciones respuesta S, ψ, η son independientes de g y P

$$\begin{aligned} S &= \hat{S}(F, \theta) \\ \psi &= \hat{\psi}(F, \theta) \\ \eta &= \hat{\eta}(F, \theta) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

ii) $\hat{\psi}$ determina a \hat{S}

$$\hat{S}(F, \theta) = \partial_F \hat{\psi}(F, \theta) \quad (3.3.10)$$

iii) $\hat{\psi}$ determina a $\hat{\eta}$

$$\hat{\eta}(F, \theta) = -\partial_\theta \hat{\psi}(F, \theta) \quad (3.3.11)$$

iv) \hat{q} obedece la desigualdad de conducción de calor.

$$q \cdot g \leq 0 \quad (3.3.12)$$

Proposición 3.3.2

En un proceso termodinámico admisible, la ecuación de energía (primera ley de la termodinámica) toma la forma:

$$\dot{\theta} \eta = -\text{div } q + r \quad (3.3.13)$$

Demostración

Ecuación de energía

$$\dot{e} = S \cdot F - \text{div } q + r$$

Tomando la ecuación de energía libre y derivandola.

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{\eta} \theta$$

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \left(\dot{\eta} \theta + \eta \dot{\theta} \right)$$

$$\dot{e} = \dot{\psi} + \dot{\eta} \theta + \eta \dot{\theta}$$

ii) $\hat{\psi}$ determina a \hat{S}

$$\hat{S}(F, \theta) = \partial_F \hat{\psi}(F, \theta) \quad (3.3.10)$$

iii) $\hat{\psi}$ determina a $\hat{\eta}$

$$\hat{\eta}(F, \theta) = -\partial_\theta \hat{\psi}(F, \theta) \quad (3.3.11)$$

iv) \hat{q} obedece la desigualdad de conducción de calor.

$$q \bullet g \leq 0 \quad (3.3.12)$$

Proposición 3.3.2

En un proceso termodinámico admisible, la ecuación de energía (primera ley de la termodinámica) toma la forma:

$$\dot{\theta} \eta = -\text{div } q + r \quad (3.3.13)$$

Demostración

Ecuación de energía

$$\dot{e} = S \bullet F - \text{div } q + r$$

Tomando la ecuación de energía libre y derivandola.

$$\psi = e - \eta\theta$$

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \left(\dot{\eta}\theta + \eta\dot{\theta} \right)$$

$$\dot{e} = \dot{\psi} + \eta\dot{\theta} + \theta\dot{\eta}$$

De los dos primeros incisos de la proposición 3.3.1 i) y ii), y derivando la función respuesta ψ tenemos.

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(F, \theta) \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial F} \dot{F} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} &= S \cdot \dot{F} - \eta \dot{\theta} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos dos últimos resultados en la ecuación de energía ecuación (2.1.8) se tiene:

$$\begin{aligned} S \cdot \dot{F} - \eta \dot{\theta} + \eta \dot{\theta} + \theta \dot{\eta} &= S \cdot \dot{F} - \text{div } q + r \\ \theta \dot{\eta} &= -\text{div } q + r \end{aligned}$$

Proposición 3.3.3

En un proceso termodinámico admisible, las funciones respuesta, para el esfuerzo y la entropía satisfacen la relación de maxwell

$$\partial_{\theta} \hat{S}(F, \theta) = -\partial_F \hat{\eta}(F, \theta) \quad (3.3.14)$$

Demostración

Tomando los resultados de los incisos i), ii) y iii) de la proposición 3.3.1, tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_{\theta} \hat{S}(F, \theta) &= \partial_{\theta} \partial_F \psi(F, \theta) \\ -\partial_F \hat{\eta}(F, \theta) &= \partial_F \partial_{\theta} \psi(F, \theta) \end{aligned}$$

dado que

$$\partial_{\theta} \partial_F \psi = \partial_F \partial_{\theta} \psi$$

Entonces

$$\partial_{\theta} \hat{S}(F, \theta) = -\partial_F \hat{\eta}(F, \theta)$$

Definición 3.3.1

El calor específico se define por:

$$c(F, \theta) = \theta \partial_{\theta} \hat{\eta}(F, \theta) \quad (3.3.15)$$

3.4 CAMBIO DE VARIABLE

El cambio de variable se puede dar solo si los nuevos funcionales cumplen con los axiomas de cambio de observador y la invarianza de material; lo cual sucede con las funciones respuesta dadas . ref. [2]. el cambio de variable esta dado por:

$$D = \frac{1}{2}(F^T F - Y) \quad (3.4.1)$$

el cual se define como el tensor de deformación finita.

$$\begin{aligned} S &= \hat{S}(D, \theta) \\ \psi &= \hat{\psi}(D, \theta) \\ \eta &= \hat{\eta}(D, \theta) \\ q &= \hat{q}(D, \theta) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Al sustituir las funciones respuesta dentro de la ecuación (2.6.9) que se conoce como la segunda ley de la termodinámica tenemos los siguientes resultados:

$$\hat{S}(D, \theta) = \partial_D \hat{\psi}(C, \theta) \quad (3.4.3)$$

$$\hat{\eta}(D, \theta) = -\partial_{\theta} \hat{\psi}(C, \theta) \quad (3.4.4)$$

$$q(D, \theta, g) \cdot g \leq 0 \quad (3.4.5)$$

3.5 TERMOELASTICIDAD LINEAL

Para linealizar el sistema de ecuaciones se tiene que tomar en cuenta las siguientes hipótesis:

- 1) El gradiente de desplazamiento y su tasa de cambio respecto al tiempo son pequeños.

$$\nabla u = \dot{\nabla} u = o(\delta) \quad (3.5.1)$$

- 2) El campo de temperaturas es muy aproximado a un θ_0 campo uniforme llamado temperatura de referencia.

$$\theta - \theta_0 = o(\delta) \quad (3.5.2)$$

- 3) El valor de la derivada con respecto al tiempo de la temperatura es pequeño

$$\dot{\theta} = o(\delta) \quad (3.5.3)$$

- 4) El gradiente de temperatura es pequeño.

$$g = o(\delta) \quad (3.5.4)$$

- 5) El tensor de deformación y la temperatura se toman respectivamente como:

$$F = I \quad \text{y} \quad \theta = \theta_0 \quad (3.5.5)$$

- 6) El esfuerzo residual a la temperatura de referencia es cero.

$$\hat{S}(0, \theta_0) = 0 \quad (3.5.6)$$

Expandemos la ecuación (3.4.3) usando la hipótesis (3.5.6)

$$S(D, \theta) = \hat{S}(o + E, \theta_0 + \theta) = \hat{S}(0, \theta_0) + \partial_D \hat{S}(0, \theta_0)[E] + \partial_\theta \hat{S}(0, \theta_0)[\theta] + o\delta(E) + o\delta(\theta) \quad (3.5.7)$$

$$S(D, \theta) = C[E] + M(\theta - \theta_0) \quad (3.5.8)$$

$$S = C[E] + M(\theta - \theta_0)$$

donde el tensor de elasticidades y el de esfuerzo temperatura estan dados por:

$$C = \partial_D \hat{S}(0, \theta_0) \text{ y } M = \partial_\theta \hat{S}(0, \theta_0) \quad (3.5.9)$$

Proposición 3.5.1

La expansión de $q = \hat{q}(D, \theta, g)$ en una serie de taylor alrededor de $(0, \theta_0, \theta)$ resulta en: consirerando a $D=0$ y $\theta = \theta_0$

$$q = -Kg + o\delta \quad (3.5.10)$$

$$q = -K g$$

Demostración

La ecuación $\hat{q}(D, \theta_0, g)$, se puede expandir alrededor de $(0, \theta_0, 0)$.

$$\begin{aligned} \hat{q}(D, \theta, g) &= \hat{q}(0 + E, \theta_0 + \theta - \theta_0 + g) = \hat{q}(0, \theta_0, \theta) + \\ &+ \partial_D \hat{q}(0, \theta_0, 0)[E] + \partial_\theta \hat{q}(0, \theta_0, 0)[\theta] + \partial_g \hat{q}(0, \theta_0, 0)[g] + \\ &+ o\delta(E) + o\delta(\theta) + o\delta(g) \\ q(D, \theta, g) &= \hat{q}(0, \theta_0, 0) + \partial_D \hat{q}(0, \theta_0, 0)[E] + \partial_\theta \hat{q}(0, \theta_0, 0)[\theta] + \\ &+ \partial_g \hat{q}(0, \theta_0, 0)[g], \end{aligned}$$

$$q(D, \theta, g) = \partial_g \hat{q}(0, \theta_0, 0)[g]$$

$$= -Kg$$

$$q = -Kg$$

donde:

$$K = -\partial_g \hat{q}(0, \theta_0, 0)[g]$$

En la siguiente proposición se demuestra porque son cero los términos que se eliminaron.

Proposición 3.5.2

• Cuando el gradiente de temperatura es cero el flujo de calor desaparece.

$$\hat{q}(D, \theta, g) = 0 \tag{3.5.11}$$

Demostración

Expandemos en una serie de Taylor la ecuación constitutiva $\hat{q}(D, \theta, g) = 0$, fijando D y θ , siendo C y D , el tensores de cuarto orden.

$$D \text{ y } C : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}$$

Definido por:

$$C = \partial_D \hat{S}(D, \theta) \Big|_{D=0 \quad \theta=\theta_0}$$

$$\hat{q}(D, \theta, g) = \hat{q}(D, \theta, 0) - Kg + o\delta(g)$$

donde:

$$K = -dg \hat{q}(D, \theta, 0)$$

Conjugando el resultado anterior y la desigualdad de calor

$$\hat{q}(D, \theta, g) \cdot g \leq 0$$

$$\hat{q}(D, \theta, 0) \cdot g - g \cdot Kg + o\delta(g)^2 \leq 0 \quad \forall g$$

Lo anterior solo se cumple si: $\hat{q}(D, \theta, 0) = 0$

$$g \cdot Kg \geq 0$$

Corolario 3.5.1

De la proposicion 3.5.2 Se deduce que:

$$\partial_D \hat{q}(D, \theta, 0) = 0 \quad | \quad (3.5.12)$$

$$\partial_\theta \hat{q}(D, \theta, 0) = 0 \quad (3.5.13)$$

Proposición 3.5.3

El tensor de esfuerzos esta dado por :

$$S = C[E] + (\theta - \theta_0)M + o\delta \quad (3.5.14)$$

Donde C es el tensor de elasticidades de cuarto orden, definido por:

$$C = \partial_D \hat{S}(D, \theta) \Big|_{D=0 \quad \theta=\theta_0} \quad (3.5.15)$$

M el tensor de esfuerzo temperatura, de segundo orden, definido por:

$$M = \partial_\theta \hat{S}(D, \theta) \Big|_{D=0 \quad \theta=\theta_0} \quad (3.5.16)$$

Demostración

De la consideración 3.5.5 tomamos los valores de $F=I$ y $\theta = \theta_0$; y los sustituimos en la ecuación constitutiva de, considerando a D como:

$$D = \frac{1}{2}(II - I) = 0$$

$$\hat{S} = (0, \theta_0).$$

Proposición 3.5.4

La ecuación de energía se puede escribir como:

$$-\text{div } q + \theta_0 M \bullet E + r + o\delta = c\dot{\theta} \quad (3.5.17)$$

Demostración

Diferenciando la ecuación constitutiva

$$\eta = \hat{\eta}(D, \theta)$$

$$\dot{\eta} = \partial_D \hat{\eta}(D, \theta) \bullet \dot{D} + \partial_\theta \hat{\eta}(D, \theta) \bullet \dot{\theta} + o\delta^2$$

Utilizando la relación de Maxwell, la definición de tensor de esfuerzo temperatura y la definición de calor específico:

$$D = E + o\delta$$

$$\dot{D} = \dot{E} + o\dot{\delta}$$

Combinando este resultado con la ecuación de energía (primera ley de la termodinámica)

$$\dot{\theta} \eta = -\operatorname{div} \mathbf{q} + r$$

Tenemos:

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} + \theta_0 M \dot{E} + r + o\delta = c \dot{\theta}$$

CAPÍTULO 4 ECUACIONES DE ESTADO

INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se presentan los seis modelos matemáticos asociados de los problemas de la termoelasticidad: termoelastodinámico, elastodinámico, conducción de calor, termoelástico, elasticidad y distribución de temperatura.

Los modelos que se presentan en este capítulo son generados con la teoría de la mecánica del medio continuo y la termodinámica (presentadas en los capítulos anteriores), considerando que los materiales son isotrópicos y homogéneos.

4.1 DINÁMICA DE LA TERMOELASTICIDAD LINEAL

En este apartado se hace una síntesis de los capítulos anteriores, pero solamente tomando las ecuaciones correspondientes.

A) Ecuaciones de equilibrio

Sea $S: B \rightarrow L(V, V)$, $b: B \rightarrow V$, $\rho: B \rightarrow R$, $u: B \rightarrow V$, $q: B \rightarrow V$, $M: B \rightarrow L(V, V)$, $E: B \rightarrow L(V, V)$, $r: B \rightarrow V$, $v: B \rightarrow V$. los campos: tensorial de esfuerzo, vectorial de fuerzas de cuerpo, escalar de densidades, vectorial de desplazamientos, vectorial de flujo de calor, tensorial de esfuerzo temperatura, tensorial de deformaciones infinitesimales, vectorial de suministro de calor, vectorial del gradiente de temperatura respectivamente. Además c y θ_0 son el calor específico y temperatura de referencia.

Las ecuaciones de equilibrio de: la elasticidad y de la termodinámica son:

$$\operatorname{div} S + b = \sigma \ddot{u} \quad (4.1.1)$$

$$-\operatorname{div} q + \theta_0 M \bullet \dot{E} + r = c \dot{v} \quad (4.1.2)$$

B) Ecuación constitutiva de la termoelasticidad

Sean $C: \text{Lin}(V, V) \rightarrow \text{Lin}(V, V)$ y $\vartheta: B \rightarrow V$, los campos tensorial de elasticidades y el campo vectorial del gradiente de temperaturas.

$$S = C[E] + \vartheta M \quad (4.1.3)$$

C) Ecuaciones complementarias de los incisos A) y B)

En este apartado se dan las ecuaciones : esfuerzo deformación temperatura, de conducción de calor, de esfuerzo temperatura, de deformaciones infinitesimales, presentandose en este orden.

Sean $K: B \rightarrow L(V, V)$ y $g: B \rightarrow V$ el campo tensorial de conductividad y el campo vectorial del gradiente térmico. Además sean μ y λ , m , $\theta - \theta_0$, los módulos de Lamé, módulo de esfuerzo temperatura y diferencia de temperatura respectivamente.

Al substituir los campos correspondientes se obtiene las siguientes ecuaciones.

$$S = 2\mu E + \lambda (\text{tr}E)I + m(\theta - \theta_0)I \quad (3.1.4)$$

$$q = -Kg \quad (3.1.5)$$

$$M = ml \quad (3.1.6)$$

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (3.1.7)$$

D) Ecuaciones complementarias del inciso C)

Se presentan las ecuaciones de: conductividad térmica, gradiente de temperatura y diferencia de temperatura, en este orden. La constante k es la conductividad térmica del material (material isótropico)

$$K=kl \tag{3.1.8}$$

$$g=\nabla v \tag{3.1.9}$$

$$v=(\theta-\theta_0) \tag{3.1.10}$$

4.2 PROBLEMA MIXTO DE LA TEORÍA DINÁMICA DE LA TERMOELASTICIDAD

En esta parte se presenta el problema mixto de la termoelastodinámica en terminos del desplazamiento y la temperatura

Sea u un movimiento admisible y ϑ un campo de temperaturas admisible, y soluciones a este problema.

Para resolver el problema se tienen como datos: $(0, t_0)$, $C, \rho, b, r, (u_0, v_0, \vartheta_0)$ y $(\hat{u}, \hat{s}, \hat{\vartheta}, \hat{q})$ un intervalo de tiempo, un campo tensorial de elasticidades en $B \times (0, t_0)$, un campo escalar de densidades en $B \times (0, t_0)$, un campo vectorial de fuerzas de cuerpo en $B \times (0, t_0)$, un campo vectorial de suministro de calor en $B \times (0, t_0)$, condiciones iniciales en $B \times (0, t_0)$ y condiciones de frontera en $\partial B_i \times (0, t_0)$

Ademas se debe cumplir los siguientes requisitos : b y r son continuos sobre $B \times (0, t_0)$, las condiciones iniciales son continuas sobre B , las condiciones de frontera son continuas sobre en $\partial B_i \times (0, t_0)$, $u \in C^{2,2}(B, [0, t])$, $u, \dot{u}, \ddot{u}, \nabla u, \nabla \dot{u}$

son continuos en $B \times (0, t_0)$, $S \in C^{1,0}(B, [0, t])$, S y la $\text{div } S$ son continuos en $B \times (0, t_0)$, $\vartheta \in C^{2,1}(B, [0, t])$, el gradiente y la derivada de ϑ son continuos en $B \times (0, t_0)$, $q \in C^{1,0}(B, [0, t])$, q y $\text{div } q$ son continuos en $B \times (0, t_0)$,

Entonces el problema es encontrar $u(t)$ y $\vartheta(t)$ cumpliendo con:

$$\text{div } S + b = \sigma \ddot{u} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (4.2.1)$$

$$-\text{div } q + m \theta_0 \text{tr } \dot{E} + r = c \dot{\vartheta} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (4.2.2)$$

Con las condiciones iniciales

$$u(\bullet, 0) = u_0, \quad \dot{u}(\bullet, 0) = v_0, \quad \vartheta(\bullet, 0) = \vartheta_0 \quad \text{en } B \times (0, t_0)$$

y las condiciones de frontera

$$u = \hat{u} \quad \text{en } \partial B_1 \times (0, t_0)$$

$$(C[\nabla u] + \vartheta M) \bullet n = \hat{S} \quad \text{en } \partial B_2 \times (0, t_0)$$

$$\vartheta = \hat{\vartheta} \quad \text{en } \partial B_3 \times (0, t_0)$$

$$-[K \nabla \vartheta] \bullet n = \hat{q} \quad \text{en } \partial B_4 \times (0, t_0)$$

Si lo anterior se cumple, el proceso termoelastico $[u, E, S, \vartheta, g, q]$ se dice que es una solución del problema mixto de la termoelastodinámica..

Si hacemos la deformación cero, o sea no se aplican tracciones en la superficie, el esfuerzo es igual en todas las direcciones; por lo tanto es una presión.

$$S = m(\theta - \theta_0) I \quad E = 0 \quad (4.2.3)$$

La distribución de temperaturas provoca la dilatación del cuerpo generando esfuerzos.

Cuando desaparece el esfuerzo $S=0$ obtenemos:

$$E = \frac{1}{2\mu} S - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\text{tr} S) I + \left(\frac{-m}{3\lambda + 2\mu} \right) (\theta - \theta_0) I \quad (4.2.4)$$

$$E = -\frac{m}{3\lambda + 2\mu} (\theta - \theta_0) \quad (4.2.5)$$

Lo cual nos da como resultado una dilatación. Definimos como coeficiente de expansión térmica

$$\alpha = \frac{-m}{3\lambda + 2\mu} \quad (4.2.6)$$

4.3 PROBLEMA MIXTO DE LA TEORÍA DE LA ELASTODINÁMICA

Plantaremos el problema mixto de la elastodinámica en términos del desplazamiento. Sea $u(t)$ un movimiento admisible y una solución.

Para resolver el problema se tienen como datos: $(0, t_0)$, C , ρ , b , (u_0, v_0) y

(\hat{u}, \hat{s}) un intervalo de tiempo, un campo tensorial de elasticidades en $B \times (0, t_0)$, un campo escalar de densidades en $B \times (0, t_0)$, un campo vectorial de fuerzas de cuerpo en $B \times (0, t_0)$, condiciones iniciales en $B \times (0, t_0)$ y condiciones de frontera en $\partial B_i \times (0, t_0)$

Además se debe cumplir los siguientes requisitos: $b: B \times (0, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo, las condiciones iniciales son continuas sobre B , las condiciones de frontera son continuas sobre en $\partial B_i \times (0, t_0)$, $u \in C^{2,2}(B, [0, t])$, $u, u, u, \nabla u, \nabla u$

son continuos en $B \times (0, t_0)$, $S \in C^{1,0}(B, [0, t])$, S y la $\text{div } S$ son continuos en $B \times (0, t_0)$.

Entonces el problema consiste en encontrar $u(t)$ cumpliendo con:

$$\text{div } S + b = \sigma \ddot{u} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (4.3.1)$$

Con las condiciones iniciales

$$u(\bullet, 0) = u_0, \quad \dot{u}(\bullet, 0) = v_0, \quad \text{en } B \times (0, t_0)$$

y las condiciones de frontera

$$u = \hat{u} \quad \text{en } \partial B_1 \times (0, t_0)$$

$$(C[\nabla \hat{u}]) \cdot n = \hat{S} \quad \text{en } \partial B_2 \times (0, t_0)$$

Si lo anterior se cumple, el proceso elastodinámico $[u, E, S,]$ se dice que es una solución del problema de la elastodinámica.

4.4 PROBLEMA DE CONDUCCIÓN DE CALOR

En esta sección se planteará el problema de conducción de calor en términos de la temperatura. Sea ϑ el campo de temperaturas admisible y una solución.

Para resolver el problema se tienen como datos: $(0, t_0)$, r , ϑ_0 y $(\hat{\vartheta}, \hat{q})$ un intervalo de tiempo, un campo vectorial de suministro de calor en $B \times (0, t_0)$, una condición inicial en $B \times (0, t_0)$ y condiciones de frontera en $\partial B_1 \times (0, t_0)$

Además se debe cumplir los siguientes requisitos: r es continuo sobre $B \times (0, t_0)$, la condición inicial es continua sobre B , las condiciones de frontera son continuas sobre en $\partial B_1 \times (0, t_0)$, $\vartheta \in C^{2,1}(B, [0, t])$, el gradiente y la derivada de ϑ son continuos $B \times (0, t_0)$, $q \in C^{1,0}(B, [0, t])$, q y $\text{div } q$ son continuos en $B \times (0, t_0)$,

Entonces el problema será: encuentre $\vartheta(t)$ cumpliendo con:

$$-\text{div } q + m \theta_0 \text{tr } \dot{E} + r = c \dot{\vartheta} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (4.4.1)$$

con la condición inicial

$$\vartheta(\bullet, 0) = \vartheta_0 \quad \text{en } B \times (0, t_0)$$

y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \vartheta &= \hat{\vartheta} && \text{en } \partial B_1 \times (0, t_0) \\ -[K \nabla \vartheta] \bullet &= \hat{q} && \text{en } \partial B_2 \times (0, t_0) \end{aligned}$$

Si lo anterior se cumple, el proceso térmico $[\vartheta, g, q]$, se dice que es una solución del problema de conducción de calor.

4.5 PROBLEMA DE LA TERMOELASTICIDAD

Se presentará el problema de la termoelasticidad en términos del desplazamiento y la temperatura.

Sea u un movimiento admisible y ϑ un campo de temperaturas admisible y soluciones del problema.

Para resolver el problema se tienen como datos: $C, \rho, b, r,$ y $(\hat{u}, \hat{s}, \hat{\vartheta}, \hat{q})$, siendo, un campo tensorial de elasticidades en B , un escalar de campo de densidades en B , un campo vectorial de fuerzas de cuerpo en B , un campo vectorial de suministro de calor en B , y condiciones de frontera en ∂B_i

Ademas se debe cumplir los siguientes requisitos : b y r son continuos sobre B , las condiciones de frontera son continuas sobre en ∂B_i , $u \in C^{2,2} B$, u y ∇u son continuos en B , $S \in C^{1,0}(B)$, S y la $\text{div } S$ son continuos en B , $\vartheta \in C^{2,1} B$, el gradiente es continuo, $q \in C^{1,0} B$, q y $\text{div } q$ son continuos en B .

Entonces encuentre u y ϑ de tal manera que cumplan con:

$$\text{div } S + b = 0 \quad \text{en } B \quad (4.5.1)$$

$$-\text{div } q + r = 0 \quad \text{en } B \quad (4.5.2)$$

Con las condiciones de frontera

$$u = \hat{u} \quad \text{en } \partial B_1$$

$$(C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot n = \hat{s} \quad \text{en } \partial B_2$$

$$\vartheta = \hat{\vartheta} \quad \text{en } \partial B_3$$

$$-[K \nabla \vartheta] \cdot n = \hat{q} \quad \text{en } \partial B_4$$

Si lo anterior se cumple, el proceso termoelastico $[u, E, S, \vartheta, g, q]$, se dice que es una solución del problema de la termoelasticidad.

4.6 PROBLEMA DE LA ELASTICIDAD

El problema de la elasticidad en terminos del desplazamiento u . Sea u un movimiento admisible y una solución al problema.

Para resolver el problema se tienen como datos: C , ρ , b , y (\hat{u}, \hat{s}) , un campo tensorial de elasticidades en B , un campo escalar de densidades en B , un campo vectorial de fuerzas de cuerpo en B , y condiciones de frontera en ∂B_i .

Ademas se debe cumplir los siguientes requisitos : b es continuo sobre B , las condiciones de frontera son continuas sobre en ∂B_i , $u \in C^{2,2} B$, u y el ∇u son continuos en B , $S \in C^{1,0} B$, S y la $\text{div } S$ son continuos en B .

Entonces el problema consiste en encontrar u satisfaciendo lo siguiente:

$$\text{div } S + b = 0 \quad \text{en } B \quad (4.6.1)$$

Con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \hat{u} && \text{en } \partial B_1 \\ (C[\nabla u]) \cdot n &= \hat{s} && \text{en } \partial B_2 \end{aligned}$$

Si lo anterior se cumple, el proceso elastico $[u, E, S,]$, se dice que es una solución del problema de la elasticidad.

4.7 PROBLEMA TÉRMICO

El problema de conduccion de calor esta terminos de la temperatura . Sea θ el campo de temperaturas admisible y una solución.

Para resolver el problema se tienen como datos: r , y $(\hat{\vartheta}, \hat{q})$, siendo, un campo vectorial de suministro de calor en B y condiciones de frontera en ∂B_1

Además se debe cumplir los siguientes requisitos: r es continuo sobre B , las condiciones de frontera son continuas sobre en ∂B_1 , $\vartheta \in C^{2,1} B$, el gradiente es continuo, $q \in C^{1,0} B$, q y $\text{div } q$ son continuos en B .

Entonces el problema consiste en encontrar ϑ , pero cumpliendo las siguientes condiciones en el interior y la frontera.

$$-\text{div } q + r = 0 \quad \text{en } B \quad (4.7.1)$$

Con las condiciones de frontera}

$$\vartheta = \hat{\vartheta} \quad \text{en } \partial B_1$$

$$-[K \nabla \vartheta] \cdot n = \hat{q} \quad \text{en } \partial B_2$$

Si lo anterior se cumple, el proceso térmico $[\vartheta, g, q]$, se dice que es una solución del problema de distribución de temperaturas.

CAPITULO 5 FORMULACIONES VARIACIONALES

INTRODUCCIÓN

En los diferentes modelos matemáticos planteados en el capítulo 4, se observa que la solución de los problemas esta condicionada por las condiciones iniciales y de frontera. El valor de estas condiciones varia de acuerdo al problema.

Las ecuaciones que gobiernan el problema solo toman en cuenta los puntos del interior del cuerpo, para que las condiciones de frontera afecten a la solución del problema se utilizan técnicas variacionales.

5.1 PROBLEMA DE LA TERMOELASTODINÁMICA

El modelo matemático del problema termoelastodinámico se obtuvo en el capítulo 4, este modelo consiste en:

Encuentre $u \in C^2(B, R)$ y $\vartheta \in C^1(B, R)$ en:

$$\operatorname{div} C[\nabla u] + \operatorname{div} (\vartheta M) + b = \rho \ddot{u} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (5.1.1)$$

$$\operatorname{div} (K[\nabla v]) + m \theta_0 \operatorname{tr} \dot{E} + r = c \dot{\vartheta} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (5.1.2)$$

Con las condiciones iniciales

$$u(\bullet, 0) = u_0 \quad \dot{u}(\bullet, 0) = v_0 \quad \vartheta(\bullet, 0) = \vartheta_0 \quad \text{en } B$$

y las condiciones de frontera

$$u = \hat{u} \quad \text{sobre } \partial B_1 \times (0, t_0)$$

$$(C[\nabla u] + \vartheta M) n = \hat{S} \quad \text{sobre } \partial B_2 \times (0, t_0)$$

$$\vartheta = \hat{\vartheta} \quad \text{sobre } \partial B_3 \times (0, t_0)$$

$$-(K (\nabla v)) \cdot n = \hat{q} \quad \text{sobre } \partial B \times (0, t_0)$$

5.1.2 FORMULACIÓN VARIACIONAL

Dadas las condiciones de frontera y las ecuaciones de equilibrio, se sigue los siguientes pasos, ref [6], para obtener el modelo variacional del problema.

1) Sean K y L conjuntos convexos cerrados, de desplazamientos y temperaturas respectivamente; cinemáticamente y térmicamente admisibles.

Sean u y w campos vectoriales y escalares respectivamente
Entonces:

$$K = \{ w \in C^2(B, R) : v = \hat{u} \text{ sobre } \partial B_1 \} \quad (5.1.3)$$

$$L = \{ w \in C^2(B, R) : z = \hat{g} \text{ sobre } \partial B_3 \} \quad (5.1.4)$$

2) Tomamos un elemento de K y L respectivamente $v \in K$ y $z \in L$. Se efectúa un producto interno con las ecuaciones de equilibrio respectivamente.

$$(\text{div } C [\nabla u] + \text{div } [g M] + b) \cdot v = \rho \ddot{u} \cdot v \quad (5.1.5)$$

$$[\text{div } (K \nabla g) + m \theta_0 \text{tr } \dot{E} + r] \cdot z = c \dot{g} \cdot z \quad (5.1.6)$$

3) Dado que el operador integral acepta el producto interno, integramos en todo el dominio B.

El problema queda definido como el problema variacional fuerte del problema físico.

Encuentre $u \in K$ y $v \in L$ tal que:

$$\int_B \operatorname{div} (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot V \, dB + \int_B b \cdot V \, dB = \int_B \rho \ddot{u} \cdot V \, dB \quad (5.1.7)$$

$$\forall V \in K$$

$$\int_B \operatorname{div} (K \nabla \vartheta) \cdot n \cdot Z \, dB + \int_B m \theta_0 \operatorname{tr} \dot{E} \, dB + \int_B r Z \, dB = \int_B c \dot{\vartheta} Z \, dB \quad (5.1.8)$$

$$\forall Z \in L$$

donde las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot n &= \hat{s} && \text{sobre } \partial B_2 \\ -K \nabla \vartheta \cdot n &= \hat{q} && \text{sobre } \partial B_4 \end{aligned}$$

4) De las integrales anteriores definidas en el interior del cuerpo, obtenemos otras integrales definidas en la frontera (formulas de green).

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{div} (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot V \, dB &= - \int_B (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot \nabla V \, dB + \\ &+ \int_{\partial B} (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot V \, d\partial B \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

$$\int_B \operatorname{div} (K \nabla \vartheta) \cdot Z \, dB = - \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla Z \, dB + \int_{\partial B} (K \nabla \vartheta) \cdot n Z \, d\partial B. \quad (5.1.10)$$

5) Sustituyendo las ecuaciones (5) en las (4) respectivamente llegamos a la formulación clásica (débil)

Encuentre (u, ϑ) en $K \times L$

$$\begin{aligned} & \int_B \rho \dot{u} \cdot V \, dB + \int_B [C(\nabla u) + \vartheta M] \cdot \nabla V \, dB = \\ & = \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B} (C[\nabla u] + \vartheta M) n \cdot V \, d\partial B = 0 \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_B c \dot{\vartheta} Z \, dB + \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla Z - \int_B \theta_0 M \cdot \nabla \hat{u} Z \, dB = \\ & + \int_B r Z \, dB + \int_{\partial B} K \nabla \vartheta \cdot n Z \, d\partial B = 0 \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

$$\forall V \in K, \forall Z \in L$$

Bajo las condiciones iniciales

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \dot{u}(\cdot, 0) = v_0 \quad \vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0 \quad \text{en } B$$

6) Ahora podemos particularizar el problema con las condiciones Dirichlet y Newman dadas en el problema físico.

Encuentre $u \in K$ y $\vartheta \in L$

$$\begin{aligned} & \int_B \rho \dot{u} \cdot V \, dB + \int_B (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot \nabla V \, dB = \quad (5.1.13) \\ & = \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B} (C[\nabla u] + \vartheta M) n \cdot V \, dB \\ & = \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B_1} (C[\nabla u] + \vartheta M) n \cdot \hat{u} \, dB_1 + \int_{\partial B_2} (C[\nabla u] + \vartheta M) n \cdot V \, d\partial B_2 \\ & = \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B_2} s \cdot V \, d\partial B_2 \\ & \forall V \in K \end{aligned}$$

Bajo las condiciones iniciales siguientes:

$$u(\bullet, 0) = u_0 \quad \dot{u}(\bullet, 0) = v_0 \quad \vartheta(\bullet, 0) = \vartheta_0 \quad \text{en } B$$

Ecuación de energía

$$\begin{aligned} & \int_B c \dot{\vartheta} Z \, dB + \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla Z - \int_B \theta_0 M \cdot \nabla \dot{u} \, dB = \quad (5.1.14) \\ & = \int_{\partial B} (K \nabla \vartheta \cdot n) Z \, d\partial B + \int_B r Z \, dB = \\ & = \int_{\partial B_3} (K \nabla \vartheta \cdot n) Z \, d\partial B_3 + \int_{\partial B_4} \hat{q} Z \, d\partial B_4 + \int_B r Z \, dB \\ & = \int_B r Z \, dB + \int_{\partial B_4} \hat{q} Z \, d\partial B_4 \quad \forall Z \in L \end{aligned}$$

Al planteamiento anterior le llamamos formulación variacional débil del problema físico.

La formulación variacional débil la podemos sintetizar de la siguiente manera.

Encuentre $u \in K$ y $\vartheta \in L$ tal que:

$$m(u'', v) + a_1(u, v) + a_2(v, v) = f(v) \quad \forall v \in K \quad (5.1.15)$$

$$b(\vartheta', z) + d(\vartheta, z) - e(u', z) = J(z) \quad \forall z \in L \quad (5.1.16)$$

donde:

$m : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica

$a_j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$ forma lineal

$b : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica

$d: L \times L \rightarrow R$ forma bilineal simétrica

$e: K \times L \rightarrow$ forma bilineal

$j: L \rightarrow R$ forma lineal

$$m(u, v) = \int_B \rho \dot{u} \cdot v \, dB \quad (5.1.17)$$

$$a(u, v) = \int_B (C [\nabla u] + \vartheta M) \cdot \nabla v \, dB \quad (5.1.18)$$

$$f(v) = \int_B b \cdot v \, dB - \int_{\partial B_2} \hat{S} \cdot v \, d\partial B_2 \quad (5.1.19)$$

$$b(\vartheta, z) = \int_B c \dot{\vartheta} z \, dB \quad (5.1.20)$$

$$e(u, z) = \int_B \theta_0 M \cdot \nabla u \, dB \quad (5.1.21)$$

$$J(z) = \int_B r z \, dB + \int_{\partial B_4} \hat{q} z \, d\partial B_4 \quad (5.1.22)$$

$$d(\vartheta, z) = \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla z \, dB \quad (5.1.23)$$

5.2 PROBLEMA DE LA ELASTODINÁMICA

El modelo matemático del problema elastodinámico se obtuvo en el capítulo 4, este modelo consiste en:

Encuentre $u \in C^2(B, R)$ y $\vartheta \in C^1(B, R)$ en:

$$\operatorname{div} C[\nabla u] + b = \rho \ddot{u} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (5.2.1)$$

Con las condiciones iniciales

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \dot{u}(\cdot, 0) = v_0 \quad \text{en } B \times (0, t_0)$$

y las condiciones de frontera

$$u = \hat{u} \quad \text{sobre } \partial B_1 \times (0, t_0)$$

$$(C[\nabla u] + \vartheta M)n = \hat{S} \quad \text{sobre } \partial B_2 \times (0, t_0)$$

5.2.1 FORMULACIÓN VARIACIONAL

Utilizando la misma metodología anterior, llegamos a la formulación variacional, para este problema.

Encuentre $u \in K$

$$\int_B \rho \ddot{u} \cdot V \, dB + \int_B C[\nabla u] \cdot \nabla V \, dB = \quad (5.2.2)$$

$$= \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial} C[\nabla u] n \cdot V \, d\partial B$$

$$= \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B_1} C[\nabla u] n \cdot \hat{u} \, dB_1 + \int_{\partial B_2} C[\nabla u] n \cdot V \, d\partial B_2$$

$$= \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B_2} \hat{S} n \cdot V \, d\partial B_2$$

$\forall V \in K$

Bajo las condiciones iniciales

$$\text{div } C[\nabla u] + b = \rho \dot{u} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (5.2.1)$$

Con las condiciones iniciales

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \dot{u}(\cdot, 0) = v_0 \quad \text{en } B \times (0, t_0)$$

y las condiciones de frontera

$$u = \hat{u} \quad \text{sobre } \partial B_1 \times (0, t_0)$$

$$(C[\nabla u] + \vartheta M)n = \hat{S} \quad \text{sobre } \partial B_2 \times (0, t_0)$$

5.2.1 FORMULACIÓN VARIACIONAL

Utilizando la misma metodología anterior, llegamos a la formulación variacional, para este problema.

Encuentre $u \in K$

$$\int_B \rho \dot{u} \cdot V \, dB + \int_B C[\nabla u] \cdot \nabla V \, dB = \quad (5.2.2)$$

$$= \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial} C[\nabla u] n \cdot V \, d\partial B$$

$$= \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B_1} C[\nabla u] n \cdot \hat{u} \, dB_1 + \int_{\partial B_2} C[\nabla u] n \cdot V \, d\partial B_2$$

$$= \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B_2} \hat{S} n \cdot V \, d\partial B_2$$

$\forall V \in K$

Bajo las condiciones iniciales

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \dot{u}(\cdot, 0) = v_0 \quad \text{en } B$$

La formulación variacional débil la podemos sintetizar de la siguiente manera.

Encuentre $u \in K$ tal que:

$$m(u'', v) + a_1(u, v) = f(v) \quad \forall v \in K \quad (5.2.3)$$

donde:

$m : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica

$a_1 : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$ forma lineal

$$m(u, v) = \int_B \rho \dot{u} \cdot \dot{v} \, dB \quad (5.2.4)$$

$$a(u, v) = \int_B (C [\nabla u]) \cdot \nabla v \, dB \quad (5.2.5)$$

$$f(v) = \int_B b \cdot v \, dB - \int_{\partial B_2} \hat{S} \cdot v \, d\partial B_2 \quad (5.2.6)$$

5.3 PROBLEMA DE CONDUCCIÓN DE CALOR

El modelo matemático del problema de conducción de calor obtuvo en el capítulo 4, este modelo consiste en:

Encuentre $\vartheta \in C^1(B, \mathbb{R})$:

$$\operatorname{div}(K[\nabla v]) + m \theta_0 \operatorname{tr} \dot{E} + r = c \dot{\vartheta} \quad \text{en } B \times (0, t_0) \quad (5.3.1)$$

Condiciones iniciales

$$\vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0 \quad \text{en } B$$

Condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \vartheta &= \hat{\vartheta} && \text{sobre } \partial B_1 \times (0, t_0) \\ -(K(\nabla v)) \cdot n &= \hat{q} && \text{sobre } \partial B_2 \times (0, t_0) \end{aligned}$$

5.3.2 FORMULACIÓN VARIACIONAL

Siguiendo la misma metodología tenemos que:

Encuentre $\vartheta \in L$

$$\begin{aligned} \int_B c \dot{\vartheta} Z \, dB + \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla Z &= \int_{\partial B} (K \nabla \vartheta) \cdot n Z \, d\partial B + \int_B r Z \, dB = \quad (5.3.2) \\ &= \int_{\partial B_3} (K \nabla V) \cdot n V \, d\partial B_3 + \int_{\partial B_4} \hat{q} Z \, d\partial B_4 + \int_B r Z \, dB \\ &= \int_B r Z \, dB + \int_{\partial B_4} \hat{q} Z \, d\partial B_4 \end{aligned}$$

$$\forall Z \in L$$

Bajo las condiciones iniciales

$$\vartheta(\bullet, 0) = \vartheta_0 \quad \text{en } B \times (0, t)$$

La formulación variacional debil la podemos sintetizar de la siguiente manera.

Encuentre $z \in L$ tal que:

$$b(\vartheta, z) + d(\vartheta, z) = J(z) \quad \forall z \in L \quad (5.3.3)$$

donde

$b: L \times L \rightarrow R$ forma bilineal simétrica

$d: L \times L \rightarrow R$ forma bilineal simétrica

$j: L \rightarrow R$ forma lineal

$$b(\vartheta, z) = \int_B c \dot{\vartheta} z \, dB \quad (5.3.4)$$

$$J(z) = \int_B r z \, dB + \int_{\partial B^+} \hat{q} z \, d\partial B^+ \quad (5.3.5)$$

$$d(\vartheta, z) = \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla z \, dB \quad (5.3.6)$$

5.5 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA TERMOELÁSTICO

Tomando el modelo del problema termoelástico (capítulo 4) y utilizando la misma metodología de las formulaciones de los problemas anteriores tenemos:

Particularizar el problema con las condiciones Dirichlet y Newman dadas en el problema físico, el problema siguiente:

Encuentre $u \in K$ y $\vartheta \in L$

$$\begin{aligned}
 & \int_B (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot \nabla V \, dB = \quad (5.5.1) \\
 & = \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial} (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot n \cdot V \, d\partial B \\
 & = \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B1} (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot n \cdot \hat{u} \, dB1 + \int_{\partial B2} (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot n \cdot V \, d\partial B2 \\
 & = - \int_B b \cdot V \, dB + \int_{\partial B2} (C[\nabla u] + \vartheta M) \cdot n \cdot V \, d\partial B2 \quad \forall V \in K
 \end{aligned}$$

Ecuación de energía

$$\begin{aligned}
 & \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla Z \, dB = \int_{\partial B} (K \nabla \vartheta \cdot n) Z \, d\partial B + \int_B r Z \, dB = \quad (5.5.2) \\
 & = \int_{\partial B3} (K \nabla \vartheta) \cdot n \cdot \hat{V} \, d\partial B3 + \int_{\partial B4} \hat{q} Z \, d\partial B4 + \int_B r Z \, dB \\
 & = \int_B r Z \, dB + \int_{\partial B4} \hat{q} Z \, d\partial B4 \quad \forall Z \in L
 \end{aligned}$$

Al planteamiento anterior le llamamos formulación variacional débil del problema físico, la cual podemos sintetizar de la siguiente manera.

Encuentre $u \in K$ y $\vartheta \in L$ tal que:

$$a_1(u, v) + a_2(v, v) = f(v) \quad \forall v \in K \quad (5.5.3)$$

$$d(\vartheta, z) = J(z) \quad \forall z \in L \quad (5.5.4)$$

donde:

$a_i: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ forma lineal

$d: L \times L \rightarrow R$ forma bilineal simétrica

$j: L \rightarrow R$ forma lineal

$$a(u,v) = \int_B (C[\nabla u] + \vartheta M) \bullet \nabla v \, dB \quad (5.5.5)$$

$$f(v) = \int_B b \bullet v \, dB - \int_{\partial B_2} \hat{S} \bullet v \, d\partial B_2 \quad (5.5.6)$$

$$J(z) = \int_B r z \, dB + \int_{\partial B_4} \hat{q} z \, d\partial B_4 \quad (5.5.7)$$

$$d(\vartheta, z) = \int_B K \nabla \vartheta \bullet \nabla z \, dB \quad (5.5.8)$$

5.6 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE ELASTICIDAD

Tomando el modelo matemático del problema de elasticidad, el cual se planteo en el capítulo anterior; y utilizando la misma metodología para la formulación variacional tenemos:

Particularizar el problema con las condiciones Dirichlet y Newman dadas en el problema físico.

Encuentre $u \in K$

$$\begin{aligned} & \int_B (C[\nabla u]) \bullet \nabla V \, dB = \quad (5.6.1) \\ & = \int_B b \bullet V \, dB + \int_{\partial} (C[\nabla u]) \bullet n \bullet V \, d\partial B \\ & = \int_B b \bullet V \, dB + \int_{\partial B_1} (C[\nabla u]) \bullet n \bullet u \, dB_1 + \int_{\partial B_2} (C[\nabla u]) \bullet n \bullet V \, d\partial B_2 \\ & = \int_B b \bullet V \, dB + \int_{\partial B_2} (C[\nabla u]) \bullet n \bullet V \, d\partial B_2 \quad \forall V \in K \end{aligned}$$

Al planteamiento anterior le llamamos formulación variacional débil del problema físico, la cual podemos sintetizar de la siguiente manera.

Encuentre $u \in K$ tal que:

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in K \quad (5.6.2)$$

donde:

$a : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$ forma lineal

$$a(u, v) = \int_B (C [\nabla u] \cdot n) \cdot \nabla v \, dB \quad (5.6.3)$$

$$f(v) = \int_B b \cdot v \, dB - \int_{\partial B_2} \hat{s} \cdot v \, d\partial B_2 \quad (5.6.4)$$

5.7 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA TÉRMICO

El modelo matemático del problema de distribución de temperaturas se plantea en el capítulo anterior. Para obtener el modelo variacional se sigue la misma técnica empleada en este capítulo.

Particularizar el problema con las condiciones Dirichlet y Newman dadas en el problema físico.

Encuentre $\vartheta \in L$

$$\begin{aligned} \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla Z \, dB &= \int_{\partial B} (K \nabla \vartheta \cdot n) Z \, d\partial B + \int_B r Z \, dB = \\ &= \int_{\partial B_3} \hat{g} Z \, d\partial B_3 + \int_{\partial B_4} \hat{q} Z \, d\partial B_4 + \int_B r Z \, dB \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

$$= \int_B r Z \, dB + \int_{\partial B^+} \hat{q} Z \, d\partial B^+ \quad \forall Z \in L$$

Al planteamiento anterior le llamamos formulación variacional débil del problema físico. la cual podemos sintetizar de la siguiente manera.

Encuentre $\vartheta \in L$ tal que:

$$d(\vartheta, z) = J(z) \quad \forall z \in L \quad (5.7.2)$$

donde:

$d: L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica

$j: L \rightarrow \mathbb{R}$ forma lineal

$$J(z) = \int_B r z \, dB + \int_{\partial B^+} \hat{q} z \, d\partial B^+ \quad (5.7.3)$$

$$d(\vartheta, z) = \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla z \, dB \quad (5.7.4)$$

CAPÍTULO 6

MODELACION NUMÉRICA

La solución de los modelos variacionales tridimensionales obtenidos en el capítulo anterior no se pueden resolver por métodos algebraicos (no se pueden obtener soluciones exactas), por lo que es necesario utilizar métodos computacionales, los cuales dan soluciones aproximadas al problema. Existen varios métodos de este tipo, pero el de difusión es el de elemento finito.

Ya que el problema no tiene una solución continua, es necesario utilizar métodos discretos y de esta manera obtener soluciones discretas. Con el método de elemento finito se da solución a los modelos planteados anteriormente.

6.1 PROBLEMA TERMOELASTODINÁMICO

El problema variacional asociado al problema físico está dado por:

Encuentre $u \in K$ y $\vartheta \in L$ tal que.

$$m(u'', v) + a_1(u, v) + a_2(\vartheta, v) = f(v) \quad \forall v \in K \quad (6.1.1)$$

$$b(\vartheta', z) + d(\vartheta, z) - e(u', z) = j(z) \quad \forall z \in L \quad (6.1.2)$$

$m : K \times K \rightarrow R$ Bilineal simétrico

$a_i : K \times K \rightarrow R$ Bilineal simétrico

$f : K \rightarrow R$ Lineal

$b : L \times L \rightarrow R$ Bilineal simétrico

$d : L \times L \rightarrow R$ Bilineal simétrico

$e : K \times L \rightarrow R$ Bilineal

$j : L \rightarrow R$ Lineal

6.1.1 MODELADO NUMÉRICO

1) Los conjuntos cinemáticamente y térmicamente admisibles están dados respectivamente por:

$$K = \{ u \in C^2(B, R) : v = \hat{u} \} \text{ sobre } \partial B 1 \quad (6.1.3)$$

$$L = \{ w \in C^2(B, R) : z = \hat{g} \} \text{ sobre } \partial B 4 \quad (6.1.4)$$

Estos conjuntos son continuos y de dimensión infinita, Es necesario aproximarlos con unos de dimensión finita, lo cual se logra con elemento finito.

El espacio de dimensión finita m_h , es generado por un conjunto de funciones base vectoriales.

$$X_h = [\varphi_j^1, \varphi_j^2, \varphi_j^3]^{m_h} \quad (6.1.5)$$

$$T_h = [W_{ij}]^{m_h} \quad (6.1.6)$$

Tal espacio es llamado "Espacio global de elemento finito"

2) En base a lo anterior construimos V_h , que es una aproximación de K , y W_h que es una aproximación de L

$$V_h = \{ u_h \in X_h : v_h(a_j) = \hat{u}(u_j), a_j \in \partial B 1 \} \quad (6.1.7)$$

$$W_h = \{ w_h \in T_h : z(a_i) = \hat{g}(a_i), a_i \in \partial B 4 \} \quad (6.1.8)$$

Todos los elementos de V_h y W_h están en función del tiempo.

3) Ahora el problema variacional continuo es aproximado por la siguiente familia de problemas variacionales discretos.

Encuentre $u_h(t) \in V_h$ y $\vartheta_h(t) \in W_h$. Además

$$u_h(t) : B \subset \xi \times R \rightarrow V \in R^3 \text{ y} \quad (6.1.9)$$

$$\vartheta_h(t) : B \subset \xi \times R \rightarrow R \quad (6.1.10)$$

son la solución del problema

$$m(u_h''(t), v_h(t)) + a_1(u_h(t), v_h(t)) + a_2(\vartheta_h(t), v_h(t)) = f(v_h(t)) \quad (6.1.11)$$

$$\forall v_h(t) \in K_h$$

$$b(\vartheta_h'(t), z_h(t)) + d(\vartheta_h(t), z_h(t)) - e(u_h'(t), z_h(t)) = j(z_h(t)) \quad (6.1.12)$$

$$\forall z_h(t) \in L_h$$

Bajo las condiciones iniciales.

$$u_h(\bullet, 0) = u_0, \quad u_h'(\bullet, 0) = v_0, \quad \vartheta_h(\bullet, 0) = \vartheta_0$$

4) Funciones base $u_h(t)$ $v_h(t)$. De aquí en adelante tomaremos las funciones en función del tiempo, pero no lo escribiremos.

$$u_h(x, y, z) = (u_h(x, y, z), u_{2h}(x, y, z), u_{3h}(x, y, z)) \quad (6.1.13)$$

$$= \{ \alpha_j^1 w_j(x, y, z), \alpha_j^2 w_j(x, y, z), \alpha_j^3 w_j(x, y, z) \}$$

$$= \alpha_j^1(w_j(x, y, z), 0, 0) + \alpha_j^2(0, w_j(x, y, z), 0) + \alpha_j^3(0, 0, w_j(x, y, z))$$

$$j^1 \neq j^2 \neq j^3$$

Definición 1

Sean:

$$\varphi_j^1 = [w_j(x, y, z), 0, 0]$$

$$\varphi_j^2 = [0, w_j(x, y, z), 0]$$

$$\varphi_j^1 = [0, 0, w_j(x, y, z)] \quad (6.1.14)$$

$$u_h(x, y, z) = \alpha_{j1} \varphi_j^1 + \alpha_{j2} \varphi_j^2 + \alpha_{j3} \varphi_j^3$$

$$u_h(x, y, z) = \alpha_j \varphi_j \quad (6.1.15)$$

$$v_h(x, y, z) = \beta_k \varphi_k \quad (6.1.16)$$

$$\vartheta_h(x, y, z) = \delta_i w_i \quad (6.1.17)$$

$$z_h(x, y, z) = \sigma_l w_l \quad (6.1.18)$$

5) Sustituyendo los valores de u_h y ϑ_h dentro de la formulación variacional discreta, se obtiene:

$$m(\alpha_j'' \varphi_j, \beta_k \varphi_k) + a_1(\alpha_j \varphi_j, \beta_k \varphi_k) + a_2(\delta_i w_i, \beta_k \varphi_k) = f(\beta_k \varphi_k) \quad (6.1.19)$$

6) Desarrollo de la primera ecuación

$$m(\alpha_j'' \varphi_j, \beta_k \varphi_k) + a_1(\alpha_j \varphi_j, \beta_k \varphi_k) + a_2(\delta_i w_i, \beta_k \varphi_k) = f(\beta_k \varphi_k) \quad (6.1.20)$$

$$\alpha_j'' \beta_k m(\varphi_j, \varphi_k) + \alpha_j \beta_k a_1(\varphi_j, \varphi_k) + \delta_i \beta_k a_2(w_i, \varphi_k) = \beta_k f(\varphi_k)$$

$$\beta_k m(\varphi_j, \varphi_k) \alpha_j'' + \beta_k a_1(\varphi_j, \varphi_k) \alpha_j + \beta_k a_2(w_i, \varphi_k) \delta_i = \beta_k f(\varphi_k)$$

Definiciones

$$M = m(\varphi_j, \varphi_k) \quad \text{Matriz de masas} \quad (6.1.21)$$

$$A = a(\varphi_j, \varphi_k) \quad \text{Matriz de rigideces} \quad (6.1.22)$$

$$T = a_2(w_i, \varphi_k) \quad \text{Matriz de esfuerzo temperatura} \quad (6.1.23)$$

$$B = f(\varphi_k) \quad \text{Vector de cargas} \quad (6.1.24)$$

Sustituyendo las definiciones en la ecuación general

$$\begin{aligned} & \bullet \bullet \\ & \beta(t) M \dot{\alpha}(t) + \beta(t) A \alpha(t) - \beta(t) T \delta(t) = \beta(t) B \quad (6.1.25) \\ & \bullet \bullet \\ & \beta(t) [M \dot{\alpha}(t) + A \alpha(t) - T \delta(t)] = \beta(t) B \end{aligned}$$

$$\forall \beta(t) \in X^{mh}, t \in (0, t_0)$$

Factorizando

$$\begin{aligned} & \bullet \bullet \\ & \beta(t) \cdot [M \dot{\alpha}(t) + A \alpha(t) - T \delta(t) - B] = 0 \quad (6.1.26) \end{aligned}$$

dado que $\beta(t)$ puede ser cualquier vector, tomamos

$$\beta(t) = \theta(t) \quad (6.1.27) \quad \therefore$$

7) Para la ecuación de energía seguimos el mismo procedimiento

$$\begin{aligned} & b (\dot{\delta}_i(t) w_i \sigma_i(t) w_i) + d (\delta_y(t) w_i \sigma_i(t) w_i) - e (\alpha_j'(t) \varphi_j', \sigma_i(t) w_i) = j (\sigma_i(t) w_i) \\ & \delta_i'(t) \sigma_i(t) b (w_i', w_i) + \delta_i(t) \sigma_i(t) d (w_i, w_i) - \alpha_j'(t) \sigma_i(t) e(\varphi_j', w_i) = \sigma_i(t) j (w_i) \\ & \sigma_i(t) \{ b (w_i', w_i) \delta_i'(t) + d (w_i, w_i) \delta_i(t) - e(\varphi_j', w_i) \alpha_j'(t) - J (w_i) \} \quad (6.1.28) \end{aligned}$$

Definición

$$C = b (w_i', w_i) \quad \text{Matriz de capacidad calorífica} \quad (6.1.29)$$

$$K = d (w_i, w_i) \quad \text{Matriz de conductividad térmica} \quad (6.1.30)$$

$$T^T = e (\varphi_j', w_i) \quad \text{Matriz esfuerzo temperatura} \quad (6.1.31)$$

$$Q = j (w_i) \quad \text{Vector de temperatura} \quad (6.1.32)$$

Sustituyendo

$$\sigma_1(t) \{ C \delta_i'(t) + K \delta_i(t) - T^T \alpha_j'(t) - Q \} \quad (6.1.33)$$

$$\forall \sigma_1(t) \in L$$

Problema discreto

encuentre $\alpha(t)$, $\delta_i(t) \in K^{mh} \times L^{mh}$

••

$$[M \dot{\alpha}(t) + A \alpha(t) - T \delta(t) - B] = 0 \quad (6.1.34)$$

$$C \delta_i'(t) + K \delta_i(t) - T^T \alpha_j'(t) - Q = 0 \quad (6.1.35)$$

Bajo las condiciones iniciales

$$\alpha(\bullet, 0) = \alpha_0 \quad \alpha'(\bullet, 0) = \alpha_0' \quad \delta(\bullet, 0) = \delta_0$$

Para los otros cinco problemas solo se mostrará el resultado ya que el método de discretización es el mismo en todos los casos.

6.2 PROBLEMA ELASTODINÁMICO

Encuentre $\alpha(t) \in K^{mh}$

••

$$\beta(t) M \dot{\alpha}(t) + \beta(t) A \alpha(t) - \beta(t) B \quad (6.2.1)$$

••

$$\beta(t) [M \dot{\alpha}(t) + A \alpha(t)] - \beta(t) B \quad (6.2.2)$$

$$\forall \beta(t) \in X^{mh}, t \in (0, t_0)$$

Bajo las condiciones iniciales

$$\alpha(\bullet, 0) = \alpha_0 \quad \alpha'(\bullet, 0) = \alpha_0'$$

Factorizando

$$\beta(t) \cdot [M\alpha''(t) + A\alpha'(t) - B] = 0 \quad (6.2.3)$$

dado que $\beta(t)$ puede ser cualquier vector, tomamos

$$\beta(t) = \theta(t) \quad \therefore$$

$$M\alpha''(t) + A\alpha'(t) - B = 0 \quad (6.2.4)$$

6.3 PROBLEMA DE FLUJO DE CALOR

Siguiendo el mismo procedimiento tenemos:

$$b(\delta_i'(t) w_i', \sigma_i(t) w_i) + d(\delta_i(t) w_i, \sigma_i(t) w_i) = j(\sigma_i(t) w_i) \quad (6.3.1)$$

$$\delta_i'(t) \sigma_i(t) b(w_i', w_i) + \delta_i(t) \sigma_i(t) d(w_i, w_i) - \sigma_i(t) j(w_i)$$

$$\sigma_i(t) \{ b(w_i', w_i) \delta_i'(t) + d(w_i, w_i) \delta_i(t) = j(w_i) \}$$

Definición

$$C = b(w_i', w_i) \text{ Matriz de capacidad calorífica} \quad (6.3.2)$$

$$K = d(w_i, w_i) \text{ Matriz de conductividad térmica} \quad (6.3.3)$$

$$Q = j(w_i) \text{ Vector de temperatura} \quad (6.3.4)$$

Sustituyendo

$$\sigma_i(t) \{ C\delta_i'(t) + K\delta_i(t) = Q \} \quad (6.3.5)$$

$$\forall \sigma_1(t) \in L$$

Problema discreto, encuentre $\delta_i(t) \in L^{mh}$

$$C \delta_i'(t) + K \delta_i(t) - Q = 0 \quad (6.3.6)$$

bajo la condición inicial

$$\delta(\bullet, 0) = \delta_0$$

6.4 PROBLEMA TERMOELÁSTICO

Utilizando el mismo procedimiento llegamos a:

1) Desarrollo de la primera ecuación

$$a_1(\alpha_j, \varphi_j, \beta_k, \varphi_k) - a_2(\delta_i, w_i, \beta_k, \varphi_k) = f(\beta_k, \varphi_k) \quad (6.4.1)$$

$$\alpha_j \beta_k a_1(\varphi_j, \varphi_k) - \delta_i \beta_k a_2(w_i, \varphi_k) = \beta_k f(\varphi_k)$$

$$\beta_k a_1(\varphi_j, \varphi_k) \alpha_j - \beta_k a_2(w_i, \varphi_k) \delta_i = \beta_k f(\varphi_k)$$

Definiciones

$$A = a_1(\varphi_j, \varphi_k) \quad \text{Matriz de rigideces} \quad (6.4.2)$$

$$T = a_2(w_i, \varphi_k) \quad \text{Matriz de esfuerzo temperatura} \quad (6.4.3)$$

$$B = f(\varphi_k) \quad \text{Vector de cargas} \quad (6.4.4)$$

Sustituyendo las definiciones en la ecuación general

$$\beta A \alpha - \beta T \delta = \beta B \quad (6.4.5)$$

$$\beta [A \alpha - T \delta] = \beta B \quad (6.4.6)$$

$$\forall \beta \in X^{mh}$$

Factorizando

$$\beta \cdot [A \alpha - T \delta - B] = 0 \quad (6.4.7)$$

dado que β puede ser cualquier vector, tomamos

$$\beta = 0 \quad \therefore$$

El problema quedaria

$$A \alpha - T \delta - B = 0 \quad (6.4.8)$$

2) Ecuación de energía

$$d(\delta_i w_i, \sigma_l w_l) = j(\sigma_l w_l) \quad (6.4.9)$$

$$\delta_i \sigma_l d(w_i, w_l) = \sigma_l j(w_l)$$

$$\sigma_l \{ d(w_i, w_l) \delta_i - j(w_l) \}$$

Definición

$$K = d(w_i, w_l) \quad \text{Matriz de conductividad térmica} \quad (6.4.10)$$

$$Q = j(w_l) \quad \text{Vector de temperatura} \quad (6.4.11)$$

Sustituyendo

$$\sigma_l \{ K \delta_i - Q \} \quad (6.4.12)$$

$$\forall \sigma_l \in L$$

Problema discreto

encuentre $\alpha, \delta \in K^{mh} \times L^{mh}$

$$A \alpha \cdot T \delta - B = 0 \quad (6.4.13)$$

$$K \delta_i - Q = 0 \quad (6.4.14)$$

6.5 PROBLEMA DE ELASTICIDAD

Utilizando el mismo procedimiento llegamos a:

$$a_1(\alpha_j \varphi_j, \beta_k \varphi_k) = f(\beta_k \varphi_k) \quad (6.5.1)$$

$$\alpha_j \beta_k a_1(\varphi_j, \varphi_k) = \beta_k f(\varphi_k)$$

$$\beta_k a_1(\varphi_j, \varphi_k) \alpha_j = \beta_k f(\varphi_k)$$

Definiciones

$$A = a(\varphi_j, \varphi_k) \quad \text{Matriz de rigideces} \quad (6.5.2)$$

$$B = f(\varphi_k) \quad \text{Vector de cargas} \quad (6.5.3)$$

Sustituyendo las definiciones en la ecuación general

$$\beta A \alpha = \beta B \quad (6.5.4)$$

$$\forall \beta \in X^{mh}$$

Factorizando

$$\beta \cdot [A \alpha - B] = 0 \quad (6.5.5)$$

dado que β puede ser cualquier vector, tomamos

$$\beta = \theta$$

∴

El problema quedaría, encuentre $\alpha \in K^{mh}$

$$A\alpha - B = 0 \quad (6.5.6)$$

6.6 PROBLEMA TÉRMICO

$$d(\delta_i, w_i, \sigma_i, w_i) = j(\sigma_i, w_i) \quad (6.6.1)$$

$$\delta_i \sigma_i d(w_i, w_i) = \sigma_i j(w_i)$$

$$\sigma_i \{ d(w_i, w_i) \delta_i - j(w_i) \}$$

Definición

$$K = d(w_i, w_i) \quad \text{Matriz de conductividad térmica} \quad (6.6.2)$$

$$Q = j(w_i) \quad \text{Vector de temperatura} \quad (6.6.3)$$

Sustituyendo

$$\sigma_i \{ K \delta_i - Q \} \quad (6.6.4)$$

$$\forall \sigma_i \in L$$

Problema discreto

encuentre $\delta \in L^{mh}$ tal que:

$$A\alpha - T\delta - B = 0 \quad (6.6.5)$$

$$K\delta_i - Q = 0 \quad (6.6.6)$$

CAPITULO 7

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL UTILIZANDO MODULEF

7.1 INTRODUCCIÓN

El modelo a resolver es el elástico, aplicado a una estructura tridimensional con tracciones y desplazamientos prescritos. Al resolver este modelo se pretende estudiar varios aspectos:

- 1.- Usar un material simple luego uno compuesto, bajo las mismas condiciones y comparar los desplazamientos resultantes.
- 2.- Encontrar una forma gráfica de efectuar las comparaciones de los desplazamientos, y llevar a cabo éstas .
- 3.- Modificar la geometría y comparar los resultados con los del problema original

El problema se resolvió con el paquete de elemento finito MODULEF, el cual esta instalado en una estación de trabajo SUN IPC. Los pasos generales para resolver el problema son los siguientes:

1. Entrar al preprocesador toutxx (letra minúscula), el cual nos presenta un menú.
2. Seleccionar el procesador de MALLADO, donde damos la geometría del elemento, ya sea bidimensional o tridimensional. Al final se ejecuta, para obtener la estructura de datos de salida .NOPO, regresamos nuevamente al menú principal.
3. Seleccionamos el procesador INTERPOLACIÓN, donde declaramos el tipo de elemento finito que se utilizará. Se ejecuta y resultan las estructuras de datos .COOR y .MAIL, después de esto regresamos al menú principal.
4. Seleccionamos CALCULO, donde declaramos el tipo de problema, las condiciones de carga y el tipo de material. Se ejecuta y resulta la estructura de datos .TAE, luego regresamos al menú principal.
5. Seleccionamos LIMITES, donde introducimos las condiciones de frontera, tipo desplazamiento y tensiones prescritas. Se ejecuta y resulta la estructura de datos .BDCL, regresamos al menú principal.

6. Seleccionamos **RESOLUCIÓN**, donde indicamos el método de solución (cholesky, gradiente conjugado, etc.). Se ejecuta y resulta la estructura de datos .B, salimos al menú principal

Para poder visualizar los resultados en forma gráfica seguimos los siguientes pasos:

1. Del menú principal seleccionamos dibujo, y aparece un submenú con las siguientes opciones: mallado, isovalores,
 2. Seleccionamos la segunda opción
 3. Damos tres parámetros para la configuración de la pantalla, los mas usuales son: 3, 1000 y 700 (Ambiente Sunview).
 4. Nos pide el nombre de algunos archivos de la estructura de datos de salida (COOR, MAIL, NOPO, TAE, B, BDCL)
 5. Aparece un ventana con parámetros y opciones de graficación. Tecleamos cero, para graficar.
 6. Abrimos la ventana del gráfico haciendo clic en el segundo icono superior izquierdo. con lo cual aparece el cuerpo mallado.
 7. Para regresar a la ventana de opciones tecleamos 1 dentro de la ventana del gráfico.
- Dentro de las opciones que podemos visualizar están: configuración de referencia, mallado, isovalores(temperatura, esfuerzo, etc.), configuración deformada, campos de velocidades, etc.

7.2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO. UTILIZANDO UN MATERIAL SIMPLE

El problema a resolver tiene una geometría tridimensional, que consiste en una losa plana sobre dos vigas de sección variable, esta estructura esta empotrada en los extremos y tiene una carga uniformemente distribuida.

MODELO MATEMÁTICO

Encuentre $u \in B$

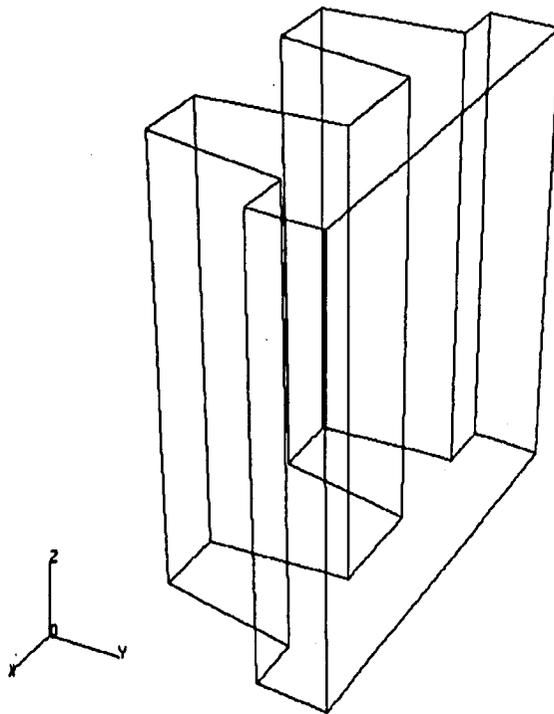
$$\operatorname{div} S + b = 0 \quad \text{en } B \quad (7.2.1)$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{en } \partial B_3 \\ (C [\nabla \hat{u}] \cdot n) &= 1000 && \text{en } \partial B_2 \end{aligned}$$

Las constantes mecánicas del material utilizado son:

$$E = 316112 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu = 0.2$$



MODULEF : modulef	
26/03/96	
VIGA3.MAIL	
VIGA3.COOR	
348	NOEUDS
1188	FACES
390	PENTAEDRES
OBSERVATEUR SPHERIQUE :	
30.	30. 25.
OUVERTURE :	
10.	
PERO * ELIMINATION	
EXITO	0
CONTINUER	1
VUE SUIVANTE	2
VUE PRECEDENTE	3
COUPE	4
ZOOM +	5
COORDONNEES	6
O G H B + -	7
COPY:SOFT-HARD:	8 9

Foto 1. Imagen de los perfiles del cuerpo

MALLADO

Mallado de una figura tridimensional, a partir de una figura en dos dimensiones. Se utilizará el método de estruido.

- 1) Se entra al mallado en dos dimensiones
- 2) Se dibuja una superficie generadora
- 3) Salimos del mallado bidimensional
- 4) Entramos al mallado tridimensional
- 5) Estruimos la superficie generadora, con lo cual generamos nuestro cuerpo tridimensional.

Menú de mallado	MA
Mallado bidimensional	BI
Creación	C
Título del trabajo	VIGA2
Archivo de datos de entrada	VIGA2.MA
Detalles	NO
Funciones interpretes	NO
Palabra clave para dar los puntos de la malla	POIN
Detalles	OUI
Impresión, número de puntos	1 12
Referencia, X, Y-1	1 0 2
Referencia, X, Y-2	1 0.75 2
Referencia, X, Y-3	1 1 0
Referencia, X, Y-4	1 2 0
Referencia, X, Y-5	1 2.25 2
Referencia, X, Y-6	1 3.75 2
Referencia, X, Y-7	1 4 0
Referencia, X, Y-8	1 5 0
Referencia, X, Y-9	1 5.25 2
Referencia, X, Y-10	1 6 2
Referencia, X, Y-11	2 6 3
Cambiar datos	NO
Palabra clave para describir las líneas de la figura	LIGN
Detalles	OUI
Impresión, número de líneas	1 12
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-1	3 1 2 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-2	4 2 3 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-3	3 3 4 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-4	4 4 5 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-5	6 5 6 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-6	4 6 7 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-7	3 7 8 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-	4 8 9 1 0 1

8	
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-9	3 9 10 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-10	3 10 11 1 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-11	14 11 12 2 0 1
Número de nodos, inicial, final, referencia, línea recta, dist. uniforme-12	3 12 1 1 0 1
Cambiar datos	NO
Palabra clave para llamar el mallador de método frontera	TRIA
Detalles	OUI
Impresión, nivel, subdominio, número de líneas, orden de entrada	1 1 1 12 1
Número de línea - 1	1
Número de línea -2	2
Número de línea -3	3
Número de línea -4	4
Número de línea -5	5
Número de línea -6	6
Número de línea -7	7
Número de línea -8	8
Número de línea -9	9
Número de línea -10	10
Número de línea -11	11
Número de línea -12	12
cambiar datos	NO
Palabra clave para hacer una malla mas uniforme	REGU
Detalles	OUI
Impresión, nivel original, nivel actual	1 1 2
Cambiar datos	NO
Palabra clave para renumerar nodos y buscar una matriz diagonal	RENC
Detalles	OUI
Impresión, nivel anterior, nuevo nivel	1 2 3
Cambiar datos	NO
Palabra clave para guardar el archivo	SAUV
Detalles	OUI
Impresión, nivel, nombre de la NOPO., Tablas asociadas	1 3 VIGA2.NOPO 0
Cambiar datos	NO
Salir del mallador	FIN

Ejecutar	E
Nombre del archivo de datos	VIGA2.MA
Salir del submenú.	FIN
Mallador	MA
Entrar al mallado tridimensional	TRI
Creación	CR
Título del trabajo	VIGA3
Nombre del archivo	VIGA3.MA
Detalles	NO
Palabra clave para cargar en memoria central una malla	INTR
Detalles	OUI
Impresión, nombre de la malla a cargar, nivel	1 VIGA2.NOPO 3
Cambiar detalles	NO
Palabra clave para mallar un cuerpo partiendo de una malla 2D	MA23
Detalles	OUI
Impresión	1
Nivel original, nivel nuevo	3 4
Subpalabra para estruir una malla 2D	TRAN
Número de secciones a crear	3
X, Y, Z (Desplazamiento de la estrusión en cada dirección)	0 0 2
Palabra clave, que indica que sección es la considerada de origen.	BASE
Sección de origen	0
Palabra clave para terminar la estrusión	FIN
Subpalabra clave para definir las referencias del nuevo cuerpo	REF
Transfiere el subdominio en 2D a 3D	SDSD
Sección inicial, sección final	0 3
Número de subdominios a transferir	1
Subdominio original	1
Subdominio	1
Referencia bordes 2D es referencia bordes horizontales 3D	ARAR
Sección inicial, sección final	0 3
Número de referencias de bordes a transferir	2
Referencia original 2D	1
Referencia nueva 3D	1
Referencia original 2D	2
Referencia nueva 3D	2
Referencia bordes 2D es referencia bordes horizontales 3D	ARAF
Sección inicial, sección final	0 3

Número de referencias de bordes a transferir	2
Referencia original 2D	1
Referencia nueva 3D	1
Referencia original 2D	2
Referencia nueva 3D	2
Referencia de puntos 2D es referencia de los bordes verticales 3D	POAR
Sección inicial, sección final	0 3
Número de referencias de bordes a transferir	2
Referencia original 2D	1
Referencia nueva 3D	1
Referencia original 2D	2
Referencia nueva 3D	2
Asigna una referencia a la cara superior del cuerpo estruido	FASU
Referencia	3
Asigna una referencia a la cara inferior del cuerpo estruido	FAIN
Referencia	3
Terminar de definir referencias	FIN
Terminar el mallado en 3D	FIN
Cambiar datos	NO
Palabra clave para guardar el archivo en disco	SAUV
Detalles	OUI
Impresión, nivel, nombre de la malla, tablas asociadas	1 4 VIGA3.NOPO 0
Palabra clave para salir del conversacional de datos	F
Ejecutar el modulo de mallado tridimensional	E
Nombre del archivo de datos	VIGA3.MA
Salir del conversacional de mallado tridimensional	FIN

INTERPOLACIÓN

En esta parte del programa se especifica el tipo de elemento finito que se va a utilizar.

Entrar al modulo para interpolar	IN
Crear un archivo de datos	C
Nombre del archivo de datos	VIGA3.IN
Dimensión del espacio de trabajo	3

Cantidad de subdominios rectos	1
Cantidad de subdominios curvos	0
Cantidad de números de referencia	3
Cantidad de superficies curvas	0
Cantidad de líneas curvas	0
Biblioteca que contiene los elementos finitos del modelo	TER
Cantidad de elementos finitos rectos	1
Nombre del elemento finito recto	PENT 3R1D
Algún elemento curvo	NO
Nombre del archivo NOPO	VIGA3.NOPO
Nombre del archivo MAIL	VIGA3.MAIL
Nombre del archivo COOR	VIGA3.COOR
Tablas asociadas	NO
Ejecutar el modulo de interpolación	E
Nombre del archivo de datos	VIGA3.IN
Parámetro de impresión	1
Salir de interpolación	FIN

CALCULO. CONDICIONES DE FRONTERA TIPO NEUMANN

En esta sección se describen características físicas del material y las condiciones de carga. También se especifica el tipo de problema a resolver. (Elástico, térmico, etc.)

Submenú del calculo de matrices	CA
Las propiedades y cargas del cuerpo son constantes	CO
Crear el archivo de datos	C
Nombre del archivo de datos	VIGA3.CA
Nombre del archivo de salida de la interpolación	VIGA3.MAIL
Nombre del archivo de las coordenadas, salida de la interpolación	VIGA3.COOR
Nombre del archivo de salida, matriz de rigideces y vector de cargas	VIGA3.TAE
No hay tablas asociadas	NO
No se utilizara el archivo POBA(información de los polinomios base)	NO
Problema de elasticidad	2
Problema clásico de la elasticidad	0
Calcular la matriz de masas	NO
Calcular la matriz de rigideces	OUI
Calcular el vector de cargas	OUI

Numero de casos de carga	1
Calcular los esfuerzos	OUI
Dimensión del espacio	3
Cantidad de subdominios a describir	1
Número del material	1
Cantidad de referencias a describir	1
Numero de la referencia 1 a describir	2
Es isotrópico	OUI
Modulo de Young y coeficiente de Poisson	316112 0.2
Componentes de las fuerzas sw cuerpo X, Y, Z	0.0 0.03 0.0
Componentes X, Y, Z de las condiciones de frontera tipo Neuman	0.0 -1000 0.0
Ejecutar	E
Nombre del archivo de datos	VIGA3.CA
Parámetro de impresión	1
Salir del menú de cálculo	FIN

LIMITES. CONDICIONES DE FRONTERA TIPO DIRICHLET

En esta sección del programa se declaran las restricciones en cuanto a movimiento de las referencias afectadas.

Menú de limites	LI
Archivo de datos	VIGA3.NOPO
Archivo de referencias de la interpolación	VIGA3.MAIL
Archivo de salida	VIGA3.BDCL
Tablas asociadas	NO
Restricciones constantes	1
Doble precisión	5
Llamar a la estructura MAIL para ayudar en las referencias	OUI
Restricciones sobre la referencia 1	NO
Restricciones sobre la referencia 2	NO
Restricciones sobre la referencia 3	OUI
Restringir movimiento en X	OUI
Valor de la restricción	0
Restringir movimiento en y	OUI
Valor de la restricción	0

Restringir movimiento en z	OUI
Valor de la restricción	0
Grados de libertad constantes por nodo	OUI
Existen fronteras en relación lineal	0
Ejecutar	E
Salir del menú de límites	FIN

RESOLUCIÓN

En esta parte se declara el método que se utilizará en la solución del sistema de ecuaciones.

Menú de resolución	RE
Método del gradiente conjugado	GR
Crear el archivo de datos	C
Nombre del archivo de datos	VIGA3.RE
Archivo que contiene la malla	VIGA3.NOPO
Casos de carga	1
Doble precisión	5
Grados de libertad por nodo constante	0
Numero de grados de libertad por nodo	3
Archivo con las propiedades del material y casos de carga.	VIGA3.TAE
Existen condiciones Dirichlet	OUI
Archivo de las restricciones	VIGA3.BDCL
Existen restricciones en relación lineal	NO
Archivo de salida de esta sección	VIGA3.B
Parámetro de impresión	1
Sin preconditionamiento	0
Delta de precisión de la solución	1.E-4
Ejecutar	E
Salir del menú de solución	FIN

7.3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO UTILIZANDO UN MATERIAL COMPUESTO

Se usará el mismo archivo de mallado y de interpolación ya que se trata del mismo cuerpo.

El material compuesto considerado tiene las fibras orientadas longitudinalmente, esto es, siguiendo la orientación de las vigas.

El modelo matemático es el mismo que el usado para un material simple, excepto que cambia la ecuación constitutiva ya que se trata de un material anisotrópico. La ecuación es afectada en los componentes de la matriz asociada al tensor de elasticidades. [5]. Para calcular esta matriz se usará una técnica de homogeneización, la cual está incluida en una rutina de modulf.

El módulo de homogeneización nos da como resultado los elementos del tensor de elasticidades, para la configuración del material compuesto determinada. Estos se incluyen en el módulo de cálculo.

MODELO MATEMÁTICO

Encuentre $u \in B$

$$\operatorname{div} S + b = 0 \quad \text{en } B \quad (7.3.1)$$

con las condiciones de frontera

$$u = 0 \quad \text{en } \partial B_3$$

$$(C [\nabla \hat{u}] \bullet n = 1000 \text{ kg} \quad \text{en } \partial B_2$$

Características mecánicas del material simple

$$E = 316112 \text{ kg/cm}^2 \quad \nu = 0.2$$

Características mecánicas del material compuesto

$$E = 2090418.2 \text{ kg/cm}^2 \quad \nu = 0.3$$

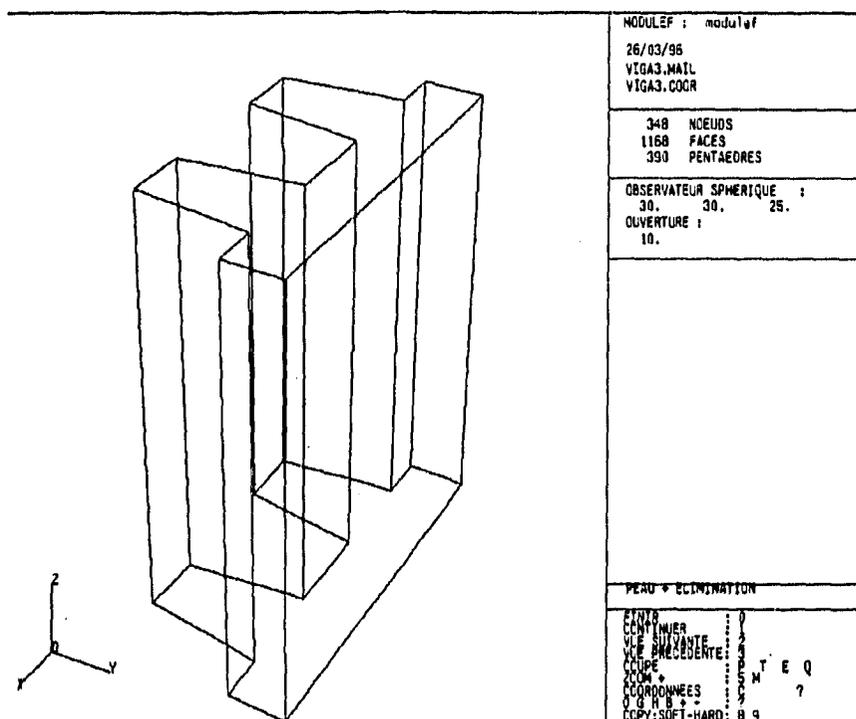


Foto 2. Fibras

HOMOGENEIZACIÓN

En este módulo se declaran las características del material compuesto. Y se obtiene los elementos del tensor de elasticidades, los cuales se introducen en el módulo de cálculo, después de declarar que el material es anisotrópico.

En este módulo se introduce el arreglo de las fibras, el porcentaje de la resina y los respectivas constantes mecánicas de la resina y la fibra.

Llamada al módulo de homogeneización	cacoxx
Fibras en arreglos alternos	NO
Fibras alineadas	OUI
Resina con características isotropicas	1
Fibras con características isotrópicas	1
Distancia en X entre las fibras	1
Distancia en Y entre las fibras	1
Fibra de sección circular	OUI
Tasa de resina en el volumen total del cuerpo	81.15

Controlar el refinamiento del mallado de la célula base	NO
Módulo de Young y coeficiente de Poisson de la resina	316112 0.2
Módulo de young y coeficiente de Poisson de la fibra	2090418.2 0.3

CALCULO, CONDICIONES DE FRONTERA TIPO NEUMANN,

En esta sección se describen las características físicas del material y las condiciones de carga. También se especifica el tipo de problema a resolver. (Elástico, térmico, etc.)

Submenú del calculo de matrices	CA
Las propiedades y cargas del cuerpo son constantes	CO
Crear el archivo de datos	C
Nombre del archivo de datos	COMP3.CA
Nombre del archivo de salida de la interpolación	VIGA3.MAIL
Nombre del archivo de las coordenadas, salida de la interpolación	VIGA3.COOR
Nombre del archivo de salida, matriz de rigideces y vector de cargas	COMP3.TAE
No hay tablas asociadas	NO
No se utilizara el archivo POBA	NO
Problema de elasticidad	2
Problema clásico de la elasticidad	0
Calcular la matriz de masas	NO
Calcular la matriz de rigideces	OUI
Calcular el vector de cargas	OUI
Numero de casos de carga	1
Calcular los esfuerzos	OUI
Dimensión del espacio	3
Cantidad de subdominios a describir	1
Número del material	1
Cantidad de referencias a describir	1
Numero de la referencia 1 a describir	2
Es isitrópico	NO
E11	0.4536E06
E12	0.1159E06
E22	0.4540E06
E13	0.128E06
E23	0.128E06

E33	0.7007E06
E14	0.0000E00
E24	0.00000E00
E34	0.0000E00
E44	0.1731E06
E15	0.0000E00
E25	0.00000E00
E35	0.0000E00
E45	0.2726E-02
E55	0.1729E06
E16	0.6134E-11
E26	0.1075E-10
E36	0.2132E-11
E46	0.0000E00
E56	0.0000E00
E66	0.1624E06
Componentes de las fuerzas cuerpo X, Y, Z	0.0 0.03 0.0
Componentes X, Y, Z de las condiciones de frontera tipo Neuman	0.0 -1000 0.0
Ejecutar	E
Nombre del archivo de datos	COMP3.CA
Salir del menú de cálculo	FIN

LIMITES, CONDICIONES DE FRONTERA TIPO DIRICHLET

En esta sección del programa se declaran las restricciones en cuanto a movimiento de las referencias afectadas.

Menú de límites	LI
Archivo de datos	COMP3.LI
Archivo de referencias de la interpolación	VIGA3.MAIL
Archivo de salida	COMP3.BDCL
Tablas asociadas	NO
Restricciones constantes	1
Doble precisión	5

Llamar a la estructura MAIL para ayudar en las referencias	OUI
Restricciones sobre la referencia 1	NO
Restricciones sobre la referencia 2	NO
Restricciones sobre la referencia 3	OUI
Restringir movimiento en X	OUI
Valor de la restricción	0
Restringir movimiento en y	OUI
Valor de la restricción	0
Restringir movimiento en z	OUI
Valor de la restricción	0
Grados de libertad constantes por nodo	OUI
Existen fronteras en relación lineal	0
Ejecutar	E
Nombre del archivo de datos	COMP3.LI
Salir del menú de límites	FIN

RESOLUCION

En esta parte se declara el método que se utilizará en la solución del sistema de ecuaciones.

Menú de resolución	RE
Método del gradiente conjugado	GR
Crear el archivo de datos	C
Nombre del archivo de datos	COMP3.RE
Archivo que contiene la malla	VIGA3.NOPO
Casos de carga	1
Doble precisión	5
Grados de libertad por nodo constante	0
Numero de grados de libertad por nodo	3
Archivo con las propiedades del material y casos de carga.	COMP3.TAE
Existen condiciones Dirichlet	OUI
Archivo de las restricciones	COMP3.BDCL
Existen restricciones en relación lineal	NO
Archivo de salida de esta sección	COMP3.B
Parámetro de impresión	1

Sin preconditionamiento	0
Delta de precisión de la solución	1.E-4
Ejecutar	E
Salir del menú de solución	FIN
	FIN

**CAPITULO 8
IMÁGENES**

8.1 RESULTADOS DE MODULEF

Los resultados obtenidos de modulef se muestran gráficamente:

- * Las fotos 1,2 y 3 muestran la configuración de referencia
- * Las fotos 4 y 5 es la configuración deformada con el material simple
- * Las fotos 6 y7 es la configuración deformada con el material compuesto

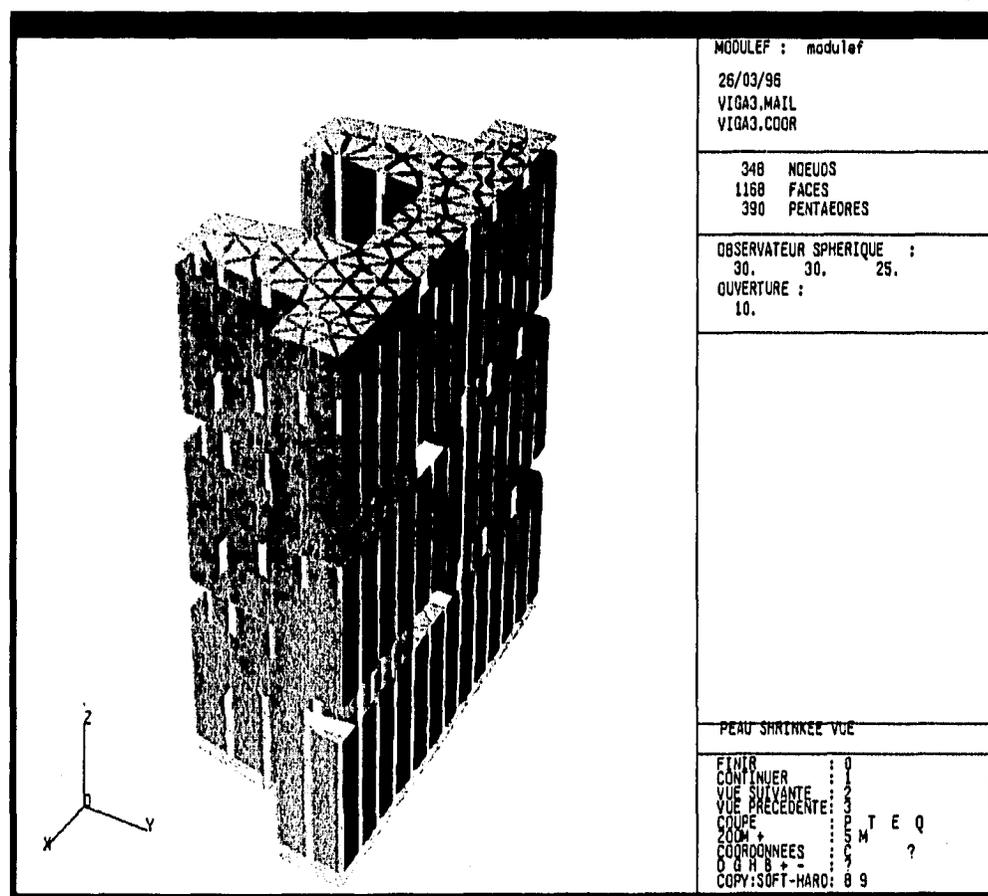
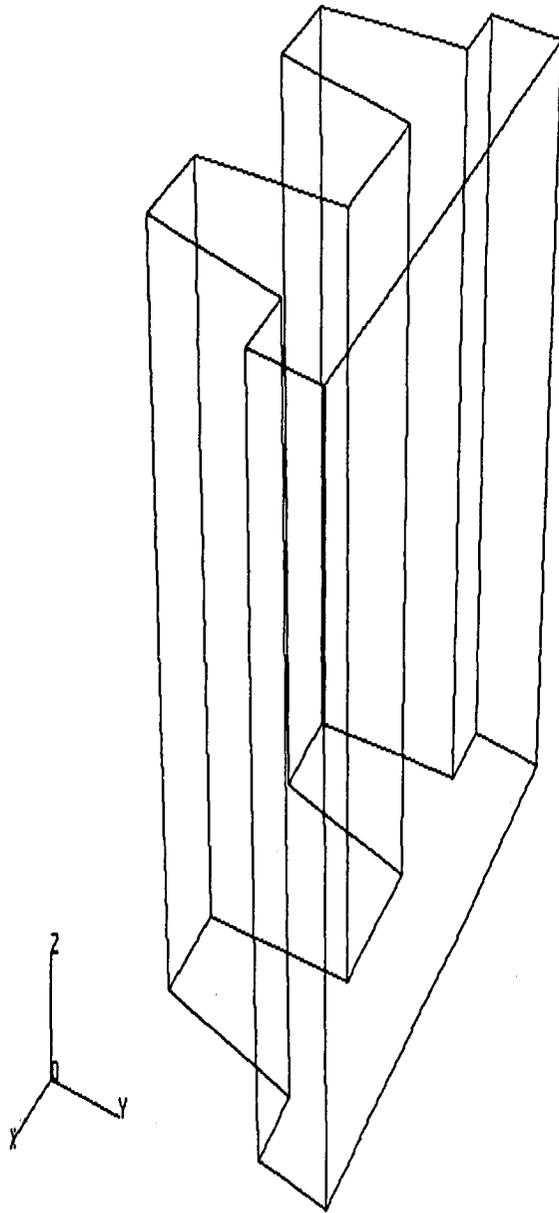


FOTO 1. Mallado



MODULEF : modulef

26/03/96

VIGA3.MAIL

VIGA3.COOR

348 NOEUDS

1168 FACES

390 PENTAEDRES

OBSERVATEUR SPHERIQUE :

30. 30. 25.

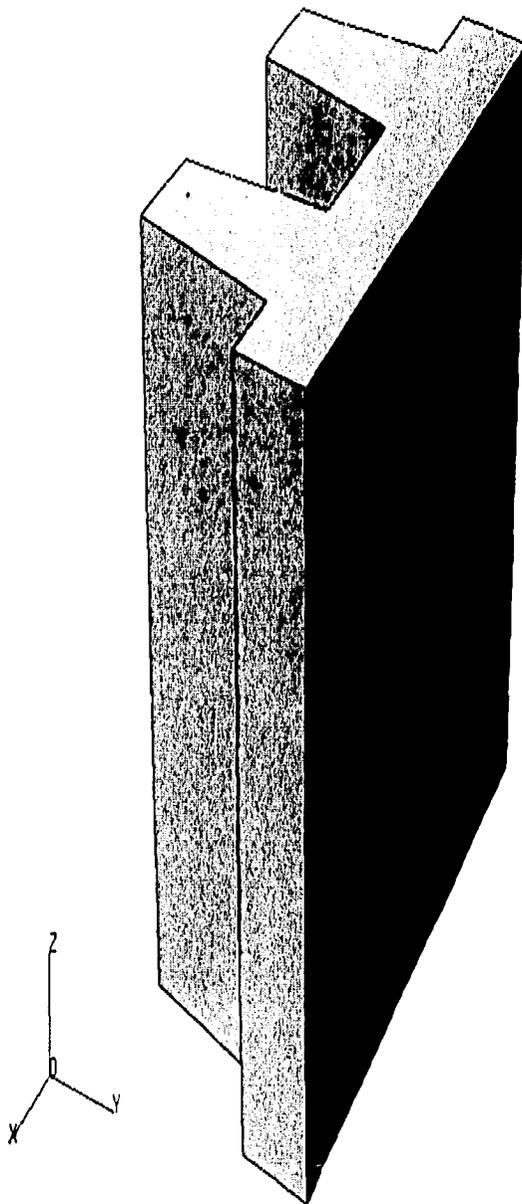
OUVERTURE :

10.

PEAU + ELIMINATION

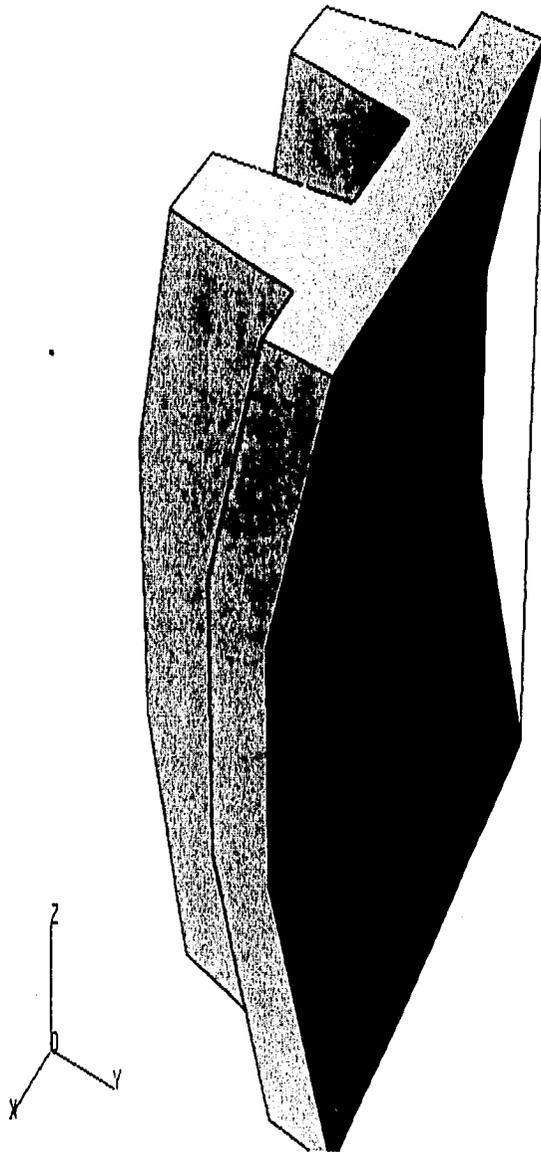
FINIR : 0
 CONTINUER : 1
 VUE SUIVANTE : 2
 VUE PRECEDENTE : 3
 COUPE : P T E Q
 ZOOM + : 5 M
 COORDONNEES : C ?
 D G H B + - : ?
 COPY:SOFT-HARD: 8 9

FOTO 2. Perfiles



MODULEF : modulef		
26/03/96		
VIGA3.NOP0		
348	POINTS	
1168	FACES	
390	VOLUMES	
390	PENTAEDRES	
1	COMPOSANTE(S) O	
1	COMPOSANTE(S) F	
POINT MINIMAL :		
0.	0.	0.
POINT MAXIMAL :		
6.0	3.0	6.0
OBSERVATEUR CARTESIEN :		
22.	13.	16.
POINT REGARDE :		
3.0	1.5	3.0
OBSERVATEUR SPHERIQUE :		
30.	30.	26.
OUVERTURE :		
10.		
PEAU VUE		
FINIR	:	0
CONTINUER	:	1
VUE SUIVANTE	:	2
VUE PRECEDENTE	:	3
RAFRAICHIR	:	4
ZOOM +	:	5 M
SECTION	:	6
O G H B + -	:	?
COPY:SOFT-HARD	:	8 9

FOTO 3. Configuración de referencia



MODULEF : modulef

25/03/96

VIGA3.MAIL

VIGA3.COOR

VIGA3.8

348 NOEUDS

1168 FACES

390 PENTAEDRES

OBSERVATEUR SPHERIQUE :

30. 30. 26.

OUVERTURE :

10.

DEFORMEE * : 9.0

PEAU

FINIR : 0

CONTINUER : 1

VUE SUIVANTE : 2

VUE PRECEDENTE : 3

COUPE : P T E Q

ZOOM + : 5 M ?

COORDONNEES : C ?

D G H B + - : ?

COPY:SOFT-HARD: 8 9

FOTO 4. Configuración deformada, material simple

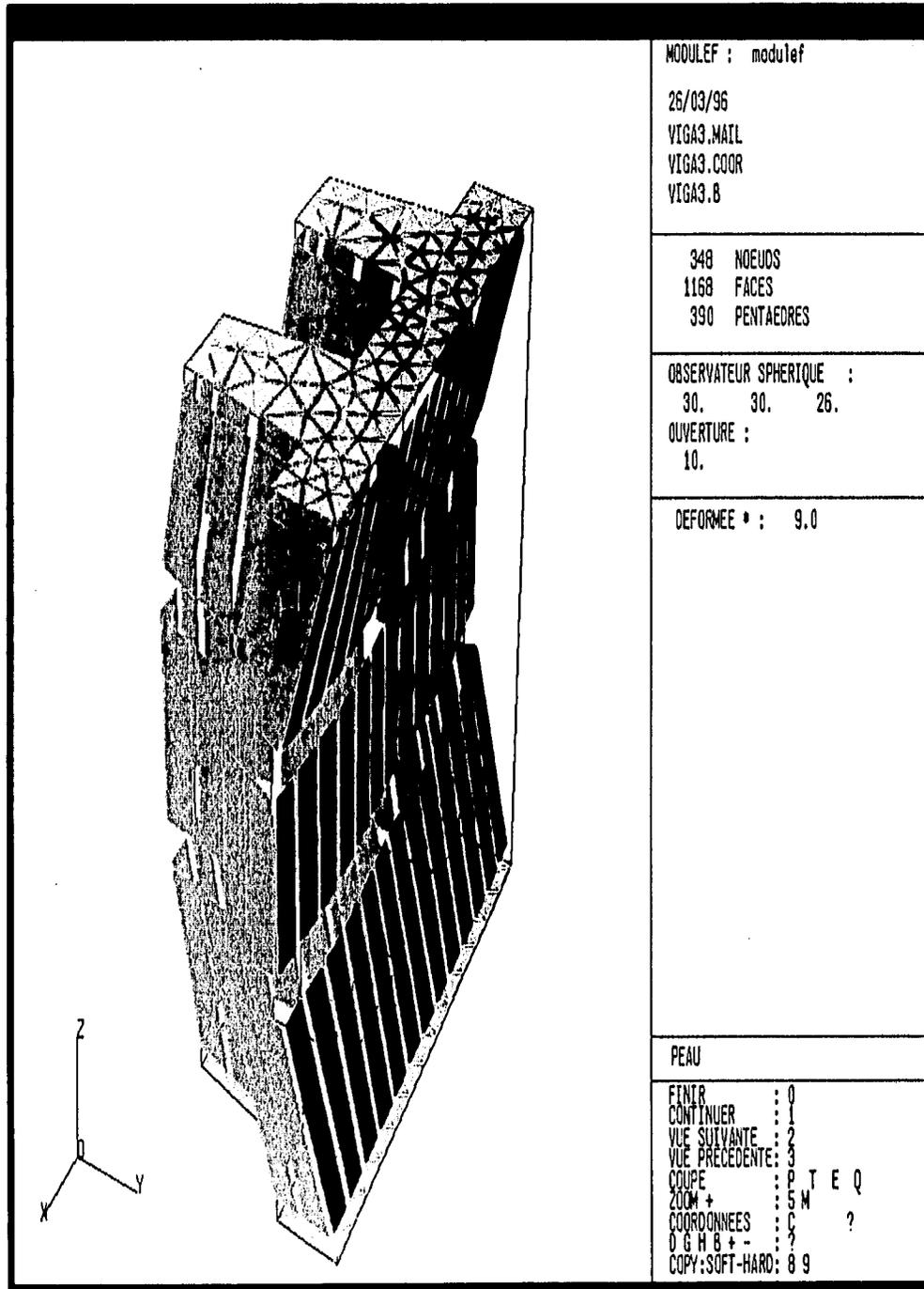
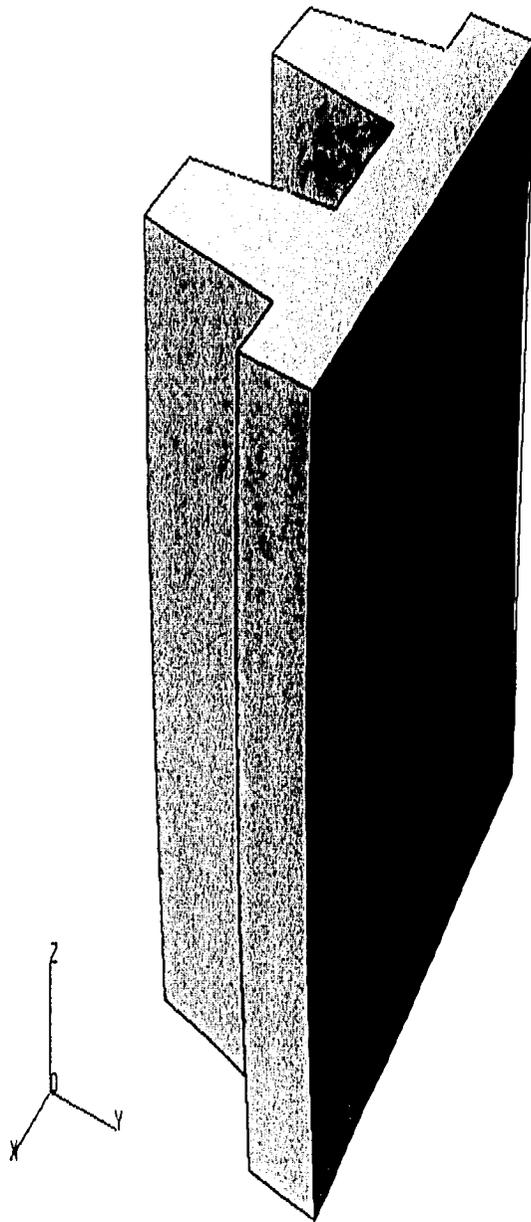


FOTO 5. Configuración deformada, material simple



MODULEF : modulef	
26/03/96	
VIGA3.MAIL	
VIGA3.COOR	
COMP3.B	
348	NOEUDS
1168	FACES
390	PENTAEDRES
OBSERVATEUR SPHERIQUE :	
30.	30. 25.
OUVERTURE :	
10.	
DEFORMEE * : 15.	
PEAU	
FINIR	: 0
CONTINUER	: 1
VUE SUIVANTE	: 2
VUE PRECEDENTE	: 3
COUPE	: P T E Q
ZOOM +	: 5 M
COORDONNEES	: C ?
O G H B + -	: ?
COPY:SOFT-HARD	: 8 9

FOTO 6. Configuración deformada, material compuesto

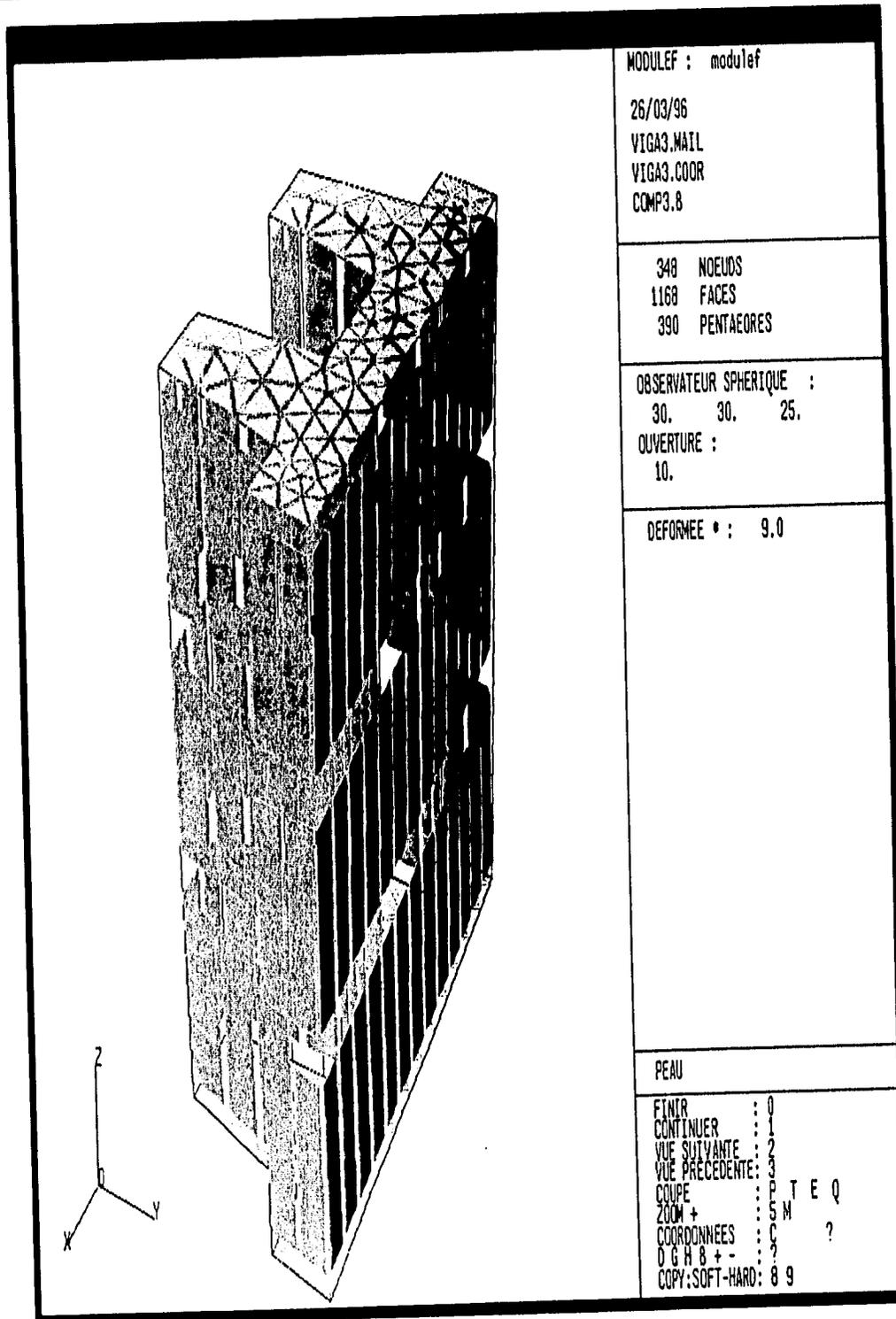


FOTO 7. Configuración deformada, material compuesto

8.2 DESPLAZAMIENTOS

A partir de los resultados gráficos de modulef se manipula las imágenes, para comparar los desplazamientos del material simple y el compuesto, mediante una resta de imágenes, obteniendo mapas de desplazamiento. Todo el proceso se lleva a cabo en el programa Publisher paintbrush (los archivos se deben cargar en formato gif)

El estudio se hace con tres imágenes: la configuración de referencia y las configuraciones deformadas de los dos materiales (simple y compuesto). Todas las figuras se orientan en la misma dirección (en modulef graficación, opción 18, , posición del observador x,y,z 70-3-3).

Después de obtener las imágenes de los resultados de los problemas es necesario capturarlas, para poder procesarlas y obtener las diferencias de desplazamientos.

Para capturar las imágenes y cambiarles el formato, se siguen los siguientes pasos:

1.- Desplegar los resultados en modulef en la orientación necesaria
2.- Se llama a la utilidad snapshot
3.- Se selecciona la ventana a capturar
4.- Snap
5.- Salvar (se salva con el formato rs)
6.- Llamar a la utilidad xview (cambia el formato de rs a gif)
7.- Cargar el archivo en formato rs
8.- Hacer el cambio de rs a gif
9.- Salvar
10.- Trasladar los archivos hacia una PC, vía red y copiarlos a un disco

El procedimiento general para analizar las imágenes en paintbrush consiste en: comparar la configuración deformada de cada uno de los materiales, contra la configuración de referencia de estos; de lo cual obtenemos un mapa de desplazamientos que contiene los puntos que no coinciden con la configuración de referencia, la secuencia paso a paso es :

PAINTBRUSH	Entrar al programa
ARCHIVO, ABRIR	Abre los archivos de imágenes, especificar que formato

	tienen
CARGAR	Selecciona los archivos y cargarlos
ARCHIVO, NUEVA	Abre una ventana nueva de 550- 640 pixeles a 256 grises
SELECCIONAR, COPIAR	Seleccionar la figura utilizando la barra de herramientas y hacer una copia
PEGAR	Pegar la imagen en la ventana nueva
SALVAR COMO	Salvar el archivo nuevo con formato pcx. (hacer lo mismo para las tres imágenes) de aquí en adelante solo se usaran los archivos con formato pcx
CERRAR	Cerrar todas las ventanas
ARCHIVO, ABRIR	Abrir el archivo de la configuración no deformada
EDITAR, PEGAR DESDE	Cargar el archivo de la configuración deformada, la cual se encima en la configuración no deformada
CLIC	Hacer clic con el botón derecho del ratón para hacer transparente la ventana superior
BOTÓN DERECHO	Mantener presionado el botón derecho, para poder arrastrar la imagen hasta que esta este exactamente sobre la otra
BOTÓN IZQUIERDO	Hacer un clic sobre el botón izquierdo, para que solo quede la imagen superior
SALVAR COMO	Salvar la ventana con el nombre del archivo de la figura deformada.
EDITAR, IMAGEN, COMBINAR	Aparece un cuadro de dialogo, donde se seleccionan las imágenes a combinar
ABS(A-B)	Se selecciona resta de imágenes con la opciones a color o blanco y negro
SALVAR	Salvar la imagen con formato pcx
EDITAR, ZOOM	Amplificamos la imagen con malla de fondo
BARRA DE HERRAMIENTAS	Con ayuda de la barra de herramientas se cuentan los pixeles en el desplazamiento que nos interese.

Después de obtener las imágenes resultantes de la comparación es necesario cuantificar los desplazamientos máximos. Estos se encuentran en base a la información dada por la imagen.

El procedimiento para hacer la cuantificación es:

1	Encontrar la escala de las imágenes en el sentido horizontal
---	--

	<ul style="list-style-type: none"> • medir el ancho de la figura no deformada contando los pixeles horizontalmente
	<ul style="list-style-type: none"> • como conocemos el ancho del cuerpo real, se realiza una simple división y obtenemos la escala. (pixeles por unidad de medida).
2	Contamos los pixeles en el sentido que nos interese conocer el desplazamiento,
3	En base a la escala y el desplazamiento en pixeles calculamos el desplazamiento en las unidades que nos interese

En las restas de imágenes aparecen dos zonas: la de compresión y la de tensión; la primera esta situada a la derecha y la otra a la izquierda.

En el material simple los desplazamientos máximos son mas grandes en la zona de compresión que en la de tensión. En el material compuesto se observó lo contrario; sin embargo la diferencia es muy pequeña.

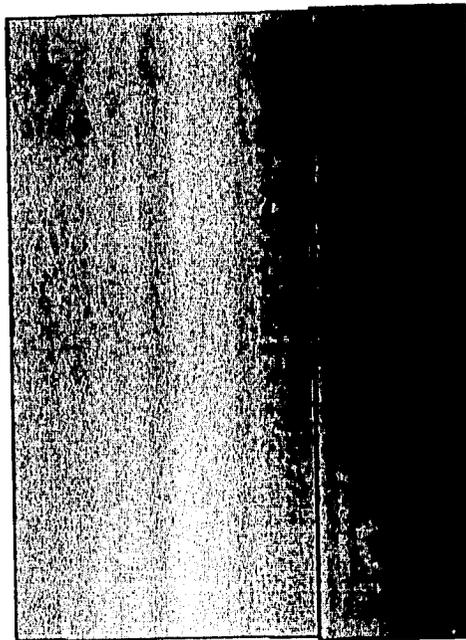


FOTO 8. Configuración de referencia.

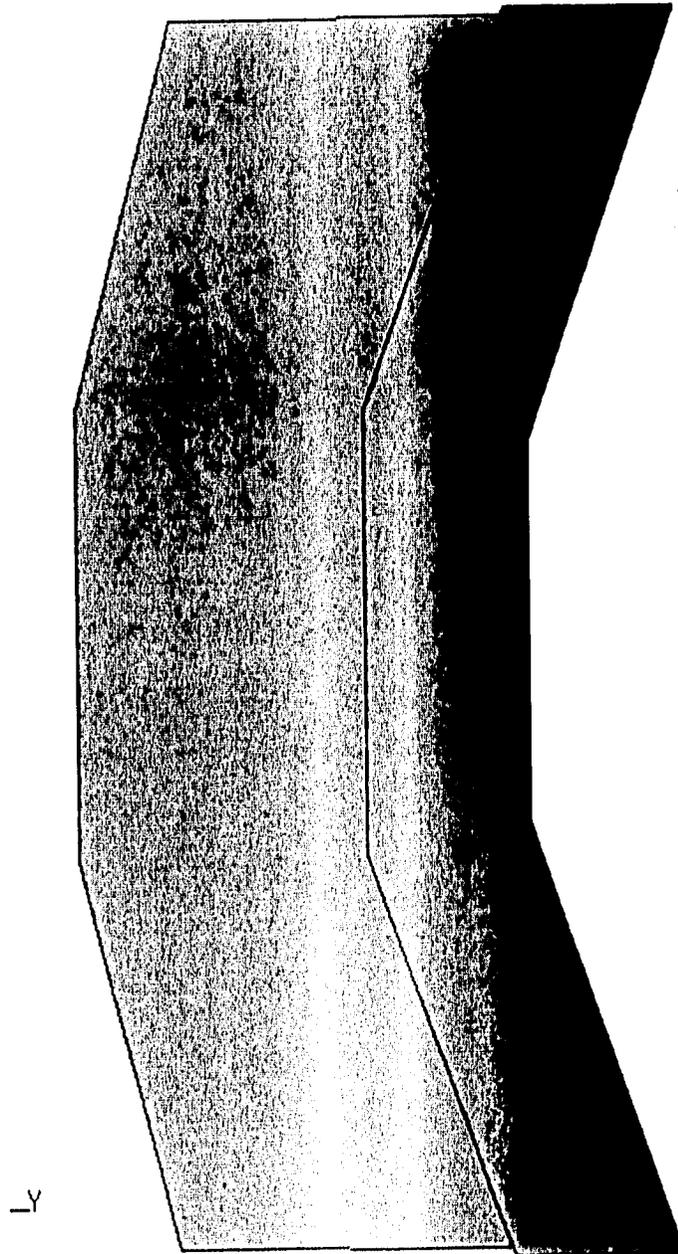


FOTO 9. Configuración deformada, material simple.

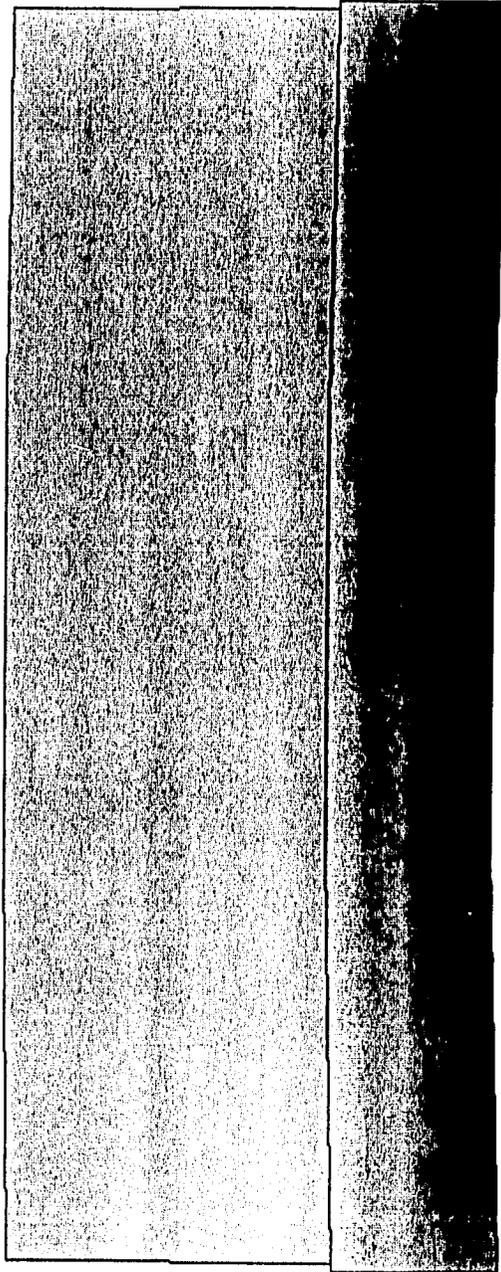


FOTO 10. Configuración deformada, material compuesto

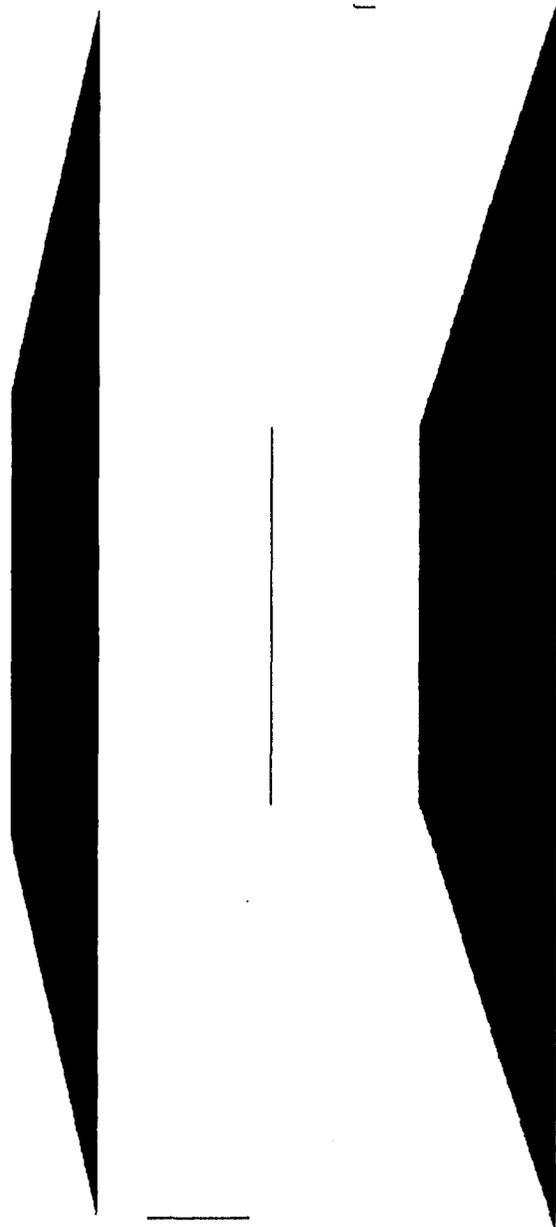


FOTO 11. Desplazamientos del material simple.

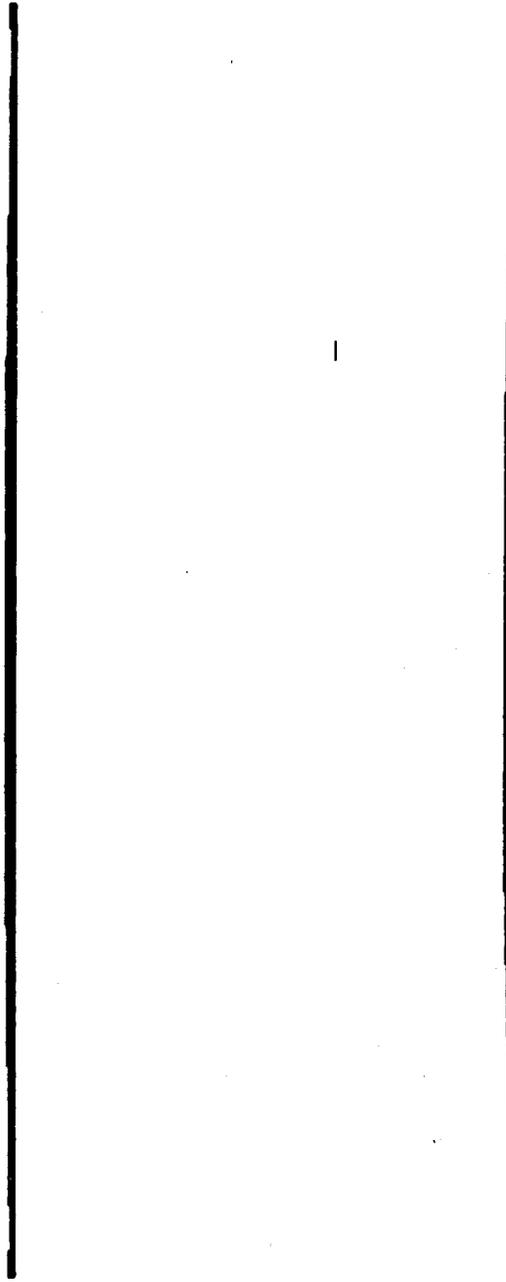


FOTO 12. Desplazamientos del material compuesto.

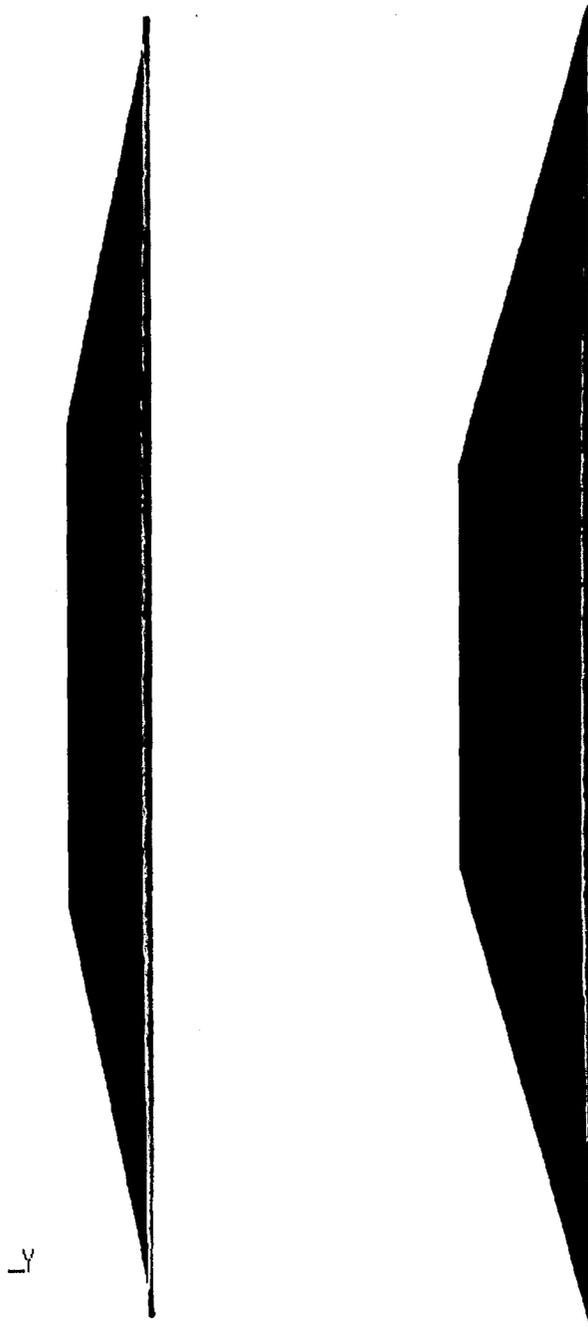


FOTO 13. Comparación de las dos configuraciones deformadas contra la no deformada.

Tabla de comparación de los desplazamientos

	MAT. SIMPLE DESPLAZ. MÁXIMO	MAT.COMPUST DESPLAZ. MÁXIMO	COMPARACIÓN ENTRE LOS DOS MATERIALES
ZONA DE COMPRESIÓN	0.093071	0.007962	11.6 veces
ZONA DE TENSIÓN	0.0548	0.0091	6.2 veces

De los resultados obtenidos del estudio gráfico se ve que la estructura de material compuesto se deforma 11.6 veces menos en la zona de compresión y 6.2 veces menos en la zona de tensión.

8.3 IMÁGENES DE RESULTADOS PARA EL PROBLEMA CON VIGAS DE SECCIÓN RECTANGULAR

La geometría de este problema es igual al del problema anterior, excepto por la sección transversal de las vigas, cambia de sección variable a sección constante, las magnitudes se conservan igual, también las condiciones de frontera.

Los resultados obtenidos en cuanto a deformaciones se muestran en las siguientes figuras.

Se resolvieron los problemas con: material simple y material compuesto

Los resultados que se obtengan de este problema, en cuanto a desplazamientos se compararan con los resultados del problema con vigas de sección variable, con el objetivo de saber cual de las dos configuraciones se deforma menos.

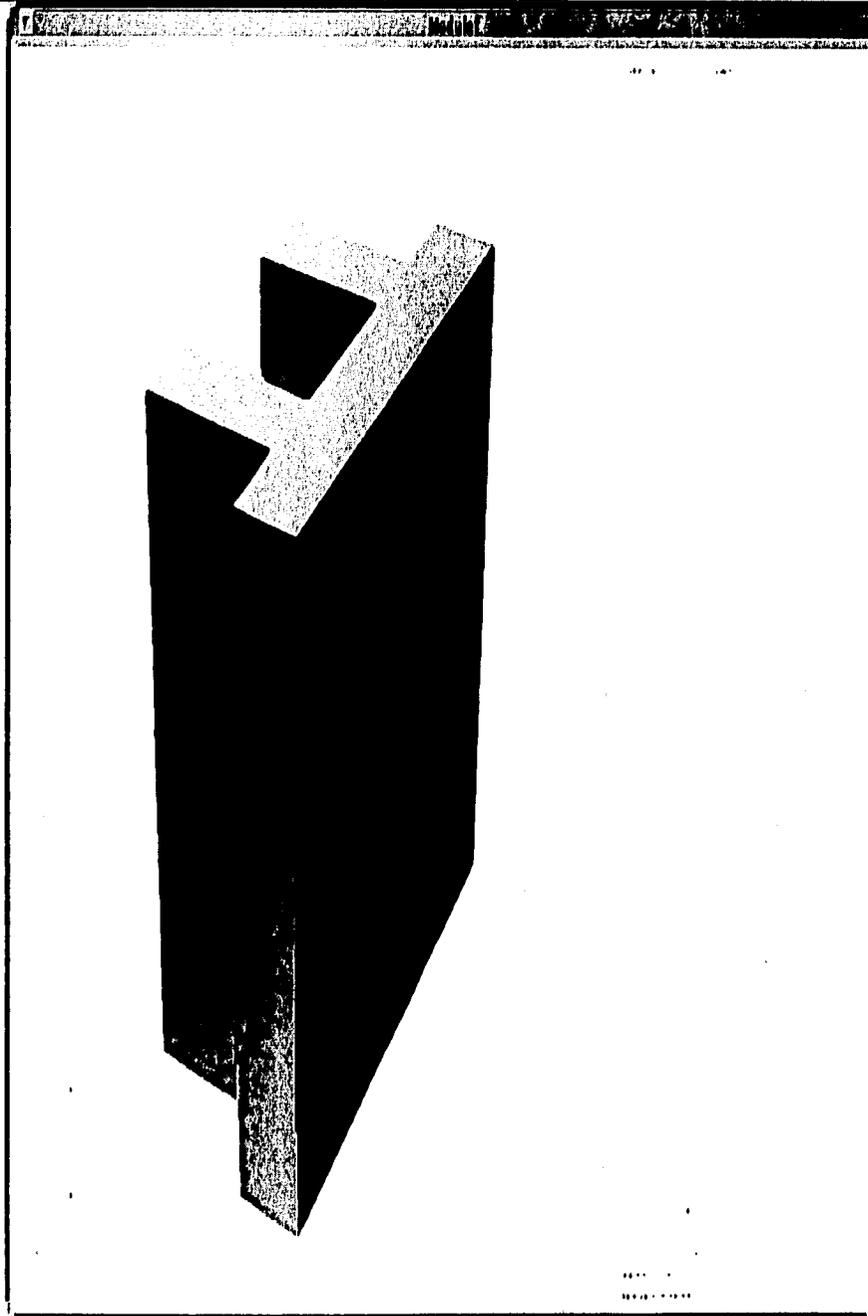


FOTO 14 Configuración no deformada.

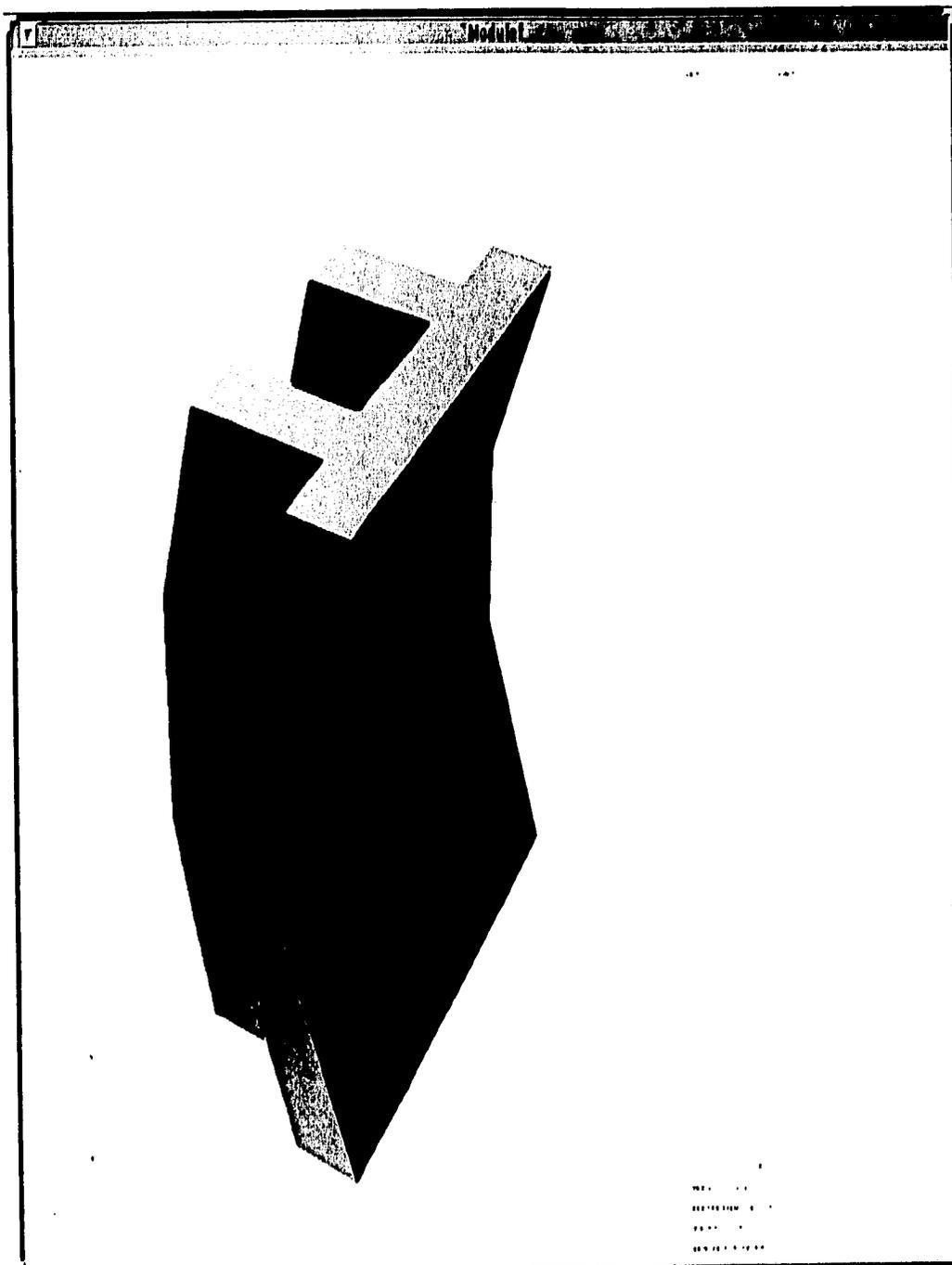


FOTO 15 Configuración deformada, material simple (exagerado 9 veces).

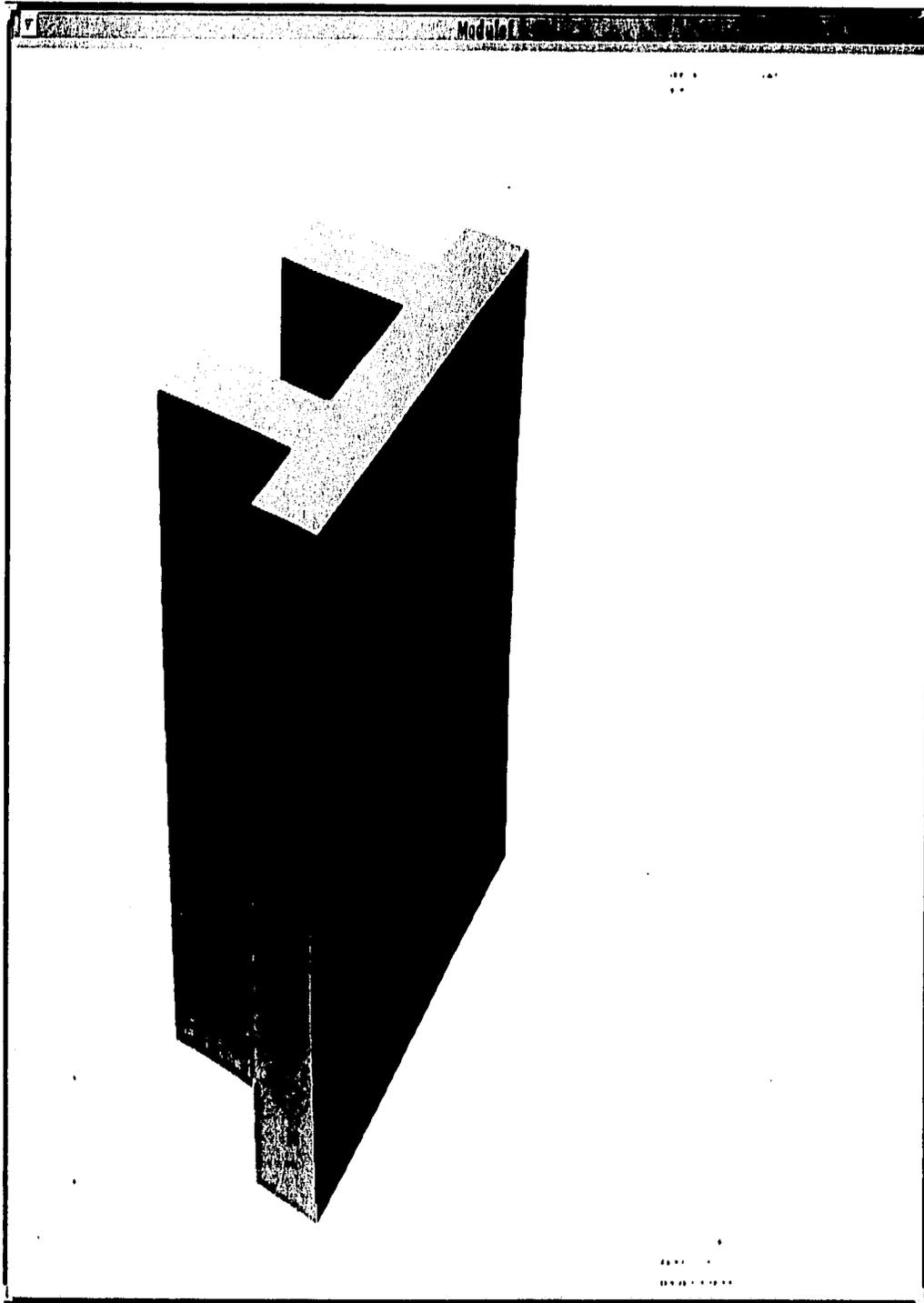


FOTO 16. Configuración deformada, material compuesto (exagerada 9 veces).

8.4 COMPARACIÓN DE DESPLAZAMIENTOS ENTRE EL PROBLEMA CON VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE Y EL PROBLEMA CON VIGAS DE SECCIÓN CONSTANTE

En esta sección se analizará como la geometría del cuerpo puede influir en la magnitud de la deformación de este, para lo cual se hará una comparación de las configuraciones deformadas del problema con vigas de sección variable y el de las vigas de sección constante; esto se hará tanto con el material simple como con el compuesto (los materiales empleados en este problema son los mismos que los del problema anterior)

Las dos primeras imágenes pertenecen a las configuraciones deformadas del problema con vigas de sección constante (material simple y compuesto respectivamente), estas se compararán con las configuraciones deformadas del problema con vigas de sección variable (foto 9 y 10 respectivamente).

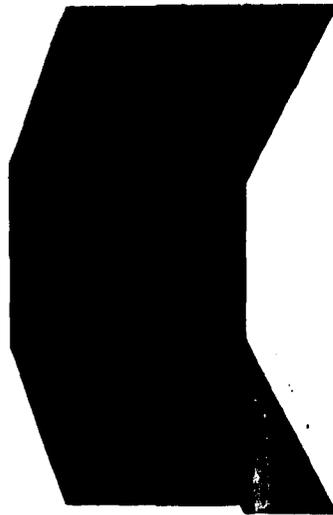


FOTO 17. Configuración deformada, material simple.

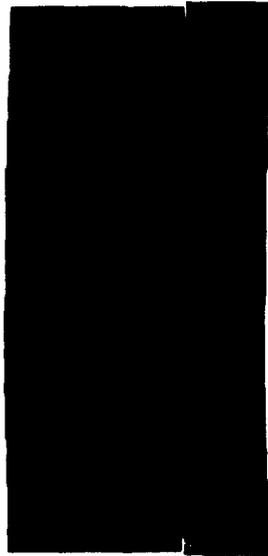


FOTO 18 Configuración deformada, material compuesto.

El problema de las vigas de sección variable lo llamaremos de aquí en adelante problema 1, y el problema de vigas de sección constante lo llamaremos problema 2.

El procedimiento para realizar las comparaciones de las configuraciones deformadas de los problemas 1 y 2 (usando en cada problema el material simple y el compuesto), es el mismo que se utilizó anteriormente en la sección 8.2.

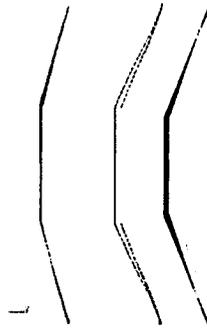


FOTO 19. Comparación entre las configuraciones deformadas de los problemas 1 y 2, material simple

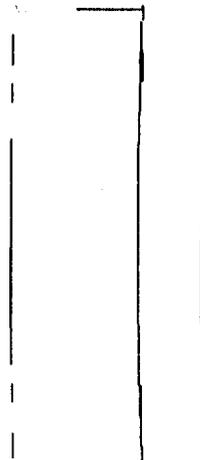


FOTO 20. Comparación de las configuraciones deformadas entre los problemas 1 y 2, material compuesto

Los resultados de la comparación se muestran en la siguiente tabla, los datos mostrados son diferencias de desplazamientos, Se midieron las diferencias en dos zonas: la de compresión y la de tensión

Se encontró que la estructura con vigas de sección variable se desplaza mas tanto en la zona de compresión como en la de tensión.

Tabla de resultados

ZONA	MATERIAL SIMPLE (diferencias en desplazamientos)	MATERIAL COMPUESTO (diferencias en desplazamientos)
Compresión	0.0047	0.00311
Tensión	0.0094	0.000155

La zona derecha de las dos figuras nos indica que en el problema 1 los desplazamientos son menores que en el 2; por lo tanto la compresión es menor en el problema 1.

La zona izquierda muestra que los desplazamientos en el problema 2 son mayores que en el 1; y por consecuencia la tensión es mayor en el problema 2.

En base a estos resultados se concluye que el cuerpo con vigas de sección variable se deforma menos que el cuerpo con vigas de sección constante.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. E. Gurtin, An Introduction to continuum Mechanics, Academic, Press. 1981
- [2] Einger, Theory of Continuos Mechanics. New York. McGraw Hills. 1952
- [3] R. Rodriguez, Modelado de un problema temoelástico, Tesis Maestria Tecnologico de Queretaro. 1991
- [4] E. Carlson, Linear Thermoelasticity, in Encyclopedia of Physics, Vol. Via/2, C. truesdell. Springer, Berlin. 1972
- [5] B. Perez. Modelado de un problema elastico con material compuesto. Tesis de maestria. UNAM. 1996
- [6] L. Reyes, Apuntes del curso de Elasticidad, Maestria, DEPFI, 1989