UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA SELECCION DE RIESGOS Y TECNICAS PARA DETERMINAR EL MEJOR PRECIO DEL SEGURO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

MARTIN MARTINEZ DOMINGUEZ

DIRECTOR

ACT. AURORA VALDES MICHEL

1996

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

[redacted]AD DE CIENCIAS
[redacted] ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNAM Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FE DE ERRATAS

Página	Línea*	Dice	Debe decir
2	3	capitación	captación
9	23	adveración	adversión
17	5	riego	riesgo
47	25	sea	se
56	14	Par	Para
57	3	Novel	Nobel

* Los títulos y subtítulos también cuentan como líneas.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "LA SELECCION DE RIESGOS Y TECNICAS PARA DETERMINAR EL MEJOR PRECIO DEL SEGURO",

realizado por MARTIN MARTINEZ DOMINGUEZ

con número de cuenta 8455162-7 , pasante de la carrera de ACTUARIO.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. AURORA VALDES MICHEL	
Propietario	ACT. BENIGNA CUEVAS PINZON	Benigna Cuevas P.
Propietario	ACT. NOEMI VELAZQUEZ SANCHEZ	Noemí Velázquez Sánchez
Suplente	ACT. HORTENSIA CANO GRANADOS	
Suplente	ACT. JESUS GONZALEZ RODRIGUEZ	

Consejo Departamental de Matemáticas

M.en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Índice

LA SELECCION DE RIESGOS Y TECNICAS PARA DETERMINAR EL MEJOR PRECIO DEL SEGURO.

Introducción

Uno de los propósitos principales de las Compañías Aseguradoras y en general de cualquier Industria, es la capitación de nuevos negocios y realizarlos ofreciendo las mejores condiciones de contrato. Para llevar a cabo este procedimiento, se requiere de la selección de riesgos para lograr encasillar a cada uno de ellos de acuerdo a las condiciones de riesgo que presente.

El objetivo de esta tesis, es el proponer un sistema técnico de asignación de primas lo cual considero necesario para que las Compañías Aseguradoras muestren una mayor eficiencia en el desarrollo de sus operaciones, ya que actualmente la forma en que se viene llevando a cabo la asignación de una prima para un seguro en particular, es basándose en la "ley de dos y tres sigmas".

A lo largo del presente trabajo se introducen los conceptos básicos de portafolios tanto homogéneo, para los cuales se propone utilizar el principio de asignación de primas, como el concepto de portafolio heterogéneo. Este último no se ha desarrollado en México por lo que considero de gran utilidad la difusión de su utilización, para ello se explicará la teoría de credibilidad y su aplicación directa para resolver dicho problema.

Capítulo Uno

El Seguro

Tanto los individuos como las organizaciones se enfrentan a la amenaza de una pérdida financiera debido a la ocurrencia de eventos aleatorios. El sistema de seguros es único ya que su mayor importancia radica en el hecho de prevenir una pérdida financiera en la cual el tamaño, el número y el tiempo de su ocurrencia resulten variables aleatorias.

A lo largo de este capítulo se hace referencia al entorno económico de los seguros y de los elementos que los forman, destacando la importancia, de la selección de riesgos. Con lo anterior se tratará de que el lector pueda tener una idea global de los seguros para finalmente introducir los modelos estadísticos de la selección de los precios y algunos modelos financieros de la aseguradora.

El seguro supone a un grupo de personas o de bienes, todos sujetos a una misma clase de riesgo. El asegurador recibe una prima de cada miembro del grupo y paga la cantidad cubierta a aquel que incurrió en el riesgo. El asegurador se encarga de mantener el equilibrio entre los contratos aceptados y las primas recibidas.

Desde el punto de vista social, el seguro ocupa un lugar muy importante, ya que, nos es prácticamente imposible el imaginarnos a nuestra sociedad sin los seguros de incendio, el seguro de autos, seguros contra daños, seguros de vida, seguros de gastos médicos, etc..

Dado los diferentes manejos de las finanzas y el presupuesto de cada país, existen muy diversas relaciones de cada estrategia con respecto a las Compañías de Seguros. Esta diversidad encuentra su explicación en la evolución histórica del seguro, la cual tiene gran variedad de aspectos; pero especialmente es el resultado del consenso concerniente a la relación existente entre el Gobierno y la Iniciativa Privada. Ya que mientras en algunos países la idea de Economía Liberal es la defendida, en algunos otros todavía se vive con paternalismos por parte del gobierno. Esto significa que existen países en los cuales la Iniciativa Privada se ha desarrollado más que en otros y siguen doctrinas menos conservadoras; y al existir un mayor desarrollo de la Iniciativa Privada las aseguradoras se ven favorecidas pues se cuenta con un mayor número de empresas privadas que se preocuparán por su seguridad y apoyarán la contratación de un seguro.

Hablando del patrón económico post-industrial, es importante considerar en primer lugar las transformaciones de las sociedades industriales a lo largo de los dos últimos siglos. Para los seguros, el ambiente económico varía enormemente dependiendo si se trata de una sociedad industrial tradicional o post-industrial.

La sociedad industrial tradicional puede ser descrita como una situación en la cual la forma más importante de obtener riqueza y bienestar, es a través del proceso de manufactura, en la cual la materia prima es transformada en un útil producto final. En esta situación, en la que la mayor preocupación es la de producir, el seguro y otros servicios, aunque reconocidos como importantes, son secundarios. En otras palabras, no son tan importantes como la producción.

Un efecto de esta situación dentro de la economía es la llamada [1]"ley de Engel, la cual establece que: el mercado del seguro crece sólo cuando las necesidades primarias de los consumidores han sido satisfechas".

Ahora bien, si observemos lo qué le ha ocurrido a las primas de seguros a lo largo del presente siglo, la hipótesis anteriormente expuesta llega a ser dudosa; ya que a nivel mundial lo obtenido a través de las primas, ha crecido considerablemente. En realidad esto se debe a que la estructura industrial, ha cambiado y que la sociedad encargada de la producción de bienes y riquezas se ha transformado desarrollando una economla post-industrial. Esto quiere decir, que la transformación y la entrega de bienes y servicios (como los seguros, asesoria financiera, investigación, mantenimiento, etc.) se han convertido en una parte esencial en la economía en la mayoría de los paises.

Asl pues, hablar de riesgos asegurables, es decir, aquellos riesgos que reúnen las caracterlsticas necesarias para considerarse como prospectos de contrato de seguros, son palabras claves dentro del sistema económico contemporáneo. Debido a esto en la economía post-industrial, cualquier análisis económico, que se olvide de considerar los servicios y los seguros en particular, como algo tan importante como cualquier actividad industrial, es simplemente inadecuado.

Aunado a lo anterior, se pronostica que para la próxima década las ventas de seguros continúen creciendo, incluso más aceleradamente que El Producto Interno Bruto, pero por desgracia también se establece que el empleo de personas para todas las funciones sencillas que actualmente se realizan de forma mecánica sea reemplazado por la utilización de computadoras. De cualquier forma, una contribución fuerte para remediar el gran problema del desempleo puede venir del otro gran sector en expansión de los seguros: aquel que tiene que ver con los riesgos que requieren de un entendimiento técnico profesional de su naturaleza origen y nivel de vulnerabilidad. Con el fin de proporcionar una idea más clara de los seguros, a continuación se describe cada uno de los principales elementos que forman parte del sistema de seguros.

---

[1] Watson W. George.- LA ECONOMIA Y LOS SEGUROS.
Georgia U.S.A. 1990 Pg. 37

1.1 La selección

El principio más importante del que parte la celebración de un contrato de seguro, especialmente en los riesgos de personas, es el de " Uberrimae fidei ", es decir, que debe actuarse de "buena fe". Para ampliarse esta característica es primordial que tanto el asegurado como la compañía de seguros, al tener conocimiento de algún punto esencial para la valuación del riesgo lo comuniquen entre sí.

El que el solicitante actúe de "buena fe", implica que debe de dar la información más completa y veraz sobre las cuestiones que se le planteen, así como la información de cualquier otro factor que conozca y tenga relación con la apreciación del riesgo.

Una definición común, pero que da un marco general y claro sobre lo que es la Selección de Riesgos, es la que dice: [2]"La selección de riesgos es el conjunto de medidas, de carácter técnico, adoptadas por una entidad aseguradora, en virtud de las cuales la aceptación de riesgos está orientada hacia aquellos que ofrecen menor peligrosidad, evitando la cobertura de los que, por poder originar frecuentes siniestros o de elevado importe, originarlan un desequilibrio económico en los resultados de una empresa".

La selección constituye los cimientos sólidos del equilibrio financiero y la cualidad de los negocios en la cartera de una institución aseguradora.

También se ha definido a la selección de riesgos como un trámite que se inicia con la captura de la información necesaria, seguido de la consideración y valuación de dicha información y terminando con la conversión de los resultados obtenidos en la valuación de acuerdo al sistema de tarificación de cada compañía.

Sin embargo, existen algunos solicitantes que están expuestos a un cierto grado de riesgo y deben ser colocados en una clase especial, haciendo que el trabajo de selección consista en reconocer si un solicitante pertenece a un subgrupo especial de la población y posteriormente dar una estimación de la experiencia de siniestralidad de este subgrupo en comparación con el promedio de las carteras.

Al igual que cualquier industria, la aseguradora trata siempre de crecer y desarrollarse; y por consiguiente en el ámbito socio-económico debe abrirse tanto al mercado de riesgos normales

---

[2] Bearly T. George.-DICCIONARIO DE SEGUROS
México, D.F. 1991 Pg. 93

como al de subnormales. No debe olvidarse que es evidente que la compañía que está dispuesta a asumir o aceptar un riesgo subnormal, debe garantizar un equilibrio interno por dicha situación.

Es muy importante que el seleccionador conozca el objetivo de la empresa en tanto a cual es el interés que tiene ésta en suscribir riesgos subnormales, el tipo de mercados al que está promoviendo, etc., es decir, a qué niveles socio-económicos está dirigiendo su fuerza de ventas; qué margen o capacidad pueden sobrellevar de casos subnormales; si es de tendencias conservadoras o más bien liberales, etc.

·En el marco de aceptación de casos normales y subnormales, hay seleccionadores que aceptan la mayor cantidad posible de casos, bajo condiciones normales. Esta situación debe de manejarse con mucho cuidado ya que se tiene que vigilar que no vaya haber una selección adversa que perjudique los intereses de las empresas participantes en el riesgo.

Esto quiere decir, que el seleccionador debe de enfocarse en aspectos concretos y no subestimar ni exagerar la condición de riesgo, tomando en cuanta estadísticas y estudios realizados sobre el particular y no dejarse llevar por simples sentires de apreciación personal.

Independientemente del objeto de la empresa, es decir, cualquiera que éste sea, el seleccionado debe de encontrar un sistema administrativo lógico y ágil que minimice el tiempo de trámite y gastos y, que no constituya una triangulación innecesaria para afrontar sus costos.

Al seleccionar debe de hacerse hincapié en la lógica y consistencia de los siguientes puntos:

- Interés asegurable

En toda solicitud hecha para contratar un seguro debe de existir un interés asegurable, es decir, que el solicitante tenga una "necesidad" para asegurarse. Obviamente esta necesidad debe de estar enfocada para con el beneficiario o beneficiarios designados y con esto entenderse que, en caso de ocurrir el siniestro, los beneficiarios no sufran una pérdida financiera o un desequilibrio económico.

En consecuencia, para que un contrato de seguros sea sólido y sano la persona o institución que funge como el beneficiario debe de estar relacionada con el bien o persona asegurado, de tal forma que tenga un interés real en que el asegurado continúe con vida (en el caso de seguro de vida) o un interés en que el bien asegurado no sufra daños. Dicho interés real, usualmente es medible en términos monetarios.

- Suma Asegurada

En el caso de seguro de vida es invaluable el precio de la vida de una persona, lo que sí es posible determinar, aunque no en forma exacta y precisa a través de factores socio-económicos del sistema de vida, es la cantidad necesaria para que el o los beneficiarios puedan mantener la forma y plan de vida que le eran otorgadas por el asegurado. Por lo tanto, la suma asegurada debe guardar una proporción razonable con los ingresos y el capital del prospecto. Mientras que si lo que se va a asegurar es un bien, debe de existir una valuación del mismo, de tal forma que la suma asegurada concuerde con el valor del bien asegurado.

- Concordancia

Las diversa declaraciones del solicitante deben de ser congruentes y lógicas, por que de otra forma se estaría, incurriendo, casi seguro en falsedades.

- Solicitudes a otras compañías

El candidato poseedor del riesgo puede haber hecho solicitudes a varias compañías aseguradoras, tanto por montos reducidos como elevados. Es por eso que la solicitud (seguro de vida) es tan importante el preguntarle si las ha requisitado anteriormente y con que seguros cuenta, debiéndose tomar en cuenta dicha información; ya qué por medio de la acumulación de montos pequeños se obtiene una suma asegurada elevada evadiendo pruebas de selección y volviéndose especulativo.

- Solicitudes propuestas y rechazadas

Si el bien a asegurar ha sido propuesto y rechazado por una o varias compañías se debe de analizar y cuestionar las causas que originaron que dichas compañías así lo hayan determinado.

- Información completa

Aplicable a cada una de las características mencionadas es el siguiente comentario: Con frecuencia las solicitudes carecen de información y no precisamente porque no se le pregunte al solicitante, sino que éstos no contestan algunas preguntas, o no están claras sus respuestas. Sobre este punto habría que analizar el costo, el tiempo y en general la problemática que involucra el conseguir dicha infamación, no olvidando que si ésta es esencial para la apreciación del riesgo, debe ser **solicitada definitivamente**.

Todos los hechos citados son de vital importancia, ya que de pasarlas por alto nos llevan a la antiselección.

[3]La **antiselección** es una serie de hechos, más o menos consistentes, de una persona que quiere asegurarse a ella misma o a un bien, motivada por sus deseos de obtener una ganancia, tomando como base el tender a esconder sus propósitos o motivos verdaderos para pasar del grupo de rechazos al de extraprimados o de este grupo al de normales, o bien, para pasar de un grupo estándar de vida económico cierto a uno mejor, solicitando sumas aseguradas muy elevadas que no se justifican.

En cuanto a lo que se refiere a la clasificación del riesgo se tiene que: [4]**Riesgo** es la incertidumbre que existe en la ocurrencia de un evento que trae con sigo una pérdida o un perjuicio. En términos de seguros dicha pérdida o daño es del tipo económico.

El riego puede ser clasificado en dos formas: la forma subjetiva y la forma objetiva.

El riesgo objetivo puede ser definido como la variación relativa de la pérdida real con la pérdida probable.

El riesgo subjetivo puede ser definido como la incertidumbre psicológica que nace y se alimenta de la actitud mental del individuo o de su estado de inteligencia y entendimiento.

Una razón considerable para estudiar el riesgo subjetivo es la influencia que tiene en la decisión; ya que cuando el que la toma, está interpretando un riesgo objetivo, éste podría determinar que el nivel del riesgo es alto mientras que otro podría decir que es un nivel bajo. Estas diferencias dependen de la actitud subjetiva del seleccionado frente al riesgo, es decir, si es conservador o más bien liberal; si tiene adveración al riesgo o preferencia a éste.

Ahora bien, tomando como base la definición dada para riesgo subjetivo, por su parte el asegurado también genera un riesgo subjetivo, ya que visto desde su lado, sería el que proviene de la incertidumbre que existe sobre la honestidad del asegurado.

---

[3] [4] Bearly T. George.-DICCIONARIO DE SEGUROS
México, D.F. 1991 Pg. 87

Bajo este enfoque puede citarse como ejemplo: la moralidad, los hábitos, la ambición, el descuido personal, las afecciones a las drogas y al alcohol, etc.

Dado la relación sólida entre el asegurado o bien asegurado y el beneficiario, y la situación financiera del asegurado y el monto del seguro, el propósito de la selección de riesgos puede ser considerado como la determinación de una tarifa para el riesgo la cual sea satisfactoria para el asegurado y el asegurador.

1.2 Elementos del seguro

Un sistema de seguros puede estar establecido sólo después de la identificación de una clase de situaciones en donde pérdidas aleatorias pueden ocurrir. La palabra aleatoria quiere decir, junto con otras características, que la frecuencia, tamaño o tiempo de la pérdida está fuera del control del posible asegurado. Ya que si el control existe, o si el pago de una reclamación excede la pérdida financiera actual, existiría una motivación o incentivo para incurrir en dicha pérdida. En tal caso las bases bajo las cuales el sistema de seguros fue creado no serían válidas. Actualmente las condiciones que rigen el cobro de las primas y el pago de las reclamaciones son diferentes a las establecidas en el sistema de seguros original. De lo contrario, el sistema no lograría su objetivo de no reducir la utilidad esperada de ambos, el asegurado y el asegurador.

El negocio del seguro no se lleva de forma que implique un gran misterio. Algunas veces para el lego, no resulta claro comprender cómo puede una organización asumir un gran riesgo, con una prima comparativamente pequeña y cuando llega la ocasión el pago inmediatamente después de producido el hecho. Por ejemplo todas las compañías pagan enormes sumas de dinero por pólizas que se emiten y están en vigor menos de un año.

El seguro de edificios exige el pago de miles de dólares de indemnización, a cambio de solo unos pocos dólares de prima, e igual sucede con las demás ramas del seguro, el misterio queda aclarado en cuanto se sabe que las compañías de seguros realizan sus negocios principalmente sobre grupos.

En el caso de vida, la compañía de seguros no se preocupa por cuando pueda morir una u otra persona, pero si esta fundamentalmente interesada en el número de personas que pueden morir cada año, dentro de unos límites razonables. La compañía de seguros, de vida ajusta sus cargos por prima de tal forma que reciba dinero suficiente para poder sostener el negocio y pagar todas las reclamaciones. En el caso de las otras formas de seguros el procedimiento es el mismo.

Una vez que se identifica una situación asegurable, se debe de obtener la información de las utilidades esperadas y el proceso generador de las pérdidas. La investigación de mercado en los seguros puede ser vista como un esfuerzo por conocer más acerca de las funciones de utilidad, es decir, la preferencia de los riesgos de los consumidores.

El proceso en el que se producen el tamaño y el tiempo de la pérdida puede ser suficientemente estable a lo largo del tiempo, de tal forma que la información pasada pueda ser usada para crear un sistema óptimo. Cuando un nuevo sistema de seguros es creado, por lo general no se cuenta con estadísticas actuales y relevantes. De cualquier forma, se puede conseguir información acerca de situaciones de riesgo semejantes para así poder identificar el riesgo para establecer estimaciones preliminares de la distribución de probabilidad necesaria para determinar la prima. Dado que casi todos los sistemas de seguros operan bajo condiciones dinámicas, es importante que exista un plan para el cobro y el análisis de los datos de la operación del seguro para que el sistema se pueda adaptar. La adaptación en este caso significa cambiar primas, pago de dividendos basado en la experiencia previa, reembolso de primas, o la modificación de las primas futuras.

En una economía competitiva, las fuerzas de mercado alentarán a los aseguradores a manejar el precio de las primas a corto plazo para que las variaciones de la experiencia del valor esperado se comporten como variables aleatorias independientes. Estas variaciones no deben de seguir ningún patrón que pueda ser explotado por los aseguradores para obtener mayores ganancias; ya que esto indicaría ineficiencia en el mercado de los seguros.

Como resultado, la clasificación de los riesgos en grupos homogéneos es una función importante dentro de un sistema de seguros basado en el mercado. Así las variaciones que son aleatorias indican eficiencia o equidad en la clasificación.

Dentro de un mercado de seguros competitivo, la continua interacción de numerosos compradores y vendedores guían la experimentación con los sistemas de clasificación pues los participantes del mercado amenazan con tomar ventaja de cualquier patrón de alguna desviación que pueda ser percibida. Dado que los siniestros suelen ser relativamente eventos poco comunes, resulta difícil identificar patrones no aleatorios. También el costo de la clasificación de la información para refinar los sistemas de selección representa una barrera en la experimentación dentro de esta área.

Para los sistemas de seguros enfocados a servir a grupos más que a individuos, el problema ya no es el de si las variaciones en la experiencia de los seguros son aleatorias para cada individuo. En su lugar, la pregunta es, si las variaciones en la experiencia del grupo son aleatorias. De tal forma que variaciones consistentes de la experiencia con lo esperado indicarán la necesidad de una revisión del sistema.

Las decisiones de los seguros de grupos no se basan en comparaciones de utilidad individual esperada. En su lugar, los planes de seguros de grupo están basados en decisiones colectivas de cómo el sistema incrementará el bienestar total del grupo.

En cuanto a los elementos que forman parte del sistema de seguros se tiene que; el tomador de decisiones tiene un nivel de riqueza **W** y se enfrenta a una pérdida en el siguiente periodo. Esta pérdida es una variable aleatoria denotada por **X**. El tomador de decisiones puede comprar una póliza de seguros que le pague **I(x)** de la pérdida. Para evitar el tener un incentivo para incurrir en dicha pérdida se asume que todas las pólizas de seguros factibles son aquellas que se encuentran en el intervalo **0 < I(x) < X**. Así se hace la simplificación de que cualquier póliza de seguros factible puede ser comprada por la cantidad de reclamación esperada. Esto es, la prima por una póliza que paga **I(x)** es:

$$E[I(x)] \leq E[X]$$

[5]Una subclase del conjunto de pólizas factibles es la definida así:

$$I_d(x)\begin{cases} 0 & x < d \\ x-d & x \geq d \end{cases}$$

Esta clase de pólizas están caracterizadas por el hecho de que el pago de la reclamación no empieza sino hasta que la pérdida excede la cantidad de deducible **d**. Para pérdidas mayores a la cantidad de deducible, el exceso es pagado bajo los términos de la póliza. Esta clase de póliza reciben el nombre de seguro sobre exceso de pérdida o (stop-loss).

Si **P** es igual a la reclamación esperada, y tomando en cuenta que **f(x)** denota la función de densidad probabilística y **F(x)** a la función de densidad acumulada, ambas asociadas a la variable aleatoria **X** se tiene que:

$$P = \int_d^{\infty} (x-d) f(x) dx$$

$$P = \int_d^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

---

[5] Bowers et. al.-ACTUARIAL MATHEMATICS
The Society of Actuaries. U.S.A. Pg. 17

De lo anterior hay que considerar ciertas limitaciones en su aplicación. En primer lugar, el seguro no puede ser comprado por su pérdida esperada, aunque las consideraciones adicionales para gastos, ganancia y reserva son pequeñas en comparación con su costo base. En segundo lugar, P es un número dado y no se establece la forma de determinarlo en la práctica.

1.3 Modelos estadísticos de la selección de precios

A fin de que la exposición de los siguientes capítulos de cómo se deben de asignar las primas (tanto para portafolios homogéneos como para heterogéneos) sea más sencilla, a continuación se describen tanto el modelo colectivo como individual.

El modelo individual es un modelo básico, en el cual la variable aleatoria analizada es la cantidad total de dinero de las reclamaciones, que se genera a través de un grupo de seguros, durante un periodo de tiempo determinado. La cantidad total de reclamaciones es la suma de todas las reclamaciones de cada una de las unidades individuales expuestas, que forman el grupo:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

donde:

S_N = cantidad total de reclamaciones de un periodo determinado
x_i = las reclamaciones de la unidad i
N = número de unidades que forman el grupo de seguros

Los principales momentos de S son:

$$E[S_N] = \mu_N = N\mu$$

$$\operatorname{var}[S_N] = \sigma^2 N = N\sigma^2 + 2\sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$

donde:

μ = la pérdida media por unidad expuesta

μ_N = la pérdida media del conjunto de pólizas
σ^2 = la varianza de la pérdida de cada unidad expuesta
$\sigma^2 N$ = la varianza del conjunto de pólizas
a_{ij} = la covarianza de la i-esima y j-esima unidad expuesta

Si las unidades expuestas no están correlacionadas, en la fórmula de la varianza, el término de la covarianza desaparece. Fórmulas análogas se aplican para sumas ponderadas de variables aleatorias. Por ejemplo. Suponiendo que $S_N = \sum a_i x_i$ donde las a_i son constantes i = 1,... ,N. También, suponiendo que la x_i no están idénticamente distribuidas. Entonces los principales momentos serán:

$$E[S_N] = E\left[\sum a_i x_i\right] = \sum a_i \mu_i$$

$$\text{var}[S_N] = \sigma^2 N = \sum\sum a_i a_j \sigma^2 + \sum \sigma_i^2$$

donde:

$$\mu_i = E[X_i] \qquad y \qquad \sigma^2 = \text{var}(X_i)$$

La ley de los grandes números y el teorema del límite central juegan un papel muy importante en el modelo individual. La ley de los grandes números en particular, provee de una base estadística de importancia crítica para la existencia de los seguros.

[6]**Al hablar de la ley de los grandes números es importante el mencionar la desigualdad de Chebyshev, la cual establece lo siguiente:**

Si X es una variable aleatoria con una función de distribución que tiene varianza finita σ^2 y una media finita μ entonces para cada k > 0.

$$P[X - \mu < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

---

[6] Skaplesky Melcone.- ESTADISTICA MODERNA
Barcelona 1987 Pg. 246

La desigualdad establece que la relación de una variable aleatoria **X** estará a **k** desviaciones estándar de su media con una probabilidad al menos tan grande como $1-\frac{1}{k^2}$. La desigualdad se cumple para cualquier distribución de probabilidad que satisfaga las condiciones antes mencionadas. Para muchas distribuciones de probabilidad, la probabilidad de que **X** caiga dentro de **k** desviaciones estándar de su media es mayor a $1-\frac{1}{k^2}$.

El teorema del límite central [7] dice que: siendo $X_1, \ldots, X_j$ una serie aleatoria de una distribución de probabilidad con media μ y varianza σ^2. Se define a la variable aleatoria **Y** con distribución de probabilidad $F_N(Y)$.

$$Y = \frac{\sum x_i - \mu N}{\sigma\sqrt{N}} = \sqrt{N}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

El teorema del límite central provee de datos importantes dentro del concepto del riesgo del asegurador. Sin embargo, su relevancia práctica es limitada al trabajar con las distribuciones de las pérdidas asegurables porque algunas distribuciones usualmente tienden hacia la normalidad tan lento que permanecen significativamente distorsionadas aún en los grupos de seguros muy grandes. Esto ocurre en el caso de que la varianza sea muy grande; aún más, el teorema del límite central no se aplica cuando la varianza no existe.

El riesgo del asegurador se puede definir de muchas formas. Sin embargo, dos definiciones importantes son el riesgo relativo y el riesgo absoluto del asegurador. Para definir el riesgo relativo (dentro de la ecuación $S_N = \sum x_i$) se establece lo siguiente.

Perdida media $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$

Varianza de x $\operatorname{var}(\bar{x}) = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$

Desviación estandar de $\bar{x}$: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

---

[7] Skaplesky Melcone.-ESTADISTICA MODERNA
Barcelona 1987 Pg. 182

El resultado de la varianza usa la fórmula de sumas ponderadas de variables aleatorias, reconociendo que el factor de ponderación para la media son $a_i = 1/N$, para todas las i. Las X_i son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas. Así utilizando la ley de los grandes números tenemos:

$$\lim_{N\to\infty} P\left[\bar{x}-\mu<\varepsilon\right] = \lim_{N\to\infty} P\left[\bar{x}-\mu<k\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] \geq \lim_{N\to\infty}\left[1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 N}\right] = 1$$

Así, la pérdida promedio por unidad esperada se vuelve arbitrariamente cercana a la media real de la distribución con probabilidad tendiendo a uno a medida que N tiende a infinito. De aquí se derivan dos definiciones del riesgo relativo del asegurador:

Riesgo relativo versión I : **IRR1**= $\sigma/\sqrt{N}$

Riesgo relativo versión II : **IRR2**= $\sigma/\left(\mu\sqrt{N}\right)$

IRR1 es solamente la desviación estándar de la media, mientras que. **IRR2** es la razón de la desviación estándar de la media y la pérdida media de la distribución por unidad expuesta.

Así pues, ambas definiciones del riesgo relativo tienen la propiedad de que se van a cero cuando N tiende a infinito. Por lo tanto el riesgo relativo pasa desapercibido en los grupos de seguros muy grandes. Pues a medida que aumenta el número de contratos dentro del grupo el riesgo tiende a diversificarse..

La misma relación se puede usar para definir el riesgo absoluto del asegurador de lo cual obtengo:

$$\lim_{N\to\infty} P\left[x_i - N\mu < N\mu\right] = \lim_{N\to\infty} P\left[x_i - N\mu < k\sigma\sqrt{N}\right] = 1$$

Lo cual sugiere la definición de riesgo absoluto:

Riesgo absoluto **IAR** = $\sigma\sqrt{N}$

Es claro que el riesgo absoluto se vuelve infinito a medida que el tamaño del grupo (**N**) se acerca a infinito. Así la desviación probable de la pérdida total del asegurador comparada con su valor esperado se vuelve infinita (para cualquier épsilon) a medida que N tiende a infinito, de ahí que el riesgo absoluto no se puede decir que desaparezca en los grupos grandes de seguros.

Estos resultados sugieren que uno debe de ser muy preciso al definir el riesgo cuando se habla de que éste se puede disminuir a la hora de diversificarlo; ya que el riesgo, se reduce a medida que el grupo crece en sentido relativo pero no en el absoluto. Asi declaraciones financieras y económicas comunes de que: [8]"Los riesgos no sistemáticos desaparecen en los mercados grandes " o " El mercado es suficientemente grande de tal forma que el riego puede se diversificado " carecen en cierta forma de un sentido más no del otro pues algunos pero no todos los tipos de riesgos desaparecen a medida que se aumenta el número unidades expuestas.

Los conceptos de riesgo absoluto y relativo tienen implicaciones en la cantidad de excedente requerido para mantener una probabilidad de ruina aceptable para un grupo de seguros. La cantidad de excedente requerida frecuentemente se llama **Buffer Fund** y para tratar de ilustrar este concepto se asume que el resultado del teorema del límite central se aplica exactamente de manera que se pueda escribir:

$$P = \left[\frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} < Y_\alpha \right] = P\left[S_N - N\mu < Y_\alpha \sigma\sqrt{N}\right] = 1 - \alpha$$

donde:

Y_α = la desviación estándar normal tal que

$$N(Y_\alpha) = 1 - \alpha$$

Sin embargo para tener la seguridad con probabilidad $1-\alpha$ de que todas las reclamaciones serán pagadas, la compañía debe contar con una reserva o Buffer Fund de $Y_\alpha \sigma \sqrt{N}$

El Buffer Fund por póliza es:

$$Y_\alpha \sigma \sqrt{N}/N = Y_\alpha \, \sigma/\sqrt{N}$$

El Buffer Fund Total es una función del riesgo absoluto, mientras que el Buffer Fund por póliza está en función del riesgo relativo. Sin embargo, el Buffer Fund Total del asegurador tiende a infinito con un grupo de tamaño N y el Buffer Fund por póliza se aproxima a cero.

En particular si se considera un grupo con una pérdida esperada fija **E** y las pólizas de ese grupo son unidades homogéneas expuestas con media μ y varianza σ. El grupo retiene una proporción

---

[8] Cummings J. David.- THE JOURNAL OF RISK AND INSURANCE New York U.S.A. 1991 Pg. 269

de **α** de cada riesgo y reasegura el resto. La pérdida esperada del grupo está dada por **E = Nαμ** dado que **E** es fija, el número de unidades suscritas será **E/αμ** y la varianza será:

$$\sigma^2 = \sum^{\frac{E}{\alpha\mu}} \alpha^2\sigma^2 = \frac{E}{\alpha\mu}\alpha^2\sigma^2 = \frac{E}{\mu}\alpha\sigma^2$$

Consecuentemente a medida que **N** se va a infinito (cuando α tiende a cero), el riesgo del grupo desaparece y no es necesario contar con un Buffer Fund. [9]" Samuelson llamó a este hecho la ley de $1/_N$". En la cual se establece que el riesgo absoluto del grupo no se reduce al añadir más riesgos sino al subdividirlos, siempre y cuando se hablen de pérdidas independientes.

Ahora bien, al hablar de desviaciones muy grandes Brockett ha recalculado un problema potencial que se da al usar la distribución normal para analizar la probabilidad de pérdida. Considerando la suma normalizada :

$$\frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}$$

El teorema del límite central establece que dicha suma tiende a la normalidad a medida que **N** ⇒ ∞ es decir; **F_N(x) ⇒ N(x)**; donde **F_N(x)** es la función de distribución de **S** y **N(x)** es la función de distribución normal estándar. El comportamiento de este límite es útil para **x** moderadas, pero para **x** muy grandes tanto **F(x)** y **N(x)** se acercan a uno y el teorema del límite central cesa de dar información de utilidad. Lo que en realidad se necesita es información de la relación: **[1-F_N(x)]/[1-N(x)]**; en situaciones donde tanto **x** como n tienden a infinito.

[10]Es importante el entender la diferencia entre un problema de desviaciones grandes y el problema de Buffer fund. El problema del Buffer Fund utiliza el enunciado de probabilidad

$$P = \left[\frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} < Y_\alpha\right]$$

Mientras que el problema de las desviaciones grandes usa enunciados de probabilidad como el siguiente:

[9] Smith K. Samuelson.- THE MATHEMATICAL THEORY OF INSURANCE
New York, U.S.A. 1974 Pg. 136

[10] Cummings J. David.- THE JOURNAL OF RISK AND INSURANCE
New York U.S.A 1991 Pag. 300

$$P\left[\frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} < \frac{Nc - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}\right] = P\left[\frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} < \frac{c-\mu}{\sigma}\sqrt{N}\right]$$

Como se establece en la fórmula antes mencionada, el problema de las desviaciones grandes considera un "blanco móvil", es decir, no siempre el mismo. Esto difiere del problema usual al hablar de un grupo de riesgo, donde el blanco (Y_α) es fijo.

Aún con un blanco fijo la distribución normal no es muy recomendable para la mayoría de las aplicaciones prácticas. La razón es que la tendencia hacia la normalidad puede ser muy lenta, de tal forma que la distribución normal subestima la cola aún para n muy grandes.

El modelo colectivo difiere del modelo individual en que éste considera el conjunto de seguros como algo colectivo en vez de tomarlos como unidades expuestas individuales. El proceso aleatorio que genera el costo de los reclamos se parte en dos componentes:

1) el número de reclamos (frecuencia)
2) la cantidad de pérdida de cada reclamación (severidad)

La distribución total de reclamaciones se obtiene desarrollando modelos de las distribuciones de probabilidad de la frecuencia y la severidad y componiéndolas para así obtener la distribución total de reclamaciones.

La cantidad de reclamación dentro de un periodo particular está dado por

$$X = \Sigma Y_i$$

donde:

X = total de reclamaciones
Y_i = el valor de reclamación (severidad)
N = número de reclamaciones (frecuencia)

Cabe hacer notar que el número de unidades expuestas no aparece en esta fórmula. Se trata de una suma aleatoria ya que el límite superior, el número de reclamaciones (frecuencia), es una variable aleatoria. Esto contrasta con el modelo individual donde el límite superior, el número de unidades expuestas, es conocido.

La distribución de probabilidad de la severidad que generan las Y_i representa a la distribución de la severidad colectiva del conjunto. Una distribución colectiva puede ser usada aún para conjuntos grandes formados por clases heterogéneas de riesgos. En este caso la distribución de la severidad sería una mezcla de la severidad individual aplicada a las clases fundamentales. Claro está que para usar el modelo en el sentido predictivo, la mezcla tendrá que permanecer relativamente a través del tiempo.

El modelo colectivo es considerablemente más poderoso que el modelo individual al analizar los conjuntos de vida real. El modelo es usado para estudiar las decisiones del reaseguro, establecer niveles de excedentes y medir la probabilidad de ruina. Así también el modelo colectivo tiene una ventaja de estimación sobre el modelo individual. Los datos recopilados a lo largo de un año, dan lugar a **N** observaciones en las distribuciones de frecuencia donde **N** es el número de unidades expuestas, y **n** observaciones en la distribución de severidad, donde **n** es el número de reclamaciones. Así para un conjunto moderado, no se puede obtener estimaciones muy acertadas acerca de las distribuciones de frecuencias y severidad. Esto es generalmente más exacto que el tratar de estimar directamente la distribución total de reclamaciones de los datos con que se cuenta. Si la frecuencia y la severidad de la pérdida no se pueden seguir en base a una forma individual, el método anterior no resulta factible a menos que tenga una larga serie de tiempo de los datos de las pérdidas y que la distribución de las reclamaciones haya sido más o menos estable con el paso del tiempo.

Un ejemplo de una solución cerrada se obtiene al considerar el caso de que se tenga una frecuencia con distribución geométrica y una severidad de distribución exponencial:

$$\text{FRECUENCIA } P(K) = pq^k \qquad k = 0,1,2..$$
$$\text{SEVERIDAD } S(K) = \lambda e^{-x\lambda} \qquad x \leq 0$$

donde :

pq = son los parámetros de la distribución geométrica de la frecuencia: q = 1-p
λ = parámetro de la distribución exponencial de la severidad.

Ahora bien, después de sustituir y simplificar obtenemos la siguiente función:

$$F(x)=1-qe^{-px\lambda} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

Las distribuciones de frecuencia y de severidad se componen para así poder obtener la distribución total de las reclamaciones. El modelo se da a continuación:

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} P_k S_k{}'(x)$$

donde:

$F(x)$ = la función de distribución del total de las reclamaciones.
$S_k^*(x)$ = la k-esima convolución de la función de distribución de la severidad.
P_k = la probabilidad de k reclamaciones, donde P = P(k) es la distribución de frecuencias.

[11]En la práctica, el proceso de componer puede ser difícil, Sólo para algunas combinaciones de las distribuciones de la frecuencia y la severidad existen soluciones cerradas de la ecuación anterior. Desafortunadamente estas combinaciones pocas veces proveen modelos adecuados para los conjuntos de pólizas reales.
24

Para obtener **F(x)** se utilizan los métodos de aproximación, los cuales generalmente usan los momentos de **F(x)**. Los momentos son fáciles de calcular a partir de los momentos de la distribución de frecuencias y severidad. Los primeros tres momentos son adecuados para casi todos los métodos de aproximación.

Una forma conveniente de obtener momentos mayores de **F(x)** es usando la función generadora acumulada.

$$K_x(t) = K_k\left[K_y(t)\right]$$

$K_x(t)$ = es la función generadora acumulada de la distribución de las reclamaciones totales.
$K_k(t)$ = es la función generadora acumulada de la distribución de frecuencias.
$K_y(t)$ = es la función generadora acumulada de la distribución de severidad.

[12]La función generadora acumulada es el logaritmo natural de la función generadora de momentos, es decir:

$$K_t(t) = \ln[W_t(t)]$$

donde:

$W_z[(t)] = E(e^{tz})$ = la función generadora de momentos Z con parámetro t

Así los momentos se obtienen a través de diferenciar, la función generadora acumulada con respecto al parámetro t estableciendo t = 0, y evaluando. Los primeros tres resultados son la

[11] Craner Harald.- MATHEMATICALS METHODS OF STATISTICS
Princenton University, U.S.A. 1496 Pg. 583
[12] Craner Harald.- MATHEMATICALS METHODS OF STATISTICS
Princenton University, U.S.A. 1496 Pg. 583

media, la varianza y el tercer momento al rededor de la media. Momentos mayores también están relacionados a acumuladas mayores; y los momentos se pueden obtener fácilmente de esta relación si la acumulada se conoce. La razón para trabajar con la función generadora acumulada en lugar de la función generadora de momentos es la que al diferenciar existe una reducción importante en el álgebra, especialmente para momentos mayores.

Una vez que los momentos de F(x) han sido calculados, los métodos de aproximación pueden ser usados para estimar puntos cuantiles en la cola de la distribución, Estos son de gran utilidad al estimar las pérdidas máximas probables, probabilidad de ruina, y otras cantidades necesarias para la administración de riesgo.

1.4 Modelos financieros de las aseguradoras

Tomando el tema del entorno financiero se establece que las altas tasas de interés, esencialmente tasas reales de interés, son el resultado de la interrelación existente entre el abastecimiento y la demanda de dinero, es decir las tasas de interés son tan altas o bajas como el mercado las deja de ser. Afectándose consecuentemente las primas de los seguros.

Para evitar un movimiento desordenado de la economía de los seguros se ha tratado de extender la teoría de portafolio, al campo de los seguros; a través de ésta se trata de comparar a los bancos con las compañías aseguradoras ya que se establece que la única diferencia existente entre los dos es que: mientras que un depósito en un banco se puede retirar según la demanda, una prima de seguro previamente pagada a la aseguradora produce una reclamación condicional.

El seguro existe como un método para negociar o encarar clases particulares de riesgos financieros y proveer de servicios asociados con la administración de dichos riesgos. Las instituciones de seguros han sido creadas como un medio eficiente a través del cual se realizan las funciones de administrar y compartir dichos riesgos. La estructura de las instituciones de seguros y de la industria de los mismos está determinada por las fuerzas del mercado ligadas al mercado financiero, el mercado de bienes y servicios, y todo el contexto de la economía. Los precios de los seguros, la estructura financiera y organizacional de las compañías de seguros están determinados por una relación compleja existente entre la oferta y la demanda. Es pues, dentro de todo este contexto, que tiene lugar el análisis de modelos financieros para seguros.

La aplicación de los modelos financieros en los problemas de seguros es una área que está creciendo con gran rapidez.

Un modelo financiero simple de la aseguradora puede ser usado para echar un vistazo dentro de la administración de los grupos de seguros. El modelo está basado en la siguiente ecuación:

$$Y = I + \Pi_u + r_A A + r_u P$$

donde:

Y = el ingreso neto
I = ingreso de la inversión (gastos netos)
Π_u = ganancia suscrita (primas menos los gastos y las pérdidas)
A = activos
P = primas
r_A = tasa de rendimiento de los activos
r_u = tasa de rendimiento de la porción suscrita (proporción de primas)

Como se presenta a continuación, esta ecuación puede ser expresada con un rendimiento en el capital:

$$r_E = \frac{Y}{E} = r_A \frac{A}{E} + r_u \frac{P}{E} = r_A\left(\frac{L}{E} + 1\right) + r_u \frac{P}{E} = r_A(ks + 1) + sr_u$$

donde :

E = capital
L = obligaciones = $A - E$
s = la razón existentes entre la prima y el excedente (P/E)
k = razón existente entre obligaciones y primas (L/P)

Dicha ecuación indica que el rendimiento en el capital para un asegurador viene dada por un factor que es resultado del ingreso de la inversión y otro generado por el ingreso suscrito. La parte del ingreso de la inversión consiste de la tasa de retorno de los activos multiplicada por un factor de apalancamiento (ks + 1), que es una función de la razón dada por primas-excedente y el factor de generación de fondos, (L/P). El componente del rendimiento del ingreso suscrito es el producto de la razón de la ganancia suscrita y la razón de primas a excedente. Por tanto, la aseguradora es una firma apalancada donde el apalancamiento se da por la expedición de las pólizas de seguros.

La ecuación original también se puede escribir de la siguiente manera

$$r_E = r_A + s(r_A k + r_U)$$

Esta ecuación demuestra que el asegurador ganará r_A y en su inversión de capital más el rendimiento neto ($r_A k + r_U$), en el capital suscrito multiplicada por **s**, la razón de apalancamiento. Así pues, el asegurador tiene la opción de no expedir seguros (escogiendo s = 0). En tal caso, se trataría de una compañía de inversión, la cual estaría invirtiendo su capital a una tasa r_A. Si se expiden seguros con una ganancia suscrita negativa aumentará el rendimiento en el capital si se tiene $r_A k > - r_U$.

Por otro lado, líneas con colas de pago más largas tendrán factores de generación de fondos más grandes ya que el asegurador cuenta con los fondos de los propietarios de las pólizas por un periodo mayor antes de que la reclamación sea pagada. Tales líneas soportarán una pérdida suscrita mayor que las líneas con colas de pago pequeñas. Una pérdida suscrita grande también puede ser soportada cuando las tasas de interés $\{r_A\}$ son relativamente altas. Por lo tanto, el modelo de una explicación para la relación inversa existente entre la longitud de la cola de pago y las ganancias suscritas así como para la relación inversa entre las ganancias suscritas y las tasas de interés.

Aún cuando los aseguradores pueden incrementar el rendimiento en el capital a través de expedir a una pérdida suscrita hasta el punto en el que $r_A k = - r_U$ dentro de un mercado competitivo, ésta no es necesariamente la tasa de equilibrio del rendimiento suscrito. Para determinar la tasa de equilibrio es necesario introducir el [13]CAPM (Capital Asset Pricing Model), el cual establece que la tasa de equilibrio, del rendimiento de un bien es:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$$

Donde:

- r_i= el rendimiento esperado del activo i
- r_f= la tasa de interés libre de riesgo
- r_m= la tasa de rendimiento esperada del mercado
- β_y= coeficiente de riesgo sistemático (beta del activo i)

El CAPM indica que la inversión ganará la tasa de interés libre de riesgo más una prima adicional de riesgo. Lo cual implica que el inversionista será recompensado por soportar el riesgo sistemático más no por el riesgo no sistemático, la razón de esto, es que, el riesgo no sistemático se puede diversificar a través de una buena elección de portafolio, el cual deberá de tener el más alto rendimiento posible para su nivel de riesgo, o lo que es equivalente tener el menor riesgo

[13] Bearly & Myers.- PRINCIPLES OF CORPORATE FINANCE
U.S.A. 1988 Pg. 125

posible para un rendimiento dado. Esto se logra haciendo un análisis de las sensibilidades, (betas), de los activos a los movimientos del mercado.

Ahora bien, la ecuación original puede ser usada para determinar la tasa de equilibrio del rendimiento suscrito. La cual queda de la siguiente manera:

$$r_U = -kr_f + \beta_u(r_m - r_f)$$

De esta ecuación, el primer término ($-kr_f$) representa el interés de un crédito por el uso de los fondos de los asegurados; los cuales pagan primas a la aseguradora al momento de la expedición de la póliza y las reclamaciones son pagadas, en promedio k periodos después. El segundo componente (r_U) es el premio del asegurador por asumir el riesgo.

El modelo trata a las pólizas de seguros de manera análoga que a los instrumentos de deuda expedidos por corporaciones no financieras. Ya que el asegurador toma prestado los fondos de los asegurados, los invierte a una tasa r_A y paga las reclamaciones, es decir, retira la deuda k periodos después. La deuda carece de riesgo en el sentido en el que el asegurado se encuentra totalmente comprometido con las obligaciones de las pólizas.

El CAPM de seguros detecta características importantes de la operación del mercado de seguros. El modelo centra su atención en la naturaleza esencialmente financiera de la transacción y fuerza a identificar las clases específicas de riesgo que recibirán recompensas del mercado y las relaciones específicas que se dan en el equilibrio.

Para concluir este capítulo se establece que, la justificación económica y financiera del sistema de seguros es que éste contribuye al bienestar general a través de manejar el proyecto de que los planes no se vean frustrados por eventos aleatorios. Estos sistemas también pueden incrementar la producción total, ya que motivan a los individuos y a las corporaciones a aventurarse en grandes proyectos en los cuales la posibilidad de pérdidas importantes serían factores claves que desalentarían a dicha corporación o individuo a emprender ese proyecto, lo cual se ve contrarrestado gracias a la existencia del seguro.

Capítulo dos

Portafolios Homogéneos

A lo largo de este capítulo se introducen conceptos como el de la teoría de utilidad la cual resulta de gran importancia, ya que basándose en ésta es que se lleva a cabo la elección de las distribuciones a utilizar dentro del modelo. También se habla de las variaciones existentes en la riqueza de una aseguradora durante un largo período de tiempo en el que hay aumentos conforme se reciben las primas y decrementos cuando las reclamaciones son pagadas. En el primer momento en el cual el excedente, o riqueza, de la aseguradora se convierte en negativo se dice que la ruina ha ocurrido y finalmente se trata el reaseguro y la manera en que este influye en el cálculo de la probabilidad de la ruina; lo anterior es con el fin de que se tengan claros estos conceptos para analizar la elección de un principio de asignación de primas que resulte adecuado para portafolios homogéneos.

2.1 Teoría de la utilidad

Como se ha venido diciendo, el sistema de seguros es un mecanismo creado para reducir el impacto adverso de un evento aleatorio que impide el cumplimiento de ciertas expectativas. Otro sistema que hace pagos basado en la ocurrencia de eventos aleatorios es el de apuestas. No obstante, este se diferencia del de seguros, en el sentido de que este último está diseñado para proteger el impacto económico del riesgo que existe independientemente, y más aún, fuera del control del asegurado. Mientras que en una apuesta típica está establecida definiendo reglas de pago según la ocurrencia del evento esperado y el riesgo es voluntariamente tomado por los participantes.

Ahora bien, a continuación me voy a enfocar con lo que es la teoría de utilidad y la relación que guarda con los seguros. Si las personas pudieran predecir la ocurrencia de sus decisiones sus vidas serían más sencillas. Así pues, todos tomamos decisiones en base a ciertas predicciones; sin embargo no tenemos una predicción perfecta. Por lo mismo, se ha desarrollado una teoría acerca de la toma de decisiones bajo la incertidumbre, esta es, la teoría de utilidad.

Una posible solución para la toma de estas decisiones sería la de definir el valor económico de cierto proyecto que tenga un efecto aleatorio el cual sería su valor esperado. A consecuencia de este principio del valor esperado la distribución de posibles resultados puede ser sustituida por un simple número, el valor esperado del resultado monetario aleatorio. Según este principio, a un tomador de decisiones sería indiferente entre asumir una pérdida aleatoria de valor X y pagar la cantidad E[X] para así despreocuparse de la pérdida posible. A este número se le conoce como el valor justo o actuarial del prospecto.

Muchos tomadores de decisiones no adoptan este principio. Para ellos, su nivel de riqueza y otros aspectos de la distribución de resultados causan un impacto en su toma de decisiones. Y es por eso que incluso estarán dispuestos a pagar más del valor esperado.

Esto es lo que se conoce como función de utilidad que es individual, y nos da como resultado una ecuación en la cual, mediante diferentes niveles de riqueza sujetos a distintas probabilidades, se puede obtener el máximo que dicha persona estaría dispuesto a pagar para que le sea indiferente el cubrirse o no. Es decir, si tengo un nivel de riqueza $\mathbf{W_2}$ el cual puede permanecer así con una probabilidad **p**, o ser reducido a un nivel $\mathbf{W_1}$ con probabilidad **(1-p)**, entonces **G** es el valor para el cual se cumple la siguiente ecuación:

$$u(\mathbf{W_2} - \mathbf{G}) = u(\mathbf{W_1})(1 - p) + u(\mathbf{W_2})p$$

Lo cual quiere decir que con un nivel de riqueza de $\mathbf{W_2}$ le es indiferente pagar **G** de prima (lado izquierdo de la desigualdad), o exponerse a quedare con $\mathbf{W_2}$ con una probabilidad **p** o tener una pérdida que estaría representada $\mathbf{W_2 - X = W_1}$ con una probabilidad de (1 - p) lado derecho de la desigualdad.

Una vez que el tomador de decisiones ha determinado su función de utilidad para su riqueza, ésta puede ser usada para comparar dos proyectos económicos aleatorios. Así, si los proyectos se denotan con las variables **X** y **Y** se buscará una regla de decisión que sea consistente con la preferencia delimitada por la función de utilidad anteriormente seleccionada, de tal forma que si el tomador de decisiones tiene una riqueza **W** y debe de comparar a los proyectos aleatorios X y Y, el tomador de decisiones escogerá **X** si:

$$E[u(W+X)] > E[u(W+Y)]$$

y el tomador de decisiones le sería indiferente el escoger X o Y si:

$$E[u(W+X)] = E[u(W+Y)]$$

Esta teoría empieza con la suposición que un tomador de decisiones racional, cuando se enfrenta a dos distribuciones de resultados que alteran su riqueza, será capaz de expresar preferencia por alguno de ellos o indiferencia entre escoger uno u otro, según sea el caso. Más aún, la preferencia debe de satisfacer ciertos requerimientos.

Esta teoría tiene su culminación en un teorema que establece que si la preferencia muestra consistencia con los requerimientos, entonces existe una función de utilidad **u (W)** tal que si la distribución de **X** es preferible a la distribución de Y. $E[u(X)] > E[u(Y)]$, y si al tomador de decisiones le es indiferente cualquiera entonces $E[u(X)] = E[u(Y)]$. Es decir, la preferencia cualitativa o la relación de indiferencia se puede sustituir por una comparación numérica consistente.

[1]A continuación se muestran ciertas observaciones acerca de la utilidad:

1.- La teoría de utilidad está construida bajo la suposición de la existencia y consistencia de preferencias para la probabilidad de las diferentes distribuciones de resultados.

2.- Una función de utilidad no puede ser única. Por ejemplo, si:

$$u'[W] = u[W]a + b \quad a > 0$$

entonces:

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

es equivalente a:

$$E[u'(X)] > E[u'(Y)]$$

Esto es, las preferencias se conservan cuando la función de utilidad es una trasformada lineal creciente de la forma original.

3.- Suponiendo que se tiene una función de utilidad lineal, esto es:

$$u(W) = aW + b \quad a>0$$

Entonces; si $E[X] = \mu X$ y $E[Y] = \mu Y$ tenemos:

$$E[u[X]] = \mu Xa + b > E[\mu(Y)]=a\,\mu Y+ b$$

si y solo si :

$$\mu X > \mu Y$$

Esto es, para funciones lineales crecientes, la preferencia por las distribuciones de resultados son del mismo orden que los valores esperados de las distribuciones comparadas, es por esto que el principio del valor esperado, para un comportamiento económico racional frente a la

[1] Bowers et al.- ACTUARIAL MATHEMATICS
The Society of Actuaries U.S.A. 1986 Pg. 6

incertidumbre, es consistente con la regla de utilidad esperada siempre que la función de utilidad sea creciente.

Actualmente, existen organizaciones de seguros, que fueron creadas para ayudar a reducir las consecuencias financieras resultado del daño o destrucción de alguna propiedad. El asegurador emitirá contratos en los cuales se promete pagar al dueño de la propiedad una cantidad definida igual o menor que la pérdida financiera si la propiedad fue dañada o destruida durante el período de la póliza. El pago contingente ligado a la cantidad de la pérdida se conoce como la reclamación. A cambio de la promesa contenida en la póliza, el dueño de la propiedad, paga una cantidad denominada prima.

La cantidad del pago de la prima está determinada siguiendo la adopción de un principio económico de decisión realizado tanto por el asegurado, como por el asegurador. La oportunidad de un seguro ventajoso para ambas partes se da cuando la prima de la póliza establecida por el asegurador es menor que la máxima cantidad que el asegurado está dispuesto a pagar por un seguro.

Dentro del rango de resultados financieros para una póliza de seguro individual, la función de utilidad del asegurador puede estar aproximada por una línea recta. En este caso, el asegurador debe adoptar el principio del valor esperado al establecer su prima. Esto es, el asegurador pondrá su precio base para un seguro de cobertura total como la pérdida esperada, $E[X] = \mu$. En este contexto μ se denomina la prima neta o pura para la póliza. Para poder cubrir los gastos administrativos, impuestos, utilidades y para tener una cierta reserva para poder sobre llevar algún inconveniente el sistema de seguros decidirá establecer la prima para la póliza a través de cargos extras hechos sobre la prima pura; de tal forma que la prima ajustada denotada por H, estará dada por:

$$H = \mu(1+\theta) + c$$

En esta expresión la cantidad $\mu\theta$ puede ser vista como si estuviera asociada con los gastos que varían con las pérdidas esperadas y con el riesgo de que las reclamaciones sean muy diferentes a las esperadas, mientras que la constante c se asocia a los gastos esperados, que no dependen de las pérdidas.

A continuación se aplica la teoría de utilidad a los problemas de decisiones enfrentados por el dueño de la propiedad sujeta a cierto riesgo.

El dueño de la propiedad tendrá una función de utilidad u(W) de donde la riqueza W se mide en términos monetarios. El dueño se enfrentará a una posible pérdida debido a eventos aleatorios que pueden dañar la propiedad. La distribución de la pérdida aleatoria **X** se asume conocida. Asi se establece que el asegurado le seria indiferente el elegir entre pagar una cantidad **G** al asegurador o correr el riesgo solo. Esta situación queda representada a continuación:

$$u(W - G) = E[u(W - X)]$$

En donde el lado derecho de la ecuación representa la utilidad esperada de no comprar el seguro cuando el dueño de la propiedad tiene una riqueza **W**. Mientras el lado izquierdo de la misma representa el valor esperado de pagar una prima de **G** por cobertura completa.

Si el dueño tiene una función de utilidad lineal y creciente sea:

$$u(W) = bW + d$$

[2]El dueño deberá de adoptar el principio del valor esperado, que en este caso quedaria:

$$u(W - G) = b(W - G) + d = E[u(W - X)] = E[b(W - X) + d]$$
$$b(W - G) + d = b(W - \mu) + d$$
$$G = \mu$$

Esto es, si el dueño tiene una función de utilidad lineal y creciente, el pago de primas que haria el asegurado indiferente entre la cobertura completa o el no asegurarse es igual a la pérdida esperada. En la ausencia de un subsidio para el asegurador, en el largo plazo, deberá cargar más que la pérdida esperada. Es por esto que, en este caso, es imposible el establecer un seguro que resulte ventajoso para ambas partes. Si se logra dar un contrato de seguros, el asegurador deberá cobrar una prima en exceso de la pérdida esperada, para evitar una cierta tendencia hacia un ingreso insuficiente. En este caso el propietario no podrá tener una función de utilidad lineal.

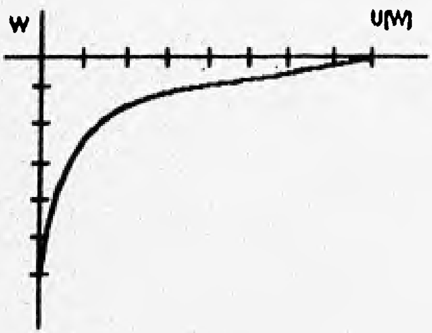
Como se mencionó anteriormente, la preferencia de un tomador de decisiones debe de satisfacer ciertos requerimientos para así poder asegurar la existencia de una función de utilidad; pero en estos requerimientos no se habla de que la función de utilidad tenga que ser siempre lineal, sino logarítmica, exponencial, cuadrática o de cualquier otra forma particular. De hecho, cada una de las funciones antes mencionadas pueden servir como función de utilidad para algunos tomadores de decisiones o incluso se pueden combinar para reflejar las preferencias de otros.

---

[2] Bowers et al.- ACTUARIAL MATHEMATICS
The Society of Actuaries. U.S.A. 1986 Pg. 8

No obstante, parece natural el asumir que u(W) es una función creciente. Aún más, ha sido observado que para muchos tomadores de decisiones, cada incremento igual adicional de riqueza resulta en un incremento menor de utilidad asociada. Esta es la idea de la utilidad marginal decreciente en la economía.

La figura de una función de utilidad mostrada a continuación, consiste en segmentos de línea recta con pendientes positivas. Es tal que: $A^2u(W) \leq 0$. Si estas ideas se extienden para funciones más suaves, las dos propiedades derivadas de la observación son: $u'(W) > 0$ y $u''(W) < 0$. La segunda desigualdad indica que u(W) es una función estrictamente cóncava hacia abajo:



Al discutir las decisiones tomadas en los seguros usando funciones estrictamente cóncavas hacia abajo, se hace uso de la [3]desigualdad de Jensen; en la cual se establece que si $u(W) < 0$ y X es una variable aleatoria entonces:

$$E[u(X)] \leq u(E[X])$$

Ahora bien, retomando la fórmula de:

$$u(W - G) = E[u(W - X)]$$

[3] Bowers et al.- ACTUARIAL MATHEMATICS
The Society of Actuarics. U.S.A. 1986 Pg. 9

Asumiendo que las preferencias del tomador de decisiones son tales que $u'(W) > 0$ y $u''(W) < 0$ y tomando en cuenta que $E[X] = \mu$. Si la aplicamos a la desigualdad de Jensen tenemos:

$$u(W - G) = E[u(W - X)] < u(W - \mu)$$

Dado que $u(W) > 0$, se sabe que $u(W)$ es una función creciente lo que implica que $W\text{-}G < W\text{-}\mu$ o que $G > \mu$ a menos de que X sea una constante. En términos económicos, se ha encontrado que $u'(W) > 0$ y $u''(W) < 0$, el tomador de decisiones pagará por el seguro una prima mayor que el valor esperado de la pérdida. A este tomador de decisiones se le conoce como una persona adversa al riesgo. Si G es al menos igual a la prima establecida por el asegurador, entonces sí hay una oportunidad de encontrar una póliza de seguros ventajosa para ambas partes.

Anteriormente se dijo que la función de utilidad del asegurador estaba aproximada por una línea recta sujeta al rango de los resultados asociados a una póliza simple. Ahora se utiliza una función de utilidad general denotada por $u_1(W_1)$ que representa la función de utilidad de la riqueza [W_1] del asegurador medida en términos monetarios. Entonces la prima mínima aceptable H, que cobrará el asegurador está dada por:

$$u_1[W_1] = E[u_1(w_1 + H - X)]$$

En donde el lado izquierdo representa la utilidad del asegurador dado su posición actual; y el lado derecho equivale a la utilidad esperada si se cobra una prima H y se paga una pérdida aleatoria de X. En otras palabras, al asegurador le es indiferente escoger entre quedarse en su posición actual o prever un seguro de X con una prima de H.

Si el asegurador es adverso al riesgo ($u'(W) > 0$ y $u''(W) < 0$) y asociado nuevamente la [4]desigualdad de Jensen se obtiene:

$$u(W_1) = E[u(W_1 + H - X)] \le u_1(W + H - \mu)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que se utilizó con la función de utilidad del asegurado, se puede concluir que $H > \mu$. Si G es tal que $G > H > \mu$, entonces una póliza de seguros es factible. Esto es, que la utilidad esperada de cualquiera de las partes no puede ser decreciente.

[4] Bowers et al.- ACTUARIAL MATHEMATICS
The Society of Actuaries. U.S.A. 1986 Pg. 10

Para determinar el valor de G o de H sin que éstas dependan de la riqueza ni del asegurado ni del asegurador se hace lo siguiente:

[5]Se establece una función de utilidad para ambos de la forma exponencial, esto es:

$$u[W] = e^{-\alpha W} \qquad \alpha > 0$$

Lo cual cuenta con ciertas ventajas como:

$$u'[W] = \alpha e^{-\alpha W} > 0$$
$$y$$
$$u''[W] = -\alpha^2 e^{-\alpha W} < 0$$

Por lo tanto, u(W) puede servir como la función de utilidad de una persona adversa al riesgo. Si después se determina:

$$E\left[-e^{-\alpha X}\right] = -E\left[e^{-\alpha X}\right] = -W_X(-\alpha)$$

Que es esencialmente lo mismo que encontrar la función generadora de momentos de X. Así, en esta expresión.

$$W_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

Denota la función generadora de momentos de X. Por tanto se concluye que las primas de seguros no van a depender del nivel de riqueza del tomador de decisiones. Esto se puede verificar para el asegurado al sustituir la función de utilidad por una función exponencial. Esto es:

$$-e^{-\alpha(W-G)} = E\left[-e^{-\alpha(W-X)}\right]$$
$$e^{\alpha G} = W_X(\alpha)$$
$$G = \frac{\log W_X(\alpha)}{\alpha}$$

Lo cual no depende de W.

[5] Bowers et al.- ACTUARIAL MATHEMATICS
The Society of Actuaries. U.S.A. 1986 Pg. 11

La verificación para el asegurador se hace sustituyendo la función de utilidad exponencial **F** con parámetro α_1. Esto es:

$$-e^{-\alpha(W)} = E\left[-e^{-\alpha_1(W_1+h-X)}\right]$$

$$-e^{-\alpha(W)} = -e^{-\alpha_1(W_1+H)}W_X(\alpha_1)$$

$$H = \frac{\log W_X(\alpha_1 1)}{\alpha_1}$$

Como se dijo con anterioridad, para que un contrato de seguros sea factible es necesario que la prima de la póliza establecida por el asegurador sea menor que la máxima cantidad que el asegurado está dispuesto a pagar por un seguro, es decir, que H > G.

2.2 Probabilidad de ruina

La probabilidad de ruina es la probabilidad de que el excedente alguna vez sea menor a cero: La noción de la ruina es claro está, una idealización matemática, no equivalente a que la compañía carezca de solvencia, sin embargo puede servir como una medida del riesgo financiero al cual la aseguradora está expuesta.

Para obtener un modelo tangible que describa el proceso del excedente de la aseguradora ciertas suposiciones se deben de hacer. En primer lugar, el portafolio de seguros se asume que se mantiene en equilibrio; permitiendo que los ingresos por el cobro de primas sean una cantidad constante por unidad de tiempo, así como el uso de la misma distribución para las cantidades de las reclamaciones a lo largo de todo el periodo. En segundo lugar, los gastos que no correspondan ni al pago de reclamaciones ni a los ingresos generados a través del cobro de primas, son ignorados. En tercer lugar, se asume que el proceso que genera el número de reclamaciones en cada intervalo de tiempo de longitud t debe de tener una distribución de Poisson con parámetros $[\lambda t]$. Esto significa que el tiempo de espera entre reclamaciones sucesivas son variables aleatorias independientes con una distribución exponencial con parámetro $[\lambda]$. Como consecuencia el proceso de generación de reclamaciones carece de memoria, es decir, la ocurrencia de reclamaciones futuras es independiente del pasado.

Sea U(t) el excedente de la aseguradora el tiempo **t**. Esta crece linealmente a lo largo del tiempo con una **tasa fija c (dada por las primas cobradas)**, y decrece en tiempos aleatorias en los que la reclamación ocurre. El **decremento** entonces iguala la cantidad aleatoria de la reclamación y la letra **c iguala las reclamaciones esperadas** por unidad de tiempo con un factor de ajuste **θ**, así **$c = (1+\theta)\lambda E[X]$**. De tal forma que para una **t** dada, **S(t)** tiene una distribución de Poisson **Compuesta**. El número de reclamaciones hasta el tiempo **t** tiene una distribución de Poisson con parámetros **[λt]**, los tamaños de las reclamaciones están distribuidas como X y son independientes. **Así** que si **U(0)= u** es el capital inicial el excedente al tiempo t es:

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

La probabilidad de ruina ψ(u), como una función de capital inicial u, es la probabilidad de que para algún **t** se tenga que U(t) < 0. El primer momento en el cual esto ocurra se denotará como T, con el entendido de que **T** = ∞ si la ruina nunca ocurre. De tal forma que la probabilidad de ruina puede ser denotada así:

$$\psi(u) = P\{T < \infty | U(0) = u\}$$

Para derivar una cota superior bastante acertada para la probabilidad de ruina, se introduce el llamado coeficiente de ajuste (**R**) que viene siendo la solución de:

$$1 + \frac{c}{\lambda} r = E\left[e^{rX}\right] \quad r > 0$$

[6]El coeficiente de ajuste resulta de gran importancia dentro de este contexto debido a la relación intrínseca que guarda con la probabilidad de ruina tal y como se expresa en el siguiente teorema:

$$\textbf{Para } u \geq 0 \qquad \psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{RU(T)} | T < \infty\right]}$$

Aquí, el denominador está calculado con respecto de la distribución condicional de el excedente negativo, **U(T)**, dado que la ruina ocurrió, esto es, T < ∞.

Por lo general, obtener un número explícito de dicho denominador resulta prácticamente imposible. Algunas excepciones se presentan el caso de que **u = o** y cuando la distribución del monto de las reclamaciones es exponencial. Sin embargo, de este teorema es posible el obtener desigualdades. Ya que **U(T)**, dado **T** < ∞, es forzosamente negativo, el denominador es mayor a uno de lo que se deriva:

---

[6] Bowers et al.- ACTUARIAL MATHEMATICS
The Society of Actuaries. U.S.A. 1986 Pg. 352

$$\psi(u) < \exp(-Ru)$$

De aquí que algunos autores sugieren la siguiente aproximación:

$$\psi(u) \approx \exp(-Ru)$$

Para diversas distribuciones el coeficiente de ajuste no existe. Tal es el caso de la distribución de Pareto, por lo que existen otros métodos para calcular la probabilidad de ruina.

2.3 El reaseguro

A continuación se habla de reaseguro de stop-loss para un portafolio de pólizas en general y en relación con modelos de Poisson Compuesta de tal forma que se establezcan las pautas para encontrar el valor de la prima neta de dicho reaseguro. Además, se habla de la interpretación de una forma de la fórmula de dividendos para un seguro de grupo viéndolo como un seguro de stop-loss. También se ve el efecto de reaseguro en el coeficiente de ajuste, y por ende la probabilidad de ruina.

Para una compañía de seguros S representa las reclamaciones totales en un periodo de tiempo dado. Así para un contrato de stop-loss con deducible d, la cantidad pagada por el asegurador es:

$$I_d \begin{cases} 0 & S \le d \\ S-d & S > d \end{cases}$$

Se debe de hacer notar que I_d es una función de las reclamaciones agregadas S. también es una variable aleatoria. Así, la cantidad de reclamaciones retenidas por la compañía contratante del reaseguro es:

$$S - I_d \begin{cases} S & S \le d \\ d & S > d \end{cases}$$

Por lo tanto, la cantidad retenida está acotada por d. De ahí deriva el nombre de "stop-loss" o "exceso de pérdida".

Ahora bien, para obtener el valor de $E[I_d]$, el cual denota la prima neta del reaseguro de cuando el deducible es d; primero se establece que la función de densidad de S se representa por $F(x)$, y que su función probabilística es $f(x)$ y con estos datos se obtiene:

$$E[I_d] = \int_d^{\infty} (x-d) f(x) dx$$

Usualmente S no puede asumir valores negativos. Entonces se puede extender la integral a $(0,\infty)$ y substraer la integral sobre el intervalo $(0,d)$ para ver que:

$$E[I_d] = E[S] - d \int_0^d (d-x) f(x) dx$$

y si *establecemos*:

$$f(x) = \frac{-d}{dx}[1 - F(x)]$$

e integrando por partes se establece:

$$E[I_d] = \int_d^{\infty} [1 - F(x)] dx$$

similarmente se obtiene:

$$E[I_d] = E[S] - \int_0^d [1 - F(x)] dx$$

Las fórmulas anteriores se utilizan para el cálculo de $E[I_d]$, la prima neta del "stop-loss". En realidad se trata de una cota inferior para dicha prima. La prima final debe de incluir un factor de recargo que represente la variabilidad del pago del reasegurado, es decir, de I_d. Esta variabilidad se obtiene de :

$$\mathrm{var}[I_d] = E[I_d] - E[I_d]$$

Ya que el concepto de una fórmula de dividendos para un seguro de grupo es el mismo que el de un reaseguro sobre exceso de pérdida se hablará de dicha fórmula.

Se establece que para una prima bruta de G, el asegurador otorgará toda la cobertura de las reclamaciones totales S durante un período de tiempo dado. Por su parte el asegurado tiene conocimiento de la existencia de un recargo equivalente a G-E[S] > 0. De tal forma que al final del período el asegurado anticipa un dividendo que será una función de S.

$$D=\begin{cases} kG-S & S<kG \\ 0 & S\geq kG \end{cases}$$

donde $0 < k < 1$,

Por lo tanto, el asegurado paga G y recibe S y D a cambio:

Por su parte el valor esperado de D se obtiene así:

$$E[D]=\int_0^{kG}[kG-x]f(x)dx$$

De tal forma que el asegurador establecerá una k lo suficientemente pequeña para que :

$$E[S]+E[D] < G$$

Para analizar el efecto que el reaseguro tiene en la probabilidad de ruina, es necesario recordar que, como ya se mencionó con anterioridad, la tasa de la prima del asegurador c tiene un recargo θ tal que $c = [1+\theta]E[X]$. Donde θ no incluye ningún recargo para gastos, y todo lo de c se encuentra disponible, para el proceso de riesgo. Al hablar de reaseguro, hay que determinar un factor de recargo ε, a través de la fórmula:

Tasa de la prima de reaseguro = (1+ε) (el valor esperado de la tasa de reaseguro).

Aquí la tasa de la prima de reaseguro cubrirá los pagos del reaseguro, gastos, fianza y utilidad.

Cabe destacar que la compra de un reaseguro, establece una relación directa entre la seguridad y las ganancias. Ya que, debido al factor de recargo existente en la prima del reaseguro, dicha compra reducirá las ganancias esperadas del asegurador; por otro lado, un contrato de reaseguro razonable incrementará la seguridad financiera de la aseguradora. En este planteamiento se requiere de un número estándar que sea el factor de seguridad, de tal forma que de todos los posibles contratos de reaseguro solo se eligiera a los que satisfagan este factor y de ellos se escogerá aquel con el que se obtengan la mayor ganancia esperada.

Aquí es en donde radica el vínculo existente entre el reaseguro y la probabilidad de ruina, pues este puede ser el factor que se elija. De tal forma que todas las adecuaciones que sean necesarias para obtener un contrato de reaseguro factible van a hacerse sobre el coeficiente de ajuste, de aquí se deriva su nombre, ya que, si cierto contrato de reaseguro produce un coeficiente de ajuste **R** que no resulta lo suficientemente grande para cumplir la desigualdad de $\psi(u) < e^{-Ru}$, entonces no es el adecuado.

Finalmente, dentro de este capítulo cabe mencionar la forma a través de la cual se entremezclan todos los conceptos antes descritos en la asignación de primas para portafolios homogéneos; lo cual se lleva a cabo mediante un principio de asignación de primas.

2.4 Principio de asignación de primas

Dentro de una compañía aseguradora, las primas son asignadas mediante una evaluación de un llamado principio de primas. Este se trata de una regla π que asigna un número real $\pi[X]$, que también se denota como $\pi[F_x]$, a una función de distribución **F** de un riesgo **X**. A lo largo de este capítulo se darán algunas condiciones que dichos principios de primas deben de cumplir y se va a demostrar que ciertamente el único principio que cumple con todos los requisitos es aquél que tiende a una utilidad exponencial.

Claramente cada principio de primas induce un orden total de riesgos, estableciendo a los riesgos **X** con un bajo $\pi[X]$ por debajo de los riesgo **Y** que tienen primas altas. Así pues, si asumimos que el orden generado coincide con el orden estocástico, teniendo que, $X <_{st} Y$, entonces $\pi[X] \leq \pi[Y]$ dándose la igualdad si y solo si $F_X = F_Y$.

La segunda condición que se le pide al principio de primas es la de que ninguna sobrecarga se requiere para un riesgo que tenga varianza cero. De tal forma de que, para un riesgo degenerado **X** con $P[X = c] = 1$ se tiene $\pi[X] = c$. (Cabe notar la prima que aquí se menciona consiste solamente en la parte de la prima necesaria para cubrir la reclamación).

La tercera condición se refiere a la mezcla de riesgos. Siendo X, X' dos riesgos tales que $\pi[X] = \pi[X']$. Entonces el principio no distingue entre X y el riesgo X'. Es completamente natural el pedir que esta condición se mantenga si estos riesgos se mezclan con algún riesgo Y. Por lo tanto, si se cuenta con un riesgo igual a Y con probabilidad 1-p, o igual a X con probabilidad p, se debe de requerir la misma prima si el riesgo X' es sustituido por el riesgo X.

[7]Las condiciones expuestas con anterioridad, llevan al llamado principio del valor de la media, donde la prima se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$\pi[X] = f^{-1}\{E[f(X)]\}$$

Para alguna función de valuación f, que sea adecuada, creciente y continua.

Se puede restringir aún más la clase de principios de primas si se añade la cuarta condición; que se refiere a la aditividad. Un principio de primas se dice que es aditivo si para riesgos independientes X y Y, la prima de su suma iguala a la suma de las primas.

En la búsqueda del mejor principio de primas lo único que nos resta por hacer es el determinar el parámetro α de la función de valuación $f(x) = e^{\alpha x}$. Para establecer la prima siguiendo el principio del valor de la media con esta función se debe de tomar en cuenta el que se cuente con una utilidad exponencial (α) constante. Así que, el parámetro α no es más que el coeficiente de adversión al riesgo del tomador de decisiones. Desafortunadamente, no existe un procedimiento sencillo para determinar el coeficiente de adversión al riesgo.

Entonces se sigue otro camino estableciendo la quinta condición la cual se refiere a la ruina. Siendo esta, que la probabilidad de ruina sea menor a ε. Para este propósito, supóngase que el proceso de reclamaciones es Poisson con parámetros λ y reclamaciones que se distribuyen como X. Las reclamaciones totales S en una unidad de tiempo tienen una distribución de Poisson Compuesta con una función generadora de momentos dada por:

$$N_s(t) = \exp\{\lambda(N_X(t) - 1)\}$$

de tal forma que la prima exponencial de S igual a:

---

[7] Van Heerwaardem.- PROPERTIES OF ESSCHER PREMIUM CALCULATION PRINCIPLE U.S.A. 1985 Pg. 261

$$\pi_a[S] = f^{-1}\{E[f(S)]\} = \frac{1}{\alpha}\log\{N_s(\alpha)\} = \frac{1}{\alpha}\{N_X(\alpha) - 1\}$$

Por otra parte, se obtiene que el coeficiente de ajuste **R** es la raíz positiva de la ecuación:

$$\lambda + \pi_a[S]r = \lambda N_X(r)$$

Esta ecuación se puede resolver fácilmente si se sustituye el valor de $\pi_a[S]$ y se divide todo entre λ queda;

$$\frac{1}{\alpha}\{N_X[\alpha] - 1\} = \frac{1}{r}\{N_X(r) - 1\}$$

De tal forma que el coeficiente de ajuste **R** se iguala al parámetro exponencial α. Entonces escogiendo que el parámetro α del principio exponencial sea: $\alpha = R = \{1/u\}\log\{1/\varepsilon\}$ · da una probabilidad de ruina que es a lo más:

$$e^{-Ru} < \varepsilon$$

Esta argumentación nos lleva a la siguiente conclusión. Si el principio de primas que se va a usar satisface los cinco requerimientos que se establecieron con anterioridad, la prima para un riesgo **X** debe de ser calculada como se indica a continuación.

$$\pi[X] = \frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{\alpha X}\right] \qquad con \cdot \alpha = \frac{1}{u}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

El capital inicial u, también puede ser interpretado como un margen necesario de solvencia, o como una parte de los recursos totales que el asegurador está dispuesto a gastar en situaciones adversas.

CapítuloTres

Portafolios Heterogéneos

En la práctica los seguros han seguido ciertos patrones para implantar las tarifas de los mismos, principalmente se siguen una especie de márgenes tanto inferior como superior. En el nivel más alto, para un portafolios dado, existe un equilibrio general entre los pagos totales y el ingreso realizado a través del cobro de primas. La distribución de las primas ya cobradas se lleva a cabo entre los contratos individuales, sin embargo, esto representa un serio problema en los niveles bajos.

En el caso de portafolios heterogéneos en los cuales las variables aleatorias que denotan las reclamaciones son independientes y tienen funciones de distribución conocidas, uno puede aplicar cierto principio de primas para la distribución del ingreso total de las mismas entre todos los contratos. Considerando un portafolio en el que el tamaño total de las reclamaciones es de S, y que esta formado por las reclamaciones individuales de n diferentes riesgos X_i, i =1,...,n. Siendo π (la que denota el principio de primas), una regla que provee a cada riesgo de una prima. Como se vio en el capítulo anterior la prima total $\pi[S]$ se refiere a una prima que tiene una probabilidad ruina de al menos de $\varepsilon = e^{-Au}$ con un capital inicial de u. Ahora bien, para saber cómo distribuir esta prima total entre todos los contratos del portafolio, cabe hacer notar lo siguiente:. con un principio de primas aditivo, como el principio exponencial, la prima para la suma de riesgos independientes es la suma de los riesgos individuales, de ahí que uno puede aplicar el mismo principio para cada riesgo. Intuitivamente es claro que la aditividad es una propiedad deseable solamente en el caso de que todos los riesgos envueltos sean de la misma naturaleza. En un portafolio heterogéneo es más importante contar con estimadores confiables de la prima del riesgo para cada subclase del portafolio que sea más o menos homogéneo.

Generalmente los portafolios son heterogéneos, pues a pesar de que existan contratos con propiedades que a primera vista parecen similares, las distribuciones y los valores esperados de las reclamaciones (primas puras) difieren. Esta similitud es concerniente sólo a ciertas características básicas del riesgo, mientras que, inevitablemente, aún existen parámetros de riesgo que no pueden ser observados (como las aptitudes al manejar), que casi son imposibles de avalar. Estas series de características de riesgo son las causas de la heterogeneidad dentro de la colectividad, la cual se manifiesta en los valores individuales de las reclamaciones observadas.

En un portafolio heterogéneo, riesgos con propiedades idénticas pueden ser agrupadas en subclases de riesgos homogéneos. Pero claramente un principio de primas clásico no es adecuado para el cálculo de las primas de riesgo individuales. En primer lugar, el principio de primas asume que la distribución del riesgo es conocido, mientras que en las subclases pequeñas no va a haber suficiente experiencia de las reclamaciones para hacer estimaciones acerca de las características de la función de distribución. En segundo lugar, como consecuencia de que, debido a las propiedades del riesgo que no son observables, los riesgos "idénticos" no se distribuyen para nada de la misma manera; una subclase que sea verdaderamente homogénea no puede ser construida. Debido a lo anterior, resulta de gran ayuda el contar con una técnica diferente para la asignación de primas de estos portafolios heterogéneos, para ello es necesario introducir los conceptos básicos de la teoria de la credibilidad.

3.1 Teoría de la credibilidad

[1]La teoría de la credibilidad es una técnica que sirve para tasar la experiencia y así poder determinar las primas de los seguros para los contratos que forman parte de un contrato más o menos heterogéneo. Esto en el caso en el que tenga una experiencia que sea limitada o irregular de las reclamaciones para cada contrato individual pero suficiente experiencia para el portafolio. Es el arte y la ciencia de usar ambas clases de experiencias para ajustar las primas de los seguros y de esta forma aumentar su precisión. Aún cuando el conjunto del portafolio sea heterogéneo, para un solo elemento del mismo, las dos informaciones con las que se cuenta, la colectiva y la individual, son usadas. Ambas clases de experiencia se mezclan de tal forma que el peso que se le da a la experiencia individual se expresa en el llamado factor de credibilidad.

Los modelos de credibilidad se hicieron para trabajar con la heterogeneidad y dar buenas estimaciones para las primas de riesgos individuales. En los modelos de credibilidad, la heterogeneidad se caracteriza por la introducción de un parámetro de riesgo θ. Para un contrato individual, se considera entonces la distribución condicional de X la variable del tamaño de la reclamación (o una transformación de la misma, como podria ser la razón de pérdida); dado el valor del parámetro de riesgo θ. La varianza del riesgo está compuesta de la varianza condicional de la media $E[X|\theta]$ y del valor esperado de $Var[X|\theta]$.

La llamada prima de credibilidad es un promedio ponderado de la estimación individual de la esperanza de la reclamación (con peso z, llamado el factor de credibilidad), y el valor esperado del tamaño de la reclamación total del portafolio. Así, resultará que si se carga esta prima en el nivel bajo, esto no afectará la prima total recolectada del portafolio completo.

Cuando $z = 0$, la prima individual iguala a la prima total; esto es aceptable en un portafolio homogéneo, pero generalmente no lo es dentro de un portafolio heterogéneo.

[1] M.J. Gooverts et al.- EFFECTIVE ACTUARIAL METHODS
Universidad Católica de Leuven, Bélgica 1990 Pg. 107

Para $z=1$, el contrato es tasado solamente en la base de su propia experiencia de reclamación. En general, la información individual es escasa y limitada, entonces este estimador no puede ser usado en la práctica. Algunas veces resulta completamente inadecuado, principalmente cuando se necesita una estimación del número de reclamaciones de un contrato el cual no presentó ninguna reclamación durante el periodo observado.

El factor de credibilidad originalmente propuesto por Bühlmann es:

$$z = \frac{at}{s^2 + at}$$

Aquí t, es la longitud del período de observación, a > 0 es una cantidad (que puede ser estimada de los datos observados) que refleja la heterogeneidad del portafolio como se expresa en el parámetro de riesgo 0; y la letra s^2 es una medida total de la variabilidad del resultado. De hecho, la cantidad a refleja el grado de solidaridad existente entre grupos diferentes, mientras que s^2 revela la solidaridad causada por efectos completamente aleatorios.

En el factor de credibilidad, obtenido a través de la fórmula de Bühlmann, se pueden observar algunas propiedades asintóticas razonables.

Por ejemplo, si $t \to \infty$, entonces $z \to 1$. Esto es aceptable porque a mayor experiencia que exista, mayor confianza se puede tener en la prima de riesgo individual.

Si $a = 0$, entonces $z = 0$. Es decir, cuando las cantidades de las reclamaciones individuales esperadas son iguales, entonces no hay heterogeneidad dentro del portafolio. Por lo que, la media colectiva es la mejor estimación lineal de la prima del riesgo.

Si $a \to \infty$, entones $z \to 1$. Esto es intuitivamente claro, ya que en este caso el resultado colectivo no contiene información del riesgo individual específico.

Si $s^2 \to \infty$ entonces $t \to 0$, lo que significa que, cuando la experiencia de las reclamaciones que es variable para parámetros de riesgo fijos tiene alto grado de variabilidad, la información individual carece de valor dentro de la estimación de la prima del riesgo real.

Un problema que surge frecuentemente en la práctica al aplicar modelos más complejos es el siguiente. Algunas veces pasa que $t \to \infty$, aunque las consideraciones del contrato tiendan a infinito (por ejemplo, que de un primer vistazo se ve que el subgrupo bajo consideración tiene suficientes miembros para permitir que los métodos clásicos estadísticos funcionen), el factor de credibilidad z, no tiende a uno, pero se queda significativamente por debajo de uno. La razón entonces es, que el subgrupo es en sí mismo heterogéneo y tiende a un valor de s significativamente alto. Por otro lado, supóngase que para un t largo se encuentra un factor de credibilidad, de uno. En ese caso el resultado que se obtiene utilizando la teoría de credibilidad, coincide con el resultado de la estadística clásica. Aquí la teoría de credibilidad no es necesaria pero utilizándola obtenemos un resultado correcto.

La heterogeneidad del portafolio representa uno de los mayores problemas al querer derivar una estructura para las primas, y también es la razón por la cual las técnicas clásicas no son frecuentemente aplicables. Existen dos orígenes de variación de las reclamaciones. El primero es la buena/mala suerte del poseedor de la póliza; y el segundo la suerte del asegurador, en el sentido de que una aseguradora tendrá buena suerte si el riesgo del cual se trata es un "buen riesgo". Así, para cada póliza uno hace frente a la riesgosidad del resultado, y adicionalmente la incertidumbre debida a las características adicionales del riesgo. Si un portafolio heterogéneo es dividido en subclases homogéneas, en general se puede aplicar aproximaciones normales. Pero regularmente el número de observaciones de cada subclase será muy pequeño como para utilizar las técnicas de la estadística clásica. En este caso que la teoría de credibilidad resulta una herramienta muy eficaz. Después de determinar las diferentes clases de riesgos (bajo las bases de otras técnicas estadísticas), usando los resultados de la credibilidad se puede calcular estimaciones para la prima del riesgo puro de cada subclase. Aún cuando la subdivisión original en categorías no sea la correcta, la teoría de credibilidad se encargará de ajustar el resultado final.
Realmente, en caso de que una subclase no sea suficientemente homogénea, la media de la varianza (s^2) será relativamente grande, y el factor de credibilidad relativamente bajo. Por el otro lado, la teoría de credibilidad también revelará cuando alguna de las subclases sea lo suficientemente grande para ser considerada como un solo grupo, ya que se obtendrá un factor de credibilidad de uno.

Así pues, una vez que sea ha obtenido el factor de credibilidad (z), se puede calcular la prima correspondiente a cada riesgo utilizando:

$$\theta_j^* = z\hat{\theta}_j + (1+z)\hat{\theta}$$

En la aplicación de la teoría de la credibilidad, el caso más importante se presenta cuando se trata de un vector de observaciones $\vec{X} = \{X_1......X_n\}$ cuyo componentes son condicionalmente independientes dado que $\theta = \theta$.

$$F_{X|\theta}\{X....X_{j_1}, \theta\} = F_{X_1|\theta}\{X_1, \theta\} F_{X_2|\theta}\{X_2, \theta\}.....F_{X_j|\theta}\{X_j, \theta\}$$

Lo que implica que para un contrato con un parámetro de riesgo dado $\Theta = \theta$, el tamaño de las reclamaciones de un año a otro son independientes, aún más, asumiendo que el primero y segundo momentos de $X_{r'}$ y X_r dado $\Theta = \theta$, son iguales, para r=1...t se puede escribir:

$$\mu(\theta) = E[\, X_r | \Theta = \theta]$$
$$m = E[\, X_r \,] = E[\, \mu(\Theta)]$$
$$\sigma^2 = \text{var}\{E[\, X_r \,|\Theta\,]\} = \text{var}\{\mu(\Theta)\}$$
$$\sigma^2(\theta) = \text{var}\{\, X_r \,|\Theta = \theta\}$$
$$s^2 = E[\text{var}\,[X\,|\theta_r]] = E[\sigma(\Theta)]]$$

Hablando del portafolios heterogéneos, se crea una función de estructura en la cual el parámetro a se refleja la heterogeneidad indicada por la función de estructura, s refleja la fluctuación en el tiempo de los resultados del contrato y m agrupa a todos los expectaciones pasadas del contrato.

De aquí la teoría de credibilidad puede ser usada en el diseño de una estructura de primas para un portafolio heterogéneo. También puede ser aplicada al examinar una estructura de tarifas existentes. Si un portafolio, subdividido en celdas, es considerado en su conjunto con una estructura de tarifas dada, los cálculos de credibilidad pueden ser realizados, dando así una estimación de la prima óptima de cada celda y también una estimación de la prima global. Asi pues, si se compara la prima global con la prima de la credibilidad del conjunto, se obtiene un indicador del factor de recargo necesario. Aplicando este factor de recargo a las primas de cada celda se obtiene una estimación de la prima comercial de cada una de las mismas. Comparando esta estimación con la prima real del mercado se tendrá una clave para saber qué tan buena es la estructura de tarifas. Más aún, se da información sobre las ganancias o pérdidas técnicas de cada subclase. De tal forma que esto es una verdadera ayuda en la medición de que tan eficiente es una tarifa ya existente.

3.2 Ejemplos prácticos

En una aseguradora se cuenta con un portafolio, el cual produce pérdidas agregadas que son independientes e idénticamente distribuidas mediante una Poisson Compuesta con $\lambda=1.5$ y $p(1) = 2/3$, $p(2) = 1/3$ y las primas recibidas anualmente son $c=2.5$

a) Calcular el coeficiente de ajuste de este portafolio.

b) Para un reaseguro con recargo del 100% se puede obtener una cobertura para exceso de pérdida. Calcular el coeficiente de ajuste si dicha cobertura se contrata con un deducible de $d=3$ dado que $E[I_3] = 0.338$

Solución:

a) En este caso R se obtiene de $M_x(r)=1 + (1+\theta)pr$ de tal forma que

$$1.5+2.5r = e^{r} + 0.5e^{2r}$$

De donde se obtiene $R= 0.28$

b) Como el recargo es del 100% la prima por el coaseguro en exceso de pérdida es de $0.676 = 2^{*} (0.338)$. De tal forma que durante el periodo i la prima retenida por el asegurador es de $2.5 - 0.676 = 1.824$ y las reclamaciones retenidas son:

$$\hat{W}_1 \begin{cases} W_1 & W_1 = 0,1,2,3 \\ \\ 3. & .W_1 > 3 \end{cases}$$

Donde W_i denota la pérdida para el periodo i. Por lo que R será la raíz positiva de:

$$e^{-1.824r}[\Sigma f(x)e^{xr} + [1 - F(2)]e^{3r}] = 1$$

de donde se obtiene que $R = 0.25$ y la ganancia esperada para el periodo es:

La ganancia esperada sin el reaseguro $c - E[W_i] = 2.5 - 2 = 0.5$. Menos el valor esperado del rendimiento del reasegurador que como se carga a una tasa de $2E[I_3]$, es $E[I_3] = 0.338$ Es decir:

$$0.5 - 0.338 = 0.162$$

Como 05>0.162 se verifica lo dicho con anterioridad, que con el reaseguro se disminuye la ganancia pero su ventaja radica en que se aumenta la seguridad.

Teorema de la caracterización del principio del valor de la media: Supóngase que el principio de primas π[X] que asigna valores de primas reales al rango X tiene las siguientes propiedades:

$i)$. Si $x < stY \ldots y \ldots F_X \neq F_Y$ entonces $\pi[X] < \pi[Y]$

$ii)$ Si $P[X = c] = 1 \ldots 0 \leq c.$ entonces $\pi[X] = c$

$iii)$ Si X, X', Y son riesgos.. $y. p \in [0,1]$ *entonces*

$$\pi[X] = \pi[X'] \ldots\ldots \pi[pF_X + (1-p)F_Y] = \pi[pF_{X'} + (1-p)F_Y]$$

Por lo que existe una función real, continua y creciente denotada por f(x) para la cual:

$$\pi[X] = f^{-1}\{E[f(X)]\}$$

Teorema referente a la aditividad: Los principios de primas de valor de la media que son aditivos **si son exponenciales** o primas netas.

Supóngase que el principio de primas π[X] tiene las siguientes características:

$i)$.Si $X < stY$ $y F_X \neq F_Y$ entonces $\pi[X] < \pi[Y]$

$ii)$ Si $P[X = c] = 1 \ldots 0 \leq c.$ entonces $\pi[X] = c$

$iii)$ Si X, X', Y son riesgos $y. p \in [0,1]$ entonces

$\pi[X] = \pi[X'] \ldots\ldots \pi[pF_X + (1-p)F_Y] = \pi[pF_X{'} + (1-p)F_{X'}]$

$iv)$Si X y Y son riesgos independientes entonces:

$\pi[X + Y] = \pi[X] + \pi[Y]$

Portafolios Heterogéneos:

Con el fin de que resulte más claro lo antes expuesto, a continuación se da un ejemplo de cómo através de la utilización de la teoría de la credibilidad se obtiene un esquema de las posibles primas a cobrar para un portafolio heterogéneo

Considerando un portafolio formado por veinte pólizas similares: Todos los propietarios de las pólizas pagan la misma prima de m=18 cada año. Los riesgos siguen una distribución Bernoulli es decir son 0 o 1. Después de 10 años el historial de las reclamaciones está dado por la siguiente distribución:

No. poliza / Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1			1								1						1	1	1	
2							1		1		1						1			
3			1				1		1	1										
4																	1			
5									1		1									
6						1			1			1								
7									1					1			1			
8												1								
9						1				1			1							
10									1			1					1			
totales	0	0	2	0	0	2	2	0	6	2	3	3	1	1	0	0	5	1	1	0

En los tres primeros años, ocurren trece reclamaciones, lo cual nos lleva a un costo promedio por reclamación de 0.2. Al final del año diez, se obtiene la estimación de 29/200 = 0.145 . Más si quitamos los riesgos 9, 11 y 17 se tendrá una estimación de 15/170 = 0.088. Entonces la pregunta es si los veinte contratos son homogéneos o si la hipótesis de la homogeneidad de los riesgos es falsa .

La respuesta a la interrogante anterior se puede obtener a través de la utilización de la estadística clásica. Si se asume que para el contrato j la muestra de posibles resultados proviene de diez ensayos binomiales independientes, cada uno con probabilidad θj, j = 1,...,20. Entonces la Hipótesis de la homogeneidad de los riesgos se puede formular de la siguiente forma $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 =.,.........,= \theta_{20}$. El valor de X^2 que se utiliza para probar esta hipótesis nula es:

$$X^2 = 10\sum_{j=1}^{10}\left[\hat{\theta}_j - \hat{\theta}\right] \Big/ \left[\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\right] = 49.16$$

Aquí θ iguala el promedio de las diferentes estimaciones θ_j El valor resultante es mucho más grande que el 5% valor crítico (30.14) con 19 grados de libertad. Por lo tanto la hipótesis nula es rechazada.

Ahora se debe de escoger entre que si la aseguradora debe de cobrar a los propietarios de las pólizas la prima neta colectiva, o si se debe de construir un sistema de tarifas basado solo en la experiencia de reclamación individual, y cobrar por el riesgo j la prima θ_j. Existen argumentos en contra de usar cualquiera de estos dos extremos. Cobrar la prima colectiva se parece injusto para todos los riesgos excepto para 9, 11 y 17. Tal sistema de tarifas tiende a ahuyentar a los riesgos "buenos" y a atraer los riesgos "malos". Por otro lado, cobrar la prima pura del riesgo está en contra del objeto de los seguros, dado que el riesgo no se encuentra repartido a lo largo de un grupo de pólizas similares, y cada asegurado paga por su propia reclamación. En conclusión la aseguradora debe de cobrar

$$\theta_j^z = z\theta_j + (1+z)\theta$$

La teoría de la credibilidad provee de los medios para el cálculo de z

Aunado a la aleatoriedad de los resultados de las reclamaciones anuales está la incertidumbre de las probabilidades básicas θ_j. El parámetro de riesgo se puede considerar como el resultado de una variable aleatoria θ la cual es una buena forma de modelar la incertidumbre de la distribución de las reclamaciones. La heterogeneidad existente sobre los contratos se mide por a=var [θ], mientras que $s^2 = E[\theta(1-\theta)]$, mide la dispersión del riesgo o su tiempo de fluctuación .

Por lo que el ejemplo se propone utilizar el parámetro θ el cual para los valores 1,2,3 tiene la siguiente distribución:

$$\theta = \begin{cases} 14/17 = 82353 & p = 17/20 = 0.85 \\ \\ 15/3 = 5 & q = 3/20 = 0.15 \end{cases}$$

Como son varias sucesiones Bernoulli, se trabaja como una binomial y se obtienen los siguientes valores:

$s^2 = E[\theta(1-\theta)] = [0.82353\ (1 - 0.82353)]\ (0.85) + [5(1-5)]\ (.15) = -2.87647$
$a = var(\theta) = E[\theta^2] - (E[\theta])^2 = [(0.8235)^2\ (0.85) + (5)^2\ (0.15)] - (-2.8764)^2 = -3.9476$
t = 10 ya que el diagrama cuenta con la experiencia de diez años.

Una vez que tengo estos valores saco el factor de credibilidad siguiendo el método de Bühlmann:
$z = at/(s^2 + at) = (-3.9476)(10)/[-2.87647 + (-3.9476)(10)] = 0.93203$

Y siguiendo la fórmula de $\theta_j' = z\theta_j + (1 + z)\theta$ co parametro $\theta = 29/200 = 0.145$

Se obtiene la siguiente tabla de tarifas a cobrar para cada póliza. Cabe hacer notar que, en este ejemplo el factor de credibilidad fue muy alto, lo que implica que la cuata de 0.18 que se venía cobrando por todas las pólizas era muy injusta, en la siguiente tabla también se observan las diferencias entre la prima neta colectiva y la obtenida por la teoría de la credibilidad así como la prima en base al riesgo individual y la de la teoría de la credibilidad.

Póliza NO. (j)	θj	Cantidad a cobrar (θ)	θj-θ	m-θ
1	0.0000	0.009848	-0.009848	0.170152
2	0.0000	0.009848	-0.009848	0.170152
3	0.2000	0.009848	0.190152	0.170152
4	0.0000	0.009848	-0.009848	0.170152
5	0.0000	0.009848	-0.009848	0.170152
6	0.2000	0.196265	0.003735	-0.016265
7	0.2000	0.196265	0.003735	-0.016265
8	0.0000	0.009848	-0.009848	0.170152
9	0.6000	0.569098	0.030902	-0.389098
10	0.1000	0.103056	-0.003056	0.076944
11	0.4000	0.382681	0.017319	-0.202681
12	0.3000	0.289473	0.010527	-0.109473
13	0.1000	0.103056	-0.003056	0.076944
14	0.1000	0.103056	-0.003056	0.076944
15	0.0000	0.009848	-0.009848	0.170152
16	0.0000	0.009848	-0.009848	0.170152
17	0.5000	0.475889	0.024111	-0.295889
18	0.1000	0.103056	-0.003056	0.076944
19	0.1000	0.103056	-0.003056	0.076944
20	0.0000	0.009848	-0.009848	0.170152

El ejemplo anterior, a pesar de ser muy sencillo ilustra lo injusto que puede ser el cobrar la misma prima para todos los riesgos que forman parte del portafolio heterogéneo. Hacer un análisis más profundo sería objeto de otra tesis.

Finalmente, quiero hacer hincapié en la importancia de seleccionar y clasificar los diferentes portafolios, de tal forma que, según la clase a la que pertenece se elija el sistema de asignación de primas óptimo para cada grupo de seguros.

Conclusiones

La asignación de primas es un problema básico en la industria del seguro, este problema es tratado como una forma base de ciertas investigaciones profundas relacionadas con la teoría de probabilidad .

Cada uno de los temas que se mencionan a continuación, pueden servir como base de varias tesis o trabajos de investigación:

1.- La asignación de primas esta ligada íntimamente con el pago de dividendos, de ahí que desde el punto de vista mercadológico surge la alternativa de cuál es la mejor estrategia.

Si cobrar bajas primas y no pagar dividendos o si cobrado primas altas, al rebasar las ganancias un cierto nivel, generan estos dividendos.

El problema de dividendo esta tratado en si mismo en los libros de Bhulman, Beart, Geber, etc. También al hablar de dividendo hay que tener en cuenta la disyuntiva de pagarlos o crecer, y todo claramente vinculado con la nueva ley de solvencia.

2.- [1]Par asignar primas es muy importante el evalúo estadístico de los riesgos, para ello se han desarrollado diferentes técnicas para analizar datos disponibles, pero estos datos normalmente poseen la característica de ser censurados, por lo que no puede saberse con exactitud cómo y de qué modo fueron los daños por debajo del deducible o los momentos por arriba del límite de responsabilidad. La mayor referencia al respecto se encuentra en el libro de Hogg y Klugman.

3.- El problema de asignación de primas cuenta con un enfoque moderno relacionado con Martingalas; ya que decimos que un proceso estocástico es un Martingalas sí y solo si:

$$E[X_t | X_u, u \leq s] = X_s$$

Representa la ganancia en un juego justo.

4.- Otro enfoque para el problema de la asignación de primas está dado vía la aproximación del proceso de riesgo por un proceso con trayectoria continua, especialmente por el proceso del

[1] R. Hogg K.S Klugman.- LOSS DISTRIBUTIONS

movimiento browniano, del cual se habla en el libro [2]de Feller. El modelo también puede enriquecerse utilizado ecuaciones estocásticas diferenciales. Vale la pena mencionar que este tipo de técnicas les valió el Premio Novel a dos investigadores; y aunque teóricamente es complicado, ya existen paquetes para usarlo. [3]Desgraciadamente en seguros no existe la aplicación práctica de estas técnicas y todo se limita a unos cuantos trabajos de investigación como el de "Stochastic Differential Equations for Compounded Risk Reserves", por citar alguno.

A manera de concluir con los puntos antes citados, cabe señalar que las investigaciones en teoría de riesgos se desarrollan (con un enfoque más financiero y moderno), en mayor grado en Europa, que en Estados Unidos, principalmente en Alemania, Suiza, Bélgica y Holanda.

Adicionalmente, las generalizaciones necesarias para ajustar modelos teóricos a la realidad, requieren de formulaciones complejas que en la mayoría de los casos son muy difíciles de manejar con métodos tradicionales, por lo cual tiene que ser tratadas con habilidad y con la ayuda de cómputo adecuados.

Por otra parte, puesto que la principal aplicación de la teoría de riesgo es actualmente la determinación de las primas que debe de cobrar la compañía a sus asegurados, no se debe de perder de vista que un mercado global cada vez más competido ya no es un lujo, sino una necesidad.

Sin embargo, es importante también el no perder de vista que no siempre un modelo complicado es el más adecuado, pues en ocasiones, es importante el mantener la viabilidad de adaptar nuestro modelo a condiciones cambiantes y dentro de rangos interpretables antes que desarrollar un modelo de riesgo supuestamente muy apegado a un caso específico, pero muy poco adaptable a circunstancias diferentes a las originalmente planteadas.

Finalmente, no se debe de olvidar que cuanto más realista sean nuestros supuestos, mejor resultará el modelo que se produzca, por lo que es importante el considerar que modelos que pueden ser excelentes en ciertas condiciones (por ejemplo, en países industrializados con mínima incidencia de catástrofes), no necesariamente son los adecuados en otros (como sería el caso de países pobres, con alta probabilidad de desastres naturales o epidemias), por lo cual resulta de vital importancia el considerar las características específicas de cada proceso de riesgo, para así poder diseñar el modelo adecuado para cada caso.

---

[2] William Feller.- TEORIA DE PROBABILIDAD Y SUS APLICACIONES
México, D.F. 1989 Volumen II
[3] José Garrido.- STOCHASTICS DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR COMPOUNDED RISK RESERVES
Universidad de Concordia, Montreal, Canadá 1989

Bibliografía

Beard R. E. et al .- RISK THEORY STOCHASTIC BASIS OF INSURANCE
London 1984

Bearly T. George .- DICCIONARIO DE SEGUROS
México, D.F. 1991

Bearly and Myers - PRINCIPLES OF CORPORATE FINANCE
E.U.A. 1988

Bowers et al .- ACTUARIAL MATEMATICS
The Society of Actuarics U.S.A. 1986

Cramer Harald .- MATHEMATICAL METHODS OF STATISTICS
Princenton University U.S.A 1974

Cramer H..- COLLECTIVE RISK THEORY
Estocolmo 1955

Cummings J. David .- THE JOURNAL OF RISK AND INSURANCE
New York U.S.A. 1991

García Cantú Raúl.- CRECIMIENTOS DE MERCADOS
Periódico "El Economista" Noviembre 1991

Gooverts M. J.- EFFECTIVES ACTUARIAL METHODS
Catholic University of Leuven Bélgica 1990

Grandell J..- ASPECTS OF RISK THEORY
New York U.S.A. 1991

José Garrido.- STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR COMPOUNDED RISK RESERVES.
Trabajo de investigación Universidad de Concordia Montreal Canadá 18989.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Skaplesky Melcone .- ESTADISTICA MODERNA
Barcelona 1987

Smith K. Samuelson .-THE MATHEMATICAL THEORY OF INSURANCE
New York U.S.A. 1974

Van Heerwaardem .- PROPERTIES OF ESSCHER PREMIUN CALCULATION PRINCIPLE
1985

Watson W. George .-LA ECONOMIA Y LOS SEGUROS
Georgia U.S.A. 1990

William Feller .- TEORÍA DE PROBABILIDAD Y SUS APLICACIONES
México, D.F. 1989 Volumen II