

32
Ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA TEORIA DE JUEGOS Y LA CONJETURA
DE BERGE-DUCHET

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MA. DEL PILAR VALENCIA SARAVIA



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

La Teoría de Juegos y la Conjetura
de Berge - Duchet

realizado por Ma. del Pilar Valencio Soravia

con número de cuenta 8314907-6 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dra. Hortensia Galeana Sánchez

Propietario

Dr. Jorge Luis Arocha Pérez

Propietario

Paloma Zapata

M. en C. Ma. de la Paloma Zapata Lillo

Suplente

M. en C. Sergio Hernández Castañeda

Suplente

Laura Pastrano R.

Mat. Laura Pastrano Ramírez

Consejo Departamental de Matemáticas

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

A mis papás:

Miguel Valencia Zúñiga y

Amparo Saravia Farfán

con mi gratitud y cariño.

Indice

1	Introducción	2
2	Definiciones de Teoría de Gráficas	7
3	Algunos resultados en torno a la Conjetura BD.	20
4	Definiciones de Teoría de Juegos	33
5	Gráficas núcleo solubles y funciones de efectividad.	47
6	Funciones de efectividad balanceadas y gráficas perfectas.	55
7	Conclusiones	62

1 Introducción

Hace poco más de cincuenta años, Von Neumann y Morgenstern, publican su obra "*Theory of Games and Economic Behavior*" [21], logrando con ella, una de las más importantes contribuciones a la Teoría de Juegos. En su libro, ellos introducen el concepto de *solución* para ciertos tipos de juegos cooperativos. Posteriormente, se retoma este concepto, y se encuentra que tiene aplicaciones en muchos otros contextos, además de que es posible representarlo mediante una gráfica dirigida (digráfica), con lo que es introducido dentro de la terminología de la Teoría de Gráficas con el nombre de núcleo. El núcleo es un subconjunto de vértices de una digráfica que es a la vez independiente y absorbente.

No todas las digráficas tienen núcleo y desde la aparición del concepto, muchos esfuerzos han sido realizados con el afán de dar las condiciones necesarias para que el núcleo exista. Son de particular relevancia los trabajos realizados en este campo por las escuelas francesa, encabezada por C. Berge, P. Duchet, H. Meyniel y F. Maffray, y mexicana con la destacada participación de V. Neumann-Lara y Hortensia Galeana Sánchez. De hecho, se ha ambicionado más: la intención es encontrar las propiedades estructurales de las digráficas conocidas como núcleo perfectas, es decir, aquellas en las que todas sus sub-

digráficas inducidas (incluida la misma digráfica) tienen núcleo.

Del trabajo realizado por Von Neumann y Morgenstern se obtuvo el primer resultado importante de la Teoría de Núcleos:

Toda digráfica finita sin ciclos dirigidos es núcleo perfecta y su núcleo es único.

Algunos otros resultados clásicos son los siguientes:

- Una digráfica simétrica es núcleo perfecta (trivial);
- Una digráfica transitiva es núcleo perfecta, y todos sus núcleos son de la misma cardinalidad (*König*);
- Una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar es núcleo perfecta (*Richardson*).

Baste con estos como ejemplo de lo que se ha realizado, existen más resultados en este sentido, aunque no es propósito del presente trabajo presentarlos aquí.

Otro concepto importante dentro de la Teoría de Gráficas es el de gráfica perfecta. Decimos que una gráfica G es perfecta si para cualquier subgráfica inducida de ella, se tiene que su número cromático

coincide con la cardinalidad de su clan mayor. El número cromático indica el mínimo número de conjuntos independientes en que se pueden partir todos los vértices de la gráfica. Otra forma de definir este tipo de gráficas, es la siguiente: G es perfecta si para cualquier subgráfica inducida de ella se tiene que la cardinalidad de su mayor conjunto independiente, es decir, su número de estabilidad, coincide con el número de cubrimiento, o sea, el mínimo número de clanes que cubren todos sus vértices. Las gráficas perfectas han jugado un papel muy importante en la Optimización Discreta, ya que son precisamente ellas en las cuales los poliedros de independencia y de clanes tienen vértices con coordenadas enteras [2].

Uno de los resultados más importantes en este campo, es el siguiente, obtenido por Lovász en 1972 [16]:

Teorema (Lovász) G es una gráfica perfecta si y sólo si su complemento \bar{G} también lo es.

En un trabajo realizado por Claude Shannon en 1956 [2], él demuestra que la gráfica más pequeña en la que el número de estabilidad es estrictamente menor que el número de cubrimiento, es C_5 , el ciclo de longitud cinco. Este trabajo motivó a Claude Berge a realizar la famosa Conjetura Fuerte de las Gráficas Perfectas (CFGF), presentada por primera vez durante un congreso realizado en Marzo de 1960,

y que establece:

Conjetura CFGP *Una gráfica G es perfecta si y sólo si no contiene como subgráficas inducidas C_{2k+1} , ni \bar{C}_{2k+1} , para $k \geq 2$.*

Esta es una de las conjeturas más famosas de la Teoría de Gráficas, y aún permanece abierta. En la búsqueda de su demostración, se han desarrollado innumerables contribuciones que han llevado al enriquecimiento de la Teoría.

En 1983 C. Berge, junto con P. Duchet, en el afán de caracterizar a las gráficas perfectas mediante las herramientas proporcionadas por la Teoría de Núcleos, plantean en [3] la conjetura siguiente:

Conjetura BD *Una gráfica es Perfecta si y sólo si es Núcleo Soluble.*

Esta conjetura asegura la existencia de núcleos para cierto tipo de orientaciones de gráficas perfectas. En Junio de 1994, Endre Boros y Vladimir Gurvich proporcionan la demostración de la implicación (\Rightarrow), estableciendo así el siguiente resultado [8], (en proceso de publicación):

Teorema 1.1 *Las gráficas Perfectas son Núcleo Solubles.*

La demostración que ellos proporcionan, está fuertemente basada en la Teoría de Juegos. En el presente trabajo se brinda una exposición

de los resultados que los llevaron a establecer este teorema, así como su demostración.

La manera de llevar a cabo este objetivo es, a grandes rasgos, como sigue: en la sección 2 se introducen definiciones básicas de la Teoría de Gráficas, así como algunos resultados sencillos que serán utilizados posteriormente, la tercera sección muestra un panorama generalizado acerca de los resultados más relevantes obtenidos durante los intentos por resolver la conjetura BD, en la sección siguiente, se exponen las definiciones y resultados de la Teoría de Juegos necesarios para que, finalmente, en las secciones 5 y 6 se procede a la demostración del Teorema 1.1 .

2 Definiciones de Teoría de Gráficas

Llamamos **gráfica** a una pareja $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito de objetos llamados los **vértices** de G , y $E \subseteq V \times V$, es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos, cuyos elementos son conocidos como las **aristas** de G .

Si $u, v \in V$ forman una arista de G , decimos que los vértices u y v son **adyacentes** y denotamos a esta arista como uv . Si dos aristas de G comparten un vértice, es decir $uv, vr \in E$, decimos que estas aristas son **incidentes**.

En lo sucesivo, cada vez que nos refiramos a una gráfica G , asumiremos que su conjunto de vértices es V y su conjunto de aristas es E . Cuando se trate cualquier otra gráfica G_1 , en la que no se especifican sus conjuntos de vértices y aristas, si nos referimos a ellos lo haremos como $V(G_1)$ y $E(G_1)$.

Definición 2.1 $H = (V', E')$ es una **subgráfica inducida** de G si $V' \subseteq V$ y $\forall u, v \in V', uv \in E'$ si y sólo si $uv \in E$. Se denota como $H \subseteq^* G$.

Si $S \subseteq V$, $G[S]$ es la subgráfica de G inducida por el conjunto S , esto es $G[S] = (S, E')$ donde $\forall u, v \in S$, $uv \in E'$ si y sólo si $uv \in E$.

Definición 2.2 $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ es un ciclo de longitud n de G si $v_i \in V$, $v_i \neq v_{i+1}$ y $v_i v_{i+1} \in E$, $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$. Observemos que $n \geq 3$ porque estamos considerando gráficas sin lazos ni aristas múltiples.

Denotaremos por C_n al ciclo de longitud n .

Definición 2.3 G es completa si para cada par de vértices $u, v \in V$, u y v son adyacentes.

Denotaremos por K_n a la completa con n vértices.

Definición 2.4 $C \subseteq^* G$ es un clan de G , si C es una gráfica completa y máxima por contención, es decir, si $\forall v \notin V(C)$ se tiene que $G[V(C) \cup \{v\}]$ no es completa en G .

Definición 2.5 $I \subseteq V$ es un conjunto independiente en G si cualquier par de vértices de I son no adyacentes entre sí. I es un conjunto independiente maximal en G si $\forall v \notin I$ se tiene que $I \cup \{v\}$ no es un conjunto independiente en G .

Definición 2.6 G es un árbol si G es conexa y sin ciclos.

Definición 2.7 G es una gráfica bipartita si existe una partición de V en dos conjuntos V_1 y V_2 de manera que $uv \in E$ sólo si $u \in V_1$ y $v \in V_2$.

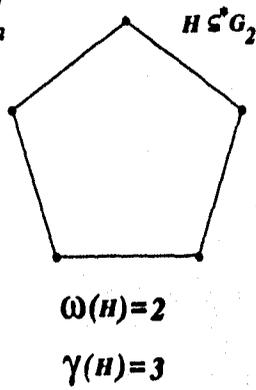
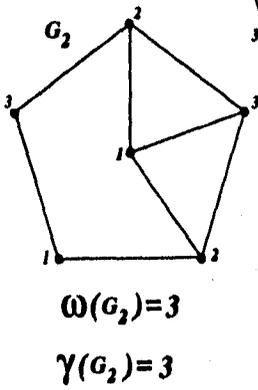
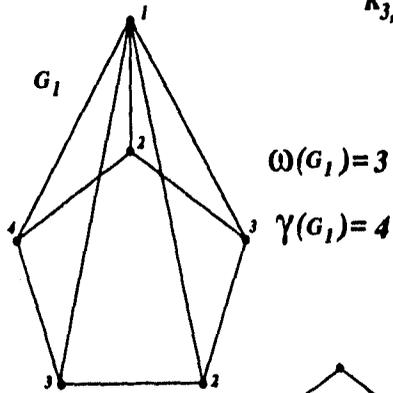
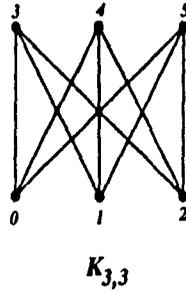
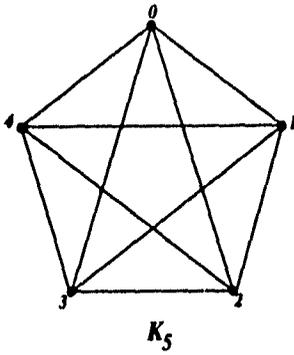
Definición 2.8 La gráfica complementaria de $G = (V, E)$, denotada como $\bar{G} = (V, \bar{E})$, tiene los mismos vértices de G y $uv \in \bar{E}$ si y sólo si $uv \notin E$.

Definición 2.9 El número cromático de G , $\gamma(G)$, es el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de G de manera que vértices adyacentes tengan asignado distinto color.

Definición 2.10 El número de clan de G , $\omega(G)$ es la cardinalidad del mayor clan de G .

Definición 2.11 Decimos que G es perfecta si $\gamma(H) = \omega(H)$, $\forall H \subseteq G$.

Observemos que en cualquier gráfica G se tiene que $\gamma(G) \geq \omega(G)$. En la siguiente página se muestran ejemplos de gráficas perfectas y no perfectas. De hecho las gráficas completas y las bipartitas son perfectas.



Definición 2.12 Una digráfica es una pareja $D = (V, F)$, donde V es el conjunto de vértices de D , y $F \subseteq V \times V$ es un conjunto de pares ordenados de vértices distintos. Los elementos de F son conocidos como las flechas de D .

Si $u, v \in V$ forman una flecha de D , decimos que los vértices u y v son adyacentes y denotamos a esta flecha como \vec{uv} . Es común decir que la flecha está orientada desde u o hacia v .

Definición 2.13 $D = (V, F)$ es una orientación de la gráfica $G = (V, E)$, si se obtiene a partir de G orientando cada una de sus aristas de manera arbitraria. Para cada $uv \in E$, ambas flechas \vec{uv} y \vec{vu} se pueden incluir en F . G es llamada la gráfica subyacente de la digráfica D .

De aquí en adelante, cada vez que nos refiramos a una digráfica D , asumiremos que su conjunto de vértices es V , su conjunto de flechas es F , y su gráfica subyacente es $G = (V, E)$, donde $uv \in E$ si y sólo si $\vec{uv} \in F$ o $\vec{vu} \in F$.

Definición 2.14 $H = (V', F')$ es una subdigráfica inducida de D , $H \subseteq D$, si $V' \subseteq V$ y $\forall u, v \in V'$, $\vec{uv} \in F'$ si $\vec{uv} \in F$.

Es claro que si $H \subseteq^* D$, entonces la gráfica subyacente de H es una subgráfica inducida de G .

Si tenemos una digráfica D y $G' \subseteq^* G$, denotamos como $D[G']$ a la restricción de D en la gráfica G y la llamamos la subdigráfica inducida por G' . Del mismo modo si $S \subseteq V$, podemos considerar $G[S]$, la subgráfica de G inducida por S , y entonces denotamos como $D[S]$ a la restricción de D en $G[S]$ y la llamamos la subdigráfica inducida por el conjunto S .

Definición 2.15 Si D es una orientación de la gráfica G , la orientación $D^{-1} = (V, F^{-1})$ es la obtenida al invertir el sentido de las flechas de D , es decir, $\vec{uv} \in F^{-1}$ si y sólo si $\vec{vu} \in F$.

Definición 2.16 $\vec{\gamma} = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ es un ciclo dirigido de la digráfica D si $v_i \in V$, $v_i \neq v_{i+1}$ y $\vec{v_i v_{i+1}} \in F$, $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$. Decimos que $\vec{\gamma}$ es asimétrico si $\vec{v_{i+1} v_i} \notin F \forall i = 0, 1, \dots, n-1$.

En este caso, si podemos hablar de ciclos dirigidos de longitud dos porque podemos tener $\vec{uv} \in F$ y $\vec{vu} \in F$, sin embargo, es costumbre referirse a este tipo de ciclos con el nombre de flechas simétricas, así tenemos que un ciclo dirigido asimétrico tiene longitud al menos tres.

Definición 2.17 Sean D una digráfica, $V' \subseteq V$ y $u \in V - V'$, si existe $v \in V'$ tal que $\vec{uv} \in F$ decimos que V' absorbe a u (o que u es absorbido por V').

Definición 2.18 Un conjunto de vértices $V' \subseteq V$ es absorbente en D , si $\forall u \in V - V'$, V' absorbe a u .

Definición 2.19 $N \subseteq V$ es un núcleo de D , si N es un conjunto independiente y absorbente en D .

Es fácil ver que todo núcleo de una digráfica es un conjunto independiente maximal de su gráfica subyacente.

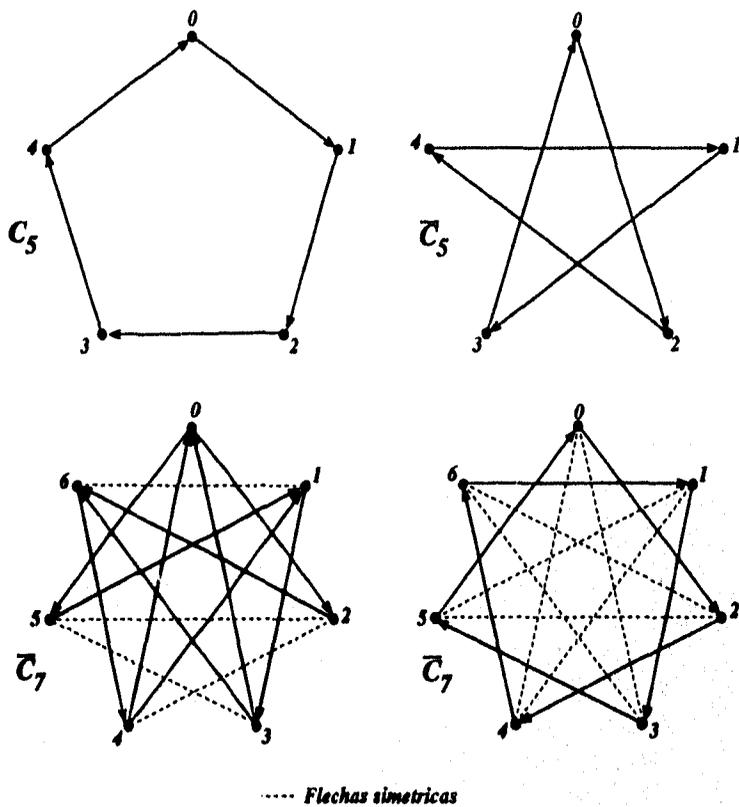
Definición 2.20 D es núcleo perfecta si $\forall H \subseteq^* D$, H tiene núcleo.

Definición 2.21 Un vértice $v \in V$ de la digráfica D , es un emisor si $\forall u \in V$, adyacente a v , se tiene que $\vec{vu} \in F$. Análogamente, decimos que v es un receptor si $\forall u \in V$, adyacente a v , se tiene que $\vec{uv} \in F$.

Definición 2.22 Una orientación normal de G es una orientación D en la que para toda C , subgráfica completa de G , $D[C]$ tiene un vértice receptor.

Notemos que en una orientación de una gráfica completa un receptor es precisamente un núcleo.

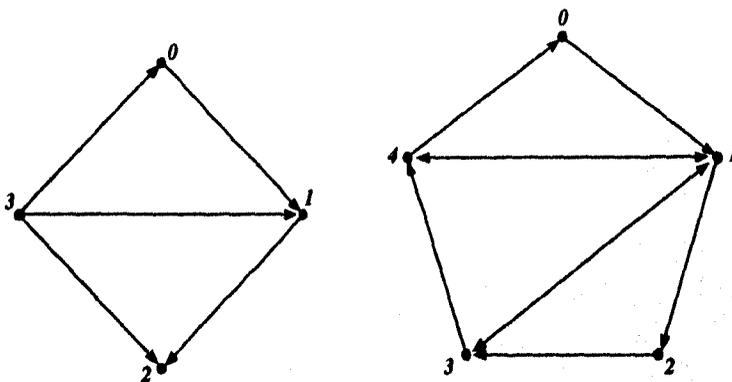
Las siguientes son dos orientaciones normales de C_5 y \overline{C}_5 y dos orientaciones normales distintas de \overline{C}_7 .



Definición 2.23 Una gráfica G es núcleo soluble (o núcleo perfecta) si toda orientación normal de ella es núcleo perfecta.

Definición 2.24 Una orientación D de G es llamada acíclica por completas si para todo $\vec{\gamma}$ ciclo dirigido asimétrico en D , se tiene que $G[V(\vec{\gamma})]$ no es completa en G .

Los árboles, las gráficas bipartitas y los ciclos de longitud > 3 son ejemplos de gráficas en las que cualquier orientación es acíclica por completas. Otros ejemplos de orientaciones de este tipo son los siguientes:



Observemos que en particular, las orientaciones acíclicas por completas no contienen ciclos dirigidos asimétricos de longitud 3.

Con este concepto podemos establecer la siguiente equivalencia:

Teorema 2.1 Sea D una orientación de G , D es normal si y sólo si es acíclica por completas.

Demostración. Supongamos primero que D es una orientación normal pero no acíclica por completas, entonces existe un ciclo dirigido asimétrico $\vec{\gamma} = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ en D tal que $G[V(\vec{\gamma})]$ es una completa en G . Como D es normal, existe $v_j \in V(\vec{\gamma})$ que es núcleo de $D[\vec{\gamma}]$, es decir, $\overrightarrow{v_i v_j} \in F \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} - \{j\}$, en particular $\overrightarrow{v_{j+1} v_j} \in F$, pero esto contradice el hecho de que $\vec{\gamma}$ es asimétrico.

Recíprocamente, si D es acíclica por completas consideremos C una completa en G . Si $|V(C)| < 3$, es inmediato que $D[C]$ tiene núcleo. Supongamos entonces que $|V(C)| \geq 3$ y $D[C]$ no tiene núcleo. Tomemos un vértice cualquiera de $V(C)$, llamémosle v_0 . Como $\{v_0\}$ no es núcleo, existe $v_1 \in V(C)$, que no es absorbido por él, esto es $\overrightarrow{v_0 v_1} \in F$, y es asimétrica, $\{v_1\}$ tampoco es núcleo, entonces existe $v_2 \in V(C)$, $v_2 \neq v_0$ que no es absorbido por $\{v_1\}$, es decir, $\overrightarrow{v_1 v_2} \in F$, y es asimétrica, $\{v_2\}$ no es núcleo, entonces existe $v_3 \in V(C)$ que no es absorbido por $\{v_2\}$, continuando así, ya que $V(C)$ es finito, existe un primer vértice $v_n = v_0$ con lo que obtenemos un ciclo dirigido asimétrico $\vec{\gamma} = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$. Como $G[V(\vec{\gamma})]$ es una completa en G , esto contradice el hecho de que D sea acíclica por completas. \diamond

A menudo usaremos la siguiente caracterización de las gráficas perfectas.

Teorema 2.2 *G es una gráfica perfecta si y sólo si $\forall H \subseteq^* G$ contiene un conjunto independiente I_H , tal que $I_H \cap Q_H \neq \emptyset$, $\forall Q_H$ clan de cardinalidad máxima en H .*

Demostración. Supongamos que G es perfecta y consideremos $H \subseteq^* G$. Sabemos que $\gamma(H) = \omega(H)$. En cualquier coloración de V con $\gamma(H)$ colores un subconjunto de vértices del mismo color constituye un conjunto independiente en H porque vértices adyacentes no tienen asociados colores iguales. Cada uno de estos conjuntos interseca a todos los clanes de cardinalidad máxima de H , ya que estos clanes se colorean con $\omega(H)$ colores.

Para el recíproco, consideremos nuevamente $H \subseteq^* G$. Es suficiente con demostrar que $\gamma(H) \leq \omega(H)$. Sabemos que $\exists I_H \subseteq V(H)$ conjunto independiente tal que $I_H \cap Q_H \neq \emptyset$, $\forall Q_H$ clan de cardinalidad máxima en H . Asociemos a los vértices de I_H el color 1. Observemos que en cada clan de cardinalidad máxima de H habrá exactamente un vértice de tal color. Ahora consideremos $G[V(H) - I_H]$, esta también es una subgráfica inducida de G y por tanto también contiene un conjunto independiente que interseca a todos los clanes de cardinalidad máxima de ella. Asociemos a este conjunto el color 2. Aquí también

cada clan de cardinalidad máxima tendrá exactamente un vértice de color 2. Continuando de este modo, habremos coloreado bien todos los vértices de G (es decir, de manera que vértices adyacentes tengan asociados distintos colores) con exactamente $\omega(H)$ colores. Con lo que $\gamma(H) \leq \omega(H)$. \diamond

Definición 2.25 Sean $G = (V_G, E_G)$ y $H = (V_H, E_H)$ dos gráficas ajenas por vértices y v un vértice de G . La **sustitución de v por H** , es la gráfica obtenida de sustituir v por H y además agregar las aristas $uz \forall u \in V_H, \forall z \in V_G$ tales que $vz \in E_G$.

En [16] Lovász, demuestra que al sustituir, en una gráfica perfecta un vértice por una gráfica perfecta, la gráfica obtenida es también perfecta. Con este hecho y el teorema 2.2, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.3 Sean G una gráfica y $f : V \rightarrow \mathbb{Z}^+$, si G es perfecta, entonces existe $S \subseteq V$ independiente, tal que $S \cap C \neq \emptyset \forall C$ clan de peso máximo de G .

Demostración. Un clan C es de peso máximo si $\sum_{v \in C} f(v)$ es máxima. Consideremos la gráfica $G' = (V', E')$, obtenida de sustituir todo $v \in V$ por $K_{f(v)}$. Si $f(v) = 0$, v simplemente se elimina en

G' . Si C es un clan de peso α en G , entonces C' , el correspondiente clan en G' después de la sustitución, tiene cardinalidad α . Así, los clanes de peso máximo en G son clanes de cardinalidad máxima en G' . Por [16], sabemos que G' es perfecta, ya que G y $K_{f(v)}$ lo son. Entonces, existe S' un independiente de G' tal que $S' \cap C' \neq \emptyset \forall C'$ clan de cardinalidad máxima de G' . Sea $S \subseteq V$ el conjunto siguiente: $S = \{v \in V \mid \exists x \in S' \text{ tal que } x \in K_{f(v)}\}$. Claramente S es un conjunto independiente en G , porque S' lo es y vértices no adyacentes en G' provienen de vértices no adyacentes en G . Luego, como S' interseca a todos los clanes de cardinalidad máxima de G' , el conjunto S , interseca a todos los clanes de peso máximo de G . \diamond

3 Algunos resultados en torno a la Conjetura BD.

Observemos lo siguiente: Si D es una digráfica núcleo perfecta, entonces D es una orientación normal de su gráfica subyacente G . C. Berge y P. Duchet han estudiado aquellas gráficas en las que el recíproco de esta afirmación se cumple, es decir aquellas en las que cualquier orientación normal resulta ser núcleo perfecta (o sea las núcleo solubles). Cuando ellos proponen la conjetura BD, suponen que ésta podría constituir un puente entre la CFGP y la Teoría de Núcleos. En [5], ellos demuestran los siguientes resultados:

Proposición 3.1 *La gráfica C_{2k+1} , con $k \geq 2$, no es núcleo soluble.*

Demostración. Sea $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2k+1} = v_0\}$ el conjunto de vértices de C_{2k+1} . Si lo orientamos como un ciclo dirigido asimétrico, ésta es claramente una orientación normal D . Demostraremos que D no tiene núcleo. Efectivamente, salvo simetrías, el único conjunto independiente maximal de V es $\{v_0, v_2, v_4, \dots, v_{2k-2}\}$ que no absorbe a v_{2k-1} . \diamond

Proposición 3.2 *La gráfica \overline{C}_{2k+1} , con $k \geq 2$, no es núcleo soluble.*

Demostración. Sea $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2k+1} = v_0\}$ el conjunto de vértices de \overline{C}_{2k+1} . Asociémosle una orientación de la manera siguiente:

$\overrightarrow{v_i v_j}$ si $j \neq i - 2, i + 2$; (todas las sumas *mod* $2k + 1$)

$\overrightarrow{v_i v_j}$ si $j = i + 2$

Esta es una orientación normal de \overline{C}_{2k+1} . Efectivamente, sea K una subgráfica completa, como \overline{C}_{2k+1} no es completa, entonces existe $v_i \in V(K)$ tal que $v_{i+2} \notin V(K)$, en la orientación propuesta $\{v_i\}$ es un receptor de K . Ahora veamos, los únicos conjuntos independientes maximales son $\{v_i, v_{i+1}\}$ y por tanto son los únicos "candidatos a núcleos" de esta orientación, sin embargo, ninguno de ellos absorbe al vértice v_{i+2} , con lo que ésta es una orientación que no es núcleo perfecta. \diamond

Proposición 3.3 *Todas las subgráficas inducidas de una gráfica núcleo soluble, son también núcleo solubles.*

Demostración. Sean G una gráfica núcleo soluble, $H \subseteq^* G$ y $D[H]$ una orientación normal de H . Basta con mostrar que $D[H]$ tiene núcleo. Consideremos una extensión D de la orientación $D[H]$ a toda

G orientando las aristas en $G[V - V(H)]$ simétricamente y las demás asimétricamente hacia el vértice respectivo de H . Es fácil ver que D es una orientación normal de G . Como G es núcleo soluble, existe $N \subset V$ un núcleo de D . Claramente $N \cap V(H)$ es un núcleo de $D[H]$. \diamond

Las tres anteriores proposiciones muestran que una gráfica núcleo soluble no tiene como subgráficas inducidas C_{2k+1} , ni \overline{C}_{2k+1} con $k \geq 2$, este hecho nos permite notar que el recíproco del Teorema 1.1:

() Las gráficas núcleo solubles son perfectas*

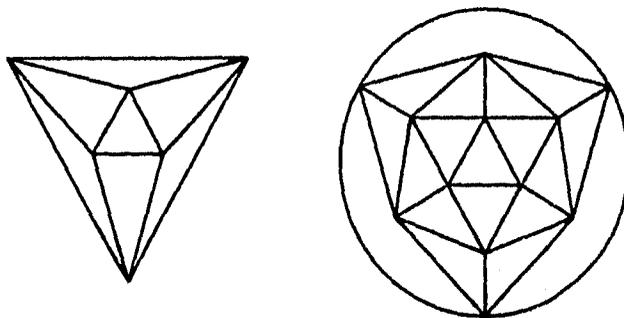
sería una consecuencia inmediata del de la CFGP. Desde la aparición de la Conjetura BD, se ha hecho mucho trabajo en torno a ella, la mayor parte de éste ha sido encaminado a mostrar su validez para ciertas familias de gráficas, aunque también ha motivado la aparición de nuevas definiciones de solubilidad y de otras conjeturas afines a ella [4].

A continuación se exponen algunos de los resultados más significativos obtenidos hasta ahora. Primeramente expondremos aquellos que muestran algunas familias conocidas de gráficas perfectas que también son núcleo solubles. Posteriormente aparecen los que demuestran la validez del resultado recíproco (*) para ciertos tipos de gráficas.

Definición 3.1 Sea $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ un ciclo de G , una cuerda de γ es una arista $v_i v_j \in E$, tal que los vértices v_i y v_j no son consecutivos en γ .

Definición 3.2 G es cordal (o triangulada), si todo ciclo de ella tiene una cuerda.

Ejemplos:



Definición 3.3 (Gallai) G es *i*-triangulada si todo ciclo impar de G tiene dos cuerdas que no se cruzan.

Tanto las cordales como las *i*-trianguladas son gráficas perfectas. Maffray ha demostrado en [18] y [19] que ambas familias son núcleo solubles. Ahí, él prueba también la núcleo solubilidad de las gráficas perfectas que no tienen como subgráficas inducidas a $K_{1,3}$ o a $K_4 - \{e\}$ (la completa de cuatro vértices menos una arista).

Definición 3.4 *G es una gráfica fuertemente perfecta, si toda subgráfica inducida contiene un conjunto independiente que intersecta a todos sus clanes.*

Del teorema 2.2 es inmediato que las gráficas fuertemente perfectas son perfectas. En [6], Blidia, Duchet, y Maffray, demuestran el siguiente teorema:

Teorema 3.1 *(M. Blidia, P.Duchet, F. Maffray, [6]) Los complementos de las gráficas fuertemente perfectas son núcleo solubles.*

Aunque el Teorema 1.1 generaliza estos resultados, incluiremos aquí la demostración de este último teorema por su sencillez y belleza. La prueba está basada en el siguiente resultado.

Lema 3.1 *Si D es una orientación normal de G entonces toda subgráfica completa de G contiene un emisor y por tanto D^{-1} es también una orientación normal de G .*

Demostración. Sea K una subgráfica completa de G y v_1 su vértice receptor. $G[V(K) - \{v_1\}]$ también es una subgráfica completa de G por lo que tiene un receptor v_2 . Continuando este proceso terminamos con un vértice $v_{|K|}$ que es emisor en K . \diamond

He aquí la demostración del Teorema 3.1:

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre la cardinalidad de V . Para gráficas pequeñas, el teorema se cumple trivialmente. Como hipótesis de inducción supongamos que el teorema es válido para gráficas en las que $|V| < k$.

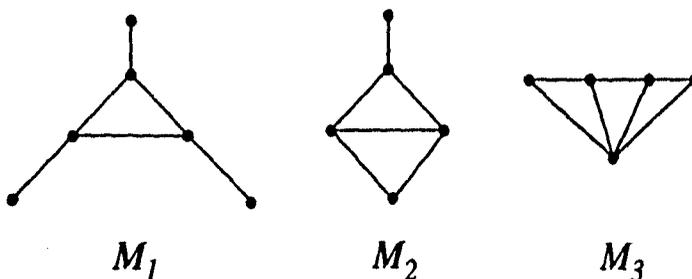
Sea $G = (V, E)$ una gráfica tal que \vec{G} es fuertemente perfecta y $|V| = k$, sea $D = (V, F)$ una orientación normal de ella, bastará mostrar que D tiene núcleo. Como \vec{G} es fuertemente perfecta, contiene un conjunto independiente que intersecta a todo clan de \vec{G} , esto implica que en G existe una subgráfica completa C que intersecta a todos los independientes maximales de G . Del lema anterior sabemos que $D[C]$ tiene un vértice emisor a . La digráfica $D' = D[V - \{a\}]$ es una orientación normal de la gráfica $G' = G[V - \{a\}]$, y por hipótesis de inducción ésta es núcleo soluble, entonces existe $N \subseteq V - \{a\}$ que es núcleo de D' .

Si N intersecta a $V(C) - \{a\}$, entonces N también es núcleo de D , ya que $\vec{a}v \in F, \forall v \in V(C)$. De otro modo se tiene que N no es un independiente maximal de G , pero sí de G' por lo que $N \cup \{a\}$, es independiente maximal de G y también núcleo de D . \diamond

Presentaremos ahora los resultados que demuestran la validez del recíproco del Teorema 1.1, (*) para algunas clases de gráficas. Cabe

recordar, que la afirmación (*), es aún un problema abierto.

Definición 3.5 Una gráfica \mathcal{M} -libre es aquella que no contiene como subgráficas inducidas las siguientes:

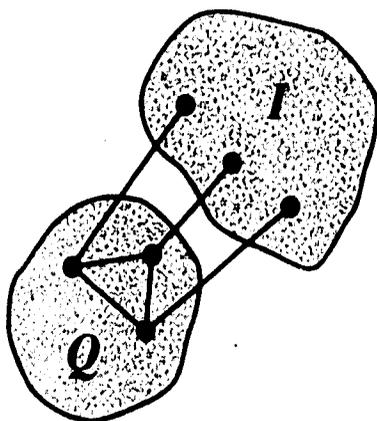


En [13] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, demuestran mediante los resultados siguientes, que las gráficas \mathcal{M} -libres cumplen (*).

Teorema 3.2 Sea G una gráfica \mathcal{M} -libre entonces todo conjunto independiente maximal de G , intersecta a todo clan de cardinalidad ≥ 3 .

Demostración. Supongamos que el teorema no es válido, entonces si G es una gráfica \mathcal{M} -libre, podemos encontrar un conjunto independiente maximal I y un clan Q de cardinalidad ≥ 3 , tales que $I \cap Q = \emptyset$. Ya que I es maximal, cada vértice de Q es adyacente al menos a un

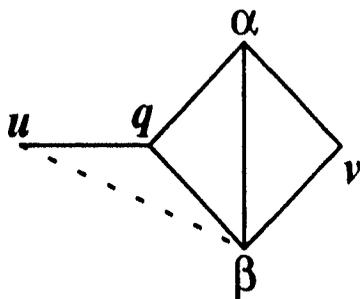
vértice de I , supongamos que cada vértice de I es adyacente a lo más a un vértice de Q . Como $|V(Q)| \geq 3$, entonces Q contiene un triángulo en el que cada uno de sus vértices es adyacente a un vértice distinto de I , con lo que tenemos que G tiene inducida M_1 , contradiciendo el hecho de que sea \mathcal{M} -libre.



Existe entonces, un vértice en I que es adyacente a k vértices de Q , $2 \leq k < |V(Q)|$. Demostraremos que esta propiedad implica la existencia de un vértice en I adyacente a $k + 1$ vértices.

Sean $v \in I$ y $Q' \subseteq Q$, tales que v es adyacente a todos los vértices de Q' y $|V(Q')| = k$. Consideremos ahora $q \in V(Q) - V(Q')$ y $u \in I$ adyacente a q . Si $u = v$ ya terminamos. Supongamos que existe $\alpha \in V(Q')$ un vértice que no es adyacente a u y tomemos $\beta \in V(Q')$

otro vértice cualquiera de Q' . Sea G' la subgráfica inducida por los vértices $\{\alpha, \beta, q, u, v\}$. Si u no es adyacente a β , G' es M_2 y si u es adyacente a β entonces $G' = M_3$. Esto no es posible.



Así, se tiene que u es adyacente a todos los vértices de Q' y a q , con lo cual resulta ser adyacente a $k + 1$ vértices de Q . Esto significa que existe en I un vértice que es adyacente a todos los vértices de Q , contradiciendo el hecho de que Q sea clan. \diamond

Corolario 3.1 G es una gráfica \mathcal{M} -libre si y sólo si $\forall H \subseteq^* G$ se tiene que todo conjunto independiente maximal de H , interseca a todo clan de cardinalidad ≥ 3 de H .

Demostración. Es inmediato del teorema anterior y del hecho de que en M_i , existe un independiente maximal I_i y un clan Q_i de cardinalidad ≥ 3 , tales que $I_i \cap Q_i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3$. \diamond

Corolario 3.2 *Las gráficas \mathcal{M} -libres satisfacen la CFGP.*

Demostración. Sean G una gráfica \mathcal{M} -libre, sin ciclos inducidos de longitud impar ≥ 5 y $H \subseteq^* G$. Si H no contiene triángulos entonces es bipartita y por lo tanto perfecta. Si H contiene triángulos, del corolario anterior y del teorema 2.2 se sigue inmediatamente que G es perfecta. \diamond

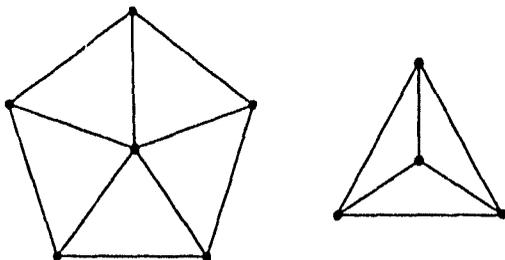
Teorema 3.3 *Sea G una gráfica \mathcal{M} -libre, si G es núcleo soluble entonces es perfecta.*

Demostración. Si G es núcleo soluble, entonces por las proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3, no contiene como subgráficas inducidas C_{2k+1} , ni \bar{C}_{2k+1} con $k \geq 2$, y como las \mathcal{M} -libres cumplen la CFGP, entonces G es perfecta. \diamond

En [11] y [12] H. Galeana-Sánchez, demuestra que las gráficas fraternalmente orientables también satisfacen la afirmación (*).

Definición 3.6 (D. J. Skrien) *Una digráfica $D = (V, F)$ es una orientación fraternal de su gráfica subyacente, si siempre que $\vec{uv} \in F$ y $\vec{wv} \in F$ entonces $\vec{uw} \in F$ o $\vec{wu} \in F$. G es fraternalmente orientable si admite una orientación fraternal.*

Ejemplos:



Teorema 3.4 Sea G una gráfica fraternalmente orientable, si G es núcleo soluble entonces es perfecta.

Demostración. Demostraremos que \overline{G} es perfecta, así por el teorema de Lovász G también lo es. Sea $H \subseteq^* \overline{G}$ probaremos que $\gamma(H) = \omega(H)$. Consideremos $D = (V, F)$ una orientación normal de G y sea $D' = D[V(H)]$, como G es núcleo soluble existe $N = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V(H)$ un núcleo de D' . Asociamos a $V(H)$ una coloración de n colores como sigue: a cada $v_i \in N$ le asignamos el color i y $\forall u \notin N$ asociamos el color $\min\{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \overrightarrow{uv_j} \in F(D')\}$.

Sean $u, w \in V(H)$. Si u y w tienen asignado el mismo color, entonces no son adyacentes en H . Para demostrar esta afirmación analicemos los dos casos posibles:

- (a) $u \in N, w \notin N$. Entonces $u = v_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y tiene asociado el color i . Como w también tiene asociado el mismo color se tiene que $\overrightarrow{wu} \in F(D')$, es decir, w y u son adyacentes en G y por tanto no son adyacentes en H .
- (b) $u \notin N, w \notin N$. Ya que ambos tienen asociado el color i entonces $\overrightarrow{wu}, \overrightarrow{uw} \in F(D')$ y como G es fraternalmente orientable tenemos que w y u son adyacentes en G y por tanto no son adyacentes en H .

De este hecho se tiene que $\gamma(H) \leq n$. $G[N]$ es una completa en H con n vértices, por lo que $\omega(H) \geq n$, y como para toda gráfica G' se tiene que $\gamma(G') \geq \omega(G')$, entonces $n \leq \omega(H) \leq \gamma(H) \leq n$, por lo tanto $\gamma(H) = \omega(H)$, y así \overline{G} es perfecta. \diamond

En [17], Maffray demuestra que las gráficas de líneas también cumplen la afirmación (*).

Definición 3.7 *La gráfica de líneas $L(H)$, de una gráfica H , es la gráfica cuyos vértices representan las aristas de H , y en la que dos vértices son adyacentes si y sólo si corresponden a dos aristas incidentes en H .*

Su demostración se basa en el resultado siguiente:

Teorema 3.5 (Trotter, [24]) *Sea G la gráfica de líneas de H , G es perfecta si y sólo si H no contiene ciclos impares de longitud ≥ 5 .*

Teorema 3.6 (Maffray, [17]) *Sea G la gráfica de líneas de una gráfica H , si G es núcleo soluble entonces es perfecta.*

Demostración. Sabemos que por ser núcleo soluble, G no contiene como subgráficas inducidas ciclos impares de longitud ≥ 5 . De aquí es inmediato que tampoco H los tiene (si H tuviera un ciclo impar de longitud ≥ 5 , éste genera un ciclo igual en su gráfica de líneas). Así, de la caracterización de Trotter se concluye que G es perfecta. \diamond

4 Definiciones de Teoría de Juegos

En lo sucesivo, consideraremos dos conjuntos finitos I y A a los que llamaremos respectivamente **el conjunto de jugadores** y **el conjunto de resultados**. Cada jugador $i \in I$ tiene asociado un **conjunto de estrategias** X_i . Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$, cada $x \in X$, representa una posible combinación de estrategias de los jugadores de I , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n = |I|$.

Consideremos también dos funciones $g : X \rightarrow A$, y $u : I \times A \rightarrow \mathcal{R}$. A la primera le llamaremos la **función de juego** y a la segunda la **utilidad**. La función g es suprayectiva pero no necesariamente inyectiva.

La función de juego asocia un resultado para cada posible combinación de estrategias de los jugadores; la utilidad (o pago), describe el *valor* de un resultado para un jugador determinado.

Observemos que para cada $a \in A$, la función u determina un vector $x \in \mathcal{R}^n : x = (u(i_1, a), u(i_2, a), \dots, u(i_n, a))$, $i_j \in I$, $j = 1, \dots, n$; este es un **vector de utilidad**.

Definición 4.1 La cuarteta $\Gamma = (I, A, X, g)$ es una **forma de juego**, y la quinteta $\Gamma' = (I, A, X, g, u)$ es un **juego en forma normal**.

Los subconjuntos de jugadores son llamados **coaliciones** y los subconjuntos de resultados son llamados **bloques**.

Definición 4.2 Una coalición $K \subseteq I$ es efectiva para un bloque $B \subseteq A$, si los jugadores de K pueden garantizar que el resultado del juego pertenezca a B .

Que K garantice un resultado en B significa que los jugadores de K pueden obtener tal resultado a pesar de las estrategias tomadas por los jugadores de $I - K$.

Definición 4.3 Sea $\varepsilon : 2^I \times 2^A \rightarrow \{0, 1\}$, tal que $\varepsilon(K, B) = 1$ si K es efectiva para el bloque B y $\varepsilon(K, B) = 0$ en otro caso. Llamamos a ε una función de efectividad.

Definición 4.4 La cuarteta $\Omega = \{I, A, \varepsilon, u\}$ es un juego en forma de función de efectividad.

Una función de efectividad ε puede también ser especificada listando explícitamente todos los pares de coaliciones K y bloques B para los cuales K es efectiva para B . Recíprocamente, dada una lista $T = \{(K_j, B_j)\}_{j \in J}$, (J es un conjunto finito de índices), $K_j \subseteq I$, $B_j \subseteq A$ para cada $j \in J$, ε_T denota la función de efectividad co-

respondiente a T de la manera siguiente: $\varepsilon_T(K, B) = 1$ si y sólo si $(K, B) = (K_j, B_j)$ para alguna $j \in J$.

Es evidente que toda forma de juego $\Gamma = \{I, A, X, g\}$, define de manera única una función de efectividad, denotada por ε_Γ y en la que $\varepsilon_\Gamma(K, B) = 1$ si y sólo si existen las estrategias $y_i \in X_i \forall i \in K$, de tal manera que $\forall x \in X, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $x_i = y_i, \forall i \in K$, se tiene que $g(x) \in B$.

Dados los conjuntos I y A cualquier función booleana $\varepsilon : 2^I \times 2^A \rightarrow \{0, 1\}$, puede ser considerada como una función de efectividad, sin embargo, no todas las funciones de efectividad provienen de formas de juego. El siguiente teorema caracteriza aquellas funciones de efectividad que corresponden a formas de juego.

Teorema 4.1 (Moulin & Peleg, [20]) *Una función booleana $\varepsilon : 2^I \times 2^A \rightarrow \{0, 1\}$, es la función de efectividad de una forma de juego Γ si y sólo si ε satisface las siguientes condiciones:*

• **Monotonía:**

Si $K \subseteq K' \subseteq I, B \subseteq B' \subseteq A$ y $\varepsilon(K, B) = 1$,

entonces $\varepsilon(K', B') = 1$

• **Superaditividad:**

Si $\varepsilon(K_1, B_1) = 1$, $\varepsilon(K_2, B_2) = 1$ y $K_1 \cap K_2 = \emptyset$,

entonces $\varepsilon(K_1 \cup K_2, B_1 \cap B_2) = 1$

• **Condiciones de frontera:**

$\varepsilon(I, B) = 1$, $\forall B \neq \emptyset$; $\varepsilon(I, \emptyset) = 0$ y

$\varepsilon(K, A) = 1$, $\forall K \neq \emptyset$; $\varepsilon(\emptyset, A) = 0$

Demostración. Supongamos primeramente que ε es la función de efectividad del juego $\Gamma = \{I, A, X, g\}$ y sean $K \subseteq I$, $B \subseteq A$ tales que $\varepsilon(K, B) = 1$, entonces existen las estrategias $y_i \in X$, $\forall i \in K$, tales que $g(x) \in B$, $\forall x \in X$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $x_i = y_i$, $\forall i \in K$.

Si tenemos que $K \subseteq K' \subseteq I$ y $B \subseteq B' \subseteq A$, consideramos $x \in X$, tal que $x_i = y_i$, $\forall i \in K$, es decir, mantenemos las mismas estrategias para los jugadores de K y para los de $K' - K$ cualquier estrategia. Es claro que $g(x) \in B \subseteq B'$ y por tanto $\varepsilon(K', B') = 1$, con lo cual queda demostrada la monotonía de ε .

Ahora, si $\varepsilon(K_1, B_1) = 1$, $\varepsilon(K_2, B_2) = 1$ y $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, de la monotonía tenemos que $\varepsilon(K_1 \cup K_2, B_1) = 1$ y $\varepsilon(K_1 \cup K_2, B_2) = 1$, es decir, para la coalición $K_1 \cup K_2$ existen las estrategias que garantizan simultáneamente un resultado en B_1 y en B_2 , de donde es inmediato que $\varepsilon(K_1 \cup K_2, B_1 \cap B_2) = 1$ y además $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Así queda de-

mostrada la superaditividad.

Las condiciones de frontera son inmediatamente establecidas del hecho de que g es una función bien definida y suprayectiva.

Recíprocamente, si lo que tenemos dado es una función $\varepsilon : 2^I \times 2^A \rightarrow \{0, 1\}$, podemos construir $\Gamma = \{I, A, X, g\}$, una forma de juego tal que $\varepsilon_\Gamma = \varepsilon$, mediante el procedimiento siguiente:

Sean $i \in I$, y $\Sigma^i = \{K \subseteq I \mid i \in K\}$, asociamos a i el conjunto $X_i = \{f : \Sigma^i \rightarrow 2^A \mid \varepsilon(K, f(K)) = 1, \forall K \in \Sigma^i\}$, X_i es el conjunto de estrategias del jugador i . Observemos que $X_i \neq \emptyset$ para cualquier jugador, ya que $I \in \Sigma^i \forall i \in I$.

Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$, entonces si $x \in X$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, cada x_i , representa una función de Σ^i en 2^A . Si tenemos $x \in X$ y $K \subseteq I$, asociamos a la pareja (K, x) una partición de K a la que denotamos $Q(K, x)$ y que es inducida por la siguiente relación de equivalencia:

$$\forall i, j \in K, i \sim j \Leftrightarrow x_i(K) = x_j(K)$$

Definamos ahora la función de juego $g : X \rightarrow A$. Sea $x \in X$, consideremos una sucesión de particiones de I de la siguiente manera: iniciemos con $P_0 = \{I\}$ y continuemos inductivamente, si $P_r = \{K_1, \dots, K_m\}$, entonces $P_{r+1} = \{Q(K_1, x), \dots, Q(K_m, x)\}$.

Como I es finito, existe una primera partición P_h tal que $P_h = P_{h+1}$. Esta es la partición asociada a x y la denotamos como $P(x)$. Si $P(x) = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ y tomamos $K_r \in P(x)$, $1 \leq r \leq m$, se tiene que $x_i(K_r) = x_j(K_r) \forall i, j \in K_r$, así, podemos asociar a cada coalición $K \in P(x)$ exactamente un bloque al que denotaremos como $B(K)$, y se cumple que $\varepsilon(K, B(K)) = 1$. Además, como todas las coaliciones de $P(x)$ son ajenas entre sí, ε es superaditiva y cumple las condiciones de frontera, tenemos entonces que

$$\bigcap_{i=1}^m B(K_i) \neq \emptyset$$

Consideremos ahora una función $\rho : 2^A \rightarrow A$ tal que $\rho(B) \in B \forall B \in 2^A$. Sea $B_0 = \bigcap_{i=1}^m B(K_i)$ y definamos $g(x) = \rho(B_0)$.

Sólo falta demostrar que Γ así definido, es el juego que queremos.

Sean $K \subseteq I$ y $B \subseteq A$ tales que $\varepsilon(K, B) = 1$ y sea $x \in X$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $\forall K' \supset K$ y $\forall i \in K$, se tiene que $x_i(K') = B$. Consideremos $P(x) = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$, la partición asociada a x como se construyó anteriormente, entonces existe una coalición $K_t \in P(x)$, tal que $K_t \supset K$ y por la elección de x se tiene que $x_i(K_t) = B$, entonces $B \supset \bigcap_{i=1}^m B(K_i)$ y por tanto $g(x) \in B$, es decir, $\varepsilon_\Gamma(K, B) = 1$.

Ahora tomemos $K \subseteq I$ y $B \subseteq A$ tales que $\varepsilon(K, B) = 0$. Demuestra-

remos que $\varepsilon_{\Gamma}(K, B) = 0$. Si esto no fuera así, entonces K garantiza un resultado en B , es decir $\exists x \in X$ tal que $g(x) \in B$. Sea $P(x)$ como antes, obtenemos así una partición de K , $P_K = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_s\}$ donde, $\forall i, j \in Q_l$, se tiene que $x_i(Q_l) = x_j(Q_l) = B_l \subseteq A$, $\forall l = 1, \dots, s$. Tenemos también una colección de bloques B_1, B_2, \dots, B_s tales que $\varepsilon(Q_i, B_i) = 1$, $\forall i = 1, \dots, s$ y entonces de la monotonía por coaliciones de ε , $\varepsilon(K, B_i) = 1$ también. De aquí, $B' = \bigcap_{i=1}^s B_i \neq \emptyset$ y así por la superaditividad de ε se tiene que $\varepsilon(K, B') = 1$, pero $B' \subseteq B$, con lo que por la monotonía por bloques de ε , se tiene que $\varepsilon(K, B) = 1$, lo cual es una contradicción. \diamond

Consideremos ahora el juego $\Omega = \{I, A, \varepsilon, u\}$. Decimos que la coalición $K \subseteq I$ puede rechazar un resultado $a \in A$, si existe $B \subseteq A$ tal que $\varepsilon(K, B) = 1$ y $u(i, b) > u(i, a)$, $\forall i \in K, \forall b \in B$. Es decir, K puede rechazar al resultado a , si existe un bloque para el cual K es efectiva, y todo resultado que pertenece a él, es mejor que el resultado a para todos los jugadores de K .

Definición 4.5 *Definimos,*

$$R(K, B) = \{a \in A \mid u(i, b) > u(i, a), \quad \forall i \in K, \forall b \in B\},$$

al conjunto de resultados que K puede rechazar mediante B .

El conjunto de resultados que no pueden ser rechazados por ninguna

coalición mediante bloques efectivos, es llamado el centro. Como es evidente, este conjunto está determinado por las funciones de efectividad y utilidad que se estén considerando y puede ser definido como sigue:

$$C(\varepsilon, u) = A - \bigcup_{\varepsilon(K, B)=1} R(K, B)$$

Definición 4.6 Decimos que una función de efectividad ε es estable si $C(\varepsilon, u) \neq \emptyset \forall u : I \times A \rightarrow \mathcal{R}$.

Ejemplo 4.1 Sea $\mathcal{O} \subseteq I, \mathcal{O} \neq \emptyset$ y consideremos el juego en el que las coaliciones ganadoras son aquellas $K \subseteq I$ tales que $K \supseteq \mathcal{O}$. La función de efectividad, ε , inducida por este juego, es: $\varepsilon(K, B) = 1 \forall K \supseteq \mathcal{O}, B \neq \emptyset$, es decir, \mathcal{O} y sus extensiones, son efectivas con cualquier bloque no vacío. Afirmamos que ε es estable. Efectivamente, el resultado $a \in A$ puede ser rechazado si existe $b \in A$ estrictamente mejor para todos los jugadores de \mathcal{O} . El conjunto \mathcal{O} , es conocido como "la oligarquía". De esta manera, el centro del juego se compone de todos aquellos resultados que la oligarquía prefiere.

El siguiente es un ejemplo en el que ε no es estable.

Ejemplo 4.2 Consideremos tres jugadores y tres posibles resultados: $I = \{1, 2, 3\}, A = \{x, y, z\}$. La función de efectividad ε , es la inducida por el juego en el cual ganan las coaliciones de tamaño mayor

o igual que dos. Así, $\varepsilon(K, B) = 1 \quad \forall B \subseteq A, \quad B \neq \emptyset$ y K coalición ganadora. Podemos definir una función de utilidad cíclica para este juego, es decir $u : I \times A \rightarrow \mathcal{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} u(1, x) &> u(1, y) > u(1, z); \\ u(2, y) &> u(2, z) > u(2, x); \\ u(3, z) &> u(3, x) > u(3, y) \end{aligned}$$

De esta manera, es claro que $C(\varepsilon, u) = \emptyset$, ya que cualquier resultado puede ser rechazado por alguna coalición. Por ejemplo, el resultado x puede rechazarse por la coalición $\{2, 3\}$, ya que $\varepsilon(\{2, 3\}, \{x\}) = 1$, $u(2, z) > u(2, x)$ y $u(3, z) > u(3, x)$. Análogamente, se tiene que y puede ser rechazado por la coalición $\{1, 3\}$ y z por $\{1, 2\}$. Con lo cual ε no es estable.

El concepto de centro, fue originalmente definido para juegos n -personales. En [23], Scarf estudia las condiciones necesarias para que un juego tenga centro no vacío. Danilov y Sotskov establecen en [9] un resultado análogo para las funciones de efectividad, y en él se basa la demostración que presentaremos aquí. Este resultado utiliza, de hecho, el resultado de Scarf por lo que enseguida mostramos, a grandes rasgos, en que consiste su trabajo.

Primeramente, introduzcamos el concepto de juego n -personal utilizado por Scarf en [23]. Nuevamente partimos de los conjuntos I de

n jugadores, y A de resultados, aunque en este caso tanto los resultados como la función de juego son irrelevantes. Consideraremos el conjunto $V_I \subseteq \mathcal{R}^n$, de todos los vectores de utilidad que los jugadores de I pueden obtener, y de forma análoga, asociamos a cada coalición $K \subseteq I$, el conjunto $V_K \subseteq \mathcal{R}^k$, $k = |K|$, que formalmente queda definido como:

$$\{x \in \mathcal{R}^k \mid x = (x_1, \dots, x_k), x_j = u(i_j, a) \text{ para algún } i_j \in K \text{ y } a \in A\}.$$

Scarf afirma que estos conjuntos cumplen las siguientes condiciones:

1. $\forall K \subseteq I$, V_K es un conjunto cerrado.
2. Si $x \in V_K$, $y \in \mathcal{R}^k$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ y si $y_j \leq x_j \forall j = 1, \dots, k$, entonces $y \in V_K$.
3. El conjunto de vectores de \mathcal{R}^k en el cual cada jugador recibe no menos del máximo de la utilidad que el puede obtener por sí mismo, es un conjunto no vacío y acotado.

El juego queda definido por la colección $V = \{V_K\}_{K \subseteq I}$. Si $x \in \mathcal{R}^n$, denotaremos como x_K a su proyección sobre \mathcal{R}^k .

Definición 4.7 Sea $x \in \mathcal{R}^n$ y x_K su proyección sobre \mathcal{R}^k , decimos que x es bloqueado por K si $\exists y \in V_K$ tal que $y_i > x_i \forall i \in K$, es decir, si la coalición K puede obtener una utilidad mayor para cada uno de sus miembros que la que obtiene por el vector x .

Definición 4.8 El centro del juego V , es el conjunto de todos los $x \in \mathcal{R}^n$ que no pueden ser bloqueados por ninguna coalición.

Intuitivamente, el centro del juego está formado por aquellos vectores que proporcionan la mayor utilidad posible para cualquier coalición. Como es evidente, el centro no siempre es distinto del vacío. El resultado obtenido por Scarf, muestra que para cierto tipo de juegos se puede asegurar la no vacuidad de su centro. Enseguida presentaremos estos juegos.

Definición 4.9 Una familia de coaliciones $\mathcal{K} \subseteq 2^I$ es una colección balanceada si existe $w : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{R}^+$, tal que:

$$\sum_{i \in K \in \mathcal{K}} w(K) = 1 \quad \forall i \in I$$

A los valores $\{w(K)\}_{K \in \mathcal{K}}$ se les llama **coeficientes de balance**.

Los valores $w(K)$ tienen la propiedad de que si fijamos un jugador de la familia, la suma de los pesos correspondientes a aquellas coaliciones que lo contienen debe ser igual a uno.

Ejemplo 4.3 (a) La familia $\mathcal{K} = \{I\}$ es claramente balanceada, y de hecho si \mathcal{K} constituye una partición de I , entonces es una colección balanceada con coeficientes de balance $w(K) = 1, \forall K \in \mathcal{K}$.

(b) Si $I = \{1, 2, 3\}$, la familia $\mathcal{K} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ es balanceada con $w(K) = \frac{1}{2}, \forall K \in \mathcal{K}$.

(c) Si $I = \{1, 2, 3, 4\}$, la familia $\mathcal{K} = \{K_1 = \{1, 2\}, K_2 = \{1, 3\}, K_3 = \{1, 4\}, K_4 = \{1, 2, 3, 4\}\}$ es balanceada con $w(K_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$; y $w(K_4) = \frac{2}{3}$.

Definición 4.10 Sean V un juego n -personal y \mathcal{K} una colección balanceada. Decimos que V es un juego balanceado si $\forall x \in \mathcal{R}^n$ tal que $x_K \in V_K, \forall K \in \mathcal{K}$, se tiene que $x \in V_I$.

Teorema 4.2 (Scarf, [29]) Todo juego balanceado tiene centro no vacío.

En el artículo referido, Scarf brinda una detallada demostración de este resultado mediante métodos de programación lineal y muestra incluso un algoritmo para localizar el centro.

Mediante este resultado, Danilov y Sotskov establecen en [9] un teorema análogo para funciones de efectividad.

Teorema 4.3 (Danilov & Sotskov, [9]) Las funciones de efectividad B -monótonas balanceadas son estables.

Para entender este resultado y proceder a su demostración, requerimos previamente definir algunos conceptos.

Definición 4.11 Una función $w : 2^I \rightarrow \mathbb{Z}^+$ es un peso balanceado de multiplicidad σ si $\forall i \in I$ se tiene que:

$$\sum_{i \in K \subseteq I} w(K) = \sigma$$

La colección $\mathcal{K}_w = \{K \subseteq I \mid w(K) > 0\}$, es llamada el soporte de w .

Notemos que si $\sigma = 1$, \mathcal{K}_w constituye una colección balanceada.

Definición 4.12 Una función de efectividad ε es llamada **B-monótona** (monótona por bloques) si siempre que $\varepsilon(K, B) = 1$, se tiene que $\varepsilon(K, B') = 1 \forall B' \supseteq B$.

Las funciones de efectividad generadas por formas de juego son **B-monótonas**, este hecho es inmediato de la caracterización presentada al inicio de esta sección (teorema 4.1).

Definición 4.13 ε es balanceada si para toda partición $A = \cup_{i \in I} D_i$ y $\forall w : 2^I \rightarrow \mathbb{Z}^+$ existe $K \in \mathcal{K}_w$ tal que $\varepsilon(K, \cup_{i \in I - K} D_i) = 0$.

Ahora sí estamos listos para ver la demostración del teorema 4.3.

Demostración. Sean $\varepsilon : 2^I \times 2^A \rightarrow \{0, 1\}$ una función de efectividad B-monótona balanceada y $u : I \times A \rightarrow \mathcal{R}$ una función de utilidad. Demostraremos que $C(\varepsilon, u) \neq \emptyset$.

Sean $K \subseteq I, B \subseteq A, k = |K|$, para cada $i \in K$, definimos $m_i = \min\{u(i, a) \mid a \in B\}$.

Mediante la función ε , formaremos un juego balanceado. Asociemos a cada coalición K el conjunto $V_K \subseteq \mathcal{R}^k$ definido como sigue:

$V_K = \{x \in \mathcal{R}^k \mid x_i \leq m_i, \forall i \in K \text{ y algún } B \subseteq A \text{ tal que } \varepsilon(K, B) = 1\}$.

En [9], Danilov y Sotskov demuestran que la colección $V = \{V_K\}_{K \subseteq I}$, así formada, es un juego balanceado, entonces por el teorema de Scarf $C(V) \neq \emptyset$. Consideremos ahora $x \in C(V)$ y $a \in A$ tales que $x_i \leq \min\{u(i, a) \mid a \in B\} \forall i \in I$. Afirmamos que $a \in C(\varepsilon, u)$. Efectivamente, si a fuera rechazado por alguna coalición K mediante algún bloque B , esto significaría que $u(i, a) < u(i, b) \forall i \in K$ y $\forall b \in B$, y $\varepsilon(K, B) = 1$, o sea que $x_i < m_i, \forall i \in K$. Contradiciendo con esto, el hecho de que $x \in C(V)$. \diamond

5 Gráficas núcleo solubles y funciones de efectividad.

Contamos ahora con las herramientas suficientes para llevar a cabo nuestro objetivo: la demostración del Teorema 1.1. A partir de aquí, daremos paso a los resultados que nos llevarán a realizarlo.

Primeramente, asociaremos una función de efectividad a una gráfica y estableceremos relaciones entre las propiedades de ambas.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica y consideremos los conjuntos:

I_G los clanes de G ,

A_G los conjuntos independientes maximales de G y el conjunto vacío.

A cada vértice $v \in V$ le asociamos los siguientes conjuntos:

$K_v \subseteq I_G$ la colección de todos los clanes de G que contienen a v , y

$B_v \subseteq A_G$ la colección de todos los independientes maximales de G que contienen a v .

Finalmente, sean $T_G = \{(K_v, B_v) \mid v \in V\}$ y ϵ_G la función de efectividad definida por T_G . Es decir, $\epsilon_G(K, B) = 1$ si y sólo si $K = K_v$ y $B = B_v$ para algún $v \in V$.

La idea ahora es caracterizar la núcleo solubilidad de una gráfica, en términos de ε_G . Antes veremos un resultado auxiliar.

Definición 5.1 Sea ε una función de efectividad, llamaremos ε -familia a la colección de parejas $\mathcal{F} = \{(K_a, B_a)\}_{a \in A}$ tales que $\forall a \in A, \varepsilon(K_a, B_a) = 1$ y $a \notin B_a$.

Definición 5.2 Un ciclo de una ε -familia $\mathcal{F} = \{(K_a, B_a)\}_{a \in A}$ es un conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq A$ tal que $a_2 \in B_{a_1}, a_3 \in B_{a_2}, \dots, a_m \in B_{a_{m-1}}, a_1 \in B_{a_m}$.

El siguiente teorema caracteriza la estabilidad de una función de efectividad en términos de sus ε -familias.

Teorema 5.1 (Keiding, [6]) Una función de efectividad ε es estable si y sólo si toda ε -familia tiene un ciclo $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ tal que $\bigcap_{j=1}^m K_{a_j} \neq \emptyset$.

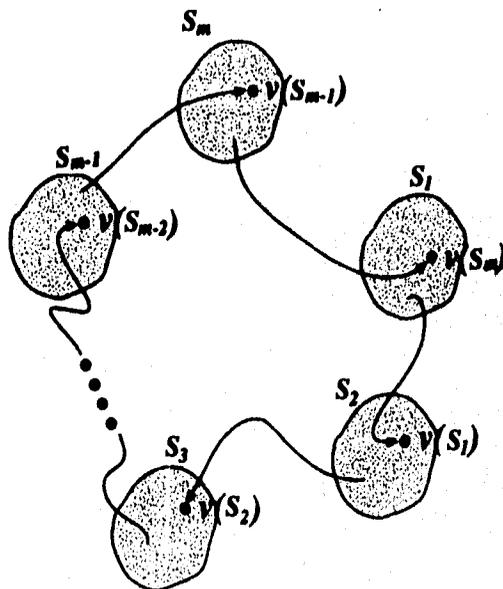
Demostración. Supongamos que existe \mathcal{F} una ε -familia tal que para todo ciclo de ella se tiene que $\bigcap_{j=1}^m K_{a_j} = \emptyset$. Para cada $i \in I$, establezcamos una relación binaria entre los elementos de A , como sigue: Si $i \in K_a, aR^i b \forall b \in B_a$. Esta es una relación acíclica ya que si existiera una colección $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ de resultados tales que

$a_1 R^i a_2 R^i a_3 \dots a_{m-1} R^i a_m R^i a_1$, se tendría que $a_2 \in B_{a_1}$, $a_3 \in B_{a_2}, \dots$, $a_m \in B_{a_{m-1}}$, $a_1 \in B_{a_m}$ con $i \in \bigcap_{j=1}^m K_{a_j}$, lo cual contradice nuestra suposición. Así, cada R^i puede extenderse a un orden parcial $<_i$ sobre A . Cada $<_i$ induce la restricción al jugador i de una función de utilidad en la que $\forall a, b \in A$ tales que $a <_i b$ se tiene que $u(i, a) < u(i, b)$. Para los elementos de I que no pertenezcan a ninguna coalición de \mathcal{F} diremos que $u(i, a) = u(i, b) \forall a, b \in A$. La función así obtenida, provoca la inestabilidad de ε . Efectivamente, cualquier $a \in A$ puede ser rechazado por la coalición K_a ya que $\varepsilon(K_a, B_a) = 1$ y $u(i, a) < u(i, b) \forall i \in K_a, \forall b \in B_a$ con lo que para esta u , se tiene que $C(\varepsilon, u) = \emptyset$. Esto es una contradicción.

Para demostrar el enunciado recíproco supongamos que ε no es estable. Entonces, existe una función de utilidad $u : I \times A \rightarrow \mathcal{R}$, tal que $C(\varepsilon, u) = \emptyset$, es decir, para cualquier resultado $a \in A$, existe una pareja de coalición y bloque $K_a \subseteq I, B_a \subseteq A$, tales que $\varepsilon(K_a, B_a) = 1$ y K_a rechaza a mediante B_a , esto es, $u(i, a) < u(i, b) \forall i \in K_a, \forall b \in B_a$, con lo cual resulta claro que $a \notin B_a$.

Así, la colección $\mathcal{F} = \{(K_a, B_a)\}_{a \in A}$, constituye una ε -familia. Sea $C = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ un ciclo cualquiera de \mathcal{F} , para éste se tiene que $\bigcap_{j=1}^m K_{a_j} = \emptyset$, ya que de otro modo, si existiera $i \in \bigcap_{j=1}^m K_{a_j}$, entonces $u(i, a_1) < u(i, a_2) < \dots < u(i, a_m) < u(i, a_1)$ lo cual es una contradicción. \diamond

Consideremos ahora una ε_G -familia, es decir, $\mathcal{F} = \{(K_S, B_S)\}_{S \in A_G}$, tal que $\forall S \in A_G, S \not\subseteq B_S$ y $\varepsilon_G(K_S, B_S) = 1$. Sabemos, que $\varepsilon_G(K, B) = 1$ si y sólo si $K = K_v$ y $B = B_v$ para algún $v \in V$, así, cada pareja de \mathcal{F} es de la forma (K_v, B_v) , entonces para cada independiente maximal de G , existe $v(S) \in V$ asociado a él, es decir existe un subconjunto $V' \subseteq V$ asociado a \mathcal{F} . Para indicar esto con más claridad denotaremos a cada pareja de \mathcal{F} , como $(K_{v(S)}, B_{v(S)})$. Ya que $\forall S \in A_G, S \not\subseteq B_{v(S)}$, entonces, $v(S) \notin S$. Un ciclo de \mathcal{F} es una colección de independientes maximales de G , $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ tales que $S_{j+1} \in B_{v(S_j)}$ para $j = 1, 2, \dots, m-1$ y $S_1 \in B_{v(S_m)}$, con lo que tenemos que $v(S_j) \in S_{j+1}$, para $j = 1, 2, \dots, m-1$ y $v(S_m) \in S_1$.



Veamos ahora, el siguiente resultado, que caracteriza la núcleo solubilidad de una gráfica mediante la estabilidad de su función de efectividad asociada.

Teorema 5.2 $G = (V, E)$ es núcleo soluble si y sólo si ε_G es estable

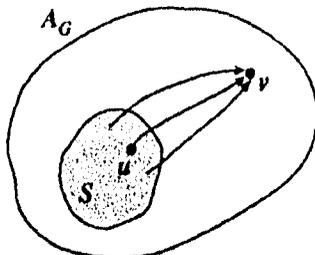
Demostración. Supongamos que ε_G no es estable. Entonces, por el teorema anterior, existe una ε_G -familia $\mathcal{F} = \{(K_{v(S)}, B_{v(S)})\}_{v(S) \in V'}$, con la siguiente propiedad:

(P) \forall ciclo $\{S_1, S_2, \dots, S_m\} \subseteq V'$ se tiene que $\bigcap_{j=1}^m K_{v(S_j)} = \emptyset$.

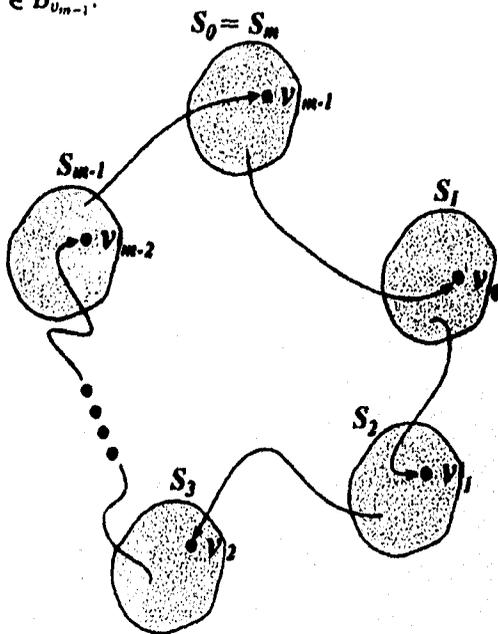
Observemos que podemos extender \mathcal{F} para que $V' = V$, agregando las parejas (K_v, B_v) , para las que $v \notin V'$ asumiendo para todas ellas que $v = v(\emptyset)$. \mathcal{F} , así extendida no pierde la propiedad (P), y así se establece una biyección entre V y A_G . Sea $D = (V, F)$ la siguiente orientación de G :

Dado $v \in V$, consideramos $S \in A_G$, tal que $v = v(S)$ y si $S \neq \emptyset$, para cada $u \in S$ tal que $uv \in E$, asociamos la flecha \vec{uv} . Notemos que sí debe existir al menos un vértice u así, ya que de otro modo $S \cup \{v\}$ es un independiente que contiene a S contradiciendo la maximalidad.

La orientación así obtenida, es acíclica por completas. Efectivamente, ya que de otro modo existiría $\vec{\gamma} = (v_0, v_1, \dots, v_m = v_0)$ un ciclo dirigido asimétrico tal que $G[V(\vec{\gamma})]$ es una completa en G .

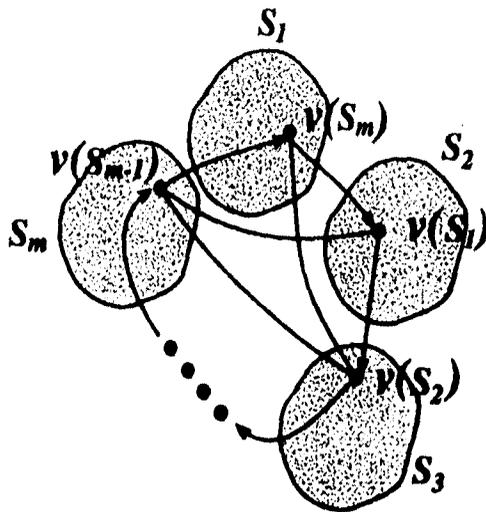


Sea C un clan de G que contiene a $G[V(\vec{\gamma})]$. La existencia de la flecha $\overrightarrow{v_i v_{i+1}} \in F$ implica que existe $S \in A_G$ un independiente maximal tal que $v_{i+1} = v(S)$, llamemos S_{i+1} a este conjunto. Sabemos que $v_{i+1} \notin S_{i+1}$ pero $v_i \in S_{i+1}$, es decir, $S_{i+1} \in B_{v_i} \forall i = 0, 1, \dots, m-1$ y $S_0 = S_m \in B_{v_{m-1}}$.



Así, la colección $\{S_0, S_1, \dots, S_{m-1}\}$ forma un ciclo de \mathcal{F} , y como $\gamma \subseteq C$, entonces $C \in \bigcap_{i=0}^{m-1} K_{v_i}$, lo cual contradice la suposición inicial. Del teorema 2.1 tenemos entonces que D es una orientación normal de G , sin embargo, es inmediato que D no tiene núcleo, ya que $\forall S \in A_G$, S no absorbe al vértice $v(S)$, esto contradice el hecho de que G sea núcleo soluble.

Para demostrar el recíproco, supongamos ahora que G no es núcleo soluble. Entonces, $\exists D = (V, F)$ una orientación normal de G que no tiene núcleo, esto quiere decir que $\forall S \in A_G \exists v(S) \in V$ que no es absorbido por S . Claramente $v(S) \notin S$, así, la colección $\mathcal{F} = \{(K_{v(S)}, B_{v(S)})\}$ forma una ε_G -familia. Un ciclo de \mathcal{F} es un conjunto $\gamma = \{S_1, S_2, \dots, S_m\} \subseteq A_G$ tal que $S_{i+1} \in B_{v(S_i)}, \forall i = 1, \dots, m-1$ y $S_1 \in B_{v(S_m)}$ es decir, $v(S_i) \in S_{i+1}, \forall i = 1, \dots, m-1$ y $v(S_m) \in S_1$. Si ε_G fuese estable, tendríamos que $\bigcap_{i=1}^m K_{v(S_i)} \neq \emptyset$, es decir, que $\exists C \in I_G$, un clan tal que $\vec{\gamma} = (v(S_1), v(S_2), \dots, v(S_m)) \subseteq V(C)$, con lo que $v(S_i)$ es adyacente a $v(S_j)$ en $G \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ y ya sabemos que $v(S_i) \in S_{i+1}, \forall i = 1, \dots, m-1$ y $v(S_m) \in S_1$, por lo que la flecha $\overrightarrow{v(S_i)v(S_{i+1})} \in F$, y además es asimétrica porque $v(S_{i+1})$ no es absorbido por S_i . También $\overrightarrow{v(S_m)v(S_1)} \in F$ y es asimétrica porque $v(S_m) \in S_1$ y $v(S_1)$ no es absorbido por S_1 .



Así $\vec{\gamma}$ sería un ciclo asimétrico en D que induce una completa en G , contradiciendo el hecho de que D sea una orientación normal. \diamond

6 Funciones de efectividad balanceadas y gráficas perfectas.

La intención ahora, es la de encontrar una caracterización adecuada de las gráficas perfectas mediante su función de efectividad asociada. En la sección anterior definimos la función de efectividad ε_G , para una gráfica G , ahora construiremos una extensión B-monótona de ella, y la llamaremos $\hat{\varepsilon}_G$. Consideremos los mismos conjuntos de G con los que trabajamos anteriormente y definamos $\hat{\varepsilon}_G : 2^{I_G} \times 2^{A_G} \rightarrow \{0, 1\}$, de la siguiente manera:

$\hat{\varepsilon}_G(K, B) = 1$ si y sólo si $K = K_v$ y $B \supseteq B_v$ para algún $v \in V$ o si $B = A_G$ y $K \neq \emptyset$.

En esta ocasión las parejas (K, B) , $K \subseteq I_G$, $B \subseteq A_G$, efectivas, serán aquellas para las que K sea la colección de clanes que contienen a algún vértice $v \in V$, y B sea un conjunto que contenga a la colección de independientes maximales que contienen a v . Con el objeto de preservar la B-monotonía, también se definen como efectivas las parejas (K, A_G) , $\forall K \neq \emptyset$.

En el resultado siguiente, Boros y Gurvich caracterizan las gráficas perfectas mediante $\hat{\varepsilon}_G$.

Teorema 6.1 $G = (V, E)$ es perfecta si y sólo si $\hat{\varepsilon}_G$ es balanceada.

Demostración. Sean $w : 2^V \rightarrow \mathbb{Z}^+$ un peso balanceado de multiplicidad $\sigma > 0$, y $\{D_C\}_{C \in I_G}$ una partición de A_G . Demostraremos que $\exists K \in \mathcal{K}_w$ tal que $\hat{\varepsilon}_G(K, \cup_{C \in I_G - K} D_C) = 0$.

Como $\sigma > 0$, se tiene que $\mathcal{K}_w \neq \emptyset$, y además $\forall C \in I_G \exists K \in \mathcal{K}_w$ tal que $C \in K$ (por ser w un peso balanceado). Consideramos la subgráfica de G inducida por el siguiente conjunto de vértices, $V' = \{v \in V \mid K_v \in \mathcal{K}_w\}$. Si $\forall K \in \mathcal{K}_w$ se tiene que $K \neq K_v$, $\forall v \in V$, ya terminamos porque:

Consideramos $C \in I_G$ tal que $D_C \neq \emptyset$, y $K \in \mathcal{K}_w$ tal que $C \in K$ y $K \neq K_v$, $\forall v \in V$, entonces $\cup_{C \in I_G - K} D_C \neq A_G$ y así por la definición de $\hat{\varepsilon}_G$ tendríamos que $\hat{\varepsilon}_G(K, \cup_{C \in I_G - K} D_C) = 0$, con lo que K sería la coalición buscada.

Así, podemos suponer que existe $K \in \mathcal{K}_w$ de la forma $K = K_v$, para algún $v \in V$. Esto nos asegura por un lado que $V' \neq \emptyset$, y por otro que $\forall C \in I_G$ tal que $D_C \neq \emptyset$, se tiene que $\forall K \in \mathcal{K}_w$ tal que $C \in K$, $K = K_v$, para algún $v \in V$ (de hecho $\forall v \in V' \cap C$). Observemos que w induce una función, $f : V \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sobre los vértices de G de la siguiente manera: $\forall v \in V, f(v) = w(K_v)$. Notemos que $f(v) = 0$ $\forall v \notin V'$. En este contexto, el peso de un clan $C \in I_G$ queda definido

como:

$$\sum_{v \in C \cap V'} f(v) = \sum_{v \in C \cap V'} w(K_v)$$

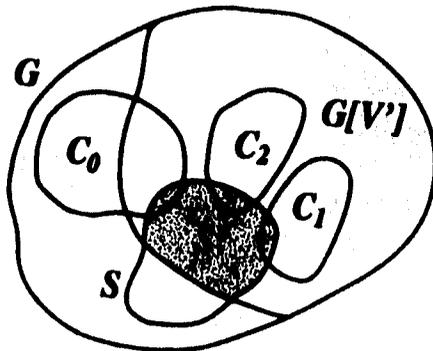
Sea $C_0 \in I_G$ tal que $D_{C_0} \neq \emptyset$. Sabemos que,

$$\sum_{C_0 \in K \in \mathcal{K}_w} w(K) = \sigma$$

pero como $\forall K \in \mathcal{K}_w$ tal que $C_0 \in K$, se tiene que $K = K_v$, entonces:

$$\sigma = \sum_{C_0 \in K \in \mathcal{K}_w} w(K) = \sum_{v \in C \cap V'} w(K_v) = \sum_{v \in C \cap V'} f(v)$$

Con lo que C_0 es un clan de peso máximo en $G[V']$ respecto a f . Como G es perfecta, entonces $G[V']$ también lo es y por tanto existe en $G[V']$ un conjunto independiente $S' \subseteq V'$ que intersecta a todos los clanes de peso máximo de $G[V']$, (teorema 2.3).



Notemos que en particular $S' \cap C_0 \neq \emptyset$. Así, para cualquier $S \in A_G$ tal que $S \cap V' = S'$, si $S \in D_{C_0}$, se tiene que $S \cap C_0 \neq \emptyset$. Sea $v \in S \cap C_0 \cap V'$,

la coalición $K_v \in \mathcal{K}_w$, entonces $\cup_{C \in I_G - K_v} D_C$ no contiene a B_v con lo que $\hat{\varepsilon}_G(K_v, \cup_{C \in I_G - K_v} D_C) = 0$. Por lo tanto $\hat{\varepsilon}_G$ es balanceada.

Para demostrar el recíproco supongamos que G no es perfecta.

Sea $V' \subseteq V$ tal que $G[V']$ es minimalmente imperfecta. Definamos un peso balanceado $w : 2^{I_G} \rightarrow \mathcal{Z}^+$, como sigue:

$$w(K_v) = 1, \forall v \in V'$$

$$w(\{C\}) = \omega(G[V']) - |C \cap V'|, \forall C \in I_G$$

$$w(K) = 0 \text{ en cualquier otro caso.}$$

w así definido, es un peso balanceado de multiplicidad $\omega(G[V'])$. Veamos: Sea $C \in I_G$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_s\} = V(C)$. Únicamente tenemos dos casos posibles:

1. $C \cap V' = \emptyset$. Esto implica que $w(K_{v_i}) = 0 \forall i = 1, \dots, s$ y como $|C \cap V'| = 0$, entonces $w(\{C\}) = \omega(G[V'])$. Para cualquier otra K que contenga a C se tiene que $w(K) = 0$. Con lo que tenemos

$$\sum_{C \in \mathcal{K} \in 2^{I_G}} w(K) = \omega(G[V'])$$

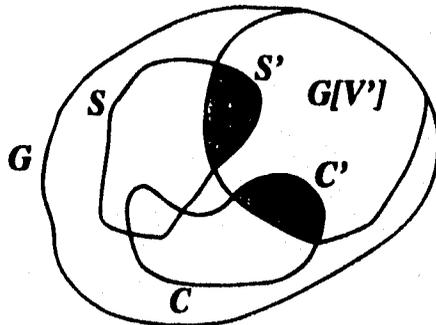
2. $C \cap V' \neq \emptyset$. Sea $t = |C \cap V'|$ entonces $w(K_{v_i}) = 1 \forall v_i \in C \cap V'$, $w(K_{v_i}) = 0 \forall v_i \notin V'$, $w(\{C\}) = \omega(G[V']) - t$ y $w(K) = 0$ para

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

cualquier otra K que contenga a C . Así,

$$\begin{aligned} \sum_{C \in \mathcal{K} \in 2^G} w(K) &= \sum_{v_i \in C \cap V'} w(K_{v_i}) + w(\{C\}) \\ &= t + \omega(G[V']) - t \\ &= \omega(G[V']) \end{aligned}$$

Definamos ahora una partición de A_G , en la que a cada $C \in I_G$ asociaremos un subconjunto de A_G , y lo llamaremos D_C . Sabemos que si una gráfica G es perfecta, entonces $\exists S$ un conjunto independiente en G que intersecta a todos los clanes de cardinalidad máxima de G . Como $G[V']$ no es perfecta, entonces $\forall S'$ independiente en $G[V']$ existe C' un clan tal que $|C'| = \omega(G[V'])$ y $S' \cap C' = \emptyset$.



De aquí, tenemos que $\forall S \in A_G$, existe $C \in I_G$ tal que $|C \cap V'| = \omega(G[V'])$ y $(S \cap V') \cap (C \cap V') = \emptyset$, es decir, $V' \cap S \cap C = \emptyset$. (Este hecho es claro $\forall S \in A_G$ tal que $V' \cap S = \emptyset$). Incluyo este $S \in D_C$.

Notemos que para cada $S \in A_G$, sólo existe un clan $C \in I_G$ tal que $S \in D_C$, con lo que la colección $\{D_C\}_{C \in I_G}$ forma una partición de A_G . ¿Cómo es $\hat{\varepsilon}_G$ en el soporte de w ? Veamos, si $K \subseteq I_G$ es tal que $w(K) > 0$, entonces por la forma en que definimos w , K , sólo puede ser de dos formas: $K = K_v$ para algún $v \in V'$ ó $K = \{C\}$, para algún $C \in I_G$.

1. Si $K = K_v$ para algún $v \in V'$, entonces, $\forall C \in K_v, C \cap V' \neq \emptyset$ y $\forall S \in B_v, S \cap V' \neq \emptyset$ y así, por la definición de K_v y B_v tenemos que $C \cap S \cap V' \neq \emptyset \forall C \in K_v$ y $\forall S \in B_v$. Por la forma en que construimos la partición $\{D_C\}_{C \in I_G}$, se tiene que $\forall C \in K_v$ y $\forall S \in B_v, S \notin D_C$ (ya que $C \cap S \neq \emptyset$). Entonces, para cada $C \in K_v$, se tiene que $D_C \cap B_v = \emptyset$, con lo que $\cup_{C \in K_v} D_C \cap B_v = \emptyset$ entonces, $B_v \subseteq \cup_{C \notin K_v} D_C$ y por lo tanto $\hat{\varepsilon}_G(K_v, \cup_{C \notin K_v} D_C) = 1$. Lo cual contradice que $\hat{\varepsilon}_G$ sea balanceada.
2. Si $K = \{C_0\}$, $C_0 \in I_G$, entonces $w(K) = \omega(G[V']) - |C_0 \cap V'|$ y como $w(K) > 0$, entonces $\omega(G[V']) > |C_0 \cap V'|$, con lo que $|C_0 \cap V'|$ no es un clan de cardinalidad máxima en $G[V']$, así $D_{C_0} = \emptyset$, por la forma en que se definieron los bloques D_C . Entonces $\cup_{C \notin K} D_C = A_G$ y por lo tanto $\hat{\varepsilon}_G(K, \cup_{C \notin K} D_C) = 1$, con lo que también en este caso se contradice el hecho de que $\hat{\varepsilon}_G$ sea balanceada. \diamond

En la sección 4 vimos que las funciones de efectividad B -monótonas balanceadas son estables, así del teorema anterior, si G es perfecta es inmediato que $\hat{\varepsilon}_G$ es estable y como esta función es una extensión de ε_G entonces ella también lo es, porque

$$\bigcup_{\varepsilon_G(K,B)=1} R(K,B) \subseteq \bigcup_{\hat{\varepsilon}_G(K,B)=1} R(K,B)$$

y por tanto

$$C(\hat{\varepsilon}_G, u) \subseteq C(\varepsilon_G, u), \forall u$$

con lo que G resulta ser núcleo soluble. Esto demuestra el Teorema 1.1.

7 Conclusiones

Como hemos visto el resultado presentado en este trabajo se basa esencialmente en el Teorema de Scarf (teorema 4.2). Mediante las propiedades de las funciones de efectividad se ha podido establecer la conexión entre las teorías de juegos y gráficas. La manera en que se llevó a cabo la demostración fue la siguiente:

$$\begin{aligned} G \text{ perfecta} &\Leftrightarrow \hat{\varepsilon}_G \text{ balanceada} \\ &\Rightarrow \hat{\varepsilon}_G \text{ estable} \\ &\Rightarrow \varepsilon_G \text{ estable} \\ \varepsilon_G \text{ estable} &\Leftrightarrow G \text{ núcleo soluble} \end{aligned}$$

En la cuarta sección asociamos a una gráfica una función de efectividad y nos valimos del concepto de estabilidad para demostrar que la núcleo solubilidad de la gráfica en cuestión es equivalente a la estabilidad de su función de efectividad asociada. Posteriormente, en la quinta sección, construimos una extensión de ésta función de efectividad y mediante el concepto de funciones de efectividad balanceadas demostramos que el hecho de que la gráfica sea perfecta, es equivalente a que la función de efectividad extendida sea balanceada. Estas

dos caracterizaciones se conectan entre sí mediante el resultado de Danilov y Sotskov presentado en la sección 4 y que es el análogo al teorema de Scarf para funciones de efectividad, se demostró que la propiedad de ser balanceada, implica la estabilidad y completando con esto la demostración.

Este resultado resuelve una de las implicaciones de la conjetura BD, que durante años permaneció abierta. Como vimos se habían hecho muchos esfuerzos por resolverla (de hecho aquí sólo presentamos unos cuantos). El recíproco aún continúa abierto, en la sección 3 vimos que sólo se ha demostrado para las gráficas \mathcal{M} -libres, las gráficas de líneas y las fraternalmente orientables.

Referencias

- [1] C. Berge, *Graphs*, Chapter 14, North Holland Mathematical Library, Volume 6, Amsterdam, New York 1985.
- [2] C. Berge, V. Chvátal, *Topics on Perfect Graphs*, Annals of Discrete Mathematics (21), 1984.
- [3] C. Berge, P.Duchet, *Problème*, Séminaire MSH, Paris, Janvier 1983.
- [4] C. Berge, P.Duchet, *Perfect graphs and Kernels*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, Vol. 16, Number 4, December 1988.
- [5] C. Berge, P. Duchet, *Recent Problems and results about Kernels in Directed Graphs*.
- [6] M. Blidia, P. Duchet, F. Maffray, *On Kernels in Perfect Graphs*. Rutcor research Report, 1988, pp. 231-233.
- [7] M. Blidia, P. Duchet, F. Maffray, *On the Orientation of Meyniel Graphs*. Journal of Graph Theory, vol. 18, No. 7 (1994), pp. 705-711.

- [8] E. Boros, V. Gurvich, *Perfect Graphs are Kernel Solvable*. DIMACS Technical Report 94-32 June 1994.
- [9] V. I. Danilov, A.I. Sotskov, *Bloqueos estables en los mecanismos de selección por grupos*, Economía y Métodos Matemáticos, 1987, T. XXIII, V. 5, pp.888-898
- [10] P. Duchet, *Parity Graphs are Kernel-M-Solvable*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 43 (1987), pp. 121-126
- [11] H. Galeana-Sánchez, *A characterization of normal B_1 -orientable perfect graphs*.
- [12] H. Galeana-Sánchez, *Normal fraternally orientable graphs satisfy the strong perfect graph conjecture*, Discrete Mathematics 122, 1993, pp. 167-177
- [13] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, *Orientations of graphs in kernel theory*, Discrete Mathematics 87, 1991, pp. 271-280
- [14] T. Ichiishi, *Game Theory for Economic Analysis*, Academic Press, 1983
- [15] H. Keiding, *Necessary and sufficient conditions for stability of effectivity functions*, International Journal of Game Theory, Vol. 14, Issue2, pp. 93-101

- [16] L. Lovász, *Normal Hypergraphs and the weak perfect graph conjecture*, Discrete Mathematics, 2(1972), pp. 253-267
- [17] F. Maffray, *Line Perfect Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B (1992), Vol. 55, pp. 1-8
- [18] F. Maffray, *On Kernels in i -triangulated graphs*, Discrete Mathematics, 61(1986), pp. 247-251
- [19] F. Maffray, *Sur l'existence des noyaux d'un graphe*, Thesis, Paris 6, 1979.
- [20] H. Moulin, B. Peleg, *Kernels of effectivity functions and implementation theory*. J. of Mathematical Economics, 1982, 10, pp. 115-145.
- [21] J. Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944
- [22] G. Owen, *Game Theory*, Second Edition, Academic Press, 1982
- [23] H. E. Scarf, *The kernel of an n person game*, Econometrica, Vol. 35, No. 1, January 1967
- [24] L. E. Trotter, *Line Perfect Graphs*, Math. Programming 12 (1977), pp. 255-259