20
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES QUE TENGAN UNA CONJUGADA CERCA DE LA IDENTIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ERNESTO ORDOÑEZ CABEZAS

1 9 9 6

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

FUNCIONES QUE TENGAN UNA CONJUGADA CERCA DE LA IDENTIDAD

realizado por ERNESTO ORDOÑEZ CABEZAS

con número de cuenta 8955500-8, pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DRA.	ISABEL PUGA ESPINOSA	
Propietario	DR.	ALEJANDRO ILLANES MEJIA	
Propietario	DR.	ANGEL TAMARIZ MASCARUA	
Suplente	M. en C.	ALEJANDRO BRAVO MOJICA	
Suplente	MAT.	FERNANDO OROZCO ZITLI	

Consejo Departamental de Matemáticas
M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

A mis abuelos.

Índice General

Prefacio **vii**

1 Funciones en el intervalo que tienen una conjugada cerca de la identidad **1**

1.1 Introducción 1

1.2 Planteamiento del problema 2

1.2.1 Escenario 2

1.2.2 Objetivos 2

1.3 Interpretación gráfica 2

1.4 Primeras observaciones 5

1.4.1 Si $r, s : I \to I$ son homeomorfismos podemos estudiar a sfr o a $r^{-1}fr$ en vez de estudiar a f 5

1.4.2 Podemos suponer que el homeomorfismo h es creciente 7

1.4.3 Cómo se relacionan la propiedad T y la propiedad C . 8

1.5 Algunas condiciones necesarias 9

1.5.1 Intervalos de nivel 9

1.5.2 Intervalos de desplazamiento 10

1.6 Algunas condiciones suficientes 12

1.7 Caracterización de las funciones que cumplen T 14

1.7.1 Preeliminares 14

1.7.2 Resultados finales para la condición T 19

1.8 Caracterización de las funciones que cumplen C 23

2 Funciones en la circunferencia que tienen una conjugada cerca de la identidad **29**

2.1 Introducción 29

2.2 Planteamiento del problema 30

2.2.1 Cómo plantear el problema para la circunferencia . . . 30

2.2.2 Escenario 30

2.2.3 Objetivos 31
2.3 Cómo se ven las funciones $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ 32
2.4 Primeras observaciones 33
2.4.1 Si $r, s : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ son homeomorfismos podemos estudiar a rfs o a $r^{-1}fr$ en vez de estudiar a f. 33
2.4.2 Las gráficas de las funciones $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ se pueden trasladar y reflejar 33
2.4.3 Podemos suponer que h es creciente y h no hace ninguna rotación 37
2.4.4 Cómo se relacionan la propiedad T y la propiedad C . 39
2.5 Condiciones suficientes para la propiedad T 39
2.6 Condiciones necesarias para la propiedad T 40
2.6.1 Intervalos de nivel 40
2.6.2 Si f cumple T entonces f se puede ver en $I \times I$ según T y $\hat{f} : I \to I$ cumple T 44
2.7 Resultados finales para la propiedad T 50
2.8 Condiciones suficientes para la propiedad C 51
2.9 Condiciones necesarias para la propiedad C 52
2.9.1 Intervalos de desplazamiento 52
2.9.2 Si f cumple C entonces f se puede ver en $I \times I$ según C y $\hat{f} : I \to I$ cumple C 52
2.10 Resultados finales para la propiedad C 60

3 Conclusiones **63**

Prefacio

Desde hace mucho tiempo, los sistemas dinámicos se han utilizado para modelar procesos que varían a través del tiempo. Isaac Newton usaba ecuaciones diferenciales para describir sistemas dinámicos, como por ejemplo las trayectorias de los planetas.

En los siglos XVIII y XIX se desarrollaron diversas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales de manera explícita. Sin embargo, para ciertas ecuaciones diferenciales, es muy difícil encontrar soluciones explícitas.

Poincaré dió un nuevo giro al estudio de las ecuaciones diferenciales al estudiar soluciones cualitativas, que describen el comportamiento general de la ecuación, en vez de tratar de encontrar soluciones explícitas. Al hacer esto, introdujo técnicas topológicas y geométricas que posteriormente se constituyeron en ramas distintas de las matemáticas.

Birkhoff también adoptó la idea de estudiar las soluciones cualitativas y estudió los procesos iterativos como una manera más sencilla de estudiar el comportamiento dinámico de las ecuaciones diferenciales.

A estos procesos iterativos se les llaman sistemas dinámicos discretos. En estos sistemas se estudia el estado del proceso en momentos determinados, por ejemplo, el estudio del crecimiento de una población se hace por generaciones y no como un continuo del tiempo. Lo que se hace en este tipo de sistemas es iterar una función y ver que comportamiento presenta cada punto a través del tiempo, por ejemplo, se estudia si la sucesión $x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), ...$ converge a un punto, si es periódica ó si x es un punto fijo.

Para efectos prácticos, muchas veces, en vez de estudiar a la función f se estudia una función g que "se parezca" mucho a f. Que g "se parezca" a f se formaliza con el concepto de función conjugada.

Se dice que una función g es una conjugada de f si existe un homeomorfismo h tal que $hf = gh$.

También, para ciertas aplicaciones, es útil saber cuando una función tiene una conjugada cerca de la identidad.

En la conferencia "Joint Summer Research Conference", que tuvo lugar en junio de 1989, Joe Martin planteó la siguiente pregunta: ¿Cómo caracterizar a las funciones del intervalo al intervalo que tienen una función conjugada cerca de la identidad?

En abril de 1990 se volvió a plantear esta pregunta en la conferencia "Spring Topology Conference" que tuvo por sede a la Universidad estatal del Suroeste de Texas.

Y en noviembre de 1992 Sam W. Young publicó en "Proceedings of the American Mathematical Society" la respuesta a esta pregunta.

En el presente trabajo se estudia la caracterización de las funciones continuas que tienen conjugadas cerca de la identidad.

En el primer capítulo resuelvo el problema para las funciones continuas del intervalo al intervalo, basándome en algunos de los resultados de Young. Para resolver este problema definí qué quiere decir que una función sea topológicamente equivalente a una función que esté cerca de la identidad. Este concepto es un poco más general que el de función conjugada, y me sirvió para encontrar condiciones suficientes para que una función tenga una conjugada cerca de la identidad.

Por otro lado, se sabe que muchos modelos utilizan funciones que van de la circunferencia en la circunferencia. Estos modelos suelen utilizarse para representar procesos cíclicos, como los latidos del corazón, dinámica de fluidos o modelos de neuronas. Por esta razón en el Capítulo 2 resuelvo el problema para funciones que van de la circunferencia en la circunferencia, el cual, hasta donde yo sé, no había sido resuelto.

Para la solución de los problemas que se resuelven en la tesis utilizo únicamente propiedades elementales de las funciones continuas y un poco de ingenio.

Los resultados obtenidos quedan resumidos en los Teoremas 1.13, 1.14, 2.16 y 2.25.

No es el objetivo de este trabajo estudiar las diversas aplicaciones que tienen estos resultados. Sin embargo, en las conclusiones se expone la relación que existe entre las funciones del intervalo al intervalo que tienen una conjugada cerca de la identidad y las funciones de la circunferencia en la circunferencia que tienen una conjugada cerca de la identidad. También se explica que condiciones se pudieron generalizar y cuales no, y se dan varios ejemplos.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a la Dra. Isabel Puga Espinosa, quien sugirió el tema de esta tesis, por su invaluable ayuda y dirección, pero sobre todo, por su amistad, apoyo e interés que hicieron posible este trabajo.

Así mismo quiero agradecer a mis sinodales, por haberse tomado el tiempo para leer la presente, y haberme dado sus valiosos comentarios y sugerencias.

A todos mis maestros, compañeros de trabajo y amigos que de alguna u otra manera apoyaron e impulsaron este trabajo.

A mi familia y a la "Chamuca" por su infinita paciencia y comprensión.

Capítulo 1

Funciones en el intervalo que tienen una conjugada cerca de la identidad

1.1 Introducción

En la conferencia "Joint Summer Research Conference", que tuvo lugar en la Universidad estatal de Humbolt en junio de 1989, Joe Martin planteó la siguiente pregunta: ¿Cómo caracterizar a las funciones del intervalo al intervalo que tengan una función conjugada cerca de la identidad?

En abril de 1990 se volvió a plantear esta pregunta en la conferencia "Spring Topology Conference" que tuvo por sede a la Universidad estatal del Suroeste de Texas.

Fue hasta noviembre de 1992 que Sam W. Young publicó en "Proceedings of the American Mathematical Society" la respuesta a esta pregunta.

En este capítulo voy a explicar cómo se resolvió este problema. En realidad lo que hice fue leer el planteamiento del problema y lo traté de resolver por mi cuenta. Finalmente complementé mis resultados con los de Young. Las demostraciones que voy a dar en este capítulo son una combinación de los resultados de Young y los míos, aunque debo mencionar que las ideas fundamentales son de Young.

Trataré de ser lo más claro posible y voy a dar varios ejemplos ya que la comprensión de estas ideas serán de gran ayuda para el siguiente capítulo en el cual resuelvo el mismo problema pero ahora para funciones de la circunferencia en la circunferencia, y para su solución se usan algunos resultados de este capítulo.

1.2 Planteamiento del problema

1.2.1 Escenario

Aquí vamos a definir los conceptos necesarios para plantear el problema y vamos a dar la notación que se usará durante todo este capítulo.

Como de costumbre, usuamos la notación $I = [0,1] = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$ y consideramos este intervalo con la métrica $d(x,y) = |x - y|$.

La función $i : I \to I$ donde $i(x) = x$ es la identidad, y definimos la función $J : I \to I$ como $J(x) = 1 - x$. Notemos que $J^{-1} = J$.

De aquí en adelante vamos a suponer que $f : I \to I$ es una función **continua** y **suprayectiva**.

Ahora vamos a definir qué quiere decir que una función tenga una conjugada cerca de la identidad y vamos a definir también qué quiere decir que una función sea topológicamente equivalente a una función que esté cerca de la identidad.

Cuando una función $f : I \to I$ tenga una conjugada cerca de la identidad diremos, por brevedad, que f cumple "C" y cuando una función sea topológicamente equivalente a una función que esté cerca de la identidad diremos, también por brevedad, que f cumple "T".

Definición 1.1 *Decimos que f cumple "T" si para toda $\varepsilon > 0$ existen homeomorfismos $h, k : I \to I$ tales que $d(kfh(x), x) < \varepsilon$ para toda $x \in I$.*

Definición 1.2 *Decimos que f cumple "C" si para toda $\varepsilon > 0$ existe un homeomorfismo $h : I \to I$ tal que $d(h^{-1}fh(x), x) < \varepsilon$ para toda $x \in I$.*

1.2.2 Objetivos

1. Caracterizar las funciones $f : I \to I$ que cumplen "T".
2. Caracterizar las funciones $f : I \to I$ que cumplen "C".

1.3 Interpretación gráfica

La manera gráfica en que interpreté el problema para la propiedad "T" es la siguiente:

Primero grafico $f : I \to I$ de la manera usual, luego dibujo abajo y la izquierda el intervalo y muestro con rayas punteadas la manera en que h mueve los puntos del intervalo hacia arriba y la manera en que k mueve los puntos de derecha a izquierda, ver Figura 1.1 (izquierda).

El recorrido completo que realiza una x en I es:

Primero h la hace subir por una raya punteada a la base del cuadrado luego f la manda al lado izquierdo del cuadrado y finalmente k la recorre al intervalo que está a la izquierda del cuadrado donde acaba su recorrido.

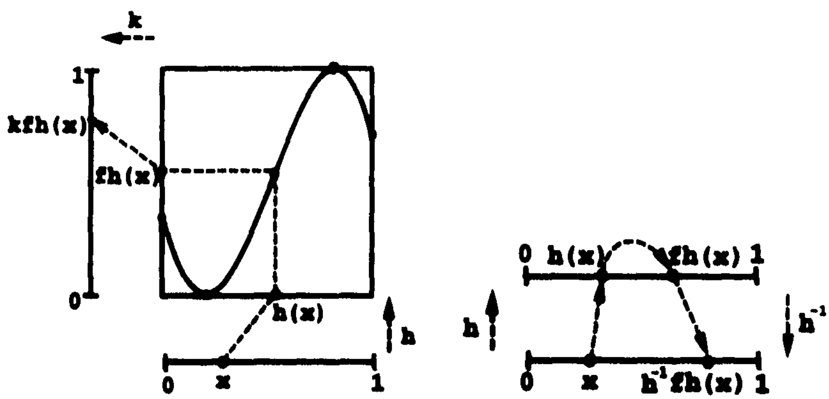

Figura 1.1: Cómo graficar kfh (izquierda) y $h^{-1}fh$ (derecha).

En la Figura 1.2 vemos la manera en que el homeomorfismo h deforma a la función f, lo que hace en realidad es deformar horizontalmente a la gráfica de f, es como si la viéramos frente a un espejo mal hecho y entonces en los lados se ve más "angosta" y en el centro se ve más "ancha".

En la Figura 1.3 se observa que k deforma verticalmente a fh, en el caso análogo del espejo notamos que en la parte de arriba y de abajo se "encoje" mientras que en el centro se "estira".

El objetivo del problema es encontrar una deformación horizontal h y una deformación vertical k de manera que la gráfica quede dentro de una franja inclinada de radio ε, ver Figura 1.4.

Para la interpretación gráfica de la propiedad "C" sólo dibujamos dos veces el intervalo I y pensamos que x está en el intervalo de abajo y sube al intervalo de arriba empujada por h, ahí f la hace saltar y finalmente h^{-1} la vuelve a bajar, el objetivo del problema es que después de este recorrido $h^{-1}fh(x)$ quede cerca del punto de partida. Ver Figura 1.1 (derecha).

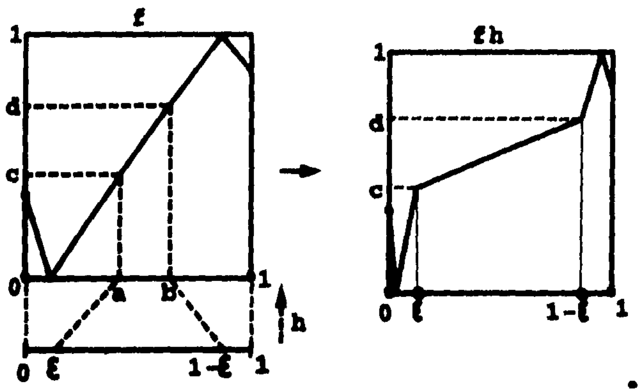

Figura 1.2: Cómo deforma h a f.

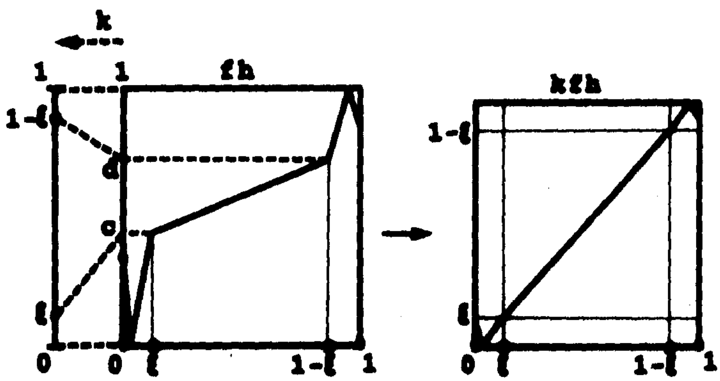

Figura 1.3: Cómo deforma k a fh.

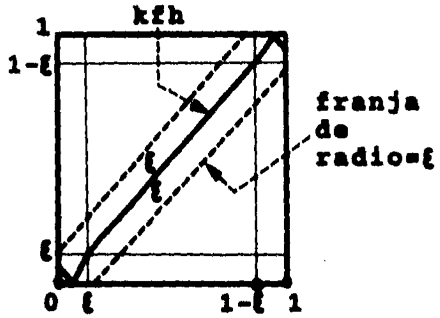

Figura 1.4: La función kfh debe quedar dentro de la franja.

1.4 Primeras observaciones

1.4.1 Si $r, s : I \to I$ son homeomorfismos podemos estudiar a sfr o a $r^{-1}fr$ en vez de estudiar a f

Los resultados de esta sección nos dicen que si $r, s : I \to I$ son homeomorfismos entonces, en el caso de la propiedad "T", podemos estudiar a sfr en lugar de f y para el caso de la propiedad "C", podemos estudiar a $r^{-1}fr$ en lugar de f. Los dos siguientes teoremas formalizan estas ideas.

Teorema 1.1 *Sean $s, r : I \to I$ homeomorfismos entonces:*
$f : I \to I$ *cumple "T"* si y sólo si $sfr : I \to I$ *cumple "T".*

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon_0 > 0$.
Queremos encontrar homeomorfismos $h, k : I \to I$ tales que
$d(k(sfr)h(x), x) < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$.
Por hipótesis f cumple "T" entonces para $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ existen homeomorfismos $h_1, k_1 : I \to I$ tales que $d(k_1fh_1(x), x) < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$.
Afirmo que:
$h = r^{-1}h_1 \qquad y \qquad k = k_1s^{-1}$
satisfacen las condiciones buscadas ya que:
h y k son homeomorfismos porque r^{-1}, h_1, k_1 y s^{-1} también son homeomorfismos.
Además, para toda $x \in I$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d(k(sfr)h(x),x) &= d(k_1 s^{-1}(sfr)r^{-1}h_1(x),x) \\ &= d(k_1 f h_1(x),x) < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon_0 > 0$.
Queremos encontrar homeomorfismos $h, k : I \to I$ tales que $d(kfh(x),x) < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$.
Por hipótesis sfr cumple "T" entonces para $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ existen homeomorfismos $h_1, k_1 : I \to I$ tales que $d(k_1(sfr)h_1(x),x) < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$.
Afirmo que:
$h = rh_1$ y $k = k_1 s$
satisfacen las condiciones buscadas ya que:
h y k son homeomorfismos porque s, r, h_1 y k_1 también lo son.
Además, para toda $x \in I$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d(kfh(x),x) &= d(k_1 sfrh_1(x),x) \\ &= d(k_1(sfr)h_1(x),x) < \varepsilon_0 \end{aligned}$$

como queríamos. $\triangle$

Teorema 1.2 *Sea $r : I \to I$ un homeomorfismo entonces:*
$f : I \to I$ cumple "C" si y sólo si *$r^{-1}fr : I \to I$ cumple "C".*

Demostración:
La demostración de este teorema es muy parecida a la del teorema anterior, por eso sólo mencionamos que para demostrar que, si f cumple "C" entonces $r^{-1}fr$ cumple "C", basta con que tomemos $h = r^{-1}h_1$, y para demostrar que si $r^{-1}fr$ cumple "C" entonces f cumple "C", basta con tomar $h = rh_1$. $\triangle$

Recordemos que a $J : I \to I$ la definimos como $J(x) = 1 - x$. Es fácil ver que J es un homeomorfismo, los teoremas anteriores, nos dicen que podemos estudiar a: fJ, Jf, ó JfJ en vez de estudiar a f, para el caso de la propiedad "T" y que podemos estudiar a JfJ en vez de f para el caso de la propiedad "C" (recordemos que $J^{-1} = J$).

Esto se va a usar más adelante en algunas demostraciones.

Gráficamente lo que hace J es reflejar la gráfica de f. Esto es, la gráfica de fJ es la misma que la de f reflejada con respecto al eje $x = \frac{1}{2}$, y la gráfica de Jf es la misma que la de f reflejada con respecto al eje $y = \frac{1}{2}$. Ver Figura 1.5.

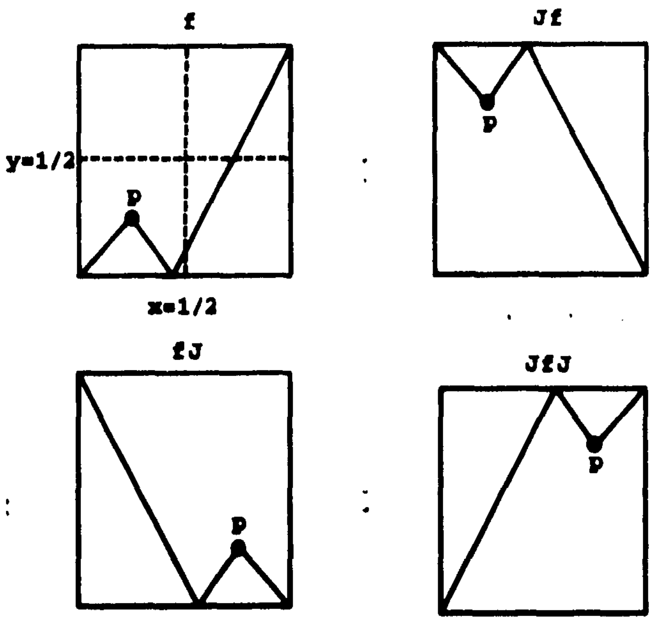

Figura 1.5: La función J refleja la gráfica de f.

1.4.2 Podemos suponer que el homeomorfismo h es creciente

El siguiente teorema nos dice que podemos restringir nuestro estudio a funciones h crecientes. La idea intuitiva de la demostración es que si h_1, k_1 son los homeomorfismos de la propiedad "T" y h_1 no es creciente entonces aplicamos J antes y después de $k_1 f h_1$, con lo cual $h = h_1 J$ es creciente, y como J preserva distancias entonces $d(Jk_1 f h_1 J(x), x) < \varepsilon_0$, y por tanto f cumple"T" con h creciente, ver Figura 1.6.

Teorema 1.3 *La función f cumple "T" si y sólo si f cumple "T" con h creciente.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon_0 > 0$
Por hipótesis f cumple "T" entonces existen homeomorfismos $h_1, k_1 : I \to I$ tales que $d(k_1 f h_1(x), x) < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$.
Si h_1 es creciente, tomamos $h = h_1$ y ya acabamos.

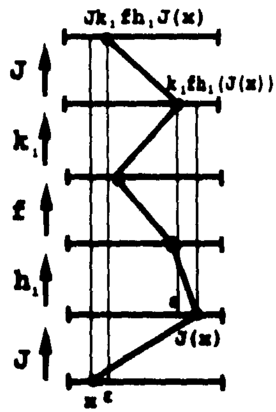

Figura 1.6: Como $J(x)$ y $k_1fh_1(J(x))$ están cerca entonces x y $Jk_1fh_1J(x)$ están cerca.

Si h_1 no es creciente entonces $h = h_1J$ lo es. Luego tomamos $k = Jk_1$ y obtenemos que $d(kfh(x), x) = d(Jk_1fh_1(J(x)), x)$. Pero es fácil ver que $d(a, b) = d(J(a), J(b))$ para toda $a, b \in I$, de donde $d(Jk_1fh_1(J(x)), x) = d(J(Jk_1fh_1(J(x))), J(x)) = d(k_1fh_1(J(x)), J(x)) < \varepsilon_0$ por lo que f cumple "T" para h creciente.
$\Leftarrow$) Es claro que si f cumple "T" con h creciente entonces f cumple "T". $\triangle$

Para la propiedad "C" también podemos suponer que h es creciente. La demostración del teorema es muy parecida a la del teorema anterior.

Teorema 1.4 *La función f cumple "C" si y sólo si f cumple "C" con h creciente.*

1.4.3 Cómo se relacionan la propiedad T y la propiedad C

Notemos que la propiedad "T" está intimamente relacionada con la propiedad "C", de hecho la relación que tienen es la que se da en el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *Si $f : I \to I$ cumple "C" entonces $f : I \to I$ cumple "T".*

Demostración:

Para demostrar este teorema tomemos $\varepsilon_0 > 0$ y veamos que existen homeomorfismos $h, k : I \to I$ tales que $d(kfh(x), x) < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$.

Como f cumple "C" entonces para $\varepsilon_0 > 0$ existe un homeomorfismo h_1 tal que $d(h_1^{-1}fh_1(x), x) < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$.

Ahora simplemente tomamos $h = h_1$ y $k = h_1^{-1}$ y notamos que h y k son homeomorfismos ya que h_1 y h_1^{-1} también lo son, y además tenemos que: $d(kfh(x), x) = d(h_1^{-1}fh_1(x), x) < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$ como se quería. $\triangle$

De una vez veamos que la propiedad "T" y la propiedad "C" no son equivalentes, esto es, que si f cumple "T" entonces no es forzoso que f cumpla "C" esto se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1 *Recordemos que a $J : I \to I$ la definimos de la siguiente manera:*
$J(x) = 1 - x$ *para toda* $x \in I$.

Se afirma que J cumple "T" pero J no cumple "C".

Es claro que J es inyectiva y entonces por el Teorema 1.9 se tiene que J cumple "T".

También tenemos que $0 < 1$, $J(0) = 1$ y $J(1) = 0$ entonces por el Teorema 1.8 se concluye que J no cumple "C".

1.5 Algunas condiciones necesarias

1.5.1 Intervalos de nivel

El siguiente resultado fue uno de los argumentos que más usé para encontrar condiciones suficientes y necesarias para que una función cumpla "T".

Si tenemos que $f(x_1) = f(x_2)$, esto es, puntos que están a la misma altura, y queremos que f cumpla "T" entonces vamos a ver que los puntos que van a x_1 y x_2 bajo h, deben de estar cerca. Ver Figura 1.7 (izquierda).

Precisamente por la importancia de puntos que están a la misma altura damos la siguiente definición.

Definición 1.3 *Decimos que $[x_1, x_2]$ es un intervalo de nivel si $f(x_1) = f(x_2)$.*

El siguiente teorema formaliza estas ideas.

Teorema 1.6 *Supongamos que $f : I \to I$ cumple "T" y que $[x_1, x_2]$ es un intervalo de nivel.*
Si $\varepsilon_0 > 0$ y h, k son los homeomorfismos de la propiedad "T" tales que $d(kfh(x), x) < \varepsilon_0$ $\forall x \in I$ entonces $d(h^{-1}(x_1), h^{-1}(x_2)) < 2\varepsilon_0$.

Demostración:
Puesto que f cumple "T" entonces $d(kfh(h^{-1}(x_1)), h^{-1}(x_1)) < \varepsilon_0$ y $d(kfh(h^{-1}(x_2)), h^{-1}(x_2)) < \varepsilon_0$ entonces tenemos que:

$$d(kfh(h^{-1}(x_1)), h^{-1}(x_1)) + d(kfh(h^{-1}(x_2)), h^{-1}(x_2)) < 2\varepsilon_0$$

Pero como $[x_1, x_2]$ es un intervalo de nivel, i.e $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $kf(hh^{-1}(x_1)) = kf(hh^{-1}(x_2))$ aplicando esto y la desigualdad del triángulo en la desigualdad anterior obtenemos que $d(h^{-1}(x_1), h^{-1}(x_2)) < 2\varepsilon_0$ como queríamos. $\triangle$

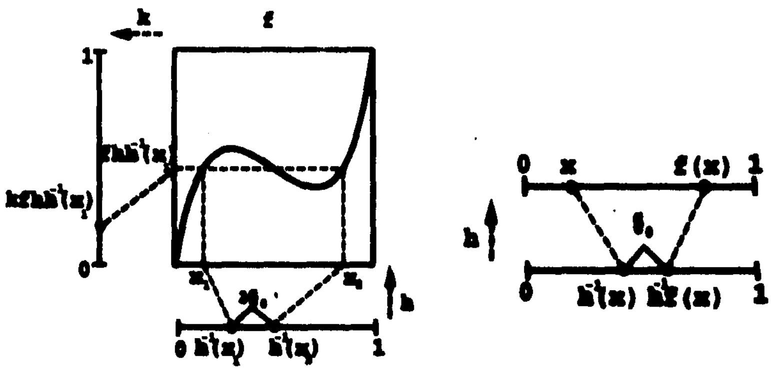

Figura 1.7: Los extremos de intervalos de nivel (izquierda) y de intervalos de desplazamiento (derecha) se deben aproximar bajo h^{-1}.

1.5.2 Intervalos de desplazamiento

Aquí vamos a dar un resultado parecido al anterior pero este nuevo resultado sólo sirve para la propiedad "C" ya que usa h^{-1} en vez de k.

Para dar este resultado primero vamos a dar la definición de intervalo de desplazamiento.

Definición 1.4 *Al intervalo $[x, f(x)]$ le llamaremos intervalo de desplazamiento.*

En la definición se hace un abuso de notación ya que es posible que $f(x) < x$, para ese caso en realidad a lo que nos referimos es a $[f(x), x]$.

Lo que dice el siguiente resultado es que, si queremos que f cumpla "C" entonces para cualquier intervalo de desplazamiento $[x, f(x)]$ se tiene que los puntos que van a x y a $f(x)$ bajo h, deben estar cerca. Ver Figura 1.7.

Teorema 1.7 *Supongamos que $f : I \to I$ cumple "C".*
Si $\varepsilon_0 > 0$ y h es el homeomorfismo de la propiedad "C" tal que $d(h^{-1}fh(x), x) < \varepsilon_0\ \forall x \in I$ entonces $d(h^{-1}f(x), h^{-1}(x)) < \varepsilon_0$.

Demostración:
Como f cumple "C" entonces para el punto $h^{-1}(x)$ se tiene que $d(h^{-1}fh(h^{-1}(x)), h^{-1}(x)) < \varepsilon_0$ y como $d(h^{-1}f(x), h^{-1}(x)) = d(h^{-1}fh(h^{-1}(x)), h^{-1}(x))$, se obtiene el resultado requerido. $\triangle$

Finalmente observemos que todo intervalo de nivel es cubierto por dos intervalos de desplazamiento, ya que si $[a, b]$ es intervalo de nivel entonces $c = f(a) = f(b)$ y entonces tenemos que $[a, b] \subset [a, c] \cup [c, b]$ con $[a, c] = [a, f(a)]$ y $[c, b] = [f(b), b]$ intervalos de desplazamiento.

Una de las caracterizaciones de las funciones que cumplen "T" (Teorema 1.13) dice que f cumple "T" si y sólo si no hay una colección finita de intervalos de nivel que cubre a I, y una de las caracterizaciones de las funciones que cumplen "C" (Teorema 1.14) dice que f cumple "C" si y sólo si no hay una colección finita de intervalos de desplazamiento que cubre a I.

Notemos que si podemos cubrir a I con n intervalos de nivel, entonces podemos cubrir a I con $2n$ intervalos de desplazamiento, es decir que si podemos cubrir a I con un número finito de intervalos de nivel entonces podemos cubrir a I con un número finito de intervalos de desplazamiento ó por contrapuesta:
Si no podemos cubrir a I con un número finito de intervalos de desplazamiento entonces no podemos cubrir a I con un número finito de intervalos de nivel.
Con esto y de acuerdo con los resultados antes mencionados, se obtiene que si f cumple "C" entonces f cumple "T", como era de esperarse.

Teorema 1.8 *Si $a < b$, $f(a) = 1$ y $f(b) = 0$ entonces f no cumple "C".*

Demostración:
Por reducción al absurdo supongamos que f cumple "C". Por el Teorema 1.4 podemos suponer que h es creciente. Pero si h es creciente entonces $h(0) = 0$, $h^{-1}(0) = 0$, $h(1) = 1$ y $h^{-1}(1) = 1$. También tenemos que h^{-1} es creciente por lo que $h^{-1}(a) < h^{-1}(b)$.

Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces debemos tener que $d(h^{-1}fh(h^{-1}(a)), h^{-1}(a)) < \varepsilon = \frac{1}{2}$ y que $d(h^{-1}fh(h^{-1}(b)), h^{-1}(b)) < \varepsilon = \frac{1}{2}$. De la primera desigualdad tenemos que $|h^{-1}f(a) - h^{-1}(a)| = |1 - h^{-1}(a)| < \frac{1}{2}$ de donde $\frac{1}{2} < h^{-1}(a)$ y de la segunda desigualdad obtenemos que $|h^{-1}f(b) - h^{-1}(b)| = |0 - h^{-1}(b)| < \frac{1}{2}$ de donde $h^{-1}(b) < \frac{1}{2}$, y por tanto $h^{-1}(b) < h^{-1}(a)$ lo cual contradice que $h^{-1}(a) < h^{-1}(b)$. $\triangle$

1.6 Algunas condiciones suficientes

En esta sección vamos a dar unas condiciones suficientes para la propiedad "T".

Lo que vamos a hacer es dar condiciones suficientes para que f cumpla "T" y dar un ejemplo de una función que satisfaga cada una de esas condiciones.

Lo que hice fue dar condiciones muy fuertes y las fuí haciendo más débiles tratando así que la condición además de ser suficiente también fuera necesaria. Observaremos que la suficiencia de la condición depende de alguna manera de la "inyectividad" de la función f, esto es claro porque el Teorema 1.6 nos dice que puntos que estén a una misma altura deben venir de puntos cercanos, estos puntos por lo tanto son especiales y son precisamente los que hacen "no inyectiva" a la función.

Teorema 1.9 *Si f es inyectiva entonces f cumple "T".*

Demostración:

La demostración es muy fácil porque como f es inyectiva entonces f es un homeomorfismo y por tanto f^{-1} también es homeomorfismo.

Ahora simplemente tomamos $k = i$ y $h = f^{-1}$ e independientemente del valor de ε tenemos que:
$d(kfh(x), (x)) = d(iff^{-1}(x), x) = d(x, x) = 0 < \varepsilon$ para toda $x \in I$. $\triangle$

En el siguiente teorema hacemos más débil la condición, en vez de pedirle a f que sea inyectiva sólo le pedimos que haya una franja horizontal que cumpla que cada línea horizontal que tracemos dentro de esa franja corte una sola vez a la gráfica de f. En la Figura 1.2 la franja comprendida entre c y d tiene esta propiedad.

Lo que se está haciendo con esta condición es quitarle "inyectividad" a f, ya que fuera de esa franja especial puede ser que para la misma altura haya más de un punto con esa altura, esto es que f no sea inyectiva.

Teorema 1.10 *Si existen $0 < c < d < 1$ tales que $y \in [c,d] \Rightarrow \# f^{-1}(y) = 1$ entonces f cumple "T".*

Demostración

Para mayor facilidad usaremos la siguiente notación: $a = f^{-1}(c), b = f^{-1}(d)$, f restringida al intervalo $[a,b]$ se denotará por $f|_{[a,b]} : [a,b] \to [c,d]$, notemos que $f|_{[a,b]}$ es inyectiva y por tanto $f|_{[a,b]}^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ existe. Ver Figura 1.2.

Para cada $\varepsilon > 0$ vamos a construir los homeomorfismo h y k de la siguiente manera:

$$h = \begin{cases} h_1 : [0,\varepsilon] \to [0,a] & \textit{linealmente} \\ h_2 : [\varepsilon, 1-\varepsilon] \to [a,b] & \textit{linealmente} \\ h_3 : [1-\varepsilon, 1] \to [b,1] & \textit{linealmente} \end{cases}$$

Ver Figura 1.2.

$$k = \begin{cases} k_1 : [0,c] \to [0,\varepsilon] & \textit{linealmente} \\ h_2^{-1} f|_{[a,b]}^{-1} : [c,d] \to [\varepsilon, 1-\varepsilon] & \\ k_3 : [d,1] \to [1-\varepsilon, 1] & \textit{linealmente} \end{cases}$$

Ver Figura 1.3.

Ahora vemos que h y k tienen las propiedades requeridas ya que, para cualquiera de los siguientes tres casos, tenemos:

1. $x \in [0,\varepsilon] \Rightarrow h(x) \in [0,a] \Rightarrow fh(x) \in [0,c] \Rightarrow kfh(x) \in [0,\varepsilon]$ entonces es claro que $d(kfh(x), x) < \varepsilon$.

2. $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \Rightarrow h(x) \in [a,b] \Rightarrow fh(x) \in [c,d] \Rightarrow kfh(x) = h^{-1}f^{-1}fh(x) = x$ entonces $d(kfh(x), x) = d(x,x) = 0 < \varepsilon$.

3. $x \in [1-\varepsilon, 1] \Rightarrow h(x) \in [b,1] \Rightarrow fh(x) \in [d,1] \Rightarrow kfh(x) \in [1-\varepsilon, 1]$ entonces es claro que $d(kfh(x), x) < \varepsilon$.

Esto es $d(kfh(x), x) < \varepsilon \quad \forall x \in I$ como queríamos. Δ

Por último vamos a hacer todavía un poco más débil la condición haciendo que la franja se pueda degenerar a una línea, esto queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 1.11 *Si existe $c \in I$ tal que $\# f^{-1}(c) = 1$ entonces f cumple "T".*

La demostración de este teorema es muy parecida a la del Teorema 1.13 T3 $\Rightarrow$ T1, por lo cual la evitamos.

Notemos que la diferencia entre esta condición y la condición T3 del Teorema 1.13, la cual es suficiente y necesaria, es mínima.

Para concluir esta sección vamos a ver que las condiciones en los Teoremas 1.9, 1.10 y 1.11 son suficientes pero no necesarias. En el siguiente ejemplo se da una función f que cumple "T" pero no cumple ninguna de las condiciones antes dadas.

Ejemplo 1.2 *Sea f una función cuya gráfica es así:*

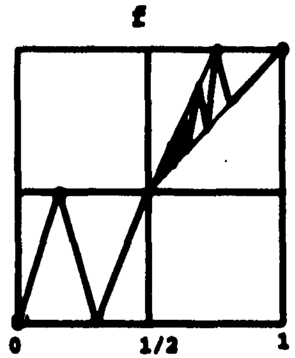

Figura 1.8: f cumple "T" pero $\#f^{-1}(y) \geq 2 \quad \forall y \in I$.

Por el Teorema 1.13 con $a = \frac{1}{2}$ tenemos que f cumple "T", y es fácil ver que $\#f^{-1}(y) \geq 2 \quad \forall y \in I$.

1.7 Caracterización de las funciones que cumplen T

Ahora se van a dar dos caracterizaciones de las funciones que cumplen "T".

Primero vamos a hacer unas observaciones y vamos a demostrar un lema y un teorema que son muy importantes ya que nos explican cómo construir los homeomorfismos h y k.

1.7.1 Preeliminares

En el siguiente lema y teorema nos vamos a fijar en una función continua y suprayectiva $w : [a, 1] \to [a, 1]$ y vamos a suponer que $w^{-1}(a) = \{a\}$. Ver Figura 1.10.

También nos vamos a fijar en la recta que pasa por los puntos (a, a) y $(1, 1)$. Esta recta es la gráfica de la función $g : [a, 1] \to [a, 1]$ donde $g(x) = x$. Pondremos x' en vez de $g(x)$ para ayudarnos a saber si nos referimos a una x en el dominio o en el contradominio.

En las demostraciones hablaremos de $\min w^{-1}(x_i')$ con $x_i' \in [a, 1]$, quiero recalcar que esto es válido ya que en primer lugar $w^{-1}(x_i') \neq \emptyset$ porque w es suprayectiva y en segundo lugar, como $w^{-1}(x_i') \subset [a, 1]$ entonces $w^{-1}(x_i')$ está acotado y por tanto tiene ínfimo. Finalmente observemos que $\{x_i'\}$ es un conjunto cerrado y como w es continua entonces $w^{-1}(x_i')$ es cerrado por tanto $\inf w^{-1}(x_i') = \min w^{-1}(x_i')$, esto quiere decir que $\min w^{-1}(x_i')$ tiene sentido.

También se tomará $a < x_i < \min w^{-1}(x_i')$ con $x_i' \neq a$, quiero hacer notar que esto también se puede ya que, como $w^{-1}(a) = \{a\}$ entonces tenemos que $a < \min w^{-1}(x_i')$ y entonces como entre dos reales hay un real podemos tomar x_i tal que $a < x_i < \min w^{-1}(x_i')$.

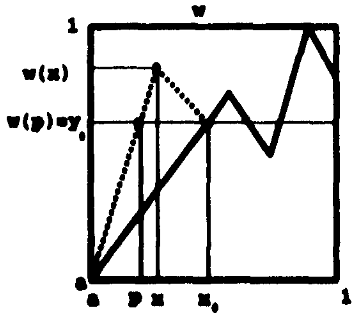

Figura 1.9: Si $y_0 \leq w(x)$ entonces como $w(a) = a$, tendríamos que existe p tal que $p \leq x < x_0$ y $w(p) = y_0$ y entonces $x_0 \neq \min w^{-1}(y_0)$.

Observación 1 *Sea $w : [a, 1] \to [a, 1]$ continua, suprayectiva y $w^{-1}(a) = \{a\}$. Si $y_0 \in (a, 1]$ y $x_0 = \min w^{-1}(y_0)$ entonces para cualquier $x < x_0$ se tiene que $w(x) < y_0$.*

Demostración:
Por contradicción, supongamos que existe $x < x_0$ tal que $y_0 \leq w(x)$, entonces llegaremos a que $\min w^{-1}(y_0) = x_0 \leq x$, lo cual contradice el haber tomado $x < x_0$.

Como supusimos que $a < y_0 \leq w(x)$ y sabemos que $w(a) = a$ (ver Figura 1.9) entonces por el teorema del valor intermedio tenemos que existe

$p \in [a, x]$ tal que $w(p) = y_0$ pero entonces $p \leq x$ y $p \in w^{-1}(y_0)$ y entonces $\min w^{-1}(y_0) \leq p \leq x < x_0$ como queríamos. $\triangle$

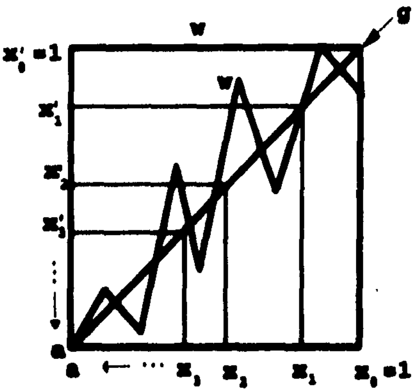

Figura 1.10: w es continua, suprayectiva y $w^{-1}(a) = \{a\}$. Se tiene que $w[x_{i+1}, x_i] \subset (x'_{i+2}, x'_{i-1})$.

Lema 1.1 *Si* $w : [a, 1] \to [a, 1]$ *es continua, suprayectiva y* $w^{-1}(a) = \{a\}$ *entonces existe una sucesión de puntos* (x_n) *tal que:*

1. $1 = x_0 > x_1 > \cdots \to a$

2. $w[x_1, x_0] \subset (x'_2, x'_0]$

3. $w[x_{i+1}, x_i] \subset (x'_{i+2}, x'_{i-1}) \qquad \forall i \geq 1.$

Demostración:
La sucesión (x_n) se construye de la siguiente manera:

1. $x_0 = 1$.

2. x_1 es tal que $a < x_1 < \min w^{-1}(x'_0)$

3. x_2 es tal que $x'_2 < \min w[x_1, x_0]$ y $a < x_2 < \min\{a + \frac{1}{2}, x_1, \min w^{-1}(x'_1)\}$

4. Inductivamente, para $i \geq 3$ tomo a un x_i tal que $x'_i < \min w[x_{i-1}, x_{i-2}]$ y $a < x_i < \min\{a + \frac{1}{i}, x_{i-1}, \min w^{-1}(x'_{i-1})\}$

Se pueden tomar las x_i de esa manera debido a los comentarios de arriba. Ahora veamos que se cumplen las conclusiones del lema.

Se cumple 1:

Por construcción tenemos que $1 = x_0$ y que $x_i < \min\{a + \frac{1}{i}, x_{i-1}, \min w^{-1}(x'_{i-1})\}$ entonces tenemos que $x_i < x_{i-1}$ y que $a < x_i < a + \frac{1}{i}$, como la sucesión $(a + \frac{1}{i}) \to a$ finalmente tenemos que $1 = x_0 > x_1 > \cdots \to a$ como queríamos.

Se cumple 2:

Para ver que $w[x_1, x_0] \subset (x'_2, x'_0]$ tomemos $y \in w[x_1, x_0]$ y veamos que entonces $y \in (x'_2, x'_0]$ esto es que $x'_2 < y \leq x'_0 = 1$.

Como $y \in w[x_1, x_0] \subset [a, 1]$ entonces es claro que $y \leq x'_0 = 1$. Para ver que $x'_2 < y$ notamos que como $y \in w[x_1, x_0]$ entonces $\min w[x_1, x_0] \leq y$ pero por construcción sabemos que $x'_2 < \min w[x_1, x_0]$ de las últimas dos desigualdades obtenemos $x'_2 < y$ como queríamos.

Se cumple 3:

Finalmente demostraremos que si $i \geq 3$ entonces $w[x_{i+1}, x_i] \subset (x'_{i+2}, x'_{i-1})$. Para ver esto supongamos que $j \geq 3$, tomemos $y \in w[x_{j+1}, x_j]$ y veamos que entonces $y \in (x'_{j+2}, x'_{j-1})$, es decir que $x'_{j+2} < y < x'_{j-1}$.

Como escogimos $x'_i < \min w[x_{i-1}, x_{i-2}]$ entonces para $i = j + 2$ tenemos que $x'_{j+2} < \min w[x_{j+1}, x_j]$ pero como $y \in w[x_{j+1}, x_j]$ entonces $\min w[x_{j+1}, x_j] \leq y$ de las dos desigualdades anteriores tenemos que $x'_{j+2} < y$.

Nos falta probar la otra desigualdad, esto es $y < x'_{j-1}$.

Para esto notemos que, como $y \in w[x_{j+1}, x_j]$ entonces existe $x \in [x_{j+1}, x_j]$ tal que $w(x) = y$, de donde $x \leq x_j$. Además, por construcción tenemos que $x_j < \min w^{-1}(x'_{j-1})$ y de las últimas dos desigualdades tenemos que $x \leq \min w^{-1}(x'_{j-1})$. Usando la Observación 1, con $y_0 = x'_{j-1}$ se tiene que $w(x) = y < x'_{j-1}$ como queríamos. $\triangle$

Teorema 1.12 *Si $w : [a, 1] \to [a, 1]$ es continua, suprayectiva, $w^{-1}(a) = \{a\}$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un homeomorfismo $h : [a, 1] \to [a, 1]$ tal que $d(h^{-1}wh(x), x) < \varepsilon \quad \forall x \in [a, 1]$.*

Demostración:

Tomamos $r \in (0, 1)$ tal que $(1 - a)(1 - r) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Es fácil ver que la sucesión $(s_i) = (a + (1 - a)r^i)$ es estrictamente decreciente y está contenida en $[a, 1]$ por lo que genera una partición de $[a, 1]$.

Aquí vale la pena hacer un pequeño comentario, en el lema anterior la sucesión (x_n) constituía una partición de $[a, 1]$, con la sucesión (s_n) se

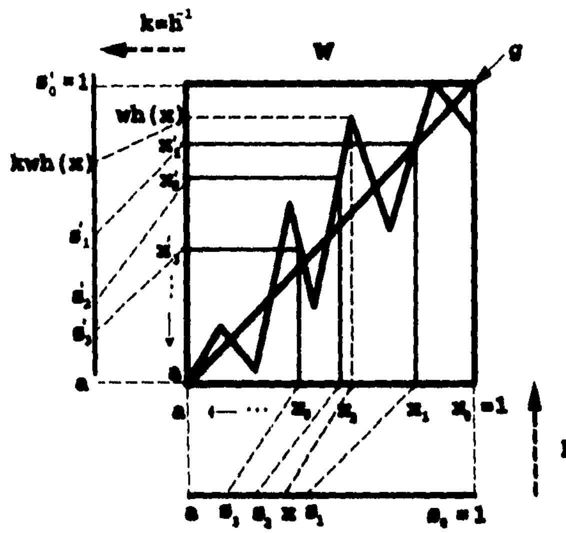

Figura 1.11: h transforma linealmente $[s_{i+1}, s_i]$ en $[x_{i+1}, x_i]$ y h^{-1} transforma linealmente $[x'_{i+1}, x'_1]$ en $[s'_{i+1}, s'_1]$. x y $kwh(x)$ están en intervalos adyacentes.

construye una partición de $[a, 1]$ en la que el mayor de los intervalos tiene tamaño $(1-a)(1-r) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora podemos construir $h : [a, 1] \to [a, 1]$ haciendo que $[s_{i+1}, s_i]$ se transforme linealmente en $[x_{i+1}, x_i]$ y $h(a) = a$.

Desde luego que la sucesión (s'_i) también constituye una partición de $[a, 1]$.

Construimos $k : [a, 1] \to [a, 1]$ haciendo que $[x'_{i+1}, x'_i]$ se mapee linealmente en $[s'_{i+1}, s'_i]$ y $k(a) = a$. Notemos que $k = h^{-1}$. Ver Figura 1.11.

Es claro que h y k son homeomorfismos, veamos que $d(h^{-1}wh(x), x') < \varepsilon$ $\forall x \in [a, 1]$.

Primero probemos que si $x \in (a, 1]$ entonces $h^{-1}wh(x)$ y x' están en el mismo intervalo, o en intervalos adyacentes, de la partición $\{s'_i\}$, para esto tenemos dos casos:

Si $x \in [s_1, 1]$ entonces $h(x) \in [x_1, x_0]$ entonces por el Lema 1.1 $wh(x) \in (x'_2, 1]$ entonces $h^{-1}wh(x) \in [s'_2, 1]$. Además es claro que $x' \in [s'_1, 1]$.

Si $x \in [s_{i+1}, s_i]$ entonces $h(x) \in [x_{i+1}, x_i]$ entonces por el Lema 1.1

$wh(x) \in (x'_{i+2}, x'_{i-1})$ entonces $h^{-1}wh(x) \in [s'_{i+2}, s'_{i-1}]$. Además es claro que $x' \in [s'_{i+1}, s'_i]$. Por tanto $h^{-1}wh(x)$ y x' están en el mismo intervalo, o en intervalos adyacentes.

Para $x = a$ se tiene que $h^{-1}wh(a) = a$ por lo que no hay problema.

Finalmente como $h^{-1}wh(x)$ y x' están en el mismo intervalo o intervalos adyacentes entonces $d(h^{-1}wh(x), x')$ es menor que el doble de la longitud del intervalo más grande de la partición $\{s'_n\}$, que resulta ser $[s'_1, 1]$ y tener longitud $(1-a)(1-r)$. Por tanto $d(h^{-1}wh(x), x) = d(h^{-1}wh(x), x') < 2(1-a)(1-r) < \varepsilon$. $\triangle$

1.7.2 Resultados finales para la condición T

Teorema 1.13 *Las siguientes tres proposiciones son equivalentes:*

- *T1) Si $\varepsilon > 0$ entonces existen homeomorfismos $h, k : I \to I$ tales que $d(kfh(x), x) < \varepsilon$ para toda $x \in I$. (Propiedad "T")*
- *T2) No hay una colección finita de intervalos de nivel que cubra a I.*
- *T3) Existe $g \in \{f, fJ, Jf, JfJ\}$ y $0 \le a < 1$ tal que $g(s) \le g(a) < g(t)$ para toda $0 \le s \le a < t \le 1$.*

Demostración:

Antes de empezar la demostración quiero recalcar que lo que dice la condición T3 es que la gráfica de g se puede meter en los dos rectángulos determinados por los puntos $(0,0), (a,0), (0, g(a)), (a, g(a))$ y los puntos $(a, g(a)), (1, g(a)), (a, 1), (1, 1)$. En el primer rectángulo, la gráfica de g puede tocar el techo y la base y además se puede degenerar en un punto, pero en el segundo rectángulo puede tocar el techo pero no la base. Ver Figura 1.13 (izquierda).

T1 $\Rightarrow$ T2

Por reducción al absurdo supongamos que f cumple "T" y que existe una colección finita de intervalos de nivel, $G = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]\}$ que cubre a I.

Como f cumple "T" entonces para $\varepsilon_0 = \frac{1}{2n} > 0$ existen homeomorfismos $h, k : I \to I$ tales que $d(kfh(x), x) < \varepsilon_0 = \frac{1}{2n}$ para toda $x \in I$.

Ahora nos fijamos en $H = \{[h^{-1}(a_1), h^{-1}(b_1)], \ [h^{-1}(a_2), h^{-1}(b_2)], ..., [h^{-1}(a_n), h^{-1}(b_n)]\}$, y notamos que siguen siendo un número finito de intervalos que cubren a I, entonces existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $|h^{-1}(a_j) - h^{-1}(b_j)| \ge \frac{1}{n}$.

Pero como $[a_j, b_j]$ es un intervalo de nivel entonces por el Teorema 1.6, con $\varepsilon_0 = \frac{1}{2n} > 0$ se tiene que $|h^{-1}(a_j) - h^{-1}(b_j)| < 2\varepsilon_0 = \frac{1}{n}$, contradicción.

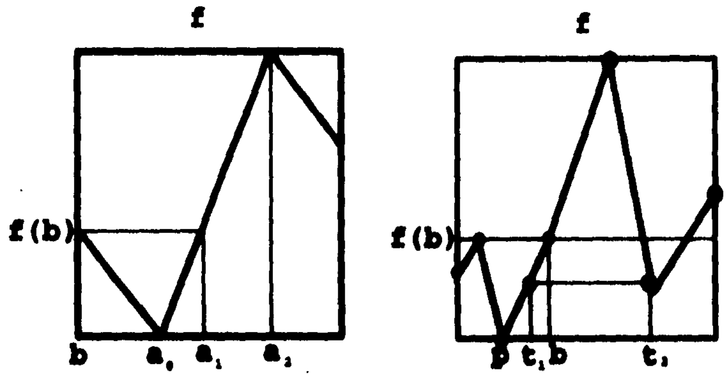

Figura 1.12: (Izquierda) Si $b = 0$ y $0 < f(b) < 1$ entonces $b \in [b, a_0)$. (Derecha) Si $f(t_2) < f(b)$ entonces $b \in (t_1, t_2)$.

T2 $\Rightarrow$ T3
Sea $G = \{A_i\}_{i \in \Lambda}$ el conjunto de todos los intervalos de nivel. Me fijo en el conjunto $H = \{B_i\}_{i \in \Lambda}$ donde B_i es el interior de A_i en I.

Afirmo que $\bigcup_{i \in \Lambda} B_i \neq I$ ya que si $\bigcup_{i \in \Lambda} B_i = I$ entonces $\{B_i\}_{i \in \Lambda}$ sería una cubierta abierta de I y como I es compacto entonces habría una subcubierta finita $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ y entonces $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ también cubriría a I contrario a nuestra hipótesis.

Como $\bigcup_{i \in \Lambda} B_i \neq I$ entonces existe $b \in I$ tal que $b \notin B_i \;\; \forall i \in \Lambda$. Entonces tenemos tres casos:

Caso 1) $b = 0$:

Si $b = 0$ veremos que o bien 1) ($f(b) = 0$ y $f^{-1}(0) = \{0\}$) ó 2) ($f(b) = 1$ y $f^{-1}(1) = \{1\}$) y entonces se tiene que $g = f$ y $a = b$ para el primer caso y que $g = Jf$ y $a = b$ para el segundo cumplen lo requerido.

Primero vamos a probar que $f(b) = 0$ ó $f(b) = 1$ para esto supongamos que $0 < f(b) < 1$ entonces como f es suprayectiva, existen a_0, a_2 tales que $f(a_0) = 0$ y $f(a_2) = 1$, (notemos que entonces $a_0 \neq b \neq a_2$ porque $0 \neq f(b) \neq 1$), ver Figura 1.12 (izquierda), entonces por el teorema del valor intermedio tenemos que existe $a_1 \in [a_0, a_2]$ (como $0 = b \neq a_0 \leq a_1$ entonces $0 < a_1$) tal que $f(a_1) = f(b)$ y por tanto $[b, a_1]$ es un intervalo de nivel cuyo interior es $[b, a_0) = B_i$, para algún $i \in \Lambda$ y entonces $b \in B_i$ contradicción por tanto $f(b) = 0$ ó $f(b) = 1$.

Ahora bien, si $f(b) = 0$ (caso 1) entonces si existiera $x_0 \neq b$ tal que $f(x_0) = 0$ entonces $[b, x_0]$ sería un intervalo de nivel y $b \in [b, x_0) = B_i$ para alguna $i \in \Lambda$ lo cual es una contradicción. De ahí que $f^{-1}(0) = \{0\}$.

Y si $f(b) = 1$ (caso 2) se resuelve de manera análoga.

Caso 2) $b = 1$:

Análogo al anterior se tiene que 1) ($f(b) = 0$ y $f^{-1}(0) = \{0\}$) ó 2) ($f(b) = 1$ y $f^{-1}(1) = \{1\}$) y entonces se tiene que $g = fJ$ y $a = J(b)$ para el primer caso y que $g = JfJ$ y $a = J(b)$ para el segundo cumplen lo requerido.

Caso 3) $0 < b < 1$:

Los dos casos anteriores se hicieron para que no obtengamos $a = 1$.

Ahora notemos que $b = \max f^{-1}(f(b))$ ó $b = \min f^{-1}(f(b))$, porque si no, tendríamos que $b \neq \max f^{-1}(f(a))$ y por tanto existiría a_2 con $b < a_2$ tal que $f(a_2) = f(b)$, y también tendríamos que $b \neq \min f^{-1}(f(b))$ y entonces existiría a_1 con $a_1 < b$ tal que $f(a_1) = f(b)$, de donde $b \in (a_1, a_2)$ que es el interior de un intervalo de nivel lo cual es una contradicción.

Entonces tenemos dos casos:

Caso 1) $b = \max f^{-1}(f(b))$:

Como f es suprayectiva entonces existe p tal que $f(p) = 0$ y ahora tenemos tres subcasos:

Subcaso 1) Si $p < b$ entonces $g = f$ y $a = b$ nos sirven ya que si $b < t \leq 1$ entonces $f(b) < f(t)$, (ya que no podemos tener $b < t_2 \leq 1$ tal que $f(t_2) < f(b)$, ver Figura 1.12 (derecha), porque entonces usando que $p < b$ y el teorema del valor intermedio obtendríamos que hay un punto $t_1 \in [p, b]$ tal que $f(t_1) = f(t_2)$ y entonces $b \in (t_1, t_2)$ contradicción. Y tampoco podemos tener $b < t_2 \leq 1$ tal que $f(t_2) = f(b)$ porque entonces $b \neq \max f^{-1}(f(b))$ contradicción.)

Y si $0 \leq s \leq b$ entonces, por argumentos semejantes tenemos que $f(s) \leq f(b)$.

Subcaso 2) Si $p = b$ entonces de nuevo $g = f$ y $a = b$ nos sirven, la demostración es parecida.

Subcaso 3) Si $b < p$ entonces $g = Jf$ y $a = b$ nos sirven.

Caso 2) $b = \min f^{-1}(f(b))$:

En este caso también se pueden encontrar g y a. La demostración es parecida a la anterior.

T3 ⇒ T1

Vamos a demostrar que g cumple "T" y entonces por el Teorema 1.1 se sigue que f cumple "T" como queremos.

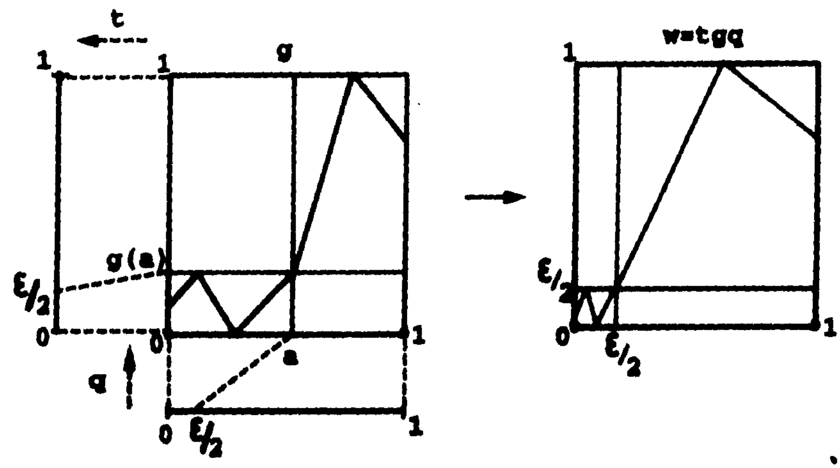

Figura 1.13: Metemos el rectángulo $(0,0),(a,0),(0,g(a)),(a,g(a))$ en el cuadrado $(0,0),(\frac{\varepsilon}{2},0),(0,\frac{\varepsilon}{2}),(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2})$.

Si $a = 0$ entonces el primer rectángulo se degenera en un punto y entonces directamente del Teorema 1.12 se obtiene el resultado, por tanto supongamos que $a > 0$. También vamos a suponer que $\varepsilon < 1$, (si $\varepsilon > 1$ cualquier par de homeomorfismos h y k sirven).
Primero vamos a meter el rectángulo $(0,0),(a,0),(0,g(a)),(a,g(a))$ en el cuadrado $(0,0),(0,\frac{\varepsilon}{2}),(\frac{\varepsilon}{2},0),(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2})$ esto se logra aplicando a g los siguientes homeomorfismos:

$$q = \begin{cases} q_1 : [0,\frac{\varepsilon}{2}] \to [0,a] & \textit{linealmente} \\ q_2 : [\frac{\varepsilon}{2},1] \to [a,1] & \textit{linealmente} \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} t_1 : [0,g(a)] \to [0,\frac{\varepsilon}{2}] & \textit{linealmente} \\ t_2 : [g(a),1] \to [\frac{\varepsilon}{2},1] & \textit{linealmente} \end{cases}$$

De nuevo por el Teorema 1.1 podemos estudiar a la función $w = tgq$ en vez de la función g. Ver Figura 1.13.

Es fácil ver que $w[\frac{\varepsilon}{2},1] = [\frac{\varepsilon}{2},1]$ entonces usamos el Teorema 1.12 para encontrar un homeomorfismo $\hat{h} : [\frac{\varepsilon}{2},1] \to [\frac{\varepsilon}{2},1]$ tal que $d(\hat{h}^{-1}w\hat{h}(x),x) < \varepsilon$ para toda $x \in [\frac{\varepsilon}{2},1]$.

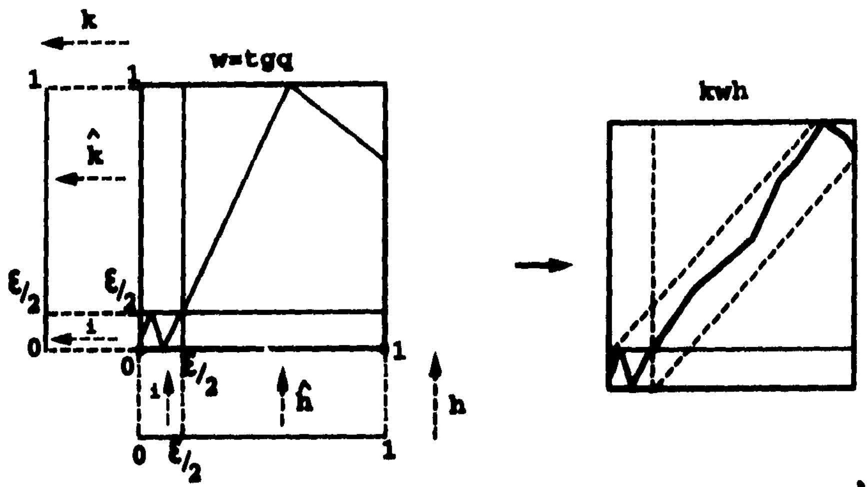

Figura 1.14: h y k consisten en tomar la $\hat{h}$ y $\hat{k}$ del Teorema 1.12 y extenderlas a I por medio de la identidad i.

Finalmente los homeomorfismos:

$$h = \begin{cases} h_1 : [0, \frac{\varepsilon}{2}] \to [0, \frac{\varepsilon}{2}] & \textit{linealmente} \\ \hat{h} : [\frac{\varepsilon}{2}, 1] \to [\frac{\varepsilon}{2}, 1] & \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} k_1 : [0, \frac{\varepsilon}{2}] \to [0, \frac{\varepsilon}{2}] & \textit{linealmente} \\ \hat{h}^{-1} : [\frac{\varepsilon}{2}, 1] \to [\frac{\varepsilon}{2}, 1] & \end{cases}$$

(Ver Figura 1.14).
nos sirven ya que si $x \in [0, \frac{\varepsilon}{2}]$ entonces $kwh(x) \in [0, \frac{\varepsilon}{2}]$ y por tanto $d(kwh(x), x) < \varepsilon$ y si $x \in [\frac{\varepsilon}{2}, 1]$ entonces $kwh(x) = \hat{k}w\hat{h}(x)$ de donde $d(kwh(x), x) < \varepsilon$ como se quería. $\triangle$

1.8 Caracterización de las funciones que cumplen C

Las condiciones suficientes y necesarias para la propiedad "C" son muy parecidas a las de la propiedad "T", sólo que ahora nos fijamos en los intervalos de desplazamiento en vez de fijarnos en intervalos de nivel, y al punto a le pedimos que sea un punto fijo.

Notaremos que las demostraciones son muy parecidas a las de la propiedad "T".

Teorema 1.14 *Las siguientes tres proposiciones son equivalentes:*

- *C1) Si $\varepsilon > 0$ entonces existe un homeomorfismo $h : I \to I$ tal que $d(h^{-1}fh(x), x) < \varepsilon$ para toda $x \in I$. (Propiedad "C")*

- *C2) No hay una colección finita de intervalos de desplazamiento que cubra a I.*

- *C3) Existe $g \in \{f, JfJ\}$ y $0 \leq a < 1$ tal que $g(a) = a$ y $g(s) \leq g(a) < g(t)$ para toda $0 \leq s \leq a < t \leq 1$.*

Demostración:

C1 $\Rightarrow$ C2

Por reducción al absurdo supongamos que f cumple "C" y que existe una colección finita de intervalos de desplazamiento, $G = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]\}$ que cubre a I.

Como f cumple "C" entonces para $\varepsilon_0 = \frac{1}{n} > 0$ existe un homeomorfismo $h : I \to I$ tal que $d(h^{-1}fh(x), x) < \varepsilon_0 = \frac{1}{n}$ para toda $x \in I$.

Análogo a T1 $\Rightarrow$ T2, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $|h^{-1}(a_j) - h^{-1}(b_j)| \geq \frac{1}{n}$.

Pero como $[a_j, b_j]$ es un intervalo de desplazamiento entonces por el Teorema 1.7 se tiene que $|h^{-1}(a_j) - h^{-1}(b_j)| < \varepsilon_0 = \frac{1}{n}$, contradicción.

C2 $\Rightarrow$ C3

Tomo $G = \{A_i\}_{i \in \Lambda}$ donde $A_i = [s, t]$ un intervalo de desplazamiento, ó $A_i = [s, r] \bigcup [r, t]$ donde $[s, r]$ y $[r, t]$ son intervalos de desplazamiento. Me fijo en $H = \{B_i\}_{i \in \Lambda}$ donde B_i es el interior de A_i.

De nuevo se obtiene que $\bigcup_{i \in \Lambda} B_i \neq I$ y entonces existe $b \in I$ tal que $b \notin B_i \quad \forall i \in \Lambda$. Y tenemos tres casos:

Caso 1) $b = 0$:

Si $b = 0$ veremos que 1) $f(b) = 0$ y 2) $f^{-1}(0) = \{0\}$ y entonces se tiene que $g = f$ y $a = b$ cumplen lo requerido.

Es fácil probar 1) ya que si $f(b) > 0$ entonces $[b, f(b)]$ es un intervalo de desplazamiento y $b \in [b, f(b))$ lo cual es una contradicción.

También es fácil probar 2) ya que si existiera $x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) = 0$ entonces $[0, x_0)$ es el interior de un intervalo de desplazamiento al cual $b = 0$ pertenece, contradicción.

Caso 2) $b = 1$:

Análogo al anterior se tiene que 1) $f(b) = 1$ y 2) $f^{-1}(1) = \{1\}$ y entonces se tiene que $g = JfJ$ y $a = J(b)$ cumplen lo requerido.

Caso 3) $0 < b < 1$:

Los dos casos anteriores se hicieron para evitar que $a = 1$.
Primero notemos que $b = f(b)$, (ya que si $b < f(b)$ entonces podemos encontrar x_0 cerca de b tal que $x_0 < b$ y $b < f(x_0)$ y entonces tendrímos que $b \in (x_0, f(x_0))$ lo cual contradice que $b \notin B_i$. Para $b > f(b)$ es análogo).

Ahora, si existe $s_0 < b$ tal que $f(s_0) = f(b)$ entonces $g = f$ y $a = b$ nos sirven ya que:
Si $0 \leq s \leq b$ entonces $f(s) \leq f(b)$ (si tuvieramos $b = f(b) < f(s)$ entonces $s < b$ y tendríamos que $b \in (s, f(s))$, contradicción).

Si $b < t \leq 1$ entonces $f(b) < f(t)$ (si $f(t) = f(b)$ entonces b estaría en el interior de $[s_0, f(s_0) = f(b)] \bigcup [f(b) = f(t), t]$ contradicción, y si $f(t) < f(b) = b$ entonces $b \in (f(t), t)$, contradicción.

Si no existe $s_0 < b$ tal que $f(s_0) = f(b)$ entonces $g = JfJ$ y $a = J(b)$ nos sirven, la demostración es análoga.

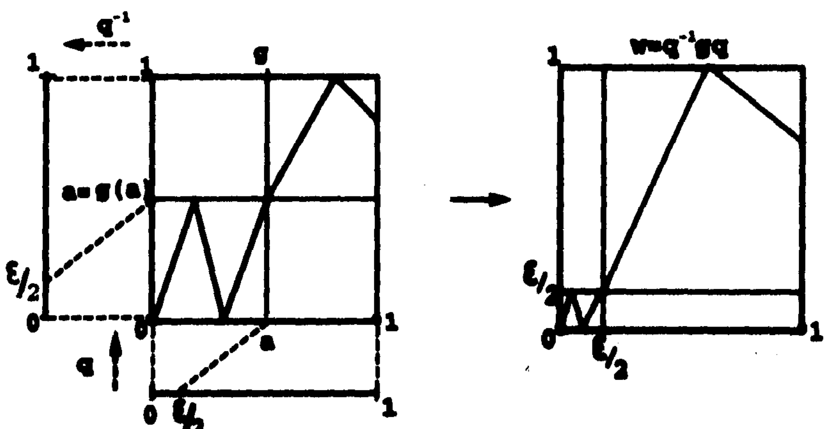

Figura 1.15: Metemos el cuadrado $(0,0), (a,0), (0,g(a)), (a,g(a))$ en el cuadrado $(0,0), (\frac{\epsilon}{2},0), (0,\frac{\epsilon}{2}), (\frac{\epsilon}{2},\frac{\epsilon}{2})$.

C3 $\Rightarrow$ C1

Vamos a demostrar que g cumple "C" y entonces por el Teorema 1.2 ten-

dremos que f cumple "C".

Si $a = 0$ aplicamos directamente el Teorema 1.12, por tanto supongamos que $a > 0$. También podemos suponer que $\varepsilon < 1$, (para $\varepsilon > 1$ siempre podemos encontrar el homeomorfismo h).
Como se pide que $g(a) = a$ entonces el cuadrilátero $(0,0),(a,0),(0,g(a))$ y $(a,g(a))$ ya no sólo es un rectángulo, como pasaba en la propiedad "T", si no también un cuadrado.

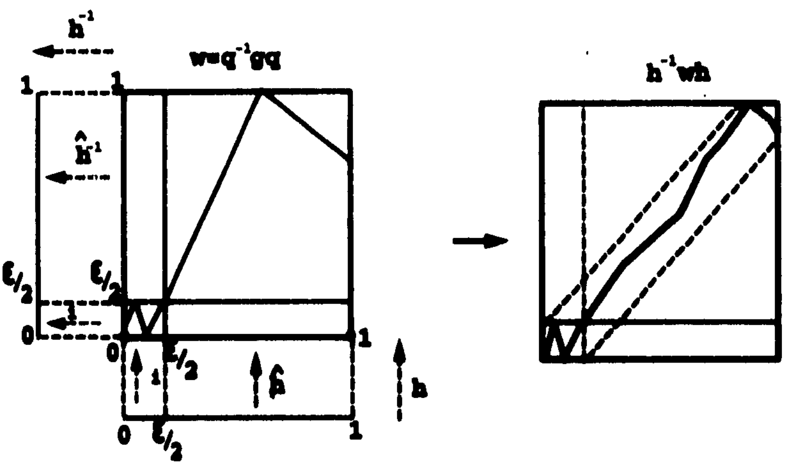

Figura 1.16: h consiste en tomar la $\hat{h}$ del Teorema 1.12 y extenderla a I por medio de la identidad i.

Ahora igual que para la propiedad "T" metemos el cuadrado $(0,0),(0,g(a))$, $(a,0),(a,g(a))$ en el cuadrado $(0,0),(0,\frac{\varepsilon}{2}),(\frac{\varepsilon}{2},0),(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2})$ esto se logra aplicando a g el siguiente homeomorfismo:

$$q = \begin{cases} q_1 : [0,\frac{\varepsilon}{2}] \to [0,a] & \textit{linealmente} \\ q_2 : [\frac{\varepsilon}{2},1] \to [a,1] & \textit{linealmente} \end{cases}$$

Notemos que:

$$q^{-1} = \begin{cases} q_1^{-1} : [0,a] \to [0,\frac{\varepsilon}{2}] & \textit{linealmente} \\ q_2^{-2} : [a,1] \to [\frac{\varepsilon}{2},1] & \textit{linealmente} \end{cases}$$

De nuevo por el Teorema 1.2 podemos estudiar a la función $w = q^{-1}gq$ en vez de la función g. Ver Figura 1.15.

Es fácil ver que $w[\frac{\varepsilon}{2},1] = [\frac{\varepsilon}{2},1]$ entonces usamos el Teorema 1.12 para encontrar un homeomorfismo $\hat{h} : [\frac{\varepsilon}{2},1] \to [\frac{\varepsilon}{2},1]$ tal que $d(\hat{h}^{-1}w\hat{h}(x),x) < \varepsilon$ para toda $x \in [\frac{\varepsilon}{2},1]$.

Finalmente el homeomorfismo:

$$h = \begin{cases} h_1 : [0,\frac{\varepsilon}{2}] \to [0,\frac{\varepsilon}{2}] & \textit{linealmente} \\ \hat{h} : [\frac{\varepsilon}{2},1] \to [\frac{\varepsilon}{2},1] & \end{cases}$$

(ver Figura 1.16)
nos sirve ya que si $x \in [0,\frac{\varepsilon}{2}]$ entonces $h^{-1}wh(x) \in [0,\frac{\varepsilon}{2}]$ y por tanto $d(h^{-1}wh(x),x) < \varepsilon$ y si $x \in [\frac{\varepsilon}{2},1]$ entonces $h^{-1}wh(x) = \hat{k}w\hat{h}(x)$ de donde $d(h^{-1}wh(x),x) < \varepsilon$ como se quería.

Capítulo 2

Funciones en la circunferencia que tienen una conjugada cerca de la identidad

2.1 Introducción

En este capítulo vamos a plantear y resolver el mismo problema del capítulo anterior pero ahora para funciones que van de la circunferencia en la circunferencia.

Hasta donde yo sé, este problema no ha sido resuelto anteriormente. La solución al problema es la aportación que hace esta tesis y además, para mí, fue una iniciación a la investigación, por estas dos razones este capítulo es la parte más relevante de la tesis.

Por ser mi iniciación a la investigación, me resulta importante exponer todo el desarrollo del problema, desde su planteamiento, hasta su solución, explicando a cada paso qué ideas se me ocurrieron, qué interpretación gráfica le dí, y qué herramientas usé, ya que creo que son elementos que generalmente se encuentran en una investigación.

Dar toda esta explicación es importante porque es la primera vez que busco la solución a un problema que no aparece como ejercicio en un libro, en cuyo caso hay una serie de resultados que sabemos que, de una u otra manera, hay que usar lo cual facilita mucho el trabajo.

2.2 Planteamiento del problema

2.2.1 Cómo plantear el problema para la circunferencia

El problema del capítulo anterior se podría resumir con las dos siguientes frases:

"Caracterizar las funciones continuas y suprayectivas que van del intervalo al intervalo que sean topológicamente equivalentes a una función que esté cerca de la identidad".

Y *"Caracterizar las funciones continuas y suprayectivas que van del intervalo al intervalo que tengan una función conjugada cerca de la identidad".*

Para replantear este problema para la circunferencia simplemente tenemos que cambiar la palabra *intervalo* por la palabra *circunferencia* en las dos frases de arriba, pero también tenemos que definir claramente a quién vamos a tomar por la circunferencia, qué significa *cerca*, es decir cómo vamos a definir la distancia en la circunferencia y entonces sí, definir qué significa que una función sea topológicamente equivalente o una función conjugada esté cerca de la identidad.

La manera natural de definir a la circunferencia es tomándola como $S^1 = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con la distancia usual. Sin embargo, se puede demostrar que el problema planteado para S^1 es equivalente al planteado para el espacio topológico X siempre que X es homemorfo a S^1.

Al tratar de imaginarme el problema, al tratar de hacer un dibujo de una función de S^1 en S^1 me dí cuenta de que la mejor manera de visualizarlo era pensando a f como una trayectoria, esto es, pensar cómo muevo, de manera continua, la pluma en la circunferencia a medida que pasa el tiempo. Pero aquí el tiempo, es decir el dominio, no es el intervalo I, como sucede con las trayectorias, sino la circunferencia S^1. Pero se sabe que la circunferencia es homeomorfa a el intervalo I pegando sus extremos. Esto tiene además la ventaja de que estamos haciendo el problema más parecido al problema del capítulo anterior el cual ya resolvimos. Por estas razones vamos a definir a la circunferencia y su métrica de la siguiente manera.

2.2.2 Escenario

Vamos a manejar los siguientes conceptos y la siguiente notación:

Definición 2.1 *Definimos la relación $\sim$ en I de la siguiente manera:*
$x \sim y \Leftrightarrow (x = y \text{ o } x, y \in \{0,1\})$.

Es fácil demostrar que $\sim$ es de equivalencia.
Ahora nos fijamos en el conjunto de las clases de equivalencia:

Definición 2.2 *Definimos el conjunto* $I_{/\sim}$ *de la siguiente manera:*
$I_{/\sim} = \{\overline{x} : x \in I\}$ *donde* $\overline{x}$ *es la clase de equivalencia de* x.

Y lo dotamos de la siguiente métrica:

Definición 2.3 *Definimos la métrica* d *de la siguiente manera:*
$d(\overline{x}, \overline{y}) = min\{|x-y|, 1-|x-y|\}$.

También resulta fácil, aunque un poco largo, demostrar que d está bien definida y que efectivamente es métrica.
Por $I_{/\sim}$ entenderemos $I_{/\sim}$ con la topología inducida por la métrica d. En varios libros viene demostrado que $I_{/\sim}$ es homeomorfo a S^1 por lo que efectivamente estamos estudiando el espacio adecuado.
De aquí en adelante supondremos que $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ es una función **continua** y **suprayectiva.**

Definición 2.4 *Diremos que la función* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T" si para toda* $\varepsilon > 0$ *existen homeomorfismos* $h, k : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *tales que* $d(kfh(\overline{x}), \overline{x}) < \varepsilon$ *para toda* $\overline{x} \in I_{/\sim}$.

Definición 2.5 *Diremos que la función* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "C" si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe un homeomorfismo* $h : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *tal que* $d(h^{-1}fh(\overline{x}), \overline{x}) < \varepsilon$ *para toda* $\overline{x} \in I_{/\sim}$.

Que la función f sea topológicamente equivalente a una función que esté cerca de la identidad quiere decir que f cumple "T", de hecho kfh es la función topológicamente equivalente a f que está cerca de la identidad.

Y que la función f tenga una función conjugada cerca de la identidad quiere decir que f cumple "C", de hecho $h^{-1}fh$ es la conjugada de f que está cerca de la identidad.

2.2.3 Objetivos

1. Caracterizar las funciones $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ que cumplen "T".

2. Caracterizar las funciones $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ que cumplen "C".

2.3 Cómo se ven las funciones $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$

Las gráficas de las funciones $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ se ven muy parecidas a las de las funciones $f : I \to I$ sólo que en los bordes del cuadrado se comportan de manera especial. Notemos tres diferencias escenciales entre las gráficas de las funciones de I en I y las gráficas de las funciones de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$.

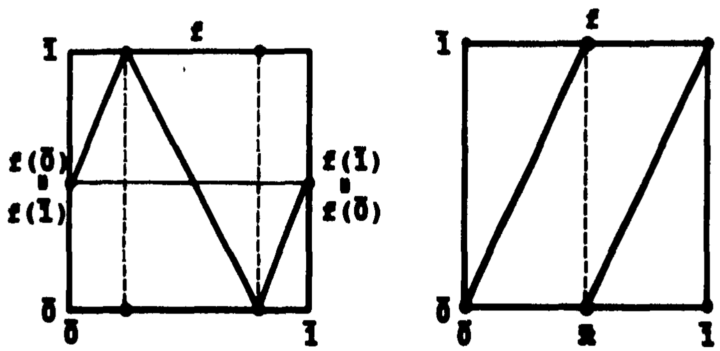

Figura 2.1: (Izquierda) $f(\bar{0}) = f(\bar{1})$. Y si $f(\bar{x}) = \bar{0}$ entonces $f(\bar{x}) = \bar{1}$. (Derecha) f salta en el punto $\bar{x}$.

Para las gráficas de las funciones de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$ tenemos que:

1. La gráfica debe tocar el borde izquierdo a la misma altura que el borde derecho, ya que $\bar{0} = \bar{1}$.

2. Donde la gráfica toca el techo también debe tocar el suelo, ya que $\bar{0} = \bar{1}$.

3. A pesar de que f es continua la gráfica de f puede saltar del techo al suelo o del suelo al techo, ya que $\bar{0} = \bar{1}$.

Ver Figura 2.1.

De nuevo el objetivo, para la propiedad "T" es encontrar deformaciones h y k tales que la gráfica de la función kfh quede dentro de la franja de radio ε sólo que en este caso la franja salta en las esquinas del cuadrado, ver Figura 2.2

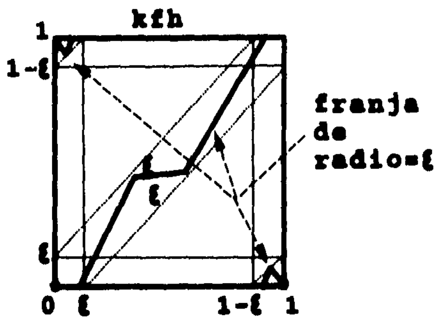

Figura 2.2: La función kfh debe quedar dentro de la franja de radio ε, la franja salta en las esquinas.

2.4 Primeras observaciones

2.4.1 Si $r, s : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ son homeomorfismos podemos estudiar a rfs o a $r^{-1}fr$ en vez de estudiar a f.

Los resultados de esta sección son análogos a los del Capítulo 1 y nos dicen que si $r, s : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ son homeomorfismos entonces podemos estudiar a rfs en lugar de f en el caso de la propiedad "T" y podemos estudiar a $r^{-1}fr$ en lugar de f en el caso de la propiedad "C". Los dos siguientes teoremas formalizan estas ideas y no se dan sus demostraciones ya que son análogas a las del Capítulo 1.

Teorema 2.1 *Si $r, s : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ son homeomorfismos entonces:*
$f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T"* si y sólo si $rfs : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T".*

Teorema 2.2 *Si $r : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ es homeomorfismo entonces:*
$f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "C"* si y sólo si $r^{-1}fr : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "C".*

2.4.2 Las gráficas de las funciones $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ se pueden trasladar y reflejar

En esta sección voy a explicar la parte de la investigación que más me gustó, la que más me ayudó a entender el problema y a poder verlo gráficamente.

Como la gráfica de f está en $I_{/\sim} \times I_{/\sim}$, i.e. el toro, entonces, si me voy moviendo de izquierda a derecha, cuando llego al borde derecho, aparezco de nuevo por el borde izquierdo. Análogamente, si voy de abajo hacia arriba, cuando llego al techo, aparezco por el piso. Esto me dió la idea de que la gráfica de f se podía trasladar.

La gráfica de una función de S^1 en S^1 está contenida en el toro. Para visualizar la función dibujamos una circunferencia horizontal y para cada punto en esa circunferencia-dominio su imagen debe estar en una circunferencia y por eso debemos trazar circunferencias verticales en cada uno de estos puntos y localizar ahí a $f(x)$, ver Figura 2.3.

Las siguientes definiciones y teoremas formalizan estas ideas.

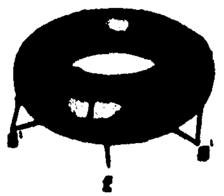

Figura 2.3: La gráfica de f está en el toro.

Definición 2.6 *Sea $0 \leq \theta \leq 1$, definimos $r_\theta : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ como:*

$$r_\theta(\overline{x}) = \begin{cases} \overline{x+\theta} & si \ \ 0 \leq x+\theta \leq 1 \\ \overline{x+\theta-1} & si \ \ 1 < x+\theta \leq 2 \end{cases}$$

y la llamamos una rotación de $2\pi\theta$ radianes.

Para darnos una idea de cómo se comporta r_θ imaginemos que el intervalo I es una hilera de sillas con niños sentados en ellas. Lo que hace r_θ es decirle a cada niño que se recorra θ lugares a la derecha pero si al ir contando llega a la última silla (la "1") entonces debe ir a la primer silla (la "0") y debe seguir contando desde ahí.

Es fácil ver que r_θ está bien definida, y como r_θ es una rotación también es fácil demostrar que es un homeomorfismo, por eso no vamos a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *La rotación $r_\theta : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ es un homeomorfismo.*

Corolario 2.1 *La función $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "T" si y sólo si:*

1. *$fr_{\theta_1} : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "T"*

2. $r_{\theta_2} f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T"*

3. $r_{\theta_2} f r_{\theta_1} : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T".*

La demostración se sigue directamente del teorema anterior y del Teorema 2.1. Lo importante aquí es ver que gráficamente:
1) Quiere decir que podemos rotar sobre el eje X, esto es, recorrer la gráfica de f, θ_1 unidades hacia la izquierda.
2) Quiere decir que podemos rotar sobre el eje Y, esto es, recorrer la gráfica de f, θ_2 unidades hacia arriba.
3) Quiere decir que podemos rotar sobre el eje X y sobre el eje Y a la vez, esto es, recorrer la gráfica de f, θ_1 unidades hacia la izquierda y θ_2 unidades hacia arriba.
Ver Figura 2.4.

También tenemos un resultado análogo al corolario anterior pero ahora nos habla de la propiedad "C".

Corolario 2.2 *La función* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "C" si y sólo si* $r_\theta^{-1} f r_\theta : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "C".*

La demostración también se sigue del teorema anterior y del Teorema 2.2. Pero notamos que para el caso de la propiedad "C" tenemos menos variedad porque una vez que rotamos sobre el eje X se debe hacer la rotación inversa sobre el eje Y. Al hacer esto se desliza la gráfica de f paralelamente a la identidad. Ver Figura 2.5.

Definición 2.7 *Definimos* $J : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *como:* $J(\overline{x}) = \overline{1-x}$ *y decimos que* J *es una reflexión.*

Es fácil ver que J está bien definida y es un homeomorfismo. También es fácil ver que lo que hace J es reflejar el intervalo con respecto al punto 1/2. Notemos también que $J^{-1} = J$.

Teorema 2.4 *La reflexión* $J : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *es un homeomorfismo.*

Corolario 2.3 *La función* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T" si y sólo si:*

1. $fJ : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T"*

2. $Jf : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T"*

3. $JfJ : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T".*

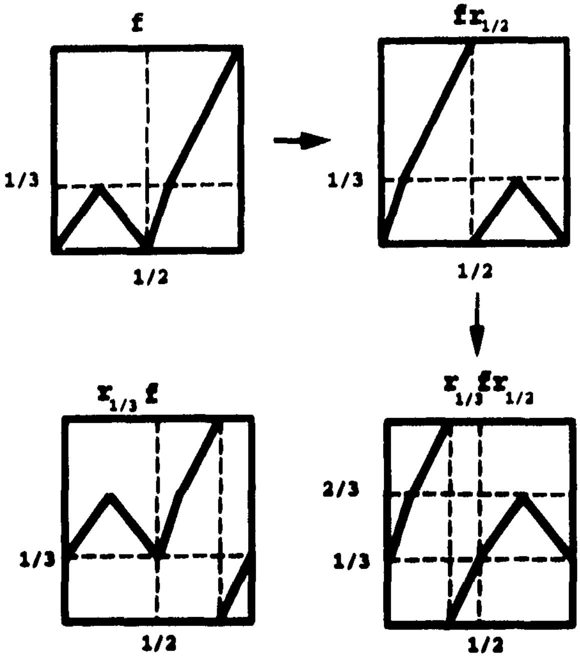

Figura 2.4: Cuando la rotación $r_{1/2}$ precede a f, corre la gráfica de f a la izquierda $1/2$, y cuando la rotación $r_{1/3}$ sucede a f, corre la gráfica hacia arriba $1/3$.

La demostración se sigue directamente del teorema anterior y del Teorema 2.1. Gráficamente:
1) Quiere decir que podemos reflejar la gráfica de f con respecto al eje $x = 1/2$.
2) Quiere decir que podemos reflejar la gráfica de f con respecto al eje $y = 1/2$.
3) Quiere decir que podemos primero reflejar con respecto al eje $x = 1/2$ y luego con respecto al eje $y = 1/2$.
Ver la Figura 1.5 del Capítulo 1. El resultado correspondiente para la propiedad "C" queda en el siguiente corolario.

Corolario 2.4 *La función $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "C" si y sólo si $J^{-1}fJ : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "C".*

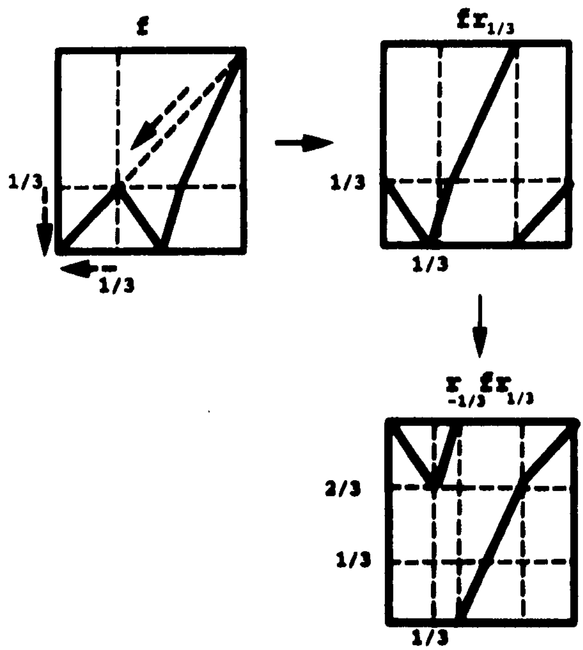

Figura 2.5: La rotación $r_{1/3}$ corre la gráfica de f 1/3 a la izquierda y la rotación $r_{1/3}^{-1} = r_{-1/3}$ corre la gráfica 1/3 hacia abajo.

(Recordemos que $J^{-1} = J$)

De nuevo para la propiedad "C" tenemos menos variedad, sólo podemos poner la gráfica de f de cabeza. Ver Figura 1.5 del Capítulo 1.

2.4.3 Podemos suponer que h es creciente y h no hace ninguna rotación

Igual que en el Capítulo 1 vamos a ver que podemos suponer que h es creciente, pero además podemos suponer que h no hace una rotación. Notemos que en $I_{/\sim}$ no tenemos definido un orden. Sin embargo, si tenemos que $\overline{a} \neq \overline{0}$ y $\overline{b} \neq \overline{0}$ entonces $\overline{a}$ y $\overline{b}$ sólo tienen un representante, por lo tanto podemos decir que $\overline{a} \leq \overline{b}$ si $a \leq b$. Los siguientes teoremas formalizan estas ideas.

Teorema 2.5 *Una función f cumple "T" si y sólo si existen homeomorfismos h, k tales que $d(kfh(\overline{x}), \overline{x}) < \varepsilon_0$ $\forall \overline{x} \in I_{/\sim}$ con $h(\overline{0}) = \overline{0}$ y $h(\overline{a}) < h(\overline{b})$*

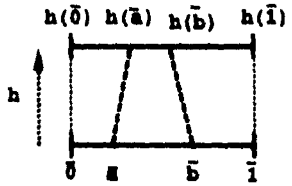

Figura 2.6: Podemos suponer que el homeomorfismo h no rota, i.e. $h(\bar{0}) = \bar{0}$ y h es creciente, i.e. $h(\bar{a}) < h(\bar{b})$ siempre que $a < b$.

siempre que $0 < a < b < 1$.

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon_0 > 0$.
Primero vamos a demostrar que podemos elegir h tal que $h(\bar{0}) = \bar{0}$.
Como f cumple "T" entonces existen homeomorfismos $h_1, k_1 : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ tales que $d(k_1 f h_1(\bar{x}), \bar{x}) < \varepsilon_0$ para toda $\bar{x} \in I_{/\sim}$.
Ahora notamos que, como h_1 es homeomorfismo, entonces existe $\bar{p} \in I_{/\sim}$ tal que $h(\bar{p}) = \bar{0}$ entonces tomamos la rotación r_p y tomamos $h = h_1 r_p$ (por lo que $h(\bar{0}) = h_1(r_p(\bar{0})) = h_1(p) = \bar{0}$ como queríamos) y $k = r_p^{-1} k_1$. Entonces obtenemos que $d(kfh(\bar{x}), \bar{x}) = d(r_p^{-1} k_1 f h_1(r_p(\bar{x})), \bar{x})$. Pero es fácil ver que $d(\bar{a}, \bar{b}) = d(r_p(\bar{a}), r_p(\bar{b}))$ para toda $\bar{a}, \bar{b} \in I_{/\sim}$, y entonces
$d(r_p^{-1} k_1 f h_1(r_p(\bar{x})), \bar{x}) = d(r_p(r_p^{-1} k_1 f h_1(r_p(x))), r_p(x)) =$
$d(k_1 f h_1(r_p(x)), r_p(x)) < \varepsilon_0$.

Finalmente para ver que se puede tomar h tal que $h(\bar{a}) < h(\bar{b})$ siempre que $a < b$ no hay más que copiar la demostración del Capítulo 1.
$\Leftarrow$) Es claro que si f cumple "T" con h tal que $h(\bar{0}) = \bar{0}$ y $h(\bar{a}) < h(\bar{b})$ siempre que $0 < a < b < 1$ entonces f cumple "T". Δ

Teorema 2.6 *La función f cumple "C" si y sólo si existe un homeomorfismo h tal que $d(h^{-1} f h(\bar{x}), \bar{x}) < \varepsilon_0$ $\forall \bar{x} \in I_{/\sim}$ con $h(\bar{0}) = \bar{0}$ y $h(\bar{a}) < h(\bar{b})$ siempre que* $0 < a < b < 1$.

La demostración para el caso de la propiedad "C" es totalmente análoga a la del teorema anterior.

Gráficamente, esto quiere decir que el homeomorfismo h se puede ver como en la Figura 2.6.

2.4.4 Cómo se relacionan la propiedad T y la propiedad C

Igual que para funciones del intervalo al intervalo, tenemos la siguiente observación cuya demostración es muy parecida a la del Teorema 1.5.

Teorema 2.7 *Si* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "C" entonces* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "T".*

Y también tenemos ejemplos en que $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "T" pero no cumple "C", por ejemplo J cumple "T", porque es inyectiva, pero no cumple "C", ver toerema 2.24.

2.5 Condiciones suficientes para la propiedad T

Al ir encontrando condiciones suficientes para la propiedad "T" en la circunferencia, me dí cuenta que éstas son muy parecidas a las condiciones suficientes para el caso del intervalo I, esto es, primero tomé f inyectiva y la fuí haciendo "menos inyectiva" hasta encontrar un punto $y \in I_{/\sim}$ tal que $\#f^{-1}(y) = 1$, y me dí cuenta que si ese punto existe entonces se pueden encontrar rotaciones que hacen que la gráfica de f no "salte". De ahí tomé las ideas para esta sección.

Lo primero que vamos a hacer es tratar de ver a las funciones $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ como funciones $\hat{f} : I \to I$ con $\hat{f}$ continua ya que para ellas ya tenemos condiciones suficientes.

Gráficamente la diferencia más importante entre una función continua en I y una función continua en $I_{/\sim}$ es que la función continua en $I_{/\sim}$ puede saltar (ver Figura 2.1), mientras que una función continua en I no puede saltar. Por lo tanto vamos a tratar de encontrar rotaciones r_{θ_1} y r_{θ_2} tales que $r_{\theta_2} f r_{\theta_1}$ no salte (ya sabemos que podemos estudiar a $r_{\theta_2} f r_{\theta_1}$ en vez de la función f).

Una vez que encontramos las rotaciones que hacen que f no salte hay una manera natural de definir $\hat{f}$ de manera que sea continua y se comporte como f. Para esto lo que hay que hacer es definir $\hat{f}(x) = f(\overline{x})$ si $f(\overline{x}) \neq \overline{0}$ (y por tanto tiene un sólo representante) y decidir de alguna manera si $\hat{f}(x) = 0$ ó $\hat{f}(x) = 1$ cuando $f(\overline{x}) = \overline{0}$.

Definición 2.8 *Diremos que la función* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *se puede ver en* $I \times I$ *según "T" si existen homeomorfismos* $h_1, h_2 : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *y una función* $\hat{f} : I \to I$ *continua tales que* $\overline{\hat{f}(x)} = h_2 f h_1(\overline{x})$.

En nuestro estudio h_1 y h_2 serán composición de rotaciones y reflexiones que nos ayuden a acomodar la gráfica de f de manera que no "salte".

Teorema 2.8 *Si $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ se puede ver en $I \times I$ según "T" y $\hat{f} : I \to I$ cumple "T" entonces $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "T".*

Demostración:
Por el Teorema 2.1 basta demostrar que $F = h_2 f h_1$ cumple "T".
Sea $\varepsilon_0 > 0$.

Queremos encontrar homeomorfismos $h, k : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ tales que $d(kFh(\bar{x}), \bar{x}) < \varepsilon_0$ para toda $\bar{x} \in I_{/\sim}$.
Como $\hat{f}$ cumple "T" entonces existen homeomorfismos $\hat{h}, \hat{k} : I \to I$ tales que $|\hat{k}\hat{f}\hat{h}(x) - x| < \varepsilon_0$ para toda $x \in I$.
Definimos $h(\bar{x}) = \overline{\hat{h}(x)}$, notemos que h está bien definida ya que si $\bar{x} \neq \bar{0}$ entonces $\bar{x}$ sólo tiene un representante y si $\bar{x} = \bar{0}$ no importa si tomamos al 0 ó al 1 como representantes porque de todos modos $\hat{h}(0), \hat{h}(1) \in \{0, 1\}$ (pues $\hat{h} : I \to I$ es un homeomorfismo) y entonces $h(\bar{0}) = \bar{0}$.
Se puede verificar que h es un homeomorfismo.
Definimos $k(\bar{x}) = \overline{\hat{k}(x)}$, análogamente, k está bien definida y es un homeomorfismo.
Ahora notemos que:
$d(\overline{\hat{k}\hat{f}\hat{h}(x)}, \bar{x}) = \min\{|\hat{k}\hat{f}\hat{h}(x) - x|, 1 - |\hat{k}\hat{f}\hat{h}(x) - x|\} \leq |\hat{k}\hat{f}\hat{h}(x) - x| < \varepsilon_0$.
Pero $\overline{\hat{k}\hat{f}\hat{h}(x)} = kFh(\bar{x})$ ya que como $k(\bar{x}) = \overline{\hat{k}(x)}$, $h(\bar{x}) = \overline{\hat{h}(x)}$ y $\overline{\hat{f}(x)} = h_2 f h_1(\bar{x}) = F(\bar{x})$ entonces tenemos que:
$\overline{\hat{k}\hat{f}\hat{h}(x)} = \overline{\hat{k}[\hat{f}\hat{h}(x)]} = k\overline{\hat{f}[\hat{h}(x)]} = kF\overline{\hat{h}(x)} = kFh(\bar{x})$.
Por lo que finalmente obtenemos que: $d(kFh(\bar{x}), \bar{x}) < \varepsilon_0$ como queríamos. $\triangle$

2.6 Condiciones necesarias para la propiedad T

En esta sección vamos a ver que la condición del Teorema 2.8 además de ser suficiente, es necesaria. En la primera subsección vamos a dar algunos resultados generales referentes a los intervalos de nivel los cuales se utilizarán en la segunda subsección, donde se demostrará que si f cumple "T" entonces f se puede ver en $I \times I$ según "T" y $\hat{f} : I \to I$ cumple "T".

2.6.1 Intervalos de nivel

Para las condiciones necesarias que vamos a dar necesitamos hablar de intervalos. No hay una definición de intervalo para $I_{/\sim}$. Sin embargo es fácil decir qué se quiere entender por un intervalo en $I_{/\sim}$.

Definición 2.9 *Si $\overline{a} \neq \overline{0} \neq \overline{b}$ y $a < b$ entonces $[\overline{a}, \overline{b}] = \{\overline{x} \ : \ a \leq x \leq b\}$.*

Aunque no podemos definir $[\overline{a}, \overline{b}]$ cuando $\overline{a} = \overline{0}$ ó $\overline{b} = \overline{0}$ haremos un abuso de notación y diremos lo siguiente.

Definición 2.10 $[\overline{0}, \overline{b}] = \{\overline{x} \ : \ 0 \leq x \leq b\}$ *y* $[\overline{a}, \overline{1}] = \{\overline{x} \ : \ a \leq x \leq 1\}$.

Por intervalo de nivel entenderemos lo mismo que en el Capítulo 1 esto es:

Definición 2.11 *Decimos que $[\overline{a}, \overline{b}]$ es un intervalo de nivel si $f(\overline{a}) = f(\overline{b})$.*

El siguiente teorema, y su demostración, son análogos al Teorema 1.6 del Capítulo 1, que nos dice que los extremos de un intervalo de nivel se deben acercar bajo h^{-1}.

Teorema 2.9 *Supongamos que $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "T" y $[\overline{a}, \overline{b}]$ es un intervalo de nivel.*
Si $\varepsilon_0 > 0$ y h, k son los homeomorfismos de la propiedad "T" tales que $d(kfh(\overline{x}), \overline{x}) < \varepsilon_0 \ \ \forall \ \overline{x} \in I_{/\sim}$ entonces $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) < 2\varepsilon_0$.

Sin embargo una diferencia fundamental entre I y $I_{/\sim}$ es que en $I_{/\sim}$ hay dos maneras de acercar 2 puntos. Para explicar esto pongamos un ejemplo. Si queremos acercar $\overline{\frac{1}{2}}$ a $\overline{\frac{1}{4}}$ lo podemos hacer de la manera usual, recorriendo $\overline{\frac{1}{2}}$ hacia la izquierda, digamos hasta $\overline{\frac{3}{8}}$, o lo podemos hacer recorriendo $\overline{\frac{1}{2}}$ hacia la derecha pasando por $\overline{1}$ y llegando hasta $\overline{\frac{1}{8}}$. Este último caso nos dice que, en la circunferencia, si nos alejamos mucho de un punto, llega un momento en el cual nos estamos acercando a él.

Esto trae como consecuencia que, aunque ya sabemos que los extremos de un intervalo de nivel se deben acercar, hay dos maneras de acercarlos. Una, alejando los extremos tanto que lleguen a acercarse y otra acercándolos de la manera usual.

El Teorema 2.10 nos dice que si f alcanza todos los puntos de $I_{/\sim}$ dentro del intervalo de nivel entonces sus extremos deben acercarse hacia afuera, lo cual, para ε_0 pequeñas, quiere decir que $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) = 1 - |h^{-1}(\overline{a}) - h^{-1}(\overline{b})|$ ver Figura 2.7 (izquierda), y el Teorema 2.11 dice que si f alcanza todos los puntos de $I_{/\sim}$ fuera del intervalo de nivel entonces sus extremos deben acercarse hacia adentro, lo cual, para ε_0 pequeñas, quiere decir que $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) = |h^{-1}(\overline{a}) - h^{-1}(\overline{b})|$ ver Figura 2.7 (derecha).

Teorema 2.10 *Supongamos que $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "T", que $[\overline{a}, \overline{b}]$ es un intervalo de nivel y que $f[\overline{a}, \overline{b}] = I_{/\sim}$.*

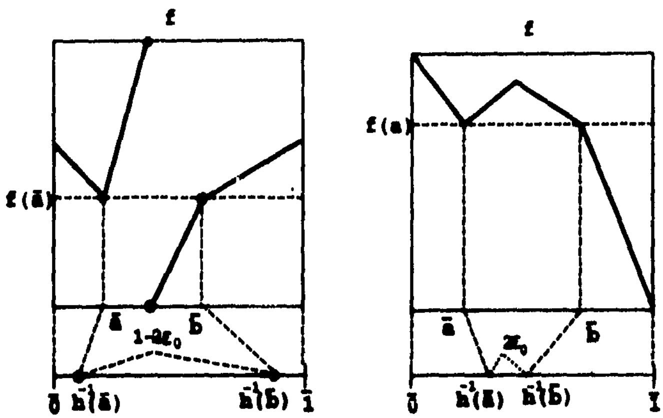

Figura 2.7: (Izquierda) Si $f[\bar a,\bar b] = I_{/\sim}$ entonces $h^{-1}(\bar a)$ y $h^{-1}(\bar b)$ se acercan hacia afuera. (Derecha) Si $f([\bar 0,\bar a]\bigcup[\bar b,\bar 1]) = I_{/\sim}$ entonces $h^{-1}(\bar a)$ y $h^{-1}(\bar b)$ se acercan hacia adentro.

Si $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{8}$ y h, k son los homeomorfismos de la propiedad "T" tales que $d(kfh(\bar x),\bar x) < \varepsilon_0$ para toda $\bar x \in I_{/\sim}$, con $h(\bar 0) = \bar 0$ y $h(\bar a) < h(\bar b)$ siempre que $\bar a < \bar b$ entonces $d(h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar b)) = 1 - |h^{-1}(\bar a) - h^{-1}(\bar b)|$.

Demostración:
Por hipótesis, sabemos que f cumple "T" entonces por el Teorema 2.9 tenemos que $d(h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar b)) < 2\varepsilon_0$.
Mientras que por definición sabemos que:
$d(h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar b)) = \min\{1 - |h^{-1}(\bar a) - h^{-1}(\bar b)|, |h^{-1}(\bar a) - h^{-1}(\bar b)|\}$, por lo que
$d(h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar b)) = 1 - |h^{-1}(\bar a) - h^{-1}(\bar b)|$ ó
$d(h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar b)) = |h^{-1}(\bar a) - h^{-1}(\bar b)|$

Por reducción al absurdo, supongamos que $d(h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar b)) = |h^{-1}(\bar a) - h^{-1}(\bar b)| < 2\varepsilon_0$, ver Figura 2.8.

Sea $\bar y_0 = \overline{kfhh^{-1}(\bar a) + 1/2}$ y notemos que $d(kfhh^{-1}(\bar a), \bar y_0) = 1/2$.

Luego, como $f[\bar a,\bar b] = I_{/\sim}$ entonces existe un punto $\bar p \in [\bar a,\bar b]$ tal que $f(\bar p) = k^{-1}(\bar y_0)$, ver Figura 2.8.

Puesto que $h(\bar 0) = \bar 0$ y $h(\bar a) < h(\bar b)$ siempre que $\bar a < \bar b$, entonces tenemos que $h^{-1}(\bar p) \in [h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar b)]$ por lo que $|h^{-1}(\bar a) - h^{-1}(\bar p)| \leq |h^{-1}(\bar a) - h^{-1}(\bar b)| = d(h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar b)) < 2\varepsilon_0 < 1/4$ de donde se infiere que $d(h^{-1}(\bar a), h^{-1}(\bar p)) < 2\varepsilon_0$.

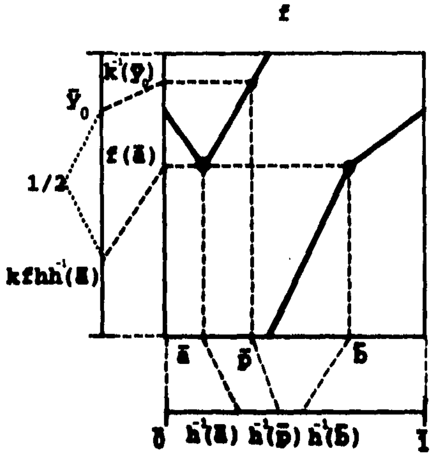

Figura 2.8: Si $f[\overline{a},\overline{b}] = I_{/\sim}$ entonces existe $\overline{p}_0 \in [\overline{a},\overline{b}]$ tal que $f(\overline{p}) = k^{-1}(\overline{y}_0)$.

Finalmente como f cumple "T" tenemos que:
$d(kfhh^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{a})) < \varepsilon_0$ y $d(kfhh^{-1}(\overline{p}), h^{-1}(\overline{p})) < \varepsilon_0$ sumando las últimas tres desigualdades y usando la desigualdad del triángulo se concluye que $d(\overline{y}_0, kfhh^{-1}(\overline{a})) = d(kfhh^{-1}(\overline{p}), kfhh^{-1}(\overline{a})) < 4\varepsilon_0 < 1/2$ pero sabíamos que $d(\overline{y}_0, kfhh^{-1}(\overline{a})) = 1/2$ contradicción. $\triangle$

Teorema 2.11 *Supongamos que $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "T", que $[\overline{a},\overline{b}]$ es un intervalo de nivel y que $f([\overline{0},\overline{a}] \bigcup [\overline{b},\overline{1}]) = I_{/\sim}$.
Si $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{8}$ y h, k son los homeomorfismos de la propiedad "T" tales que $d(kfh(\overline{x}), \overline{x}) < \varepsilon_0$ para toda $\overline{x} \in I_{/\sim}$, con $h(\overline{0}) = \overline{0}$ y $h(\overline{a}) < h(\overline{b})$ siempre que $\overline{a} < \overline{b}$ entonces $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) = |h^{-1}(\overline{a}) - h^{-1}(\overline{b})|$.*

La demostración es análoga a la anterior. Finalmente, si tenemos que f alcanza todos los puntos de $I_{/\sim}$ tanto adentro como afuera del intervalo $[\overline{a},\overline{b}]$ entonces f no cumple "T", como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 2.12 *Sea $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ tal que $[\overline{a},\overline{b}]$ es un intervalo de nivel.
Si $f[\overline{a},\overline{b}] = I_{/\sim}$ y $f([\overline{0},\overline{a}] \bigcup [\overline{b},\overline{1}]) = I_{/\sim}$ entonces f no cumple "T".*

Demostración:
Sea $\varepsilon_0 = \frac{1}{16} > 0$

Si f cumpliera "T" entonces por el Teorema 2.10 se tendría que $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) = 1 - |(h^{-1}(\overline{a}) - h^{-1}(\overline{b})|$ y por el Teorema 2.11 se tendría que $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) = |(h^{-1}(\overline{a}) - h^{-1}(\overline{b})|$ sumando ambas desigualdades obtenemos que 2 $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) = 1$, i.e., $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) = \frac{1}{2}$. Pero por el Teorema 2.9 se debe tener que $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{b})) \leq 2\varepsilon_0 = \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$ contradicción. $\triangle$

2.6.2 Si f cumple T entonces f se puede ver en $I \times I$ según T y $\hat{f} : I \to I$ cumple T

En esta sección vamos a ver que si f cumple "T" entonces f se puede ver en $I \times I$ según "T" y $\hat{f} : I \to I$ cumple "T". Para hacer la demostración, lo que vamos a hacer es acomodar la gráfica de f usando rotaciones y reflexiones.

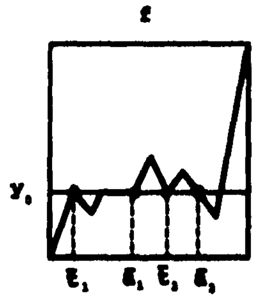

Figura 2.9: La gráfica de f "toca" por abajo a la recta $y = y_0$ en el punto $\overline{t}_1$. La atraviesa en los puntos $\overline{a}_1$ y $\overline{a}_2$ y la "toca" por arriba en $\overline{t}_2$.

Una vez que hayamos acomodado convenientemente la gráfica de f, vamos a demostrar que existe un un punto $\overline{a}_0$ tal que la gráfica (ya acomodada, y que denotaremos por F_2) de f "atraviesa", de abajo hacia a arriba, exactamente una vez a la recta $y = F_2(\overline{a}_0)$ en el punto $\overline{a}_0$. Para aclarar este punto veamos la Figura 2.9, en ella notamos que la gráfica de f "toca por abajo" a la recta $y = y_0$ en el punto $\overline{t}_1$, ya que al acercarnos por la izquierda a $\overline{t}_1$ la gráfica de f está por abajo de esa recta y al alejarnos por la derecha de $\overline{t}_1$, la gráfica sigue estando debajo de la recta.

En cambio, la gráfica de f "atraviesa", de abajo hacia arriba, a la recta $y = y_0$ en el punto $\overline{a}_1$, ya que al acercarme por la izquierda a $\overline{a}_1$ la gráfica está por debajo, ó a la altura de la recta, y al alejarme por la derecha de $\overline{a}_1$, la gráfica está por arriba de la recta. Análogamente, la gráfica "toca por arriba" a la recta $y = y_0$ en el punto $\overline{t}_2$, y "atraviesa", de arriba hacia

abajo, a la recta en el punto $\overline{a}_2$. En la Figura 2.9 tenemos que la gráfica de f "atraviesa" más de una vez a la recta $y = y_0$, pues la atraviesa en al menos dos puntos, a saber $\overline{a}_1$ y $\overline{a}_2$, por lo que ni $\overline{a}_1$ ni $\overline{a}_2$ serían los puntos buscados.

En la Figura 2.13, (superior-izquierda) vemos que la gráfica de F_2 "atraviesa", de abajo hacia arriba, exactamente una vez a la recta $y = F_2(\overline{a}_0)$ en el punto $\overline{a}_0$, en este caso $\overline{a}_0$ es el punto buscado.

Ya que hayamos demostrado la existencia de $\overline{a}_0$, lo que vamos a hacer es volver a acomodar la gráfica por medio de las rotaciones $r_{1-F_2(\overline{a}_0)}$ y r_{1-a_0}, ver Figura 2.13, al hacer esto notamos que la gráfica se ve en $I \times I$ según "T" y como $\hat{f}^{-1}(0) = \{0\}$ entonces $\hat{f}$ cumple "T".

Empecemos pues con la demostración.

Acomodamos la gráfica de f

Lo primero que vamos a ver es que siempre podemos ver un pedazo de f en un rectángulo, esto es, que siempre es posible encontrar una rotación r_{θ_1} y $\overline{a}, \overline{b} \in I_{/\sim}$ tales que $F_1 = r_{\theta_1} f$ cumple que para $F_1|_{[\overline{a},\overline{b}]}$ los únicos puntos que tocan al $\overline{0}$ y al $\overline{1}$ son $\overline{a}$ y $\overline{b}$, por lo que la gráfica de F_1 no puede saltar de arriba a abajo, ó de abajo a arriba del $\overline{0}$, para puntos en $[\overline{a}, \overline{b}]$, ver Figura 2.10 (derecha). Además, se va a tener que $F_1|_{[\overline{a},\overline{b}]}$ cubre a $I_{/\sim}$ y entonces hay una manera natural de ver a $F_1|_{[\overline{a},\overline{b}]}$ como una función continua y suprayectiva de $[a, b]$ en $[0, 1]$.

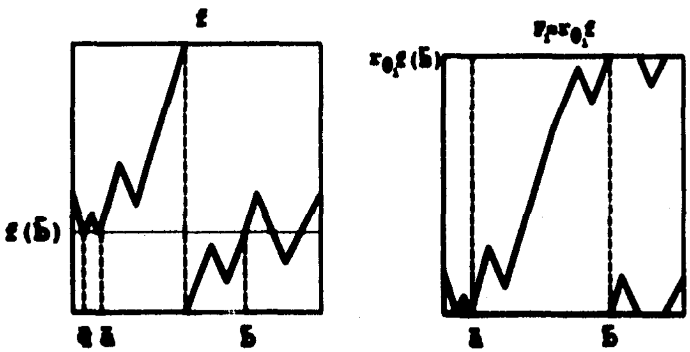

Figura 2.10: (Izquierda) $\overline{b}$ es el primer punto tal que $f[\overline{0}, \overline{b}]$ cubre a $I_{/\sim}$. (Derecha) $F_1 = r_{\theta_1} f$ no salta para puntos que estén en $[\overline{a}, \overline{b}]$

La idea intuitiva de la demostración del Teorema 2.13 es la siguiente:

Empiezo a caminar del $\overline{0}$ hacia el $\overline{1}$, mientras voy caminando las imágenes van cubriendo a $I_{/\sim}$ y, como f es suprayectiva, llega un momento, al cual llamamos $\overline{b}$, en que se cubre a todo $I_{/\sim}$ ver Figura 2.10 (izquierda). Notemos que la gráfica de f no 'atraviesa" a la recta $y = f(\overline{b})$ para ningún punto en $[0, b]$, sólo la "toca" en algunos puntos como $\overline{q}$ y $\overline{a}$. Por esto al hacer la rotación $r_{1-f(\overline{b})}$ se "baja" la gráfica de f y ya no salta para puntos en $[\overline{0}, \overline{b}]$, ver Figura 2.10 (derecha). Finalmente me fijo, de los puntos que están en $[\overline{0}, \overline{b})$ y que tocan al $\overline{0}$, en el que esté más a la derecha y le llamo $\overline{a}$.

Teorema 2.13 *Para toda* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *existe una rotación* r_{θ_1} *y* $\overline{a}, \overline{b} \in I_{/\sim}$ *tales que* $F_1 = r_{\theta_1} f$ *cumple que* $F_1(\overline{a}) = \overline{0}$, $F_1(\overline{b}) = \overline{1}$, $F_1[\overline{a}, \overline{b}] = I_{/\sim}$ *y que* $0 < F_1(\overline{x}) < 1$ *para toda* $\overline{x} \in (\overline{a}, \overline{b})$.

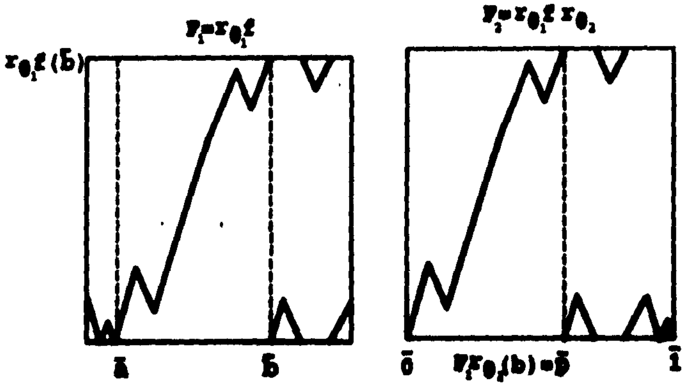

Figura 2.11: Acomodamos F_1 de manera que $F_2|_{[\overline{0}, \overline{p}]}$ no salte.

Por el teorema anterior tenemos que la gráfica de F_1 es algo parecido a lo que muestra la Figura 2.11 (izquierda) , es decir, que $F_1(\overline{a}) = \overline{0}$, $F_1(\overline{b}) = \overline{1}$, (o que $F_1(\overline{a}) = \overline{1}$, $F_1(\overline{b}) = \overline{0}$ en cuyo caso hacemos una reflexión para arreglar las cosas, esto es, estudiamos a JF_1 en lugar de F_1), $F_1(\overline{a}, \overline{b}) \subset (\overline{0}, \overline{1})$ (por tanto la gráfica de F_1 no salta para $\overline{x} \in [\overline{a}, \overline{b}]$) y $F_1[\overline{a}, \overline{b}] = I_{/\sim}$.

Ahora vamos a rotar F_1 con la rotación $r_{\theta_2} = r_{1-a}$, la cual manda $\overline{0}$ en $\overline{a}$ y $\overline{p} = \overline{b + 1 - a}$ en $\overline{b}$, por lo cual se puede suponer, y se hará de aquí en adelante, que la gráfica de $F_2 = F_1 r_{1-a}$ es similar a la que se muestra en la Figura 2.11 (derecha), esto es, que:
$F_2(\overline{0}) = \overline{0}$ y $F_2(\overline{p}) = \overline{1}$, $F_2(\overline{0}, \overline{p}) \subset (\overline{0}, \overline{1})$ (y por tanto la gráfica de F_2 no salta para $\overline{x} \in [\overline{0}, \overline{p}]$) y que $F_2[\overline{0}, \overline{p}] = I_{/\sim}$.

Notemos que $F_2[\overline{p}, \overline{1}] \neq I_{/\sim}$ ya que $F_2[\overline{0}, \overline{p}] = I_{/\sim}$ y entonces si $F_2[\overline{p}, \overline{1}] = I_{/\sim}$, por el Teorema 2.12 tendríamos que F_2 no cumpliría "T", contrario a nuestra suposición. Llamaremos entonces $(\overline{c}, \overline{d})$ al intervalo más grande que no toca a $F_2[\overline{p}, \overline{1}]$ ver Figura 2.12.

Sea $\overline{\alpha} = \min\{\overline{x} \in [\overline{0}, \overline{p}] : F_2(\overline{x}) = \overline{c}\}$ y $\overline{\beta} = \max\{\overline{x} \in [\overline{0}, \overline{p}] : F_2(\overline{x}) = \overline{d}\}$.

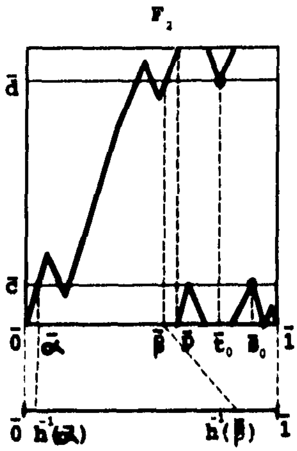

Figura 2.12: Podemos suponer que la gráfica de F_2 es así.

Demostremos que existe un punto $\overline{a}_0$ tal que la gráfica de F_2 atraviesa exactamente una vez a la recta $y = F_2(\overline{a}_0)$ en el punto $\overline{a}_0$

Para demostrar la existencia de $\overline{a}_0$, de aquí en adelante vamos a suponer que:
F_2 cumple "T", $1/8 > \varepsilon_0 > 0$. h, k son los homeomorfismos tales que $d(kF_2h(\overline{x}), \overline{x}) < \varepsilon_0$ para toda $\overline{x} \in I_{/\sim}$ y que $h(\overline{0}) = \overline{0}$ y $h(\overline{a}) < h(\overline{b})$ siempre que $\overline{a} < \overline{b}$.

Lema 2.1 *Se afirma que* $1 - 6\varepsilon_0 \leq |h^{-1}(\overline{\beta}) - h^{-1}(\overline{\alpha})|$

Demostración:
Sabemos que existe $\overline{s}_0 \in [\overline{p}, \overline{1}]$ tal que y $F_2(\overline{s}_0) = \overline{c}$, ver Figura 2.12, entonces $[\overline{\alpha}, \overline{s}_0]$ es un intervalo de nivel tal que $F_2[\overline{\alpha}, \overline{s}_0] = I_{/\sim}$ y si ahora utilizamos el Teorema 2.9 y el Teorema 2.10 tenemos que $d(h^{-1}(\overline{\alpha}), h^{-1}(\overline{s}_0)) = 1 - |h^{-1}(\overline{\alpha}) - h^{-1}(\overline{s}_0)| < 2\varepsilon_0$, como h es creciente entonces $1 - |h^{-1}(\overline{\alpha}) -$

$h^{-1}(\overline{s}_0)| = 1 - h^{-1}(\overline{s}_0) + h^{-1}(\overline{\alpha}) < 2\varepsilon_0$ y como $0 \leq 1 - h^{-1}(\overline{s}_0)$, entonces $h^{-1}(\overline{\alpha}) < 2\varepsilon_0$.

También tenemos que $1 - 4\varepsilon_0 < h^{-1}(\overline{\beta})$, pues sabemos que existe $\overline{l}_0 \in [\overline{p}, \overline{1}]$ tal que $F_2(\overline{l}_0) = \overline{d}$ y entonces $[\overline{\beta}, \overline{l}_0]$ es un intervalo de nivel tal que $F_2([\overline{0}, \overline{\beta}] \bigcup [\overline{l}_0, \overline{1}] = I_{/\sim}$ y por el Teorema 2.9 y el Teorema 2.11 tenemos que $d(h^{-1}(\overline{\beta}), h^{-1}(\overline{l}_0)) = |h^{-1}(\overline{\beta}) - h^{-1}(\overline{l}_0)| < 2\varepsilon_0$. Por otro lado, como $[\overline{0}, \overline{p}]$ es un intervalo de nivel tal que $F_2[\overline{0}, \overline{p}] = I_{/\sim}$ entonces del Teorema 2.9 y el Teorema 2.10 se obtiene que $1 - 2\varepsilon_0 < h^{-1}(\overline{p})$. Como $\overline{p} < \overline{l}_0$ y h preserva dirección, tenemos que $1 - 2\varepsilon_0 < h^{-1}(\overline{p}) < h^{-1}(\overline{l}_0)$. Finalmente, al sumar esta desigualdad con $h^{-1}(\overline{l}_0) - h^{-1}(\overline{\beta}) < 2\varepsilon_0$, la cual ya teníamos, se obtiene que $1 - 4\varepsilon_0 < h^{-1}(\overline{\beta})$.

Al sumar $h^{-1}(\overline{\alpha}) < 2\varepsilon_0$ con $1 - 4\varepsilon_0 < h^{-1}(\overline{\beta})$ obtenemos que $1 - 6\varepsilon_0 \leq |h^{-1}(\overline{\beta}) - h^{-1}(\overline{\alpha})|$ como queríamos. $\triangle$

Ahora nos fijamos en $F_2|_{[\overline{\alpha}, \overline{\beta}]}$, la cual sabemos que no salta e incluso no toca a $\overline{0}$ ni a $\overline{1}$ y por tanto la podemos considerar totalmente como una función continua $F_2|_{[\alpha,\beta]} : [\alpha, \beta] \to [\min F_2[\overline{\alpha}, \overline{\beta}], \max F_2[\overline{\alpha}, \overline{\beta}]]$ donde $\overline{F_2|_{[\alpha,\beta]}(x)} = F_2(\overline{x})$ para toda $x \in [\alpha, \beta]$.

Lema 2.2 *No hay un número finito de intervalos de nivel de la función $F_2|_{[\alpha,\beta]}$ que cubra a $[\alpha, \beta]$*

Demostración:

Por reducción al absurdo, supongamos que existe una colección finita de n intervalos de nivel, $G = \{[a_1, b_1], ..., [a_n, b_n]\}$ tales que $[a_i, b_i] \subset [\alpha, \beta]$ y que cubren a $[\alpha, \beta]$.

Tomamos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2n+6} > 0$, entonces tenemos que los intervalos $[h^{-1}(a_i), h^{-1}(b_i)]$ cubren a $[h^{-1}(\alpha), h^{-1}(\beta)]$ y entonces existe $j \in \{1, .., n\}$ tal que $\frac{|h^{-1}(\beta) - h^{-1}(\alpha)|}{n} \leq |h^{-1}(b_j) - h^{-1}(a_j)|$. Pero por el lema anterior tenemos que $1 - 6\varepsilon_0 \leq |h^{-1}(\beta) - h^{-1}(\alpha)|$ de donde:

$$\frac{2}{6+2n} = \frac{1-6\varepsilon_0}{n} \leq \frac{|h^{-1}(\beta) - h^{-1}(\alpha)|}{n} \leq |h^{-1}(b_j) - h^{-1}(a_j)|.$$

Ahora notemos que si $[a_j, b_j]$ es un intervalo de nivel entonces $F_2([\overline{0}, \overline{a}_j] \bigcup [\overline{b}_j, \overline{1}]) = I_{/\sim}$ y entonces por el Teorema 2.9 y el Teorema 2.11 tenemos que:

$d(h^{-1}(\overline{a}_j), h^{-1}(\overline{b}_j)) = |h^{-1}(\overline{b}_j) - h^{-1}(\overline{a}_j)| < 2\varepsilon_0 = \frac{2}{6+2n}$, lo cual contradice lo que habíamos obtenido. $\triangle$

Teorema 2.14 ***Existe $\overline{a}_0$ tal que la gráfica de F_2 atraviesa, de abajo hacia arriba, exactamente una vez a la recta $y = F_2(\overline{a}_0)$ en el punto $\overline{a}_0$.***

Demostración:
Por el lema anterior tenemos que no hay un número finito de intervalos de nivel que cubran a $[\alpha, \beta]$ entonces por el Teorema 1.13 del Capítulo 1 se tiene que existe $\overline{a}_0 \in [\alpha, \beta]$ tal que $F_2|_{[\alpha,\beta]}(s) \leq F_2|_{[\alpha,\beta]}(a_0) < F_2|_{[\alpha,\beta]}(t)$ para toda $\alpha \leq s \leq a_0 < t \leq \beta$. Pero además se debe tener que $F_2|_{[\alpha,\beta]}(\overline{a}_0) \in [c, d]$ (ya que si $F_2|_{[\alpha,\beta]}(\overline{a}_0) < c$ entonces $\alpha < \overline{a}_0$ y $F_2|_{[\alpha,\beta]}(\alpha) = c > F_2|_{[\alpha,\beta]}(\overline{a}_0)$ contrario a lo que teníamos, análogamente no podemos tener que $F_2|_{[\alpha,\beta]}(\overline{a}_0) > d$).

Finalmente, como $F_2[0, \alpha] \bigcup [\overline{\beta}, \overline{1}]) \subset [\overline{0}, \overline{c}] \bigcup [\overline{d}, \overline{1}]$ entonces tenemos que ni el intervalo $[0, \alpha]$ ni el intervalo $[\overline{\beta}, \overline{1}]$ afectan al hecho de que F_2 atraviese exactamente una vez a la recta $y = F_2(\overline{a}_0)$. $\triangle$

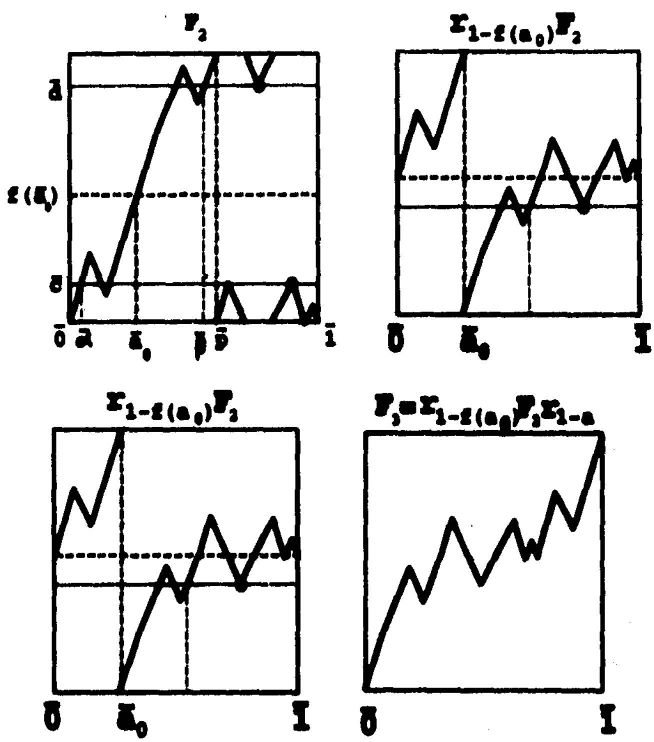

Figura 2.13: Movemos el punto $(a_0, F_2(a_0))$ al $(0,0)$ por medio de las rotaciones $r_{1-F_2(a_0)}$ y r_{1-a_0}.

Acomodamos la gráfica de F_2 de manera que se pueda ver en $I \times I$ según T y $\hat{f} : I \to I$ cumpla T

Finalmente para ver que f se puede ver en $I \times I$ según "T", lo que vamos a hacer es mover el punto $(\overline{a}_0, F_2(\overline{a}_0))$ al punto $(\overline{0}, \overline{0})$ por medio de las rotaciones $r_{1-F_2(a_0)}$ y r_{1-a_0} ver Figura 2.13 y entonces $F_3 = r_2 F_2 r_1$ se ve en $I \times I$. Definimos $\hat{f}(x)$ de la siguiente manera:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ F_3(\overline{x}) & si \quad F_3(\overline{x}) \neq \overline{0} \\ 1 & si \quad F_3(\overline{x}) = \overline{0} \end{cases}$$

Como $\hat{f}^{-1}(0) = \{0\}$ entonces por el Teorema 1.12 se tiene que $\hat{f}$ cumple "T". Estos resultados los resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 2.15 *Si f cumple "T" entonces f se puede ver en $I \times I$ según "T" y $\hat{f} : I \to I$ cumple "T".*

2.7 Resultados finales para la propiedad T

Del Teorema 2.8 y el Teorema 2.15 se obtiene el resultado final para la propiedad "T", el cual escribimos en el siguiente teorema.

Teorema 2.16 *f cumple "T" si y sólo si f se puede ver en $I \times I$ y $\hat{f}$ cumple "T".*

En esta sección lo que vamos a hacer es dar una interpretación geométrica de este resultado. Como se menciona en el prefacio, las funciones en la circunferencia que tienen conjugadas cerca de la identidad, tienen varias aplicaciones, sobre todo en sistemas dinámicos que representan un modelo cíclico, como los latidos de corazón y aquellas funciones orgánicas que se repiten periódicamente. En la presente tesis no se estudian estas aplicaciones. Pero vamos a dar una interpretación gráfica del Teorema 2.16.

En la Sección 2.4.1 vimos que la gráfica de f está en el toro, lo que nos dice el Teorema 2.16 es que f cumple "T" si y sólo si podemos encontrar un punto en la superficie del toro tal que si cortamos el toro horizontalmente a esa altura, vamos a cortar exactamente una vez la gráfica de f, ver Figura 2.14. De hecho, si en el punto en el que se corta la gráfica de f hacemos un corte vertical, ver Figura 2.14, y desdoblamos el toro y lo hacemos un cuadrado, entonces se ve como la gráfica de una función de I en I la cual empieza en $(0,0)$ y termina en $(1,1)$ como en la Figura 2.13.

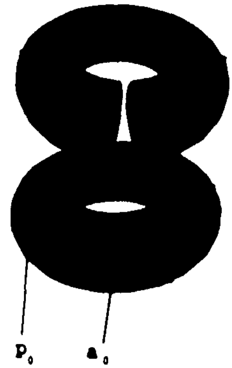

Figura 2.14: Si cortamos horizontalmente a la altura a_0, la gráfica de f se corta únicamente en ese punto, en p no se corta sólo la "toca". Si cortamos verticalmente en a_0 y desdoblamos la gráfica queda en $I \times I$.

2.8 Condiciones suficientes para la propiedad C

Al igual que en el primer capítulo, una vez que encontramos condiciones suficientes y necesarias para la propiedad "T", éstas se pueden ajustar para ser condiciones suficientes y necesarias para la propiedad "C".

Antes de dar la condición suficiente para la propiedad "C" vamos a dar una definición análoga a la definición 2.8, pero ahora para la propiedad "C".

Definición 2.12 *Diremos que la función $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ se puede ver en $I \times I$ según "C" si existen un homeomorfismo $h_1 : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ y una función continua $\hat{f} : I \to I$ tales que $\overline{\hat{f}(x)} = h_1^{-1} f h_1(\overline{x})$.*

Finalmente, tenemos un resultado análogo al Teorema 2.8 pero ahora para la propiedad "C", su demostración se obtiene al sustituir k por h^{-1} en la demostración del Teorema 2.8.

Teorema 2.17 *Si $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ se puede ver en $I \times I$ según "C" y $\hat{f} : I \to I$ cumple "C" entonces $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "C".*

2.9 Condiciones necesarias para la propiedad C

Las ideas y las demostraciones que se dan en esta sección son muy parecidas a las que se han presentado hasta este punto de la tesis. Con el trabajo realizado hasta aquí, el lector podría predecir que la condición necesaria y suficiente para que una función f cumpla "C", es que f se pueda ver en $I \times I$ según "C" y que $\hat{f}$ cumpla "C". Por eso, de aquí en adelante, voy a ser menos formal, no por ello menos riguroso. Por ejemplo voy a decir "puntos cercanos", en vez de decir $d(\bar{x}, \bar{y}) < \varepsilon_0$.

En esta sección vamos a demostrar que la condición del Teorema 2.17 además de ser suficiente, es necesaria. Para esto primero vamos a demostrar ciertos resultados generales sobre intervalos de desplazamiento, los cuales se utilizarán en la segunda subsección para demostrar que si f cumple "C" entonces f se puede ver en $I \times I$ según "C" y $\hat{f} : I \to I$ cumple "C".

2.9.1 Intervalos de desplazamiento

Al igual que en el Capítulo 1, los intervalos de desplazamiento nos ayudan a encontrar condiciones necesarias para que una función cumpla "C".

Teorema 2.18 *Supongamos que* $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ *cumple "C".*
Si $\varepsilon_0 > 0$ *y* h *es el homeomorfismo de la propiedad "C" tal que* $d(h^{-1} f h(\bar{x}), \bar{x}) < \varepsilon_0$ $\forall \bar{x} \in I_{/\sim}$ *entonces* $d(h^{-1} f(\bar{x}), h^{-1}(\bar{x})) < \varepsilon_0$.

Lo que dice el Teorema 2.18 es que las imágenes inversas de $\bar{x}$ y de $f(\bar{x})$, bajo h, están cerca, su demostración es muy parecida a la del Teorema 1.7 del Capítulo 1. De nuevo hay dos maneras de acercar los extremos de un intervalo de desplazamiento, hacia adentro y hacia afuera.

2.9.2 Si f cumple C entonces f se puede ver en $I \times I$ según C y $\hat{f} : I \to I$ cumple C

Al igual que hicimos con la propiedad "T", primero vamos a acomodar la gráfica de f de manera que se nos facilite el trabajo. Por ejemplo, que nos asegure que los intervalos de desplazamiento se deben acercar hacia adentro. Luego vamos a demostrar que existe un punto $\bar{a}_0$ tal que $F_1(\bar{a}_0) = \bar{a}_0$, (donde F_1 representa a f ya acomodada) y tal que la gráfica de F_1 atraviesa exactamente una vez la la recta $y = F_1(\bar{a}_0)$ en el punto $\bar{a}_0$, ver Figura 2.20. Ya que hayamos encontrado el punto $\bar{a}_0$ lo que vamos a hacer es bajar el punto $(\bar{a}_0, F_1(\bar{a}_0))$ al punto $(\bar{0}, \bar{0})$ por medio de la rotación r_{1-a_0}, ver Figura 2.20. Con lo cual obtenemos que f se puede ver en $I \times I$ según "C" y $\hat{f} : I \to I$ cumple "C", pues $\hat{f}^{-1}(0) = \{0\}$.

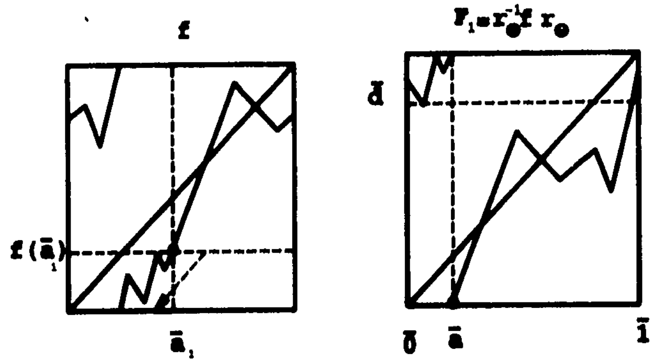

Figura 2.15: Bajamos el punto $(\bar{a}_1, f(\bar{a}_1))$ hasta el suelo.

Acomodamos la gráfica de f

Para poder acomodar la gráfica de f, de aquí en adelante vamos a suponer que f cumple "C", y por tanto f también cumple "T". Ahora por el Teorema 2.14 sabemos que existe un punto $\bar{a}_1$ tal que la gráfica de f atraviesa, de abajo hacia arriba, exactamente una vez, a la recta $y = f(\bar{a}_1)$. Por el Teorema 2.24 tenemos que si $g \in \{fJ, Jf\}$ entonces f no cumple "C", entonces podemos restringir nuestro estudio a $g \in \{f, JfJ\}$, pero por el Corolario 2.4 podemos suponer que $g = f$. Para acomodar la gráfica de f vamos a utilizar el Corolario 2.2 que nos dice que se vale deslizar la gráfica de f paralelamente a la identidad. Entonces lo que hacemos es deslizar la gráfica de f hasta que el punto $(\bar{a}_1, f(\bar{a}_1))$ llegue al suelo del cuadrado, al cual llamaremos a, ver Figura 2.15, esto se logra por medio de la rotación $r_{\theta_1} = r_{1-a_1}$ entonces vamos a estudiar a la función $F_1 = r_{\theta_1}^{-1} f r_{\theta_1}$ en vez de la función f. Una vez hecho esto podemos asegurar que F_1 no salta en ningún punto de $[\bar{0}, \bar{a}]$ ni tampoco en ningún punto de $[\bar{a}, \bar{1}]$, es decir que F_1 sólo salta en $\bar{a}$, por lo que $F_1|_{[\bar{0},\bar{a}]}$ y $F_1|_{[\bar{a},\bar{1}]}$ se pueden considerar como funciones de $[0, a]$ en $[d = \min F_1[\bar{0}, \bar{a}], 1]$ y de $[a, 1]$ en $[0, \max F_1[\bar{a}, \bar{1}]]$ respectivamente, ver Figura 2.15 (derecha). (Nota: si $\bar{a} = \bar{0}$ entonces ya encontramos el punto $\bar{a}_0$, (a saber $\bar{a}_0 = a$) tal que $F_1(\bar{a}_0) = \bar{a}_0$ y la gráfica de F_1 atraviesa exactamente una vez a la recta $y = F_1(\bar{a}_0)$, lo cual es nuestro objetivo y ya acabamos, por tanto vamos a suponer que $\bar{a} \neq \bar{0}$).

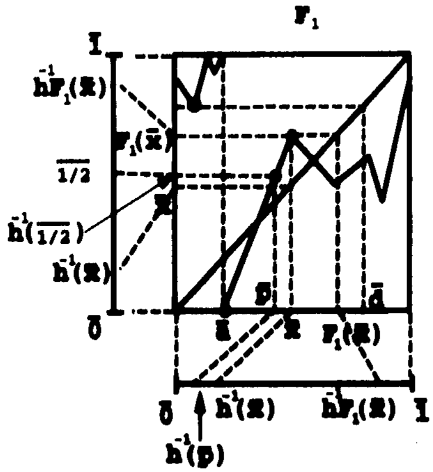

Figura 2.16: Si $f(\overline{x})$ y $\overline{x}$ se acercan hacia afuera entonces existe un punto $\overline{p} \in [\overline{0}, \overline{x}]$ tal que $f(\overline{p}) = h^{-1}(\overline{1/2})$.

Demostremos que existe un punto $\overline{a}_0$ tal que $F_1(\overline{a}_0) = \overline{a}_0$ y la gráfica de F_1 corta exactamente una vez a la recta $y = F_1(\overline{a}_0)$ en $\overline{a}_0$

Para demostrar la existencia del punto $\overline{a}_0$, en esta subsubsección seguiremos suponiendo que F_1 cumple "C" y por el Teorema 2.6 que podemos suponer, y así lo haremos de aquí en adelante, que $h(\overline{0}) = \overline{0}$ y $h(\overline{a}) < h(\overline{b})$ siempre que $0 < a < b < 1$, esto es que h no hace ninguna rotación y que h preserva dirección.

Teorema 2.19 *Si $\overline{x} \in [\overline{a}, \overline{d}]$ entonces el intervalo de desplazamiento $[\overline{x}, F_1(\overline{x})]$ se acerca hacia adentro bajo h^{-1}.*

Demostración:
Por el Teorema 2.18 tenemos que $\overline{x}$ y $F_1(\overline{x})$ se deben acercar. Ahora notemos que se deben acercar hacia adentro ya que si se acercaran hacia afuera tendríamos los dos siguientes casos:
Caso 1: Si $\overline{x} < F_1(\overline{x})$ entonces $h^{-1}(\overline{x})$ se acerca al $\overline{0}$ y $h^{-1}(F_1(\overline{x}))$ se acerca al $\overline{1}$, pues h preserva dirección, ver Figura 2.16, entonces notamos que, para ε pequeñas, tenemos que $\overline{1/2} \in [h^{-1}(\overline{x}), h^{-1}F_1(\overline{x})]$, ver Figura 2.16, por lo que $h^{-1}(\overline{1/2}) \in [\overline{x}, F_1(\overline{x})]$, ver Figura 2.16.

A continuación, nos fijamos en $F_1|_{[\overline{a},\overline{1}]}$, (la cual ya sabemos que no salta y se puede considerar como una función de $[a,1]$ en $[0, \max F_1[\overline{a},\overline{1}]]$ y por tanto podemos aplicar el Teorema del Valor Intermedio) sabemos que $F_1|_{[\overline{a},\overline{1}]}(\overline{a}) = \overline{0}$ mientras que $F_1|_{[\overline{a},\overline{1}]}(\overline{x}) = F_1(\overline{x})$, entonces, como $h^{-1}(\overline{1/2}) \in [\overline{x}, F_1(\overline{x})] \subset [\overline{0},\ F_1(\overline{x})]$, por el Teorema del Valor Intermedio, tenemos que existe $\overline{p} \in [\overline{a}, \overline{x}]$ tal que $F_1(\overline{p}) = h^{-1}(\overline{1/2})$.

Finalmente, como $\overline{p} \in [\overline{a}, \overline{x}]$ y $h^{-1}(\overline{x})$ se acerca al $\overline{0}$ entonces $h^{-1}(\overline{p})$ está cerca del $\overline{0}$, (pues h preserva dirección) ver Figura 2.16. Entonces como F_1 cumple "C" se debe tener que $\overline{1/2} = h^{-1}F_1h(h^{-1}(\overline{p}))$ debe esta cerca de $h^{-1}(\overline{p})$ que a su vez está cerca del $\overline{0}$, por lo que $\overline{1/2}$ y $\overline{0}$ deben estar cerca, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Si $F_1(\overline{x}) < \overline{x}$ la demostración es muy parecida al caso 1. $\triangle$

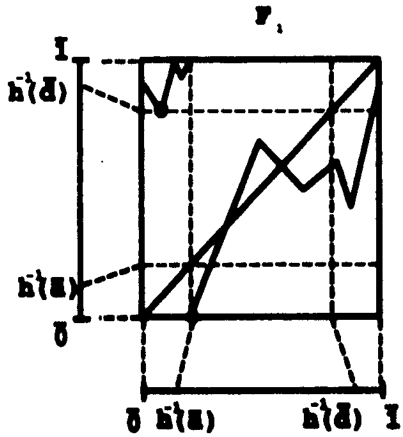

Figura 2.17: El punto $\overline{a}$ se acerca al $\overline{0}$ y $\overline{d}$ se acerca a $\overline{1}$.

Corolario 2.5 ***El punto $\overline{a}$ se acerca al $\overline{0}$ bajo h^{-1}.***

Demostración:

Como $F_1(\overline{a}) = \overline{0}$ entonces en virtud del Teorema 2.19 se tiene que $h^{-1}(\overline{0})$ y $h^{-1}(\overline{a})$ se acercan hacia adentro, pero sabemos que $h^{-1}(\overline{0}) = \overline{0}$ de donde se concluye el resultado del Corolario. $\triangle$

Con argumentos semejantes podemos demostrar que el punto $\overline{d}$ se debe acercar a $\overline{1}$ y entonces la situación gráfica que tenemos es la que se presenta en la Figura 2.17.

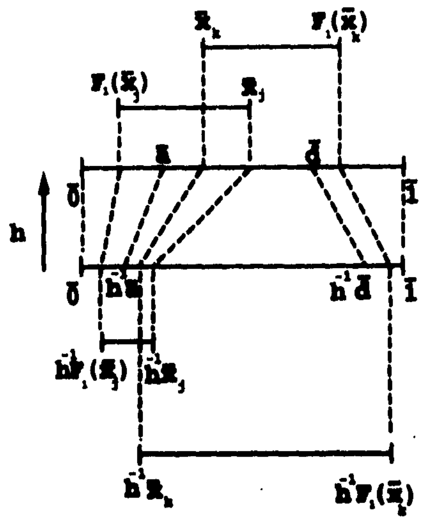

Figura 2.18: El punto $F_1(\bar{x}_j)$ se acerca al $\bar{0}$, entonces $\bar{x}_j$ también se acerca al $\bar{0}$ y atrapa a $\bar{x}_k$ que por tanto también está cerca del $\bar{0}$, pero $f(\bar{x}_k)$ se debe acercar al $\bar{1}$, contradicción.

Teorema 2.20 *No puede existir una colección finita de puntos* $G = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\}$ *tal que* $[\bar{x}_1, F_1(\bar{x}_1)], ..., [\bar{x}_n, F_1(\bar{x}_n)]$ *cubran a* $[\bar{a}, \bar{d}]$.

Demostración:
Si existiera tal colección finita, ver Figura 2.18, entonces algún $\bar{x}_j$ ó $F_1(\bar{x}_j)$ estaría a la izquierda de $\bar{a}$ y por tanto $h^{-1}(\bar{x}_j)$ ó $h^{-1}F_1(\bar{x}_j)$ estaría cerca de $\bar{0}$. También habría un $\bar{x}_k$ ó $F_1(\bar{x}_k)$ a la derecha de $\bar{d}$ y por tanto $h^{-1}(\bar{x}_k)$ ó $h^{-1}F_1(\bar{x}_k)$ estaría cerca de $\bar{1}$. Pero entonces alguno de los intervalos de desplazamiento $[\bar{x}_i, F_1(\bar{x}_i)]$ se debería acercar hacia afuera bajo h^{-1} lo cual contradice al Teorema 2.19. Δ

Teorema 2.21 *Si no hay una colección finita de puntos* $G = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n]\}$ *tal que* $[\bar{x}_1, F_1(\bar{x}_1)], ..., [\bar{x}_n, F_1(\bar{x}_n)]$ *cubran a* $[\bar{a}, \bar{d}]$ *entonces existe un punto* $\bar{p} \in [\bar{a}, \bar{d}]$ *tal que* $F_1(\bar{p}) = \bar{p}$ *y* $F_1(\bar{s}) \leq F_1(\bar{p}) < F_1(\bar{t})$ *para toda* $\bar{a} \leq \bar{s} \leq \bar{p} < \bar{t} \leq \bar{d}$.

La demostración de este teorema es muy parecida a la del Teorema 1.14, en la parte C2 $\Rightarrow$ C3. Sin embargo el punto $\bar{p}$ todavía no satisface que F_1

atraviese, de abajo hacia arriba, exactamente una vez la recta $y = F_1(\overline{p})$ ya que el Teorema 2.21 nos asegura que F_1 atraviesa exactamente una vez esa recta pero sólo considera puntos en $[\overline{a}, \overline{d}]$. El intervalo $[\overline{0}, \overline{a}]$ no da problema, porque como $\overline{d} = \min F_1^{-1}[\overline{0}, \overline{a}]$ entonces si $\overline{x} \in [\overline{0}, \overline{a}]$ tenemos que $\overline{p} \leq \overline{d} \leq F_1(\overline{x})$ por lo que no afecta al hecho de que F_1 atraviesa exactamente una vez la recta $y = F_1(\overline{p})$. Sin embargo, el intervalo $[\overline{d}, \overline{1}]$ sí puede afectar.

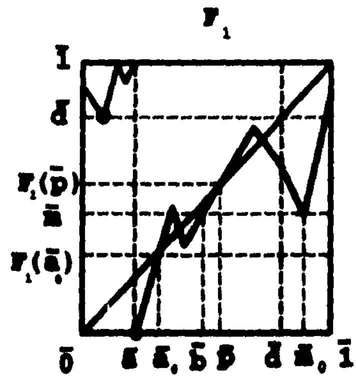

Figura 2.19: Existe un punto $\overline{a}_0$ tal que $F_1(\overline{a}_0) = \overline{a}_0$ y $F_1(\overline{s}) \leq F_1(\overline{a}_0) < F_1(\overline{t})$ para toda $\overline{a} \leq \overline{s} \leq \overline{a}_0 < \overline{t} \leq 1$.

Teorema 2.22 *Si $f : I_{/\sim} \to I_{/\sim}$ cumple "C" entonces existe un punto $\overline{a}_0 \in [\overline{a}, \overline{1}]$ tal que la gráfica de F_1 atraviesa, exactamente una vez, a la recta $y = F_1(\overline{a}_0)$ en el punto $\overline{a}_0$.*

Demostración:
Sea $\overline{m} = \min F_1[\overline{d}, \overline{1}]$ y sea $\overline{p}$ el punto del Teorema 2.21. Si $F_1(\overline{p}) < \overline{m}$ el punto $\overline{a}_0 = \overline{p}$ nos sirve y ya acabamos.

Si $F_1(\overline{p}) \geq \overline{m}$ entonces me fijo en $\overline{b} = \max\{\overline{x} \in [\overline{a}, \overline{d}] : F_1(\overline{x}) = \overline{m}\}$, ver Figura 2.19, notemos que $\overline{b}$ existe gracias a que $F_1(\overline{p}) \geq \overline{m}$, $F_1(\overline{a}) = \overline{0}$ y al Teorema del Valor Intermedio, notemos además, que $\overline{b} \in [\overline{a}, \overline{p}]$ ya que, por el Teorema 2.21, tenemos que $\overline{m} \leq F_1(\overline{p}) < F_1(\overline{t})$ para toda $t \in [\overline{p}, \overline{d}]$.

Por ser $\overline{m} = \min F_1[\overline{d}, \overline{1}]$, sabemos que existe un punto $\overline{m}_0 \in [\overline{d}, \overline{1}]$ tal que $F_1(\overline{m}_0) = \overline{m}$. Ahora observamos que no podemos cubrir $[\overline{a}, \overline{b}]$ con un número finito de intervalos de desplazamiento, ya que si le añadimos los intervalos $[\overline{b}, F_1(\overline{b}) = \overline{m}]$ y $[\overline{m} = F_1(\overline{m}_0) = \overline{m}_0]$ se cubriría a $[\overline{a}, \overline{d}]$ y entonces (Teorema reffinito no c en circ) no se cumpliría "C" contradiciendo nuestra hipótesis. Entonces, análogo al Teorema 2.21, tenemos que existe un punto $\overline{a}_0 \in [\overline{a}, \overline{b}]$ tal que $F_1(\overline{a}_0) = \overline{a}_0$ y $F_1(\overline{s}) \leq F_1(\overline{a}_0) < F_1(t)$ para toda $\overline{a} \leq \overline{s} \leq \overline{a}_0 < \overline{t} \leq \overline{b}$. Pero como $\overline{b} = \max\{\overline{x} \in [\overline{a}, \overline{d}] : F_1(\overline{x}) = \overline{m}\}$ entonces es claro que $F_1(\overline{a}_0) \leq \overline{m} < F_1(\overline{t})$ para toda $\overline{t} \in [\overline{b}, \overline{d}]$ y como $\overline{m} = \min F_1[\overline{d}, \overline{1}]$ entonces $F_1(\overline{a}_0) \leq \overline{m} < F_1(\overline{t})$ para toda $\overline{t} \in [\overline{d}, \overline{1}]$ por lo que el punto $\overline{a}_0$ cumple con lo deseado. $\triangle$

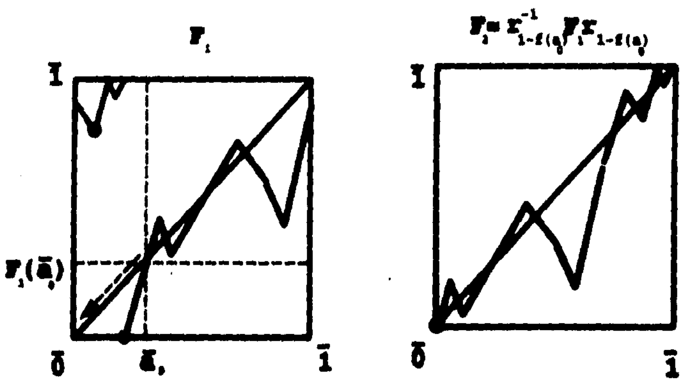

Figura 2.20: La rotación $r_{1-f(q)}$ acomoda a f de manera que f se puede ver en $I \times I$.

Acomodamos la gráfica de F_1 de manera que se pueda ver en $I \times I$ según "C" y $\hat{f} : I \to I$ cumpla "C"

Finalmente para ver que F_1 se puede ver en $I \times I$ según "C", lo que vamos a hacer es mover el punto $(\overline{a}_0, F_1(\overline{a}_0))$ al punto $(\overline{0}, \overline{0})$ por medio de la rotación $r_{1-F_1(a_0)}$, ver Figura 2.20 y entonces $F_2 = r^{-1}_{1-F_1(a_0)} F_1 r_{1-F_1(a_0)}$ se ve en $I \times I$ según "C". Definimos $\hat{f}(x)$ de la siguiente manera:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ F_2(\overline{x}) & si \quad F_2(\overline{x}) \neq \overline{0} \\ 1 & si \quad F_2(\overline{x}) = \overline{0} \end{cases}$$

Como $\hat{f}^{-1}(0) = \{0\}$ entonces por el Teorema 1.12 se tiene que $\hat{f}$ cumple "C". Estos resultados los resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 2.23 *Si f cumple "C" entonces f se puede ver en $I \times I$ según "C" y $\hat{f}$ cumple "C".*

hipótesis. Entonces, análogo al Teorema 2.21, tenemos que existe un punto $\bar{a}_0 \in [\bar{a},\bar{b}]$ tal que $F_1(\bar{a}_0) = \bar{a}_0$ y $F_1(\bar{s}) \leq F_1(\bar{a}_0) < F_1(\bar{t})$ para toda $\bar{a} \leq \bar{s} \leq \bar{a}_0 < \bar{t} \leq \bar{b}$. Pero como $\bar{b} = \max\{\bar{x} \in [\bar{a},\bar{d}] : F_1(\bar{x}) = \bar{m}\}$ entonces es claro que $F_1(\bar{a}_0) \leq \bar{m} < F_1(\bar{t})$ para toda $\bar{t} \in [\bar{b},\bar{d}]$ y como $\bar{m} = \min F_1[\bar{d},\bar{1}]$ entonces $F_1(\bar{a}_0) \leq \bar{m} < F_1(\bar{t})$ para toda $\bar{t} \in [\bar{d},\bar{1}]$ por lo que el punto $\bar{a}_0$ cumple con lo deseado. $\triangle$

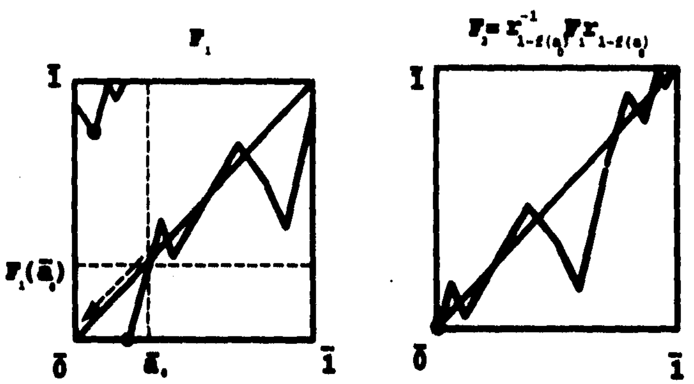

Figura 2.20: La rotación $r_{1-f(q)}$ acomoda a f de manera que f se puede ver en $I \times I$.

Acomodamos la gráfica de F_1 de manera que se pueda ver en $I \times I$ según "C" y $\hat{f} : I \to I$ cumpla "C"

Finalmente para ver que F_1 se puede ver en $I \times I$ según "C", lo que vamos a hacer es mover el punto $(\bar{a}_0, F_1(\bar{a}_0))$ al punto $(\bar{0},\bar{0})$ por medio de la rotación $r_{1-F_1(a_0)}$, ver Figura 2.20 y entonces $F_2 = r^{-1}_{1-F_1(a_0)} F_1 r_{1-F_1(a_0)}$ se ve en $I \times I$ según "C". Definimos $\hat{f}(x)$ de la siguiente manera:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ F_2(\bar{x}) & si \quad F_2(\bar{x}) \neq \bar{0} \\ 1 & si \quad F_2(\bar{x}) = \bar{0} \end{cases}$$

Como $\hat{f}^{-1}(0) = \{0\}$ entonces por el Teorema 1.12 se tiene que $\hat{f}$ cumple "C". Estos resultados los resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 2.23 *Si f cumple "C" entonces f se puede ver en $I \times I$ según "C" y $\hat{f}$ cumple "C".*

Teorema 2.24 *Si existen $g \in \{fJ, Jf\}$ y $\overline{a}_0 \in I_{/\sim}$ tales que la gráfica de g atraviesa, exactamente una vez de abajo hacia arriba, a la recta $y = g(\overline{a}_0)$ en el punto $\overline{a}_0$ entonces f no cumple "C".*

Demostración:
Que g atraviese, exactamente una vez, de abajo hacia arriba, a la recta $y = g(\overline{a}_0)$ en el punto $\overline{a}_0$, quiere decir que f atraviesa, exactamente una vez, de arriba hacia abajo, a la recta $y = f(\overline{a}_1)$ en el punto $\overline{a}_1$, donde $\overline{a}_1 = \overline{a}_0$ para el caso $g = Jf$, y $\overline{a}_1 = \overline{1 - a_0}$ para el caso $g = fJ$.

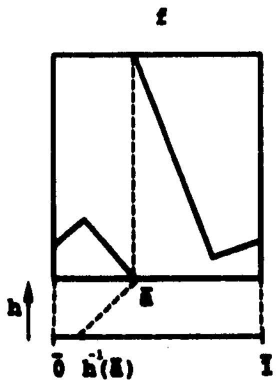

Figura 2.21: La gráfica de f no salta en $[\overline{0}, \overline{a}]$ ni en $[\overline{a}, \overline{1}]$. El punto $h^{-1}(\overline{a})$ se acerca al $\overline{1}$, por la izquierda.

Al acomodar la gráfica de f bajando el punto $(\overline{a}_1, f(\overline{a}_1))$ al suelo, la situación gráfica que obtenemos se representa en la Figura 2.21, esto es, $f(\overline{a}) = \overline{1}$, $f|_{[\overline{a},\overline{1}]}$ no salta y por tanto se puede considerar como una función continua de $[a, 1]$ en $[\min f[\overline{a}, \overline{1}], 1]$. De la misma forma $f|_{[\overline{0},\overline{a}]}$ se puede considerar como una función continua de $[0, a]$ en $[0, \max f[\overline{0}, \overline{a}]]$.

Por reducción al absurdo, supongamos que f cumple "C" y h es el homeomorfismo de la propiedad "C" tal que $d(h^{-1}fh(\overline{x}), \overline{x}) < \varepsilon_0$ $\forall \overline{x} \in I_{/\sim}$, por el Teorema 2.6, supondremos que $h(\overline{0}) = \overline{0}$ y $h(\overline{a}) < h(\overline{b})$ siempre que $0 < a < b < 1$.

Sea $\varepsilon_0 = 1/4 > 0$.

Como $f(\overline{a}) = \overline{1}$ entonces, por el Teorema 2.18 debemos tener que $d(h^{-1}(\overline{a}), h^{-1}(\overline{1})) < \varepsilon_0$ y como $h^{-1}(\overline{1}) = \overline{1}$ entonces tenemos que $d(h^{-1}(\overline{a}), \overline{1}) < \varepsilon_0 = 1/4$

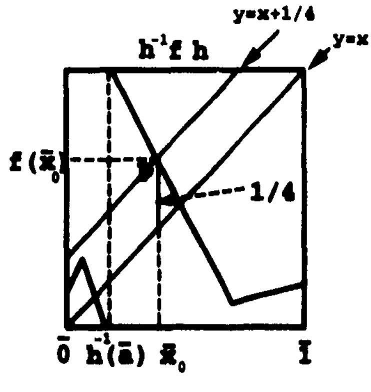

Figura 2.22: La gráfica de $h^{-1}fh$ corta a la recta $y = x + 1/4$ en el punto $p = (\overline{x}_0, f(\overline{x}_0)$.

Entonces tenemos dos casos:
Caso 1 Si $h^{-1}(\overline{a})$ se acerca al $\overline{1}$ por la izquierda, ver Figura 2.21, entonces tenemos que la gráfica de $h^{-1}fh$ es algo similar a la Figura 2.22, esto es que, $h^{-1}(\overline{a}) < 1/4$, $h^{-1}fh(h^{-1}(\overline{a})) = \overline{1}$, $h^{-1}fh|_{[\overline{h}^{-1}(\overline{a}),\overline{1}]}$ no salta y se puede considerar como una función continua de $[h^{-1}(\overline{a}), 1]$ en $[\min\ h^{-1}fh[\overline{a},\overline{1}],\overline{1}]$.

Nos fijamos en la recta $y = x+\varepsilon_0 = x+1/4$, ver Figura 2.22 y, puesto que $h^{-1}(\overline{a}) < 1/4 < 1-1/4$ y $h^{-1}fh|_{[h^{-1}(\overline{a}),\overline{1}]}$ es continua, podemos asegurar que existe un punto $p = (\overline{x}_0, f(\overline{x}_0))$ que corta a esa recta. Como p está en la recta $y = x + \varepsilon_0 = x + 1/4$, entonces tenemos que $d(h^{-1}fh(\overline{x}_0), \overline{x}_0) = 1/4$, pero como f cumple "C" tenemos que $d(h^{-1}fh(\overline{x}_0), \overline{x}_0) < 1/4$, esta contradicción se obtiene de suponer que f cumple "C". **Caso 2** Si $h^{-1}(\overline{a})$ se acerca al $\overline{1}$ por la derecha la demostración es muy parecida al caso anterior. Δ

2.10 Resultados finales para la propiedad C

Del Teorema 2.23 y el Teorema 2.17 se obtiene el resultado final para la propiedad "C", el cual resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 2.25 *f cumple "C" si y sólo si f se puede ver en $I \times I$ según "C" y $\hat{f}$ cumple "C".*

Lo que dice este teorema es que una función cumple "C" si y sólo si hay un punto $\overline{a}_0$, que a diferencia de la propiedad "T", este punto debe ser un punto fijo, tal que la gráfica de f atraviesa a la recta $y = f(\overline{a}_0)$ exactamente una vez y la atraviesa precisamente en el punto $(\overline{a}_0, f(\overline{a}_0))$.

Capítulo 3

Conclusiones

El Teorema 1.13 del Capítulo 1 nos da dos caracterizaciones de las funciones continuas de I en I que cumplen "T" y el Teorema 1.14 nos da dos caracterizaciones de las funciones continuas de I en I que cumplen "C". Mientras que los Teoremas 2.16 y 2.25 dan una caracterización de las funciones continuas de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$ que cumplen "T" y de las funciones que cumplen "C" respectivamente, por lo cual se alcanzaron los objetivos planteados.

Notamos que la caracterización de las funciones de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$ que cumplen "T" es muy parecida a la condición $T3$ del Teorema 1.13 y la caracterización de las funciones de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$ que cumplen "C" es muy parecida a la condición $C3$ del Teorema 1.14. Sin embargo la condición $T2$ no se pudo generalizar porque al tener un intervalo de nivel sus extremos se pueden acercar hacia adentro o hacia afuera, de hecho si quisieramos cubrir $I_{/\sim}$ con un número finito de intervalos deberíamos determinar si lo que cubre el intervalo es lo de adentro, o lo de afuera. Por ejemplo para un intervalo con extremos $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ podemos considerar el intervalo $[\overline{p}_1, \overline{p}_2]$ o el intervalo $]\overline{p}_1, \overline{p}_2[$ el cual empieza en el punto $\overline{p}_2$, continúa hasta el punto $\overline{1}$ de ahí sigue desde $\overline{0}$ hacia la derecha hasta $\overline{p}_1$, ver Figura 3.1.

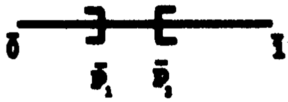

Figura 3.1: El intervalo $]\overline{p}_1, \overline{p}_2[$ toma lo de afuera.

Por ejemplo si tenemos que la gráfica de f es como la que se presenta en la Figura 3.2, entonces tenemos que $]\overline{p}_1, \overline{p}_2[$ y $[\overline{q}_1, \overline{q}_2]$ cubren a $I_{/\sim}$ y sin embargo, f sí cumple "T", ya que el punto $(\overline{q}, f(\overline{q}))$ nos sirve para ver f en

$I \times I$ y $\hat{f}$ cumple "T". Por lo que no se puede generalizar la propiedad T2.

Por las mismas razones no podemos generalizar la condición C3.

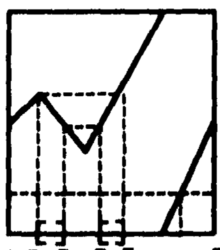

Figura 3.2: Cubrimos con un número finito de intervalos de nivel pero f cumple "T".

Aunque las funciones de I en I son distintas a las funciones de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$, hay una estrecha relación entre las funciones de I en I que cumplen "T" y las funciones de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$ que cumplen "T", esto es, toda función f de I en I que cumpla "T" y sea tal que $f(0) = f(1)$ se puede ver como una función de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$ que cumple "T". Y toda función de $I_{/\sim}$ en $I_{/\sim}$ que cumpla "T" se puede ver como una función de I en I que cumple "T". Análogo para la propiedad "C".

A continuación voy a dar un ejemplo de una familia de funciones de I en I que cumplen "T", están arbitrariamente cerca de la identidad y que no cumplen "C".

Ejemplo 3.1 ***Sea $n \geq 3$. Definimos f_n de manera que:***
$f_n(0) = 1/n$, $f_n(1/2n) = 0$, $f_n(1/n) = 2/n$, $f_n(\frac{n-1}{n}) = f(1) = 1$ y f_n es lineal en cada pedazo $[0, 1/2n]$, $[1/2n, 1/n]$, $[1/n, \frac{n-1}{n}]$ y $[\frac{n-1}{n}, 1]$, ver Figura 3.3.

Se tiene que f_n cumple "T", ya que cualquier punto $a \in [3/4n, \frac{n-1}{n}]$ nos da el punto especial de la condición T3 del Teorema 1.13, además es claro que $d(f_n, i) < 1/n$ pero f_n no cumple "C" ya que $[0, 1/n]$, $1/n, 2/n]$,..., $[\frac{n-1}{n}, 1]$ dan una cubierta finita de I por intervalos de desplazamiento.

Considero que uno de los puntos que más se me dificultaron en este trabajo fue su redacción ya que me resultó difícil dar la notación necesaria para explicar qué es un intervalo en $I_{/\sim}$ y cómo explicar que sus extremos

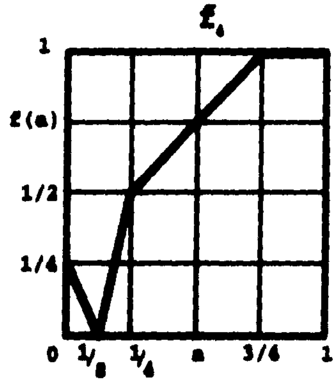

Figura 3.3: Aquí se representa la función f_4.

se pueden aproximar hacia adentro ó hacia afuera. Además en la mayoría de las demostraciones surgían varios casos y me tuve que ayudar de ciertos lemas para ver que las demostraciones eran válidas para todos los casos.