00384
6
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

SOBRE LA CONVERGENCIA DE SERIES DE POTENCIAS Y BASES DE ALGEBRAS TOPOLOGICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A:

MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA

1996

DIRECTOR DE TESIS: DR. HUGO ARIZMENDI PEIMBERT

ON THE CONVERGENCE OF POWER SERIES AND BASES IN TOPOLOGICAL ALGEBRAS

MARÍA DE LOURDES PALACIOS FABILA

In the beginning of the fifties, E.A. Michael and R.F. Arens, american mathematicians, introduced a new kind of algebras, the *m-convex algebras*. These topological algebras interested mathematicians very much, and they still do. These m-convex algebras have been very attractive to physics-mathematicians. I. Kaplansky's work in topological rings and locally convex rings was very important too. In 1971 W. Zelazko started his study on topological algebras and in 1976 he gave a characterization of commutative complex m-convex algebras with unit e where all the maximal ideals have codimension 1 and he described situations where there are dense maximal ideals of finite codimension or infinite codimension.

It's important to know under which conditions we can define morphisms between topological algebras, this means continuous, multiplicative, linear maps. In 1952 Ganapathy-Iyer set a relation between *proper bases* and the automorphisms of the space. He also suggested the possibility of characterizing such automorphisms in terms of bases. M Arsove solved the problem in 1958, by modifying the definition of a proper base that Ganapathy-Iyer had given. A year later he extended his results to the space of Analytic functions in the neighbourhood of the origin.

M. Arsove considered linear combinations as infinite series. A sequence $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ of functions in F, the space of analytic functions in a neighbourhood of the origin, is *linearly independent*, in the Arsove sense, if $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n = 0 \;\Rightarrow\; c_n = 0, n = 0,1,2,\ldots$ for all sequences $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ of complex numbers for which the series converges in F. A sequence $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ of functions in F *generates* a subspace F_0 of F if F_0 is formed by all linear combinations $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n$ where $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a sequence of complex numbers. A sequence $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ of functions in F is a *base* of a subspace F_0 of F if it is linearly independent and generates F_0. A base $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ of a subspace F_0 of F is a *proper base* if { $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n$ converges in $F \Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\delta_n$ converges in F}, where $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ is the fundamental base of F_0.

M. Arsove has proved that, given a base $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ of a Fréchet space F and a sequence $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ of elements of the space, it can be defined a continuous linear function $f: F \to F$ such that $f(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ if the following condition holds:

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converges in } F \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ converges in } F\}.$$

Throughout this work we use some of the results of Arsove to give a necessary and sufficient condition for a sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ in certain types of m-convex algebras to be a proper base. In order to set this condition we study the relationship that exists between the spectral radii and the spectra of the elements of a topological algebra and the convergence of power series in that algebra. We give several original results in this direction and we apply our results to give a sufficient condition for the existence of a continuous multiplicative linear function between certain m-convex algebras.

TITULO DE LA TESIS:

" Sobre la convergencia de Series de Potencias y bases propias de Algebras Topológicas "

GRADO Y NOMBRE DEL ASESOR O DIRECTOR DE TESIS:

DOCTOR HUGO ARIZMENDI PEIMBERT

INSTITUCION DE ADSCRIPCION DEL ASESOR O DIRECTOR DE TESIS:

INSTITUTO DE MATEMATICAS U.N.A.M.

RESUMEN DE LA TESIS: (Favor de escribir el resumen de su tesis a máquina en 25 renglones a un espacio como máximo, sin salir del extensión de este cuadro.

En este trabajo utilizamos algunos de los resultados obtenidos por M. Arsove para dar una condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en cierto tipo de álgebras m-convexas sea una base propia.

Con el fin de dar esta condición estudiamos las relaciones que existen entre los radios espectrales y los espectros de los elementos de un álgebra topológica y la convergencia de las series de potencias en dichas álgebras.

El capítulo 1 está dedicado a introducir los conceptos y técnicas básicas que se utilizan a lo largo de toda la tesis.

En el capítulo 2 estudiamos la convergencia de series de potencias en álgebras topológicas en términos de los radios espectrales y los espectros de sus elementos.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de las bases en las álgebras topológicas y es donde damos la caracterización antes mencionada.

Finalmente, en el capítulo 4 aplicamos algunos de nuestros resultados con el fin de dar una condición suficiente para la existencia de una función lineal multiplicativa continua entre ciertas álgebras m-convexas.

LOS DATOS ASENTADOS EN ESTE DOCUMENTO CONCUERDAN FIELMENTE CON LOS REALES Y QUEDO ENTERADO QUE EN CASO DE CUALQUIER DISCREPANCIA QUEDARA SUSPENDIDO EL TRAMITE DEL EXAMEN.

Ma. de Lourdes Palacios D.

FIRMA DEL ALUMNO

FECHA DE SOLICITUD 12 de Marzo 1996

Acompaño los siguientes documentos:

- *Nombramiento del jurado del examen de grado*
- *Aprobación del trabajo escrito por cada miembro del jurado.*
- *Copia de la última revisión de estudios*

INDICE

Introducción. 1

Capítulo 1. Algebras Topológicas 5

1.1. Preliminares 7

1.2. Funcionales Lineales Multiplicativas

y el Espectro 14

Capítulo 2. Convergencia de Series de Potencias 31

Capítulo 3. Bases en Algebras de Funciones Holomorfas 45

Capítulo 4. Resultados sobre Morfismos 57

Bibliografía. 61

TESIS

COMPLETA

Introducción.

Al principio de la década de los cincuentas los matemáticos estadounidenses E.A. Michael [19] y R.F.Arens [2], independientemente el uno del otro, introdujeron un tipo especial de álgebras topológicas, las *álgebras topológicas localmente multiplicativamente convexas* (abreviado por *localmente m-convexas*). Estas álgebras topológicas llamaron fuertemente la atención de los matemáticos y hoy continúan haciéndolo. Más aún, este tipo de álgebras topológicas ha sido muy atractivo para los físicos matemáticos. El trabajo de I. Kaplansky [16] y [17] en anillos topológicos y anillos localmente convexos también fue fundamental en el desarrollo del estudio de las álgebras topológicas localmente m-convexas.

En 1971 W. Zelazko [22] estudió las álgebras topológicas y en 1976 dió una caracterización de las álgebras conmutativas completas m-convexas con unidad donde todos los ideales máximos tienen codimensión uno [24], y describió también situaciones donde existen ideales máximos densos de codimensión finita o infinita.

En el estudio de las álgebras topológicas, es importante conocer las condiciones bajo las cuales existen morfismos entre ellas, es decir, transformaciones lineales multiplicativas y continuas. En 1952 Ganapathy-Iyer [12] realizó un estudio de las bases en el espacio de las funciones enteras e introdujo el concepto de *base propia*. En este trabajo Ganapathy-Iyer estableció una relación entre las bases propias y los automorfismos del espacio. Además sugirió la posibilidad de caracterizar dichos automorfismos a través de las bases. M. Arsove [7] resolvió el problema en 1958 modificando ligeramente el concepto de base propia de Ganapathy-Iyer y un año después extendió sus resultados al espacio de funciones analíticas en una vecindad del origen.

Un aspecto esencial en la teoría de las bases, como lo desarrolló M. Arsove, es la interpretación de las combinaciones lineales como series infinitas. Una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones del espacio $\mathcal{F}$ de todas las funciones analíticas en una vecindad del origen es *linealmente independiente* en el sentido de Arsove si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n = 0$ implica $c_n = 0, n = 0, 1, ...$para todas las sucesiones $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos para las cuales la serie converge en $\mathcal{F}$. Una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones de $\mathcal{F}$ *genera* a un subespacio $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_0$ consta de todas las *combinaciones lineales* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n$, donde $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos para los cuales la serie converge en $\mathcal{F}$. Una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones en $\mathcal{F}$ que es linealmente independiente y genera un subespacio $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ es una *base* de $\mathcal{F}_0$.

Un ejemplo de una base es la base fundamental $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\mathcal{F}$ donde $\delta_n(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, ...$

Una base de un subespacio $\mathcal{F}_0$ del espacio $\mathcal{F}$ de todas las funciones analíticas en una vecindad del origen es una *base propia* en el sentido de Arsove si para toda sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\delta_n$ converge, donde $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la base fundamental de $\mathcal{F}$.

M. Arsove probó que dada una base $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio de Fréchet $\mathcal{F}$ y una sucesión de elementos $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ podemos definir una función lineal continua $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $f\ (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n$ si se cumple la condición

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \text{ converge en } \mathcal{F} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n \text{ converge en } \mathcal{F} \right\}$$

En 1952 E.A. Michael formuló la siguiente pregunta: ¿Es cierto que toda funcional lineal multiplicativa sobre un álgebra de Fréchet conmutativa localmente m-convexa es continua? T. Husain y J. Liang [13] contestaron afirmativamente dicha pregunta, en el caso en que el álgebra posee una base ortogonal incondicional. T. Husain y S. Watson hicieron un amplio estudio sobre las bases en álgebras topológicas y en 1983 definieron a las álgebras m-convexas con *base cíclica* [14].

En este trabajo utilizamos algunos de los resultados obtenidos por M. Arsove para dar una condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en cierto tipo de álgebras m-convexas sea una base propia. Con el fin de dar esta condición estudiamos las relaciones que existen entre los radios espectrales y los espectros de los elementos de un álgebra topológica y la convergencia de las series de potencias en dichas álgebras.

El capítulo 1 está dedicado a introducir los conceptos y técnicas básicas que utilizamos a lo largo de toda la tesis.

En el capítulo 2 estudiamos la convergencia de series de potencias en álgebras topológicas en términos de los radios espectrales y los espectros de sus elementos.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de las bases en las álgebras topológicas y es donde damos la caracterización antes mencionada.

Finalmente, en el capítulo 4 aplicamos algunos de nuestros resultados con el fin de dar una condición suficiente para la existencia de una función lineal multiplicativa continua entre ciertas álgebras m-convexas.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al doctor Hugo Arizmendi Peimbert por todo el tiempo, paciencia y apoyo que me brindó a lo largo del desarrollo de este trabajo. Agradezco también al doctor Carlos Hernández Garciadiego por sus valiosos comentarios y su apoyo. Finalmente agradezco a todas las personas que de una u otra forma me apoyaron en la realización de esta tesis.

México, D.F. enero de 1996

Capítulo 1

Algebras Topológicas

En este capítulo presentamos los conceptos fundamentales que necesitaremos a lo largo de toda la tesis.

En la **Sección 1** damos las definiciones de álgebra topológica, álgebra localmente convexa, álgebra m-convexa y álgebra B_0. Estos son los tipos de álgebras con las cuales trabajaremos.

A continuación damos algunos ejemplos de álgebras familiares como el álgebra $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$ de todas las funciones complejas y continuas en la recta real, el álgebra $\mathcal{E}$ de todas las funciones enteras de una variable compleja, y el álgebra $\mathcal{K}$ de todas las series de potencias formales $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$, y mostramos que son álgebras de alguno de los tipos mencionados. También definimos el importante concepto de *álgebra matricial*, este tipo de álgebras topológicas que juega un papel central en esta tesis.

En la **Sección 2** presentamos la estructura de las álgebras m-convexas; definimos el concepto de el *espectro de un elemento de un álgebra* y la *topología de Gelfand* asociada al álgebra, así como la *tranformada de Gelfand* de una funcional lineal multiplicativa en el álgebra.

Enunciamos y probamos los teoremas clásicos de W. Żelazko que demuestran que cualquier álgebra m-convexa completa es isomorfa, por un lado a una subálgebra cerrada de un producto cartesiano de álgebras de Banach, y por otro lado a un límite inverso de álgebras de Banach. Estos resultados son los que permiten llevar gran parte de la riqueza de la teoría de las álgebras de Banach a las álgebras m-convexas, y en más de una ocasión son usados en esta tesis.

A continuación presentamos el estudio del grupo de elementos invertibles en el álgebra dada, y las versiones para álgebras m-convexas de los teoremas de Wiener y de Gelfand-Mazur.

Luego probamos las siete caracterizaciones de W. Żelazko para el radio espectral de un elemento de un álgebra m-convexa. Definimos el concepto de *radical* de un álgebra m-convexa y damos sus correspondientes caracterizaciones en términos de los radios espectrales.

Finalizamos la sección con un importante teorema de representación de W. Żelazko.

1.1 Preliminares

1.1 Definición.- Un *álgebra topológica* es un espacio vectorial topológico dotado de una multiplicación asociativa conjuntamente continua.

Sea A un álgebra topológica sobre $\mathbb{C}$. Denotamos con $\Phi(A)$ a la familia de todas las vecindades balanceadas y convexas del origen en A. Una vecindad U es balanceada, si $0 \in \text{int}(U)$ y $\lambda U \subset U$ para cada complejo λ con $|\lambda| \leq 1$ y es convexa si $\alpha U + (1-\alpha)U \subset U$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

La continuidad de la multiplicación en el origen significa que para cada $U_\alpha \in \Phi(A)$ existe una $U_\beta \in \Phi(A)$ tal que

$$(1) \qquad U_\beta U_\beta = (U_\beta)^2 \subset U_\alpha.$$

De aquí se sigue la continuidad conjunta en $A \times A$. Para verificarlo, sean $x_0, y_0 \in A$, y V_α un elemento arbitrario de $\Phi(A)$. Debemos encontrar una vecindad $V_\beta \in \Phi(A)$ tal que siempre que $x \in x_0 + V_\beta$, $y \in y_0 + V_\beta$, entonces $xy \in x_0 y_0 + V_\alpha$, lo cual es equivalente a

$$(x_0 + V_\beta)(y_0 + V_\beta) \subset x_0 y_0 + V_\alpha.$$

Esta última relación se satisface si

$$x_0 V_\beta + V_\beta y_0 + (V_\beta)^2 \subset V_\alpha.$$

Primero encontramos U_α en $\Phi(A)$ tal que $3U_\alpha \subset V_\alpha$. Por la relación (1) podemos encontrar U_β tal que $(U_\beta)^2 \subset U_\alpha$. Por la continuidad de la multiplicación por escalares podemos encontrar una λ, $0 < \lambda \leq 1$, tal que λx_0 , $\lambda y_0 \in U_\beta$, y escoger V_β tal que $\lambda^{-1} V_\beta \subset U_\beta$. Entonces tenemos

$$x_0 V_\beta + V_\beta y_0 + (V_\beta)^2 \subset \lambda x_0 \lambda^{-1} V_\beta + \lambda^{-1} V_\beta \lambda y_0 + \lambda^2 (U_\beta)^2 \subset 3(U_\beta)^2 \subset 3U_\alpha \subset V_\alpha$$

que era lo que deseábamos.

1.2 Definición.- Un *álgebra localmente convexa* A es un álgebra topológica que como espacio vectorial es localmente convexo.

En este caso, la topología puede estar dada mediante una familia $\{\|x\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas tal que para cada índice α, existe un índice β tal que

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta. \tag{2}$$

En efecto, sea $\{U\}$ una base de vecindades convexas balanceadas del origen. Para cada U definimos la funcional subaditiva de Minkowsky $\rho_U : A \to \mathbb{C}$ como sigue:

$$\rho_U(x) = \inf\{t > 0 : \ x/t \in U\}.$$

Esta función está definida en A pues U es balanceada.

Afirmamos que ρ_U es una seminorma en A:

1) $\rho_U(x) \geq 0$: por definición.

2) $\rho_U(\gamma x) = |\gamma|\rho_U(x), \gamma \neq 0$:
Sean $\rho_U(\gamma x) = \alpha$ y $\rho_U(x) = \beta$.

$$\frac{\gamma x}{\lambda} \in U \Rightarrow \frac{x}{\lambda/\gamma} \in U \Rightarrow \left|\frac{\lambda}{\gamma}\right| \geq \beta \Rightarrow |\lambda| \geq |\gamma|\beta \Rightarrow \alpha \geq \beta|\gamma|;$$

$$\frac{x}{\lambda} \in U \Rightarrow \frac{\gamma x}{\gamma\lambda} \in U \Rightarrow |\gamma\lambda| \geq \alpha \Rightarrow |\gamma||\lambda| \geq \alpha \Rightarrow |\lambda| \geq \frac{\alpha}{|\gamma|} \Rightarrow$$

$$\beta \geq \frac{\alpha}{|\gamma|} \Rightarrow \beta|\gamma| \geq \alpha.$$

De esta manera tenemos que $|\gamma|\beta = \alpha$, i.e. $|\gamma|\rho_U(x) = \rho_U(\gamma x)$.

3) $\rho_U(x+y) \leq \rho_U(x) + \rho_U(y)$:
Sean $\rho_U(x+y) = \alpha$, $\rho_U(x) = \beta$ y $\rho_U(y) = \gamma$. Sean t y s tales que $x/t \in U$ y $y/s \in U$; entonces $t \geq \beta$ y $s \geq \gamma$. Como

$$\frac{x}{t+s} = \frac{t}{t+s}\,\frac{x}{t} \quad \text{y} \quad \frac{y}{t+s} = \frac{s}{s+t}\,\frac{y}{s}.$$

Tenemos que

$$\frac{x}{t+s} + \frac{y}{t+s} = \frac{t}{t+s}\,\frac{x}{t} + \frac{s}{t+s}\,\frac{y}{s} \in U$$

ya que U es convexa y $\dfrac{t}{t+s}+\dfrac{s}{t+s}=1$. Esto quiere decir que $\dfrac{x+y}{s+t}\in U$, luego $s+t\geq\alpha$ y entonces $\beta+\gamma\geq\alpha$.

De esta manera tenemos que $\rho_U(x)+\rho_U(y)\geq\rho_U(x+y)$, lo cual quiere decir que ρ_U es una seminorma.

Sea $U_\alpha\in\{U\}$ y sea U_β tal que $(U_\beta)^2\subseteq U_\alpha$. Sean

$$\begin{aligned}
\rho_{U_\alpha}(xy) &= \inf\{t>0 \mid \frac{xy}{t}\in U_\alpha\}=a\\
\rho_{U_\beta}(x) &= \inf\{t>0 \mid \frac{x}{t}\in U_\beta\}=b\\
\rho_{U_\beta}(y) &= \inf\{t>0 \mid \frac{y}{t}\in U_\beta\}=c
\end{aligned}$$

$$\frac{x}{t}\in U_\beta \text{ y } \frac{y}{s}\in U_\beta\Rightarrow\frac{xy}{ts}\in U_\alpha$$
$$\Rightarrow ts\geq a\Rightarrow bc\geq a\Rightarrow\rho_{U_\alpha}(xy)\leq\rho_{U_\beta}(y).$$

Finalmente vemos que la topología está dada por la familia de seminormas antes mencionada: si $U_\alpha\in\{U\}$ entonces $\{x\in A|\rho_{U_\alpha}(x)<1\}\subseteq U_\alpha$.

Esto implica que la topología inducida por $\{U\}$ y por $\{\rho_U\}$ es la misma.

1.3 Definición.- Un álgebra localmente convexa es *m-convexa* si la relación (2) puede ser reemplazada por

(3) $$\|xy\|_\alpha\leq\|x\|_\alpha\|y\|_\alpha$$

para toda $\alpha\in\Lambda$ y $x,y\in A$.

1.4 Definición.- Un *álgebra* B_0 es un álgebra A localmente convexa, completa y metrizable.

Su topología puede estar dada por una sucesión de seminormas $\{\|x\|_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

(4) $$\|x\|_i\leq\|x\|_{i+1} \quad \text{y} \quad \|xy\|_i\leq\|x\|_{i+1}\|y\|_{i+1}$$

para cada $i\in\mathbb{N}$ y $x,y\in A$.

1.5 Ejemplos:

1) El álgebra $\mathcal{C}(-\infty,\infty)$ de todas las funciones complejas y continuas en la recta real con las operaciones puntuales y las seminormas

$$\|x\|_n = \max_{-n\leq t\leq n} |x(t)|$$

es un álgebra B_0 m-convexa.

Veamos que es m-convexa:

$$\begin{aligned} \|xy\|_n &= \max_{-n\leq t\leq n} |(xy)(t)| = \max_{-n\leq t\leq n} |x(t)y(t)| = \\ &= \max_{-n\leq t\leq n} |x(t)||y(t)| \leq \max_{-n\leq t\leq n} |x(t)| \max_{-n\leq t\leq n} |y(t)| \\ &= \|x\|_n\|y\|_n. \end{aligned}$$

Veamos ahora que es B_0:

Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(-\infty,\infty)$. Dada $\epsilon > 0$, existe k_0 tal que para todas $k, k' > k_0$, $\|x_k - x_{k'}\|_n < \epsilon$ para toda n.

$\|x_k - x_{k'}\|_n < \epsilon \Rightarrow |x_k(t) - x_{k'}(t)| < \epsilon$ para cada $t \in [-n,n]$. Pero $\mathbb{C}$ es completo y $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo tanto converge en $\mathbb{C}$; sea $x(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(t)$. Como la convergencia es uniforme en cada compacto $[-n,n]$, entonces $x \in \mathcal{C}(-\infty,\infty)$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x en $\mathcal{C}(-\infty,\infty)$.

2) El álgebra $\mathcal{E}$ de todas las funciones enteras de una variable compleja con las operaciones puntuales y con las seminormas $\|x\|_n = \max\limits_{|t|\leq n}|x(t)|$, es un álgebra B_0 m-convexa. La demostración se hace en forma análoga a la del ejemplo 1.

3) El álgebra $\mathcal{K}$ de todas las series de potencias formales con coeficientes complejos $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n t^n$, con la suma usual y las seminormas $\|x\|_n = \sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|$.

La multiplicación es la de Cauchy, es decir, si $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$, entonces $xy = z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n$, donde $z_n = \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}$. $\mathcal{K}$ es un álgebra B_0 m-convexa. En efecto,

$$\begin{aligned} \|xy\|_n &= \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} |x_i||y_{k-i}| \leq \sum_{i=0}^{n} |x_i| \sum_{k=i}^{n} |y_k| \\ &\leq \|x\|_n \|y\|_n \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{K}$ es m-convexa.

Veamos ahora que es B_0, para demostrar ésto sean $\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}$ y $\epsilon > 0$; existe L_0 tal que si $l, l' > L_0$, entonces $\|x_l - x_{l'}\|_n < \epsilon$ para toda n. Si $l, l' > L_0$, para toda n,

$$\begin{aligned} \epsilon &> \left\| \sum_{k=0}^{\infty} ((x_l)_k)\, t^k - \sum_{k=0}^{\infty} ((x_{l'})_k)\, t^k \right\|_n = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} ((x_l)_k - (x_{l'})_k)\, t^k \right\|_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left| (x_l)_k - (x_{l'})_k \right|. \end{aligned}$$

Entonces para cada k, $|(x_l)_k - (x_{l'})_k| \underset{l,l'\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pero ésto quiere decir que $\{(x_j)_k\}_{j\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números complejos para cada k y por lo tanto converge en $\mathbb{C}$. Entonces para cada k existe un número complejo y_k tal que $(x_j)_k \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y_k$.

Definimos el elemento y en $\mathcal{K}$ como $y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k$.

A continuación demostramos que $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y$ en $\mathcal{K}$. Sean $n \in \mathbf{N}$ y $\epsilon > 0$, como $(x_j)_k \longrightarrow y_k$, existe N tal que para $j > N$ y para $k = 0, 1, \ldots, n$ se tiene que $|(x_j)_k - y_k| < \epsilon/(n+1)$; por lo tanto

$$\|x_j - y\|_n = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (x_j)_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k \right\|_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |(x_j)_k - y_k| < (n+1)\epsilon/(n+1) = \epsilon.$$

con ello hemos probado nuestra afirmación.

4) Sea $(a_{p,n})$, $p \in \mathbf{N}$, $0 \leq n < \infty$ una matriz infinita de números positivos que satisfacen la condición: para cada $p \in \mathbf{N}$ existe $q \in \mathbf{N}$ tal que

$$a_{p,n+m} \leq a_{q,n}a_{q,m}. \tag{5}$$

El *álgebra matricial* $A(a_{p,n})$ asociada con la matriz $(a_{p,n})$ es el álgebra de todas las series de potencias formales complejas

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k \quad \text{tales que} \quad \|x\|_p = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| a_{p,k} < \infty \quad \forall p \in \mathbf{N}.$$

$A(a_{p,n})$ es un álgebra bajo la multiplicación de Cauchy.

Si

$$0 < a_{p,n} \leq a_{p+1,n} \tag{6}$$

para toda $p \in \mathbf{N}$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $A(a_{p,n})$ es un álgebra B_0 ; si $p = q$ en la condición (5), entonces $A(a_{p,n})$ es m-convexa. $A(a_{p,n})$, $p = 1, 2, 3, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es localmente convexa ya que si $x, y \in A(a_{p,n})$, $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$, $y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k$, entonces

$$\|x\|_i = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| a_{i,k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| a_{i+1,k} = \|x\|_{i+1}.$$

Además $\|xy\|_i = \sum_{k=0}^{\infty} |(xy)_k| a_{i,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{k} x_j y_{k-j} \right| a_{i,k} \leq$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} |x_j||y_{k-j}| a_{i,k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} |x_j||y_{k-j}| \right) a_{i+1,j} a_{i+1,k-j} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| a_{i+1,k} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |y_j| a_{i+1,j}. \right) \leq \|x\|_i \|y\|_i$$

$A(a_{p,n})$ es completa: sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $A(a_{p,n})$; entonces para toda $\epsilon > 0$, existe $L_0(p,\epsilon) > 0$ tal que si $l, l' > L_0(p,\epsilon)$, $\|x_l - x_{l'}\|_p < \epsilon\ \forall p = 1, 2, \ldots$. Esto quiere decir que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(x_l)_k - (x_{l'})_k| a_{p,k} < \epsilon .$$

Sea N tal que existe $p = 1, 2, \ldots$, que satisface, $a_{p,k} \neq 0$;

$$|(x_l)_k - (x_{l'})_k| a_{p,k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |(x_l)_k - (x_{l'})_k| a_{p,k} < \epsilon$$

y por lo tanto

$$|(x_l)_k| - (x_{l'})_k| a_{p,k} < \epsilon / a_{p,k} \quad \forall l, l' > L_0(p,\epsilon).$$

Entonces $\{(x_l)_k\}_{l\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y converge a x_k. Consideramos ahora $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$. Deseamos probar que $x \in A(a_{p,n})$. Para ello calculamos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| a_{p,k} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - (x_l)_k| a_{p,k} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} |(x_l)_k| a_{p,k} \leq \lim_{l'\to\infty} \sum_{k=0}^{m} |(x_{l'})_k - (x_l)_k| a_{p,k} \\
&+ \|x_l\|_p \leq \epsilon + \|x_l\|_p
\end{aligned}$$

para cada m, si $l > L_0(p,\epsilon)$. Tomando l fija, $l > L_0(p,\epsilon)$, cada suma parcial está acotada; por lo tanto $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| a_{p,k} \leq \epsilon \|x_l\|_p$.

Por ejemplo, si $a_{p,n} = p^n$, $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq \infty$, claramente se cumplen las condiciones (5), con $p = q$, y (6). Por lo tanto $A(a_{p,n})$ es un álgebra B_0 m-convexa. Por la proposición 3.2 de [3], $A(a_{p,n})$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{E}$ de las funciones enteras con la topología compacto-abierta.

1.2 Funcionales Lineales Multiplicativas y el Espectro

A lo largo de esta sección A denotará un álgebra compleja conmutativa m-convexa con unidad e, que es un espacio complejo localmente convexo con un sistema de seminormas submultiplicativas $\|x\|_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$.

1.16 Definición.- Sea A como antes. Denotamos con $\mathcal{M}^{\#}(A)$ el conjunto de todas las funcionales no nulas lineales multiplicativas de A. Denotamos con $\mathcal{M}(A)$ al conjunto de todos los elementos de $\mathcal{M}^{\#}(A)$ que son continuos y con $\mathcal{M}_\alpha(A)$ al conjunto de todos los elementos de $\mathcal{M}(A)$ que son continuos con respecto a la seminorma $\| \ \|_\alpha$. Decimos que el álgebra A es funcionalmente continua si $\mathcal{M}^{\#}(A) = \mathcal{M}(A)$.

1.17 Observación.- $\mathcal{M}_\alpha(A) \subset \mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}^{\#}(A)$.

1.18 Definición.- La *topología de Gelfand* en $\mathcal{M}^{\#}(A)$ está definida de la siguiente forma: si $f_0 \in \mathcal{M}^{\#}(A)$ entonces la base de vecindades de f_0 en $\mathcal{M}^{\#}(A)$ está dada por
$\mathcal{U}(f_0; \epsilon; x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= \{f \in \mathcal{M}^{\#}(A) | \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon, \ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

donde $\epsilon > 0$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$.

$\mathcal{M}(A)$ es entonces un subespacio de $\mathcal{M}^{\#}(A)$ bajo la topología relativa.

1.19.- Sea ahora $\alpha \in \Lambda$, definimos

$$N_\alpha = \{x \in A : \|x\|_\alpha = 0\}.$$

éste es un ideal cerrado de A: si $x, y \in N_\alpha$ entonces

$$\|x - y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha = 0,$$

lo cual implica que $x - y \in N_\alpha$. Además si $x \in N_\alpha$ y $y \in A$, entonces $\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha = 0$, lo cual implica que $xy \in N_\alpha$. Finalmente, si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en N_α que converge a x en A, entonces $0 = \|x_n\|_\alpha \to \|x\|_\alpha$, lo cual implica que $x \in N_\alpha$.

Consideramos al álgebra normada $(A/N_\alpha, \|\ \|_\alpha)$ y la completamos. Así obtenemos un álgebra normada completa, la cual denotaremos con A_α.

El subespacio $\mathcal{M}_\alpha(A) \subset \mathcal{M}(A)$ puede identificarse con $\mathcal{M}(A_\alpha)$. De hecho hay una correspondencia uno a uno entre $\mathcal{M}(A_\alpha)$ y $\mathcal{M}_\alpha(A)$ dada por:

$$\phi : \mathcal{M}_\alpha(A) \to \mathcal{M}(A_\alpha)$$
$$F \mapsto \phi(F) = f$$

donde $f(\pi_\alpha(x)) = F(x)$ y $\pi_\alpha : A \to A/N_\alpha \hookrightarrow A_\alpha$ es el morfismo natural. (La continuidad de F respecto a $\|\ \|_\alpha$ implica que $f \in \mathcal{M}(A_\alpha)$).

Es fácil ver que ϕ está bien definida, pues A/N_α es denso en A_α, y que su inversa está dada por $\phi^{-1}(f) = f \circ \pi_\alpha$.

Para comprobar que ϕ es un homeomorfismo, sea

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(f_0; \epsilon; \pi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2), \ldots, \pi_\alpha(x_n))$$

un abierto básico en $\mathcal{M}(A_\alpha)$ y sea $\phi(G) = f_0$. Ahora,
$\phi^{-1}(\mathcal{V}) = \{F \in \mathcal{M}_\alpha(A) : \phi(F) \in \mathcal{V}\} =$

$$\begin{aligned} &= \{F \in \mathcal{M}_\alpha(A) : |\phi(F)(\pi_\alpha(x_i)) - f_0(\pi_\alpha(x_i))| < \epsilon, \forall i = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \{F \in \mathcal{M}_\alpha(A) : |F(x_i) - G(x_i)| < \epsilon, \forall i = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \mathcal{U}(G; \epsilon; x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

que es un abierto básico de $\mathcal{M}_\alpha(A)$, lo cual prueba que ϕ es continua.

Análogamente

$$\phi(\mathcal{U}(G; \epsilon; x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \mathcal{V}(\phi(G); \epsilon; \pi_\alpha(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi_\alpha(x_n)),$$

lo cual prueba que ϕ es abierta.

1.20 Definición.- El espacio $\mathcal{M}(A)$ es el *espectro* de A.

1.21 Observación.- $\mathcal{M}_\alpha(A)$ es compacto $\forall \alpha \in \Lambda$ pues $\mathcal{M}_\alpha(A) \cong \mathcal{M}(A_\alpha)$. Además $\mathcal{M}(A) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{M}_\alpha(A)$.

1.22 Definición.- Sean A como antes y $x \in A$. La *transformada de Gelfand* de x es la función

$$\hat{x} : \mathcal{M}(A) \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \hat{x}(f) = f(x)$$

1.23 Observación.- $\hat{x}$ es una función continua.

Demostración:

Para $\epsilon > 0$, sea $\mathcal{U} = \mathcal{U}(f;\epsilon;x) = \{g \in \mathcal{M}(A) | |f(x) - g(x)| < \epsilon\}$, entonces $\hat{x}(\mathcal{U}) \subseteq B_\epsilon(f(x))$, donde $B_\epsilon(f(x))$ es la bola con centro en $f(x)$ y radio ϵ.

1.24 Notación.- Sea A como antes. Denotamos con $\mathcal{G}(A)$ al conjunto de elementos invertibles en A.

1.25 Definición.- Un álgebra m-convexa A es una *Q-álgebra* si $\mathcal{G}(A)$ es un conjunto abierto.

1.26 Teorema.- (W. Żelazko). Sea A un álgebra m-convexa. Entonces A es isomorfa a una subálgebra B de un producto cartesiano de álgebras de Banach. Si A es completa, entonces el álgebra B es cerrada en ese producto.

Demostración: Sea $\{\|x\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{V}}$ un sistema de seminormas submultiplicativas que hacen de A un álgebra m-convexa. Consideramos las álgebras A_α y los homomorfismos naturales π_α definidos en 1.19. Sea $\hat{A} = \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ con la topología producto y las operaciones definidas coordenada a coordenada. La asignación $\pi : A \mapsto \hat{A}$ dada por $\pi(x) = (\pi_\alpha(x))_\alpha$ es el isomorfismo deseado. En efecto, π es inyectiva ya que si $(\pi_\alpha(x))_\alpha = 0$, entonces $\pi_\alpha(x) = 0$ $\forall\alpha \in \Lambda$, lo cual implica $\|x\|_\alpha = 0$ $\forall\alpha \in \Lambda$ y por lo tanto $x = 0$.

Sea $\mathcal{O}$ un abierto *básico* arbitrario de $\hat{A}$; entonces existen $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ abiertos de A_{α_i} $(1 \leq i \leq n)$ respectivamente tales que

$$\mathcal{O} = \{x \in \tilde{A} : x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i} \ (1 \leq i \leq n)\}.$$

Como π_{α_i} es continuo, $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ es abierto en A. Por lo tanto $\pi^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ también es abierto en A y así π es continua.

Además π es claramente un homomorfismo de álgebras. Si A es completa, $A/N_\alpha = A_\alpha$ y por lo tanto $\pi(A)$ es cerrada en $\hat{A}$.

∎

1.27 Corolario.- Sea A un álgebra m-convexa con unidad e. Entonces su topología puede darse mediante un sistema de seminormas submultiplicativas $\{\|x\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tales que $\|e\|_\alpha = 1$ $\forall\alpha \in \Lambda$.

Demostración: $\pi_\alpha(e)$ es unidad en A_α y por lo tanto se puede dar una nueva seminorma en A_α de tal forma que $\|\pi_\alpha(e)\|_\alpha = 1$ $\forall\alpha \in \Lambda$.

En efecto, sea $k_\alpha = \frac{1}{\pi_\alpha(e)}$, entonces sea $\|x\|'_\alpha = \|x\|_\alpha k_\alpha$. De aquí que $\|\pi_\alpha(e)\|'_\alpha = 1$. De esta forma A_α queda renormada de manera que $\|\pi_\alpha(e)\|'_\alpha = 1$.

Para $x \in A$, sea $\|x\|''_\alpha = \|\pi_\alpha(x)\|'_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Así obtenemos la familia de seminormas con la propiedad pedida.

∎

En adelante supondremos que si $\{\|x\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un sistema de seminormas que define una topología en un álgebra m-convexa A, entonces $\|e\|_\alpha = 1$, en el caso en que A tenga una unidad e, y que cada vez que contiene a un conjunto finito de seminormas $\|x\|_{\alpha_1}, \|x\|_{\alpha_2}, \ldots, \|x\|_{\alpha_n}$ este sistema contiene también a

$$\|x\|'_\alpha = \max_{1\leq i\leq n}\{\|x\|_{\alpha_i}\}. \tag{7}$$

Sea A un álgebra m-convexa completa con un sistema de seminormas $\{\|x\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ que satisface las condiciones anteriores.

Para $\alpha, \beta \in \Lambda$, definimos $\alpha \ll \beta$ si $\|x\|_\alpha$ es continua con respecto a $\|x\|_\beta$,es decir, $\|x\|_\alpha \leq C\|x\|_\beta$ para alguna C. Por la condición (7) supuesta, esta relación hace de $(\Lambda, \ll)$ un sistema dirigido.

Sean A_α las álgebras de Banach y $\pi_\alpha : A \to A_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, los morfismos definidos en 1.19. Nótese que aquí π_α son proyecciones. Para

$\alpha, \beta \in A$ tal que $\beta \gg \alpha$, definimos $\pi_{\alpha,\beta}$ como la función de álgebras normadas $(A/N_\beta, \|x\|_\beta) \to (A/N_\alpha, \|x\|_\alpha)$ dada por

$$\pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x)) = \pi_\alpha(x).$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\pi_\beta"'] \arrow[dr, "\pi_\alpha"] & \\ & A/N_\beta \arrow[r] & A/N_\alpha \end{tikzcd}$$

Como $\pi_\alpha(xy) = \pi_\alpha(x)\pi_\alpha(y) \forall \alpha \in \Lambda$ y $x, y \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x)\pi_\beta(y)) &= \pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(xy)) = \pi_\alpha(xy) = \pi_\alpha(x)\pi_\alpha(y) = \\ &= \pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x))\pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(y)), \end{aligned}$$

así que $\pi_{\alpha,\beta}$ es un homomorfismo de A/N_β sobre A/N_α.

Debido a que $\|x\|_\alpha \leq C\|x\|_\beta \; \forall x \in A$, $\|\pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x))\|_\alpha \leq C\|\pi_\beta(x)\|_\beta$ y por lo tanto $\pi_{\alpha,\beta}$ es un homomorfismo continuo y puede ser extendido a un homomorfismo continuo $\pi_{\alpha,\beta}$ de A_β en A_α.

1.28 Teorema.- (W. Żelazko). Sea A un álgebra m-convexa completa. Entonces A es isomorfa al límite inverso de las álgebras de Banach A_α, $\alpha \in \Lambda$, con los mapeos $\pi_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \Lambda$, arriba definidos.

Demostración: Por el teorema 1.26, A es una subálgebra cerrada de $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = (\pi_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda}$, entonces $\pi_{\alpha,\beta}(x_\beta) = \pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x)) = \pi_\alpha(x) = x_\alpha \; \forall \alpha, \beta \in \Lambda$. Por lo tanto $A \subseteq \varprojlim A_\alpha = \hat{A}$. Probaremos que A es densa en $\hat{A}$ pues, siendo cerrada, coincidirá con $\hat{A}$.

Sea $\bar{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \hat{A}$ y sea $\beta \in \Lambda$. Como los básicos V son intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$V_i(\bar{x}) = \{y \in \hat{A} : \|x_{\beta_i} - y_{\beta_i}\|_{\beta_i} < \epsilon\}$$

es decir,

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i(\bar{x}),$$

sea $\| \ \|_{\beta'}$ la seminorma que se define como en 7, es decir, $\|\bar{x}\|_{\beta'} = \max_{1\leq i\leq n}\{\|\bar{x}\|_{\beta_i}\}$ sea

$$V(\bar{x}) = \{y \in \hat{A} \mid \|x_\beta - y_\beta\|'_\beta < \epsilon\}$$

Sea $y \in A$ tal que $\|\pi_\beta(y) - x_\beta\|'_\beta < \epsilon$, entonces $(\pi_\alpha(y))_{\alpha\in\Lambda} \in \hat{A} \cap V(\bar{x})$.

■

1.29 Lema.- Sea A como en el teorema anterior. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y $\pi_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ siempre que $\beta \gg \alpha$, entonces existe un elemento $x \in A$ tal que $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ $\forall \in \Lambda$.

Demostración: Como $\pi_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha$, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \hat{A}$ y por el teorema anterior existe $x \in A$ tal que $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ $\forall\alpha \in \Lambda$.

■

1.30 Teorema.- Sea $x \in A$. Entonces $x \in \mathcal{G}(A)$ si y sólo si $\pi_\alpha(x) \in \mathcal{G}(A_\alpha)$ para toda $\alpha \in \Lambda$.

Demostración:

Si $x \in \mathcal{G}(A)$ entonces $\pi_\alpha(x) \in \mathcal{G}(A_\alpha)$ porque es la imagen homomorfa de un elemento invertible.

Recíprocamente, si $\pi_\alpha(x) \in \mathcal{G}(A_\alpha)$ $\forall\alpha \in \Lambda$, como $\pi_\alpha(e)$ es la unidad en A_α, entonces

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha(e) &= \pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(e)) = \pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x)\pi_\beta(x)^{-1}) = \\
&= \pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x)) \cdot \pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x)^{-1}) = \\
&= \pi_\alpha(x)\pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x))^{-1}.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $\pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x))^{-1} = \pi_\alpha(x)^{-1}$.

Así que si $\alpha \ll \beta$, entonces $\pi_{\alpha,\beta}(\pi_\beta(x)^{-1}) = \pi_\alpha(x)^{-1}$. Se cumple la hipótesis del lema 1.29 para $x_\alpha = \pi_\alpha(x)^{-1}$. Esto implica que existe $y \in A$ tal que $\pi_\alpha(y) = \pi_\alpha(x)^{-1}$ $\forall\alpha \in \Lambda$.

Ahora $\pi_\alpha(xy) = \pi_\alpha(yx) = \pi_\alpha(x)\pi_\alpha(y) = \pi_\alpha(e)$ $\forall\alpha \in \Lambda$ y entonces $xy = yx = e$; ésto nos dice que $x \in \mathcal{G}(A)$.

■

1.31 Teorema.- (*Propiedad de Wiener para álgebras m-convexas*). Si A es un álgebra como antes, entonces $x \in \mathcal{G}(A)$ si y sólo si $\hat{x}(f) \neq 0$ para toda $f \in \mathcal{M}(A)$.

Demostración: La propiedad de Wiener se cumple en álgebras de Banach; es decir, si B es un álgebra de Banach y $y \in B$, entonces

$$y \in \mathcal{G}(B) \Leftrightarrow y(f) \neq 0 \; \forall f \in \mathcal{M}(B).$$

Por lo tanto, para $x \in A$, tenemos que

$$\pi_\alpha(x) \in \mathcal{G}(A_\alpha) \Leftrightarrow \widehat{\pi_\alpha(x)}(f_\alpha) \neq 0 \; \forall \; f_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha(A).$$

($\Rightarrow$): Sea $x \in \mathcal{G}(A)$, entonces $\pi_\alpha(x) \in \mathcal{G}(A_\alpha)$ $\forall \alpha \in \Lambda$ y por lo tanto $\widehat{\pi_\alpha(x)}(f_\alpha) \neq 0 \; \forall f_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha(A)$. Si $f \in \mathcal{M}(A)$, entonces $f = f_\alpha \in \mathcal{M}(A_\alpha)$ para alguna α; por lo tanto $\hat{x}(f) = \hat{x}(f_\alpha) = f_\alpha(x) = (f \circ \pi_\alpha)(x) = f(\pi_\alpha(x)) = \widehat{\pi_\alpha(x)}(f) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Si $\hat{x} \neq 0$, entonces $f(x) \neq 0$ $\forall f \in \mathcal{M}(A)$; en particular $f(x) \neq 0$ $\forall f \in \mathcal{M}(A_\alpha)$ y por lo tanto $(f \circ \pi_\alpha)(x) \neq 0$ $\forall f \in \mathcal{M}(A_\alpha)$, es decir, $\pi_\alpha(x) \in \mathcal{G}(A_\alpha)$ $\forall \alpha \in \Lambda$. Entonces $x \in \mathcal{G}(A)$.

∎

1.32 Teorema.- Sea A un álgebra m-convexa con unidad; entonces la operación $x \mapsto x^{-1}$ es continua en $\mathcal{G}(A)$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A es completa ya que si A no es completa, la sumergimos en su completación $\tilde{A}$. Entonces si mostramos que la operación $x \to x^{-1}$ de $\mathcal{G}(\tilde{A})$ en si misma es continua y la restringimos a $\mathcal{G}(A)$, entonces la operación también es continua de $\mathcal{G}(A)$ en si misma pues A es densa en $\tilde{A}$. Supongamos que $\{x_\iota\} \to x_0$ es una red y x_ι y $x_0 \in \mathcal{G}(A)$. Entonces para cada α, $\{\pi_\alpha(x_\iota)\} \to \pi_\alpha(x_0)$ en A_α (pues π_α es continua).

Pero A_α es de Banach y ahí la inversión es continua, entonces $\{\pi_\alpha(x_\iota^{-1})\} = \{\pi_\alpha(x_\iota)^{-1}\} \to \pi_\alpha(x_0)^{-1} = \pi_\alpha(x_0^{-1})$, así que $\{x_\iota^{-1}\} \to x_0^{-1}$ en A.

∎

De aquí se sigue el Teorema de Gelfand-Mazur para álgebras m-convexas:

1.33 Teorema.- Si A es un álgebra m-convexa con unidad (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $A = \mathcal{G}(A) \cup \{0\}$, entonces $A = \mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$, o $\mathbb{Q}$ en el caso real, y $A = \mathbb{C}$ en el caso complejo.

Demostración: Véase el teorema de Arens [1].

En el caso conmutativo el teorema anterior se sigue del:

1.34 Teorema.- Sea A un álgebra conmutativa compleja m-convexa con unidad e. Entonces $\mathcal{M}(A)$ es no vacío.

Demostración: Sabemos que $\mathcal{M}(A) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{M}_\alpha(A) \cong \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{M}(A_\alpha)$. Como A_α es de Banach $\forall\, \alpha \in \Lambda$, entonces $\mathcal{M}(A_\alpha) \neq \phi \quad \forall\, \alpha \in \Lambda$. De aquí se sigue la afirmación.

■

En lo subsecuente A será un álgebra conmutativa, compleja, completa, m-convexa y con unidad e.

1.35 Definición.- Sea $x \in A$; el *espectro* de x en A es

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \text{ no es invertible en } A\}.$$

1.36 Teorema.- Si $x \in A$, entonces

$$\sigma(x) = \hat{x}(\mathcal{M}(A)) = \hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(A)) = \bigcup_{\alpha} \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)).$$

Demostración: Por definición $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \notin \mathcal{G}(A)\}$, entonces $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si existe $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $0 = (\widehat{x - \lambda e})(f)$ $= f(x - \lambda e)$, es decir $\hat{x}(f) = f(x) = \lambda$; esto es, $\lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}(A))$ y por lo tanto $\lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(A))$. Esto dice $\sigma(x) = \hat{x}(\mathcal{M}(A)) \subset \hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(A))$.

Como $\mathcal{M}(A) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{M}_\alpha(A)$, entonces

$$\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow \lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}(A)) = \hat{x}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{M}_\alpha(A)\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \hat{x}(\mathcal{M}_\alpha(A)) =$$

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(\widehat{\pi_\alpha(x)})(\mathcal{M}_\alpha(A)) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) \quad \text{ya que} \quad \hat{x}(f) = f(x) =$$
$$= f(\pi_\alpha(x)) = \widehat{\pi_\alpha(x)}(f).$$

Tenemos que

$$\sigma(x) = \hat{x}(\mathcal{M}(A)) = \hat{x}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))\right) \quad \text{y} \quad \hat{x}(\mathcal{M}(A)) \subset \hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(A)).$$

Si $\lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(A))$, entonces $\exists\, f \in \mathcal{M}^{\#}(A)$ tal que $\lambda = \hat{x}(f)$. Esto implica que $\lambda = f(x)$, lo cual dice que $f(x - \lambda e) = 0$ y por lo tanto $x - \lambda e$ no es invertible; por lo tanto, por la propiedad de Wiener para álgebras m-convexas, $\exists\, g \in \mathcal{M}(A)$ tal que $g(x - \lambda e) = 0$ y entonces $\lambda = g(x)$. Así tenemos que $\hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(A)) \subseteq \hat{x}(\mathcal{M}(A))$.

∎

1.37 Observación.- Del teorema anterior se sigue que para $F \in \mathcal{M}^{\#}(A)$ y $x \in A$, $F(x) = f(x)$ para alguna $f \in \mathcal{M}(A)$, donde f depende de x.

En efecto, si $F \in \mathcal{M}^{\#}(A)$ entonces $\hat{x}(F) \in \hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(A)) = \hat{x}(\mathcal{M}(A))$. De aquí que $\hat{x}(F) = \hat{x}(f)$, con $f \in \mathcal{M}(A)$.

1.38 Definición.- Para $x \in A$ definimos el *radio espectral* de x, $R(x)$, como
$$R(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$
Obtenemos a continuación algunas caracterizaciones de $R(x)$:

1.39 Teorema.- (W. Żelazko). Sea $x \in A$, definimos

a) $r_1(x) = \sup_{\alpha\in\Lambda} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}$,

b) $r_2(x) = \sup_{|\,|} \limsup_{n} \sqrt[n]{|x^n|}$, donde el supremo se toma con respecto a todas las seminormas continuas en A,

c) $r_3(x) = \sup_{f \in A^*} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f(x^n)|}$, donde $A^* = \{f : A \to \mathbb{C} \mid f$ es funcional lineal continua$\}$,

d) $r_4(x) = \sup_{f \in \mathcal{M}(A)} |f(x)|$,

e) $r_5(x) = \inf\{r \mid x - \lambda e \in \mathcal{G}(A)\ \forall\lambda,\ |\lambda| > r\}$,

f) $r_6(x) = \inf\{r \mid \exists\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\ a_n \in \mathbb{C}$, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ tiene radio de convergencia $= r$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $A\}$

g) $r_7(x) = \inf\{r \mid \forall\ \{a_n\}_{n=0}^{\infty},\ a_n \in \mathbb{C}$, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ tiene radio de convergencia $= r$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $A\}$.

Entonces $r_1(x) = r_2(x) = r_3(x) = r_4(x) = r_5(x) = r_6(x) = r_7(x) = R(x)$.

Demostración: Claramente $r_2(x) \geq r_1(x)$. Por otro lado, para cualquier seminorma continua $|\ |$ en A, existe una constante $c > 0$ y una $\alpha \in \Lambda$ tal que $|x| \leq c\|x\|_\alpha\ \forall x \in A$, por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c\|x^n\|_\alpha} \leq r_1(x);$$

entonces $r_1(x) = r_2(x)$.

Ahora probamos que $r_1(x) \geq r_3(x)$. Si $f \in A^*$, $\exists c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c\|x\|_\alpha\ \forall\ x$ y para alguna $\alpha \in \Lambda$. Entonces $|f(x^n)| \leq c\|x^n\|_\alpha$.

De aquí que $\sqrt[n]{|f(x^n)|} \leq \sqrt[n]{c\|x^n\|_\alpha}$ y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f(x^n)|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c\|x^n\|_\alpha} =$$

$$\lim_{n\to\infty} c^{1/n} \sqrt[n]{\|(x^n)\|_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha} \leq r_1(x).$$

Así $r_3(x) \leq r_1(x)$ y tenemos $r_1(x) = r_2(x) \geq r_3(x)$.

Probamos ahora que $r_3(x) \geq r_4(x)$. Tenemos

$$r_3(x) = \sup_{f \in A^*} \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|f(x^n)|} \geq \sup_{f \in \mathcal{M}(A))} \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|f(x^n)|} \geq$$

$$\sup_{f \in \mathcal{M}(A)} |f(x)| = r_4(x).$$

A continuación probamos que $r_4 = R(x)$. Tenemos

$$r_4(x) = \sup_{f \in \mathcal{M}(A)} |f(x)| = \sup_{f \in \mathcal{M}(A)} |\hat{x}(f)| = \sup |\hat{x}(\mathcal{M}(A))| =$$

$$= \sup |\sigma_A(x)| = R(x).$$

Hasta este momento hemos probado

$$r_1(x) = r_2(x) \geq r_3(x) \geq r_4(x) = R(x).$$

Pero claramente $R(x) = r_5(x)$. Probamos ahora que $R(x) \geq r_1(x)$. Observamos que $R(x) \geq \rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$ puesto que

$$\rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))\} = \sup |\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))|$$

y que

$$\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \sigma_A(x).$$

Nos falta probar que $\rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) \geq \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}$. Pero

$$\rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\pi_\alpha(x)^n\|'_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\pi_\alpha(x^n)\|'_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}$$

y por lo tanto $R(x) \geq \rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \sup_\alpha \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha} = r_1(x)$, así que $R(x) \geq r_1(x)$.

Esto quiere decir que $r_1(x) = r_2(x) = r_3(x) = r_4(x) = r_5(x) = R(x)$.

Es claro que $r_6(x) \leq r_7(x)$.

Si $r_6(x) = \infty$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $r_6(x) < \infty$ y sea $r > r_6(x)$. Entonces existe una sucesión compleja $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ para la cual la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en A y tal que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ es menor que r, es decir, $r > \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$, o, equivalentemente, $r^{-1} < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces tenemos que $r^{-n} < |a_n|$ para un número infinito de subíndices n. Por otro lado, como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en A, se tiene que $\|a_n x^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \forall\, \alpha \in \Lambda$. Ésto implica que existe una sucesión creciente de enteros $\{k_n\}$ tal que $\|r^{-k_n}x^{k_n}\|_\alpha \leq \|a_{k_n}x^{k_n}\|_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \forall\, \alpha \in \Lambda$. Por lo tanto $\forall f \in \mathcal{M}(A)$ existen $\alpha \in \Lambda$ y una constante $c > 0$ tales que

$$|f(x/r)^{k_n}| = |f(x^{k_n}r^{-k_n})| \leq c\|x^{k_n}r^{-k_n}\|_\alpha \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Luego $\forall f \in \mathcal{M}(A)$ se tiene que $|f(x/r)| < 1$, por lo tanto $\frac{1}{|r|}|f(x)| < 1$ y entonces $|f(x)| < r$. Así $r_4(x) \leq r$ y tenemos que $r_6(x) \geq r_4(x) = R(x)$.

Sólo nos falta probar que $r_7(x) \leq R(x)$. Si $R(x) = \infty$, entonces la afirmación es clara. Supongamos que $R(x) < \infty$ y sea $r > R(x) = r_2(x)$.

Para toda seminorma continua $|x|$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x/r)|^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|x^n|}}{r} \leq \frac{r_2(x)}{r} < 1.$$

Luego $\sum_{n=0}^{\infty}(x/r)^n$ es convergente en A y por lo tanto $r \geq r_7(x)$. Así que tenemos la implicación $r > R(x) \Rightarrow r \geq r_7(x)$, lo cual dice que $r_7(x) \leq R(x)$.

La situación es

$$r_1(x) = r_2(x) = r_3(x) = r_4(x) = r_5(x) = R(x) \geq r_7(x) \geq r_6(x) \geq R(x).$$

De aquí se sigue el teorema.

∎

1.40 Observaciones.-

1) Si $f \in \mathcal{M}^{\#}(A)$, entonces $\ker f$ es un ideal máximo de A.

2) Si $f \in \mathcal{M}(A)$, entonces $\ker f$ es un ideal cerrado de A pues $\ker f = f^{-1}(0)$.

1.41 Definición.– El radical de A, $\operatorname{rad}(A)$, es la intersección de todos los ideales máximos de A.

1.42 Teorema.- El radical de A es cerrado y se describe como:

(1) $\operatorname{Rad}(A) = \bigcap \mathcal{M}^{\#}(A)$.

(2) $\operatorname{Rad}(A) = \bigcap \mathcal{M}(A)$.

(3)-(9) $\operatorname{Rad}(A) = \{x \in A \mid r_i(x) = 0\} (i = 1, 2, \ldots, 7)$, donde r_i está definido como en el teorema 1.40.

(10) $\operatorname{Rad}(A) = \{x \in A \mid R(x) = 0\}$.

(11) $\operatorname{Rad}(A) = \{x \in A \mid \forall y \in A,\ e + xy \in \mathcal{G}(A)\}$.

Demostración: Es suficiente probar las fórmulas (1) a (11) ya que, por (2), el radical es cerrado por ser una intersección de cerrados. Por el teorema 1.40, las relaciones (3) a (10) son equivalentes, así que basta con probar (1), (2) y (11). Como $\bigcap \mathcal{M}^{\#}(A) = \bigcap_{f \in \mathcal{M}^{\#}(A)} \ker f$, tenemos que $\operatorname{Rad}(A) \subseteq \bigcap \mathcal{M}^{\#}(A) \subseteq \bigcap \mathcal{M}(A)$.

Sea $x \in \bigcap \mathcal{M}(A)$, entonces $f(x) = 0\ \forall f \in \mathcal{M}(A)$. Así $f(e + xy) = f(e) + f(x)f(y) = f(e) = 1\ \forall y \in A$; luego $(e+xy)\hat{}\,(f) \neq 0\ \forall f \in \mathcal{M}(A)$. Esto dice que $e + xy \in \mathcal{G}(A)\ \forall y \in A$; de aquí que $x \in R$ donde $R = \{x \in A \mid e + xy \in \mathcal{G}(A)\ \forall y \in A\}$. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{M}(A) \subseteq R$.

Probamos ahora que $R \subseteq \operatorname{Rad}(A)$. Sean $x \in R$ y M un ideal máximo de A; necesitamos ver que $x \in M$. Supongamos pues que $x \notin M$, entonces el ideal más pequeño generado por M y x, a saber $M + \langle x \rangle \supsetneq M$. Pero eso significa que $M + \langle x \rangle = A$ y por lo tanto existen

$m_0 \in M$ y $y_0 \in A$ tales que $m_0 + y_0 x = e$; entonces $m_0 = e - y_0 x \in \mathcal{G}(A)$ porque $x \in R$, lo cual es una contradicción. Luego $x \in M$ y por lo tanto $\mathrm{Rad}(A) \subseteq \bigcap \mathcal{M}^{\#}(A) \subseteq \bigcap \mathcal{M}(A) \subseteq R \subseteq \mathrm{Rad}(A)$. Así se tiene la igualdad deseada.

∎

1.43 Definición.- A es un álgebra semisimple si $\mathrm{Rad}(A) = 0$.

1.44 Observación.- Si A_α es semisimple $\forall \alpha \in \Lambda$, entonces $A = \varprojlim A_\alpha$ también es semisimple.

En efecto, $\mathrm{Rad}(A) = \bigcap \mathcal{M}(A) = \bigcap \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{M}(A_\alpha) \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \left(\bigcap \mathcal{M}(A_\alpha) \right) = 0$.

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la observación 1.44 no es cierto, aún cuando A es un álgebra B_0.

1.45 Ejemplo.- Sea A_0 un álgebra de Banach conmutativa, semisimple con unidad e, con la norma $\|x\|$. Sea $\|x\|_0$ una norma continua submultiplicativa en A_0 tal que la completación de A_0 en la norma $\| \ \|_0$ no es un álgebra semisimple. Por ejemplo podemos tomar

$$A_0 = \ell_1, \text{ para } x = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n| \text{ y } \|x\|_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} |\xi_n|$$

con la convolución. Definimos a A como un álgebra de sucesiones, $x = \{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $x(n) \in A$ tales que $|x|_i < \infty$, donde

$$(1) \qquad |x|_i = \sup\{\|x(1)\|, \|x(2)\|, \ldots, \|x(i)\|, \|x(i+1)\|_0, \ldots\}$$

para $i = 1, 2, \ldots$.

Ésta es un álgebra B_0, m-convexa, semisimple con las seminormas definidas anteriormente y con las operaciones de álgebra coordenada a coordenada. Probamos estas afirmaciones a continuación:

[$(A, \| \ \|_i)$ es B_0]: Si $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en A, entonces $|x^{k_1} - x^{k_2}|_i \to 0$ si $k_1, k_2 \to \infty$. Luego

$$\|x^{k_1}(j) - x^{k_2}(j)\| \to 0 \quad \text{si} \quad j = 1, 2, \ldots, i$$

y

$$\|x^{k_1}(j) - x^{k_2}(j)\|_0 \to 0 \quad \text{si} \quad j = i+1, i+2, \ldots$$

Sea $x(j) = \lim_{k\to\infty} x^k(j)$, con la norma $\| \ \|$ si $k \leq i$ y con la norma $\| \ \|_0$ si $k > i$. Entonces $\{x^k\}$ converge a x en A. Nótese que $x \in A$ pues para cualquier i, $|x|_i \leq |x - x^k|_i + |x^k|_i < \infty$.

[$(A, \| \ \|_i)$ es m-convexa]: Sean $x, y \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
|xy|_i &= \sup\{\|(xy)(1)\|, \|(xy)(2)\|, \ldots, \|(xy)(i)\|, \|(xy)(i+1)\|_0, \ldots\} = \\
&= \sup\{\|x(1)\|\|y(1)\|, \ldots, \|x(i)\|\|y(i)\|, \|x(i+1)\|_0\|y(i+1)\|_0, \ldots\} \\
&\leq \sup\{\|x(i)\|, \ldots, \|x(i)\|, \|x(i+1)\|_0, \ldots\} \cdot \\
&\quad \cdot \sup\{\|y(1)\|, \ldots, \|y(i)\|, \|y(i+1)\|_0, \ldots\} = \\
&= |x|_i |y|_i.
\end{aligned}$$

[$(A, \| \ \|_i)$ es semisimple]: Como $\|x(j)^n\| \leq |x^n|_i$, $j = 1, 2, \ldots, i$ y $\|x(j)^n\| \leq |x^n|_i$, $j = i+1, i+2, \ldots$, entonces $\sqrt[n]{\|x(j)^n\|} \leq \sqrt[n]{|x^n|_i}$, $j = 1, 2, \ldots, i$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x(j)^n\|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|_i}$, $j = 1, 2, \ldots, i$. Luego $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x(j)^n\|} \leq \sup_i \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|_i} = 0$.

Sea $\{\|x\|_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un sistema creciente de seminormas submultiplicativas continuas en A que determinan la misma topología que (1). Probamos que para una i suficientemente grande, el álgebra de Banach A_i correspondiente a $\|x\|_i$ no es semisimple.

Por lo anterior existen constantes c_1 y c_2 y enteros i y m tales que

$$|x|_1 \leq c_1 \|x\|_i \leq c_2 |x|_m \quad \forall x \in A.$$

Como $|x|_1$ es una norma en A, entonces $\|x\|_i$ es también una norma en A y A_i es la completación de A en esa norma. Sea $0 \neq x_0 \in A_0$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x(0)^n\|_0} = 0$. Sea $x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i \text{ lugares}}, x(0), \ldots) \in A$.

Tenemos $\|x^n\|_i \leq \frac{c_2}{c_1}|x^n|_m = \frac{c_2}{c_1}\|x(0)^n\|_0$. Así que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_i} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{c_2}{c_1}\|x(0)^n\|_0} = 0$ y $x \neq 0$. De esta manera A_i no es semisimple y tenemos el resultado deseado.

1.46 Corolario.- Si A es semisimple, entonces el mapeo de Gelfand $x \to \hat{x}$ de A en $\mathcal{C}(\mathcal{M}(A))$ es uno a uno.

Demostración: Supongamos $\hat{x} = 0$, entonces $\hat{x}(\mathcal{M}(A)) = 0$ y por lo tanto $\sigma(x) = 0$. Esto implica que $x \in \mathrm{Rad}(A)$ y entonces $x = 0$.

■

1.47 Teorema.- (W. Żelazko). Sea $x \in A$ y sea Φ una función holomorfa en un conjunto abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ que contiene al espectro $\sigma(x)$. Entonces existe $y \in A$ tal que

$$f(y) = \Phi(f(x))$$

$\forall f \in \mathcal{M}(A)$, es decir,

$$\hat{y}(\cdot) = \Phi(\hat{x}(\cdot)).$$

Demostración: Sabemos que $\sigma_A(x) = \bigcup_{\alpha} \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$, entonces

$$\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) \subseteq \mathcal{U}$$

y, por un resultado conocido para álgebras de Banach [22], existe un elemento $y_\alpha \in A_\alpha$ definido por

$$y_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha} \Phi(\xi)(\xi e - \pi_\alpha(x))^{-1} d\xi$$

donde Γ_α es una trayectoria en $\mathcal{U}$ que rodea a $\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$. Más aún, y_α no depende de la elección de Γ_α. Si $\beta > \alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi_{\alpha,\beta}(y_\beta) &= \pi_{\alpha,\beta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\beta} \Phi(\xi)(\xi e - \pi_\beta(x))^{-1} d\xi\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\pi_{\alpha,\beta}\left[\int_{\Gamma_\beta} \Phi(\xi)(\xi e - \pi_\beta(x))^{-1} d\xi\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\beta} \Phi(\xi)(\xi e - \pi_\alpha(x))^{-1} d\xi = y_\alpha,
\end{aligned}$$

si Γ_β rodea a $\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$ y a $\sigma_{A_\beta}(\pi_\beta(x))$.

Por el lema 1.29 existe $y \in A$ tal que $y_\alpha = \pi_\alpha(y)$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Si $f \in \mathcal{M}(A)$, sea $F = f \circ \pi_\alpha$, $F \in \mathcal{M}(A_\alpha)$ y

$$\begin{aligned} F(y) &= f(\pi_\alpha(y)) = f(y_\alpha) \\ &= f\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha} \Phi(\xi)(\xi e - \pi_\alpha(x))^{-1} d\xi\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha} \Phi(\xi)(\xi - f(\pi_\alpha(x))^{-1} d\xi \\ &= \Phi(f \circ \pi_\alpha(x)) = \Phi(F(x)). \end{aligned}$$

∎

1.48 Observación.- Por el teorema 1.47 podemos escoger y tal que

$$f(y) = \Phi(f(x)) \forall f \in \mathcal{M}(A).$$

Cerramos el capítulo enunciando una proposición que usaremos más adelante.

1.49 Proposición.- Sea A un álgebra con unidad, la cual tiene una seminorma submultiplicativa $\| \ \|$. es decir, $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \ \forall x, y \in A$. Entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ para toda $x \in A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf\limits_n \left\{\|x^n\|^{1/n}\right\}$.

Demostración: Sea $r(x) = \inf\limits_n \left\{\|x^n\|^{1/n}\right\}$. Probaremos que

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Sean $r = r(x)$ y $\epsilon > 0$, sea k tal que $\|x^k\|^{1/k} < r + \epsilon$.

Cada entero positivo n puede expresarse como $n = p(n)k + q(n)$, donde $p(n)$, $q(n) \geq 0$ y $q(n) \leq k - 1$. Como $\frac{1}{n}q(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ tenemos que $\frac{1}{n}p(n)k \underset{n\to\infty}{\to} 1$, entonces $\|x^n\|^{1/n} \leq \|x^k\|^{\frac{1}{n}p(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \|x^k\|^{1/k} < r + \epsilon$. Esto implica que $\|x^n\|^{1/n} < r + \epsilon$ para n suficientemente grande. También sucede que $r < \|x^n\|^{1/n}$ para toda n. Por lo tanto $r = \mathit{lim}_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$.

Capítulo 2

Convergencia de Series de Potencias

En este capítulo presentamos los resultados que hemos obtenido. Estos relacionan al radio espectral de un elemento x de un álgebra B_0, compleja conmutativa, m-convexa A, con unidad e, con la convergencia en la misma álgebra de las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con coeficientes complejos. Varios de estos resultados surgieron al estudiar el conjunto de endomorfismos de ciertas álgebras localmente convexas, a saber, el de las álgebras matriciales.

A lo largo de esta sección A denotará un álgebra B_0, compleja, conmutativa, m-convexa y con unidad e.

2.1 Definición.- Sea $\{\| \|_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ una sucesión de seminormas que definen la topología de A. Sea $x \in A$, definimos

$$R_i(x) = \lim_{n\to\infty}(\|x^n\|_i)^{1/n}$$

para cada $i \in \mathbf{N}$.

2.2 Observaciones.-

(1) $R_i(x) \leq R_{i+1}(x)\ \forall i \in \mathbf{N}$.

(2) $\sup_{i\in\mathbf{N}} R_i(x) = R(x)$.

2.3 Proposición.- Sea $x \in A$ tal que

$$R_i(x) < R(x) = a, \ \forall i \in \mathbf{N}, \quad 0 < a \leq \infty. \qquad (1)$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $A \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|x^n\|_p$ converge en $\mathbb{C}$ para cada $p \in \mathbf{N}$.

Demostración:

$\Leftarrow$:) Es inmediata.

$\Rightarrow$:) Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en A. Si r es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$, entonces $r \geq r_7(x)$, por el teorema 1.39.

Por lo tanto, el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \lambda^n$ es $r \geq r_7(x)$ y entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \lambda^n$ converge en $D_r(0) \supseteq D_a(0)$, en caso de que $a = \infty$ dicha serie converge en todo $\mathbb{C}$.

Para p un entero positivo arbitrario, sea $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < R_p(x) < \rho < a \leq r;$$

entonces existe $k \in \mathbf{N}$ para el cual $n \geq k \Rightarrow \|x^n\|_p^{1/n} < \rho$ y por lo tanto $\|x^n\|_p < \rho^n$; esto dice que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|x^n\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ y como esta última converge en $\mathbb{C}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|x^n\|_p$ converge en $\mathbb{C}$.

∎

2.4 Proposición.- Sea $x \in A$ tal que

$$(1) \qquad R_i(x) < R(x) = a, \ \forall i \in \mathbf{N}, a > 0.$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en A para cada serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ que tenga radio de convergencia mayor o igual que a.

Demostración: Sea r el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ y supongamos que $r \geq a$. Para p un entero positivo arbitrario, sea $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $R_p(x) < \rho < a$. Procediendo como en la prueba de la proposición 2.3 obtenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|x^n\|_p$ converge, y, por la misma proposición, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en A.

■

2.5 Proposición.- Sea $x \in A$. Si $\sigma(x)$ es un abierto en $\mathbb{C}$ y $R(x) = a$, $a > 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en A para cada serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ que tenga radio de convergencia mayor o igual que a.

Demostración: Sea r el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$. Si $r \geq a$, sea f la función definida por $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$; f es una función analítica en el abierto $D_R(0)$ que contiene al espectro de x. Entonces por el teorema 1.47, existe $y \in A$ tal que $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

■

La hipótesis $R_i(x) < R(x)\ \forall i = 1, 2, \ldots$, es necesaria en la proposición 2.4 como lo muestra la siguiente:

2.6 Proposición.- Sea $x \in A$. Si existe un entero positivo p tal que

(2) $$R_p(x) = R_{p+1}(x) = \cdots = R(x) = a, \quad 0 < a \leq \infty,$$

entonces

(i) existe una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ con radio de convergencia igual a $R(x)$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no converge en A,

(ii) existe una serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$ con radio de convergencia igual a $R(x)$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge en A.

Demostración: (i) Consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (t/a)^n$ que tiene radio de convergencia a.

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} (x/a)^n$ converge en A. Entonces $a^{-n} x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; por lo tanto $\|a^{-n}x^n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall p$. De esta forma tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} |a^{-n}| \|x^n\|_p = 0 \quad \forall p\,.$$

Por otro lado $R_p(x) = R(x)$ implica que $\lim_{n\to\infty} (\|x^n\|_p)^{1/n} = \inf_n (\|x^n\|_p)^{1/n} = a$; de aquí que $(\|x^n\|_p)^{1/n} \geq a$ y por lo tanto $\frac{\|x^n\|_p}{a^n} \geq 1$. Esto nos dice que $a^{-n}\|x^n\|_p \not\to 0$, lo cual es una contradicción.

(ii) Sea $\{n_p\}_{p=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de enteros positivos tal que $\lim_{p\to\infty} (\|x^{n_p}\|_p)^{1/n_p} = a$ y $\|x^{n_p}\|_p^{1/n_p} \neq 0$, $p = 1, 2, \ldots$. Tomamos la serie

$$b(\lambda) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\|x^{n_p}\|_p} \left(\frac{1}{(n_p)^2}\right) \lambda^{n_p}\,,$$

es claro que el radio de convergencia de $b(\lambda)$ es a. Por otra parte

$$b(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\|x^{n_p}\|_p} \left(\frac{1}{(n_p)^2}\right) x^{n_p} \in A$$

ya que

$$\begin{aligned}
\|b(x)\|_q &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\|x^{n_p}\|_p} \left(\frac{1}{(n_p)^2}\right) \|x^{n_p}\|_q \\
&= \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{\|x^{n_p}\|_p} \left(\frac{1}{(n_p)^2}\right) \|x^{n_p}\|_q + \sum_{p=q+1}^{\infty} \frac{1}{\|x^{n_p}\|_p} \left(\frac{1}{(n_p)^2}\right) \|x^{n_p}\|_q \\
&< \infty\,.
\end{aligned}$$

Entonces $b(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\|x^{n_p}\|_p} \left(\frac{1}{(n_p)^2}\right) x^{n_p}$ converge absolutamente para cada seminorma $\| \ \|_p$ y por lo tanto converge en A.

∎

2.7 Proposición.- Sean $x \in A$ y $\sigma(x)$ el espectro de x. Si $\sigma(x)$ es un abierto en $\mathbb{C}$, entonces

$$R_i(x) < R(x) = a < \infty, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Esto es una consecuencia de las proposiciones 2.5 y 2.6.

∎

Sin embargo, el recíproco no es cierto como lo muestra el siguiente:

2.8 Ejemplo.- Sea $A = \mathcal{C}[0, 2\pi)$ el álgebra de todas las funciones complejas y continuas en $[0, 2\pi)$, con las operaciones usuales y la topología compacto-abierta. La topología de A puede definirse mediante la familia de seminormas $\{\|f\|_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ definidas por:

$$\|f\|_i = \sup_{0 \leq t \leq t_i} |f(t)|$$

donde $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $[0, 2\pi)$ que converge a 2π. Sea $I(t) = t$ para cada $t \in [0, 2\pi)$; entonces $R_i(I) = t_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y sin embargo $\sigma(I) = [0, 2\pi)$ que no es abierto en $\mathbb{C}$.

2.9 Proposición. Sea $x \in A$ tal que

$$R_i(x) < R(x) = a < \infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Entonces no existe ningún elemento $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $|\lambda| = R(x)$.

Demostración. Supogamos que existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $|\lambda| = R(x)$. Consideramos la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\lambda^i}$ cuyo radio de convergencia es $|\lambda|$. Ahora

$|\lambda| = R(x)$ implica que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{\lambda^i} \in A$, lo cual quiere decir que

$$\frac{-1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{\lambda^i} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{\lambda^{i+1}} \in A,$$

pero $(x - \lambda e)^{-1} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{\lambda^{i+1}} \in A$, lo cual es una contradicción.

∎

2.10 Definición.- Sea A un álgebra como antes. Sea $z \in A$ un elemento fijo. La sucesión $\{z^n\}_{n\geq 0}$ es una *base cíclica* de A si para cada $x \in A$ existe una única sucesión de escalares $\{\lambda_i(x)\}_{i\geq 0}$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(x) z^i.$$

Observamos que $z^0 = e$ es la identidad.

Si $x = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(x) z^i$ y $y = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(y) z^i$, su producto está definido por

$$xy = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(x) z^i\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(y) z^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(xy) z^i$$

donde $\lambda_i(xy) = \sum_{j=0}^{i} \lambda_{i-j}(x) \lambda_j(y)$.

2.11 Ejemplo.-

Sea Ω una región simplemente conexa en el plano $\mathbb{C}$ y sea $H(\Omega)$ el álgebra de todas las funciones holomorfas en Ω, dotada de la topología compacto-abierta. Entonces $H(\Omega)$ es un álgebra conmutativa B_0 m-convexa con identidad 1. Si $\Omega = \mathbb{C}$, entonces $H(\Omega) = \mathcal{E}$, el álgebra B_0 m-convexa de todas las funciones enteras.

Si Ω es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$, sea $\psi : \Omega \to D$ un mapeo conforme de Ω en el disco unitario D. Entonces para cada $f \in H(\Omega)$, tenemos que

$$f(z) = f(\psi^{-1}(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\psi(z))^n$$

donde $z \in \Omega$ y $w \in D$, en la cual la serie es convergente y esta representación de la serie es única. Por lo tanto $\{\psi^n\}_{n=0}^{\infty}$ forma una base cíclica de $H(\Omega)$. En particular $\mathcal{E}$ es un álgebra B_0, m-convexa, compleja, commutativa con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Haremos uso de la siguiente observación que se encuentra en [19].

2.12 Observación.- Sea A un álgebra como antes con base cíclica $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ y sea $r = R(x)$, $0 < r < \infty$. Entonces

$$D_r(0) \subseteq \sigma(x) \subseteq \overline{D_r(0)},$$

donde $D_r(0)$ es el disco abierto de radio r con centro en el origen si $r < \infty$ y $D_r(0) = \mathbb{C}$ si $r = \infty$ [6].

En vista de la proposición 2.7 es natural preguntarnos si existe algún tipo de álgebras en donde haya un elemento x para el cual la condición

$$(1) \qquad R_i(x) < R(x) = a < \infty \quad \forall i$$

sea equivalente a que el elemento tenga espectro abierto y la respuesta es la siguiente:

2.13 Proposición.- Sea A un álgebra con base cíclica $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ y $R(x) = r > 0$, entonces

$$\sigma(x) \quad \text{es abierto} \quad \Leftrightarrow R_i(x) < R(x) \forall i \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

$\Leftarrow$): Probaremos que $\sigma(x) = D_r(0)$.

Por 2.12 sabemos que $D_r(0) \subset \sigma(x)$ y por 2.9 tenemos la igualdad.

$\Rightarrow$): Supongamos que $D_r(0) = \sigma(x)$, entonces, por [21] lema 3.1, $D_r(0)$ es homeomorfo a $\mathcal{M}(A)$. Por otro lado $\mathcal{M}(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M(A_i)$ y por lo tanto $\sigma(x) \simeq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(A_i)$. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $f_i \in \mathcal{M}(A_i)$ tal que $\max\{|f(x)| | f \in \mathcal{M}(A_i)\} = R_i(x) = |f_i(x)|$. Por lo tanto existe $\lambda \in D_r(0)$ tal que $R_i(x) = |f_i(z)| = |\lambda| < r$.

∎

2.14 Proposición.- Sea A un álgebra como antes, sea $x \in A$ tal que $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base cíclica y además $\sigma(x)$ es abierto. Entonces $\sigma(y)$ es abierto para toda y no constante en A.

Demostración: Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^n$ un elemento no constante de A. Como $\sigma(x)$ es abierto, si $R = R(x)$, tenemos $\sigma(x) = D_R(0)$. Sabemos que $\sigma(x) = \hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(A)) = \{f(x) | f \in \mathcal{M}^{\#}(A)\}$. Por otro lado $\sigma(y) = \hat{y}(\mathcal{M}^{\#}(A)) = \{f(y) | f \in \mathcal{M}^{\#}(A)\}$; entonces

$$y(\sigma(x)) = \{y(f(x)) | f \in \mathcal{M}^{\#}(A)\} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} y(n)f(x)^n | f \in \mathcal{M}^{\#}(A)\right\} =$$

$$= \left\{f\left(\sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^n\right) \middle| f \in \mathcal{M}^{\#}(A)\right\} = \{f(y) | f \in \mathcal{M}^{\#}(A)\} = \sigma(y).$$

Pero la función

$$\lambda \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} y(n)\lambda^n$$

es holomorfa y por lo tanto $\sigma(y)$ es abierto.

∎

2.15 Definición.- Sea $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio vectorial topológico E y supongamos que la serie $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$ converge en A. Sea $\tau: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una permutación. Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} y_{\tau(i)}$ es convergente para cada permutación τ aplicada al mismo elemento y, entonces decimos que $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ es *incondicionalmente convergente*. Una base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ del espacio vectorial topológico E es llamada *base incondicional* si cada serie $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ en E es incondicionalmente convergente.

Si una base cíclica de un álgebra B_0, m-convexa es incondicional entonces el álgebra misma es especial en el siguiente sentido:

Teorema (S. Watson) [21].
Sea A un álgebra B_0 con base cíclica incondicional $\{x^n : n \geq 0\}$. Entonces

i) $\sigma(x)$ es únicamente abierto o compacto.

ii) $\mathcal{M}(A)$ es homeomorfo a $\sigma(x)$.

2.16 Proposición.- Sea A un álgebra B_0, m-convexa con base cíclica incondicional $\{x^n : n \geq 0\}$ para la cual existe $i \in \mathbf{N}$ tal que

$$R_i(x) = R_{i+1}(x) = \cdots = R(x).$$

Entonces para cada $y \in A$ existe $p \in \mathbf{N}$ tal que

$$R_p(y) = R_{p+1}(y) = \cdots = R(y) = a < \infty. \tag{2}$$

Demostración: Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^n$ en A y $D = D_{R(x)}(0)$. Definimos $y: \bar{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)\lambda^n$. Sabemos por el Teorema de S. Watson anteriormente mencionado que $y(\lambda)$ es una función analítica en D y continua en $\bar{D}$.

Como $y(\bar{D}) = \sigma(y) = \{f_\lambda(y) : |\lambda| \leq R(x)\}$, entonces, por el principio del módulo máximo, existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|y(\lambda_0)| = R(y)$.

Por otro lado, $f_{\lambda_0} : A \to \mathbb{C}$ dada por $f_{\lambda_0}(w) = w(\lambda_0)$, es continua y por lo tanto existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $|f_{\lambda_0}(w)| \leq \|w\|_q$ para toda $w \in A$. Si $w = y^n$, tenemos que $|y^n(\lambda_0)| \leq \|y^n\|_q$ $\forall n$; pero $y^n(\lambda_0) = (y(\lambda_0))^n$ ya que f_{λ_0} es multiplicativa. Por lo tanto $|y(\lambda_0)| = |y^n(\lambda_0)|^{1/n} \leq (\|y^n\|_q)^{1/n}$ $\forall n$. Entonces $R(y) = |y(\lambda_0)| \geq R_q(y) \geq |y(\lambda_0)|$. De esta manera $R(y) = R_q(y)$ y se cumple la condición (2).

∎

Observamos que un álgebra matricial m-convexa $A(a_{p,n})$ siempre tiene una base incondicional. Esto se debe a la siguiente

Proposición.- (T. Hussain) [14].
Sean E un espacio de Fréchet con un sistema de seminormas $\| \ \|_p$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de E. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es incondicional.

ii) Si la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x^j$ converge en E, entonces cada una de sus subseries $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j_k} x_{j_k}$ también converge en E.

Recordemos que una Q-álgebra (Def. 1.25) es un álgebra topológica en la cual el conjunto de sus elementos invertibles es abierto.

2.17 Proposición.- Sea $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial, B_0, m-convexa con generador z tal que $R_i(z) < R(z)$ para toda $i \in \mathbf{N}$. Entonces $A(a_{p,n})$ no es una Q-álgebra.

Demostración: W. Żelazko [24] probó que en una álgebra A compleja, conmutativa, m-convexa, con unidad e, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\sigma(x)$ es acotado para toda $x \in A$,

(ii) $\sigma(x)$ es compacto para toda $x \in A$,

(iii) A es una Q-álgebra, m-convexa, completa bajo alguna topología.

Si $R(z) = \infty$, entonces $z \in A(a_{p,n})$ tiene espectro no acotado y por lo tanto, por el teorema [24] de W. Zelazko, $A(a_{p,n})$ no es una Q-álgebra.

Si $R(z) < \infty$, entonces $\sigma(z)$ es abierto por la proposición 2.14. Entonces $\sigma(z)$ no es compacto y por lo tanto, por el mismo teorema de W. Zelazko, $A(a_{p,n})$ no es una Q-álgebra.

∎

2.18 Proposición.- Sea $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial B_0 m-convexa con generador z para la cual existe $i \in \mathbf{N}$ tal que $R_i(z) = \cdots = R(z)$. Entonces $A(a_{p,n})$ es una Q-álgebra.

Demostración: Como en este caso $R(z) < \infty$, $\overline{D_{R(z)}(0)}$ es compacto. Como en la prueba de la proposición 2.16, para toda $x \in A(a_{p,n})$, $\sigma(x) = x(\overline{D_{R(z)}(0)})$ pues x es una función continua en $\overline{D_{R(z)}(0)}$; por lo tanto $\sigma(x)$ es acotado para toda $x \in A(a_{p,n})$ y entonces, por el teorema [22] de W. Zelazko, $A(a_{p,n})$ es una Q-álgebra.

∎

A continuación presentamos un ejemplo de un álgebra localmente convexa, completa y no metrizable B que coincide con un álgebra matricial $A(\{w\})$ con generador z, donde $R_\alpha(z) = R(z) = 1$ para todas las seminormas $\| \ \|_\alpha$ que definen la topología de $A(\{w\})$ y tal que ninguna serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ con radio de convergencia 1 es tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en el álgebra $A(\{w\})$. El álgebra B es el álgebra de serie de potencias complejas $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ tales que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ es mayor que 1.

2.19 Ejemplo. Sea $\{w\} = \{w \mid w = (w(n))_{n=0}^{\infty}, w(n) > 0$ $\forall\, n = 0, 1, \ldots$ y tales que $\lim_{n\to\infty}(w(n))^{1/n} = 1$, $w(n+m) \leq w(n)\, w(m)$ $\forall\, n, m = 0, 1 \ldots\}$.

Definimos

$$A(\{w\}) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ : \ \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right\|_w = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| w(n) < \infty\right\}.$$

Afirmación.-

$$A(\{w\}) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ tiene radio de convergencia } > 1\right\}.$$

Demostración. Sea

$$B = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ tiene radio de convergencia } > 1\right\}.$$

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A(\{w\})$. Notamos que

$$R_7(z) = R(z) = \sup_w \lim_{n\to\infty} (\|z^n\|)_w)^{1/n} = \sup_w \lim_{n\to\infty} (w(n))^{1/n} = 1.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $A(\{w\})$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ tiene radio de convergencia ≥ 1. Pero no puede ser 1.

Para probar esto sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ una serie de potencias con radio de convergencia 1; entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\lambda^n$ también tiene radio de convergencia 1. Consideramos una sucesión estrictamente decreciente $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = 0$, y otra sucesión estrictamente creciente $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{i\to\infty} M_i = \infty$. Para ellas existe otra sucesión

$$k_1 < k_2 < \dots$$

con la propiedad siguiente:

$$\sum_{n=0}^{k_1} |a_n|(1+\epsilon_1)^n > M_1,$$

$$\sum_{n=0}^{k_1} |a_n|(1+\epsilon_1)^n + \sum_{n=0}^{k_2} |a_n|(1+\epsilon_2)^n > M_2,$$

$$\sum_{n=0}^{k_1} |a_n|(1+\epsilon_1)^n + \sum_{j=1}^{t} \sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} |a_n|(1+\epsilon_{j+1})^n > M_{t+1} \;\; \forall\, t,$$

puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(1+\epsilon_i)^n = \infty \;\; \forall\, \epsilon_i$.

Definimos $w(n) = (1+\epsilon_n)^n$; $(w(n))_{n=0}^{\infty} \in \{w\}$ pues claramente

a) $\lim_{n\to\infty} (w(n))^{1/n} = 1$,

b) $w(n+m) \leq w(n)\, w(m) \;\; \forall \;\; n, m = 0, 1, \dots$

y sin embargo, por construcción $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| w(n) = \infty$, esto muestra que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \notin A(\{w\})$. Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in B$.

Recíprocamente, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $= r > 1$ y $w = (w(n)) \in \{w\}$, tenemos:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\|_w = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| w(n) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (w(n)^{1/n})^n;$$

pero como $\lim_{n \to \infty} w(n)^{1/n} = 1$, entonces a partir de cierto rango, $w(n)^{1/n} < r$ y por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (w(n)^{1/n})^n < \infty$.

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A(\{w\})$.

∎

$\{(w)\}$ no puede reducirse a un sistema numerable de seminormas, ya que entonces existiría, por la proposición 2.6, una serie de potencias $b(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$ con radio de convergencia igual a 1 tal que $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in A(\{w\})$ lo cual es una contradicción.

Capítulo 3

Bases en Algebras de Funciones Holomorfas

Sean $\mathcal{F} = \mathcal{H}(D_R)$ el álgebra de todas las funciones holomorfas en el disco complejo D_R de radio R y centro en el origen y $\mathcal{F}_\infty$ el álgebra de todas las funciones enteras, ambas dotadas de la topología compacto-abierta. El problema de escribir funciones analíticas de $\mathcal{H}(D_R)$ o $\mathcal{F}_\infty$ en términos de una base de funciones $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ distinta de la base usual $\{z^n\}_{n=0}^\infty$, ha sido considerado por M. Arsove y Ganapathy-Iyer. Estos autores determinaron condiciones bajo las cuales una sucesión de funciones $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ constituye una base para $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_\infty$. En este proceso introdujeron el concepto de base propia y establecieron una relación entre las bases propias y los automorfismos del espacio.

Las álgebras de funciones anteriormente mencionadas son ejemplos de álgebras matriciales.

A lo largo de este capítulo caracterizamos los elementos x de un álgebra matricial para los cuales $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ es una base propia. Efectuamos dicha caracterización en términos de los radios espectrales $R(x)$, cabe mencionar que el material de este capítulo es original.

Sea $\mathcal{F}_\infty$ el álgebra de todas las funciones enteras de una variable con las operaciones puntuales y seminormas

$$\|x\|_n = \max_{|t|\leq n} |x(t)|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Estas seminormas definen la topología compacto-abierta. Sea R tal que $0 < R < \infty$ y D_R el disco de radio R y centro en el origen. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{H}(D_R)$ el álgebra de todas las funciones holomorfas en D_R con las operaciones puntuales y la topología compacto-abierta. Esta topología puede ser dada por la familia de seminormas $M_r(\cdot)$ definidas así: para $f \in \mathcal{F}$ y $0 < r < R$, sea

$$M_r(f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

3.1 Definiciones.- Sea $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{F}$.

(1) Decimos que $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente en el sentido de M. Arsove si

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n = 0 \Rightarrow c_n = 0 \ \ \forall n.$$

para toda sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos para la cual la serie converja.

(2) Decimos que $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ genera un subespacio $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_0$ consta de todas las combinaciones lineales $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n$, donde $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos para la cual la serie converge en $\mathcal{F}$.

(3) Decimos que $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de un subespacio $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ si para cada elemento x de $\mathcal{F}_0$ existe una única sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n$.

3.2 Observación.- $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base del subespacio $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ si y sólo si es linealmente independiente y genera a $\mathcal{F}_0$.

3.3 Ejemplos.-

(1) Para $n \geq 0$, definimos $\delta_n = z^n$, donde z es la función idéntica; $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de $\mathcal{F}$ llamada la base fundamental.

(2) Consideramos el algebra $\mathcal{F}_\infty$ donde, además de la base fundamental $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, tenemos otras bases como la siguiente: sea

$$\alpha_n(z) = z^n(1 + \lambda_n(z))$$

donde λ_n es una función entera que se anula en el origen ($n = 0, 1, 2, \ldots$). $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base del subespacio de $\mathcal{F}_\infty$ que genera. A este tipo de bases se les conoce como *bases de Pincherle.*

(3) En $\mathcal{F}$, la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$\alpha_n(z) = \begin{cases} z^n(1-z) & \text{si } n \text{ es par} \\ z^n\left(1 - \frac{z}{(n+1)(n+2)}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es una base de $\mathcal{F}$. Este es otro ejemplo de una base de Pincherle.

3.4 Definición.- Una base $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ de un subespacio $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ es una base propia de $\mathcal{F}_0$ si para cada sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n \text{ converge en } \mathcal{F} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n\delta_n \text{ converge en } \mathcal{F}.$$

Las bases propias se definen para conservar las propiedades esenciales de sucesiones de coeficientes para desarrollos en términos de la base usual.

M. Arsove caracterizó a las bases propias de subespacios $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ en términos de las siguientes condiciones:

(α) $$\limsup_{n\to\infty}[M_r(\alpha_n)]^{1/n} < R \quad \text{para toda } r < R$$

(β) $$\lim_{r\to R}\left(\liminf_{n\to\infty}[M_r(\alpha_n)]^{1/n}\right) \geq R$$

Definiciones y observaciones similares aplican al álgebra $\mathcal{F}_\infty$.

3.5 Observación.- Las álgebras $\mathcal{F}_\infty$ y $\mathcal{F}$ pueden ser representadas como álgebras matriciales. Sea $\{r_p\}_{p=0}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales tal que $r_p \xrightarrow[p\to\infty]{} R$, donde $0 < R \leq \infty$.

Sea $A(a_{p,n})$ tal que $a_{p,n} = (r_p)^n$, $p = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, \ldots$ Entonces el álgebra $\mathcal{F}(\mathcal{F}_\infty$ si $R = \infty)$ se puede representar como el álgebra matricial $A(a_{p,n})$ [3].

3.6 Teorema.- Sea $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial m-convexa con generador z y $R = R(z) > 0$. Si $x \in A(a_{p,n})$ y x es no constante, entonces $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente en el sentido de M. Arsove.

Demostración: Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < R(z)$; definimos el funcional multiplicativo continuo $f_\lambda : A(a_{p,n}) \longrightarrow \mathbb{C}$ como sigue: $f_\lambda(y) = y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)\lambda^n$, donde $y = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^n$. Entonces $0 = f_\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_\lambda(x^n) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_\lambda(x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x(\lambda))^n$. Sea $A = \{x(\lambda) | \lambda \in D_R\}$. Como x es una función holomorfa y no constante, entonces A es abierto.

Si $g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x(\lambda))^n$, entonces $g(\lambda)$ es una función analítica y es idénticamente cero en cualquier disco contenido en A.

Como los ceros de una función holomorfa no nula en un disco son puntos aislados, entonces $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

∎

3.7 Teorema.- Sea $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial m-convexa con generador z tal que $R_i(z) < R(z)$ $\forall i$, $R(z) < \infty$. Si $x \in A(a_{p,n})$ y es no constante, entonces $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base propia $\Leftrightarrow R(x) = R(z)$.

Demostración: Sea $x = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^n \in A(a_{p,n})$. Sea, para $r < R$, $|x|_r = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|r^n$.

Afirmamos que $M_r(x) \leq |x|_r \leq \frac{\rho M_\rho(x)}{\rho - r}$ para toda $r < \rho < R$ donde $M_r(x) = \max_{|z|=r} |x(z)|$. a esto, notamos que $|x(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|r^n = |x|_r$, entonces $M_r(x) = \max_{|z|=r} |x(z)| \leq |x|_r$.

Por otro lado la desigualdad de Cauchy nos dice que

$$\begin{aligned} |x^{(n)}(0)| &\leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=\rho}\frac{|x(u)|}{|u|^{n+1}}d|u| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=\rho}\frac{M_\rho(x)}{\rho^{n+1}}d|u| = \\ &= n!\frac{M_\rho(x)}{\rho^{n+1}}\rho. \end{aligned}$$

Ahora

$$x^{(n)}(0) \leq n!\frac{M_\rho(x)}{\rho^n} \quad \text{y} \quad |x(n)| = \left|\frac{x^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |x|_r &= \sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_\rho(x)}{\rho^n}r^n = M_\rho(x)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{r}{\rho}\right]^n = \\ &= M_\rho(x)\frac{1}{1-(r/\rho)} = M_\rho(x)\frac{\rho}{\rho - r}. \end{aligned}$$

Si $x = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^n \in A(a_{p,n})$, sabemos que la asignación

$$T : A(a_{p,n}) \to H(D_R(0))$$

$$x \mapsto T(x)$$

en donde $T(x)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\lambda^n$, es un isomorfismo topológico H. Arizmendi, [3].

También sabemos que para cada $x \in A(a_{p,n})$, $\forall\, p \in \mathbf{N}$ existen $K > 0$ y $0 < r < R$ tales que

$$\|x^n\|_p \leq K|x^n|_r.$$

Procedemos a continuación a la demostración del teorema:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de $A(a_{p,n})$. M. Arsove probó [7] que ésto es equivalente a que se satisfagan las condiciones (α) y (β) para $\alpha_n = T(x^n)$; es decir,

$$\forall\, r < R, \lim_{n\to\infty} \sup[M_r(\alpha_n)]^{1/n} < R$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\inf[M_r(\alpha_n)]^{1/n}\right)\geq R$$

Observamos que

$$M_{R_p(z)}(\alpha_n)=\max_{|\lambda|=R_p(z)}\left|\sum_{i=0}^{\infty}x^n(i)\lambda^i\right|\leq\max_{|\lambda|=R_p(z)}\sum_{i=0}^{\infty}|x^n(i)|\,|\lambda|^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}|x^n(i)|(R_p(z))^i\leq\sum_{i=0}^{\infty}|x^n(i)|a_{p,i}=\|x^n\|_p.$$

Por lo tanto

$$R(z)\leq\lim_{r\to R}\lim_{n\to\infty}\inf[M_r(\alpha_n)]^{1/n}=\lim_{R_p(z)\to R}\lim_{n\to\infty}\inf[M_{R_p(z)}(\alpha_n)]^{1/n}$$

$$\leq\lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty}\inf(\|x^n\|_p)^{1/n}=\lim_{p\to\infty}R_p(z)=R(z),$$

así que $R(z)\leq R(x)$.

Supongamos ahora que $R(z)<R(x)$.

Sea p tal que $R(z)\leq R_p(x)<R(x)$ y sean K y r tales que $\|x^n\|_p\leq|\alpha_n|_r$. Por lo tanto $(\|x^n\|_p)^{1/n}\leq K^{1/n}\,|\alpha_n|_r^{1/n}$ y entonces

$$R_p(x)=\lim_{n\to\infty}(\|x^n\|_p)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\sup(\|x^n\|_p)^{1/n}\leq\lim_{n\to\infty}\sup|\alpha_n|_r^{1/n}<R,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $R(z)\geq R(x)$ y entonces $R(z)=R(x)$.

$\Leftarrow$) Ahora probamos que las condiciones (α) y (β) valen para $\{\alpha_n\}$.

Observamos primero que

$$|\alpha_n|_{R_p(z)}=\sum_{i=0}^{\infty}|x^n(i)|\quad(R_p(z))^i\leq\sum_{i=0}^{\infty}|x^n(i)|a_{p,i}=\|x^n\|_p.$$

Para probar la condición (α), sea $r<R_p(x)=R$; entonces

$$(M_r(\alpha_n))^{1/n}\leq(M_{R_p(z)}(\alpha_n))^{1/n}\leq(|\alpha_n|_{R_p(z)})^{1/n},$$

ésto implica que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(M_r(\alpha_r))^{1/n} &\le \limsup_{n\to\infty}\left(|\alpha_n|_{R_p(z)}\right)^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty}(\|x^n\|_p)^{1/n}\\ &= R_p(z) < R(z) = R;\end{aligned}$$

por lo tanto (α) se cumple.

Por otro lado, existen K y r tales que

$$\begin{aligned}R_p(x) &= \lim_{n\to\infty}(\|x^n\|_p)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\inf(\|x^n\|_p) \le \lim_{n\to\infty}\inf(K^{1/n}|\alpha_n|_r)^{1/n} =\\ &= \lim_{n\to\infty}\inf(|\alpha_n|_r)^{1/n},\end{aligned}$$

ésto implica que

$$\lim_{r\to R}\lim_{n\to\infty}\inf(|\alpha_n|_r)^{1/n} \ge \lim_{r\to R} R_p(x) = R(x) = R$$

y entonces se cumple (β).

■

El teorema anterior no es válido si $R(z) > 0$ y existe un índice i tal que $R_i(z) = R_{i+1}(z) = \cdots = R(z)$ como lo muestra el siguiente ejemplo:

3.8 Ejemplo.- Sea $A(a_{p,n})$ el álgebra matricial tal que

$$a_{p,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0,\ p = 1, 2, \ldots \\ \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n\beta_p} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $0 < \alpha < \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 3}$ y $\{\beta_p\}_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de números reales tales que $1 < \beta_p < 2$ $\forall p = 1, 2, \ldots$

Probaremos primero que $A(a_{p,n})$ es un álgebra matricial m-convexa y posteriormente que, aunque $R_p(z) = R(z) = 1$ $\forall p = 1, 2, \ldots$, la sucesión $\{z^{3n}\}_{n=0}^{\infty}$ no es una base propia de $A(a_{p,n})$.

Claramente $a_{p,n}$ cumple la condición (5) del ejemplo 1.5.4 ya que si $n = 0$, $p = 1, 2, \ldots$, entonces

$$a_{p,0+m} = a_{p,m} = 1a_{p,m} = a_{p,0}a_{p,m}$$

y, en otro caso,

$$\begin{aligned} a_{p,n+m} &= \left(1+\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)^{(n+m)\beta_p} = \left(1+\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)^{(n\beta_p+m\beta_p)} = \\ &= \left(1+\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)^{n\beta_p} = \left(1+\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)^{n\beta_p} \leq \\ &\leq \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n\beta_p}\left(1+\frac{1}{m^\alpha}\right)^{m\beta_p} = a_{p,n}a_{p,m} \end{aligned}$$

y así $A(a_{p,n})$ es un álgebra m-convexa.

Por otro lado,

$$R_p(z) = \lim_{n\to\infty}(\|z^n\|_p)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(a_{p,n})^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n\beta_p}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\beta_p} = 1$$

$\forall p = 1, 2, \ldots$, y por la tanto $R(z) = \sup_p R_p(z) = 1$.

De igual forma,

$$R_p(z^3) = \lim_{n\to\infty}(\|z^{3n}\|_p)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(a_{p,3n})^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(3n)^\alpha}\right)^{3n\beta_p}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3n)^\alpha}\right)^{3\beta_p} = 1$$

$\forall p = 1, 2, \ldots$, y por lo tanto $R(z^3) = \sup_p R_p(z^3) = 1$.

Probaremos ahora que $\{z^{3n}\}_{n=0}^\infty$ no es una base propia de $A(a_{p,n})$; para esto mostraremos que existen sucesiones de números complejos $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ tales que $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ converge en $A(a_{p,n})$ pero $\sum_{n=0}^\infty a_n z^{3n}$ no converge en $A(a_{p,n})$; para esto necesitamos el siguiente:

3.9 Lema.- Sea $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial, y sean

$$\psi : A(a_{p,n}) \to A(a_{p,n})$$

un homomorfismo continuo y z el generador de $A(a_{p,n})$. Si $x = \psi(z)$ entonces para cada $p \in \mathrm{N}$ existen $q \in \mathrm{N}$ y $c_p > 0$ tales que $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$

$$(\gamma) \qquad \|x^n\|_p \leq c_p \|z^n\|_q = c_p a_{q,n}.$$

Demostración: Esto es válido debido a la continuidad de ψ.

∎

1o. Mostraremos que la función ψ tal que $\psi(z) = z^3$ no satisface la condición (γ). Más precisamente, probaremos que

$$(\eta) \quad \lim_{n\to\infty}(\|z^{3n}\|_1/\|z^n\|_p) = \lim_{n\to\infty}(a_{1,3n}/a_{p,n}) = \infty \quad \forall\, p = 1, 2, \ldots$$

Así que ψ no será contínua.

Es claro que

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{(3n)^\alpha}\right)^{3n\beta_p} \Big/ \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n\beta_p} \geq \\
&\geq \left(1 + \frac{1}{(3n)^\alpha}\right)^{3n1} \Big/ \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{2n} = \\
&= \left(\frac{(1 + 1/((3n)^\alpha)^3}{(1 + 1/(n^\alpha))^2}\right)^n = \\
&= \left(\frac{(3n)^\alpha + 3(3n)^{2\alpha} + 3(3n)^\alpha + 1}{(3n)^{3\alpha} + 3^{3\alpha} \cdot 2n^{2\alpha} + 3^{3\alpha} \cdot n^\alpha}\right)^n = \\
&= \left(1 + \frac{B(3n)^{2\alpha} + C \cdot n^\alpha + 1}{(3n)^{3\alpha} + 3^\alpha \cdot 2n^{2\alpha} + 3^{3\alpha} \cdot n^\alpha}\right)^n
\end{aligned}$$

donde $B > 0$ pues $0 < \alpha < \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 3}$. Por lo tanto la última expresión es

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{B + C/(3^{2\alpha} \cdot n^\alpha) + 1/(3n)^{2n}}{(3n)^\alpha + 3^\alpha \cdot 2 + 3^\alpha/n^\alpha}\right)^n \geq \\
&\geq \left(1 + \frac{B'}{(3n)^\alpha + 3^\alpha \cdot 2 + 3^\alpha/n^\alpha}\right)^n,
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande, donde $B' > 0$. Esta expresión diverge a ∞ cuando $n \to \infty$, pues $0 < \alpha < 1$.

Esto muestra que ψ tal que $\psi(z) = z^3$, es discontinua.

2o. Probaremos que si hay un endomorfismo T de $A(a_{p,n})$ tal que $T(z) = \psi(z) = z^3$, entonces T debe de ser continuo, lo cual será una contradicción.

Sea ahora T un endomorfismo de $A(a_{p,n})$ tal que $T(z) = z^3$. Sea $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in A(a_{p,n})$ y sea $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$; probaremos que $b_0 = a_0$ y que, si $k > 0$,

$$(\delta) \qquad \beta_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ no es divisible entre } 3 \\ \alpha_{k/3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tenemos que $x = \alpha_0 + z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k+1}$, donde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} \in A(a_{p,n})$. Por lo tanto

$$T(x) = \alpha_0 + T(z) \cdot T\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}\right) = \alpha_0 + z^3 \cdot T\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}\right)$$

y por lo tanto $\beta_0 = \alpha_0$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0$; procedemos por inducción para obtener (δ) de la siguiente manera:

Suponiendo que $b_0 = a_0$, $b_3 = a_1$, $b_6 = a_2, \ldots, b_{3m} = a_m$, $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = \ldots = b_{3m+1} = b_{3m+2} = 0$, sea $w = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k z^k$; claramente $w \in A(a_{p,n})$; por un lado, $w = x - \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ implica que

$$T(w) = T(x) - T\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k - \sum_{k=0}^{3m+2} b_k z^k = \sum_{k=3(m+1)}^{\infty} b_k z^k;$$

por otro lado, $w = z^{m+1}\left(a_{m+1} + z\cdot\sum_{k=m+2}^{\infty} a_k z^{k-m-2}\right)$, implica que

$$\begin{aligned} T(w) &= z^{3(m+1)}\left(a_{m+1} + T(z)\cdot T\left(\sum_{k=m+2}^{\infty} a_k z^{k-m-2}\right)\right) = \\ &= z^{3(m+1)}\left(a_{m+1} + z^3\cdot T\left(\sum_{k=m+2}^{\infty} a_k z^{k-m-2}\right)\right) \end{aligned}$$

y por lo tanto $b_{3(m+1)} = a_{m+1}$ y $b_{3m+4} = b_{3m+5} = 0$.

Probaremos que el endomorfismo T tiene gráfica cerrada y que por lo tanto, por el Teorema de la gráfica cerrada, será continuo.

Sean $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $A(a_{p,n})$ que converge a x y $T(x_k)$ converge a y, donde $x, y \in A(a_{p,n})$. Entonces $\|x_k - x\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \, \forall p = 1, 2, \ldots$, esto quiere decir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_k(n) - x(n)| a_{p,n} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \, .$$

Por lo tanto $|x_k(n) - x(n)| a_{p,n} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada n. Como $a_{p,n} \neq 0$ $\forall p = 1, 2, \ldots$ y $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $|x_k(n) - x(n)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada n. Esto quiere decir que $x_k(n) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x(n)$ para cada n.

Como $T(x_k)$ converge a y entonces $\|T(x_k) - y\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall p = 1, 2, \ldots$. Análogamente a lo anterior $T(x_k)(n) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y(n)$ para cada n. Pero

$$T(x_k)(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 3m \\ x_k(m), & n = 3m \end{cases}$$

y como $x_k(m) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x(m)$ para cada m, entonces

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 3m \\ x(m), & n = 3m \end{cases},$$

es decir, $y = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{3n} = T(x)$.

M. Arsove probó en [7] que si $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base propia en un subespacio cerrado $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$, el espacio de todas las funciones analíticas en un disco abierto alrededor del origen, entonces existe un homomorfismo lineal continuo suprayectivo $T: \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0$ tal que $T(\delta_n) = \alpha_n$, $n = 0, 1, \ldots$ donde δ_n es la base fundamental de $\mathcal{F}$.

En vista de este teorema y lo hecho anteriormente $\{z^{3n}\}_{n=0}^{\infty}$ no es una base propia de $A(a_{p,n})$.

3.10 Observación. En referencia al ejemplo anterior, por la relación (η), si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{3n}$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $A(a_{p,n})$.

Capítulo 4

Resultados Sobre Morfismos

En este capítulo hacemos una aplicación de nuestros resultados obtenidos en los capítulos anteriores. Investigamos las condiciones bajo las cuales se puede definir una función lineal multiplicativa continua entre dos álgebras m-convexas. Damos una condición necesaria y una condición suficiente casi recíprocas.

4.1 Proposición.- Sean $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial, m-convexa y z su generador. Si $R(z) = \infty$, entonces $R(x)$ es infinito para toda $x \in A(a_{p,n})$ que no sea constante.

Demostración: Sea $x \in A = A(a_{p,n})$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^n$ y x no constante. Sabemos que x es una función entera [3]

$$R(x) = \sup_{f \in \mathcal{M}(A)} |f(x)| = \sup_{|\lambda| \leq R(z)} |x(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \mathbf{C}} |x(\lambda)|.$$

Como $R(z)$ es infinito, $x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\lambda^n$ converge para toda λ. Si $R(x)$ es finito, entonces x es una función acotada, y como es entera, por el teorema de Louiville, es constante, lo cual es una contradicción. ∎

4.2 Proposición: Sea $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial m-convexa con generador z. Si $R(z) = \infty$ y $x \in A(a_{p,n})$ es no constante, entonces existe un homomorfismo continuo T: $A(a_{p,n}) \to A(a_{p,n})$ tal que $x = T(z)$.

Demostración: Como x es no constante, entonces $R(x) = \infty$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $A(a_{p,n})$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ también converge en $A(a_{p,n})$ por la Proposición 1.39. La asignación dada por $z \mapsto x$ define un homomorfismo lineal continuo. Esto se debe al siguiente.

Teorema. (M. Arsove) [8]

Sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base de un espacio de Fréchet $\mathcal{U}$. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{U}$ para la cual la condición siguiente es válida.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \text{ converge},$$

para cada sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Entonces existe una función lineal continua $T:\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ tal que $T(z_n) = x_n$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$. De hecho $T(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ si $y == \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$.

∎

4.3 Proposición: Sea $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial, m-convexa con generador z. Si $R(z) = \infty$ y $x \in A(a_{p,n})$ es no constante, entonces $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base propia de $A(a_{p,n})$.

Demostración: Como $R(z) = \infty$ y x es no constante, entonces por la Proposición 4.1 $R(x) = \infty$.

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $A(a_{p,n})$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ tiene radio de convergencia ∞ por la Proposición 1.39. Esto implica que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $A(a_{p,n})$ por la misma Proposición. Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $A(a_{p,n})$ si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $A(a_{p,n})$. Luego, $\{x^n\}$ es una base propia de $A(a_{p,n})$.

∎

4.4 Proposición.- Sean $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial m-convexa con generador z y B un álgebra B_0, m-convexa. Sea $f : A(a_{p,n}) \to B$ una función lineal multiplicativa y continua y sea $x = f(z)$.

Entonces $R(x) \leq R(z)$.

Demostración: Sabemos que $R(x) = \sup |T(x)|$, donde el supremo se toma sobre todos los funcionales lineales multiplicativos continuos $T : B \to \mathbb{C}$. Entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} A(a_{p,n}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "T \circ f"'] & & B \\ & \mathbb{C} \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

Claramente $T \circ f$ es un funcional lineal multiplicativo y continuo. Por lo tanto $\sup\limits_{T} |T(x)| = \sup\limits_{T} |(T \circ f)(z)| \leq \sup\limits_{G} |G(z)|$, donde este último supremo es tomado sobre todos los funcionales lineales multiplicativos y continuos G. De esta forma tenemos

$$R(x) = \sup_{T} |T(x)| \leq \sup_{G} |G(z)| = R(z),$$

es decir, $R(x) \leq R(z)$.

$\blacksquare$

Podemos dar un recíproco parcial de este resultado:

4.5 Proposición.- Sean $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial m-convexa con generador z y B un álgebra B_0, m-convexa. Si $x \in B$ y $R(x) < R(z)$, $0 < R(z) \leq \infty$, entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ converge en $A(a_{p,n}) \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ converge en B. Por lo tanto la asignación $z \mapsto x$ define una función lineal multiplicativa continua de $A(a_{p,n})$ en B.

Demostración: Supongamos que $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es un elemento de $A(a_{p,n})$. Sea $y(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ la serie de potencias complejas correspondiente a y, entonces el radio de convergencia r de esta serie es tal que $r \geq r_6(z) = R(z) > R(x) = r_7(x)$ y por lo tanto $r > r_7(x)$. Esto quiere decir que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en B.

Sea $T: A(a_{p,n}) \to B$ tal que $T(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^n$.

T es lineal ya que si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $y, w \in A(a_{p,n})$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha y + w) &= T\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha y(n) + w(n))z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha y(n) + w(n))x^n = \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} y(n)x^n + \sum_{k=0}^{\infty} w(n)x^n = \alpha T(y) + T(w). \end{aligned}$$

T es multiplicativa ya que

$$\begin{aligned} T(y \cdot w) &= T\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} y(k) \cdot w(n-k)\right) z^n\right) = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} y(k) \cdot w(n-k)\right) x^n = T(y)T(w) \end{aligned}$$

Finalmente, T es continua por el teorema [8] de M. Arsove mencionado en la demostración de la Proposición 4.2.

∎

4.6 Proposición.- Sean $A(a_{p,n})$ un álgebra matricial m-convexa con generador z y B un álgebra B_0, m-convexa. Si $R(z) = \infty$ entonces para cualquier $x \in B$, existe un homomorfismo continuo $T: A(a_{p,n}) \to B$ tal que $x = T(z)$.

Demostración: Sea $x \in B$ tal que $R(x) = R(z) = \infty$. Si $i \in \mathbb{N}$ entonces $R_i(x) < \infty$ ya que $R_i(x) = \lim \|x^n\|_i^{1/n}$ y $\|x^n\|_i \leq \|x\|_i^n$ porque $\| \, \|_i$ es submultiplicativa para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $R_i(x) < R(x)$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$, lo cual implica, por la Proposición 2.4, que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en B para cada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ con radio de convergencia ∞. De esta manera, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $A(a_{p,n})$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en B por la Proposición 1.39.

Para probar la existencia del homomorfismo continuo se procede como en la demostración de la Proposición anterior.

∎

Bibliografía

1. Arens, Richard. "Linear Topological Division Algebras". Bull. Amer. Math. Soc.53 (1947), 623-630.

2. ——— . "A generalization of Normed Rings". Pacific J. Math. 2 (1952), 455-471.

3. Arizmendi, Hugo. "On the Spectral Radius of a Matrix Algebra". Funct. et Approx. XIX. A. Mickiewicz Univ. 1990, 167-176.

4. Arizmendi, Hugo; Jarosz, K. "Extended Spectral Radius in Topological Algebras". Rocky Mountain Journal of Math. To appear.

5. Arizmendi, Hugo; Carrillo, Angel; Palacios, Lourdes. "On the Homomorphisms of the M-convex B_0-algebras with Cyclic Bases" Commentatione Mathematicae Pol. (Por aparecer).

6. Arizmendi, Hugo; Carrillo, Angel. "On Locally Convex Algebras with Cyclic Bases" Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Function Spaces. The Second Conference. 172, 11-17 (1995).

7. Arsove, Maynard G. "Proper Bases and Linear Homomorphisms in Spaces of Analytic Functions". Math. Annalen, Bd. 135.S.235-243 (1958).

8. ——— . "Similar Bases and Isomorphisms in Fréchet Spaces". Math. Annalen. 135 (1958).

9. ——— . "Proper Pincherle Bases in the Space of Entire Functions". Quart. J. Math. (Oxford) (2) 9, 40-54 (1958).

10. ——— . "On the Behavior of Pincherle Basis Functions". Pacific Journal of Mathematics, Vol. 44, No.1, 1973, 13-31.

11. Brooks, R.M. "On the Spectrum of Finitely Generated Locally m-convex Algebras". Studia Mathematica, T. XXIX (1968), 143-150.

12. Ganapathy Yyer, V. "On the Space of Integral Functions (III)". Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 874-883.

13. Husain, Taqdir; Liang, J. "Multiplicative Functionals on Fréchet Algebras with Bases". Canad. J. Math. 29 (1977), 270-276.

14. Husain, Taqdir; Watson, Saleem. "Unconditional Orthogonal Bases". Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 539-545.

15. Husain, Taqdir. **Orthogonal Schauder Bases.** Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel-Hong Kong. 1991.

16. Kaplansky, I. "Topological Rings". Amer. J. Math. 69 (1947), 153-183.

17. ——— . "Topological Rings". Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 809-826.

18. Mallios, Anastasios. **Topological Algebras, Selected Topics.** North Holland Math. Stud. 124. Notas de Matemática (109). North Holland. Amsterdam-New York- Oxford-Tokyo. 1986.

19. Michael, E.A. "Locally multiplicatively convex Topological Algebras".

20. Mitiagin, B.; Rolewicz, S; Zelazko, W. "Entire Functions in B_0-algebras." Studia Math. 21 (1962), 291-305.

21. Watson, Saleem. "F-algebras with Cyclic Bases". Commentationes Mathematicae Pol. XXIII (1983), 329-334.

22. Zelazko, Wieslaw. "Selected Topics in Topological Algebras". Aarhus Univ., Lecture Notes Series 31, 1971.

23. ——— . **Banach Algebras.** Elsevier Publ. Co. Amsterdam-London-New York. 1973.

24. ——— . "On maximal Ideals in commutative m-convex Algebras". Studia Math. T. LVIII (1976), 291-298.

25. ——— . " **On Ideal theory in Banach and Topological Algebras**. Monografías del Instituto de Matemáticas 15, UNAM. 1981.