

00384



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

7  
2ej

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DOS REPRESENTACIONES DEL  
HEXAGRAMA MISTICO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)  
P R E S E N T A  
M. en C. RODOLFO SAN AGUSTIN CHI

DIRECTOR DE TESIS: DR. HUMBERTO CARDENAS TRIGOS

MEXICO, D. F.

1998

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## TWO REPRESENTATIONS OF THE MYSTIC HEXAGRAM

*M. en C. Rodolfo San Agustín Chi*

**Abstract.** In this work, in first place, the construction of the Mystic Hexagram Configuration is generalized to a projective plane over a field of characteristic different from two and cardinality bigger than seven and, in second place, such a configuration is characterized in two invariant ways: through a faithful representation into the lattice of subgroups of  $K_6$ , the complete graph on six vertices and through another faithful representation into the lattice of subgroups of  $S_6$ , the symmetric group of six elements. As an extension of the first representation, also a representation on  $LK_6$ , the edge graph of  $K_6$  is given. Because this last representation depends on an outer automorphism of  $S_6$ , it is not invariant.

*Dos representaciones del hexagrama  
místico*

*Rodolfo San Agustín Chi*

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1 Breve reseña histórica</b>	<b>9</b>
1.1 Periodo de construcción . . . . .	11
1.2 Periodo de madurez . . . . .	14
1.3 Contribuciones más recientes . . . . .	17
<b>2 Construcción del hexagrama</b>	<b>21</b>
2.1 Un teorema de geometría proyectiva . . . . .	22
2.2 El hexagrama místico. 1a. Parte . . . . .	25
2.3 El teorema de Veronese . . . . .	30
2.4 El hexagrama místico. 2a. Parte . . . . .	32
2.5 Una jerarquía natural en el hexagrama místico . . . . .	37
<b>3 Configuraciones asociadas a <math>\mathcal{HM}</math></b>	<b>41</b>
3.1 Configuraciones proyectivas . . . . .	42
3.1.1 Generalidades sobre las configuraciones proyectivas	42
3.2 La configuración arguesiana $D$ . . . . .	45
3.2.1 Propiedad combinatoria de $D$ . . . . .	46
3.3 Un sistema de Steiner . . . . .	50
3.4 Configuraciones clásicas asociadas a $\mathcal{HM}$ . . . . .	52
3.4.1 La configuración de puntos y rectas fundamentales	52
3.4.2 La configuración básica . . . . .	52
3.4.3 La configuración alemana . . . . .	53
3.4.4 La configuración inglesa . . . . .	56
3.4.5 La primera gran configuración . . . . .	56
3.5 Otras configuraciones asociadas a $\mathcal{HM}$ . . . . .	56

<b>4</b>	<b>Representaciones de <math>\mathcal{HM}</math> en <math>\mathcal{S}(K_6)</math> y <math>\mathcal{S}(LK_6)</math></b>	<b>59</b>
4.1	Teorema de factorización de $K_6$ . . . . .	61
4.2	Primera representación de $\mathcal{HM}$ en $\mathcal{S}(K_6)$ . . . . .	62
4.3	Segunda representación de $\mathcal{HM}$ en $\mathcal{S}(K_6)$ . . . . .	67
4.4	Representación de $\mathcal{HM}$ en $\mathcal{S}(LK_6)$ . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Una teoría de grupos en <math>\mathcal{HM}</math></b>	<b>77</b>
5.1	Automorfismos exteriores de $S_6$ . . . . .	79
5.2	Grupos estabilizadores y de automorfismos . . . . .	81
5.3	Grupos asociados a $\mathcal{HM}$ . . . . .	82
	<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>

# Introducción

En este trabajo, en primer lugar, se generaliza la construcción de la configuración del hexagrama místico al plano proyectivo sobre un campo de característica diferente de dos y cardinalidad suficientemente grande y, en segundo lugar, se caracteriza de forma invariante dicha configuración, por una parte, mediante una representación fiel en la red de subgráficas de  $K_6$ , la gráfica completa con seis vértices y, por otra, mediante otra representación, también fiel, en la red de subgrupos de  $S_6$ , el grupo simétrico en seis elementos. Como una extensión de la primera, también se da una representación en términos de  $LK_6$ , la gráfica de aristas de  $K_6$ , aunque esta última depende de la elección de un automorfismo exterior de  $S_6$  y, por lo tanto, no resulta del todo invariante.

Las construcciones conocidas hasta ahora, para la configuración mencionada, se realizan en el plano proyectivo real y dependen en gran medida, por una parte, de la elección de una notación adecuada y, por la otra, de una selección muy cuidadosa de los diversos elementos a considerar en cada etapa de dicha construcción. Así, su seguimiento llega a ser verdaderamente intrincado.

Por otra parte, también es importante tener una interpretación algebraica proyectivamente invariante (es decir, independiente de las coordenadas usadas) de la geometría sintética del plano proyectivo. Para esto, usualmente se construyen las álgebras de Cayley-Grassman así como la de paréntesis (Bracket algebra). Si bien con esto se logra trabajar en un ambiente libre de coordenadas, el álgebra resulta más complicada. [60]

La intención de eludir las situaciones mencionadas anteriormente

lleva a las dos soluciones que aquí se ofrecen. Esto se logra, vagamente hablando, al considerar las propiedades combinatorias de las álgebras mencionadas y analizando desde un principio el mismo tipo de propiedades en los elementos del hexagrama místico.

Por otra parte, cabe mencionar que ambas soluciones son esencialmente distintas pues no se encuentran asociadas de forma natural:

1. los grupos que se proponen no son los grupos ni de automorfismos ni estabilizadores de las gráficas correspondientes
2. las gráficas construidas no son elecciones intrínsecas de entre las redes de subgráficas invariantes ante los grupos seleccionados.

Así, sería muy interesante hallar una solución que unificase ambos tipos de propuestas. Es decir, se pide plantear una relación entre ambos tipos de asignaciones como una sección  $\sigma$  del morfismo *Stab* (estabilizador) entre las redes correspondientes:

$$\mathcal{S}(K_6) \xrightleftharpoons[\sigma]{\text{Stab}} \mathcal{S}(S_6)$$

A continuación damos una introducción no técnica de los diversos capítulos que componen este trabajo.

1.- Dado que los artículos originales (por ejemplo los de Kirkman [31], Möbius [35], Veronese [54] o de Vries [55] y [56]) son de difícil acceso y que las contribuciones posteriores solo se refieren de manera indirecta a dichos trabajos, he dedicado el primer capítulo a reseñar algunos momentos de la historia del hexagrama místico de Pascal, distinguiendo un primer periodo de la construcción en sí de dicha configuración, otro periodo de madurez, síntesis y generalización de los resultados de la teoría y, finalmente, otro con algunos estudios más recientes sobre la combinatoria de los planos proyectivos finitos.

No he seguido ningún criterio de selección de entre las muchísimas contribuciones que se han hecho a este respecto. Simplemente se trata de la recolección de aquellos escritos que he hallado tratando de tener



una buena idea de qué es (y qué pudo haber sido en sus orígenes, si es que se puede hablar con cierta precisión acerca de ello) la configuración del hexagrama místico.

Por otra parte, las demostraciones que he seleccionado, si bien no son en general de tipo algorítmico, también permiten construir los diversos elementos de dicha configuración.

2.- En el capítulo segundo reconstruyo el hexagrama místico determinado por seis puntos en el plano proyectivo sobre un campo con las restricciones mencionadas al principio.

No es de extrañar que varias de estas construcciones (junto con las demostraciones correspondientes) resulten similares, en mayor o menor grado, a algunas de las ya conocidas (dado que, como ya se había mencionado, se ha escrito muchísimo en torno al tema) e incluso que se haya podido hacer la selección de entre los estudios clásicos para dar una idea de las diversas estrategias que han seguido los autores a este respecto. En particular, cabe mencionar aquí las construcciones hechas por Giuseppe Veronese. Dichas aportaciones, si bien corresponden ya al periodo de síntesis de resultados en este tema y, por lo tanto, tienden a ser más simples que las originales, aún reflejan la complejidad que llegaron a tener estas construcciones a mediados del siglo pasado.

Los enfoques adoptados por los autores de este segundo periodo dificultan de alguna manera la identificación de algunas de las configuraciones clásicamente asociadas con el hexagrama, por lo que preferí adoptar una posición híbrida a este respecto, construyendo los elementos del hexagrama místico de acuerdo a sus diferentes tipos, con demostraciones ad hoc, como se explica en el párrafo anterior y dejando el conteo de dichos elementos para el capítulo tercero, el cual lleva la faceta más marcadamente combinatoria de este trabajo.

Por otra parte, algunas de las demostraciones que damos en este capítulo son constructivas, por lo que también las emplearemos como apoyo para construir las gráficas y los grupos mencionados al principio de esta introducción.

Finalmente, en dicho capítulo definiremos una jerarquía entre los elementos del hexagrama místico que regulará las relaciones de dicha configuración con las redes mencionadas al principio de este trabajo. De

hecho, dicha jerarquía será, vagamente hablando, la estructura a modelar sobre las otras estructuras a tratar en los capítulos subsecuentes.

3.- El marco más usual en el siglo XIX para estudiar ciertas figuras formadas con conjuntos finitos de puntos y rectas en el plano y espacio proyectivos reales fué el de las llamadas configuraciones (proyectivas planas o espaciales). En el capítulo tercero definiremos dichas estructuras e identificaremos en ciertas clases de elementos del hexagrama místico sus estructuras naturales de este tipo.

En nuestro caso, la estructura de configuración es una ayuda muy descriptiva de las relaciones que guardan entre sí los diferentes elementos (o tipos de elementos) del hexagrama místico, máxime cuando se ha hecho una construcción de los mismos dependiendo fuertemente de la notación y de diversas tablas de incidencia, como la mayoría de los estudiosos del tema (si no es que todos) lo hemos hecho por lo menos alguna vez.

«Podría mencionarse que hubo una época en que el estudio de las configuraciones (proyectivas) estaba considerado como la rama más importante de toda la geometría.»

Esta cita, del famoso libro *Geometry and The Imagination* de David Hilbert y Cohn-Vossen [28] resulta casi increíble hoy en día, en cuanto a que la geometría proyectiva es una especie en vías de extinción. Sin embargo, actualmente sería muy difícil sobreestimar el significado que tienen los aspectos constructivos de la geometría proyectiva clásica para el álgebra combinatoria y la geometría computacional (ver [1], p. 37).

Si bien nuestro enfoque no es el computacional, las estructuras de configuración, de naturaleza combinatoria, permiten introducir de manera natural otras estructuras, también combinatorias, para estudiar diversos aspectos de las figuras mencionadas, como lo son los diseños por bloques (para contar los elementos de cierto tipo en el hexagrama místico), los matroides, los poliedros (en su acepción combinatoria, por supuesto), algunos esquemas asociativos (para caracterizar combinatoriamente ciertas configuraciones de entre otras de su mismo tipo) y las álgebras de paréntesis y de Bose-Messner entre otros.

4.- En el capítulo cuarto hacemos las representaciones del hexagrama místico tanto en la red de subgráficas de  $K_6$ , así como en la red correspondiente a  $LK_6$ .

En el primer caso nos apoyaremos fuertemente en ciertos constituyentes del hexagrama (que corresponden a ciertas expresiones formales que Sylvester llamó *synthemas*<sup>1</sup>). Esta construcción resuelve el problema de la caracterización combinatoria o invariante de los diversos elementos del hexagrama místico.

En seguida haremos una modificación de esta asociación con un doble propósito: Primeramente, para establecer un puente más natural entre los elementos seleccionados en las redes mencionadas. En segundo término, nos apoyaremos en las gráficas resultantes para hacer la representación, en el capítulo quinto y último de este trabajo, con la red de subgrupos de  $S_6$ .

5.- Empezaremos dicho capítulo con el análisis mencionado en el capítulo anterior justificando directamente el por qué esta extensión natural de la solución planteada en dicho capítulo no es una representación invariante en esta nueva red. En un cierto sentido, dichos grupos resultan demasiado grandes para nuestros propósitos.

Así, terminaremos simple y llanamente desarrollando y justificando la propuesta mencionada.

Un hecho interesante es que, como ya se ha mencionado, cuidamos de que los grupos asignados no sean demasiado grandes y, por otra parte, también vemos la necesidad de que no sean más pequeños que los que ofrecemos, por lo que la solución que ofrecemos es óptima en este sentido.

Quiero agradecer al Dr. Humberto Cárdenas Trigos por haber fungido como asesor de este trabajo, al Dr. Emilio Lluís-Riera por haber participado muy activa y entusiastamente durante todo el desarrollo del mismo y a los doctores José Luis Arocha Pérez, Ricardo Berlanga Zubiaga, Adalberto García-Maynes, Francisco Larriveroll y Víctor

<sup>1</sup> *Synthems*, en Salmon (ver [51]). Turnbull, en ([52]), lo atribuye a (Bengiamino) Segre.

Neumann Lara cuyas opiniones mejoraron grandemente tanto el contenido como la presentación del mismo.

Así mismo, quiero agradecer las facilidades brindadas por el Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M. para verificar los cálculos correspondientes al último capítulo de este trabajo con el sistema de álgebra computacional *Magma*.

También quiero agradecer al personal del laboratorio de cómputo del departamento de matemáticas de la facultad de ciencias de la U.N.A.M., especialmente al Prof. Guilmer Ferdinand González Flores por su ayuda con el procesador de texto.

Muchas otras personas también apoyaron el desarrollo de este trabajo. Esta participación fué absolutamente necesaria para completar dicha labor. Agradezco sinceramente a cada una de ellas su apoyo.

16 de abril de 1995.

# Capítulo 1

## Breve reseña histórica

En este capítulo desarrollaremos una pequeña parte de la historia de la configuración del hexagrama místico identificando una primera etapa que corresponde a la construcción del hexagrama, propiamente dicha, así como una segunda etapa, que llamaremos de síntesis o de madurez, en la que se emplearon nuevos enfoques para simplificar, homogeneizar y generalizar la que ya se podía llamar desde ese entonces teoría del hexagrama místico. Ambas etapas se llevaron a cabo casi en su totalidad durante el siglo XIX.

Para concluir este capítulo, tenemos la etapa del ocaso de este periodo en la que mencionaremos algunas de las construcciones más recientes que de alguna manera se relacionan con el hexagrama místico.

Uno de los puntos oscuros a este respecto es el origen mismo del llamado teorema de Pascal. De acuerdo a Julian Lowell Coolidge, no hay duda de que Pascal descubrió el famoso teorema que lleva su nombre:

«...A la edad de 16 años, Blais Pascal había completado un extenso tratado sobre las cónicas el cual, desafortunadamente, se ha perdido. Leibnitz lo vio y afirmó que la base era principalmente el método de perspectiva, es decir, de proyección central, aunque también contenía al “hexagrama místico”...

«Afortunadamente sobrevive un documento de ocho páginas donde se encuentra el hexagrama místico...; apareció en 1640 y fué enviado por Mersenne a Descartes, aunque

permaneció desconocido para el público matemático en general por cerca de un siglo y medio.»

(Coolidge, [17] p. 32).

«...No hay duda, sin embargo, de que él realmente descubrió el hermoso teorema que lleva su nombre y que nos dice que si los vértices de un hexágono...»

(Coolidge, [18] p. 90).

Sin embargo, autores como Herbert Westren Turnbull asegurarían que se trata, en realidad, del más famoso teorema de la geometría medieval:

«...al cabo de cuatro años, Pascal había escrito y publicado un ensayo original sobre secciones cónicas, que asombró a Descartes. Todo giraba en torno al milagro de un teorema que Pascal denominaba "*l'hexagramm mystique*", comúnmente reconocido como el teorema más importante de la geometría medieval, el cual establece que si se inscribe un hexágono en una cónica...»

(Turnbull, [52])

Desgraciadamente, el libro de Pascal *Trate pour les coniques*, donde se supone que estaban no solo dicho resultado sino los muchos corolarios (aproximadamente cuatrocientos, según el padre Mersenne) que Pascal mismo pudo deducir de él, se ha perdido.

Yo, por mi parte, tuve en mis manos una edición moderna de las obras completas de Pascal (ver [36]) y encontré que dicho teorema no figura en el pequeño artículo *Essai pour les coniques*, aunque Leibnitz, en una carta incluida en esa misma edición, sí se refiere a dicho teorema como parte integral del texto perdido de Pascal. Esto de ninguna manera aclara el problema de origen pero, como este no es realmente un trabajo de historia, preferí dejar la cuestión hasta este punto.

## 1.1 Período de construcción

En general, seis puntos en un plano afín o proyectivo determinan un hexágono *una vez que se les ha ordenado cíclicamente*. Es decir, partimos de uno de ellos, pasamos al siguiente y así consecutivamente hasta llegar al último de los puntos para, finalmente, regresar al primero.

Con ello es posible, entonces, identificar a los diversos elementos del hexágono determinado de esa manera como lo serían sus pares de lados y de vértices opuestos, sus ternas tanto de lados como de vértices alternos, sus diagonales tanto principales como secundarias, etc.

Recordemos el hecho de que cinco puntos no alineados por ternas en dicho tipo de planos siempre están en una única cónica. En general, se dice que un conjunto de puntos es *concónico* cuando dicho conjunto está contenido en una cónica.

Desde este punto de vista, el teorema de Pascal, que enunciarnos a continuación, establece la condición para que seis puntos en un plano sean concónicos (ver Brieskorn-Knörrer [6] para un tratamiento algebro-geométrico):

*Un hexágono está inscrito en una cónica si y solo si las intersecciones de sus pares de lados opuestos están alineadas.*

Las intersecciones a que alude el teorema son tres de los 45 puntos llamados *puntos fundamentales* que determinan los vértices de un hexágono en el plano. Daremos una demostración de este teorema en el capítulo siguiente.

En este caso, llamaremos *recta de Pascal* del hexágono a la recta mencionada en dicho teorema.

Seguramente es una figura como la del enunciado de este teorema (ver figura 1.1) a la que Pascal se refería como el *hexagrama místico* en sus escritos.

Es muy interesante el hecho de que, de acuerdo a George Salmon (ver [44]), el dual de este teorema (o su *recíproco*, en la terminología usual del siglo pasado) (ver el artículo de C. J. Brianchon [5]) se conoció hasta 1806.

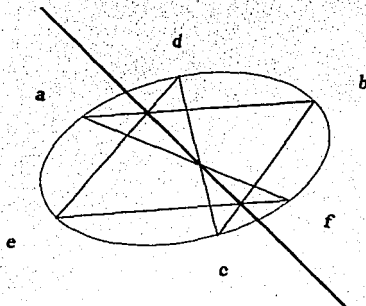


Figura 1.1: Recta de Pascal del hexágono  $abcdef$

También de acuerdo a Salmon (ib.id.), fué Jacob Steiner el primero en llamar la atención de los matemáticos hacia la figura que se obtiene uniendo de todas las formas posibles seis puntos fijos en una cónica. Así, Steiner probó en 1828 (ver [48]) que tomando seis puntos fijos en una cónica *en todos los ordenes cíclicos posibles* se obtienen exactamente sesenta rectas de Pascal. Quizás quepa mencionar aquí, para efectos del conteo de dichas rectas, que los dos órdenes cíclicos  $a, b, c, d, e$  y  $f$ , así como  $f, e, d, c, b$  y  $a$  determinan, estrictamente hablando, el mismo hexágono.

Así, la configuración que llamaremos del *Hexagrama místico* asociada a una cónica fija  $C$  y a seis puntos en ella, digamos  $a, b, c, d, e$  y  $f$ , también fijos, se empieza a construir con dichas sesenta rectas de Pascal en el plano proyectivo real como se describe a continuación.

Es fácil ver que dichas rectas pasan de cuatro en cuatro por los puntos fundamentales, dando un total de (solamente) cuarenta y cinco puntos tales.

Steiner mismo probó que las sesenta rectas de Pascal de un hexagrama concurren por ternas en veinte puntos, llamados *puntos de Steiner*, y conjeturó que estos puntos se hallaban de cuatro en cuatro sobre



cinco rectas concurrentes. Poco después Julius Plücker demostró (ver Plücker [37]) que, en efecto, los puntos de Steiner están alineados de acuerdo a la conjetura, pero que lo están, no sobre cinco, sino sobre quince rectas, llamadas *rectas de Plücker*, las cuales pasan por ternas por dichos puntos de Steiner. Posteriormente Hesse demostró también que los puntos de Steiner constituyen diez pares de puntos conjugados armónicos respecto a la cónica  $C$  y que dicha figura es la de tres triángulos en perspectiva.

Llamaremos *Configuración alemana* al sistema constituido por los puntos de Steiner y las rectas de Plücker, en atención a los autores mencionados anteriormente.

El reverendo T.P. Kirkman probó (ver Kirkman [31], 1840) que las rectas de Pascal concurren por ternas en sesenta puntos, todos ellos distintos genéricamente de los de Steiner, llamados *puntos de Kirkman*, y que dichos puntos están unidos por pares por noventa rectas, cada una de las cuales pasa por dos de los puntos fundamentales del hexagrama.

Llamaremos *Configuración básica* al sistema formado por las rectas de Pascal y los puntos de Kirkman de un hexagrama.

Hesse señaló una cierta correspondencia que existe entre los puntos y rectas de esta configuración (que identificaremos con el número 2.2 a lo largo de este trabajo), aunque también señaló que no se trata de la apolaridad (polo-polar) *al menos respecto de la cónica original  $C$* .

Posteriormente, Sir Arthur Cayley y Salmon probaron casi simultáneamente (ver Cayley ([12], 1846) y Salmon [44]) que los puntos de Kirkman también están alineados por ternas en veinte rectas y Salmon por su parte también probó que dichas rectas concurren de cuatro en cuatro en quince puntos.

Llamaremos a estos elementos *rectas de Cayley y puntos de Salmon*, respectivamente, así como *Configuración inglesa* a la figura determinada por todos ellos.

Fué Salmon también quien empleó las expresiones simbólicas del tipo  $(ab, cd, ef)$ , a las cuales llamó *sintemas*, refiriéndose a un cierto papel fundamental que estas desempeñan en el estudio del hexagrama.

Seguramente la contribución más importante de Giuseppe Veronese a la teoría del hexagrama místico (ver Veronese [54], 1876-1877) es que la configuración básica se separa o descompone en seis subconfiguraciones arguesianas (o de Desargues, a las que Veronese llamó directa-

mente *figuras*) y que la correspondencia de Hesse, restringida a cada una de estas subconfiguraciones es una apolaridad respecto de alguna otra cónica auxiliar. También demostró que cinco cualesquiera de estas figuras determinan a la sexta de ellas.

Por otra parte <sup>1</sup>, Veronese también demostró a este respecto que, aparte de la configuración básica original, digamos  $H_1$ , hay una infinidad de sistemas tales,  $H_n$  para los mismos seis puntos en una cónica  $C$ . Cinco figuras de cualquiera de estos sistemas, después del primero, bastan para determinar una figura del sistema precedente y una más en el sistema siguiente: esta relación se establece mediante las noventa rectas halladas por Kirkman. Sin embargo, las rectas de Cayley y los puntos de Steiner son comunes a todos estos sistemas; es decir, los sesenta puntos de Kirkman de cada uno de estos sistemas se hallan, siempre por ternas, sobre las mismas veinte rectas de Cayley y, así mismo, las sesenta rectas de Plücker de cada uno de estos sistemas pasan todas ellas, por ternas también, por los mismos veinte puntos de Steiner. De aquí se sigue que los puntos de Salmon y las rectas de Plücker y, por ende, las configuraciones inglesa y alemana, son comunes a todos estos sistemas  $H_n$ .

## 1.2 Período de madurez

Hasta este punto, las propiedades del hexagrama místico se obtuvieron basándose en aplicaciones sucesivas del teorema de Desargues y algunas de sus generalizaciones, así como en una selección muy cuidadosa de los conjuntos de puntos y rectas a considerar en cada caso. Esto hace al estudio de dicha configuración, aunque interesante, muy intrincado.

Las contribuciones de Salmon correspondientes a este período incluyen el empleo de sistemas lineales de cónicas, así como el de sus sistemas, que ya hemos mencionado anteriormente.

Curiosamente, en el mismo volumen de las memorias en que Veronese

---

<sup>1</sup>Estas otras aportaciones de Veronese no serán analizadas en este trabajo. Sin embargo, también resultan muy interesantes y es de justicia elemental mencionarlas. Las demostraciones correspondientes se encuentran en el trabajo original de Veronese [47].

publicó su trabajo, también apareció un artículo de Luigi Cremona (ver [19]) donde deduce las propiedades de la figura a partir de las propiedades de incidencia en el espacio tridimensional. Este método, que ya había sido usado por Cayley desde 1868, permitió a Cremona estudiar a esta figura, además, como un caso particular de una figura en el espacio tridimensional tal que:

1. Depende de una configuración de quince rectas que se hallan por ternas en quince planos los cuales, a su vez, pasan por ternas por las rectas consideradas <sup>2</sup>,
2. Dicha configuración espacial se puede obtener a partir de una figura de seis planos, que Cremona llamó el núcleo (*nocciolo*, en la nomenclatura del mismo Cremona) de la configuración y, finalmente, en el sentido de la geometría algebraica,
3. Hay una única relación algebraica entre las ecuaciones de dichos planos.

De esta última propiedad se sigue que se pueden ver dichas ecuaciones como determinando lugares geométricos en el espacio proyectivo de dimensión cuatro.

Aquí cabría mencionar que H. W. Richmond también siguió este procedimiento (ver [38], [39], [40] y [41]) logrando un tratamiento relativamente simple del hexagrama místico así como una interesante generalización.

El procedimiento de Cremona fué el siguiente:

1. Relacionar la geometría de una superficie cúbica nodal (con un único nodo cuadrático) con lo que ahora se conoce como el cono tangente a dicha superficie sobre dicho nodo, a través de los triángulos tritangentes a dicha superficie,

---

<sup>2</sup>Este es un ejemplo de correspondencia de tipo (3,3) que se puede establecer entre dos conjuntos de quince objetos y que fué utilizada por Sylvester para dar una función de seis letras con solo seis valores ante permutaciones de sus argumentos.

2. Observar que la configuración básica de quince rectas y quince planos también se puede obtener (aunque no de forma única) de las veintisiete rectas en una superficie cúbica lisa en  $P^3(\mathbf{C})$ , donde  $\mathbf{C}$  es el campo complejo, cada vez que se seleccionan ciertas rectas de entre estas veintisiete para formar un par de los triedros de Steiner (los cuales determinan a la superficie considerada en este caso) y, finalmente,
3. Abstractar la estructura de la configuración deseada.

Con el resultado y las técnicas de Brianchon se abre el estudio de lo que ahora se conoce como la dualidad en los espacios proyectivos y, por supuesto, se tiene toda la pléyade de resultados duales a los ya mencionados. En 1879, *Miss Christine Ladd*<sup>3</sup> (ver [32]) propuso un sistema notacional, respecto de esta teoría, que resultara más manejable que los empleados hasta ese entonces. Esto le permitió:

1. Reconstruir más naturalmente el hexagrama místico sin tener que recurrir, por ejemplo, a las tablas de Veronese (op.cit.),
2. Unificar ambos tipos de resultados (los «directos» y sus duales),
3. Relacionar las configuraciones inglesa y alemana a través de una configuración «mestiza» (de puntos de Steiner y rectas de Cayley) y, finalmente,
4. Obtener varios resultados a través de las relaciones del punto 2 de esta misma lista.

Hubo trabajos, como el de Richmond, que llevaron esta síntesis más adelante aún. En términos generales, este autor construye los elementos del hexagrama místico por bloques (idea que ya había trabajado Luigi Cremona, entre otros). Esto, si bien tiene muchas ventajas sobre otros enfoques, dificulta la identificación de algunas de las configuraciones que asociaremos a dicho hexagrama en el capítulo tercero de este trabajo.

<sup>3</sup>El título que asigno a esta matemática es el que ella recibe en la publicación que referimos (donde también se le presenta como adscrita a la universidad Johns Hopkins). No le he asignado algún otro título por carecer de más información al respecto.

Fué en esta época que el lenguaje de configuraciones se empezó a utilizar extensivamente, sobre todo en la Europa continental, y de la cual da un recuento Ernst Steinitz en «la enciclopedia» (ver [49]). Aquí se menciona que nuestras configuraciones fueron tratadas primeramente por Jan de Vries (ver [55] y [56]) como configuraciones combinatorias y conjuntamente con las llamadas configuraciones poliédricas, todo esto también de acuerdo a la nomenclatura de la época.

### 1.3 Contribuciones más recientes

A pesar de que para ese entonces (fines del siglo XIX) ya estaban sentadas las bases para estudiar algunos de los aspectos más punzantes de esta teoría, a saber, los «misterios» detrás de las selecciones de rectas y de puntos que se realizaban para hallar más elementos de la configuración <sup>4</sup>, el tema pasó de moda. De acuerdo a Christine Ladd (ver [32]), quedó la idea de que el artículo de Veronese mencionado anteriormente dejó a los matemáticos poco por hacer sobre el tema.

A partir de entonces, se pueden encontrar ejercicios en diversos textos de geometría proyectiva (por ejemplo en Veblen y Young [53], Eves [23] y otros) donde se pide reconstruir algunos de los elementos básicos del hexagrama y, ocasionalmente, se menciona la configuración completa. También, en algunos textos de geometría algebraica (por ejemplo en Clemens [15], Brieskorn [6], Fulton [24] y Griffiths y Harris [25]) se demuestra el teorema de Pascal, aunque solo como una aplicación de técnicas más recientes y poderosas como lo son los sistemas lineales de curvas cúbicas planas y el teorema de Cayley-Bacharach, sin pretensiones de continuar adentrándose en un estudio moderno de esta configuración.

Aún los textos sobre geometrías finitas departen del tema tratando solamente algunos aspectos muy básicos, como lo serían el contar el número de elementos y de rectas en un plano de este tipo o bien, el detectar la existencia o no de la configuración de Desargues o la de Pappus y, en su caso, identificar el grupo de automorfismos de dicha configuración.

---

<sup>4</sup>Quizás sea esta otra de las razones por las que el término *hexagrama místico* haya sobrevivido.

Una excepción a esta tendencia es el estudio de  $P^2(k)$ , donde  $k$  es el campo con cuatro elementos:

En el texto de Camcron y Van Lint (ver [7]) se da una construcción combinatoria de dicho plano y en el de Wallis [57] se demuestra su unicidad, utilizando la unicidad (salvo isomorfismo), de las 1-factorizaciones posibles para la gráfica  $\mathcal{G}$  que construiremos en el capítulo tercero de este trabajo. Nuevamente, en el texto [57], se menciona que las consideraciones hechas ahí solo se aplican a  $P^2(k)$  pues, cuando el número de puntos aumenta, la variabilidad y el número de 1-factorizaciones se tornan demasiado grandes como para aplicarlas al problema de isomorfismo entre planos proyectivos.

El primer volumen de los libros de Hirschfeld y Thass (ver [29]) concluye con un estudio combinatorio de los planos proyectivos de orden pequeño; es decir, para  $P^2(K)$ , donde  $K = \mathbf{Z}_q$  para  $q = 2, 3, \dots, 9$  y  $2^h$ , con  $h = 4, 5, 6, 7$  y  $8$ .

En todo caso, el objetivo principal parece ser el de contar el número de los  $k$ -arcos, los  $k$ -arcos completos y los óvalos, para  $k$  pequeñas<sup>5</sup>, en dichos planos.

Desde nuestro punto de vista el caso de  $P^2(k)$  resulta particularmente interesante. A continuación citamos los resultados que más acercan este estudio al nuestro.

Denotaremos con  $\mathcal{O}$  a un 6-arco, por ser estos los óvalos en  $P^2(k)$ .

1. Cada 4-arco pertenece a un único óvalo  $\mathcal{O}$ .
2. Un óvalo  $\mathcal{O}$  es un hexágono de Brianchon de 15 formas distintas, determinando así 15 puntos de Brianchon (o B-puntos).
3. Así, los 21 puntos del plano son, precisamente, los 6 puntos de  $\mathcal{O}$  junto con sus 15 B-puntos.

<sup>5</sup>Siguiendo la notación de Hirschfeld y Thass [27]:

$k$ -arco := curva con  $k$  puntos no colineales por ternas,

$k$ -arco completo :=  $k$ -arco no contenido en ningún  $(k+1)$ -arco y

óvalo :=  $k$ -arco maximal.

$n$ -grama :=  $\{n$  rectas en  $PG(2, k)$   $\}$  no concurrentes por ternas  $\} \cup$   $\{$  puntos de intersección de pares de dichas rectas  $\}$  y

$n$ -estigma := dual de un  $n$ -grama.

[ $n$ -stigm en el original]. Aquí observamos que el término *hexagrama*, tal como lo usa Pascal, resulta dual del empleado en textos como este.

4. Por cada B-punto pasan 3 bisecantes del hexagrama en  $\mathcal{O}$ .  
 $\mathcal{O}$  tiene 15 bisecantes, cada una de las cuales contiene a 3 de los B-puntos.
5. Por lo tanto, hay 6 rectas disjuntas <sup>6</sup> (las S-rectas) a  $\mathcal{O}$ .  
 Por cada B-punto pasan 2 S-rectas. es decir, las S-rectas no concurren por ternas y, por lo tanto, forman una figura  $\mathcal{O}'$  dual de  $\mathcal{O}$ .
6. Cada hexagrama  $\mathcal{O}$  tiene a  $S_6$  como grupo de colineaciones.
  - Las colineaciones que fijan a un punto de  $\mathcal{O}$  son los seis subgrupos "naturalmente" isomorfos a  $S_5$  de  $S_6$ .
  - Las colineaciones que fijan una recta de  $\mathcal{O}'$  son los otros seis  $S_5$  de dicho grupo de colineaciones.
7. Hay 168 óvalos en  $P^2(k)$ .
8. Los 56 óvalos con un número par de puntos en común con un óvalo  $\mathcal{O}$  dado forman un  $2 - (56, 11, 2)$  diseño <sup>7</sup> cuyos bloques son los 11 ovalos iguales o ajenos a  $\mathcal{O}$ .

El otro caso interesante para nosotros sería el de  $P^2(\mathbb{Z}_3)$ , donde se detecta, por primera vez, a una configuración de Desargues. Dicha configuración está constituida por las rectas externas <sup>8</sup> y los B-puntos asociados a una cónica fija  $\mathcal{O}$ .

En este caso, las 10 rectas externas también son las rectas de Pascal asociadas a  $\mathcal{O}$ .

<sup>6</sup>Skew-lines en el original. Se refiere a rectas en  $PG(2,4)$  que no intersectan a  $\mathcal{O}$ .

<sup>7</sup>En general, un  $t - (v, k, \lambda)$  diseño es una pareja  $(X, \mathcal{B})$ , donde  $X$  es un conjunto de puntos de cardinalidad  $v$ , y  $\mathcal{B}$  es una colección de subconjuntos de  $k$  elementos de  $X$ , llamados bloques, con la propiedad de que cualesquiera  $t$  puntos de  $X$  pertenecen a exactamente  $\lambda$  bloques.

<sup>8</sup>En  $P^2(\mathbb{Z}_3)$  hay 15 puntos por los que se pueden trazar exactamente dos bisecantes a una cónica fija  $\mathcal{O}$ . Por cada uno de dichos puntos, además, se pueden trazar dos tangentes a  $\mathcal{O}$ . Es por esto que se les llama puntos externos a  $\mathcal{O}$ . Con esto, los B-puntos serían los puntos internos a  $\mathcal{O}$ .

Así, se tienen en total, para una cónica fija  $\mathcal{O}$ , 6 tangentes y 15 bisecantes. Las otras 10 rectas serían las rectas externas a  $\mathcal{O}$ , tres por cada B-punto.





## Capítulo 2

# Construcción del hexagrama

Las construcciones de este capítulo se efectúan en el plano proyectivo sobre un campo  $k$  con  $\text{char}(k) \neq 2$  y  $|k| > 7$ .

La restricción sobre la característica del campo base  $k$  es para evitar que aparezca la configuración de Fano en nuestro plano  $P^2(k)$ . El interés por evitar esta situación radica en que dicha configuración (la cual es isomorfa a  $P^2(\mathbb{Z}_2)$ , el plano proyectivo de siete puntos) es la obstrucción geométrica para tener una diferencia efectiva entre conju- gados armónicos (ver teorema 2.4.1). Es decir,

### Teorema 2.0.1

Si  $P$  es cualquier subplano de  $P^2(k)$ ,  
entonces  $P$  es un plano sobre algún subcampo de  $k$ .

**Demostración:** ver [29]  $\square$

Por lo tanto <sup>1</sup>,

$$P^2(\mathbb{Z}_2) \subset P^2(k) \iff \text{char}(k) = 2.$$

Por otra parte, la restricción sobre la cardinalidad es solamente para realizar nuestra construcción teniendo puntos suficientes para ello sobre cada recta de  $P^2(k)$ .

---

<sup>1</sup>Esta es precisamente la condición de W.T. Tutte que caracteriza a los matroides unimodulares o geometrias combinatorias (ver N. White, [59], teorema 3.2.3, p.p. 46-48).

En la demostración del teorema de descomposición de Veronese 2.3.1 solamente se hace mención a una caracterización que supuestamente, termina dicha demostración (ver [9]). Se ha preferido tratar dicha caracterización en el capítulo tercero por su tipo netamente combinatorio. En ese mismo capítulo se verá también como se puede emplear el procedimiento anterior para generar la configuración de Desargues a que pertenece una recta de Pascal dada a partir de ésta. Esta caracterización también está discutida en [9].

En este capítulo emplearemos casi coloquialmente el término *configuración* como sinónimo de un conjunto de puntos y rectas en  $P^2(k)$ .

## 2.1 Un teorema de geometría proyectiva

Esta sección está dedicada básicamente a la demostración del teorema 2.1.2, el cual será de utilidad en la cuarta sección de este mismo capítulo.

Considérense nueve puntos distintos en  $P^2(k)$  situados por ternas sobre tres líneas rectas concurrentes dadas.

Considérense ahora las ternas de triángulos formadas con estos puntos como vértices tales que

- (i) Los vértices de cada triángulo están situados uno en cada una de las rectas dadas y
- (ii) Los pares de triángulos de cada terna no comparten ni uno solo de sus vértices.

Entonces es fácil ver que

- Hay treinta y seis de estas ternas y los triángulos de cada terna están en perspectiva por pares.
- Cada triángulo formado con estos puntos de acuerdo a la condición (i) pertenece a cuatro de dichas ternas.

Las demostraciones de los hechos siguientes, relativos a las ternas de triángulos definidas anteriormente, paralelizan exactamente a las de la geometría proyectiva clásica (es decir, para cuando  $k = \mathbf{R}$ ):

**Teorema 2.1.1** Los ejes de perspectiva de cada una de estas ternas de triángulos  $I$  concurren en un cierto punto  $S_I$ .  $\square$

**Teorema 2.1.2** Los puntos  $S_I$ , correspondientes a cuatro ternas de triángulos, con uno de dichos triángulos en común, están alineados.

**Demostración:** Sean  $r_A$ ,  $r_B$  y  $r_C$  las rectas concurrentes dadas y sean  $A_i$  (respectivamente  $B_i$  y  $C_i$ ) los puntos dados sobre la recta  $r_A$  (respectivamente  $r_B$  y  $r_C$ ), para  $i=1, 2$  y  $3$ .

Considérense las cuatro ternas de triángulos con, digamos, el triángulo  $A_1B_1C_1$  en común.

En la tabla siguiente, los renglones representan a las ternas de triángulos consideradas y la última columna denota al punto <sup>2</sup> donde concurren los tres ejes de perspectiva correspondientes.

$A_1B_1C_1$	$A_2B_2C_2$	$A_3B_3C_3$	$S_1$
$A_1B_1C_1$	$A_2B_2C_3$	$A_3B_3C_2$	$S_2$
$A_1B_1C_1$	$A_2B_3C_2$	$A_3B_2C_3$	$S_3$
$A_1B_1C_1$	$A_2B_3C_3$	$A_3B_2C_2$	$S_4$

Así, basta demostrar que tres cualesquiera de estos puntos están alineados.

Para esto, considérense los triángulos siguientes dados por sus lados:

$(A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3)$ ,  $(A_1C_1, B_2C_3, B_3C_2)$  y  $(A_1C_1, A_3C_3, A_2C_2)$ ,

respectivamente (ver la figura 2.1).

Los pares de dichos triángulos tienen a las rectas dadas  $r_B$ ,  $r_C$  y  $r_A$  como sus ejes de perspectiva y a los puntos  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  como sus centros de de perspectiva, respectivamente.

Ya que las rectas  $r_i$  son concurrentes (por hipótesis), los puntos  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  están alineados (ver la figura 2.2)  $\square$

<sup>2</sup>Este punto también es llamado *punto de Steiner*, tanto en la nomenclatura clásica como en la jerga más moderna de la geometría computacional. He preferido no usar esta denominación para evitar confusiones con otro tipo de puntos también llamados de Steiner y que consideraremos ampliamente en el desarrollo ulterior de este trabajo.

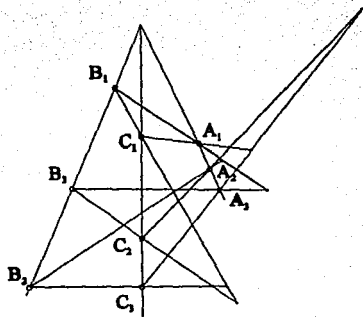


Figura 2.1: Hipótesis del teorema 2.1.2

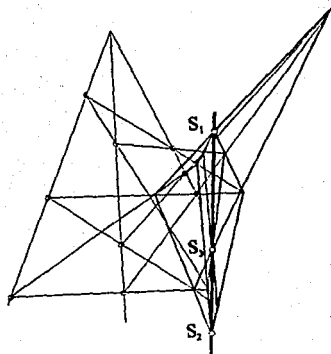


Figura 2.2: Conclusión del teorema 2.1.2

## 2.2 El hexagrama místico. 1a. Parte

A continuación construiremos los primeros elementos del hexagrama místico determinado por seis puntos fijos en una cónica  $C$ . Para ello, seguiremos la notación siguiente:

Sean  $P_1, \dots, P_6$  seis puntos no ordenados en  $P^2(k)$ .

1.  $(a, b, c, d, e, f)$  denotará a un ordenamiento sin repetición de los puntos  $P_1, \dots, P_6$ .
2. Una palabra  $abcdef$  denotará al hexágono determinado por el ordenamiento  $(a, b, c, d, e, f)$ .<sup>3</sup>
3.  $ab = 0$  denota a una ecuación para la recta que pasa por los puntos  $a$  y  $b$ .
4.  $(bc, ef)$  es el punto de intersección de las rectas dadas por las ecuaciones  $bc = 0$  y  $ef = 0$ .

**Definición 2.2.1** Un *lado fundamental* determinado por  $P_1, \dots, P_6$  es cada una de las rectas determinadas por los pares no ordenados  $P_i P_j$  de dichos puntos.

**Definición 2.2.2** Un *punto fundamental* es el punto de intersección de un par de lados fundamentales que no comparten uno de los puntos  $P_i$ .

<sup>3</sup>Si  $M$  es el conjunto de ordenamientos sin repetición de los puntos  $P_1, \dots, P_6$  y  $\sim$  relaciona a dos elementos de  $M$  si y solo si determinan el mismo hexágono, entonces  $M/\sim$  parametriza al conjunto de hexágonos con vértices  $P_1, \dots, P_6$ . En el capítulo quinto veremos que esta relación está inducida por la acción natural del grupo diédrico  $D_6$  en  $M$ .

Así, la asignación

$$(a, b, c, d, e, f) \longmapsto abcdef$$

es un invariante de la relación ya establecida y, por consiguiente, está bien definida en  $M/\sim$ .

Así, cada hexágono  $abcdef$  tiene asociados tres puntos fundamentales:  $(ab, de)$ ,  $(bc, ef)$  y  $(cd, fa)$ .

Aún cuando tenemos 120 formas de ordenar cíclicamente a seis elementos dados en abstracto, cada ordenamiento, para el caso que estamos tratando, junto con su ordenamiento inverso (por ejemplo:  $abcdef$  y  $fedcba$ ) determinan siempre el mismo hexágono, por lo que seis puntos en posición general en  $P^2(k)$  determinan solamente 60 hexágonos.

Así, el hexagrama determinado por un conjunto de seis puntos  $P_1, \dots, P_6$  en  $P^2(k)$ , en posición suficientemente general, consta de dichos puntos como vértices, así como de sus 15  $(= \binom{6}{2})$  lados y 45  $(= \frac{60 \times 3}{4})$  puntos fundamentales, respectivamente.

La demostración siguiente del teorema de Pascal utiliza sistemas lineales de cónicas en  $P^2(k)$  y se ha elegido de entre muchas otras por su simplicidad, porque también simplifica notablemente las demostraciones correspondientes a las construcciones de los puntos de Steiner y de Kirkman y, finalmente, porque tampoco requiere de suposiciones extra sobre la característica o la cardinalidad del campo  $k$ . Tal sería el caso de una de las demostraciones más simples y elegantes de dicho teorema, que emplea sistemas lineales de curvas cúbicas en  $P^2(C)$  (ver Brieskorn-Knörrer [6]).

Esta demostración, así como las dos subsiguientes, se han tomado con las modificaciones necesarias del libro de Salmon [44].

**Teorema 2.2.1** Sea  $abcdef$  un hexágono inscrito en una cónica  $C$ . Entonces, sus puntos fundamentales están sobre la recta  $bc - ef = 0$ .

**Demostración:** Ya que  $C$  circunscribe al cuadrilátero  $abcd$ , tenemos que

$$C: \lambda ab \cdot cd - \mu bc \cdot ad = 0$$

Análogamente, al circunscribir  $C$  también al cuadrilátero  $defa$ ,

$$C: \lambda' de \cdot fa - \mu' ef \cdot ad = 0$$

Así,

$$\lambda ab \cdot cd - \lambda' de \cdot fa = \mu(bc - ef) \cdot ad \quad (2.1)$$

Dicha expresión igualada a cero representa a una cónica tal que

(1) Pasa por los puntos  $(ab, de)$ ,  $(cd, fa)$ ,  $a$  y  $d$ , de acuerdo a los términos del lado izquierdo de la igualdad 2.1

y (2) Es reducible:

Una de sus componentes es la recta  $ad = 0$  y la otra, que es la recta  $bc - ef = 0$ , pasa por los puntos  $(ab, de)$ ,  $(cd, fa)$  y  $(bc, ef)$ , todo esto de acuerdo al término del otro lado de la misma igualdad 2.1  $\square$

**Definición 2.2.3** La recta del teorema 2.2.1 es la *recta de Pascal* del hexágono  $abcdef$ .

**Notación 2.2.1** Dicha recta se denotará con el símbolo  $\overline{abcdef}$  (ver la figura 1.1).<sup>4</sup>

**Observación 2.2.1** Las ecuaciones  $cd - fa = 0$  y  $ab - de = 0$  también describen a la recta dada por la ecuación  $bc - ef = 0$ .

Así, ya que los puntos  $P_1, \dots, P_6$  determinan 60 hexágonos, la cononicidad de dichos puntos da 60 rectas de Pascal.

En lo subsiguiente, los puntos  $P_1, \dots, P_6$  se tomarán siempre sobre una cónica fija  $C$ . Así,

**Definición 2.2.4** El *hexagrama místico* determinado por los puntos  $P_1, \dots, P_6$  tiene como puntos y lados fundamentales así como rectas de Pascal a los elementos homónimos definidos anteriormente.

---

<sup>4</sup>Nuevamente, tenemos que la asignación siguiente:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow (P^2(\mathbf{k}))^* \\ (a, b, c, d, e, f) &\longmapsto \overline{abcdef} \end{aligned}$$

es invariante bajo la relación  $\sim$ .

$(P^2(\mathbf{k}))^*$  denota al espacio proyectivo dual de  $P^2(\mathbf{k})$ .

**Teorema 2.2.2 (Steiner)** Las rectas de Pascal de los hexágonos  $abcdef$ ,  $befcda$  y  $fcbeda$  son concurrentes.

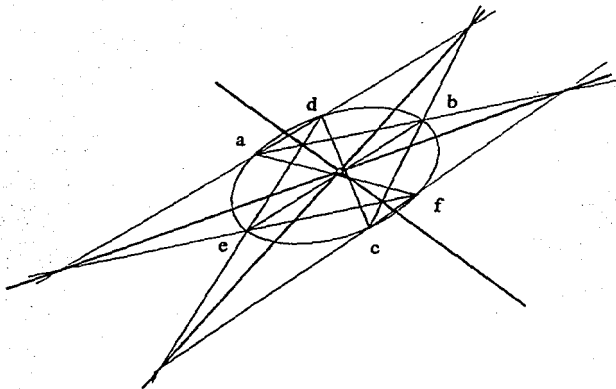


Figura 2.3: Punto de Steiner de las rectas  $\overline{abcdef}$ ,  $\overline{befcda}$  y  $\overline{fcbeda}$

**Demostración:** Por el teorema 2.2.1, las rectas de Pascal de los hexágonos propuestos tienen como ecuaciones

$$\begin{aligned} a \quad bc - ef &= 0, \\ a \quad ef - da &= 0 \\ \text{y a} \quad cb - da &= 0, \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

Ya que

$$(bc - ef) + (ef - da) - (cb - da) = 0,$$

tenemos que dichas rectas son concurrentes  $\square$

**Definición 2.2.5** El punto de concurrencia del teorema 2.2.2 es un *punto de Steiner* del hexagrama místico.



**Teorema 2.2.3 (Kirkman)** Las rectas de Pascal de los hexágonos  $abcdef$ ,  $abdcfe$  y  $a fcbde$  son concurrentes.

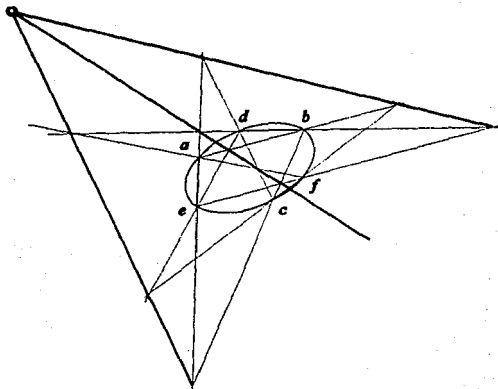


Figura 2.4: Punto de Kirkman de las rectas  $\overline{abcdef}$ ,  $\overline{abdcfe}$  y  $\overline{a fcbde}$

**Demostración:** Nuevamente, por el teorema 2.2.1, las rectas mencionadas tienen ecuaciones

$$\begin{aligned} de - ab &= 0, \\ fc - de &= 0 \\ \text{y } cf - ab &= 0, \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

Así, ya que

$$(de - ab) + (fc - de) - (cf - ab) = 0,$$

dichas rectas son concurrentes  $\square$

**Definición 2.2.6** El punto de concurrencia del teorema 2.2.3 es un *punto de Kirkman* del hexagrama místico.

## 2.3 El teorema de Veronese

Observemos primeramente que los lados de los hexágonos mencionados en el teorema anterior cubren una buena parte de la colección de lados fundamentales del hexagrama y que el resto de los elementos de dicha colección son los lados de un cierto hexágono  $\alpha$ . Así, llamando  $K(\alpha)$  al punto de Kirkman del teorema anterior, podemos establecer la correspondencia de Hesse:

### Definición 2.3.1

$$K(\alpha) \longleftrightarrow \bar{\alpha} \quad (2.2)$$

es la correspondencia de Hesse entre puntos de Kirkman y rectas de Pascal en un hexagrama dado.

Explícitamente, para el punto de Kirkman  $K(\alpha)$  del teorema 2.2.3,  $\bar{\alpha} = \overline{acebfd}$  es la recta de Pascal que le corresponde de acuerdo a la correspondencia 2.2 recién definida.

A continuación tenemos el teorema al que dedicamos este apartado. Ya nos hemos referido a él anteriormente y, tal como ya se había mencionado, es una de las contribuciones más importantes de Veronese a la teoría del hexagrama místico.

**Teorema 2.3.1** (Veronese [54]) La configuración de puntos de Kirkman y rectas de Pascal del hexagrama místico se descompone en seis configuraciones arguesianas.

**Demostración:** La correspondencia 2.2 asocia a cada recta de Pascal  $\bar{\alpha}$  (asociada al hexágono  $\alpha$ ), simultáneamente,

1. Un punto de Kirkman  $K(\alpha)$  y
2. Las tres rectas de Pascal que determinan a dicho punto.

Repetiendo el procedimiento una vez más para cada una de las rectas en (2) de la lista anterior, obtenemos una colección de puntos y rectas donde cada punto está asociado, como en (1) de la misma lista, a alguna de las rectas de dicha colección por lo que, al repetir el procedimiento

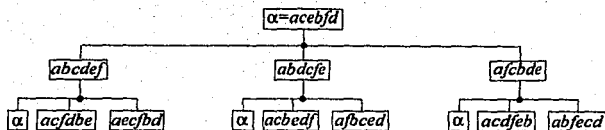


Figura 2.5: Configuración arguesiana generada con la correspondencia 2.2

en cualquiera de las rectas ya obtenidas, ya no se obtienen puntos ni rectas «nuevas».

En la figura 2.5 cada nodo representa al punto de Kirkman correspondiente a la recta de Pascal que se halla justo sobre de dicho nodo.

En total obtenemos una figura con

1. 10 puntos y 10 rectas tales que
2. Por cada punto pasan 3 de las rectas y
3. Cada recta contiene a 3 de los puntos mencionados.

Por otra parte, la correspondencia 2.2 también establece la propiedad combinatoria que caracteriza a la configuración arguesiana entre las demás configuraciones que satisfacen las tres condiciones anteriores (ver el teorema 3.2.2 del capítulo siguiente) (□)

En vista del teorema anterior, ya que la colección de rectas de Pascal y puntos de Kirkman del hexagrama místico queda partida propiamente en seis configuraciones, cada una de dichas configuraciones es una componente de dicho conjunto de puntos y rectas. Tal y como ya se mencionó, Veronese llamó *figuras* a dichas componentes.

**Definición 2.3.2** Abusando un tanto del lenguaje se acostumbra llamar a dichas configuraciones *componentes* (arguesianas) del hexagrama místico.

**Notación 2.3.1** Denotaremos como  $D_1, \dots, D_6$  a dichas componentes.

Otro resultado que cabe mencionar en este contexto es que, para cada hexágono  $\alpha$ , la correspondencia 2.2 es la apolaridad (ver Veblen y Young [53]) respecto de una cierta cónica, distinta de  $C$ , determinada por la componente de la recta  $\bar{\alpha}$  en el hexagrama místico.

## 2.4 El hexagrama místico. 2a. Parte

En esta sección definiremos el resto de los elementos del hexagrama místico, a saber, las rectas de Cayley y de Plücker, respectivamente, así como los puntos de Salmon.

El teorema siguiente, demostrado casi simultáneamente por Cayley (ver [12]) y Salmon (ver [44]), explicita la correspondencia de ciertas ternas de puntos de Kirkman con un cierto punto de Steiner de tal forma que los cuatro puntos mencionados están alineados.

Damos una demostración que es casi una cita textual de la de Veronese (ver [54], p.p. 663-665) para ilustrar el sabor y lo intrincado que podía llegar a ser un argumento en la geometría decimonónica.

Por otra parte, vemos también que este tipo de demostraciones, al depender tanto del seguimiento de una notación, aunque buena para ciertos propósitos, nos puede dificultar el estudio desde otro punto de vista, como lo sería el enfoque combinatorio en este caso.

**Teorema 2.4.1** Los tres puntos de Kirkman asociados de acuerdo a la correspondencia 2.2 a las rectas de Pascal que concurren en un punto de Steiner  $St$ , están en una recta  $c$  que también pasa por el punto  $St'$ , conjugado de  $St$ .

**Demostración:** Sea  $K$  un punto de Kirkman y sean  $p$ ,  $q$  y  $r$  las tres rectas de Pascal que pasan por  $K$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$p := \overline{abcdef}, \quad q := \overline{acdfbe} \quad \text{y} \quad r := \overline{acbedf}.$$

Sobre cada una de estas tres rectas se hallan tres puntos fundamentales del hexagrama, de acuerdo a la tabla siguiente, donde la notación se ha elegido de tal forma que los puntos  $T_i$  están sobre la recta  $p$ , los puntos  $Q_i$  están sobre la recta  $q$  y, finalmente, los puntos  $R_i$  están sobre la recta  $r$ :

$$\begin{array}{lll} T_0 := (af, dc) & Q_0 := (bc, dc) & R_0 := (af, be) \\ T_1 := (bc, ef) & Q_1 := (df, ab) & R_1 := (ac, ed) \\ T_2 := (de, ba) & Q_2 := (ef, ac) & R_2 := (bc, df) \end{array}$$

Nótese que el triángulo  $P_0Q_0R_0$  es el único, de entre los que se pueden formar con los puntos recién definidos, cuyos lados son todos lados fundamentales del hexagrama místico determinado por los puntos los puntos  $P_1, \dots, P_6$ .

Además, todos los lados de los triángulos  $T_1Q_1R_1$  y  $T_2Q_2R_2$  son rectas de Pascal (y esta vez también son las únicas posibilidades) del mismo hexagrama.

Así, los ejes de perspectiva de los pares de triángulos  $T_0Q_0R_0$  y  $T_1Q_1R_1$ , así como  $T_0Q_0R_0$  y  $T_2Q_2R_2$  son, respectivamente,

$$r_2 := \overline{faebdc} \text{ y } r_1 := \overline{afbecd}.$$

Por otra parte, para el par de triángulos  $T_1Q_1R_1$  y  $T_2Q_2R_2$ , se tienen las propiedades siguientes:

1. Las intersecciones de sus pares de lados correspondientes son los puntos de Kirkman  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  determinados de acuerdo al teorema 2.2.3.

Sea  $c$  la recta de alineación de dichos puntos.

2. Cada uno de estos puntos corresponde, de acuerdo a la correspondencia 2.2, a una cierta recta de Pascal.

Explícitamente, en la tabla siguiente tenemos, en orden descendente en cada columna, uno de los puntos  $K_i$  correspondientes a la propiedad (1), las rectas de Pascal que los definen y, finalmente, la recta de Pascal correspondiente a la propiedad (2).

$K_1$	$K_2$	$K_3$
$\frac{abcdfe}{abfedc}$	$\frac{fdebac}{bcadfc}$	$\frac{acbdef}{edfabc}$
$\frac{aedfbc}{fadbec}$	$\frac{bcfedc}{afbdec}$	$\frac{acefdb}{daebfc}$

Estas rectas de Pascal concurren en un punto de Steiner  $St$ , de acuerdo al teorema 2.2.2.

Finalmente, los ejes de perspectiva  $r_1$  y  $r_2$  concurren conjuntamente con la recta  $c$  en  $St'$ , el punto de Steiner conjugado de  $St$ , de acuerdo al teorema 2.2.2  $\square$

**Definición 2.4.1** La recta  $c$  del teorema 2.4.1 se denomina *recta de Cayley* (o recta de Cayley-Salmon) del hexagrama místico.

Tal como en el caso de la correspondencia 2.2, tenemos ahora la correspondencia biyectiva entre las rectas de Cayley  $c$  y los puntos de Steiner  $St$ , establecida en el teorema 2.4.1:

**Definición 2.4.2**

$$c \longleftrightarrow St \quad (2.3)$$

De acuerdo a la correspondencia 3.4, tenemos también una correspondencia biyectiva entre los puntos de Steiner y las ternas de componentes arguesianas del hexagrama místico por lo que ciertos conteos asociados a dichos puntos se pueden realizar también en relación a dichas ternas utilizando la correspondencia anterior, tal y como veremos en el capítulo siguiente, aunque ya vemos desde ahora que hay 20 rectas de Cayley en cada hexagrama místico.

**Teorema 2.4.2** (Steiner [48], Plücker [37]) Los puntos de Steiner se hallan alineados de cuatro en cuatro.

**Demostración:** Con la notación del teorema anterior, consideremos las cuatro ternas de triángulos siguientes:

$$\begin{array}{cccc}
 T_0Q_0R_0 & T_0Q_0R_0 & T_0Q_0R_0 & T_0Q_0R_0 \\
 T_1Q_1R_1 & T_1Q_1R_2 & T_1Q_2R_1 & T_1Q_2R_2 \\
 T_2Q_2R_2 & T_2Q_2R_1 & T_2Q_1R_2 & T_2Q_1R_1
 \end{array}$$

Calculemos los tres ejes de perspectiva de los pares de triángulos de cada una de estas ternas:

1a. terna	fadbec	afbdec	daebfc
2a. terna	$(dc, dfeabc)$	$(dfeabc, bacdef)$	$(dc, fedcab)$
	$(be, df)$	$(df, ac)$	$(be, fedcab)$
	$(af, bc)$	$(bc, ed)$	$(af, ed)$
	$\underline{afdce}$	$\underline{acbfde}$	$\underline{facdeb}$
3a. terna	$(dc, ef)$	$(ef, ab)$	$(dc, ab)$
	$(bc, ac)$	$(ac, df)$	$(be, df)$
	$(af, \underline{acbedf})$	$(\underline{acbedf}, \underline{abcedf})$	$(af, \underline{abcedf})$
	$\underline{febdca}$	$\underline{bacedf}$	$\underline{abcedf}$
4a. terna	$(dc, ef)$	$(ef, ab)$	$(dc, ab)$
	$(be, \underline{acbedf})$	$(\underline{acbedf}, \underline{bacfde})$	$(be, \underline{bacfde})$
	$(af, bc)$	$(bc, ed)$	$(af, ed)$
	$\underline{afebcd}$	$\underline{abcfed}$	$\underline{abedcf}$

Dichas ternas de rectas son concurrentes y, por el teorema 2.1.2, los cuatro puntos de concurrencia involucrados están en una recta, digamos  $pl$   $\square$

**Definición 2.4.3** La recta  $pl$  del teorema 2.4.2 se llama *recta de Plücker* (o recta de Steiner-Plücker) del hexagrama místico.

**Teorema 2.4.3** (Salmon) Las cuatro rectas de Cayley asociadas, de acuerdo a la correspondencia 2.3, a cuatro puntos de Steiner alineados de acuerdo al teorema 2.4.2, son concurrentes.

**Demostración:** Consideremos una recta de Pascal, digamos

$$p := \overline{abcdef}$$

y los tres puntos fundamentales que la determinan:

$$(ab, de), (bc, ef) \text{ y } (cd, fa).$$

Por cada uno de estos tres puntos pasan, además de  $p$ , otras tres rectas de Pascal, lo cual se explicita en la tabla siguiente:

$(ab, de)$	$(bc, ef)$	$(cd, fa)$
$\overline{bacdef}$	$\overline{abcdfe}$	$\overline{abdcef}$
$\overline{abcdef}$	$\overline{acbdef}$	$\overline{fbcdea}$
$\overline{bacdef}$	$\overline{acbdfe}$	$\overline{fbdcea}$

Así, los triángulos

$$\Delta_1 := (\overline{bacdef}, \overline{abcdfe}, \overline{abdcef}) \text{ y } \Delta_2 := (\overline{abcdef}, \overline{acbdef}, \overline{fbcdea})$$

están en perspectiva pues sus pares de lados correspondientes se intersectan sobre la recta  $p$ .

Es decir, las rectas de Cayley mencionadas (que son las que unen pares de vértices correspondientes de dichos triángulos) son concurrentes.

Si repetimos ahora el proceso con la recta

$$p' := \overline{abfdec}$$

obtenemos, análogamente, los triángulos

$$\Delta_1' := (\overline{abcdef}, \overline{cbadfe}, \overline{ceabfd}) \text{ y } \Delta_2' := (\overline{bacdef}, \overline{acbfde}, \overline{ecafbd})$$

para los cuales se aplica también el mismo resultado.

Ya que cada uno de estos dos últimos triángulos comparten un lado con alguno de los dos triángulos anteriores (incluyendo los vértices correspondientes), los centros de perspectiva coinciden. Es decir, tenemos cuatro rectas de Cayley concurrentes  $\square$

**Observación 2.4.1** Estas cuatro rectas de Cayley se relacionan entre sí del modo siguiente: sus puntos de Steiner asociados mediante la correspondencia 2.3 son los puntos de Steiner comunes a las dos figuras que contienen a los pares de triángulos

$$\{\Delta_1, \Delta_1'\} \text{ y } \{\Delta_2, \Delta_2'\},$$

respectivamente.

**Definición 2.4.4** El punto de concurrencia del teorema 2.4.3, digamos  $S$ , es un *punto de Salmon* del hexagrama místico.



Tal como en los casos anteriores, tenemos una correspondencia biyectiva entre las rectas de Plücker  $pl$  definidas en el teorema 2.4.2 y los puntos de Salmon construidos con ayuda del teorema 2.4.3:

**Definición 2.4.5**

$$pl \longleftrightarrow S \quad (2.4)$$

## 2.5 Una jerarquía natural en el hexagrama místico

Para finalizar este capítulo, estructuraremos a los diversos elementos del hexagrama místico en niveles diferentes. Esta idea se emplea, por ejemplo, en la construcción de planos proyectivos libres sobre una configuración dada (ver Hartshorne, [26]) aunque en nuestro caso la construcción tiene las relaciones impuestas por las construcciones principales de este capítulo. Esta estructura, que llamaremos *jerarquía* se define, por una parte, de acuerdo al orden en que se han construido dichos elementos y, por la otra, de acuerdo al tipo de elementos que se consideran para dicha construcción.

Quizás la manera más directa de establecer los niveles de dicha jerarquía sea a través de la figura 2.6. En esa figura, además, se representan con flechas las correspondencias 2.2, 2.3 y 2.4.

Conjuntamente con lo anterior, consideramos la restricción de las operaciones  $\vee$  (*meet* o supremo) y  $\wedge$  (*join* o ínfimo) de  $PG_3(k)$ , la red (*lattice*) de subespacios vectoriales en  $k^3$  a la estructura de incidencia del hexagrama místico.

**Observación 2.5.1** Por la definición de dicha estructura (2.5.2 en seguida), dichas operaciones solamente están definidas parcialmente sobre los diversos elementos de dicho hexagrama.

Por otra parte, por la forma en que habremos de evaluar ciertos homomorfismos en los elementos del hexagrama místico, es muy importante que estas definiciones reflejen los hechos geométricos siguientes:

**Propiedad 2.5.1** (geométrica)

1. cada recta está determinada por dos cualesquiera de sus puntos y, dualmente,
2. cada punto está determinado por dos cualesquiera de las rectas que pasan por él.

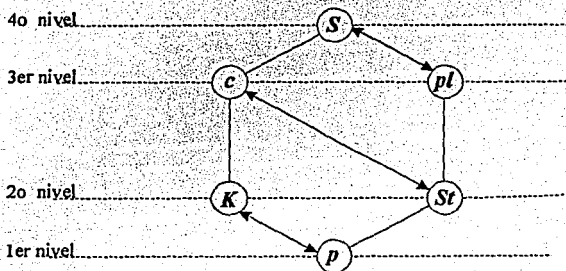


Figura 2.6: La jerarquía en el hexagrama místico

**Observación 2.5.2** En realidad uno podría pensar en utilizar las operaciones homónimas del álgebra de Cayley-Grassman en  $P^2(\mathbf{k})$ <sup>5</sup>, ya que nuestra construcción se ha hecho libre de coordenadas y, en el caso de subespacios vectoriales independientes en  $\mathbf{k}^3$ , el operador  $V$  coincide con el del álgebra mencionada.

Sin embargo, es en los otros casos en que la geometría nos obliga a elegir como lo hemos hecho:

<sup>5</sup>Usualmente, esta álgebra se define a partir de  $\Lambda(V)$ , el álgebra exterior de  $V$  ( $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbf{k}$ ) junto con las operaciones binarias  $V$  como el producto exterior en  $\Lambda(V)$  y  $\wedge$  como una suma alternada de ciertas permutaciones de *extensores* (ver [60]).

**Proposición 2.5.1** Las operaciones mencionadas son asociativas, antisimétricas, distributivas sobre la suma, duales entre sí y tienen la propiedad 2.5.1.

**Demostración:** directa de las definiciones (ver [22] y [60])  $\square$

En general, si un punto  $P$  pertenece a una recta  $l$ , en el álgebra de Cayley-Grassman tenemos que

$$P \vee l = (P \wedge l) \vee E = 0$$

donde  $E$  es el elemento de volumen, mientras que en  $PG_3(k)$  tenemos que

$$P \vee l = l \text{ y } P \wedge l = P.$$

Así, por ejemplo, si una recta de Cayley  $c$  contiene a los puntos de Kirkman  $K_1, K_2$  y  $K_3$  así como al punto de Salmon  $S$ , debemos tener que para cada  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} c &= K_1 \vee K_2 \vee K_3 \\ c &= K_i \vee K_j \\ &= K_i \vee S \\ &\vdots \end{aligned}$$

**Definición 2.5.1** Si  $C := C(P, l)$  es una configuración con conjuntos de puntos  $P$  y de rectas  $l$ , respectivamente, se tienen las operaciones  $\vee$  y  $\wedge$  parcialmente definidas como sigue:

$$\vee: \begin{array}{c} P \times P \\ \cup \\ A \end{array} \longrightarrow l$$

$$(Q, R) \in A \iff Q \vee R := QR \in l$$

y

$$\wedge: \begin{array}{c} l \times l \\ \cup \\ b \end{array} \longrightarrow P$$

$$(m, n) \in b \iff m \wedge n := m \cdot n \in P$$

En seguida, extendamos estas definiciones a los subconjuntos de incidencia de  $P \times l$  y de  $l \times P$ , respectivamente:

**Definición 2.5.2**  $I(P \times I)$ , el subconjunto de incidencia de  $P \times I$ , está dado por la condición siguiente

$$(Q, m) \in I(P \times I) \iff Q \in m$$

Así,

**Definición 2.5.3**  $\forall (Q, m) \in I(P \times I)$ ,

$$Q \vee m := m$$

$$Q \wedge m := Q$$

y análogamente para  $I(I \times P)$ .

Finalmente, mediante las construcciones del capítulo segundo, extendemos dichas operaciones al resto (de los elementos) del hexagrama místico:

**Definición 2.5.4** [...].

**Notación 2.5.1**  $\mathcal{HM}$  denotará a los elementos del hexagrama místico junto con la estructura jerárquica definida anteriormente.

## Capítulo 3

# Configuraciones asociadas a

$HM$

Iniciaremos este capítulo con una sección de definiciones y consideraciones generales acerca de las configuraciones en  $P^n(k)$ . Inmediatamente especializaremos para el caso  $n = 2$ , dando, en particular, una construcción detallada de la configuración de Desargues así como la caracterización combinatoria de esta última.<sup>1</sup>

Parte del espíritu del estudio de las configuraciones proyectivas<sup>2</sup> ha sido el de describir, de una manera sintética, uno o una serie de teoremas de la geometría proyectiva. Esto es, teoremas relativos a la colinealidad de puntos o bien a la concurrencia de rectas.

Por ejemplo: supongamos que tenemos un conjunto finito  $C$  de  $p$  puntos y  $l$  rectas en un plano proyectivo. Aumentemos ahora a  $C$  algunos (o todos) los puntos de intersección de las rectas mencionadas. Si la cantidad de dichos puntos es menor a la máxima esperada  $\binom{l}{2}$  en el segundo caso), ahí tenemos un teorema de concurrencia respecto a la

---

<sup>1</sup>Esta caracterización, que aparece en [9], nos servirá también para establecer una asociación de las rectas de Pascal con algunos de los subgrupos diédricos de  $S_6$  en el último capítulo, con ayuda de los automorfismos exteriores de este último para, finalmente, obtener nuevamente el teorema de descomposición de Veronese con ayuda de dichos grupos.

<sup>2</sup>Aquí debemos mencionar que hasta bien entrada la segunda mitad del siglo pasado se llamaba *configuraciones regulares* a las que ahora llamamos simplemente configuraciones.

posición relativa que guardan entre sí los elementos del conjunto inicial  $C$ . La situación es análoga si consideramos ahora algunas (o todas) las rectas que unen a los puntos de  $C$ .

Ejemplificaremos esto aún más con la construcción de la configuración de Desargues.

Posteriormente describiremos algunas de las configuraciones asociadas al hexagrama místico. Algunas de ellas se han estudiado clásicamente e ilustran, entre otras cosas, la apolaridad que existe entre los elementos de dicho hexagrama.

Aún cuando su estudio resulta muy interesante, para no dispersar la atención más allá de un cierto punto, no profundizaremos en el estudio de dicha apolaridad. Simplemente mencionaremos que tal apolaridad está inducida por las correspondencias 2.2, 2.3 y 2.4, definidas en el capítulo anterior, a través de la dualidad entre las dos configuraciones que he llamado inglesa y alemana, respectivamente.

Terminaremos mencionando algunos ejemplos de otras configuraciones asociadas al hexagrama místico.

## 3.1 Configuraciones proyectivas

### 3.1.1 Generalidades sobre las configuraciones proyectivas

**Definición 3.1.1** Una configuración  $C$  en  $P^n(\mathbf{k})$  es un sistema que consta de  $n_{00}$  puntos,  $n_{11}$  rectas y, en general,  $n_{ij}$  subespacios lineales de  $P^n(\mathbf{k})$  de dimensión  $i$  tales que

*Cada uno de sus elementos de dimensión  $i$  es fuertemente incidente con exactamente  $n_{ij}$  de sus elementos de dimensión  $j$ .*

En esta definición entendemos por *incidencia fuerte* de un elemento  $L$  de dimensión  $i$  con un elemento  $M$  de dimensión  $j$  al hecho de que

$$\begin{aligned} L \subset M & \text{ si } i < j \text{ y} \\ L \supset M & \text{ si } i > j. \end{aligned}$$

**Notación 3.1.1** (Coxeter) Una configuración  $C$  en  $P^n(k)$  con parámetros  $\{n_{ij}\}$  se denota mediante una matriz

$$(n_{ij}) \quad (3.1)$$

En general, hay que tener en mente que una matriz tal se puede referir a todo un esquema de configuraciones el cual puede ser, incluso, vacío.

Como ejemplos podemos decir que en Hilbert-Cohn Vosen [28] se hace un recuento, sin usar más que someramente la estructura combinatoria, de los primeros casos ( $n \leq 10$  y  $k$  el campo real o complejo). En Bokowski-Sturmfels [1] hay todo un estudio básicamente algorítmico, sobre la constructibilidad (o  $\mathbf{Q}$ -realizabilidad, en este caso) de las diez diferentes configuraciones de tipo  $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$  en  $P^2(k)$ , con  $k$  un subcampo del campo complejo  $\mathbf{C}$ .<sup>3</sup>

En general, en un esquema de configuraciones de tipo  $(n_{ij})$  se satisfacen las relaciones siguientes:<sup>4</sup>

$$n_{ij}n_{ij} = n_{ji}n_{ji} \quad (3.2)$$

En los casos que estudiaremos, es decir, los del plano proyectivo  $P^2(k)$ , las configuraciones constan solamente de puntos y rectas en

<sup>3</sup>También en referencia a Bokowski-Sturmfels [1]:

¿Se puede construir con regla solamente una configuración de puntos y rectas dada? Esta pregunta, la cual ocupó a muchos geómetras del siglo XIX, se puede formular en términos modernos como un problema diofantino en geometría combinatoria de la forma siguiente: Dado una configuración de tipo  $(n_{ij})$  sobre  $\mathbf{R}$ , ¿también se puede realizar sobre  $\mathbf{Q}$ ? Así, el estudio mencionado desarrolla un algoritmo para dar coordenadas racionales a los puntos de cada una de las configuraciones mencionadas cuando éstas se pueden realizar sobre  $\mathbf{R}$ , lo cual ocurre en nueve de los diez casos posibles.

En este mismo espíritu, en Sturmfels-White [50] se calculan coordenadas racionales para los 31 tipos de configuraciones  $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$  y para los 228 tipos  $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$  en la clasificación de Daubelsky [20].

<sup>4</sup>Es decir, un esquema no vacío de configuraciones del tipo citado corresponde a los puntos racionales de la variedad determinantal dada por las relaciones 3.2 en el espacio proyectivo  $\text{Proj } [x_{ij}]$ .

dicho plano. Tales configuraciones son llamadas usualmente *configuraciones proyectivas planas*.

**Definición 3.1.2** Una configuración es *simétrica* si  $n_{00} = n_{11}$ .

**Observación 3.1.1** En ese caso, por la única relación que se tiene del tipo (3.2), también ocurre que  $n_{01} = n_{10}$  y de aquí que nos baste un símbolo  $(n_p)$  para denotar a estos esquemas de configuraciones

**Notación 3.1.2** El símbolo  $(n_p)$  denota a una configuración simétrica con  $n$  puntos y  $p$  puntos en cada recta.

En este caso, en la notación de Coxeter tendríamos que

$$n := n_{00} (= n_{11}) \text{ y } p := n_{01} (= n_{10}).$$

Este es el caso de muchas de las configuraciones «clásicas» en la geometría proyectiva, como la de Fano (si  $\text{char}(k) = 2$ ):  $(7_3)$ , la de Pappus:  $(9_3)_1$  y la arguesiana (o de Desargues), de tipo  $(10_3)$  a la cual denotaremos por el resto de este trabajo con el símbolo  $D$ , o bien, con el símbolo  $(10_3)_1$ , para distinguirla de las otras nueve configuraciones del tipo  $(10_3)$ , las cuales son proyectiva y combinatoriamente distintas a ella, y por ser, de hecho, la única relevante desde el punto de vista de la geometría proyectiva.

**Definición 3.1.3** La *gráfica de adyacencia* de una configuración proyectiva plana dada tiene un vértice por cada punto de la configuración y cuenta con una arista entre dos de sus vértices si los puntos correspondientes están en alguna de las rectas de dicha configuración.

Así, dicho tipo de gráficas consta de  $n_{00}$  puntos,  $n_{11}$  aristas, es  $n_{01}$ -regular y  $n_{10}$ -homogénea.

**Definición 3.1.4** Los *puntos vecinos* de un punto dado en una configuración, también dada, son los puntos vecinos de dicho punto en la gráfica de adyacencia correspondiente a la configuración dada.



**Definición 3.1.5** Dados seis puntos  $P_1, \dots, P_6$  en el plano  $P^2(k)$ , la gráfica  $\mathcal{G}$  asociada a ellos tiene un vértice por cada uno de tales puntos y una arista por cada par de dichos puntos.

Así, tenemos que  $\mathcal{G} \simeq K_6$ .

**Definición 3.1.6** Llamaremos simplemente *triángulos* a los 3-ciclos y *hexágonos* a los 6-ciclos de una gráfica.

Así, en el caso de la gráfica  $\mathcal{G}$ , los hexágonos son sus 6-ciclos hamiltonianos.

Una configuración proyectiva plana también tiene asociado un diseño por bloques de forma natural:

**Definición 3.1.7** El diseño por bloques  $\mathcal{DB}(C)$  asociado a una configuración proyectiva plana  $C$  tiene un elemento por cada punto de  $C$  y un bloque por cada conjunto completo de puntos de  $C$  pertenecientes a alguna de las rectas de dicha configuración.<sup>5</sup>

Para un diseño por bloques en general también se define su gráfica de adyacencia (cf. ver [2]). Es fácil ver que, en el caso de un  $\mathcal{DB}(C)$ , dicha gráfica coincide con la gráfica de adyacencia 3.1.3 de  $C$ .

## 3.2 La configuración arguesiana $D$

Esta configuración es, con mucho, una de las más importantes en la geometría proyectiva y se debe esencialmente al teorema siguiente:

**Teorema 3.2.1** (Desargues, ca. 1660). Si dos triángulos están en perspectiva, entonces, las intersecciones de sus pares de lados opuestos están alineadas  $\square$

Veamos como este teorema nos permite construir la configuración arguesiana (ver la figura 3.1):

<sup>5</sup>Esta estructura de bloques de la configuración  $D$  es, precisamente, la de  $Cay(n)$  (para  $n = 6$ ), el diseño de Cayley de orden  $n$ , tal y como se define en [9] y que caracteriza a los esquemas triangulares de W.S. Connor (ver [16] y Chang Li-Chien [13] y [14]).

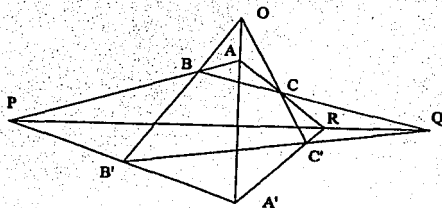


Figura 3.1: Configuración arguesiana

Si se considera como conjunto inicial a los vértices de dos triángulos en perspectiva, junto con su centro de perspectiva ( $A, B, C, A', B', C'$ , y  $O$ : siete puntos iniciales en total), así como a los lados de dichos triángulos, junto con las rectas que unen sus pares de lados correspondientes (nueve rectas en total), usando el teorema anterior podemos completar con tres puntos ( $P, Q$  y  $R$ ) y una recta más (la recta donde estarían esos tres puntos adicionales) una configuración de tipo  $(10_3)$ , que es llamada *configuración arguesiana* en vista del teorema anterior.

### 3.2.1 Propiedad combinatoria de $D$

La que sigue es solamente (aunque central para nuestros propósitos) una de las muchas propiedades bien conocidas de esta configuración:

**Proposición 3.2.1** El conjunto de puntos no vecinos de cada punto de  $D$  pertenecen a una misma recta de dicha configuración  $\square$

Por ejemplo, al retirar el punto  $B'$  en la figura 3.1, junto con los puntos  $B, O, P, A', C'$  y  $Q$  (los cuales están alineados por pares con  $B'$ ), solamente quedarán los puntos  $A, C$  y  $R$  los cuales, efectivamente, están sobre una recta de la configuración.

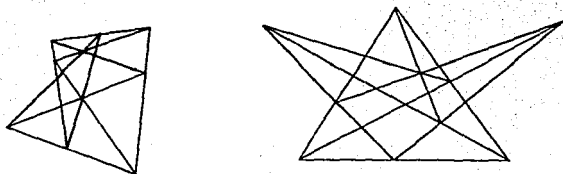


Figura 3.2: Dos configuraciones de tipo  $(10_3)$  distintas de  $D$

Por otra parte, observamos que, en contraste con la situación anterior, las configuraciones de la figura 3.2, que, como dijimos, también son configuraciones de tipo  $(10_3)$ , no tienen esta cualidad *por lo menos para alguno de sus puntos*.

En estos términos, consideramos la propiedad siguiente para una configuración proyectiva plana  $C$ :

**Propiedad 3.2.1** La colección de puntos no vecinos de cualquiera de los puntos de  $C$  son solamente tres puntos los cuales pertenecen a una y la misma recta de dicha configuración  $C$ .

**Teorema 3.2.2** Una configuración  $C$  de tipo  $(10_3)$  con la propiedad 3.2.1 es una configuración  $(10_3)_1$ .

Daremos una demostración de este teorema que depende únicamente de la estructura de bloques  $DB(C)$  de la configuración  $C$ , de acuerdo a la definición 3.1.7 (y de las hipótesis, por supuesto).

En general, a lo largo de esta demostración, denotaremos por  $l_X$  al bloque determinado por el punto  $X$ , de acuerdo a dicha propiedad y también  $PQ \cdot P'Q'$  denotará al elemento común a los bloques que contienen a  $P$  y a  $Q$  por una parte, y a  $P'$  y a  $Q'$  por la otra.

**Demostración:**

Sea  $C$  una configuración de tipo  $(10_3)$  con la propiedad 3.2.1.

Sea  $N$  cualquiera de los puntos de  $\mathcal{DB}(C)$  y sean  $l_S$ ,  $l_T$  y  $l_U$  los bloques que lo contienen: digamos que

$$l_S := \{N, P, P'\}, l_T := \{N, Q, Q'\} \text{ y } l_U := \{N, R, R'\}.$$

Así, debemos demostrar que los tres elementos  $PQ \cdot P'Q'$ ,  $QR \cdot Q'R'$  y  $RP \cdot R'P'$  constituyen el block  $l_N$  determinada por el elemento  $N$  en relación a la propiedad 3.2.1.

Digamos que  $l_N := \{S, T, U\}$  y que  $U$  también pertenece a los bloques  $l_A$  y  $l_B$  (además de  $l_N$ , por supuesto).

Primeramente tenemos que a lo más uno de los elementos de cada pareja  $\{P, P'\}$ ,  $\{Q, Q'\}$  y  $\{R, R'\}$  pertenece a  $l_A$  (respectivamente a  $l_B$ ).

Así, supongamos (sin pérdida de generalidad) que  $P, Q \in l_A$ . Entonces tendremos que  $P', Q' \in l_B$ :

Si  $R \in l_B$ , entonces  $R', N$  y  $P'$  (o bien  $Q'$ ) estarían en el block  $l_U$ , lo cual contradiría a la propiedad 3.2.1. Análogamente tenemos que  $R' \notin l_B$ .

Es decir, también podemos suponer que  $l_A (= l_{R'}) = \{U, P, Q\}$  y que  $l_B (= l_R) = \{U, P', Q'\}$  (ver figura 3.3).

De forma totalmente análoga, si el punto  $S$  pertenece a la recta por  $S, Q$  y  $R$  (o sea, al bloque  $\{S, Q, R\}$ ), entonces también  $\{S, Q', R'\}$  es un bloque del diseño  $\mathcal{DB}(C)$  y, en este caso, tenemos que

$$l_P = \{S, Q, R\} \text{ y que } l_P = \{S, Q', R'\}.^6$$

Finalmente (ver la figura 3.4), si el bloque  $\{P, R', T\}$  pertenece al diseño  $\mathcal{DB}(C)$ , entonces la propiedad 3.2.1 aplicada al punto  $P$  implica que los elementos  $Q', R$  y  $S$  formarían también algún bloque de  $\mathcal{DB}(C)$ .

Así, la única posibilidad para los bloques que aún no hemos identificado es:

$$l_Q = \{P, R, T\} \text{ y } l_Q = \{P', R', T\} \quad \square$$

<sup>6</sup>Pensando en el caso del plano proyectivo, esto sería suficiente para identificar a una configuración de Desargues pues ya tendríamos que los triángulos  $PQR$  y  $P'Q'R'$  están en perspectiva desde el punto  $N$ . Sin embargo, no olvidemos que se prometió una demostración con validez para los diseños de bloques asociados.

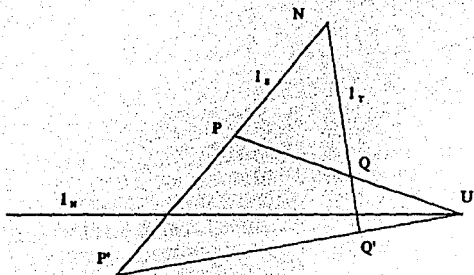


Figura 3.3: Determinación de los bloques que contienen a  $U$

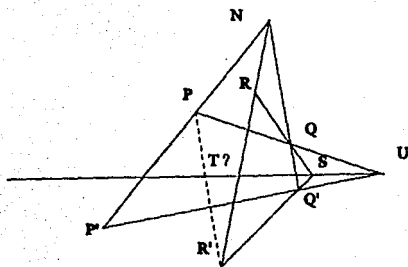


Figura 3.4:

### 3.3 Un sistema de Steiner

En esta sección definiremos un sistema de Steiner  $S(3, 3, 6)$ . Si bien este sistema contiene a todos los bloques de tamaño 3 del conjunto básico (y, por lo tanto, considerado trivial por algunos autores), nos ayudará a visualizar algunos conteos. Particularmente a los que involucran a los puntos de Steiner del hexagrama místico.<sup>7</sup>

Recordemos primeramente que, de acuerdo al teorema 2.2.2, cada terna de componentes del hexagrama místico comparte un único punto de Steiner. Con esto podemos dar la definición siguiente:

**Definición 3.3.1** El sistema  $S(3, 3, 6)$  es el diseño de tipo  $3 - (6, 3, 1)$  dado por la pareja  $(X, \mathcal{B})$ , donde

$$X := \left\{ \begin{array}{c} \text{componentes arguesianas} \\ \text{de } \mathcal{HM} \end{array} \right\}$$

$$\text{y } \mathcal{B} := \{ \text{ternas de elementos de } X \}$$

Este tipo de sistemas se denominan también  $(3, 3, 6)$ -sistemas de Steiner en la literatura (por ejemplo, ver Cameron [7] o van Lint y Wilson [33]).

Directamente de las construcciones del capítulo segundo tenemos las propiedades siguientes. Estas nos servirán para familiarizarnos con el sistema recién definido y para relacionarlo con los elementos del hexagrama místico.

**Propiedad 3.3.1** Tenemos primeramente que los puntos de Steiner del teorema 2.4.2 pertenecen solamente a dos de las componentes del hexagrama místico y que, de hecho, la correspondencia biyectiva

$$\{ \text{rectas de Plücker} \} \longrightarrow \{ D_i, D_j \} \quad (3.3)$$

permite identificar a los conjuntos de puntos de Steiner alineados.

<sup>7</sup>El hecho de considerar sistemas de Steiner y también puntos de Steiner en este punto parece puramente casual.

**Propiedad 3.3.2** Por otra parte, en el teorema 2.2.2 se observó también que por cada punto de Steiner pasan tres rectas de Pascal, todas ellas pertenecientes a componentes distintas del hexagrama místico. No es difícil ver que esto establece una correspondencia biyectiva:

$$\{ \text{puntos de Steiner} \} \longrightarrow \{ D_i, D_j, D_k \} \quad (3.4)$$

entre los puntos de Steiner  $St$  y las ternas de componentes  $D_i, D_j$  y  $D_k$  del hexagrama.

**Propiedad 3.3.3** Finalmente, podemos establecer una correspondencia biyectiva

$$\{ \text{puntos de Salmon} \} \longrightarrow \{ D_i, D_j, D_k, D_l \} \quad (3.5)$$

mediante el procedimiento siguiente:

1. Sea  $S$  un punto de Salmon
2. Sea  $p_l$  la recta de Plücker asociada a  $S$  mediante la correspondencia 2.4
3. Sean  $St_1, St_2, St_3$  y  $St_4$  los puntos de Steiner que definen a  $p_l$  en el teorema 2.4.2
4. Sean  $D_m$  y  $D_n$  las figuras que contienen a  $St_1$ , a  $St_2$ , a  $St_3$  y a  $St_4$ , de acuerdo a la observación 2.4.1
5. Entonces  $D_i, D_j, D_k$  y  $D_l$  son las otras cuatro figuras del hexagrama  $\square$

Un ejercicio interesante es el de parametrizar a los elementos del hexagrama místico a partir de cada una de las figuras y de las correspondencias 3.4, 3.3 y 3.5.

### 3.4 Configuraciones clásicas asociadas a $\mathcal{HM}$

En esta sección damos las configuraciones (proyectivas planas) asociadas a ciertas combinaciones de (tipos de) puntos y rectas del hexagrama místico. Algunas de estas configuraciones (como las configuraciones inglesa, alemana y la primera gran configuración) aparecen por primera vez en las referencias dadas en «la enciclopedia» (ver [49]) y han sido una de las motivaciones principales, desde el punto de vista de la geometría proyectiva clásica, para realizar este trabajo. Algunas otras aparecen como referencia, por ejemplo, en algunas de las demostraciones dadas en el capítulo previo a este, y resultó de justicia elemental el detectarlas y presentarlas en este capítulo.

#### 3.4.1 La configuración de puntos y rectas fundamentales

Como su nombre lo indica, esta configuración se construye con exactamente los puntos y rectas fundamentales del hexagrama. Como ya se ha visto durante la construcción de dichos elementos en el capítulo anterior, se trata de una configuración del tipo  $\begin{pmatrix} 45 & 2 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$ .

No detallaremos más sobre esta configuración ya que por ahora es solamente una configuración de tipo auxiliar para nosotros.

#### 3.4.2 La configuración básica

Consta de los puntos de Kirkman y de las rectas de Pascal del hexagrama.

**Propiedad 3.4.1** Ya que las dos ternas de lados alternos de cada hexágono son 1-factores de la gráfica  $\mathcal{G}$  (ver la definición 3.1.5), observamos que los hexágonos mencionados en el teorema 2.2.3 tienen las siguientes dos propiedades:

1. Comparten por pares uno de sus 1-factores respectivos y



2. Las aristas restantes de la gráfica  $\mathcal{G}$  forman un hexágono en dicha gráfica.

Recíprocamente: Si se toman seis lados fundamentales de un hexagrama que formen un hexágono  $\alpha$  en  $\mathcal{G}$ , los nueve lados fundamentales restantes forman tres hexágonos que, como anteriormente:

1. Satisfacen la propiedad (1) y
2. Sus rectas de Pascal concurren en un punto de Kirkman  $K(\alpha)$ .

Por lo tanto, se tienen 60 puntos de Kirkman en cada hexagrama místico. Como ya vimos anteriormente, dichos puntos se hallan por ternas sobre las rectas de Pascal y a ellos concurren dichas rectas, también por ternas.

Es decir, se trata de una configuración  $(60_3)$ .

### 3.4.3 La configuración alemana

Como ya se ha mencionado varias veces a lo largo de este trabajo, uno de los resultados principales en la teoría del hexagrama místico (ver [54]) es la descomposición de esta configuración en seis subconfiguraciones de Desargues  $(10_3)_1$ , a las que Veronese llamó simplemente figuras y, desde entonces, dichas componentes son una referencia muy importante para identificar y contar al resto de los elementos del hexagrama místico.

Recordemos también que, de acuerdo al teorema 2.2.2, las rectas de Pascal concurren por ternas en los puntos de Steiner.

**Propiedad 3.4.2** Nuevamente, observamos que los hexágonos mencionados en dicho teorema:

1. Tienen la propiedad (1) y
2. Las aristas de  $\mathcal{G}$  no involucradas en el enunciado del teorema 2.2.2 mencionado constituyen dos 3-ciclos ajenos de dicha gráfica.

Recíprocamente, si se parte el conjunto original de puntos  $P_1, \dots, P_6$  en dos subconjuntos de tres elementos, es decir, si se toman seis lados fundamentales del hexagrama que formen dos 3-ciclos ajenos en  $\mathcal{G}$ , entonces los nueve lados fundamentales del hexagrama que restan forman tres hexágonos tales que:

1. Satisfacen la propiedad (1) y
2. Sus rectas de Pascal concurren en un punto de Steiner.

Con esto podemos realizar, ahora sí, un conteo directo de los puntos de Steiner del hexagrama místico:

**Proposición 3.4.1** Cada recta de Pascal contiene a exactamente un punto de Steiner y, ya que a cada uno de estos puntos concurren por ternas las rectas mencionadas, se tiene que en el hexagrama místico hay 20 puntos de Steiner.

**Observación 3.4.1** Para cada partición del conjunto de puntos  $P_1, \dots, P_6$  como la descrita en la propiedad anterior hay, en realidad, dos posibilidades para la formación de los tres hexágonos que se mencionan. Esto da lugar a dos puntos de Steiner  $St$  y  $St'$  que resultan conjugados respecto a la cónica  $\mathcal{C}$ .

Por otra parte, de acuerdo a la correspondencia 2.4.2, también se sabe que dichos puntos se hallan de cuatro en cuatro sobre las rectas de Plücker.

Para contar dichas rectas, observemos que, en el sistema  $S(3, 3, 6)$  de la definición 3.3.1, dos elementos de  $X$  cualesquiera pertenecen a cuatro bloques. Es decir, dos componentes del hexagrama comparten exactamente cuatro puntos de Steiner (lo cual, por otra parte, es precisamente la construcción realizada en la demostración del teorema 2.4.2).

Así, tenemos  $\binom{6}{4} = 15$  rectas de Plücker en cada hexagrama místico y resulta que esta configuración es de tipo  $\begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$ .

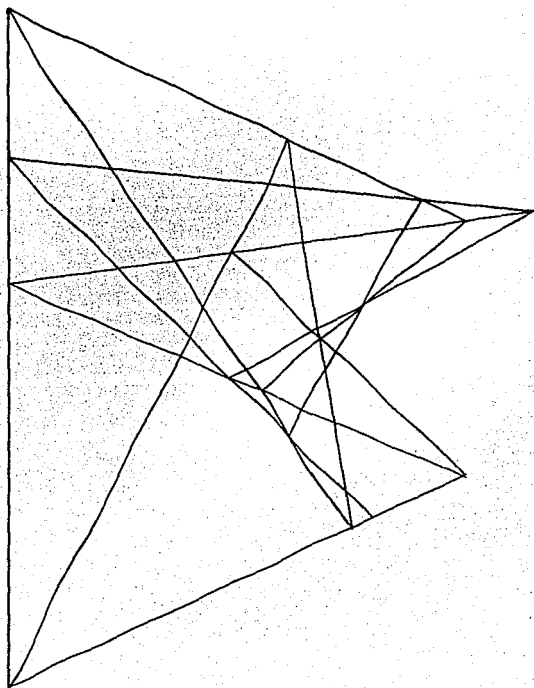


Figura 3.5: Configuración alemana

### 3.4.4 La configuración inglesa

Nuevamente, el teorema 2.4.1 especifica que a cada punto de Steiner le corresponden tres puntos de Kirkman de tal forma que los cuatro están sobre una recta de Cayley.

De acuerdo a la correspondencia (2.3) del capítulo anterior, tenemos 20 rectas de Cayley en el hexagrama.

Ahora bien, refiriéndonos al sistema  $S(3, 3, 6)$ , tenemos que hay  $\binom{6}{2} = 15$  puntos de Salmon en el hexagrama, constituyendo así una configuración  $\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$ .

La dualidad entre estas dos últimas configuraciones está dada directamente por las correspondencias 2.3 y 2.4.

### 3.4.5 La primera gran configuración

Esta se obtiene simplemente considerando la totalidad de puntos de Kirkman y de Steiner, así como la totalidad de rectas de Pascal y de Cayley, los cuales (de acuerdo a la estructura de las dos configuraciones anteriores) tienen la contabilidad «correcta». Esto es, tanto por cada punto de Steiner como por cada punto de Kirkman pasan tres rectas Pascal y una de Cayley (ambos casos por el teorema 2.4.1. Es decir, se trata de una configuración  $(80_4)$ ).

## 3.5 Otras configuraciones asociadas a $\mathcal{HM}$

Uno puede añadir a las anteriores sus propias configuraciones simplemente al considerar algunos de los elementos combinatorios que ya hemos empleado.

Por ejemplo, al considerar conjuntamente las configuraciones alemana e inglesa, surge una configuración de tipo  $(35_7)$ .

Otro ejemplo sería el tratar de generar una configuración con las rectas de Cayley y la totalidad de puntos que hemos distinguido sobre cada una de dichas rectas: tres puntos de Kirkman, uno de Steiner y tres de Salmon. En este caso, vemos que el conteo de elementos sobre dichas rectas es similar al conteo sobre las rectas de Pascal, solo que

**3.5. OTRAS CONFIGURACIONES ASOCIADAS A  $HM$**

57

hay que considerar los puntos fundamentales en este último caso en lugar de los puntos de Salmon en el primero.



## Capítulo 4

# Representaciones de $\mathcal{HM}$ en $\mathcal{S}(K_6)$ y $\mathcal{S}(LK_6)$

En este capítulo consideraremos primeramente algunas de las propiedades abstractas de la gráfica  $\mathcal{G}$  (ver la definición 3.1.5), es decir, como una gráfica de tipo  $K_6$  independientemente de las condiciones geométricas que la definen. Con esto, relacionaremos de dos maneras distintas a los elementos de  $\mathcal{HM}$  con ciertas subgráficas de  $K_6$ , así como con ciertas subgráficas de  $LK_6$ , la gráfica de aristas de  $K_6$ , respetando, en cada caso, la estructura jerárquica de  $\mathcal{HM}$  en el sentido siguiente:

Construiremos una representación fiel

$$\Phi: \mathcal{HM} \longrightarrow \mathcal{S}(K_6)$$

con las dos propiedades siguientes:

1.  $\Phi$  es un antihomomorfismo; es decir,

Los puntos de un cierto nivel de  $\mathcal{HM}$  estarán asociados con el ínfimo de las gráficas asociadas a las rectas en el nivel anterior que los definen y, análogamente, las rectas de un cierto nivel de  $\mathcal{HM}$  estarán asociadas con el supremo de las gráficas asociadas a los puntos en el nivel anterior que las definen y

2. Es biyectiva al actuar en clases.

Es decir, asocia clases distintas de elementos de  $\mathcal{S}(K_6)$  a clases distintas de elementos de  $\mathcal{HM}$  y es biyectiva una vez que se le restringe a cada una de estas clases.

Esto resuelve el problema de caracterizar de forma invariante a los distintos elementos de  $\mathcal{HM}$ .

**Notación 4.0.1** El símbolo  $[\dots]'$  denotará al complemento de la gráfica  $[\dots]$ .

**Definición 4.0.1**  $\mathcal{S}(K_6)$  y  $\mathcal{S}(LK_6)$  denotarán a las redes de subgráficas sin vértices aislados de  $K_6$  y de  $LK_6$ , respectivamente, con la unión conjuntista  $a \cup b =: a \vee b$  de dos de sus elementos  $a$  y  $b$  desempeñando el papel del *supremo* y la intersección  $a \cap b =: a \wedge b$  como el *ínfimo* de dichos elementos.

**Observación 4.0.1** De la construcción misma tendremos que la representación  $\Phi$  preserva las propiedades 2.5.1; es decir, basta tomar en  $\mathcal{HM}$  dos cualesquiera de entre los puntos, digamos  $P_i$  y  $P_j$ , que definen a alguna de las rectas, digamos  $r$ , para tener que

$$(\Phi_{P_i}) \wedge (\Phi_{P_j}) = \Phi_r.$$

y, análogamente,  $(\Phi_{r_i}) \vee (\Phi_{r_j}) = \Phi_P$  si  $r_i$  y  $r_j$  son dos cualesquiera de las rectas de  $\mathcal{HM}$  que se intersectan en el punto  $P$ .

**Observación 4.0.2** Por otra parte, sin embargo, tenemos que la propiedad 1 anterior previene que  $\Phi$  sea compatible con los órdenes parciales involucrados.

Por ejemplo, tenemos que, aunque  $p \preceq c$ , no ocurre que  $\Phi_p \preceq \Phi_c$ , ya que  $\Phi_p \cong C_6$  y  $\Phi_c \cong 2K_3$ .

Así, he preferido que el homomorfismo  $\Phi$  tenga la propiedad mencionada, aún a expensas de la preservación del orden parcial para reflejar de una manera más cabal la situación geométrica que se tiene en el plano.



## 4.1 Teorema de factorización de $K_6$

El teorema siguiente será de gran utilidad para calcular el valor de  $\Phi$  sobre los diferentes tipos de elementos de  $\mathcal{HM}$ . Nos referiremos a él simplemente como el *teorema de factorización*, el cual, como ya se ha mencionado, se puede considerar como la contraparte combinatoria del teorema de descomposición de Veronese 2.3.1.

**Definición 4.1.1** Una 1-factorización de una gráfica  $G$  se llama *perfecta* si la unión de cada dos de sus 1-factores constitutivos es conexa.

**Teorema 4.1.1** Hay exactamente seis 1-factorizaciones de  $K_6$ , todas ellas isomorfas entre sí. Dos 1-factores ajenos cualesquiera están contenidos en una única de estas factorizaciones.

**Demostración** (cf. Cameron y van Lint [7], p. 81):

(i) **Unicidad:** En este caso es fácil ver que <sup>1</sup> cada 1-factorización de  $K_6$  es perfecta; esto es, la unión de dos 1-factores ajenos siempre constituye un hexágono. También se puede ver muy fácilmente que un tercer 1-factor ajeno a estos dos consiste, o bien de las tres diagonales principales del hexágono mencionado o bien, de una de dichas diagonales y dos diagonales secundarias del hexágono mencionado. Así, la única posibilidad para los otros dos 1-factores que completarían una 1-factorización es que sean del segundo de estos tipos.

(ii) **Existencia:** Ya que se pueden elegir  $15 \times 8$  pares de 1-factores ajenos y, por otra parte, cualquier 1-factorización contiene a  $5 \times 4$  de tales pares, habrá exactamente  $\frac{120}{20}$  1-factorizaciones de  $K_6$   $\square$

**Corolario 4.1.1** Tres 1-factorizaciones cualesquiera comparten por pares un 1-factor. Así, los tres 1-factores involucrados son ajenos dos a dos y la unión de ellos es una gráfica de tipo  $K_{3,3}$   $\square$

**Notación 4.1.1**  $\Delta_1, \dots, \Delta_6$  serán dichas 1-factorizaciones de  $K_6$ .

<sup>1</sup>Uno también puede ver que estas factorizaciones son todas isomorfas a la factorización de tipo *patterned starter* sobre  $\mathbf{Z}_5$  y, en consecuencia, son factorizaciones perfectas (ver Wallis [57] y Mendelsohn y Rosa [34]).

Este procedimiento ha sido empleado por H. Cárdenas y E. Lluís en [8] para estudiar el grupo de Mathieu  $M_{12}$ .

De hecho, mediante el teorema siguiente podemos ver que esta situación caracteriza a la dualidad <sup>2</sup> que hay entre un conjunto de seis elementos y el conjunto de sus 1-factorizaciones:

**Teorema 4.1.2** Seis es el único número natural  $n$  para el cual hay una construcción de  $n$  objetos isomorfos, en un conjunto  $A$  de cardinalidad  $n$ , invariante ante todas las permutaciones de  $A$ , aunque no en correspondencia natural con los elementos de  $A$ .

Hay una demostración de este teorema en (ibid. id., p.p. 81- 83) donde se ve de manera natural que los objetos que se mencionan son las 1-factorizaciones de  $A$   $\square$

Así (ibid. id., p. 83), para establecer la dualidad mencionada, sea  $\mathcal{A}$  la gráfica completa determinada por los elementos de  $A$  y sea  $X$  el conjunto de 1-factorizaciones de  $\mathcal{A}$  con su estructura de gráfica natural: dos 1-factorizaciones están conectadas si comparten un 1-factor.

En el corolario 4.1.1 se establece que cada 1-factor pertenece a exactamente dos de las factorizaciones mencionadas, por lo que podemos identificar a los 1-factores de  $\mathcal{A}$  con las aristas de  $X$ . Ahora bien, cada arista de  $\mathcal{A}$  pertenece a tres 1-factores los cuales, a su vez, pertenecen a tres 1-factorizaciones distintas; de aquí que las aristas de  $\mathcal{A}$  correspondan a los 1-factores de  $X$ .

Finalmente, cada vértice de  $\mathcal{A}$  pertenece a cinco aristas, todas ellas en factores distintos, por supuesto. Así, los vértices de  $\mathcal{A}$  corresponden a las 1-factorizaciones de  $X$   $\square$

## 4.2 Primera representación de $\mathcal{HM}$ en $\mathcal{S}(K_6)$

El estudio combinatorio hecho anteriormente (sobre la descomposición de los hexágonos en 1-factores de la gráfica  $\mathcal{G}$ , así como la recomposición de dicho tipo de factores para generar otros hexágonos

<sup>2</sup>En este contexto, se dice que dos gráficas son duales si hay una biyección entre cada una de ellas y las 1-factorizaciones de la otra.

con propiedades específicas) así como el teorema de factorización 4.1.1 nos dan un procedimiento natural para establecer el homomorfismo

$$\Phi : \mathcal{HM} \longrightarrow S(K_6)$$

mencionado anteriormente.

Directamente de la evaluación del morfismo  $\Phi$  resultará que

$$\forall \Xi \in \mathcal{HM}, \Phi_{\Xi} \text{ es una subgráfica generadora de } K_6.$$

Si bien no emplearemos en gran medida la formulación explícita de este morfismo  $\Phi$ , el trabajar de esta manera nos permitirá, por ejemplo, observar cuán simples son las correspondencias 2.2, 2.3 y 2.4 una vez que se les formula en este contexto.

#### Definición 4.2.1

$$\Phi : \begin{cases} \{\text{sintemas}\} & \longrightarrow & S(K_6) \\ \{\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}\} & \longmapsto & [ab, cd, ed] \end{cases} \quad (4.1)$$

Veamos ahora como se extiende esta definición a los elementos del hexagrama teniendo en mente la condición 1 anterior.

Principiemos, pues, formulando la primera correspondencia que a uno se le ocurriría; es decir, la que asocia a un hexágono, digamos  $abcdef$ , la subgráfica de  $K_6$  formada con los lados de dicho hexágono:  $[ab, bc, cd, de, ef, fa]$ . Así, tenemos inmediatamente la relación definida en  $\mathcal{HM}$  a nivel de rectas de Pascal como:

$$\Phi : \overline{abcdef} \longmapsto [ab, bc, cd, de, ef, fa] \quad (4.2)$$

lo cual denotaremos como  $\Phi_{\overline{abcdef}}$ .

Esta asignación extiende la definición de  $\Phi$ , como homomorfismo, a nivel de sintemas como sigue:

Ya que los lados de cada hexágono se pueden descomponer en dos ternas de lados alternos y cada una de estas ternas constituye un 1-factor de  $\mathcal{G}$ , la gráfica  $\Phi_{\overline{abcdef}}$  es realmente

$$\Phi_{\{\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}\}} \vee \Phi_{\{\overline{bc}, \overline{de}, \overline{fa}\}}.$$

**Observación 4.2.1** Claramente se trata de una asignación biyectiva entre el conjunto de rectas de Pascal y los hexágonos en  $K_6$ .

Por otra parte, dado que este mismo tipo de biyectividad ocurre en cada uno de los diferentes niveles de definición de  $\Phi$ , no lo mencionaremos más.

Ahora bien, consideremos la gráfica

$$(\Phi_{\overline{abcdej}}) \vee (\Phi_{\overline{abdcfe}}) \vee (\Phi_{\overline{ajcbde}})$$

lo cual, de acuerdo al teorema 2.2.3 y a la propiedad 3.4.1, es el complemento del hexágono  $acebfd$ , o sea, una gráfica producto de tipo  $K_3 \square K_2$ .

Así, tenemos que, si  $K$  es el punto (de Kirkman) de intersección de las rectas  $abcdef$ ,  $abdcfe$  y  $ajcbde$ , entonces

$$\Phi_K := [ac, ce, eb, bf, fd, da]' \quad (4.3)$$

**Observación 4.2.2** Es fácil ver que esta asignación, así como las siguientes, tienen la propiedad 2.5.1.

**Observación 4.2.3** Como acabamos de ver, el complemento de una gráfica  $\Phi_K$  es un hexágono.

De esta manera, tomemos seis lados fundamentales de  $\mathcal{HM}$  que formen un hexágono. Entonces, los nueve lados fundamentales restantes forman tres hexágonos cuyas rectas de Pascal concurren en un punto de Kirkman.

**Proposición 4.2.1** Con esto, la correspondencia 2.2 se representa en este contexto precisamente como la correspondencia entre cada una de estas subgráficas de  $K_6$  con su complemento  $\square$

Sea  $D_i$  una de las componentes de  $\mathcal{HM}$ . De acuerdo a la definición de  $\Phi$  en los niveles 4.2 y 4.3, los puntos y rectas de  $D_i$  determinan una cierta subgráfica de  $K_6$ , la cual, en principio, sería toda la gráfica  $K_6$ . Por otra parte, en vista del teorema de factorización 4.1.1, vemos que hay una única 1-factorización que contiene a las gráficas asociadas a los puntos y rectas de  $D_i$ . Sea  $\Delta_i$  dicha 1-factorización.

Así, tenemos que

$$\Phi : D_i \sim \Delta_i \quad (4.4)$$

De acuerdo al teorema 2.2.2 y a la definición 4.2, la unión de los hexágonos asociados a rectas de Pascal concurrentes en un punto de Steiner es tal que su complemento es un par de triángulos ajenos en vértices; es decir, se trata de una gráfica de tipo  $K_{3,3}$ , de donde:

$$\Phi_{St} := [ac, ce, ea, bd, df, fb]' \quad (4.5)$$

si las rectas de Pascal  $\overline{abcdef}$ ,  $\overline{abefcd}$  y  $\overline{adefcd}$  concurren en el punto  $St$ .

**Observación 4.2.4** Recíprocamente, tomemos seis lados fundamentales de  $\mathcal{HM}$  que formen dos triángulos ajenos en vértices. Entonces, los nueve lados fundamentales restantes forman tres hexágonos<sup>3</sup> cuyas rectas de Pascal concurren en un punto de Steiner.  $\square$

Por otra parte, recordemos que, de acuerdo al teorema 2.2.2, tres figuras cualesquiera, digamos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  comparten un único punto de Steiner  $St$  y recíprocamente, por lo que también se ocurre asociar a cada punto de Steiner  $St$  alguna gráfica relacionada con  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$ .

**Proposición 4.2.2**  $\Phi_{St} = \bigvee_{(i,j)} (\Delta_i \cap \Delta_j)$

**Demostración:**  $\forall (i, j)$ ,  $\Delta_i \cap \Delta_j$  es un 1-factor de  $K_6$

Por otra parte, dos cualesquiera de las parejas  $(i, j)$  y  $(k, l)$  siempre comparten un índice, por lo que

$$(\Delta_i \cap \Delta_j) \bigvee (\Delta_k \cap \Delta_l)$$

es un hexágono por el teorema 4.1.1  $\square$

De acuerdo al teorema 2.4.1, consideremos ahora la relación siguiente:

<sup>3</sup>Para esto hay dos posibilidades, las cuales corresponden a puntos de Steiner conjugados.

$$St \longleftrightarrow \{K_1, K_2, K_3\} \longleftrightarrow St'$$

Dicha relación se puede ver a nivel de gráficas como la recomposición de los sintemas que integran a  $\Phi_{St}$  de la única otra forma posible.<sup>4</sup>

Con esto y, de acuerdo a la construcción hecha en la demostración del teorema 2.4.1 tenemos que

$$(\Phi_{K_1}) \wedge (\Phi_{K_2}) \wedge (\Phi_{K_3}) \wedge (\Phi_{St'}) = [ab, bc, ca, de, ef, fd],$$

lo cual es una gráfica  $2K_3$ ; es decir,

$$\Phi_c := [ab, bc, ca, de, ef, fd] \quad (4.6)$$

si  $c$  es la recta de Cayley definida por los puntos  $K_1, K_2, K_3$  (y  $St'$ ).

Tal como en el caso anterior, tenemos que

**Proposición 4.2.3** La correspondencia 2.3 se establece en este contexto como la asociación entre una gráfica  $2K_3$  y su gráfica complementaria  $\square$

Analicemos ahora al supremo de las gráficas asociadas a los cuatro puntos de Steiner del teorema 2.4.2. Ya que dichas gráficas son complementos de ciertas gráficas de tipo  $2K_3$  y por la definición de  $\Phi$  a este nivel (4.5), la gráfica que buscamos sería el complemento de la unión de dichas subgráficas; a saber, el 1-factor  $[af, be, cd]$ , es decir:

$$\Phi_{St} := [af, be, cd] \quad (4.7)$$

**Observación 4.2.5** De hecho, podemos ver que, aunque este 1-factor de  $K_6$  no pertenece a los doce hexágonos directamente involucrados en esta construcción, sí pertenece a cada una de las cuatro uniones de ternas de hexágonos que se usan para definir, respectivamente, a los cuatro puntos de Steiner del teorema mencionado.

Finalmente, para conocer el valor de  $\Phi$  en los puntos de Salmon  $S$ ,

<sup>4</sup>Es decir, si  $\Phi_{St} = [ab, cd, ef; bc, de, fa; ad, eb, fc]$ , entonces  $\Phi_{St'} = [ab, cf, de; bc, ef, ad; af, be, cd]$ .

1. Fijémonos primeramente en las rectas de Cayley que definirían a uno de dichos puntos, digamos, como en el teorema 2.2.2.
2. Mediante la correspondencia 2.3 nos fijamos ahora en los puntos de Steiner correspondientes.
3. Mediante  $\Phi_S$ , obtenemos las gráficas  $2K_3$  correspondientes:

$$[ad, de, ea, bc, cf, fb], [ab, bd, da, ce, ef, fc] \text{ y } [ac, ce, ea, bd, df, fb].$$

4. Finalmente, la gráfica requerida  $\Phi_S$  debe ser la unión de dichas  $2K_3$ , lo cual es una gráfica tripartita  $K_{2,2,2}$ ; a saber:

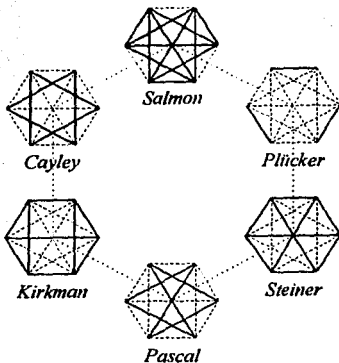
$$\Phi_S := [ab, bc, ca, de, ef, fd, bd, da, ce, fc, ea, fb] \quad (4.8)$$

**Proposición 4.2.4** La última gráfica es, precisamente, el complemento del 1-factor  $[af, be, cd]$  por lo que, nuevamente, la correspondencia 2.4 está dada por complementación de subgráficas de  $K_6$   $\square$

Hexagrama místico	$S(K_6)$
punto de Salmon	$K_{2,2,2}$
recta de Cayley	$2K_3$
recta de Plücker	$3K_2$
punto de Kirkman	$K_3 \square K_2$
punto de Steiner	$K_{3,3}$
recta de Pascal	$C_6$
figura	1-factorización

### 4.3 Segunda representación de $\mathcal{HM}$ en $S(K_6)$

El homomorfismo que definiremos ahora es una variación del anterior y está sugerido por la próxima relación que estableceremos, esta vez con  $LK_6$ . Dicha variación estriba en el empleo de la acción inducida

Figura 4.1: Subgráficas de  $K_6$  asociadas a  $\mathcal{HM}$ 

en  $K_6$  por los automorfismos exteriores de  $S_6$  (los cuales estudiaremos en el capítulo siguiente de este trabajo).

El interés de esta modificación es que, finalmente, uno encuentra una relación mucho más inmediata entre las nuevas subgráficas de  $K_6$ , ahora a la vista, y ciertas subgráficas más simples de  $LK_6$ .

La desventaja aparente de este procedimiento es que depende del automorfismo exterior  $\omega$  empleado. Aún cuando se puede probar que esta dependencia se da solamente hasta cierto punto, este procedimiento requiere del conocimiento de  $\omega$  en términos de las permutaciones de  $S_6$ . Es decir, se trata de una construcción no intrínseca.

Específicamente, si fijamos un automorfismo exterior de  $S_6$ ,  $\omega$ , la acción inducida por este automorfismo en  $K_6$  se extiende a una acción  $\omega^*$  en  $S(K_6)$ . Así, componiendo a  $\Phi$  con  $\omega^*$  obtendremos el morfismo deseado:

$$\omega^* \circ \Phi : \mathcal{HM} \longrightarrow S(K_6)$$



Nuevamente, bastará conocer la acción de  $\omega^* \circ \Phi$  en los sistemas (es decir, en las rectas de Plücker) para saber como está definido en el resto de los elementos del hexagrama místico.

Sin embargo, ya que no requeriremos de una manipulación expresa de la acción  $\omega^*$ , nos limitaremos a dar una descripción cualitativa de dicha acción en las subgráficas de  $K_6$  que nos interesan. Esto requiere recordar únicamente el siguiente hecho acerca de los automorfismos exteriores de  $S_6$  (ver el lema 5.1.1 del capítulo siguiente):

**Lema 4.3.1** Un automorfismo exterior de  $S_6$  intercambia transposiciones con productos triples de transposiciones ajenas

**Demostración:** ver el artículo [8] de H. Cárdenas y E. Lluis  $\square$

Por ejemplo,  $\omega : (ab) \leftrightarrow (bc)(de)(fa)$ .

Es decir, la acción  $\omega^*$  intercambiará aristas con 1-factores en  $K_6$ .

Esta propiedad dice exactamente que, si  $pl$  es una recta de Plücker,

$$\omega^* \circ \Phi_{pl} = (\text{arista}) \quad (4.9)$$

Además, el intercambio mencionado es tal que:

**Lema 4.3.2**

las aristas  $l$  y  $m$  comparten un vértice

$\iff$

$\omega^*(l)$  y  $\omega^*(m)$  forman un hexágono

(4.10)

**Demostración:** Esto es claro pues la única forma de que dos 1-factores no formen un hexágono es que tengan a una arista en común. Así, si  $(hi)$  y  $(jk)$  fuesen las transposiciones asociadas a las aristas  $l$  y  $m$ , al conjugar  $\omega(hi)$  con  $\omega(jk)$ , volvemos a obtener a  $\omega(hi)$ ; es decir,  $\omega(hi)$  y  $\omega(jk)$  conmutan y de aquí que  $(hi)$  y  $(jk)$  también conmuten.

Equivalentemente,

$$\{h, i\} \cap \{j, k\} = \emptyset \quad \square$$

Esto último indica que la asociación anterior se extiende a las rectas de Pascal  $p$  como:

$$\omega^* \circ \Phi_p = (\text{par conexo de aristas}) \quad (4.11)$$

**Observación 4.3.1** En cada uno de los casos anteriores se tiene que  $\omega^* \circ \Phi_{\Xi}$  es suprayectiva en clases.

Nuevamente, dado que esto ocurre también en todos los casos restantes, dejaremos de mencionarlo en lo sucesivo.

De acuerdo al teorema 2.2.3, tenemos que para cada punto de Kirkman  $K$ , la gráfica asociada  $\Phi_K$  consta de tres 1-factores tales que:

- (i) Forman tres hexágonos tomándolos por pares y
  - (ii) El complemento son dos 1-factores que también forman un hexágono,
- entonces tenemos que

$$\omega^* \circ \Phi_K = (\text{terna de aristas concurrentes}) \quad (4.12)$$

**Observación 4.3.2** Aquí vemos que los cinco 1-factores involucrados constituyen una de las 6 posibles 1-factorizaciones de  $K_6$  de acuerdo al teorema 4.1.1.

Nuevamente, por el teorema 2.2.2 y la evaluación  $\Phi_{St}$ , tenemos que para cada punto de Steiner  $St$ , la gráfica asociada  $\Phi_{St}$  consta de tres 1-factores tales que:

- (i) Forman tres hexágonos tomándolos por pares y
- (ii) Las aristas del complemento, al constituir una gráfica  $2K_3$ , no contienen ni un solo 1-factor;

Es decir, en este caso, los tres 1-factores mencionados pertenecen a tres 1-factorizaciones distintas de  $K_6$ , de donde

$$\omega^* \circ \Phi_{St} = K_3 \quad (4.13)$$

**Lema 4.3.3** El complemento de un 1-factor se constituye, de dos maneras distintas, con cuatro 1-factores los cuales, en cada caso, forman seis hexágonos al tomarlos por parejas  $\square$

Así, para  $S$  un punto de Salmon,

$$\omega^* \circ \Phi_S = \left( \begin{array}{c} \text{dos conjuntos de} \\ \text{cuatro aristas concurrentes} \end{array} \right) \quad (4.14)$$

En el mismo tenor que el lema 4.3.1 tenemos el hecho siguiente:

**Lema 4.3.4** Los automorfismos exteriores de  $S_6$  permutan entre sí a los productos de 3-ciclos ajenos  $\square$

De aquí se sigue que una gráfica  $2K_3$  va en otra del mismo tipo ante  $\omega^*$  y, por lo tanto, para las rectas de Cayley:

$$\omega^* \circ \Phi_c = 2K_3 \quad (4.15)$$

Recordemos que, en la descomposición de Veronese del hexagrama, las seis componentes son configuraciones de Desargues  $\mathcal{D}$  las cuales, a su vez, tienen a  $S_5$  como grupo de automorfismos:

**Lema 4.3.5**  $Aut(\mathcal{D}) \cong S_5$

**Demostración:** Ya que la gráfica de adyacencia de dicha configuración  $\mathcal{D}$ , definida en 3.1.3 del capítulo tercero, es  $LK_5$  y el grupo  $S_5$  también es el grupo de automorfismos de la gráfica mencionada  $\square$

Así, es natural considerar las subgráficas de  $K_6$  isomorfas a  $K_5$ .  
Ocurre que hay dos tipos de tales subgráficas:

1. Aquellas cuyas aristas son todas las que pasan por un vértice fijo de  $K_6$  y
2. Sus gráficas complementarias.

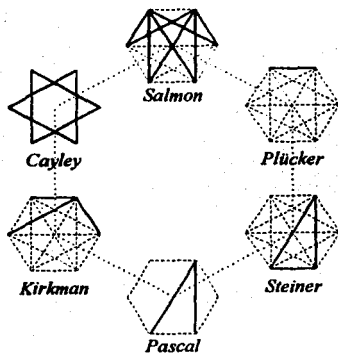


Figura 4.2: Segunda representación de  $\mathcal{HM}$  en  $\mathcal{S}(K_6)$

Estas últimas son, por supuesto, aquellas subgráficas completas determinadas por cinco vértices fijos de entre los seis vértices de  $K_6$ .

Considerando el teorema 4.1.1, un automorfismo exterior de  $S_6$ ,  $\omega$ , envía a una factorización de  $K_6$  a una de las subgráficas de  $K_6$  del tipo (1), por lo que también tenemos:

$$\omega^* \circ \Phi : (1\text{-factorización}) \rightsquigarrow (\text{subgráfica de } K_6 \text{ de tipo (1)}) \quad (4.16)$$

#### 4.4 Representación de $\mathcal{HM}$ en $\mathcal{S}(LK_6)$

En esta sección construimos un homomorfismo

$$\mathcal{HM} \longrightarrow \mathcal{S}(LK_6)$$

utilizando el homomorfismo  $\omega^* \circ \Phi$  construido en el párrafo anterior.

Para ello haremos las observaciones pertinentes sobre la gráfica  $LK_6$  conforme se vayan requiriendo.

Por principio de cuentas, esta asociación se puede hacer de manera directa para las rectas de Plücker y de Pascal:

En vista de la correspondencia 4.9, asociamos:

$$\text{recta de Plücker} \mapsto (\text{vértice})$$

y, por la correspondencia 4.11,

$$\text{recta de Pascal} \mapsto (\text{arista})$$

Recordemos ahora que la descomposición (en clanes) de  $LK_6$  en seis  $K_5$  se puede obtener como sigue:

**Observación 4.4.1** Cada uno de dichos  $K_5$  corresponde a las cinco aristas de  $K_6$  que pasan por un vértice fijo. Por otra parte, estos clanes de  $LK_6$  corresponden a las factorizaciones de  $K_6$  del teorema 4.1.1, de acuerdo a la asociación 4.16.

Es decir, asociamos:

$$\left( \begin{array}{c} \text{componente del} \\ \text{hexagrama} \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{c} \text{clan de} \\ LK_6 \end{array} \right)$$

Consideraremos a continuación una coloración fija para los clanes de  $LK_6$ . Así, ya que cada vértice pertenece a dos de tales clanes, los vértices de  $LK_6$  resultan bicolorados.

**Observación 4.4.2** Ante esta suposición, los 80 triángulos contenidos en  $LK_6$  se clasifican en

1. 20 triángulos multicolores (tricolores, pues bajo nuestra convención no hay triángulos bicolorados en esta gráfica) y
2. 60 triángulos monocromáticos.

Así, de acuerdo a la correspondencia 4.13,

*punto de Steiner*  $\mapsto$  (triángulo multicolor)

Aquí también podemos ver que, al corresponder los puntos de Steiner con las ternas de componentes del hexagrama, es razonable considerar la intersección de tres componentes cualesquiera de  $LK_6$ , lo cual es, precisamente, un triángulo multicolor.

**Observación 4.4.3** Dos  $K_3$  distintas comparten 4 triángulos multicolores. Estos cuatro triángulos, así como las dos  $K_3$  mencionadas, tienen un vértice en común. Esto se denomina en Bosák [2] un *4-molino holandés*.

Así, considerando la correspondencia 4.9, también se podría asociar biyectivamente al conjunto de rectas de Plücker con dichos molinos. Claramente, la primera elección es mucho más natural para las rectas de Plücker y la segunda corresponde entonces a los cuatro puntos de Steiner que definen a dicho tipo de rectas.

Para completar el análisis de los triángulos en  $LK_6$ , en base a la correspondencia 4.12, tenemos:

*punto de Kirkman*  $\mapsto$  (triángulo monocromático)

En vista de la correspondencia 4.15, asociamos directamente:

*recta de Cayley*  $\mapsto$  ( par de triángulos multicolores  
en colores complementarios )

Finalmente,

**Observación 4.4.4** Cada vértice en  $LK_6$  tiene ocho vértices vecinos (es decir, se trata de una gráfica 8-regular), los cuales se separan en dos subconjuntos de cuatro elementos. Además, los cuatro vértices en cada uno de estos dos conjuntos son vecinos entre sí, formando una subgráfica de tipo  $K_4$  en cada caso. Estas dos subgráficas pertenecen a componentes distintas.

Así, de acuerdo a la correspondencia 4.14, el conjunto mencionado es el que se puede hacer corresponder a un punto de Salmon:

*punto de Salmon*  $\mapsto$  (Dos  $K_4$  vecinos comunes de un vértice)

Para terminar, resumimos los efectos de la correspondencia  $\omega^*$  o  $\Phi$  de  $\mathcal{HM}$  con  $S(K_6)$  así como la correspondencia con  $S(LK_6)$  recién definida, en la tabla que sigue:

Hexagrama místico	$S(K_6)$	$S(LK_6)$
<i>punto de Salmon</i>	Dos conjuntos de cuatro aristas conexas	Dos $K_4$ vecinos comunes de un punto
<i>recta de Cuyley</i>	$2K_3$	Par de triángulos multicolores en colores complementarios
<i>recta de Plücker</i>	Arista	Vértice
<i>punto de Kirkman</i>	Terna de aristas con un vértice común	Triángulo monocromático
<i>punto de Steiner</i>	$K_3$	Triángulo multicolor
<i>recta de Pascal</i>	Par conexo de aristas	Arista
<i>figura</i>	Conjunto completo de aristas por un vértice fijo	$K_5$





## Capítulo 5

# Una teoría de grupos en $\mathcal{HM}$

Resolveremos nuevamente el problema de la representación del hexagrama místico, esta vez en términos de subgrupos de  $S_6$ .

En principio, se podría llevar más adelante la caracterización del hexagrama místico dada en el capítulo anterior estudiando, por una parte, los grupos  $\Gamma_g$  de automorfismos de las subgráficas  $g$  de  $K_6$  (considerando la realización natural de dichos grupos como subgrupos de  $S_6$ ) y, por la otra, los subgrupos de  $\Gamma(K_6)$  ( $\cong S_6$ ) estabilizadores de dichas gráficas, vistas esta vez como subgráficas de  $K_6$ .

Rápidamente, tal como se mencionó en la introducción, veremos por qué esta extensión natural de la solución planteada en el capítulo precedente para este mismo problema no es realmente una solución en estos nuevos términos.

**Definición 5.0.1**  $\mathcal{S}(S_6)$  es la red de todos los subgrupos de  $S_6$  con el orden parcial usual ( $\preceq$ ) junto con el *supremo*  $\vee$  e *ínfimo*  $\wedge$  de pares de elementos dados como sigue:

1.  $a \vee b := N \langle a, b \rangle$ , el normalizador del grupo generado por los subgrupos  $a$  y  $b$  y
2.  $a \wedge b := a \cap b$ , la intersección de los subgrupos  $a$  y  $b$ , como es usual.

En su momento comentaremos sobre la conveniencia de tomar el grupo normalizador en vez de el grupo generado directamente.

A continuación, desarrollaremos una teoría de grupos asociados a  $\mathcal{HM}$  mediante una representación

$$\Psi : \mathcal{HM} \longrightarrow \mathcal{S}(S_6), \quad (5.1)$$

que, como en el caso del capítulo anterior, tenga la propiedad 2.5.1; es decir,  $\Psi$  será una función que preserva tanto el supremo como el ínfimo de cada dos elementos de  $\mathcal{HM}$  y es tal que:

1.  $\Psi_X = \Psi_{p_i} \wedge \Psi_{p_j}$  si  $X = p_k \wedge p_l \wedge p_m$ , para  $\{i, j\} \subset \{k, l, m\}$  y
2.  $\Psi_x = \Psi_{p_i} \vee \Psi_{p_j}$  si  $x = p_k \vee p_l \vee p_m$ , para  $\{i, j\} \subset \{k, l, m\}$ .

Así, llamaremos grupos de Pascal, de Desargues, de Kirkman, etc. a los grupos asociados a cada uno de los elementos correspondientes de  $\mathcal{HM}$ .

Dicho representación  $\Psi$  no solamente resultará ser fiel, sino que, además,

$$\forall \Xi \in \mathcal{HM}, \Psi_{\Xi} \text{ será un subgrupo de } \Gamma \circ \Phi_{\Xi} \quad (5.2)$$

Finalmente, y tal como con las dos representaciones anteriores,  $\Psi$  también será suprayectiva en clases.

Los cálculos explícitos se verificaron utilizando algunos programas diseñados ex profeso por el Dr. H. Cárdenas y también con el sistema de álgebra computacional *Magma* [4]. En cada caso, la ausencia del cálculo correspondiente se ha indicado con el símbolo  $\square$ .

Por otra parte, ya que en algún momento utilizaremos los automorfismos exteriores de  $S_6$ , hemos considerado conveniente resumir lo que utilizaremos de ellos en la sección siguiente.

## 5.1 Automorfismos exteriores de $S_6$

En esta sección haremos un recuento de tres lemas, todos ellos muy sencillos, relacionados con los automorfismos exteriores de  $S_6$ .

**Definición 5.1.1** Un automorfismo interior en un grupo dado consiste en conjugar cada uno de los elementos de dicho grupo con un elemento fijo del mismo.

Un automorfismo exterior en un grupo dado es uno que no es interior.

**Teorema 5.1.1** Un grupo simétrico  $S_m$  tiene automorfismos exteriores si y solo si  $m = 2, 6$ .

**Demostración:** Ver el artículo clásico de Hölder [30] y el de H. Cárdenas y E. Lluís [8] para una presentación moderna del tema. Para el caso de cardinales infinitos, se puede ver [47]  $\square$

**Observación 5.1.1** Este teorema es la versión en teoría de grupos del teorema de descomposición 2.3.1 y, en teoría de gráficas, del teorema de factorización 4.1.1. De acuerdo a Cameron y van Lint hay otras dos formulaciones de dicho teorema; una en el lenguaje de categorías y la otra en relación al axioma de elección (ver [7], p. 83).

Así, consideraremos automorfismos exteriores de  $S_6$

$$\omega : S_6 \longrightarrow S_6 \quad (5.3)$$

**Lema 5.1.1** Los automorfismos exteriores  $\omega$ , si bien no cambian el orden de los elementos de  $S_6$ , sí cambian la longitud de los ciclos involucrados. En particular, si  $\alpha \in S_6$  es un 6-ciclo,  $\omega(\alpha)$  es el producto de un 3-ciclo y de una transposición ajenos entre sí  $\square$

**Lema 5.1.2** Los 12 subgrupos  $G (\cong S_5)$  de  $S_6$  se pueden clasificar en dos tipos:

1.  $G = \text{Stab}(n)$ , el subgrupo estabilizador de un elemento fijo  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y

2.  $G = \omega(\text{Stab}(n))$ , para  $\omega$  un automorfismo exterior de  $S_6$   $\square$

Los subgrupos del tipo (2) son los llamados  $S_5$  sin puntos fijos o, más apropiadamente, encajes de  $S_5$  en  $S_6$  sin puntos fijos.

**Lema 5.1.3** Dos automorfismos exteriores de  $S_6$  difieren solamente por conjugación con un automorfismo interior  $\square$

Así, de la clasificación anterior misma, los tipos (1) y (2) definidos anteriormente son estables ante los automorfismos interiores pero totalmente inestables ante los exteriores; es decir, un automorfismo exterior (5.3) *necesariamente* cambia el tipo del subgrupo  $G$ .

**Proposición 5.1.1** Para cada 6-ciclo  $\alpha \in S_6$  hay un único subgrupo  $G (\cong S_5) \subset S_6$  del tipo (2) tal que  $\alpha \in S_5$ .

Observamos que, ya que cada 6-ciclo «mueve» a todos los elementos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, el subgrupo buscado  $G$  también debe mover a todos los elementos mencionados; es decir, debe ser del tipo (2).

**Demostración:**

Sean  $\alpha$  un 6-ciclo en  $S_6$  y  $\omega$  un automorfismo exterior (5.3) y digamos que  $\omega(\alpha) = (a, b, c)(d, e)$ , de acuerdo al lema 5.1.1.

Así,  $\omega(\alpha) \in \text{Stab}(n)$ , donde  $n$  es el único elemento del conjunto diferencia

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{a, b, c, d, e\}$$

y  $G := \omega^{-1}(\text{Stab}(n))$  resuelve el problema:

Si hubiese otro  $G'$  tal, se tendría que  $\omega(G') = \text{Stab}(m)$  y, en consecuencia,

$$m = n \quad \square$$

Observemos que, de la misma demostración, la obtención de este grupo  $G$  no depende del automorfismo exterior  $\omega$  empleado.

**Notación 5.1.1** Denotaremos con  $S_\alpha$  a este  $S_5$  especial asociado al 6-ciclo  $\alpha$ .

## 5.2 Grupos estabilizadores y de automorfismos

Para cada una de las gráficas  $\Phi_{\Xi}$  podemos considerar, por una parte, a  $Stab(\Phi_{\Xi})$ , el grupo estabilizador de dicha subgráfica de  $K_6$  y, por la otra, a su grupo de automorfismos  $\Gamma(\Phi_{\Xi})$  inmerso de la manera natural en  $\Gamma(K_6)$  ( $\cong S_6$ ).

Sin embargo, ya que las subgráficas de  $K_6$  consideradas son generadoras, el homomorfismo  $\Phi$  resulta ser un igualador de los homomorfismos  $\Gamma$  y  $Stab$  en esta categoría:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{HM} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}(K_6) \\ & \searrow & \Gamma \downarrow \downarrow Stab \\ & & \mathcal{S}(S_6) \end{array}$$

por lo que bastaría considerar, en este caso, a alguno de ambos morfismos, pongamos por caso, a  $\Gamma$ .

Aún así, estos grupos coinciden para ciertos elementos (de tipos) diferentes en dicha configuración:

Si  $K$  es un punto de Kirkman y  $p$  es su recta de Pascal asociada mediante la correspondencia 2.2, entonces  $\Phi_K$  y  $\Phi_p$  son subgráficas de  $K_6$  mutuamente complementarias, por lo que  $\Gamma \circ \Phi_K$  y  $\Gamma \circ \Phi_p$  son grupos iguales, incluso como conjuntos. Análogamente, las correspondencias 2.3 y 2.4 nos permiten observar el mismo fenómeno con los pares de rectas de Cayley y puntos de Steiner, por un lado, y de rectas de Plücker y puntos de Salmon, por el otro.

Por otra parte, ya que esta propuesta tiene (vagamente hablando) información esencial sobre el hexagrama místico, hemos tratado de conservar dicha información en la solución propuesta en este capítulo.

Así, una opción sería el considerar al homomorfismo  $\Phi$  y, como en el capítulo anterior, componerlo con la acción  $\omega^* : \mathcal{S}(K_6) \rightarrow \mathcal{S}(K_6)$  inducida por un automorfismo exterior  $\omega : S_6 \rightarrow S_6$ .

Esto supera las dos dificultades planteadas anteriormente pues ahora, solo algunas de las gráficas  $\omega^* \Phi_{\Xi}$  son subgráficas generadoras de  $K_6$  y, además, no hay pares de tales gráficas que sean complementarias por

lo que, en principio, la asociación

$$\Xi \mapsto (\Gamma(\omega^* \Phi_\Xi), \text{Stab}(\omega^* \Phi_\Xi))$$

resuelve el problema de representación identificando a los elementos de  $\mathcal{HM}$  con ciertas parejas de subgrupos de  $S_6$ .

**Observación 5.2.1** Sin embargo, este procedimiento *no es del todo invariante* al depender de la elección de  $\omega$ .

De cualquier manera, el empleo de automorfismos exteriores es de interés pues, a pesar de lo anterior, sí respeta los tipos de objetos, tanto en  $\mathcal{HM}$  como en  $\mathcal{S}(S_6)$ . Así, esta asociación permite determinar de forma natural cuales puntos de Kirkman determinan una recta de Cayley, etc.; lo cual ha permitido diseñar un sistema computacional para mostrar de manera directa los diversos elementos de  $\mathcal{HM}$ .

### 5.3 Grupos asociados a $\mathcal{HM}$

En esta sección construiremos el homomorfismo 5.1 que ya hemos mencionado definiéndolo primeramente sobre las rectas de Pascal y extendiéndolo después al resto de los elementos de  $\mathcal{HM}$ .

Por la condición 5.2, de acuerdo al diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker} & \neq & 0 & & \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & \mathcal{HM} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}(K_6) \\ & & \Psi \downarrow & \searrow & \downarrow \Gamma \\ & & \mathcal{S}(S_6) & & \mathcal{S}(S_6) \end{array}$$

dicho homomorfismo satisfará que, para cada  $\Xi \in \mathcal{HM}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \longmapsto & \Phi_\Xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Psi_\Xi & \simeq & \Gamma \circ \Phi_\Xi \end{array}$$

**Grupos de Pascal**

Consideremos en este caso, para cada 6-ciclo  $\alpha$  en  $S_6$ , al subgrupo  $N_{S_6}(\alpha)$  normalizador de  $\langle \alpha \rangle$  en  $S_6$ ,

**Lema 5.3.1** Para cada 6-ciclo  $\alpha$  en  $S_6$ ,  $N_{S_6}(\alpha)$  es isomorfo a  $D_6$ , el grupo diédrico de 12 elementos  $\square$

**Observación 5.3.1** Tenemos que dichos grupos  $N_{S_6}(\alpha)$  están generados por

1. Un 6-ciclo, digamos  $\alpha$ , y
2. Un triple producto de transposiciones ajenas, digamos  $\beta$ , tal que

$$\beta\alpha\beta = (\alpha)^{-1}.$$

De hecho, cualquiera de los tres triples productos de transposiciones ajenas en dicho grupo, distintos de  $\alpha^3$ , desempeña el papel de  $\beta$  en el punto (2)  $\square$

Por otra parte, ya que el índice  $[S_6, N_{S_6}(\alpha)]$  de dicho subgrupo en  $S_6$  es 10, tenemos que  $N_{S_6}(N_{S_6}(\alpha)) = N_{S_6}(\alpha)$  por lo que la definición de este grupo, al que denotaremos simplemente con  $N(\alpha)$ , no depende en realidad del grupo  $S_6$ .

Así, asociemos a cada recta de Pascal  $p := \overline{abcdef}$  dicho grupo diédrico

$$p \mapsto \Psi_p := N(\alpha), \quad (5.4)$$

donde  $\alpha$  es el ciclo  $(a, b, c, d, e, f)$  en  $S_6$ .

**Observación 5.3.2** Es claro que esta correspondencia entre rectas de Pascal y subgrupos  $D_6$  sin puntos fijos (es decir, contenidos en algún  $S_\alpha$ ) es biyectiva.

Tal como en el capítulo anterior, omitiremos el continuar mencionando las biyectividades correspondientes para cada tipo de elementos de  $\mathcal{HM}$ .

Por otra parte, tenemos que los generadores de  $\Psi_p$  ( $(a, b, c, d, e, f)$  y  $(a, f)(b, e)(c, d)$ , digamos) permutan a las aristas de  $\Phi_p$  ( $ab, bc, cd, de, ef$  y  $fa$  en este caso), por lo que  $\Psi_p \preceq \Gamma \circ \Phi_p$ .

Además, ya que ambos grupos son del mismo orden, tenemos incluso la igualdad entre ellos:

$$\Psi_p = \Gamma \circ \Phi_p. \quad (5.5)$$

### Grupos de Kirkman

De acuerdo al teorema 2.2.3, si  $K$  es el punto de Kirkman determinado por las rectas de Pascal  $p_1, p_2$  y  $p_3$ ,

$$\Psi_K = \Psi_{p_1} \wedge \Psi_{p_2} \wedge \Psi_{p_3} \quad (5.6)$$

**Lema 5.3.2** Esta intersección está generada por un triple producto de transposiciones ajenas  $\square$

Es decir,

$$\Psi_K \cong \mathcal{Z}_2 \quad \square$$

**Lema 5.3.3** 1. Para cada triple producto de transposiciones ajenas, digamos  $\beta$ , hay exactamente doce 6-ciclos (sin considerar inversos) tales que  $\beta$  conjuga a cada uno de ellos con su propio inverso.

2. Dichos 6-ciclos son conjugados unos de los otros por ternas.
3. Cada una de estas clases de conjugación pertenece a su propio  $S_5$  del tipo (2)  $\square$

Es decir, para cada triple producto de transposiciones ajenas hay cuatro  $S_5$  del tipo (2) que lo contienen, de donde, de acuerdo a la



proposición 5.1.1 y a la observación 5.3.1, asociamos a cada punto de Kirkman  $K$ , en realidad, una pareja  $(\Psi_K, S_S)$ , con

$$\Psi_K \prec S_S : K \mapsto (\Psi_K, S_S)$$

**Lema 5.3.4** Si  $S_{\beta_1}$ ,  $S_{\beta_2}$ ,  $S_{\beta_3}$  y  $S_{\beta_4}$  son los cuatro  $S_S$  del tipo (2) que contienen a  $\beta$ , entonces

$$\langle \beta \rangle = \bigcap_{i=1}^4 S_{\beta_i} \quad \square$$

**Observación 5.3.3** Este hecho resulta muy interesante pues, a nivel de configuraciones proyectivas, cuatro componentes de  $\mathcal{HM}$  no tienen elementos en común.

**Observación 5.3.4** Por otra parte, para cada grupo  $S_{\beta_i}$  siempre quedan determinados los tres 6-ciclos correspondientes a las rectas de Pascal que pasan por el punto de Kirkman asociado a la pareja  $(\Psi_K, S_{\beta_i})$ .

**Observación 5.3.5** También aquí vemos la conveniencia de haber normalizado los grupos  $\langle \alpha \rangle$  en la definición 5.4 pues, ya a este nivel, si  $p_i = \bar{\alpha}_i$ , tenemos que

$$\langle \alpha_1 \rangle \cap \langle \alpha_2 \rangle \cap \langle \alpha_3 \rangle = \emptyset$$

Finalmente, ya que  $\beta$  deja invariante a cada  $\Phi_{p_i}$ , también deja invariante a  $\Phi_K$ , por lo que nuevamente,

$$\Psi_K \preceq \Gamma \circ \Phi_K.$$

**Observación 5.3.6** Esta última consideración también resulta de cierto interés por lo que sigue: de acuerdo al lema 5.3.4,  $\Psi_K$  pertenece a los cuatro  $S_{\beta_i}$  y, en principio, no es clara la elección de ninguno de estos grupos para, posteriormente, seleccionar el grupo diédrico «correcto». Sin embargo, el grupo  $\Gamma \circ \Phi_K$  ya está determinado de antemano y, por lo tanto, no hay que efectuar dicha elección.

### Grupos arguesianos

De acuerdo a la observación 5.3.1, siempre podemos determinar los pares de rectas de Pascal que concurren sobre una recta de Pascal dada  $p$ .

En particular, podemos hacerlo para los tres pares de rectas que concurren sobre  $p$  en puntos de Kirkman. De hecho, esta sería la versión en teoría de grupos del procedimiento empleado en la demostración del teorema de descomposición 2.3.1 para generar una configuración de Desargues  $\mathcal{D}$  dentro de  $\mathcal{HM}$ .

Por ejemplo, para el hexágono  $abcdef$ , tenemos las rectas de Pascal como se muestra en la figura 5.1

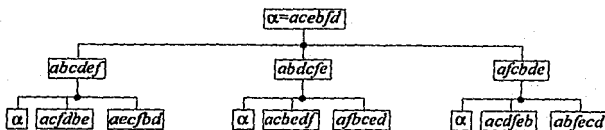


Figura 5.1: = Figura 2.5

**Lema 5.3.5** Este procedimiento genera precisamente a aquellas 10 rectas de Pascal cuyos grupos asociados mediante la asociación 5.4 son los conjugados del grupo  $\Psi_p$  correspondiente a la recta de Pascal  $p := \overline{abcdef}$  dentro del grupo  $S_{abcdef}$ ; obtenido este último de acuerdo a la proposición 5.1.1  $\square$

También tenemos que, en cada  $S_5 \times S_6$  del tipo (2) solo hay diez  $Z_2$  (sin puntos fijos)  $\square$

Ahora bien, para cada 6-ciclo  $\alpha$ , sean  $N_1 := N(\alpha)$ ,  $N_2, \dots, N_{10}$  los diez subgrupos conjugados de  $N(\alpha)$  en el grupo  $S_\alpha$  de la proposición 5.1.1.

Observamos que estos diez subgrupos diédricos comparten, por ternas determinadas por la construcción anterior, un triple producto de transposiciones ajenas; es decir, los grupos asociados a las rectas de Pascal correspondientes se intersectan en un  $\mathbf{Z}_2$  sin puntos fijos.

Aunque la demostración de este hecho es directa utilizando un automorfismo exterior (5.3), el conteo involucrado relaciona fuertemente al teorema de Veronese con el diseño por bloques arguesiano natural:

**Proposición 5.3.1** Hay exactamente 10 ternas de estos grupos diédricos que comparten entre sí un triple producto de transposiciones ajenas.

**Demostración:**

Sea  $\omega$  un automorfismo exterior (5.3), sea  $\alpha$  un 6-ciclo y digamos que  $\omega(\alpha) = (a, b, c)(d, e)$ . Entonces  $\omega(N(\alpha))$  puede generarse con  $\omega(\alpha)$  y  $(b, c)$ .

Así, los subgrupos diédricos

$$N' := \langle (d, b, c)(a, e), (b, c) \rangle \text{ y } N'' := \langle (e, b, c)(a, d), (b, c) \rangle$$

de  $S_\alpha$  se intersectan precisamente sobre  $\langle (b, c) \rangle$ .

Estas son las únicas ternas con la propiedad mencionada: siendo  $\omega(\alpha)^3$  una transposición, digamos  $(l, m)$ , si  $(l, m) \in N_i := N_\beta \subset S_\alpha$ , se tendría que  $\omega(\alpha)^3 \neq \beta^3$  o bien que  $N = N_i$ . Pero en tal caso  $\omega(\alpha)^3 \beta^3 \in N_i$ , lo cual agrandaría la intersección que nos interesa.

Ahora bien, para contar dichas ternas, notamos que

1. Hay 20 elementos de orden 6 en  $S_\alpha$ , siendo 10 de ellos los inversos de los otros.
2. Tal y como en la observación 5.3.1, cualquiera de los tres generadores de orden 2 de  $\omega(N(\alpha))$  es una de las permutaciones mencionadas.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> $\omega(N(\alpha))$  también puede ser generado con  $\omega(\alpha) = (a, b, c)(d, e)$  y cualquiera de las dos transposiciones  $(a, b)$  y  $(c, a)$ . El otro elemento de orden dos en  $\omega(N(\alpha))$  es  $\omega(\alpha)^3$ , pero  $\omega(N(\alpha)) \neq \langle \omega(\alpha), \omega(\alpha)^3 \rangle$ .

3. Cada elemento de orden 6 aparece en tres de estas ternas.

Así, tenemos  $\frac{3 \times 10}{3} = 10$  ternas del tipo requerido  $\square$

Así, cada subconfiguración arguesiana del hexagrama místico queda asociada con uno y solo uno de los  $S_5$  sin puntos fijos en  $S_6$ :

$$D \rightsquigarrow S_5 \quad (5.7)$$

En otras palabras, si  $D = \{K_{ij}, p_{klm}\}$  es una componente de  $\mathcal{HM}$ , tenemos que todos los grupos  $\Psi_{K_{ij}}$  y  $\Psi_{p_{klm}}$ <sup>2</sup> pertenecen al mismo  $S_D$  del tipo (2) y, por la observación 5.3.2 y la biyección 5.3, cada subgrupo  $D_6$  y  $Z_2$  en  $S_D$  es un  $\Psi_{K_{ij}}$  o un  $\Psi_{p_{klm}}$ , según su tipo, por lo que dicho  $S_D$  es el grupo  $S_5$  construido en los párrafos anteriores:

$$D \rightsquigarrow S_D$$

**Observación 5.3.7** También cada una de las ternas de grupos mencionados genera a todo el  $S_5$  sin puntos fijos mencionado  $\square$ .

Por otra parte, vemos también que  $\Phi_D$  es la 1-factorización de  $K_6$  cuyos pares de 1-factores constituyentes corresponden a los hexágonos  $\Phi_{p_{klm}}$  y sus ternas de 1-factores corresponden, a su vez, a las gráficas  $\Phi_{K_{ij}}$ . Así,

$$\Psi_D = \Gamma \circ \Phi_D$$

En general, sea  $D = \langle \alpha, \beta ; \alpha^6 = \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha^{-1} \rangle$  un grupo de Pascal, de acuerdo a la definición 5.4. Entonces,

**Proposición 5.3.2** La correspondencia 2.2 está dada, a nivel de grupos, como

$$N \langle \beta \rangle \longleftrightarrow \bar{\alpha}$$

**Demostración:**

Si  $\bar{\alpha} = \overline{abcdef}$ , entonces el procedimiento establecido en el teorema 2.3.1 da a las rectas  $\overline{acfdbe}$ ,  $\overline{adbfce}$  y  $\overline{acebfd}$  como las «últimas» (es

<sup>2</sup>Los subíndices están dados de acuerdo a la estructura de bloques para cada una de dichas componentes estudiada en la segunda sección del capítulo 3.

decir, las no concurrentes con  $\overline{abcdef}$ ) en la configuración arguesiana correspondiente.

Es fácil ver que los grupos asignados mediante la definición 5.4 a dichas rectas comparten al triple producto de transposiciones ajenas  $\alpha^3 \square$

**Observación 5.3.8** Así, con la asignación 5.6 y esta última proposición, tenemos ya una interpretación geométrica para cada uno de los triples productos de transposiciones ajenas que figuran en cada uno de los grupos de Pascal 5.4.

### Grupos de Steiner

En este caso podemos proceder exactamente igual que en el caso de los puntos de Kirkman:

Consideremos el punto de Steiner  $St$  determinado por las rectas de Pascal  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\Psi_{St} &= \Psi_{p_1} \wedge \Psi_{p_2} \wedge \Psi_{p_3} \\ &= (\Gamma \circ \Phi_{p_1}) \cap (\Gamma \circ \Phi_{p_2}) \cap (\Gamma \circ \Phi_{p_3})\end{aligned}\tag{5.8}$$

De hecho, si  $\Psi_{p_i} = \langle \alpha_i, \beta : \alpha_i^6 = 1, \text{ etc.} \rangle$ , no es difícil ver que, para cualquiera de las  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$\Psi_{St} = \langle \alpha_i^2, \beta \rangle (\cong D_3) \square$$

Por otra parte, ya que tres figuras tienen un solo punto de Steiner en común y recíprocamente (ver la correspondencia 3.4), podemos asociar a cada uno de estos puntos la intersección de los grupos asociados a dichas figuras:

De acuerdo a la proposición 5.1.1, tenemos que

$$\forall i = 1, 2, 3, \exists! S_i (\cong S_3) \text{ tal que } \Psi_{p_i} \subset S_i$$

Por cualquiera de los dos procedimientos, se obtiene el mismo grupo:

$$\Psi_{p_1} \wedge \Psi_{p_2} \wedge \Psi_{p_3} = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \square$$

Ya que en realidad se tiene que  $St = p_i \wedge p_j$ , entonces

$$\Psi_{St} = \Psi_{p_i} \wedge \Psi_{p_j}$$

y, por la igualdad 5.5,

$$\Psi_{St} = (\Gamma \circ \Phi_{p_i}) \wedge (\Gamma \circ \Phi_{p_j})$$

Por otra parte, también tenemos que  $\Phi_{p_i} \wedge \Phi_{p_j} = \Phi_{St}$ , de donde

$$(\Gamma \circ \Phi_{p_i}) \wedge (\Gamma \circ \Phi_{p_j}) \preceq \Gamma \circ \Phi_{St}$$

y de aquí que

$$\Psi_{St} \preceq \Gamma \circ \Phi_{St} \quad \square$$

Tampoco es difícil ver que cada elemento de  $S_\theta$  de la forma

$$(i, j, k)(l, m, n)$$

corresponde a un único punto de Steiner mediante el homomorfismo  $\Psi$ .

Resumiendo, mediante las igualdades 5.4, 5.6 y 5.8, y la observación 5.3.8 podemos asignar un significado geométrico en términos de  $\mathcal{HM}$  a los elementos de cada grupo de Pascal  $D_\theta = \langle \alpha, \beta \rangle$  marcados en la tabla 5.1.

1	$\beta$
$\alpha$	$\alpha\beta$
$\alpha^2$	$\alpha^2\beta$
$\alpha^3$	$\alpha^3\beta$
$\alpha^4$	$\alpha^4\beta$
$\alpha^5$	$\alpha^5\beta$

Tabla 5.1:  $D_\theta = \langle \alpha, \beta \rangle$

### Grupos de Cayley

Tal como en la construcción de las rectas de Cayley, tomemos un punto de Steiner  $St$  y sean  $p$ ,  $q$  y  $r$  las rectas de Pascal que definen a  $St$ .

Sean  $K_p$ ,  $K_q$  y  $K_r$  los puntos de Kirkman asociados a  $p$ ,  $q$  y  $r$ , mediante la correspondencia 2.2.

Sea  $St'$  el punto de Steiner conjugado de  $St$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para el punto

$$St := \overline{abcdef} \cap \overline{abefcd} \cap \overline{afcbed}$$

tenemos los generadores de los grupos de Kirkman correspondientes en la tercera columna de la tabla 5.3.

$\overline{abcdef}$	$\frac{aecfbd}{aebdfc}$ $\frac{adfbec}{adfbec}$	$(ad)(be)(cf)$	$K_p$
$\overline{abefcd}$	$\frac{acedbf}{acbfd e}$ $\frac{afdbce}{afdbce}$	$(af)(cb)(ed)$	$K_q$
$\overline{afcbed}$	$\frac{aecdfb}{aefbdc}$ $\frac{abdfec}{abdfec}$	$(ab)(ef)(dc)$	$K_r$

**Tabla 5.2:** Generadores de los grupos de Kirkman correspondientes al punto  $St$

Por otra parte, el grupo de Steiner asociado al punto

$$St' = \overline{adcbe f} \cap \overline{adefcb} \cap \overline{abedcf}.$$

está generado, digamos, por las permutaciones

$$(a, c, e)(d, b, f) \text{ y } (a, f)(d, e)(b, c) \quad \square$$

Observamos que los generadores de los grupos de Kirkman asociados a los puntos  $K_p$ ,  $K_q$  y  $K_r$  son los triples productos de transposiciones ajenas del grupo de Steiner  $\Psi_{St}$ , por lo que

$$\Psi_{S_1'} \subset \Psi_{K_p} \vee \Psi_{K_q} \vee \Psi_{K_r}$$

y basta considerar a los grupos asociados a los  $K_i$  para generar al grupo de dicha recta de Cayley:

$$\Psi_c = \Psi_{K_p} \vee \Psi_{K_q} \vee \Psi_{K_r} \quad (5.9)$$

Es decir, se trata de un grupo de orden 36, isomorfo a  $S_3 \times S_3$   $\square$

También en este caso es claro que, para  $\cdot = p, q$  ó  $r$ ,

$$\Psi_c = \Psi_{K_\cdot} \vee \Psi_{K_\cdot} = \Psi_{K_\cdot} \vee \Psi_{S_1'} \square$$

Nuevamente, un calculo similar a los anteriores muestra que

$$\Psi_c \triangleleft \Gamma \circ \Phi_c \square$$

### Grupos de Plücker

De acuerdo al teorema 2.4.2, a una recta de Plücker  $pl$  le corresponde  $N \langle \Psi_{S_1}, \Psi_{S_2}, \Psi_{S_3}, \Psi_{S_4} \rangle$ , el normalizador del grupo generado por los grupos asociados a los puntos de Steiner correspondientes:

$$\Psi_{pl} = \Psi_{S_1} \vee \Psi_{S_2} \vee \Psi_{S_3} \vee \Psi_{S_4} \quad (5.10)$$

lo cual es un grupo isomorfo a  $S_4 \times Z_2$   $\square$

Por otra parte, ya que estos cuatro puntos son los puntos de Steiner comunes a dos figuras, también podríamos asociar a dicha recta de Plücker la intersección de los grupos arguesianos correspondientes, obteniendo nuevamente el mismo grupo  $S_4 \times Z_2$   $\square$

Es decir, el grupo de Plücker  $\Psi_{pl}$  se puede calcular por cualquiera de estos dos procedimientos.

En este caso, se puede verificar fácilmente que

$$\Psi_{pl} = \Gamma \circ \Phi_{pl} \square$$



### Grupos de Salmon

De acuerdo a la definición de los puntos de Salmon (ver el teorema 2.4.3), sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $pl$  es la recta de Plücker donde se hayan los puntos de Steiner  $St_1$ ,  $St_2$ ,  $St_3$  y  $St_4$  a los cuales concurren, a su vez, las siguientes ternas de rectas de Pascal:

$St_1$	$fadbec$	$afbdce$	$daebfc$
$St_2$	$afdcbe$	$acbfde$	$facdeb$
$St_3$	$febdca$	$bacefd$	$abecdf$
$St_4$	$afebcd$	$abcfed$	$abedcf$

Tabla 5.3: Puntos de Steiner en la recta  $pl$

Cada una de estas rectas tiene asociado, mediante la correspondencia 2.2, un cierto punto de Kirkman.

Explícitamente, al objeto en el lugar  $(i, j)$ , con  $i > 1$ , de la tabla 5.3, le corresponde el del lugar  $(i-1, j)$  de la tabla 5.4.

Cada renglón de esta última tabla determina al grupo  $\Psi_{c_i}$  asociado a  $c_i$ , la recta de Cayley correspondiente de acuerdo a la igualdad 5.9 (ver la tabla 5.5).

Finalmente, la intersección de los grupos de Cayley correspondientes

$$\Psi_S = \Psi_{c_1} \wedge \Psi_{c_2} \wedge \Psi_{c_3} \wedge \Psi_{c_4} \quad (5.11)$$

(de acuerdo al teorema 2.4.3) es, precisamente, el grupo

$$\langle (a, f)(b, e)(c, d) \rangle (\cong \mathbf{Z}_2) \quad \square$$

**Observación 5.3.9** Nuevamente, tenemos que el elemento

$$(a, f)(b, e)(c, d)$$

$(fb)(ae)(dc)$	$(ad)(fc)(be)$	$(db)(af)(ec)$
$(ac)(fb)(de)$	$(af)(cd)(be)$	$(fd)(ae)(cb)$
$(fd)(ec)(ba)$	$(be)(af)(cd)$	$(ac)(bd)(cf)$
$(ab)(fc)(ed)$	$(af)(be)(cd)$	$(ad)(bc)(ef)$

Tabla 5.4: Generadores de los grupos de Kirkman asociados

$\Psi_{c_1}$	$= \langle (def), (ae)(bf)(cd), (bc)(ef) \rangle$
$\Psi_{c_2}$	$= \langle (cef), (ac)(bf)(de), (bd)(ef) \rangle$
$\Psi_{c_3}$	$= \langle (cf)(de), (bc)(de), (ab)(ce)(df) \rangle$
$\Psi_{c_4}$	$= \langle (ce)(df), (bdf), (ab)(cf)(de) \rangle$

Tabla 5.5: Generadores de los grupos de Cayley asociados

pertenece a  $\Psi_{c_i} := N \langle x \rangle$ , para un cierto grupo  $x$ , pero

$$(a, f)(b, e)(c, d) \notin x.$$

Es decir, también ha sido necesario normalizar a los grupos para realizar esta construcción.

Para terminar, claramente

$$\Psi_S \triangleleft \Gamma \circ \Phi_S \cong S_2 \times S_4 \quad \square$$

## Bibliografía

- [1] J. Bokowski y B. Sturmfels, *Computational Synthetic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics No. **1355**. Springer, 1989.
- [2] J. Bosák, *Decompositions of Graphs*. Mathematics and Its Applications (East European Series) vol. **47**. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [3] R.C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*. Pacific J. of Math. **13** (1963) p.p. 389-419.
- [4] W. Bosma y J. Cannon, *Magma, computer algebra*. Sydney, versión 07-IX-'94.
- [5] C. J. Brianchon, *Mémoire sur les lignes du 2<sup>e</sup> ordre*. 1806.
- [6] E. Brieskorn y H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser, 1989.
- [7] P. J. Cameron y J. H. van Lint, *Designs, Graphs, Codes and their Links*. LMS Student texts **22**. Cambridge University Press, 1991.
- [8] H. Cárdenas y E. Lluís, *The Mathieu Group Revisited*. Por aparecer.
- [9] H. Cárdenas y R. San Agustín, *On Vronesc's decomposition Theorem and the outer automorphism of  $S_8$* . J. of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computation. Por aparecer.
- [10] H. Cárdenas y R. San Agustín, *On Cayley's construction and certain Combinatorial Designs*. Publicaciones preliminares **345**, IMU-NAM (1994).

- [11] R. D. Carmichael, *Introduction to the theory of groups of finite order*. Dover Publications Inc. 1956.
- [12] A. Cayley, *J. für R. und Angewandte Math.* **31** (1846) p.p. 213 y sigs.
- [13] L. C. Chang, *The uniqueness and non uniqueness of the triangular association scheme*. *Sci. Record* **3** (1959) p.p. 604-613.
- [14] L. C. Chang, *Association Schemes of Partially Balanced Designs with parameters  $v = 28$ ,  $n_1 = 12$ ,  $n_2 = 15$  and  $p_{11}^2 = 4$* . *Sci Record* **4** (1960) p.p. 12-18.
- [15] Ch. H. Clemens, *A Scrap Book on Complex Curve Theory*. Plenum Press. New York, 1980.
- [16] W. S. Connor, *The uniqueness of the triangular association scheme*. *Ann. Math. Stat.* **29** (1958) p.p. 262-266.
- [17] J.L. Coolidge, *A History of the Conic Sections and Quadric surfaces*. Dover Pub. Inc., 1968.
- [18] J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods*. Dover Pub. Inc., 1963.
- [19] L. Cremona, *Teoremi Stereometrici, dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal*. *Memoria dei Reale academie dei Lincei, I* (1877) p.p. 854-874.
- [20] R. Daublebsky von Sterneck, *Die configurationen* 11<sub>3</sub>. *Monatsh. Math. Physik* **5** (1894), p.p. 325-330.
- [21] R Daublebsky von Sternbeck, *Die configurationen* 12<sub>3</sub>. *Monatsh. Math. Physik* **6** (1895) p.p. 223-255.
- [22] P. Doubilet, G.C. Rota y J. Stein, *On the foundations of Combinatorial theory*. IX. *Studies in Appl. Math.* **LIII** (1974) p.p. 185-216.
- [23] H. Eves, *Estudio de las geometrias*. Editorial UTEHA, México, 1982.

- [24] W. Fulton, *Plane Algebraic Curves*. Dover Pub. Inc., 1954.
- [25] Ph. A. Griffiths y J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & sons. New York, 1978.
- [26] R. Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*. Benjamin, 1976.
- [27] A. Henderson, *The 27 lines upon a cubic surface*. Heffner Publishing Co. New York, 1911.
- [28] D. Hilbert y S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*. Chelsea, 1952.
- [29] J. W. P. Hirschfeld, *Projective Geometries and finite fields*. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 1979.
- [30] Hölder, *Bildung Zusammengesetzter Gruppen*. Math. Ann. **46** (1895) p.p. 321-422.
- [31] T. P. Kirkman, Cambridge and Dublin J. **5** (1850) p.p. 185 y sigs.
- [32] Ch. Ladd, *The Pascal Hexagon*. Amer. J. of Math. **2** (1879) p.p. 1-12.
- [33] J. H. van Lint y R. M. Wilson, *A course in combinatorics*. Cambridge University Press, 1992.
- [34] E. Mendelsohn y A. Rosa, *One-factorizations of the complete graph - A survey*. J. of graph theory **9** (1985) p.p. 43-65.
- [35] J. Möbius, J. für R. und Angewandte Math. **3** (1828) p.p. 276 y sigs.
- [36] B. Pascal, *Essai pour les coniques*. Œuvres Complètes, Brunshvigg et Boutroux, vol. I, Paris (1908) p.p. 245 y sigs.  
También en Éditions du Seuil (1963) p.p. 35-37.
- [37] J. Plücker, J. für R. und Angewandte Math. **5** (1830) p.p. 274 y sigs.

- [38] H.W. Richmond, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **XV** (1894) p.p. 207 y sigs. ó p.p. 267-302 (?).
- [39] H.W. Richmond, *Quart. J. of Math.* **XXXI** (1899) p.p. 125-160.
- [40] H.W. Richmond, *The figure formed from six points in space of four dimensions.* *Math Annal.* **LIII** (1900) p.p. 161-176.
- [41] H.W. Richmond, *Quart. J. of Math.* **XXXIV** (1903) p.p. 117-154.
- [42] T. Reye, *Geometrie der Lage.* Leipzig, 1876.
- [43] G. C. Rota, *Combinatorics, representation theory and invariant theory: the story of a mnage trois.* Inaugural address delivered at Taormina, Italy, July 26, 1994.
- [44] G. Salmon, *A treatise on Conic Sections.* Chelsea, 1952.
- [45] R. San Agustín, *Configuraciones de rectas en el espacio.* UAM-I 04.0406.II.01.11.1992.
- [46] R. San Agustín, *On Cayley's Projective Configurations, An algorithmic study.* En *Invariant Methods in Discrete and Computational Geometry*, N.L. White (ed.) (1995) p.p. 289-299.
- [47] J.Schreier y J. A. Ulam, *Über die Automorphismen der Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge.* *Fund. Math.* **28** (1937) p.p. 258-260.
- [48] J. Steiner, *Jacob Steiner's gesammelte Werke.* Chelsea, 1971.
- [49] E. Steinitz, *Konfigurationen der projektiven Geometrie.* *Encyclop. d. Math. Wissenschaften* **III** AB5a. (1910) p.p. 481-516.
- [50] B. Sturmfels y N.L. White, *All  $11_3$  and  $12_3$ -configurations are rational.* *Aequationes Mathematicae* **39** (1990) p.p. 254-260.
- [51] J. J. Sylvester, *Elementary researches in the analysis of combinatorial aggregates.* *Philos. Mag.* **24** (1844) p.p. 285-296.

- [52] H. W. Turnbull, *Los grandes matemáticos*. "El mundo de las matemáticas", vol. I, James R. Newman. Ediciones Grijalbo, S.A. Barcelona-México, D.F. (1968) pp. 61-63.
- [53] O. Veblen y J. W. Young, *Projective Geometry* (2 vols.) Ginn & Co., 1917.
- [54] G. Veronese, *Nuovi Teoremi sull'Hezagramum Misticum*. Memoria dei Reale academie dei Lincei I (1877) p.p. 649-703.
- [55] J. de Vries, *Over vlakke polyedrale configuraties*. Amst. Versl. en Meded. 3 no. 6 (1889), p.p. 8-38.
- [56] J. de Vries, *Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties*. Amst. Versl. en Meded. 3 no. 6 (1889), p.p. 45-68.
- [57] W. D. Wallis, *Combinatorial Designs. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics*. Marcel Dekker, Inc., 1988.
- [58] N.L. White (ed.), *Theory of Matroids*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 26. Cambridge University Press, 1986.
- [59] N.L. White (ed.), *Combinatorial Geometries*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 29. Cambridge University Press, 1987.
- [60] N.L. White, *Tutorial on Cayley-Grassman algebra*. En Invariant Methods in Discrete and Computational Geometry, N.L. White (ed.) Kluwer Academic Publishers (1995).