01168

18

2ª

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

SISTEMAS, DIGRAFICAS Y NUCLEOS

POR

ESPERANZA DE JESUS MENDEZ ORTIZ

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

DIR. TESIS M.I. IDALIA FLORES DE LA MOTA

CIUDAD UNIVERSITARIA
(1996)

AL UNICO

A MI ESPOSO

CRUZ

A MIS PADRES:

Lorenzo y Cecilia

A MIS HERMANOS:

Agus, REy, Mary, Leo, Migue y Jave.

Quienes con dulzura y paciencia me enseñarón la necesidad de la preparación, la convivencia y saber sobreponerme en la adversidad para llegar a una meta.

Agradezco a todos mis profesores en especial a:

M. I. Idalia Flores de la Mota por su apoyo y valiosas sugerencias para la elaboración de este trabajo.

A los profesores: Dr. Gabriel Sánchez Guerrero, M. I. Ricardo Aceves García, Dr. Miguel Angel Gutierrez Andrade y M. I.Ruben Tellez Sánchez por sus atenciones y observaciones hechas a la tesis.

Al CONACYT una institución que hizo posible que me integrara como estudiante de tiempo completo en esta maestría que se ha convertido en un peldaño más dentro de mi vida profesional.

CONTENIDO

INTRODUCCION

Hace aproximadamente un año esbocé un problema que llamo mi atención, era un problema que involucraba hallar ciertas relaciones entre algunos conceptos y aplicaciones del *Análisis de Sistemas* y de la *Teoría de Digráficas*.

El Hecho de conocer algunas de las técnicas del Análisis de sistemas como la técnica Electra y la técnica TKJ, así como también el concepto de núcleo en una digráfica, hizo que me interesará en proponer un procedimiento que facilitará la búsqueda de un núcleo en la digráfica resultante de la aplicación de la técnica Electra y hacer un estudio tanto de ésta como de la técnica TKJ bajo el enfoque de la aplicación de la Teoría de Gráficas en general y el concepto de núcleo en una digráfica.

Es importante hacer notar que he seguido la dirección de la *Investigación de Operaciones* abordando las dos técnicas especificadas anteriormente en el aspecto teórico.

En principio, la rama de las matemáticas que se ocupa de los problemas que involucran el arreglo de ciertos objetos y una relación entre ellos es conocida como *Teoría de Gráficas*. En este marco, el proceso de modelación involucra formular un problema de tal manera que pueda apegarse a las técnicas de la teoría de gráficas. Esto no es fácil; ya que el camino que uno tome para modelar puede ser complicado, considerando además; que el grado con el cual, el modelo matemático que actualmente representa el problema original, varía considerablemente de un problema a otro.

Una observación que puede hacerse es que los sistemas discretos u organizados en una colección de objetos se encuentran con frecuencia en la ciencia de la computación, en la ingeniería y en la dirección industrial, entre otros.

Es así, que una vez que un sistema (compuesto de conceptos, objetos, sujetos o combinaciones posibles de éstos), es modelado por una digráfica, el problema de determinación de un núcleo para esta digráfica tiene dos aspectos claramente diferenciados:

a). Formulación de un criterio que permita saber si existe o no un núcleo.

b). Formulación de un algoritmo que permita determinar un núcleo.

A partir de estos dos puntos es como se desarrolla la tematica de este trabajo.

En el capítulo primero se presentan los conceptos básicos de sistemas y relaciones de preferencia.

En el capítulo dos se exponen los aspectos concernientes a la teoría de núcleos y un algoritmo sencillo para hallar un núcleo el cual utiliza la matriz de incidencia positiva asociada a la digráfica modelo del sistema.

Finalmente en el capítulo tercero se revisan algunas de las técnicas del análisis de sistemas, en las que resalta el uso del concepto de co-núcleo, además de otros aspectos.

C A P I T U L O I

1. SISTEMAS

En este capítulo primeramente se analizarán los conceptos que atañen a la estructura local de un sistema.

1.1 CONCEPTOS ESENCIALES

Conviene destacar que existe una gran variedad de definiciones de sistema. En este trabajo nuestra definición corresponderá a aquella que nos presenta a un *Sistema* en abstracto como un conjunto de elementos que se encuentran relacionados de alguna manera con el fin común de lograr metas definidas.

En todos los sistemas hay siempre "partes" o "regiones" susceptibles de representarse como nodos de una gráfica, y "conexiones" o "enlaces" que pueden simbolizarse por líneas, arcos o flechas. La dificultad radica en que, estas conexiones algunas veces implican una cierta orientación o dirección que determina un orden o precedencia entre los nodos.

Para describir estas realidades complejas es posible usar una estructura geométrica como la digráfica $D = [X, F]$ la cual servirá como un modelo del sistema, en el que los elementos, de éste, son representados por el conjunto de nodos X y el conjunto F será determinado mediante una relación binaria R. Ahora no se agregan mayores comentarios con respecto a R porque este concepto se estudiará más adelante.

Elementos. Los *elementos* son los componentes de cada sistema, éstos pueden ser a su vez sistemas, es decir, *subsistemas*.

En la ejemplificación de estos conceptos, podemos considerar a la Ciudad como un sistema y algunos de sus principales Sistemas Urbanos como sus elementos o componentes. En la tabla 1.1.1 se realiza una lista de ellos.

SISTEMAS COMPONENTES	
EDIFICACION	Habitacional, industrial, comercial, etc.
VIAL	Peatonal, vehicular, etc.
AGUA POTABLE	Plantas de tratamiento, redes primarias, fuentes, etc
ALCANTARILLADO	Vasos reguladores, arroyos, redes de recolección, etc.
TRANSPORTES	Automóviles, camiones, transportes masivos, etc.
COMUNICACIONES ELECTRICAS Y ELECTRONICAS	Teléfonos, telégrafos, telex, televisión, etc.
SUMINISTROS	Electricidad, Producs. del petróleo, alimentos, etc.
CULTURAL	Templos, educación, etc.
BIENESTAR SOCIAL	Salud, recreación, diversión, procesam. de desechos, etc.
SEGURIDAD Y JUSTICIA	Policía, Justicia, Penitenciario, etc.
ADMINISTRATIVO URBANO	Delegaciones, sistemas y procedimientos, etc.

TABLA 1.1.1

Observación. Las componentes de un sistema pueden ser concebidas también como las comisiones, tareas o actitudes que el sistema debe realizar para lograr sus objetivos, es decir, puede uno estarse refiriendo a funciones como los elementos del sistema.

La razón por la cual, en ocasiones, se consideran así es el hecho de que, analizando las funciones puede determinarse el valor de una actividad para el sistema total.

Otra observación es que; la administración de cada uno de los sistemas mencionados en la tabla 1.1.1, constituye a su vez un sistema, el cual puede entenderse como el sistema administrativo asociado a dicho sistema (SA).

La operación de un Sistema Urbano depende íntimamente de su S_A y la operación de S_A depende de los seres humanos que parcialmente lo integran. Este hecho confiere así al Sistema Urbano de referencia, todas las capacidades y debilidades de dichos seres, y es, por lo tanto, la causa primordial del éxito o fracaso del mismo.

Dentro del enfoque sistémico se expresa que, en el desarrollo de este tipo de sistemas, debe tomarse al Sistema Urbano y a su S_A como dos sistemas inseparables, denotaremos esta característica como SU_A.

Así bien, si se denotan con SU_{A1}, SU_{A2}, ..., SU_{A11} los Sistemas Urbanos de la tabla 1.1.1 y sus correspondientes sistemas administrativos asociados, podemos representar la subdigráfica simétrica modelo de estos Subsistemas Urbanos de la Ciudad como se indica a continuación (figura 1.1.1).

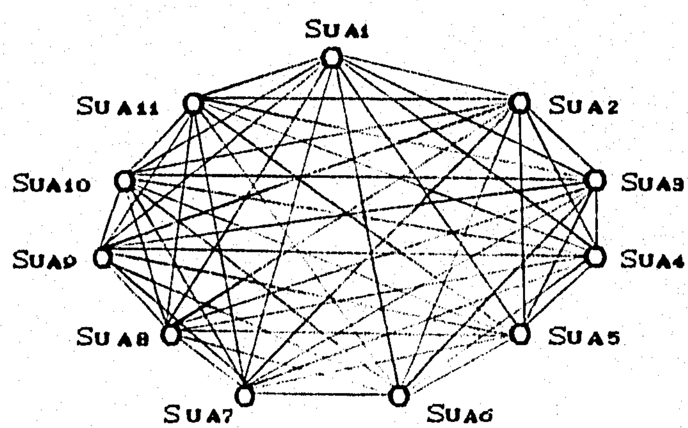


FIG 1.1.1

En teoría de gráficas, la digráfica simétrica de la figura 1.1.1 es denominada una gráfica completa y se denota por K_{11}.

Gráfica completa de p-nodos. La gráfica completa de p-nodos, que se simboliza con K_p, es una gráfica cuyo conjunto de nodos tiene p elementos, y tal que todo par de nodos distintos determinan una línea.

Haciendo uso de la notación anterior, podemos considerar a los n-diversos sistemas urbanos de la Ciudad, como los $\mathbf{SUA}_i$ nodos de una gráfica completa K_n, la cual representará a la Ciudad, con su respectivo sistema administrativo asociado, como un sistema.

Así bien, siempre que se habla de sistemas además de considerar sus componentes y la administración de éste, se toman en cuenta otros aspectos, como los que se exponen a continuación:

Objetivos. Se entiende por *objetivos*, las metas hacia las cuales tiende el sistema.

Es conveniente definir los objetivos como un todo; la ventaja de hacerlo así, se reflejará en el hecho de evitar posteriores consideraciones erróneas del sistema.

En realidad, no resulta fácil determinar los verdaderos objetivos de un sistema. Una indicación de esto, es que, muchas de las veces ha sido mejor; cambiar la intención de dar una declaración de objetivos por otra que consiste en buscar una medida de actuación del sistema.

Esta medida de acción satisfacerá, la necesidad de conocer el grado de funcionalidad del sistema, más explicitamente, el grado en que han sido alcanzados los objetivos.

Con el fin de ir librando, un poco más, ésta y otras dificultades al trabajar con sistemas, se propone la idea de interesarnos más por la información que pueda obtenerse de la digráfica asociada al sistema, o bien, en la aplicación parcial de algunos conceptos de la teoría de gráficas a ciertos aspectos concernientes a los sistemas.

Obsérvese que en aquellos casos, en los que se conoce el esquema geométrico real del sistema, donde las "regiones" son representadas por puntos o nodos, y las "relaciones" por segmentos o arcos de curva que conectan a los puntos, la redefinición de objetivos del sistema en cuestión, lleva a una modificación del esquema geométrico, en el que tanto los nodos como los arcos, pueden desaparecer o incrementarse.

Esto podría deberse, en cierta forma, a la influencia de ciertos factores externos al sistema.

Medio ambiente de un sistema. El *medio ambiente* de un sistema lo constituye todo lo que está afuera del sistema.

Para determinar si "algo" pertenece al medio ambiente, se propone hacer las siguientes preguntas:

1.- ¿ Podrá hacerse algo acerca de ello ?
2.- ¿ Influye en mis objetivos ?.

Si las respuestas a las preguntas 1 y 2 son no y si respectivamente, se puede concluir que efectivamente ese "algo" está en el medio ambiente.

Especificamente, el medio ambiente de un Sistema Urbano, está constituido por todos los sistemas que tienen interacción con él. Entre estos podemos citar los siguientes:

(a). Los demás sistemas urbanos.

(b). Los sistemas de otras clases, como por ejemplo: El sistema ecológico, político, jurídico, económico, financiero, cultural y social.

La interacción entre un Sistema Urbano y su medio ambiente puede representarse mediante una digráfica simétrica como la de la figura 1.1.2, en la que los nodos v, w, x e y, pertenecen al medio ambiente y cada uno de ellos es adyacente al nodo u que representa al Sistema Urbano **SUA**, que incluye a su sistema administrativo asociado.

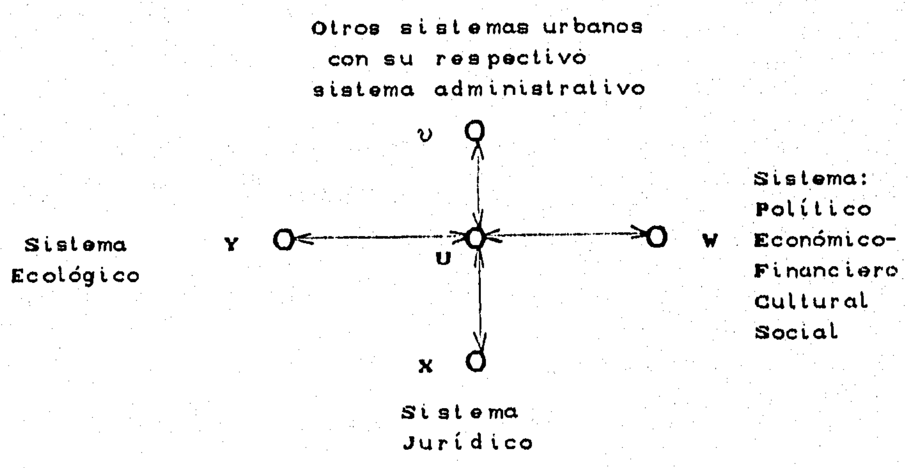


FIG. 1.1.2

Obsérvese que el Sistema Urbano no está libre del medio ambiente, es decir, tiene una interacción simétrica a cada uno de los nodos pertenecientes al medio ambiente, en este sentido; podríamos decir que el Sistema Urbano se encuentra lleno del medio ambiente. Bajo esta característica, el Sistema Urbano representa un *Sistema Abierto* en el cual las soluciones y problemas, específicos de éste, pueden considerarse como momentáneos dentro de un proceso móvil.

De acuerdo con lo antes observado, al adaptar la estructura de digráfica, al concepto de sistema, debe tenerse en cuenta que el modelo de digráfica corresponde a la descripción del sistema con base en la idea de sistema abierto.

El medio ambiente del sistema también incluye lo que determina la forma de operar del sistema, es decir, lo que influye sobre el comportamiento de éste.

En el concepto de medio ambiente como se menciono en el caso del Sistema Urbano, están contenidas las nociones de interrelación, interdependencia, interacción y se resalta la importancia de las entradas y las salidas.

Entradas y salidas. Los elementos que entran al sistema se denominan *entradas*, y los que lo dejan son llamados *salidas o resultados*.

A continuación en la figura 1.1.3 se presenta el esquema referido a un sistema en general y su medio ambiente.

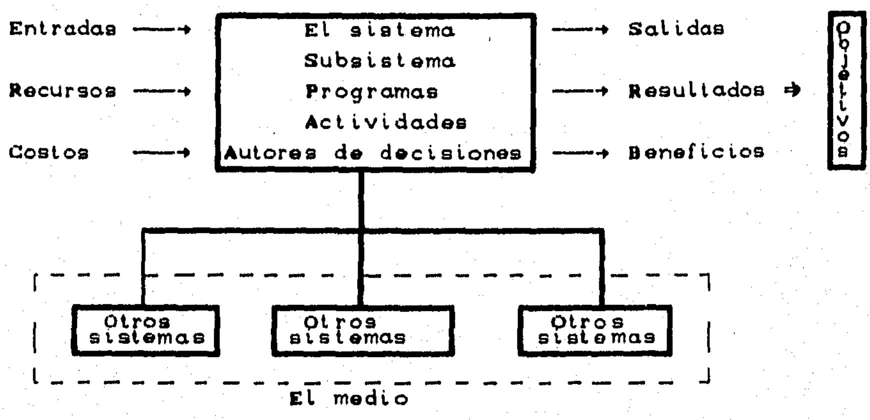


FIG. 1.1.3

Cabe decir entonces que el medio ambiente incluye todo lo que está fuera de control del sistema. El sistema no puede hacer nada o relativamente poco, sobre el comportamiento del medio. Según esto, el medio ambiente está integrado por aquello que es constante, fijo o dado.

Al contrario del medio ambiente, los recursos del sistema son las cosas que el sistema puede cambiar y utilizar para su provecho, decidiendo para esto la forma adecuada de su utilización.

Recursos. Los recursos son los medios disponibles al sistema para la ejecución de las actividades necesarias para el logro de los objetivos.

Proceso de conversión. Los sistemas organizados están dotados de un *proceso de conversión* por el cual los elementos del sistema pueden cambiar de estado.

El proceso de conversión cambia elementos de entrada en elementos de salida, éste generalmente agrega un valor y utilidad a las entradas, al convertirse en salidas. Si el proceso de conversión reduce el valor o utilidad en el sistema, éste impone costos e impedimentos.

Entradas y recursos. La diferencia entre entradas y recurso es mínima, y depende sólo del punto de vista y circunstancias. En general una *entrada* se torna un *recurso* cuando ésta se convierte en un elemento activo del sistema.

Salidas o resultados. Las *salidas* son los resultados del proceso de conversión del sistema y se presentan como resultados, éxitos o beneficios.

Finalmente, a manera de ilustración se presenta en la figura 1.1.4 el proceso básico de decisión.

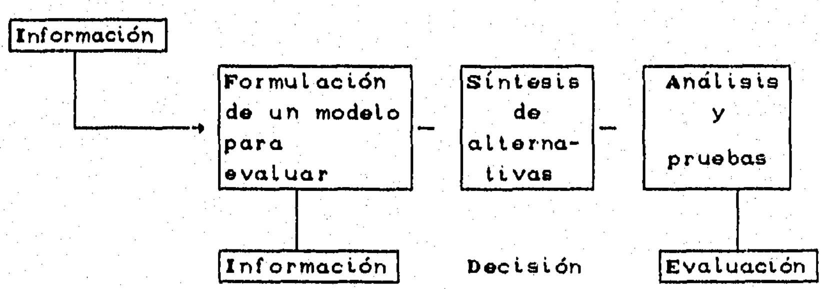


FIG. 1.1.4 PROCESO BASICO DE DECISION

La entrada a este proceso es la información para identificar y definir el modelo. Esta información se obtiene de investigaciones y decisiones hechas en etapas anteriores y de experiencia previa del personal.

El producto o salida de este proceso incluye información más detallada, organizada y exacta de los requerimientos del sistema óptimo para cualquiera de sus etapas.

La implementación de este proceso básico de decisión genera un diseño. Durante los períodos de planeación y adquisición de este diseño, el proceso de decisión consiste de la identificación, descripción, producción e instalación del sistema óptimo. Durante el período de uso, el diseño incluye la identificación de las mejores tácticas para la operación y desarrollo del sistema.

Como se dijo al inicio de esta sección, para poder determinar la digráfica modelo del sistema es necesario identificar los nodos de ésta y los arcos que unirán a estos nodos. La creación de un arco está sujeta a la identificación de una relación binaria sobre el conjunto de nodos. A continuación se exponen algunas de las bases sobre las que se fundamenta la construcción de una relación de preferencia, la cual es usada con frecuencia dentro del análisis de sistemas.

1.2. RELACIONES DE PREFERENCIA.

El estudio de los sistemas y el estudio de las digráficas tienen muchos puntos de contacto con el estudio de relaciones binarias en un conjunto. Con mayor precisión se exponen a continuación algunos de estos.

Existe cierta clase de relaciones que se han empleado en la descripción de la intensidad de los valores no-lineales que una persona u organización da a lugar sobre algunas consecuencias o resultados.

Estas son colectivamente referidas como funciones de preferencia; F_p, las cuales asignan a cada valor x la cantidad $F_p(x)$. Estas funciones, matemáticamente, permiten el análisis para estimar el valor de nuestra posible elección y así aconsejar a nuestro cliente (en una decisión individual o de grupo) para su mejor elección.

Hay dos maneras básicas de representar las preferencias no-lineales para los posibles beneficios o las posibles pérdidas: Las *funciones de Valor y Utilidad.* Estos conceptos tan cercanos difieren principalmente en la generalidad de su aplicación.

Las funciones de Valor están fundamentadas justamente en suposiciones básicas y son válidas para al menos cualquier circunstancia, en este sentido, son generales.

Las funciones de Utilidad resultan más alla de un conjunto de suposiciones y son así menos generales, éstas son de hecho particularmente aplicadas a situaciones que involucran incertidumbre. Este tipo de funciones son más útiles en la práctica y rutinariamente se usan en el Análisis de Decisiones.

Observación: En la literatura economista, generalmente, se hace referencia a todas las funciones de preferencia como funciones de Utilidad, mientras que en el Análisis de Decisiones (dentro de la Investigación de Operaciones) estas funciones tienen un término específico, limitando su significado. Como la distinción entre función de Utilidad y función de Valor es útil, ésta se mantiene aquí.

1.2.1. NO LINEALIDAD DE LAS PREFERENCIAS.

Las personas, en general, no asignan el mismo valor a cada unidad de beneficio que ellas reciben o de costo que ellas pagan. Por ejemplo, cuando usted tiene hambre, usted está más interesado en el primer platillo de comida, menos interesado en el segundo y cada vez menos en el tercero o cuarto, en cuanto usted va sintiéndose satisfecho. La relación entre un conjunto de consecuencias X y la medida de preferencia M_p es, en general, no lineal y posiblemente altamente compleja.

Matemáticamente, nosotros podemos pensar a M_p como

$$M_p = F_p\,(x)$$

donde $F_p\,(x)$ es la función de preferencias.

Una forma común de preferencia no-lineal es aquella que se refiere a cómo disminuir la "utilidad" marginal en términos económicos.

Esta refleja el hecho de que la gente comúnmente atribuye menor y menor valor a cada unidad de beneficio que puede recibir.

Una forma en la que, probablemente, usted reaccionaría al describir el fenómeno del hambre es: Usted puede asignar un valor muy alto al primer platillo de la comida y entonces como la necesidad por alimentarse decrece, usted valorará los subsecuentes platillos de comida en forma decreciente. En algún nivel del beneficio puede así, ocurrir una saturación. El incremento marginal en el valor se decrementará hacia cero como se indica en la figura 1.2.1.

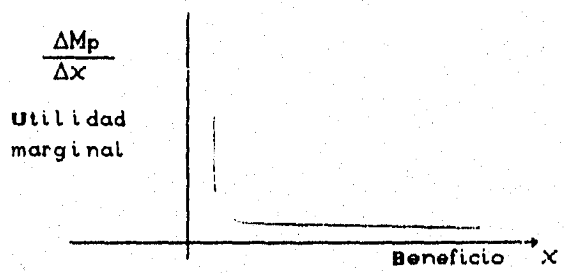


FIG. 1.2.1

La estimación total de la preferencia corresponde a la rápidez con que decrece el incremento.

El concepto de preferencia no-lineal se presenta en los casos en que existe una gran diversidad de preferencias en las personas; debidas a las circunstancias personales de cada una. Como se dijo anteriormente, una forma de representar estas preferencias es utilizando una función de Valor.

Función de Valor. Una *función de Valor* es una medida del excedente entre el orden relativo a la preferencia y el conjunto X de consecuencias, beneficios o costos. Esta asigna, así mismo, un número a cada X, tal que para cualesquiera dos conjuntos, X_1 y X_2, uno es preferido al otro (>) sólo si, su valor es más grande que el del otro.

$$X_1 > X_2 \text{ sólo si } V(X_1) > V(X_2)$$

Similarmente X_1 podría ser indiferente o preferido por X_2:

$$X_1 \sim X_2 \quad \text{ó} \quad X_1 < X_2,$$

dependiendo de sus valores relativos.

1.2.2. FUNDAMENTOS DE LAS FUNCIONES DE VALOR

Base de axiomas. La existencia de una función de Valor depende de tres axiomas básicos que son suposiciones acerca de la situación. Matemáticamente se requieren a la vez dos axiomas técnicos, pero éstos son muy poco significativos para el análisis.

El axioma primordial concierne a la existencia de preferencias relativas para todas las consecuencias o resultados. Este afirma que:

Axioma 1. Para cada posible par de consecuencias (o resultados), X_1 y X_2, en el dominio de interés, una persona podría preferir una o bien la otra, o ser indiferente entre ellas.

$$X_1 > X_2, \quad X_1 < X_2, \quad \text{ó} \quad X_1 \sim X_2.$$

En ocaciones este axioma es denominado el axioma de completes o de pre-orden total. Este representa una suposición razonable.

Aunque en general, una persona puede confrontar varias situaciones que involucren su elección, en las que éstas tienen atributos totalmente diferentes puede así hallar imposible, al momento, en esta situación determinar su o sus preferencias relativas.

El axioma es equivalente a la suposición de que la gente hace, en el final, una elección y puede así expresar su preferencia.

El segundo axioma es el que se refiere a la transitividad. Este afirma que:

Axioma 2. Para cualesquiera tres conjuntos de consecuencias (o resultados), X_1, X_2, X_3, si $X_1 > X_2$ y $X_2 > X_3$ entonces la preferencia es transitiva, es decir, $X_1 > X_3$.

Esto es razonable para un individuo o grupo con un conjunto común de preferencias. Ello puede, sin embargo, no ser verdadero para los grupos en general. Esto es porque; diferentes individuos pueden delinear su elección en ordenes diferentes y este hecho combinado con la manera de la organización del grupo o la rotación sobre la elección colectiva, puede conducir a una elección no-transitiva por grupos.

El tercer axioma importante es el de *monotonicidad*. Este simplemente supone que, más de un buen artículo es mejor.

El axioma de monotonicidad es equivalente al principio Arquimediano, donde el valor de algún artículo, en una serie, puede ser representado como un peso promedio de los valores de los extremos. Esto es, expresando los valores mayor y menor para un X_i como X^* y X_*, respectivamente, se tiene lo siguiente:

Axioma 3. Para cualesquiera X_i, X_j dentro del rango de interés, $X^* \geq X_i$, $X_j \geq X_*$, existe un número entre cero y uno, $0 \leq \lambda \leq 1$, tal que algún otro X_k entre X_i y X_j puede ser expresado como

$$V (X_k) = V (X_i) + (1 - \lambda) V (X_j)$$

Esto sólo puede ser verdadero si las preferencias son monotónicas.

Ahora bien, como se menciono en la sección 1.1.3, dada una relación binaria R en un conjunto cualesquiera X, puede construirse fácilmente una digráfica conviniendo en que cada vez que la relación $u \; R \; v$ sea válida entre dos elementos del conjunto X, existirá un arco de la digráfica que parta de u y llegue a v.

Así mismo, dada una digráfica $D = [X, F, \sigma]$ sin arcos estrictamente paralelos, se puede definir en X una relación binaria R tal que $u \; R \; v$, si, y sólo si, existe $h \in F$ y $\sigma(h) = (u, v)$. Esta similitud (o más correctamente, isomorfismo) entre ambas teorías permite un intercambio de terminología, métodos y problemas.

Por ejemplo, suelen aplicarse a las digráficas ciertos conceptos tomados del estudio de las relaciones. Una digráfica reflexiva es la que tiene un bucle en cada nodo, una digráfica es simétrica si a cada arco corresponde otro arco paralelo, si bien de sentido opuesto, y por el contrario, una digráfica antisimétrica será la que no admite arcos paralelos y de sentido contrario.

Observación. Una digráfica simétrica puede interpretarse como una gráfica no dirigida. Basta para ello, sustituir cada par de arcos paralelos opuestos, por una línea o arista sin orientación. De igual forma, de una gráfica no dirigida se puede pasar a una digráfica simétrica, sustituyendo cada arista por un par de arcos opuestos.

Por último, los circuitos son entendidos también como ciclos dirigidos y, relativo a una relación de preferencia, éstos son vistos como una expresión de indiferencia.

C A P I T U L O II

2. ASPECTOS DE LA TEORIA DE NUCLEOS

2.1 CONCEPTO DE NUCLEO

El concepto de núcleo en una digráfica fue considerado primeramente por Von Neumann en Teoría de Juegos donde lo llamo " solución de un juego de cooperación entre n personas ".

Posteriormente C. Berge noto que el mismo concepto resultaba de utilidad en otros contextos y propuso llamarlo " el núcleo de una digráfica ", con el fin de demostrar más teoremas de existencia.

Núcleo de una digráfica. Dada una digráfica $D = [X, F]$, un conjunto $N \subset X$ se dice que es núcleo de D si satisface lo siguiente:

1. El conjunto de nodos N es *independiente*, es decir cualesquiera dos nodos en N no están unidos por un arco.

2. El conjunto $N \subset X$ es *absorbente*, esto es, para cada $v \in X - N$ existe una vu *-flecha* en D, con $u \in N$.

Claramente cada subconjunto de un conjunto independiente es independiente. Un conjunto *independiente maximal* es un conjunto independiente, con la propiedad de que al añadirle cualquier otro nodo deja de ser independiente. En la literatura el concepto de núcleo es así mismo conocido como una 1- base.

En la digráfica de la figura 2.1.1 los conjuntos independientes maximales son { x_1, x_5 }, { x_2, x_3, x_5, }, { x_2, x_5, x_6 }, { x_4 }. Un conjunto absorbente es { x_2, x_3, x_5 }, de hecho este conjunto es un núcleo.

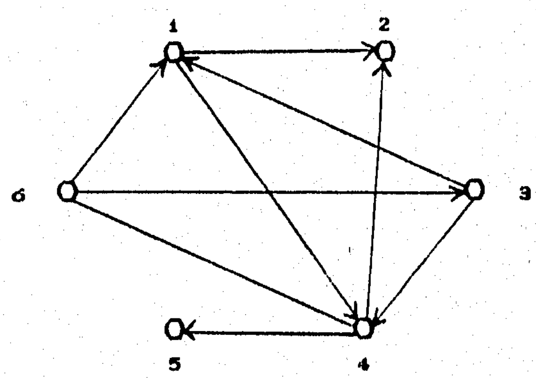


FIG. 2.1.1

Existe una gran variedad de aplicaciones de los conjuntos independientes y de otros conceptos que de alguna manera están relacionados al concepto de núcleo. Veamos ahora algunas de ellas.

2.2 CONJUNTOS INDEPENDIENTES, ABSORBENTES Y DOMINANTES

Centros Asistenciales Urbanos. Una gran ciudad cuenta con veinte centros asistenciales para la atención de la población, distribuidos sobre toda el área urbana. Las autoridades sanitarias deciden adquirir un cierto número de unidades móviles de terapia intensiva para atender casos de emergencia. Estas unidades estarán estacionadas en algunos de los centros urbanos mencionados, pero se trasladarán rápidamente a otro si se requieren sus servicios. Sin embargo, para que estos sean efectivos es necesario que la unidad no tarde más de 10 minutos en llegar al centro desde donde se le llamó. ¿ Cómo es posible, con ayuda de la Teoría de Gráficas, hallar el menor número y la ubicación óptima de estas unidades sin merma de la eficiencia de los servicios?. Este problema puede ser modelado a través de una digráfica simétrica $D = [X, A]$ en la que cada uno de los 20 centros asistenciales es un nodo $x \in X$ y donde se conectan con una línea (o arista) $k \in A$ los nodos correspondientes a centros situados a distancias que se pueden recorrer en menos de 10 minutos. Se busca ahora en D un conjunto de nodos $\mathcal{D}$ tal que todo otro nodo sea adyacente a un nodo de $\mathcal{D}$. En general habrá muchos conjuntos con estas propiedades, pero se buscará uno que tenga el menor número posible de elementos.

Conjuntos Dominantes. En una gráfica (o digráfica simétrica) $D = [\ X,\ A\ ]$ se dirá que un subconjunto de nodos $\mathcal{D} \subset X$ es *dominante* si, *para todo* $u \in X$ y $u \notin \mathcal{D}$, existe un $v \in \mathcal{D}$ y adyacente a u.

Se dirá que un conjunto dominante $\mathcal{D}$ es dominante minimal si todo subconjunto propio de $\mathcal{D}$ no es dominante. Se llama número de dominancia de una gráfica $D = [X, A]$, al menor cardinal de un conjunto dominante de D (Berge llama a esta constante "coeficiente de estabilidad externa de D").

Las nociones de independencia y dominancia están intimamente relacionadas. El siguiente resultado pone de relieve tal conexión.

TEOREMA. Un conjunto independiente es maximal si, y sólo si, es dominante.

Demostración. Supóngase que W es un conjunto independiente maximal de la gráfica $D = [X, A]$ y que W no es dominante. Así bien, existe un nodo $v \in X - W$ que no es adyacente a ninguno de los nodos de W. Entonces $W \cup \{ v \}$ será independiente y W no sería maximal.

Recíprocamente, supóngase que W es independiente y dominante. En tal caso, para todo $u \in X - W$, u es adyacente a algún elemento de W y $W \cup \{ u \}$ no es independiente. Es decir que W resulta maximal.

Si en el teorema anterior se intercambian las palabras "independiente" y "dominante" y se sustituyera "maximal" por "minimal", el "teorema dual" resultante sería falso, ya que existen conjuntos dominantes minimales que no son independientes. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 2.2.1, el conjunto $\{ c, d \}$ es dominante minimal, pero no es independiente.

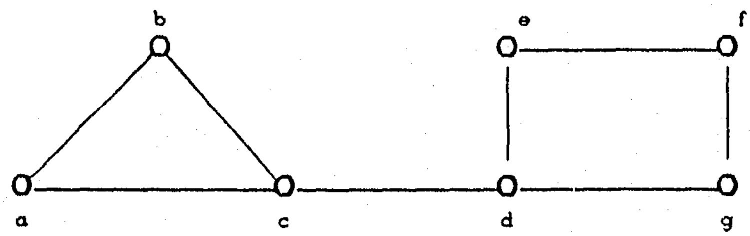


FIG. 2.2.1

Una observación que puede hacerse con respecto a un conjunto dominante y uno absorbente es que éstos resultan ser el inverso uno del otro.

Dinámica de Grupos. En psicología social, más precisamente en temas de dinámica de grupos, aparece una aplicación interesante de la noción de independencia. Se estudia un conjunto X de personas que, en terminología psicológica, se llama "el grupo". Para fijar ideas, cabe suponer que X es el conjunto de asistentes a un curso. Entre algunos elementos de X aparece una relación simétrica, aunque no necesariamente transitiva, que se podría ejemplificar como "amistad".

Es así, que esta relación define una digráfica simétrica $D = [X, A]$ cuyas líneas unen pares relacionados. Para el análisis psicológico del grupo interesa detectar las "ligas", es decir; los subconjuntos $M \subset X$ tales que entre todos los pares de elementos de M, subsista la relación expresada por "amigo de". Más aún, un índice de cohesión del grupo será el tamaño del mayor subconjunto M.

Para abordar este problema se hace uso de la digráfica simétrica complementaria, ya definida anteriormente. El resultado que se obtiene con esto es que un subconjunto de X es una "liga" en D si, y sólo si, es independiente en $\overline{D}$.

Además, el índice de cohesión mencionado no es más que el número de independencia de $\overline{D}$, es decir el mayor cardinal de un conjunto independiente maximal en $\overline{D}$.

Detección de errores y códigos de corrección de errores. Sea $X = \{ x_1, x_2, x_3, \}$ el conjunto de signos básicos los cuales pueden ser transmitidos a través de un canal de comunicación (Por ejemplo, X podría ser un conjunto de palabras binarias tales como se usan en un alfabeto numérico característico de un sistema de computación).

A causa de la interferencia eléctrica y la distorsión, alguas señales de transmisión pueden ser mal interpretadas al recibirse.

En general para cada par de señales x_i y x_j, la recepción de x_i y la de x_j ocurre con diferente probabilidad, pero para fines prácticos algunas veces es adecuado considerar el caso definitivo donde, para algún par de señales x_i y x_j, la recepción tanto de x_i como de x_j puede o no ocurrir: en este caso, la posibilidad de un error en la comunicación puede ser representada convenientemente por una gráfica de la relación entre las señales, donde los nodos corresponden a los signos básicos, y donde dos nodos x_i y x_j son unidos por una línea si una u otra de estas señales puede ser recibida como la otra (ver figura 2.2.2).

Señal transmitida	Señal recibida
u	u o v
v	v o w
w	w o x
x	x o y
y	v o y o z

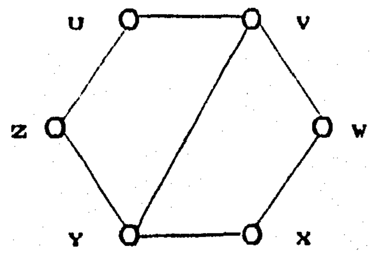


FIG. 2.2.2

Ahora bien, es posible detectar todos los errores en recibir las señales, si nosotros restringimos las señales de transmisión a un subconjunto de X que sea independiente bajo la relación que guardan las señales en la gráfica.

En efecto, si se supone que el conjunto S de transmisión de señales es independiente; entonces si una señal recibida pertenece al conjunto S ésta es una señal correcta (ya que ninguna señal en S puede ser transformada en alguna otra señal en S), mientras que si una señal recibida no pertenece a S, ésta es incorrecta.

En otro caso, si el conjunto de señales de transmisión no es independiente, algún par de señales puede ser confundida por el receptor.

En el ejemplo de la figura 2.2.2, los conjuntos máximos independientes, con los cuales se determina el conjunto más grande de señales que pueden ser usadas para detectar todos los errores, son $\{ u, w, y \}$ y $\{ v, x, z \}$.

Así bien, es posible también corregir los errores al recibir una señal. Para ello se construye otra gráfica a partir de la relación entre las señales, en la cual los nodos corresponden a las señales como antes, pero en la que dos nodos x_i y x_j son ahora unidos por una línea si y sólo si la transmisión de x_i y x_j puede resultar en la misma señal recibida (la cual no necesariamente es x_i o x_j). Por ejemplo considérese la gráfica de la figura 2.2.3.

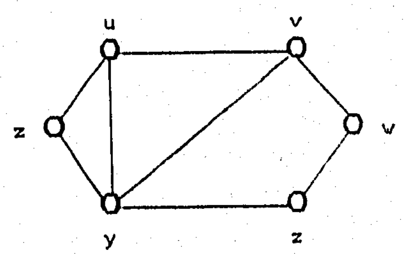


FIG. 2.2.3

Si se supone que el conjunto S de transmisión de señales es independiente. Entonces, si una señal recibida x_i pertenece a S ésta puede ser correcta; si x_i no pertenece a S entonces x_i es incorrecta, pero ya que sólo existe una señal en S la cual puede ser recibida como x_i, el error puede ser corregido.

De otra manera, si S no es independiente, entonces existirán dos señales diferentes en S las cuales pueden ser recibidas como la misma señal; en este caso será imposible determinar por el receptor cual señal fue transmitida.

Así, para este caso, el conjunto independiente determina el conjunto de señales transmitidas para el cual todas las señales pueden ser corregidas por el receptor.

Para el ejemplo de la figura 2.2.3, el conjunto de señales { v, x, z } es el más grande para el cual todos los errores pueden ser corregidos (la corrección de errores no es así posible para el conjunto { u, w, y }, ya que la transmisión de u e y pueden ambas resultar en la señal v.

Hasta ahora se ha rebizado el concepto de independencia, para completar la caracterización de un núcleo presentaremos la aplicación que se formulo en Teoría de Juegos por Von Neumann (1944) para este concepto.

Supóngase que n personas deben discutir juntas y elegir un punto x (una situación) de un conjunto finito no vacío X. Dado que entre las n personas deben elegir un elemento x de X. Así mismo, entre las n personas necesitan establecer la preferencia de un elemento (o situación) a otro del conjunto X.

Esto lleva en si a establecer una relación de preferencia entre un par de elementos de X. Dado que se requiere una elección de grupo; las preferencias individuales no serían de utilidad ya que podrían no ser compatibles.

Ahora bien, la preferencia unánime de un elemento x_1 sobre un elemento x_2 sería la mejor solución, pero es muy difícil que esto suceda.

En realidad lo que se requiere es una relación efectiva que nos lleve a la unanimidad, obligando la preferencia de x_1 sobre x_2.

Preferencia efectiva. Diremos que el elemento x_i es *efectivamente preferido* al elemento x_j, si entre las n personas existe un grupo de personas capases ellas juntas de obligar la preferencia de x_i sobre x_j.

A través de esta relación de preferencia puede definirse una digráfica donde X es el conjunto de nodos y donde dos elementos x_1, x_2 de X están unidos por un arco si x_2 es efectivamente preferido a x_1.

Si la digráfica tiene un núcleo $N \subset X$, la elección del elemento x se limita a elegir un elemento en el conjunto N. Dado que, al ser N independiente ningún elemento de N es efectivamente preferido a otro en N, y si $x \notin N$, entonces existiría otra situación en N que es efectivamente preferible a x.

Propiedades de los núcleos. Se enunciarán sin demostrar las siguientes propiedades de los núcleos:

1. Una digráfica puede tener uno o varios núcleos o no tener ninguno.

2. Si una digráfica tiene un núcleo N entonces

$$|S| \geq |N| \geq |T|$$

Donde S y T son los conjuntos independiente maximal y absorbente más grande de la digráfica.

2.3. ALGUNOS RESULTADOS DE LA TEORIA DE NUCLEOS

Una de las aplicaciones del concepto de núcleo dentro de las técnicas del análisis de sistemas es emplearlo para obtener un conjunto reducido de alternativas. Pensando en la importancia del mismo es interesante revisar algunos teoremas respecto a la existencia y unicidad de éste.

De las condiciones que debe satisfacer un conjunto de nodos para ser un núcleo el teorema siguiente expresa bajo que supuestos la condición de independencia resulta suficiente para caracterizarlo.

TEOREMA 1. Sea $D = [\ X,\ F\ ]$ una digráfica simétrica (es decir $(\ u,\ v\ ) \in F$ implica $(\ v,\ u\ ) \in F$). Entonces D posee un núcleo. De hecho un subconjunto N de F es un núcleo si y sólo si N es un conjunto independiente maximal.

Demostración. Bajo la suposición de que N es un conjunto independiente maximal y tomando un elemento $u \in X-N$, la propiedad de simétria de la digráfica permite consecuentemente hablar de la existencia de una uN - *flecha* y una Nu - *flecha*, por lo que N además de ser un conjunto independiente maximal tiene la propiedad de ser un conjunto absorvente cumpliendo así ser un núcleo de D.

Si N satisface la condición de ser un núcleo de D, para verificar si éste es independiente maximal, pensemos en la existencia de un conjunto independiente N^o tal que $N \subset N^o$. Sea $u \in N^o - N$, al ser N^o independiente no hay una uN^o- *flecha* en D, en particular no existe una uN - *flecha* con lo cual llegamos a que el conjunto N bajo estas condiciones no es absorvente. Por lo tanto no puede existir un conjunto independiente más grande que N.

Para ejemplificar este teorema podemos considerar la gráfica de la figura 2.1.1, la cual es simétrica en el sentido de que la línea que une en particular los nodos u y v indica que u está relacinado con v y así mismo v está relacionado con u, bajo la relación de que una u otra de las señales que éstos representan puede ser recibida como la otra. Dicha gráfica tiene un núcleo representado por el conjunto independiente maximal $\{ u, w, x \}$.

Siguiendo este orden de ideas observamos que cierto tipo de ciclos contenidos en una digráfica han servido para caracterizar a las digráficas que tienen núcleo.

TEOREMA 2. [Von Neumann y Morgenstern, 1944,].
Si $D = [X, F]$ es una digráfica sin ciclos dirigidos entonces D tiene un núcleo. Más aún, el núcleo es único.

Demostración. Por inducción sobre $| X | = n$.

Para $n = 2$, sea $X = \{ u, v \}$, si $\{ (u, v) \} = F$, entonces $N = \{ v \}$ es el núcleo de D, ahora bien si $\{ (v,u) \} = F$, el núcleo de D sería $N = \{ u \}$, y si $F = \emptyset$, entonces $N = \{ u, v \}$ sería el núcleo de D, para todos estos casos el núcleo de la digráfica es único.

Hipótesis de inducción: supongamos cierto el resultado para digráficas sin ciclos dirigidos y con $| X | \leq n - 1$.

Es usual referirse a una digráfica sin ciclos como una digráfica acíclica. Consideremos una digráfica acíclica D tal que $| X | = n$. Sea $No = \{ v \in X \ / \ (v, x) \notin F$, para todo $x \in (X - \{ v \}) \}$, $No \neq \emptyset$ ya que D no tiene ciclos dirigidos. Sea $Bo = \{v \in F \ / \$ existe alguna vNo-*flecha* en $D\}$.

Ahora bien con el conjunto de nodos $X - (No \cup Bo)$ podemos formar la subdigráfica inducida

$$D^{0} = D [X - (No \cup Bo)],$$

como $No \neq \emptyset$, $| X | \leq n - 1$, por hipótesis de inducción D tiene un único núcleo N^{1} y $N = No \cup N^{1}$ es un núcleo de D.

Una forma de demostrar la unicidad del núcleo N es emplear la suposición de que existe otro núcleo N_1 en la digráfica D. Al ser No un núcleo de D, puede darse la siguiente contención $No \subseteq N_1$. Ahora bien, por definición de D^{0}, el conjunto $N_1 - No$ es un núcleo de D^{0}, y así por hipótesis de inducción $N_1 - No = N^{1}$. Por lo tanto $N_1 = N$.

La existencia de un núcleo en una gráfica sin bucles no presenta dificultades; ya que la familia de conjuntos independientes es finita y por lo tanto admite conjuntos maximales. No sucede lo mismo en una digráfica, ya que basta considerar un circuito de longitud tres para verificar la existencia de digráficas que no admiten un núcleo. Veamos un resultado al respecto.

TEOREMA 3. [Richardson, 1946, 1953]. Si $D = [X, U]$ es una digráfica sin ciclos dirigidos (es decir sin circuitos) de longitud impar, entonces D tiene núcleo.

Nota: La demostración más breve de este teorema puede encontarse en "Seminúcleos de una digráfica" de V. Neumann Lara (*An. Inst. Mat.*, Vol. IV (1971), UNAM).

Finalmente, se probara un resultado en el cual se afirma que: El número de soluciones (co-núcleos) de una digráfica es igual al número de soluciones (co-núcleos) de su digráfica de líneas. Esto mostrará que es posible construir la solución de una digráfica de líneas por medio de la solución de su digráfica original, e inversamente.

Imagínese una red vial formada por rutas que unen varias ciudades de un país. Es fácil describir esta red mediante un gráfica cuyos nodos sean las ciudades y cuyos arcos sean los tramos de camino que las unen. Supóngase además que cada tramo de camino tiene asignado un equipo de personas encargadas de reparar los desperfectos y deterioros debidos al tránsito. Entonces es plausible la necesidad de una gráfica que describa la interrelación de estos equipos de mantenimiento. Esta nueva gráfica tendrá un nodo por cada tramo de ruta; es decir, por cada arco de la gráfica original. Dichos nodos estarán conectados por líneas si los correspondientes caminos concurren en uno de sus extremos en una misma ciudad. Basándose en este ejemplo se puede dar una definición similar en el caso de tener una digráfica.

Digráfica de Líneas. La *digráfica de líneas* de $D = [\ X,\ F\ ]$ es una digráfica $L\ [\ D\ ] = (\ F, B\ )$; donde el conjunto de nodos de ésta es el conjunto de flechas de D, y para ciertas $h,\ k \in F$, se tiene que $hk \in B$ si y sólo si las correspondientes flechas h, k, inducen una trayectoria en D, es decir, el nodo terminal de h es el nodo inicial de k.

En adelante se denotará la flecha $h = uv$ en D y el nodo h en $L\ [\ D\ ]$ por el mismo símbolo. Si H es un conjunto de flechas de D, éste es a su vez un conjunto de nodos de $L[D]$. En el caso en el que se desee hacer énfasis en H como el conjunto de nodos en $L\ [\ D\ ]$ se utilizara el símbolo H_L.

Solución o co-núcleo. Un subconjunto S de X es una solución (o un *co-núcleo*) de $D = [X, F]$ si S es independiente en D y si es dominante en D.

Así bien, podemos observar que el concepto en abstracto de núcleo está muy relacionado en la práctica a la solución de una digráfica, en términos de la definición del *co-núcleo*.

Sea S el sistema de todas las soluciones (co-núcleos) de una digráfica $D[X, F]$ y sea $\mathscr{L}$ el sistema de todas las soluciones de $L[D]$.

Definace *el mapeo* $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(F)$ como sigue:

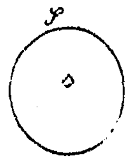
Si $Z \subseteq X$, entonces $f(Z)$ es el conjunto de todas las flechas tales que su nodo inicial de éstas se encuentra en Z.

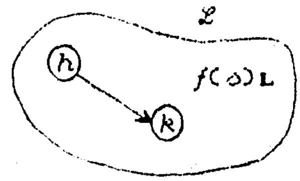
LEMA 1. Si $\delta \in S$, entonces $f(\delta)_L \in \mathscr{L}$.

Demostración. Con el objetivo de probar que $f(\delta)$ es independiente, pensemos que $hk \in B$, entonces

$$\{h, k\} \subseteq f(\delta)_L,$$

ya que si ocurriera lo contrario, se tendría que $h \in \delta \times \delta$, esto contradice el hecho de que δ es independiente. Ahora bien, sea k un nodo de $L(D)$ y $k \in F_L - F(\delta)_L$. Por la definición de $f(\delta)_L$ el nodo inicial de k en D no puede pertenecer a δ.





$D = (X, F)$ $\qquad$ $L(D) = (F, B)$

Dada la dominancia de s en D es claro así que existe una flecha h en D con su nodo inicial en s, el nodo terminal de ésta es idéntico al nodo inicial de k. Por lo tanto $h \in f(s)_L$ y $hk \in B$. Puede así concluirse que $f(s)_L \in \mathcal{L}$.

LEMA 2. El mapeo $f : S \to \mathcal{L}$ es inyectivo.

Demostración. Sean $r, s \in S$ y $r \neq s$, puede así suponerse que $r - s \neq \emptyset$, es decir podemos considerar $v \in r - s$. Ya que s es una solución de D; existe un nodo $u \in s$ tal que $uv \in F$. Así $uv \in f(s)_L$. La independencia de r en D implica que $u \notin r$. Por lo tanto $uv \notin f(r)_L$ con lo cual se concluye la prueba del lema.

Definace ahora un mapeo g: $\mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(X)$ como sigue: Si $H \subseteq F$, entonces $g(H) = X(H) \cup Y(H)$, donde $X(H)$ es el conjunto formado por todos los nodos de las flechas de H y $Y(H)$ es el conjunto de todos los nodos receptores en D tales que son adyacentes a los nodos de $X(H)$.

LEMA 3. Si $H_L \in \mathscr{L}$, entonces $g(H) \in S$.

Demostración. Para probar la independencia de $g(H)$, consideraremos que u, $v \in g(H)$, u, $v \in X$ y los tres casos siguientes:

(1) u, $v \in X(H)$
(2) $u \in X(H)$, $v \in Y(H)$
(3) $u \in Y(H)$.

Caso (1). En este caso u es el nodo inicial de alguna flecha h y v es el nodo inicial de alguna flecha k; h, $k \in H_L$. si $h = uv$, entonces hk existiría como flecha, lo cual llevaría a una contradicción con el hecho de que H_L es independiente.

Si $h = uw \neq uv = d$, entonces la independencia de H_L implicaría que $d \notin H_L$ y de la propiedad de dominancia de H_L se tiene que existe $bd \in B$. El nodo terminal de b y el nodo inicial de h son idénticos con u; de aquí se sigue que $bh \in B$, lo cual lleva a una contradicción a la propiedad de independencia de H_L.

En los casos (2) y (3) es inmediato distinguir de las definiciones de $X(H)$ y $Y(H)$ que $uv \notin F$. Ahora bien para probar la dominancia de la función $g(H)$; consideraremos $v \in X - g(H) = X - X(H) - Y(H)$. Para el nodo v se tendrán dos posibilidades:

(a). v es un nodo inicial de alguna flecha
(b). v no es un nodo inicial de alguna flecha pero es adyacente con alguno de los nodos de $X(H)$.

Del caso (a) se tiene que $vt \in F$. Dado que $v \notin X(H)$, se obtiene que $vt \notin H_L$. La dominancia de H_L en $L(D)$ implica la existencia $uv \in H_L$; así $u \in X(H)$.

En el caso (b) la prueba de la dominancia de $g(H)$ se sigue de la definición de $X(H)$ y $Y(H)$ en forma inmediata.

LEMA 4. El mapeo $g : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ es inyectivo.

Demostración. Considerando S_L, $T_L \in \mathcal{L}$, $S_L \neq T_L$; puede suponerse que $S_L - T_L \neq \emptyset$, $h \in S_L - T_L$. Denotando por v el nodo inicial de h; se tiene que $v \in g(S)$, puesto que v es el nodo inicial de una flecha de S. Como $h \notin T_L$ y dado que T_L es un conjunto dominante en $L(D)$, entonces existe una flecha k een D tal que $k \in T_L$ y $kh \in B$.

Denotando por u el nodo inicial de k; el nodo terminal de k sería v. Al pertenecer el nodo k a T_L, se tiene que $u \in g(T)$ y la independencia de $g(H)$ en D implica que $v \notin g(T)$. En conclusión se tiene que g es inyectiva.

TEOREMA 4. El número de soluciones de una digráfica es igual al número de soluciones de su digráfica de líneas.

Demostración. De acuerdo a los lemas (2) y (4) se obtiene que; $card\ \mathcal{S} \leq card\ \mathcal{L} \leq card\ \mathcal{S}$, lo cual implica

$$card\ \mathcal{S} = card\ \mathcal{L}$$

2.4 ALGORITMO PARA HALLAR EL NUCLEO DE UNA DIGRAFICA.

Después de haber revizado algunos de los resultados de la teoría de núcleos veremos, a continuación, un procedimiento sencillo para determinar el núcleo de una digráfica.

Este algoritmo hace uso de una matriz que he denominado *matriz de incidencia positiva* $A\ (a_{ij})$ y se basa, así mismo, en cálculos que involucran al in-grado y ex-grado de un nodo.

Procedimiento:

Paso 1. Construir a partir de la relación de preferencia la digráfica de preferencias $D_p = [X, F]$.

Paso 2. Construir la matriz de adyacencias positivas $A_d\ (a_{ij})$ a partir de D_p, donde d = 1, 2, ... y

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad ij \in F \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Paso 3. Calcular

$$\delta^{+}(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{para } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$\delta^{-}(j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad \text{para } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$\delta^{+}(i)$ y $\delta^{-}(j)$ corresponderán a las etiquetas de los nodos i y j por renglón y columna respectivamente.

Paso 4. Hallar un nodo k tal que

$$\delta^{+}(k) \leq \delta^{+}(v) \text{ y } \delta^{-}(k) \geq \delta^{-}(v)$$

para todo $v \neq k$, hacer $N_m = \{ k \}$, para m = 1, 2, .. e ir al paso 6. En el caso de no hallarse un nodo con estas características ir al paso 5.

Paso 5. Elegir un nodo t tal que

$$\delta^{+}(t) \geq \delta^{+}(k) \text{ y } \delta^{-}(k) \geq \delta^{-}(t) \geq \delta^{-}(v)$$

para todo $v \neq k, t$. Hacer $N_m = \{t\}$ e ir al paso 6.

Paso 6. Eliminar de la matriz A_1 (a_{ij}) el nodo k (o t según el caso) y todos aquellos nodos cuya entrada $a_{ik} = 1$ (o bien, $a_{it} = 1$) para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea A_{d+1} la matriz resultante al hacer esta operación de eliminación, e ir al paso 7.

Paso 7. Si se han examinado todos los nodos hasta obtener una matriz nula, *terminar*, el conjunto $N = \cup N_m \cup N_A$ es un núcleo, donde N_A es el conjunto de nodos representados en la matriz nula. En otro caso, considérese A_{d+1}, e ir al paso 3.

EJEMPLO: Considerése la digráfica de la figura 2.4.1.

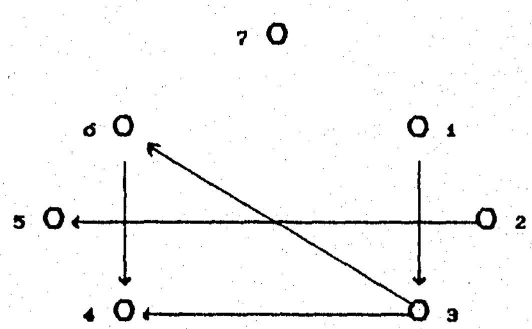


FIG. 2.4.1

$$
A_1\,(a_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

FIG. (a)

Para ilustrar el algoritmo, empezaremos por la figura (a) en la que se representa la matriz de adyacencias positivas A_1. En la figura (b) se muestran las etiquetas de cada nodo (la etiqueta del nodo i a la derecha de la fila i y la etiqueta de j abajo de la columna j).

$$
A_1: \quad
\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2^{*} \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 2^{*} & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

FIG. (b)

En esta misma figura se han marcado con un (*) las etiquetas del nodo 4, el cual satisface la propiedad del *paso* 4, por lo tanto, $N_1 = \{ 4 \}$ y se eliminará el conjunto de nodos $\{ 3, 6 \}$.

En la figura (c) se muestra la matriz reducida A_2 y las nuevas etiquetas.

$$A_2: \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccc}1&2&5&7\end{array} & \\ \begin{array}{c}1\\2\\5\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}0\\1^*\\0\\0\end{array} \\ & \begin{array}{cccc}0&0&1^*&0\end{array} & \end{array}$$

FIG. (c)

Ahora $N_2 = \{ 5 \}$ y se elimina el nodo 2.

$$A_3: \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc}1&7\end{array} & \\ \begin{array}{c}1\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}0^*\\0\end{array} \\ & \begin{array}{cc}0^*&0\end{array} & \end{array}$$

$$A_4: \quad \begin{array}{ccc} & 7 & \\ 7 & \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & 0^* \\ & 0^* & \end{array}$$

FIG. (d)

Finalmente en la figura (d) se muestran las dos últimas iteraciones del algoritmo, para el ejemplo, en las cuales $N_3 = \{ 1 \}$, $N_4 = \{ 7 \}$ y el conjunto de nodos a eliminar es vacío.

Así, $N = \underset{m}{\cup} N_m = \{ 1, 4, 5, 7 \}$ es un núcleo de la digráfica D de la figura 2.4.1, el cual se ilustra en la figura 2.4.2 mediante los nodos obscuros.

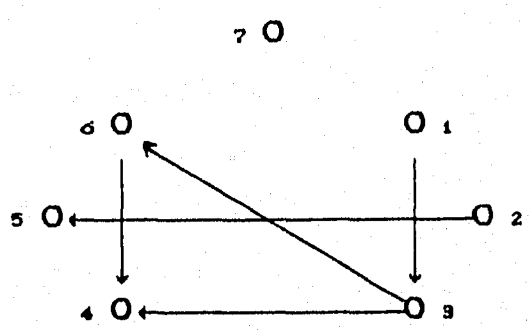


FIG. 2.4.2

Observación: En el caso en que la matriz reducida del *paso* 6, resulta ser una matriz nula, es decir; en la que todas sus entradas son cero, los nodos en ésta pertenecerán al núcleo.

En la figura (d) la matriz A_3 es una matriz nula, en este caso podemos considerar a $N = N_1 \cup N_2 \cup \{ 5, 7\}$ como el núcleo de la digráfica de referencia.

CAPITULO III

3. SISTEMAS Y NUCLEOS

En este capítulo hacemos referencia a las diversas formas en las que los sistemas y el núcleo de una digráfica se relacionan.

3.1 LA TECNICA ELECTRA 1

Se ha visto que el estudio de las gráficas y digráficas es una teoría de relaciones, donde las gráficas simples representan relaciones simétricas y las digráficas relaciones asimétricas.

Es interesante ver como los tomadores de decisiones se han apoyado en el uso de técnicas del análisis de sistemas que involucran el uso de la teoría de gráficas, tal es el caso de la técnica *ELECTRA* 1, (*Elimination Et Choix Traduisant la Realité*: Eliminación y Selección Traduciendo la Realidad).

La técnica fue inicialmente sugerida por Benayoun Roy y Sussman (1966). En 1971 Roy presentó una versión mejorada de este método.

En el algoritmo ELECTRA 1 se emplea el concepto de co-núcleo para hallar un conjunto de alternativas preferidas.

Alternativa. Una alternativa es una solución única para una situación dada.

La importancia de generar alternativas (medios), radica en que éstas pueden ayudarnos, entre otros usos, a construir la mejor manera de conducir un proceso, contribuyendo al mejor desempeño de un sistema dado.

Así bien, estamos enfrentados virtualmente con alternativas en todo lo que hacemos, desde seleccionar el medio de transporte que usamos para ir al trabajo cada día hasta decidir cuál de todas las posibilidades que imaginamos como soluciones de un problema es la mejor.

Igualmente, en la ingeniería, hay siempre varias maneras de realizar una tarea dada, y es necesario ser capaz de comparar racionalmente, de modo que pueda seleccionarse la mejor de las alternativas.

Es así que el co-núcleo de una digráfica puede ser empleado como una herramienta que nos ayuda ha identificar cuales son las alternativas y llegar a seleccionar la mejor de una manera sencilla.

Veamos ahora como el co-núcleo, es decir el inverso del núcleo, se aplica en la técnica ELECTRA 1.

Esencialmente en el método ELECTRA 1, se hace una comparación entre dos soluciones, (o alternativas), para analizar diversos cursos de acción cuando existe más de una manera de evaluarlos. Es aquí donde podemos apreciar cierto vinculo entre la idea que se manejo en el problema planteado por Von Neumann en Teoría de Juegos y el desarrollo del algoritmo ELECTRA 1.

Así bien, la comparación se basa en una relación de dominancia, ésta es una relación *binaria R*, la cual captura las preferencias de los tomadores de decisiones, mismas que puden ser explicadas por la información con que se cuenta en el momento en que se establecen.

Así, para ser capases de evaluar diferentes métodos, objetivos, situaciones u opciones, es necesario tener un *criterio de evaluación*, por ejemplo, cuando viajamos hacia el trabajo, podríamos pensar en tomar la ruta que fuera la más rápida, la más barata o la más pintoresca y dependiendo del criterio que se use podrá seleccionarse una ruta diferente cada vez.

El criterio de evaluación puede usarse como base para juzgar las alternativas y así dar una respuesta a cuál de ellas es la mejor.

Fundamentalmente en el método ELECTRA 1, se hace un registro de preferencias para un subconjunto de alternativas *no-dominadas*.

Así bien, la relación *R* puede ser entendida como una *relación de rango superior*, (haciendo referencia a lo expuesto sobre funciones de preferencia), la cual es construida a partir de los valores de opinión suministrados por los decisores.

Su importancia estriba en que la construcción del conjunto de alternativas *no-dominadas* es determinado por la definición de ésta.

DEFINICION. *Relación de dominancia (o de sobreclasificación).*

$u_i \; R \; v_j$ indica que u_i está sobreclasificado con respecto a v_j, o que u_i *domina a* v_j.

Sean c_1, ..., c_n los criterios de evaluación: Rentabilidad, necesidades de inversión, ecológico, etc.

Sea e_{ij} la evaluación, (obtenida de estudios objetivos y/o de la opinión de expertos), para cada solución i bajo el criterio j.

Sean w_1, ..., w_n los pesos asociados a cada uno de los criterios (no siempre éstos pueden ser precisados por una cifra, a veces son especificados mediante una escala cualitativa).

Dado un conjunto A de soluciones a considerar, para un problema dado, se dice que dos elementos u_i y v_j de A están relacionados en el sentido de ELECTRA, es decir;

$$u_i \; R \; v_j, \text{ si existen } p, \; q \in [0, 1] \text{ tal que}$$

$$c\,(u_i,\; v_j) \geq p \quad y \quad d\,(u_i,\; v_j) \geq q$$

Donde se acepta cierto grado (o índice) de acuerdo o concordancia entre las diversas soluciones, bajo los criterios establecidos:

$$c\,(u_i,\; v_j) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho_{ij}\; w_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k}$$

aquí ρ_{ij} es un parámetro de impacto, el cual se define como:

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad e_{ik} \geq e_{jk} \\ 0 & \text{si} \quad e_{jk} \geq e_{ik} \end{cases}$$

Y se acepta cierto grado (o índice) de diserción o discordancia **d** (u_i, v_j) en la relación de dominancia:

$$\mathbf{d}\,(u_i, v_j) = \frac{\max\ [\ e_{jk} - e_{ik}\ ]}{d} \qquad \text{para } i \neq j$$

donde:

$\max\ [\ e_{jk} - e_{ik}\ ]$, es el máximo intervalo de las evaluaciones en que no hubo acuerdo, es decir, $e_{jk} > e_{ik}$, y d es el rango máximo de las escalas asociadas a los criterios de evaluación.

Esto se ha definido con el fin de poder hacer la comparación de la inconformidad causada al ir desde el nivel x_1 al nivel x_2 a través del criterio c_1 y la inconformidad de ir desde el nivel x_1 al nivel x_3 a través del criterio c_2.

Así mismo, la elección del número de puntos que se asignan a cada criterio depende del nivel de importancia que se le de, uno podría definir una escala tal que no rebasara los 100 puntos, aunque podría trabajarse igual con cualquier otro número.

Tanto los índices de concordancia como de discordancia pueden resumirse en un arreglo matricial C [c (u_i, v_j)] y D [d (u_i, v_j)] respectivamente, las cuales representan que tanto acuerdo o desacuerdo hubo en las evaluaciones de las alternativas de solución.

Los valores p y q son conocidos como los parámetros de concordancia y discordancia respectivamente. Un perfecto resultado para la concordancia es 1 y un fatal resultado para la discordancia es 1.

En la ejecución del método ELECTRA 1, no se requiere que la relación sea transitiva, esto es, dadas tres alternativas, (o acciones diferentes), u, v, y w; el hecho de que $u\ R\ v$ y $v\ R\ w$, no necesariamente implica que $u\ R\ w$.

El método reconoce que la razón por la cual uno decide que $u\ R\ v$ así como la razón por la que $v\ R\ w$ puede ser muy distinta a la que lleve a relacionar u con w.

De acuerdo a esta relación de dominancia se construye una *Digráfica Compuesta* G_c (o *Digráfica ELECTRA*). Las digráficas compuestas son definidas, predominantemente, por los índices de concordancia y discordancia de las flechas permitidas para pertenecer a la digráfica.

3.1.1. DEFINICION DE LA DIGRAFICA ELECTRA

La siguiente definición es referida a Roy [1971].

Supongamos:

$\aleph$ una *relación de equivalencia* definida por $u \aleph v$ si, y sólo si, existe a través de R un circuito que pasa por u y v.

B denota el *conjunto de clases* en la equivalencia $\aleph$

Rc denota la relación definida sobre B y se verifica para la pareja de clases (b_1, b_2) si, y sólo si, existen $u \in b_1$ y $v \in b_2$ *tales que* $u\ R\ v$; donde R *es* acíclica.

Nota: $B = X$ y $Rc = R$

DEFINICION. Gc es la digráfica acíclica asociada con la relación Rc (e. d. existe una trayectoria dirigida desde el nodo u al v, si y sólo si, $u\ R\ v$).

Con la definición de Rc y la construcción de Gc podemos determinar un co-núcleo.

El co-núcleo contendrá los nodos que representan aquellas alternativas que son preferidas bajo las bases de Rc. Los nodos restantes (es decir, los que no se encuentran en el co-núcleo) pueden ser eliminados a partir de ciertas consideraciones.

Nota: Generalmente, la obtención del co-núcleo es insensible a la pareja de valores (p, q).

3.2. UN EJEMPLO NUMERICO

El siguiente ejemplo es una adaptación de Roy (1971).

Se supone en este ejemplo que nuestro decisor es un hombre que necesita elegir un automóvil para su familia. Existen cuatro criterios que se le proponen para hacer la elección de su automóvil: precio, comodidad, velocidad y belleza. El criterio y las escalas o niveles que él establece son presentadas en la tabla 3.2.1.

CRITERIO	NIVELES	CLAVE
i = 1 Precio	menos de N$ 27 000	25
	desde 28 000 a 36 000	30
	desde 37 000 a 39 000	35
	desde 40 000 a 42 000	40
	desde 43 000 a 47 000	45
i = 2 Comodidad	Alta	A
	Media	M
	Baja	B
i = 3 Velocidad	Rápido	R
	Lento	L
i = 4 Belleza	Hermoso	H
	Aceptable	C

TABLA 3.2.1

El más importante de los criterios, para el decisor, es el precio, seguido por la comodidad y siendo menos importantes los criterios de la velocidad y la belleza. Considerando también que él limita su elección a los siete modelos que se describen en la tabla 3.2.2.

TIPO	1	2	3	4	5	6	7
PRECIO	45	40	40	35	35	35	25
COMODIDAD	A	A	M	M	M	B	B
VELOCIDAD	R	L	R	R	L	R	L
BELLEZA	H	H	H	C	H	H	C

TABLA 3.2.2

3.2.1. INDICE DE CONCORDANCIA

El decisor ha asignado, los siguientes pesos, a cada uno de los criterios.

Precio: 5
Comodidad: 3
Velocidad: 1
Belleza: 1
Suma de los pesos = 10

El cálculo del índice de concordancia es ilustrado para los modelos 2 y 4 , y para los modelos 6 y 1. Notemos que los empates reciben una mitad del peso:

$$c\ (2,\ 4) = \frac{1}{10}\ (0 + 3 + 0 + 1) = 0.4$$

$$c\ (6,\ 1) = \frac{1}{10}\ (5 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 0.6$$

El conjunto completo, de los índices de concordancia, es representado por la matriz C de renglones i y columnas j, donde tanto i como j representan un modelo de automóvil.

$$C\ (i,\ j) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 0.3 & 0.4 & 0.45 & 0.45 & 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & - & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.35 & 0.45 \\ 0.6 & 0.4 & - & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.55 & 0.6 & 0.7 & - & 0.5 & 0.6 & 0.4 \\ 0.55 & 0.6 & 0.7 & 0.5 & - & 0.7 & 0.45 \\ 0.6 & 0.65 & 0.6 & 0.4 & 0.3 & - & - \\ 0.5 & 0.55 & 0.5 & 0.6 & 0.55 & - & - \end{bmatrix} \end{array}$$

3.2.2. INDICE DE DISCORDANCIA

El cirterio se basará en los siguientes intervalos de escala máxima:

Precio: 100

Comodidad: 60

Velocidad: 50

Belleza: 40

Puede ahora calcularse el valor de cada nivel para cada uno de los criterios. Para el criterio del precio, existen cinco niveles: por lo tanto, cada nivel es evaluado por $\frac{100}{2}$ = 20 puntos.

Los niveles para la comodidad y la belleza son también evaluados en 20 puntos. Los niveles para el criterio de la velocidad son evaluados en 25 puntos.

El índice de discordancia es calculado para los modelos 2 y 6, y para los modelos 7 y 1. El coeficiente de discordancia, para cada uno de los criterios, donde $i < j$ se calculara primero. En seguida el máximo de estos coeficientes se seleccionará como el índice de discordancia. Los índices de discordancia para los modelos mencionados son:

$$d\,(2,\ 6)_{precio} = \frac{80 - 60}{100} = \frac{20}{100} = 0.2 \qquad (j > i)$$

$$d\,(2,\ 6)_{velocidad} = \frac{50 - 25}{100} = \frac{25}{100} = 0.25 \qquad (j > i)$$

$$d\,(2,\ 6) = \frac{\text{máximo intervalo donde } i < j}{100} = 0.25$$

$$d\,(7,\ 1)_{comodidad} = \frac{60 - 20}{100} = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$d\,(7,\ 1)_{velocidad} = \frac{50 - 25}{100} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$d\,(7,\ 1)_{belleza} = \frac{40 - 20}{100} = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$d\,(7,\ 1) = \frac{\text{máximo intervalo donde } i < j}{100} = 0.4$$

El conjunto completo de los índices es representado por la matriz **D** con renglones i y columnas j:

$$\mathbf{D}(i,j) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.8 \\ 0.25 & - & 0.25 & 0.25 & 0.2 & 0.25 & 0.6 \\ 0.2 & 0.25 & - & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.25 & 0.2 & - & 0.25 & 0.2 & 0.4 \\ 0.25 & 0.2 & 0.25 & 0.25 & - & 0.25 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.25 & - & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.25 & 0.25 & 0.2 & 0.25 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

Supóngase que el decisor especifica la condición en cuanto a una concordancia mínima de 0.6 y una discordancia máxima de 0.20; que es, $\mathbf{c}(i, j) \geq 0.6$ y $\mathbf{d}(i, j) \leq 0.2$.

Con estas especificaciones puede construirse la digráfica Gc. Los arcos de Gc son determinadas como se específico anteriormente por los índices que satisfacen simultáneamente los requerimientos $p \geq 0.6$ y $q \leq 0.2$. Estos índices son aquellos que corresponden a las parejas:

(3, 1), (4, 3), (4, 6), (5, 2), (6, 3)

y la Digráfica Electra resultante se ilustra en la figura 3.2.1.

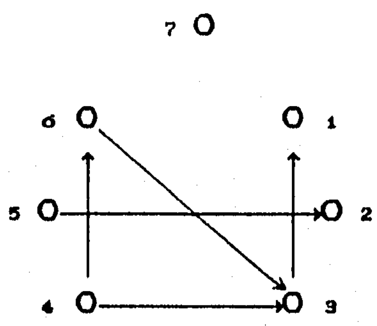


FIG. 3.2.1

Analicemos un poco más la forma en la que se eligen las flechas de la Digráfica Electra.

Si para cada nodo $u \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ formamos las "estrellas de u", es decir; si consideramos la digráfica formada por todas aquellas flechas que salen de u y que satisfacen la condición $p \geq 0.6$ y por otro lado consideramos la digráfica formada por las flechas que salen de u y que satisfacen la condición $q \leq 0.2$, podemos observar que el conjunto de flechas comunes entre ambas estrellas es un subconjunto de las flechas pertenecientes a la Digráfica Electra y así también se tiene que la unión de estos subconjuntos conforman el conjunto F de ésta.

Así bien, de manera natural resalta el uso de los conjuntos dominantes y basta sólo añadir la condición de independencia para obtener un co-núcleo en la Digráfica Electra.

Para el caso de la digráfica de la figura 3.2.1 se tiene que ésta posee un núcleo, en virtud del teorema 2 de la sección 2.3.

Considérese la matriz de adyacencia positiva Aac asociada a la digráfica de la figura 3.2.1.

$$
Aac = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \end{array}
$$

Consideremos ahora su transpuesta Aac^t:

$$
Aac^t = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \end{array}
$$

Como se vio en la sección 2.4, la digráfica asociada a Aac^t tiene un núcleo $N = \{ 1, 4, 5, 7 \}$. Es así que, la digráfica de la figura 2.4.1 resulta ser la digráfica inversa de la digráfica de la figura 3.2.1, es decir, han sido construidas a partir de relaciones inversas.

El conjunto de nodos $\{ 1, 4, 5, 7 \}$ constituye así mismo un co-núcleo para la digráfica de la figura 3.2.1.

Notese que los nodos 2, 3 y 6 son dominados por algunos de los elementos en el conjunto especificado; es decir, el nodo 4 domina a los nodos 3 y 6, y el nodo 5 domina al nodo 2. Por lo tanto, el conjunto se reduce a cuatro nodos en vez de siete. Sin embargo, la solución anterior o co-núcleo puede estar sujeta a un análisis de sensibilidad al cambiar los valores de p y q y se pueden notar algunos efectos sobre la solución actual.

Ovbservación. Al trabajar con el núcleo de una digráfica $D = [X, F]$, nosotros podemos obtener el co-núcleo de $D_{INV} = [X, F_{INV}]$, haciendo uso de la transpuesta de la matriz de adyacencia positiva $A\ (a_{ij})$ asociada a D_{INV} en el desarrollo del algoritmo para hallar un núcleo.

Consideraremos ahora la digráfica de Líneas $L\ (G_c)$ asociada a la Digráfica Electra (ver figura 3.2.2).

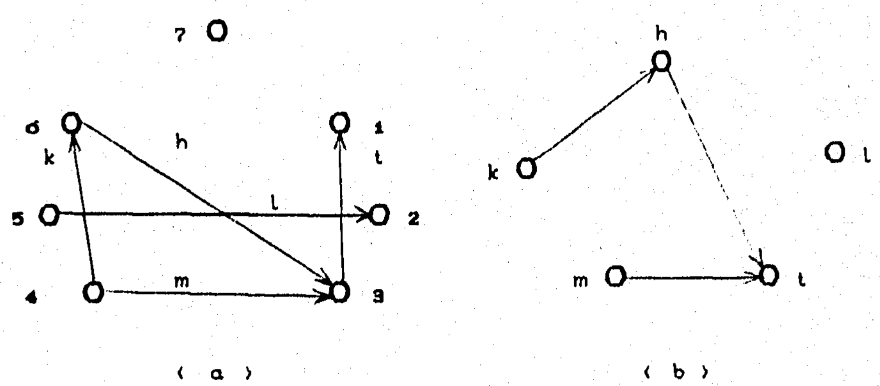


FIG. 3.2.2 (a) Digráfica Gc, (b) Digráfica L(Gc).

'De la digráfica de líneas $L\ (Gc)$ podemos notar que la manera en que se relacionarón los nodos 5 y 2 no está ligada a la manera en que se dio la dominancia entre el conjunto de nodos $\{ 1, 3, 4, 6 \}$.

Podemos pensar así, que la base de argumentos para las dominancias permitidas fueron k, l y m, las cuales conforman un co-núcleo de $L\ (Gc)$.

Como se menciono anteriormente, la solución o co-núcleo está sujeta a un análisis de sensibilidad al cambiar los valores de p y q. Si nosotros observamos la digráfica de la figura 3.2.2.(a), los arcos permitidos fueron h, k, l, m y t.

Consideremos ahora la digráfica complemento de Gc, $\overline{Gc}$ (ver figura 3.2.3). La digráfica $\overline{Gc}$ contiene todas quellas flechas que no fueron permitidas, ya que no satisfacen simultáneamente la condición de concordancia $p \geq 0.6$ y la condición de discordancia $q \leq 0.2$.

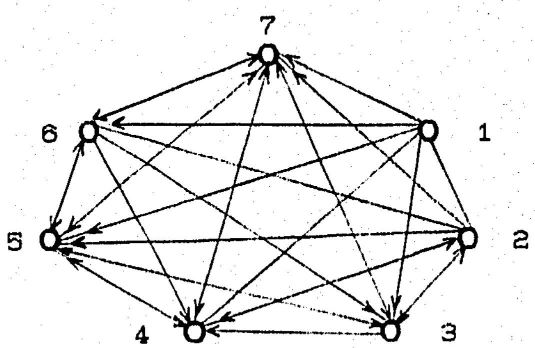


FIG. 3.2.3

al cambiar el valor de p o q o ambos bastara hallar las subdigráficas inducidas por cada nodo de $\overline{G}c$ (estrellas) para estos nuevos valores y ver que arcos se modifican en la digráfica Gc inicial y así mismo como cambia la solución de Gc.

3.3 LA TECNICA T.K.J.

En la sección 3.1 se presentaron varios aspectos característicos de la técnica ELECTRA I. En esta sección se hará una presentación de otra de las técnicas del Análisis de Sistemas conocida como la técnica TKJ.

Dicha técnica fue inventada por el antropólogo japonés Dr. Jiro Kawakita, por lo que esta técnica " *Team Kawakita Jiro* " se designa por sus iniciales.

La técnica TKJ consiste en reunir a un grupo de personas interesadas en analizar una situación problematica específica, mediante un proceso ordenado, y llegar a sintetizar por el consenso de ellos, las causas que la están produciendo, el proceso general es realizado en grupo. Esta técnica se ha caracterizado por ser una herramienta útil para la identificación y solución de problemas.

3.3.1. ETAPAS FUNDAMENTALES DE LA TECNICA

1.- Formulación del problema
2.- Identificación y diseño de soluciones
3.- Acciones de implementación y control

Procedimiento:

1. El grupo se integra con la participación de al menos un representante de cada grupo de personas involucradas en el problema.

2. Ambiente:

(a) - Local de ambiente tranquilo

(b) - Mesas Circulares

(c) - Explicación de las reglas de la técnica.

3. Material:

(a) - Tarjetas en blanco

(b) - Anotar en las tarjetas "*hechos*" recientes, reales, relevantes, concretos y vivenciales; nunca juicios.

(c) - Deben contener la fecha y lugar en el que se realizó el suceso y nombre de las personas involucradas.

4. Las tarjetas se revuelven y se intercambian entre los miembros del grupo, no debiendo tocarle a un participante alguna de sus propias tarjetas. Pueden hacerse aclaraciones sobre el contenido de la tarjeta, acudiendo a la persona que la escribió, para esto la persona escribira las iniciales de su nombre en sus tarjetas.

5. Cada participante lee en voz alta una de sus tarjetas y la coloca en el centro de la mesa.

6. Colocar en un sobre aquellas que contienen hechos similares cada conjunto de tarjetas, enseguida:

(a) - Repartir los sobres

(b) - Analizar el contenido del sobre que le haya correspondido.

(c) - Dar un orden lógico causal a las tarjetas y proponer una síntesis de éstas expresadas en unas cuantas palabras.

(d) - La síntesis es el punto de partida de un debate que se agota hasta que el grupo en conjunto obtenga por consenso una relación lógica causal de las tarjetas y adopte una síntesis definitiva.

(e) - El titulo del nuevo sobre debera ser el hecho de esencia común de los hechos presentados en las tarjetas agrupadas.

7. - Una vez que los sobres han sido titulados se reparten y se repiten los pasos 4, 5 y 6, hasta que queden solamente dos o tres agrupamientos titulados. Estos últimos representan la esencia del problema considerado.

Este procedimiento puede ser ilustrado mediante un *diagrama de árbol* como el construido en la figura 3.3.1.

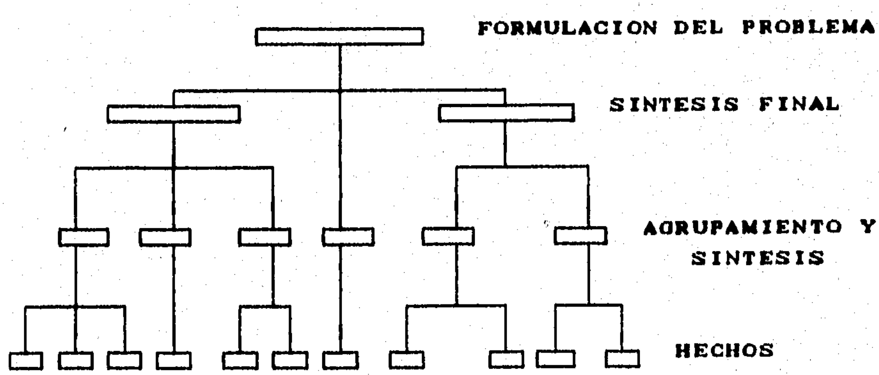


FIG. 3.3.1

8. Cada participante analizará el diagrama de árbol de una manera individual y dará su interpretación. Una vez que entre todo el grupo ha meditado y discutido el diagrama se pondrá el titulo general que identificará el problema y se analizarán las causas del mismo.

9. De acuerdo a lo especificado en el paso 6, cada miembro del grupo escribirá ahora las posibles acciones de solución para algún planteamiento hecho en cualquier nivel del diagrama de árbol obtenido.

10. De la misma manera en que se procedio para construir el diagrama de árbol para identificar la problematica, se construye ahora un diagrama de árbol para las soluciones. Debe vigilarse que el nodo de este segundo árbol sea la respuesta al nodo del primer diagrama de árbol.

11. Cada miembro del grupo escribe en tarjetas los compromisos o acciones concretas para alguna de las soluciones expresadas en cualquier nivel del diagrama de soluciones, mencionando quienes, cómo y cuándo se llevará a cabo.

12. Se debe comentar el ejercicio e integrar los compromisos para su seguimiento y control.

Nota: Se sugiere que el número de tarjetas por participante sea de tres, cuatro o cinco si son nueve, siete o cinco participantes respectivamente.

Se deberán mostrar los escritos a la persona que está llevando a cabo la aplicación de la técnica con el fin de que ésta observe si se han cumplido las reglas.

3.3.2. OBSERVACIONES Y SUGERENCIAS

1. Si entre algunas de las personas que integran el grupo de trabajo existiesen antiguas enemistades, conflictos o rivalidades, es apropiado en algunas circunstancias hacer una distribución de los lugares en la mesa para que cada uno de los individuos pueda estar rodeado por personas "amigables".

Así bien, para esta situación es conveniente tener información a cerca de cada una de las personas y construir una gráfica de relaciones como sigue:

(i) - Representar a cada individuo por un nodo

(ii) - Conectar a través de una línea las personas entre las que existan buenas relaciones.

(iii) - Determinar, en la gráfica así construida, un ciclo simple o una trayectoria cerrada que pase por todos los nodos una sola vez.

De acuerdo a las adyacencias del ciclo encontrado puede hacerse la distribución de los lugares, ver figura 3.3.2

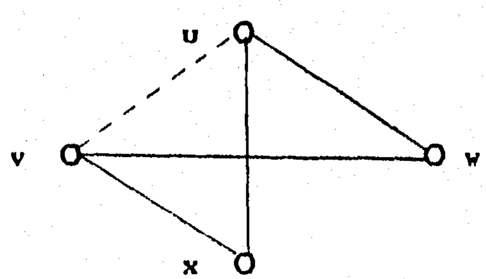


FIG. 3.3.2

En el caso en que la relación no sea simétrica se hará la distribución de acuerdo a un circuito.

2. Como se menciono anteriormente es necesario que a un individuo no le toque una de sus mismas tarjetas para esto puede hacerse la distribución de éstas considerando los circuitos de una digráfica completa K_p.

Caso 1. n = número de tarjetas = 3
p = número de personas = 9

Obtener en K_p un circuito C_p^+ de longitud nueve orientado positivamente (en el sentido de las manecillas del reloj) y un C_p^- orientado negativamente (en sentido contrario a las manecillas del reloj).

La primera tarjeta se repartira de acuerdo a la dirección del circuito C_p^+ y la segunda de acuerdo a C_p^-.

La forma general de hacer la distribución de las tarjetas se resume en la tabla 3.3.3.

NO. DE TARJETA	DISTRIBUIRSE DE ACUERDO A:
1	C_p^+
2	C_p^-
3	C_4^+ u C_5^+

TABLA 3.3.3

Caso 2. $n = 4$

$p = 7$

NO. DE TARJETA	DISTRIBUIRSE DE ACUERDO A:
1	C_7^+
2	C_7^-
3	C_4^+ u C_3^+
4	C_4^- u C_3^-

TABLA 3.3.4

Caso 3. $n = 5$

$p = 5$

NO. DE TARJETA	DISTRIBUIRSE DE ACUERDO A:
1	C_5^+
2	C_5^-
3	C_3^+ u C_2^+
4	C_3^- u C_2^-
5	C_3^+ u C_2^-

TABLA 3.3.5

3. Una vez que se tienen las tarjetas en el sobre debe darse un orden lógico causal a las tarjetas y proponer una síntesis de éstas.

En este caso podemos visualizar el orden lógico a través de una digráfica $D = [X, F]$, donde X representa el conjunto de tarjetas y para $i, j \in X$, $ij \in F$ si y sólo si i antecede a j en el orden lógico causal.

El problema de hayar una síntesis de los hechos, hace pensar en reducir este problema al de hallar un núcleo en la configuración D.

Si la configuración D contiene un núcleo, los elementos en éste representarán una base de hechos que conducen a la identificación de la problematica en cuestión, ya que ningún elemento del núcleo es antecedido por otro elemento del núcleo y éstos preceden a cualquier otro elemento que se encuentre fuera del núcleo.

Por último, observese que de acuerdo al teorema 2 de la sección 2.3, la configuración D debera ser una digráfica sin ciclos dirigidos.

CONCLUSIONES

Fue muy interesante distinguir cómo una herramienta teoríca es utilizada para desarrollar un método de solución para cierto tipo de problemas del Análisis de Sistemas. Y lo es aún más cuando ésta se presenta en la literatura en una forma muy abstracta.

Me ha sido posible así mismo captar la importancia y utilidad de analizar las estructuras matemáticas que puedan ser usadas no sólo para lograr interrelacionar como ahora algunos problemas si no quizas proveerse de medios para enfocar mejor como se está planteando su solución.

Dentro del campo de la Investigación de Operaciones los conceptos de Dualidad y de Análisis de Sensibilidad son muy relevantes. En este sentido quedan muchas ideas a desarrollar por ejemplo, al considerar la digráfica $\bar{G}_c$, la cual contiene las flechas que no satisfacen los índices p y q establecidos, podría verse la posibilidad de construir una digráfica $H = [X_H, F_H]$ a partir de G_c en la que el conjunto de nodos X_H sería igual al conjunto de flechas de $\bar{G}_c$ y dos nodos en H serian adyacentes si dada uv en G_c y $vw = k$, $uw = h$ en $\bar{G}_c$ entonces kh perteneceria a F_H.

Una vez que se tuviera la digráfica H podría hallarse un núcleo en ésta y dado que cada elemento en el núcleo de H es una arista de $\overline{G}c$ podriamos verificar que sucede con la solución al intercambiar o añadir cualquiera de estas aristas a la digráfica Gc.

Por último, queda aún por desarrollar un programa que facilite la ejecución del algoritmo para hallar el núcleo de una digráfica, sin embargo el algoritmo que he propuesto es un buen algoritmo desde el punto de vista operacional, ya que como máximo sería necesario hacer un análisis del oden de la digráfica.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Behzad, G. Chartrand, L. Lesniak-Foster, (1979)
GRAPHS and DIGRAPHS
Prindle, Weber and Schmidt.

[2] C. Berge, (1985)
GRAPHS
North-Holland, Amsterdam-New York.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, (1979)
GRAPH THEORY with APPLICATIONS
American Elsevier, New York.

[4] H. Galeana-Sánchez, (1980)
NUCLEOS Y SEMINUCLEOS EN DIGRAFICAS
Tesis Profecional, UNAM, México.

[5] H. Galeana-Sánchez
TEORIA DE NUCLEOS EN DIGRAFICAS
Inst. Mat. UNAM, México.

[6] John P. van Gigch, (1981)
TEORIA GENERAL DE SISTEMAS
Trillas

[7] John P. van Gigch, (1991)
SYSTEM DESIGN and METAMODELING
Plenum Press Newyork and London.

[8] B. P. Lathi, (1965)
SIGNALS, SYSTEMS and COMMUNICATION
John Wiley & Sons, Inc.

[9] Richard de Neufville, (1991)
APPLIED SYSTEMS ANALYSIS
Engineering Planning and Technology Management
McGraw-Hill Publishing Company

[10] J. Von Neumann and O. Morgenstern, (1944)
THEORY of GAMES and ECONOMIC BEHAVIOR
Princeton University Press, Princeton.

[11] V. Neumann-Lara, (1971)
SEMINUCLEOS DE UNA DIGRAFICA
Anales del Instituto de Matemáticas II, UNAM.

[12] G. Sánchez-Guerrero, Et al, (1991)
CUADERNOS DE PLANEACION Y SISTEMAS
Seminario y Taller de Metodología
Dpto. de Ing. de Sistemas, DEPFI UNAM, México.

[13] Robin J. Wilson, John J. Watkins, (1989)
GRAPHS an INTRODUCTORY APPROACH
John Wiley & Sons, Inc.

A N E X O 1

En este anexo se presentan los conceptos esenciales concernientes a la estructura de una digráfica.

1.1. DIGRAFICAS

1.1.1. DEFINICIONES Y TERMINOLOGIA

Las digráficas aparecen con claridad en el estudio gráfico o geométrico de relaciones binarias en un conjunto, sobre todo, en aquellas en las que no siempre es válida la propiedad simétrica; como en las relaciones de orden, preorden o cuasiorden.

Digráfica. Una digráfica $D = [\ X,\ F\ ]$ consiste de:

(i) Un conjunto finito X de elementos llamados *nodos*, y

(ii) Un subconjunto F del producto cartesiano $X \times X$ cuyos elementos son denominados *arcos*.

Una digráfica puede ser descrita por un diagrama en el cual los nodos son representados por puntos en el plano y cada arco (u, v) = uv es indicado por una flecha que va desde el nodo u hacia el nodo v como se ilustra en la figura 1.1.1.

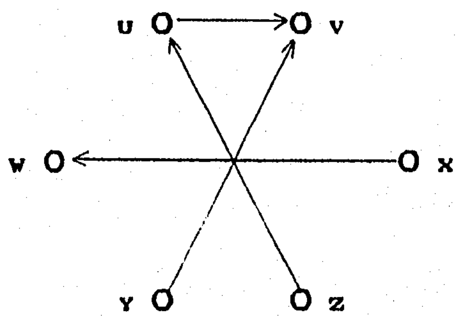


FIG 1.1.1

En esta introducción de las digráficas se empleará la siguiente terminología:

Extremos inicial y terminal de un arco. Para un arco uv el nodo u es su extremo inicial y v es su nodo terminal. Un *arco* donde sus puntos extremos son coincidentes es denominado un *bucle*.

Nodos adyacentes, arcos adyacentes. Se dice que dos nodos son *adyacentes* si éstos están unidos mediante algún arco. Dos arcos son adyacentes si éstos tienen al menos un nodo extremo en común.

Sucesores, predecesores, y vecinos de un nodo. En una digráfica $D = [\ X,\ F\ ]$, un nodo v es llamado un sucesor de un nodo u si $uv \in F$, el conjunto de todos los sucesores de u es denotado por $\Gamma^{+}(\ u\ )$. Similarmente, un nodo u es llamado un *predecesor* de v si $uv \in F$, y el conjunto de todos los predecesores del nodo u es denotado por $\Gamma^{-}(\ u\ )$. Un nodo que es sucesor o predecesor de un nodo u es llamado un *vecino* de u; el conjunto de todos los vecinos de u es denotado por $\Gamma(\ u\ )$. Es evidente que $\Gamma\ (\ u\ ) = \Gamma^{+}(\ u\ ) \cup \Gamma^{-}(\ u\ )$.

Arcos incidentes a y desde un nodo. Si un arco h tiene como extremo inicial al nodo u, se dice que el arco h es *incidente desde* u; ahora bien, si un arco k tiene al nodo v como nodo terminal se dice que el arco k es *incidente a* v.

El número de arcos incidentes desde un nodo u es llamado el *semi-grado exterior* o el *ex-grado* de u, éste es denotado por $\delta^{+}(\ u\ )$; así mismo el número de arcos incidentes a u *es llamado el semi-grado interior* o *in-grado* de u, y es denotado por $\delta^{-}(\ u\ )$.

Ejemplo: En la digráfica de la figura 1.1.2, el nodo u tiene el conjunto de sucesores $\Gamma^{+}(\ u\ ) = \{\ u,\ \ v\ \}$ y como conjunto de predecesores a $\Gamma^{-}(u) = \{\ w,\ u,\ x\ \}$; el ex-grado de este nodo es $\delta^{+}(\ u\ ) = 2$, y su in-grado es $\delta^{-}(\ u\ ) = 3$.

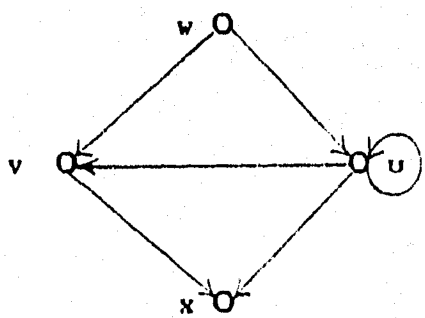


FIG. 1.1.2

Resulta inmediato verificar que estos números satisfacen las siguientes igualdades:

$$\sum_{u \in X} \delta^{+}(u) = \sum_{u \in X} \delta^{-}(u) = |\, F \,| \quad \text{(número de arcos)}$$

y por lo tanto cumplen

$$\sum_{u \in X} \delta(u) = 2\, |F|$$

Matriz de adyacencia positiva. Dada una digráfica $D = [\, X, F \,]$ se define la *matriz de adyacencia positiva*, asociada a D, como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in F \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En algunos casos resultará necesario estudiar una parte de una digráfica y desentenderse del resto. En ese caso se omitirán los nodos y arcos que no importen para concentrarse en la digráfica restante.

Digráfica parcial. Si nosotros removemos desde una digráfica $D = [\ X,\ F\ ]$ un subconjunto de sus arcos, obtenemos una digráfica de la forma

$$H = [X,\ \mathcal{F}] \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{F} \subseteq F$$

la cual es denominada una *digráfica parcial de D*. Un ejemplo de este tipo de digráficas se muestra en la figura 1.1.3, la cual es referida a la digráfica de la figura anterior.

Subdigráfica. Dada una digráfica $D = [\ X,\ F\ ]$, se dice que $H = [Y,\ \mathcal{F}]$ es una *subdigráfica* de D si $Y \subseteq X$ y $\mathcal{F} \subseteq F$.

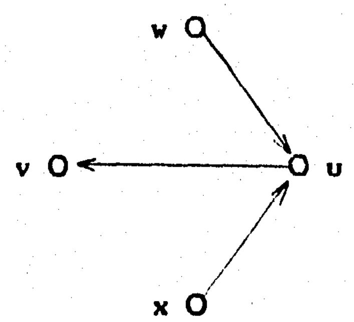


FIG. 1.1.3

Subdigráfica inducida. Si nosotros removemos de una digráfica $D = [\ X,\ F\ ]$ un subconjunto de sus nodos, asi mismo todos los arcos incidentes a o desde éstos, obtenemos una digráfica de la forma

$$H = [Y,\ F_Y] \text{ donde } Y \subseteq X \text{ y } F_Y = F \cap [Y \times Y]$$

la cual se describe como la *subdigráfica de D inducida o generada* por el subconjunto de nodos Y. En la figura 1.1.4 se muestra la subdigráfica inducida de la digráfica de la figura 1.1.2.

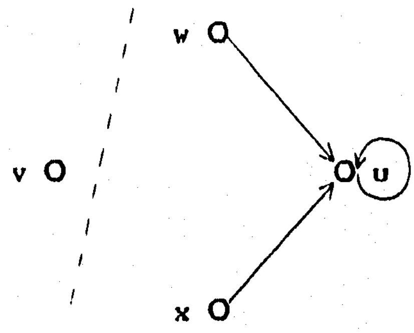


FIG. 1.1.4

1.1.2. TRAYECTORIAS EN UNA DIGRAFICA.

Una Trayectoria es una secuencia finita de arcos de la forma

$$T = [\ u_1u_2,\ u_2u_3,\ u_3u_4,\ \ldots,\ u_nu_{n+1}\ ]$$

es decir, una secuencia finita de arcos en los cuales el nodo terminal de cada arco coincide con el nodo inicial del siguiente arco. El número n de arcos en la secuencia es denominado el *orden o longitud* de la trayectoria.

El nodo extremo inicial del primer arco y el nodo extremo terminal del último arco de una trayectoria son llamados los nodos inicial y terminal, respectivamente, de la trayectoria. En adelante se utilizará la notación *uv-trayectoria o bien* $T\ [\ u,\ v\ ]$ para referirse a una trayectoria que va del nodo u al nodo v.

Una trayectoria en la que sus nodos extremos son distintos es denominada abierta; mientras que una trayectoria en la que sus nodos extremos coinciden es llamada una *trayectoria cerrada*, o bien un *ciclo*.

Una trayectoria es *simple* si ésta no atraviesa un arco de una digráfica más que una sola vez. Una trayectoria es *elemental* si ésta no atraviesa algún nodo más que una sola vez. Es fácil ver que cada trayectoria elemental es simple.

Podemos observar que una trayectoria es completamente determinada por la secuencia de sus nodos, en algunos casos es conveniente especificar una trayectoria a través de la lista de éstos ($T = [u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}]$).

Ahora bien, muchos problemas involucran un *sistema* el cual algunas veces puede encontrarse en sólo uno de un número finito de diferentes estados.

Un sistema de este tipo puede ser representado por un *diagrama de estados*, es decir una digráfica donde los nodos corresponden a los estados del sistema y donde los arcos (o flechas) representan las posibles transiciones directas desde un estado a otro.

Esta forma de representación es útil en la investigación de las posibles formas de comportamiento del sistema, ya que las trayectorias en el diagrama de estados determinan la secuencia posible de los estados de transición.

Asi por ejemplo, un concepto importante dentro de la ciencia de la computación es el del *estado-finito de una máquina*, el cual consiste de:

(1) Un conjunto finito S de *estados*,

(2) un conjunto finito X de *símbolos de entrada*,

(3) un conjunto finito Y de *símbolos de salida*,

(4) una *función de transición* f: $S \times X \rightarrow S$,

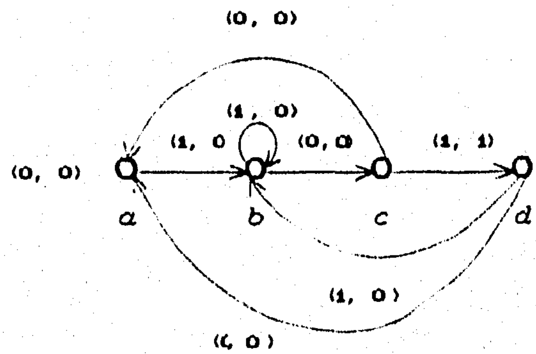
(5) una *función de salidas* g: $S \times X \rightarrow Y$.

Un estado-finito de una máquina actua leyendo una serie de símbolos de entrada y escribiendo una serie de símbolos de salida de la siguiente manera. Si la máquina se encuentra actualmente en el estado $s \in S$ y es presentado con un símbolo de entrada $x \in X$, entonces éste cambia su estado a $f(s, x)$ y se escribe el símbolo de salida $g(s, x)$.

Para mostrar la manera en la cual este tipo de máquinas operan, en la figura 1.2.1 se muestra el diagrama de estados de una máquina la cual reconoce todas las secuencias "101" en una serie de ceros y unos.

En este diagrama, la primera de las etiquetas sobre cada arco es el símbolo de entrada para las causas de la correspondiente transición; la segunda etiqueta es el símbolo que se escribe donde esta transición toma lugar.

La respuesta de esta máquina a una serie particular de entradas se muestra a continuación, para el caso donde la máquina se encuentra inicialmente en el estado "*a*".



Serie de entradas:	0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0
Estados sucesivos:	a | a | b | c | a | b | c | d | b | b | c | d | b | c
Serie de salidas:	0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0

FIG. 1.2.1

El estado-finito de una máquina puede ser fácilmente simulado por un programa de computadora. Este concepto es usado, entre otros, para diseñar equipo para sistemas digitales.

Circuito. Un *circuito* se define como una trayectoria elemental cerrada dirigida en un solo sentido.

Longitud de un circuito. La *longitud de un circuito* es el número de arcos contenidos en éste. En la figura 1.2.2 se ilustra el circuito de longitud tres.

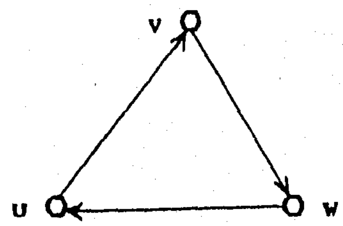


FIG. 1.2.2

1.1.3. DIGRAFICAS Y RELACIONES.

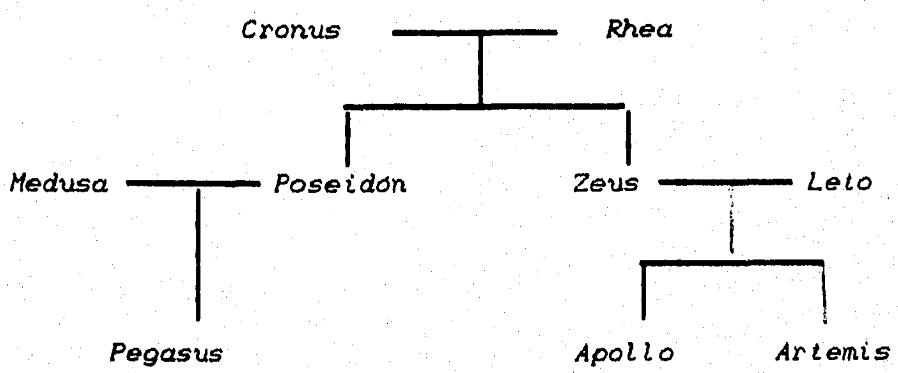
Cada digráfica $D = [X, F]$ determina una relación binaria $\mathcal{R}_D$ sobre su conjunto de nodos, a través de la regla

$$u \; \mathcal{R}_D \; v \text{ si y sólo si } (u, v) \in F.$$

Inversamente, cada relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto X determina una digráfica $D = [X, F_R]$, donde

$$F_R = \{ (u, v) \in X \times X \, / \, u \; \mathcal{R} \; v \}$$

Dicha digráfica es denominada la digráfica de $\mathcal{R}$. Como una ilustración al respecto se muestra, en la figura 1.3.1, la digráfica de la relación "*fue un pariente de*" bajo un conjunto de nueve Dioses Griegos. Su árbol genealógico se da en la siguiente figura:



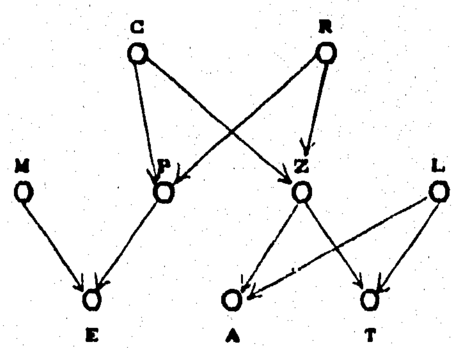


FIG. 1.3.1

La mayoría de los conceptos introducidos en nuestro razonamiento tienen su complemento en la teoría de las digráficas. Así mismo, una relación $\mathcal{R}$ tiene un complemento $\mathcal{R}_C$ y una inversa $\mathcal{R}_{IN}$.

Para una relación $\mathcal{R}$ desde un conjunto A a un conjunto B existe una *relación complementaria o su negación* $\mathcal{R}c$, tal que para cada pareja $(x, y) \in A \times B$, $x \; \mathcal{R}c \; y$, (x está relacionado con y a través de la relación $\mathcal{R}c$), si y sólo si $x \not\mathcal{R} y$, (x no está relacionado con y a través de la relación $\mathcal{R}$).

También para una relación $\mathcal{R}$ desde A a B se define una *relación inversa* $\mathcal{R}_{IN}$ desde B a A, por la regla

$$y \; \mathcal{R}_{IN} \; x \text{ si y sólo si } x \; \mathcal{R} \; y, \text{ para toda } (x, y) \in A \times B.$$

En términos de una digráfica tenemos:

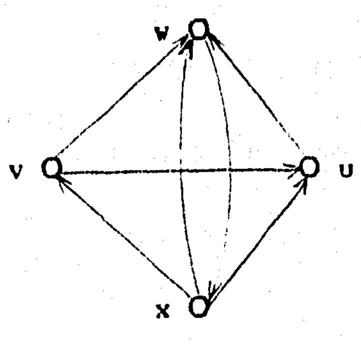
La digráfica $D = [X, F]$ tiene un complemento $\bar{D} = [X, Fc]$ donde

$$Fc = \{ (u, v) \in X \times X \; / \; (u , v) \notin F \}$$

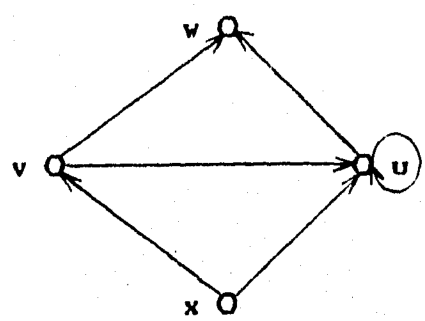
y una inversa $D = [X, F_{IN}]$ donde

$$F_{IN} = \{ (u, v) \in X \times X \; / \; (v, u) \in F \}$$

Las digráficas *complementaria* e *inversa* correspondientes a la digráfica de la figura 1.1.2 se muestran a continuación:



DIG. COMPLEMENTARIA



DIG. INVERSA

Digráfica conexa. Se dice que $D = [X, F]$ es una *digráfica conexa* si, dados dos nodos cualesquiera, existe una trayectoria que los une.

Algunas propiedades especiales de las relaciones sobre un conjunto.

Sea A un conjunto, y sea $\mathcal{R}$ una relación binaria sobre A. La relación $\mathcal{R}$ se dice que puede ser

Reflexiva	donde $x \mathcal{R} x \ \forall \ x \in A$;
Anti-reflexiva	donde $x \not\mathcal{R} x$ para ningún $x \in A$;
Simétrica	donde $x \mathcal{R} y$ implica $y \mathcal{R} x$;
Anti-simétrica	donde $x \mathcal{R} y$, $y \mathcal{R} x$ implica $x = y$;
Transitiva	donde $x \mathcal{R} y$, $y \mathcal{R} z$ implica $x \mathcal{R} z$.