30

2E

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"TOPOLOGIA DIFERENCIAL DE LOS GRUPOS DE LIE"

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

ROBERTO RODRIGUEZ PEREZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1995

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el **pasante(s)** Roberto Rodríguez Pérez

con número de cuenta 8125243-5 **con el Título:**

"TOPOLOGIA DIFERENCIAL DE LOS GRUPOS DE LIE"

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático.

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Doctor	Félix	Recillas Juárez	
Director de Tesis Doctora	Zenaida Elvira	Ramos Zuñiga	
Doctor	Eugenio	Garnica Vigil	
Doctora	Ana Margarita	Guzmán Gómez	
Suplente M. C.	Rogelio	Jiménez Fragoso	
Suplente			

A María Josefina...

Por ser una gran compañera,
por ser una gran amiga y
por ser una maravillosa esposa...

Noviembre de 1995.

Contenido

INTRODUCCION

Las variedades consideradas en el presente trabajo son exclusivamente "variedades analíticas reales". Estás son definidas en el Capítulo 1. Y se demuestra el Teorema de la equivalencia de la noción de variedad de C. Chevalley - H. Whitney, el cual se demuestra unicamente para variedades diferenciables.

En la primera sección del segundo capítulo se define la noción de función analítica real y se obtienen algunos resultados importantes y en la segunda sección se obtienen resultados utilizando variedades analíticas reales, las cuales están dadas bajo el concepto de C. Chevalley . Los resultados que aparecen en el Capítulo 2, son los que nos ayudarán a desarrollar los siguientes dos capítulos.

En el Capítulo 3, se define la noción de un espacio tangente a una variedad dada abstractamente, para todo mapeo analítico Φ de una variedad $\mathcal{V}$ sobre una variedad $\mathcal{W}$, esta asociada a un mapeo diferencial $d\Phi$ que mapea al espacio tangente a la variedad $\mathcal{V}$: $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ en el espacio tangente a la variedad $\mathcal{W}$: $\mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}$. Las diferenciales de una función son consideradas como un caso especial de estos mapeos diferenciales.

En el Capítulo 4, se define la noción de un campo vectorial, el cual esta definido como una ley que asigna a cada punto p de la variedad $\mathcal{V}$ un vector tangente a este punto: X_p; enseguida se define la "operación corchete" o "operación paréntesis" de Lie, para campos vectoriales y se discute el efecto de esta operación de mapeo.

Agradecimientos:

Deseo agradecer al Dr. Félix Recillas Juárez , director de tesis, la ayuda y la atención que me presto durante el desarrollo del presente trabajo de tesis.

Capítulo 1

La Equivalencia de Variedad de W - C.

Observación 1.0.1 *Denotaremos con $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ a los espacios euclideanos de dimensión m y n respectivamente. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$: $U \subset \mathbb{R}^m$ y sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$: $V \subset \mathbb{R}^n$ y sea φ una aplicación de U en V:*

$$\varphi : U \to V$$

definida por la correspondencia

$$(x_1, x_2, ..., x_m) \mapsto \varphi(x_1, ..., x_m) = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

Si denotamos con $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, entonces todo punto $q \in U$ se puede expresar como:

$$q = (x_1(q), x_2(q), ..., x_m(q))$$

de tal suerte que si $\varphi(q) \in V$, entonces

$$y_i(\varphi(q)) = \varphi_i(x_1(q), x_2(q), ..., x_m(q)) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Se dirá que la aplicación φ es diferenciable si las coordenadas y_i $(1 \leq i \leq n)$ son funciones diferenciables de las coordenadas x_j $(1 \leq j \leq m)$:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Si φ es un homeomorfismo de U sobre V y si Ψ es la aplicación inversa de V sobre U. Entonces, φ y Ψ estarán definidas por las funciones continuas φ_i y Ψ_j:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$x_j = \Psi_j(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (1 \leq j \leq m)$$

Si usamos la notación $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ entonces, las ecuaciones precedentes se expresan como

$$y_i = \varphi_i(x) \ \text{ con } \ x \in U \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$x_j = \Psi_j(y) \ \text{ con } \ y \in V \qquad (1 \leq j \leq m)$$

Se dirá que la aplicación φ es analítica en el punto $p \in U$ de coordenadas $x_j(p)$ $(1 \leq j \leq m)$:

$$p = (x_1(p), x_2(p), \ldots, x_m(p))$$

si existe una vecindad V del punto p y n series de potencias

$$P_j \qquad (1 \leq j \leq n)$$

en m variables reales tales que:

$$y_i(\varphi(q)) = P_j(x_1(q) - x_1(p), x_2(q) - x_2(p), \ldots, x_m(q) - x_m(p))$$

$$(1 \leq j \leq n) \ \text{ para toda } \ q \in V.$$

En otras palabras, la aplicación φ es analítica en el punto $p \in U$ si las coordenadas y_i $(1 \leq i \leq n)$ se pueden expresar como serie de potencias en:

$$(x_1(q) - x_1(p)), (x_2(q) - x_2(p)), \ldots, (x_m(q) - x_m(p))$$

convergente en alguna vecindad del punto $p \in U$. Se dirá que la aplicación φ es analítica sobre U, si φ es analítica en todo punto $p \in U$.

Definición 1.0.1 *Sea $\mathcal{T}$ un espacio topolólogico Hausdorff. Por una* **carta abierta** *sobre el espacio $\mathcal{T}$ con dominio U, se entenderá una pareja*

$$(U, \phi)$$

donde: U es un subconjunto abierto del espacio $\mathcal{T}$: $U \subset \mathcal{T}$ y ϕ es un homeomorfismo de U sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$:

$$\phi : U \to \mathbb{R}^n$$

Definición 1.0.2 *Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico Hausdorff. Por una* **estructura diferencial** *de dimensión n sobre el espacio $\mathcal{T}$, se entenderá una familia de cartas abiertas*

$$\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

sobre el espacio topolólogico $\mathcal{T}$, tal que, $\phi_\alpha(U_\alpha)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$:

$$\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{para toda} \quad \alpha \in \Lambda$$

satisfaciendo las siguientes condiciones:

W_I) *El conjunto de dominios*

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$$

de las cartas abiertas sobre el espacio $\mathcal{T}$ de la familia Φ es una cubierta abierta del espacio $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha .$$

W_{II}) *Para todo par de cartas abiertas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$: $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta) \in \Phi$. La aplicación:*

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es una aplicación diferenciable.

W_{III}) *La familia de cartas abiertas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$:*

$$\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

es una familia máxima de cartas abiertas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$ que satisfacen las condiciones W_I) y W_{II}).

Definición 1.0.3 *Una* **variedad diferenciable** *$\mathcal{V}$ de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff dotado de una estructura diferencial*

$$\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

de dimensión n.

Observación 1.0.2 *Si $\mathcal{V}$ es una variedad diferenciable de dimensión n, una carta local o sistema local de coordenadas será por definición una pareja*

$$(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \Phi$$

Si p es un punto del conjunto abierto U_α: $p \in U_\alpha$ y si

$$\phi_\alpha(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)) \in I\!R^n$$

entonces, el conjunto U_α se le llamará la **vecindad cúbica** *del punto p y los números reales*

$$(x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p))$$

son llamados **coordenadas locales** *del punto $p \in U_\alpha$. El mapeo:*

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to I\!R^n$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \phi_\alpha(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q))$$

es usualmente denotado por el símbolo:

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Observación 1.0.3 *Es practicamente imposible obtener por construcción una familia máxima de cartas abiertas que satisfagan las condiciones W_I) y W_{II}) de la Definición 1.0.2. Sin embargo, esta dificultad se elimina por medio de la siguiente Proposición, puesto que la misma demuestra que la condición W_{III}) no es esencial en la definición del concepto de variedad.*

Proposiciòn 1.0.1 *Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico Hausdorff y sea*

$$\Psi = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

una familia de cartas abiertas sobre el espacio $\mathcal{T}$, tal que, $\psi_\alpha(V_\alpha)$ es un subconjunto de $I\!R^n$:

$$\psi_\alpha(V_\alpha) \subset I\!R^n \quad \textit{para toda } \alpha \in \Lambda$$

satisfaciendo las condiciones siguientes:

i) *El conjunto de dominios $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de las cartas abiertas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$ de la familia Ψ es una cubierta abierta del espacio topológico $\mathcal{T}$:*

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

ii) ***Para todo par de cartas abiertas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$: (V_α, ψ_α), $(V_\beta, \psi_\beta) \in \Psi$. La aplicación:***

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta) \to \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$$

es una aplicación diferenciable.

Entonces, existe una estructura diferencial única:

$$\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$, tal que:

$$\Phi \supset \Psi.$$

Demostración. Si (U, ϕ) y (V, ψ) son dos cartas abiertas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$ con $\phi(U)$ y $\psi(V)$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, tales que, la aplicación:

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$$

es una aplicación diferenciable, diremos que (U, ϕ) y (V, ψ) están diferenciablemente relacionados y se denotará con el símbolo:

$$(U, \phi) \sim (V, \psi)$$

si p es un punto de la intersección $U \cap V : p \in U \cap V$ y si la aplicación:

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$$

es una aplicación diferenciable en el punto $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$; diremos que (U, ϕ) y (V, ψ) están diferenciablemente relacionadas en el punto $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$, lo cual lo denotaremos con el símbolo

$$(U, \phi) \underset{p}{\sim} (V, \psi)$$

es inmediato que está relación "$\underset{p}{\sim}$" es una relación de equivalencia, es decir

a) $(U, \varphi) \sim (U, \varphi)$.

b) **Si** $(U, \varphi) \sim (V, \psi) \quad \Rightarrow \quad (V, \psi) \sim (U, \varphi)$.

c) **Si** $(U, \varphi) \sim (V, \psi)$ **y** $(V, \psi) \sim (W, \delta) \quad \Rightarrow \quad (U, \varphi) \sim (W, \delta)$.
donde (U, φ), (V, ψ), (W, δ) son cartas abiertas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$.

Establecidas estas consideraciones procederemos con la demostración de la Proposición, para tal fin, sea Φ la familia de cartas abiertas (U,φ) sobre el espacio $\mathcal{T}$, tales que

$$(U,\varphi) \sim (U_\alpha,\varphi_\alpha) \ \ \textit{para toda} \ \ (U_\alpha,\varphi_\alpha) \in \Psi.$$

Se afirma que la familia Φ posee las propiedades deseadas. En efecto, consideremos dos elementos de la familia Φ:

$$(U,\varphi)\,,\ (V,\psi) \in \Phi$$

enteramente arbitrarios, y sea p un punto fijo pero arbitrario de la intersección $U \cap V$: $p \in U \cap V$. Como Ψ es una estructura diferencial sobre el espacio $\mathcal{T}$ existe una carta abierta:

$$(U_{\alpha_0},\phi_{\alpha_0}) \in \Psi$$

tal que

$$p \in U_{\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad p \in U \cap U_{\alpha_0}$$

y como por definición

$$(U,\varphi) \sim (U_{\alpha_0},\phi_{\alpha_0})$$

en particular

$$(U,\varphi) \underset{p}{\sim} (U_{\alpha_0},\phi_{\alpha_0})$$

analogamente obtenemos

$$(V,\psi) \underset{p}{\sim} (U_{\alpha_0},\phi_{\alpha_0})$$

Además como por hipótesis Ψ es una estructura diferencial sobre el espacio $\mathcal{T}$ para toda carta abierta $(U_\alpha,\phi_\alpha) \in \Psi$, obtenemos

$$(U_\alpha,\phi_\alpha) \sim (U_\beta,\varphi_\beta) \ \ \textit{para toda} \ \ (U_\beta,\varphi_\beta) \in \Phi$$

lo cual implica $(U_\alpha,\phi_\alpha) \in \Phi$, es decir

$$\Psi \subset \Phi$$

esta relación a su vez implica que

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \ \ \textit{para toda} \ \ (U_\lambda,\phi_\lambda) \in \Phi.$$

Todo esto demuestra que la familia Φ es una estructura diferencial máxima sobre el espacio T. Y así la condición i) está demostrada. Finalmente, si Φ' es otra estructura diferencial máxima, tal que

$$\Phi \subset \Phi'$$

Esta relación, de acuerdo con el concepto de estructura diferencial, implica que toda carta abierta $(U,\varphi) \in \Phi'$, es tal que

$$(U,\varphi) \sim (U_\alpha,\phi_\alpha) \quad \textit{para toda} \quad (U_\alpha,\phi_\alpha) \in \Phi$$

por consiguiente

$$(U,\phi) \in \Phi$$

lo cual significa

1) $\Phi' \subset \Phi$.

y como por hipótesis Φ' es una estructura diferencial máxima se obtiene que

2) $\Phi' \supset \Phi$.

Por tanto, 1) y 2) implican que

$$\Phi' = \Phi$$

y así la unicidad de la estructura Φ está demostrada y con ésta se termina la demostración de la Proposición 1.0.1. ■

Definición 1.0.4 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad diferenciable. Por una* **función diferenciable** *f en un punto p de la vecindad V: $p \in V$, se entenderá una función definida en todos los puntos de alguna vecindad del punto p de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y diferenciable en el punto $p \in \mathcal{V}$.*

Definición 1.0.5 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades de dimensión m y n respectivamente y sea:*

$$f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto f(p)$$

un mapeo definido en una vecindad de un punto p de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Se dirá que la **función** *f* **es diferenciable** *en el punto $p \in \mathcal{V}$, si existe* *una carta abierta (U, ϕ) en el punto p de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y una carta abierta (V, ψ) en el punto $f(p)$: $f(p) \in \mathcal{W}$, tal que, la función:*

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

es diferenciable en el punto $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$. Donde: $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ y $\psi(V) \subset \mathbb{R}^m$.

Definición 1.0.6 *Sea $\mathcal{T}$ un espacio topólogico conexo. Si a todo punto p del espacio $\mathcal{T}$: $p \in \mathcal{T}$ se le asigna una familia $\mathcal{F}(p)$ de funciones reales definidas en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$:*

$$p \mapsto \mathcal{F}(p) \quad \text{para toda} \quad p \in \mathcal{T}.$$

Se dirá que se tiene definida una **variedad** *$\mathcal{V}$, si se satisfacen los siguientes axiomas:*

C_I) *Toda función f de la familia $\mathcal{F}(p)$: $f \in \mathcal{F}(p)$ está definida en alguna vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$:*

$$f : V \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto f(p)$$

vecindad que puede depender de la función f:

$$V = V(f).$$

C_{II}) *Si f es una función definida sobre la variedad $\mathcal{V}$ y si $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son funciones que pertenecen a la clase $\mathcal{F}(p)$, tal que, la función f depende analíticamente de las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$. Entonces, la función f pertenece a la familia de funciones $\mathcal{F}(p)$: $f \in \mathcal{F}(p)$. Es decir*

$$f \underset{p}{\sim} f_1, f_2, \ldots, f_m \quad \text{con} \quad f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathcal{F}(p) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{F}(p).$$

C_{III}) *Existe un conjunto finito ordenado $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de funciones de la familia $\mathcal{F}(p)$:*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{F}(p)$$

y una vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$ y un número real $a > 0$ que satisfacen las siguientes condiciones:

i) *Todas las funciones* $x_1, x_2, ..., x_n$ *están definidas en la vecindad* V:

$$x_i : V \to \mathbb{R}$$

definidas por la correspondencia

$$q \mapsto x_i(q)$$

para $(1 \leq i \leq n)$.

ii) *Si* $I_a^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \ | x_i - x_i(p) | < a \ \ para \ \ (1 \leq i \leq n) \}$. *La aplicación:*

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^n$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q))$$

mapea homeomorficamente a la vecindad V *sobre el cubo* I_a^n *de centro:*

$$\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)).$$

iii)a) *Para todo punto* $q \in V$ *las funciones* $x_1, x_2, ..., x_n$ *pertenecen a la clase de funciones* $\mathcal{F}(q)$:

$$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathcal{F}(q).$$

iii)b) *Para todo punto* $q \in V$ *toda función* f *de la familia* $\mathcal{F}(q)$: $f \in \mathcal{F}(q)$ *depende analíticamente de las funciones* $x_1, x_2, ..., x_n$ *en el entorno del punto* $q \in V$:

$$f \in \mathcal{F}(q) \quad \Rightarrow \quad f \underset{q}{\sim} x_1, x_2, ..., x_n.$$

donde: al espacio $\mathcal{T}$ *se le llama el* **espacio topológico subyacente** *a la variedad* $\mathcal{V}$. *Y a la familia* $\mathcal{F}(p)$ *se le llama la* **clase de funciones analíticas** *sobre la variedad* $\mathcal{V}$ *en el punto* $p \in \mathcal{V}$.

Teorema 1.0.1 [1] *La noción de variedad de* **Claude Chevalley** *es equivalente a la noción de variedad de* **H. Whitney.**

Demostración. Supongamos que la condición se satisface. Por hipótesis, para todo punto $p \in \mathcal{V}$ existe un sistema de coordenadas:

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

y si definimos la pareja

$$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$$

donde $U_\alpha = V$ y $\varphi_\alpha = \varphi$. Se obtiene una familia de cartas abiertas

$$\Phi = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

definidas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$, tal que

$$\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{para todo} \quad \alpha \in \Lambda.$$

Es evidente que está familia de cartas abiertas es una cubierta abierta del espacio topológico $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$$

y así la condición $W_I)$ está verificada.

Finalmente, se afirma que si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son dos cartas abiertas del mismo punto $p \in \mathcal{V}$, entonces, la aplicacion:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un homeomorfismo. En efecto, supongamos que

1) $\varphi_\alpha : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V_\alpha, a_\alpha)$

es un sistema de coordenadas en el punto $p \in \mathcal{V}$ y si también se considera el sistema de coordenadas

2) $\varphi_\beta : (\{y_1, y_2, ..., y_m\}, V_\beta, a_\beta)$

y si se toma en cuenta el Teorema 2.2.1, el cual nos afirma que 2) es un sistema de coordenadas del punto $p \in \mathcal{V}$, si y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:

---

[1] El presente Teorema unicamente se demuestra para variedades analíticas diferenciables.

i) $m = n$.

ii) $det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi_\alpha(p)} \neq 0$

Por consiguiente, como

$$det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi_\alpha(p)} \neq 0$$

esto nos permite aplicar el Teorema de la Función Inversa, el cual nos afirma que existe una vecindad abierta U_0 del punto p que es homeomorfa a una vecindad abierta U_1 del mismo punto $p \in \mathcal{T}$. Por tanto, la aplicación:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un homeomorfismo. Donde $U_0 = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $U_1 = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Por otro lado, como se cumple la condición:

ii) $det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi_\alpha(p)} \neq 0$

se garantiza que la aplicación $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es diferenciable. Y así la condición W_{II}) está demostrada.

Ahora supongamos que la condición es necesaria. Se afirma, que toda función $f \in \mathcal{F}(p)$ está definida en alguna vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$:

$$f : V \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto f(p)$$

vecindad que puede depender de la función f: $V = V(f)$.

En efecto, sea f una función analítica en el punto $p \in \mathcal{T}$, esto implica que existe una carta abierta

$$(U_1, \varphi)$$

en el punto $p \in \mathcal{V}$ y además una carta abierta

$$(U_2, \psi)$$

en el punto $f(p) \in \mathbb{R}$, tal que:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_1) \to \mathbb{R}$$

como $\psi = identidad$. Por tanto

$$F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_1) \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f \circ \varphi^{-1}(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Calculando para todo punto $\varphi(p) \in V$:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) &= f \circ \varphi^{-1}\varphi(p) \\ &= f(p) \\ &= F(x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)) \end{aligned}$$

Si definimos: sea $f = F$ y $V = \varphi(U_1)$ entonces, tenemos que la función:

$$f : V \to \mathbb{R}$$

está definida en alguna vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$. Y así la afirmación está demostrada y con esta el axioma C_I) está verificado.

Se afirma que si

$$f \underset{p}{\sim} f_1, f_2, ..., f_m \quad con \quad f_1, f_2, ..., f_m \in \mathcal{F}(p) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{F}(p).$$

En efecto, sea $\{x\}$ un sistema de coordenadas, si consideramos la aplicación

a) $f_i \circ \varphi^{-1}(x) = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1 \leq i \leq n)$.

donde $F_i(u_1, u_2, ..., u_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ es una función analítica real en n variables reales en el punto $\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p))$. Por otro lado, de acuerdo a la propiedad *iii*) de la Definición 2.1.1:

iii) Para todo punto $q \in V$ se tiene que:

b) $f(q) = F(f_1(q), f_2(q), ..., f_m(q))$.

Por tanto, las relaciones *a*) y *b*) implican que:

$$\begin{aligned} f_i \circ \varphi^{-1}(q) &= F(f_1(q), f_2(q), ..., f_m(q)) \\ &= F(f_1 \circ \varphi^{-1}(x(q)), f_2 \circ \varphi^{-1}(x(q)), ..., f_m \circ \varphi^{-1}(x(q))) \\ &= F(F_1(x_1(q), ..., x_n(q)), ..., F_m(x_1(q), ..., x_n(q))) \\ &= G(x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$f_i \circ \varphi^{-1}(q) = G(x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q))$$

donde $G(u_1, u_2, ..., u_n)$ es una función analítica real en n variables reales en el punto $\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p))$. Por consiguiente:

$$f(q) = G(x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) \quad \textit{para todo} \quad q \in V.$$

Esto último implica que:

$$f \in \mathcal{F}(p)$$

y así la afirmación está desmostrada y con esta el axioma C_{II}) está verificado.

Sea $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n:

$$dim(\mathcal{V}) = n$$

a la **Whitney** entonces, el axioma C_{III}) de la Definición 1.0.6 se satisface. En efecto, sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sea

$$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$$

una carta abierta, tal que, $p \in U_\alpha$. Por definición, φ_α mapea homeomorficamente al abierto U_α sobre un abierto U del espacio $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to U$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi_\alpha(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q))$$

sea F un conjunto compacto, tal que:

$$p \in F \subset U_\alpha$$

En nuestro caso $F = \overline{V}$. Donde V es una vecindad abierta del punto p: $V \in \vartheta(p)$. Se demuestra que existe una función ψ definida y diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto contenida en el conjunto abierto U:

$$Sop(\psi) \subset U$$

con valores en $[0, 1]$:

$$\psi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto \psi(x)$$

tal que

$\psi(x) = 1$ *si* $x \in F$.

$\psi(x) = 0$ *si* $x \in U^c$.

Sea $W = \overset{\circ}{F}$ ($\overset{\circ}{F}$ interior de F) no se pierde ninguna generalidad si se supone que:

$$V = \varphi_\alpha^{-1}(\overset{\circ}{F})$$

y sea I_a^n el cubo de $\mathbb{R}^n$ con centro en el punto $\varphi_\alpha(p)$:

$$I_a^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ | x_i - x_i(p) | < a \quad para \quad (1 \le i \le n)\}$$

y si definimos $\overset{\circ}{F} = I_a^n$. Por tanto:

$$V = \varphi^{-1}(I_a^n)$$

Ahora consideremos las funciones:

$$f_i : V \to \mathbb{R}$$

definidas por la correspondencia

$$q \mapsto f_i(q) = x_i(q) \cdot \psi(\varphi(q)) \qquad (1 \le i \le n)$$

Es inmediato que las funciones f_i $(1 \le i \le n)$ son analíticas reales, es decir, se tiene un conjunto ordenado:

$$(f_1, f_2, ..., f_n)$$

de funciones $f_i \in \mathcal{F}(p)$ definidas sobre la vecindad V con $a > 0$.

Además para todo punto $q \in V$ se tiene que $f_i \in \mathcal{F}(q)$ por definición las funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ están definidas y son analíticas en todo punto de la vecindad V del punto q: $V \in \vartheta(q)$.

Finalmente, se afirma que para todo punto $q \in V$, toda función $f \in \mathcal{F}(q)$ depende analíticamente de las funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ en el entorno del punto $q \in V$:

$$f \in \mathcal{F}(q) \quad \Rightarrow \quad f \underset{q}{\sim} f_1, f_2, ..., f_n.$$

En efecto, como $\mathcal{V}$ es una variedad a la **Whitney** si $f \in \mathcal{F}(q)$ entonces, se puede escribir:

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

donde $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ es una función real en n variables reales definida y analítica en todo punto de algún abierto Q de $\mathbb{R}^n$: $Q \subset \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\begin{aligned} f(q) &= F(x_1(q), x_2(q), \ldots, x_n(q)) \\ &= F(x_1(q) \cdot \psi(\varphi(q)), x_2(q) \cdot \psi(\varphi(q)), \ldots, x_n(q) \cdot \psi(\varphi(q))) \\ &= F(f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q)) \end{aligned}$$

es decir:

$$f(q) = F(f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q)) \quad \textit{para todo} \quad q \in V$$

lo cual significa que

$$f \underset{q}{\sim} f_1, f_2, \ldots, f_n.$$

Y así el Axioma C_{III}) está verificado y con esto el Teorema 1.0.1 está demostrado. ■

Capítulo 2

Variedades

2.1 Funciones Analíticas

Definición 2.1.1 *Sea $\mathcal{T}$ un espacio topólogico, p un punto del espacio $\mathcal{T}$: $p \in \mathcal{T}$ y sean*

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_m$$

$m + 1$ funciones definidas en la vecindad del punto $p \in \mathcal{T}$. Se dirá que la función f depende analíticamente de las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$. Lo cual lo denotaremos con el símbolo

$$f \underset{p}{\sim} f_1, f_2, \ldots, f_m$$

si existe una vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$ y una función real

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

en m variables reales, definida sobre un subconjunto abierto U del espacio euclideano $\mathbb{R}^m$: $U \subset \mathbb{R}^m$.

$$F : U \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

satisfaciendo las siguientes condiciones:

i) *Las funciones $f, f_1, f_2, \ldots, f_m$ están definidas sobre la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$:*

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_m : V \to \mathbb{R}$$

ii) *La aplicación:*

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \varphi(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_m(p))$$

mapea a la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$ en un subconjunto abierto U dominio de definición de la función $F(u_1, u_2, ..., u_m)$:

$$Im(\varphi) = \varphi(V) \subset U.$$

iii) *Para todo punto $q \in V$ se tiene que:*

$$f(q) = F(f_1(q), f_2(q), ..., f_m(q)).$$

iv) *La función $F(u_1, u_2, ..., u_m)$ es analítica en el punto:*

$$\varphi(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_m(p)) \in U \subset \mathbb{R}^m.$$

Es decir, la función $F(u_1, u_2, ..., u_m)$ puede ser desarrollada en una serie de potencias convergente sobre la vecindad abierta U del punto p.

Proposiciòn 2.1.1 *Sea $\mathcal{T}$ un espacio topólogico, p un punto del espacio $\mathcal{T}$: $p \in \mathcal{T}$, sean $f, f_1, f_2, ..., f_m$ $m+1$ funciones, definidas en la vecindad del punto $p \in \mathcal{T}$ y sean $g_1, g_2, ..., g_m$ m funciones definidas en la vecindad del mismo punto.*

Si la función f depende analíticamente de las funciones $f_1, f_2, ..., f_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$ y si la función f_i $(1 \leq i \leq m)$ depende analíticamente de las funciones $g_1, g_2, ..., g_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$. Entonces, la función f depende analíticamente de las funciones $g_1, g_2, ..., g_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$. Es decir:

$$Si \quad f \underset{p}{\sim} f_1, f_2, ..., f_m \quad y \quad f_i \underset{p}{\sim} g_1, g_2, ..., g_m \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$\Rightarrow \quad f \underset{p}{\sim} g_1, g_2, ..., g_m$$

Demostración.

Esta es consecuencia inmediata de la Definición 2.1.1.

Proposición 2.1.2 *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{U}$ espacios topólogicos y sea Φ una aplicación continua del espacio $\mathcal{T}$ en el espacio $\mathcal{U}$:*

$$\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

sea p un punto del espacio $\mathcal{T}$: $p \in \mathcal{T}$ y sea $\Phi(p)$ su imagen en el espacio $\mathcal{U}$: $\Phi(p) \in \mathcal{U}$. Si f es una función que depende analíticamente de las funciones $f_1, f_2, ..., f_m$ en el entorno del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$:

$$f \underset{\Phi(p)}{\sim} f_1, f_2, ..., f_m$$

entonces, la función

$$\Phi_* f_i = f_i \circ \Phi \qquad (1 \leq i \leq m)$$

depende analíticamente de las funciones $\Phi_* f_1, \Phi_* f_2, ..., \Phi_* f_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$:

$$\Phi_* f_i = f_i \circ \Phi \underset{p}{\sim} \Phi_* f_1, \Phi_* f_2, ..., \Phi_* f_m \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Demostración. Por hipótesis existe una vecindad W del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$ y una función real $F(u_1, u_2, ..., u_m)$ en m variables reales definida sobre un subconjunto abierto U del espacio euclideano $\mathbb{R}^m$: $U \subset \mathbb{R}^m$.

$$F : U \to \mathbb{R}$$

y una aplicación:

$$\Psi : W \to \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Psi(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_m(p))$$

satisfaciendo las condiciones i), ii), iii) y iv) de la Definición 2.1.1. Y como por hipótesis Φ es una aplicación continua, existe una vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$, a saber $V = \Phi^{-1}(W)$. Con las propiedades:

i) Las funciones $\Phi_* f_1, \Phi_* f_2, ..., \Phi_* f_m$ están definidas sobre la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$.

En efecto, si $q \in V$ es un punto fijo pero arbitrario y si calculamos

$$*) \quad \Phi_* f_i(q) = f_i \circ \Phi(q) = f_i(\Phi(q)) \quad para \quad (1 \leq i \leq m)$$

y como $\Phi(q) \in \mathcal{U}$ y si tomamos en cuenta que el punto $q \in V$ se eligió arbitrariamente. Por tanto, la condición i) está verificada. Se afirma que la siguiente condición se satisface:

ii) La aplicación:

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \varphi(p) = (\Phi_* f_1(p), ..., \Phi_* f_m(p))$$

mapea a la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$ en un subconjunto abierto U, dominio de definición de la función $F(u_1, u_2, ..., u_m)$:

$$Im(\varphi) = \varphi(V) \subset U.$$

En efecto, la hipótesis y la relación $(*)$ nos permiten calcular para todo punto $q \in V$

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= (\Phi_* f_1(q), \Phi_* f_2(q), ..., \Phi_* f_m(q)) \\
&= (f_1 \circ \Phi(q), f_2 \circ \Phi(q), ..., f_m \circ \Phi(q)) \\
&= (f_1(\Phi(q)), f_2(\Phi(q)), ..., f_m(\Phi(q))) \\
&= \Psi(\Phi(q)) \\
&= \Psi \circ \Phi(q)
\end{aligned}$$

y obtener la relación $\varphi = \Psi \circ \Phi$ sobre la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$. Esto último implica que

$$\varphi(V) = \Psi \circ \Phi(V) = \Psi(\Phi(V)) = \Psi(W)$$

es decir $\varphi(V) = \Psi(W)$ y como también por hipótesis

$$Im(\Psi) = \Psi(W) \subset U \quad \Rightarrow \quad Im(\varphi) = \varphi(V) \subset U$$

y así la afirmación ii) está verificada.

Una vez más la hipótesis y la relación $(*)$ nos permiten establecer la siguiente afirmación:

iii) **Para todo punto $q \in V$ se tiene que**

$$\Phi_* f(q) = F(\Phi_* f_1(q), \Phi_* f_2(q), \ldots, \Phi_* f_m(q))$$

En efecto, calculando

$$\begin{aligned}
\Phi_* f(q) &= f \circ \Phi(q) \\
&= f(\Phi(q)) \\
&= F(f_1(\Phi(q)), f_2(\Phi(q)), \ldots, f_m(\Phi(q))) \\
&= F(\Phi_* f_1(q), \Phi_* f_2(q), \ldots, \Phi_* f_m(q))
\end{aligned}$$

por tanto

$$\Phi_* f(q) = F(\Phi_* f_1(q), \Phi_* f_2(q), \ldots, \Phi_* f_m(q))$$

y así la afirmación iii) está verificada. Finalmente se tiene la siguiente afirmación:

iv) **La función $F(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ es analítica en el punto:**

$$\varphi(p) = (\Phi_* f_1(p), \Phi_* f_2(p), \ldots, \Phi_* f_m(p)) \in U.$$

Está afirmación es consecuencia inmediata de la relación $\varphi = \Psi \circ \Phi$ puesto que por hipótesis la función $F(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ es analítica en el punto:

$$\Psi(\Phi(p)) = \varphi(p).$$

De está manera se tienen verificadas las condiciones i),ii),iii) y iv) de la Definición 2.1.1. Por consiguiente, la función $\Phi_* f_i = f_i \circ \Phi$ depende analíticamente de las funciones $\Phi_* f_1, \Phi_* f_2, \ldots, \Phi_* f_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$:

$$\Phi_* f_i = f_i \circ \Phi \underset{p}{\sim} \Phi_* f_1, \Phi_* f_2, \ldots, \Phi_* f_m \qquad (1 \leq i \leq m)$$

y así la Proposición 2.1.2 está demostrada. ■

Proposiciòn 2.1.3 ***Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{U}$ espacios topológicos, sea Φ una aplicación continua de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{U}$:***

$$\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

sea p un punto del espacio $\mathcal{T}$: $p \in \mathcal{T}$, sea $\Phi(p)$ su imagen en el espacio $\mathcal{U}$: $\Phi(p) \in \mathcal{U}$ y sean

$$f_1, f_2, ..., f_m$$

m funciones definidas en alguna vecindad del punto $\Phi(p)$ y continuas en el mismo punto.

Si g es una función definida en alguna vecindad del punto $p \in \mathcal{T}$, la cual depende analíticamente de las funciones $\Phi_* f_1, \Phi_* f_2, ..., \Phi_* f_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$:

$$g \underset{p}{\sim} \Phi_* f_1, \Phi_* f_2, ..., \Phi_* f_m$$

donde $\Phi_* f_i = f_i \circ \Phi$ para $(1 \leq i \leq n)$. Entonces, existe una función f definida en alguna vecindad del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$ que depende analíticamente de las funciones $f_1, f_2, ..., f_m$ en el entorno del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$:

$$f \underset{\Phi(p)}{\sim} f_1, f_2, ..., f_m$$

con la propiedad

$$g = \Phi_* f \quad \text{sobre alguna vecindad del punto} \quad p \in \mathcal{T}.$$

Demostración. Por hipótesis existe una vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$ y una función real $F(u_1, u_2, ..., u_m)$ en m variables reales definida sobre un abierto U del espacio euclideano $\mathbb{R}^m$: $U \subset \mathbb{R}^m$.

$$F : U \to \mathbb{R}$$

y una aplicación:

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \varphi(p) = (\Phi_* f_1(p), ..., \Phi_* f_m(p))$$

satisfaciendo las condiciones i), ii), iii) y iv) de la Definición 2.1.1, y como también por hipótesis las funciones $f_1, f_2, ..., f_m$ están definidas en alguna vecindad W del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$ y son continuas en el mismo punto:

$$f_1, f_2, ..., f_m : W \to \mathbb{R}$$

y la aplicación:

$$\Psi : W \to \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Psi(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_m(p))$$

la cual es una función continua en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$. Si se toma en cuenta la aplicación Φ; la cual es continua, entonces la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$ se puede elegir de tal suerte que se tenga

$$(*) \qquad \Phi(V) \subset W$$

esta relación nos permite calcular para toda $q \in V$

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= (\Phi_* f_1(q), \Phi_* f_2(q), ..., \Phi_* f_m(q)) \\
&= (f_1 \circ \Phi(q), f_2 \circ \Phi(q), ..., f_m \circ \Phi(q)) \\
&= (f_1(\Phi(q)), f_2(\Phi(q)), ..., f_m(\Phi(q))) \\
&= \Psi(\Phi(q)) \\
&= \Psi \circ \Phi(q)
\end{aligned}$$

es decir se tiene la relación

$$(**) \qquad \varphi = \Psi \circ \Phi$$

sobre la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$. Y como por hipótesis se tiene la inclusión $\varphi(V) \subset U$. La relación $(**)$ implica que el punto $\Psi(\Phi(p))$ está contenido en un abierto U:

$$\Psi(\Phi(p)) = \varphi(p) \subset U$$

y como la función Ψ es continua en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$, la vecindad W del punto $\Phi(p)$ se puede elegir de tal suerte que se tenga $\Psi(W) \subset U$. Conservando por supuesto la relación $(*)$. Ahora consideremos la función f definida sobre la vecindad W:

$$f : W \to \mathbb{R}$$

por medio de la correspondencia

$$p \mapsto f(p) = F(f_1(p), ..., f_m(p))$$

donde $F(u_1, u_2, ..., u_m)$ es una función real definida sobre el abierto U del espacio euclideano $\mathbb{R}^m$: $U \subset \mathbb{R}^m$. De está manera se tienen establecidas las siguientes condiciones:

i) Las funciones $f, f_1, f_2, ..., f_m$ están definidas sobre la vecindad W del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$:

$$f, f_1, f_2, ..., f_m : W \to \mathbb{R}$$

ii) La aplicación:

$$\Psi : W \to \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Psi(p) = (f_1(p), ..., f_m(p))$$

mapea a la vecindad W del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$ en el abierto U dominio de definición de la función $F(u_1, u_2, ..., u_m)$:

$$Im(\Psi) = \Psi(W) \subset U$$

iii) Para todo punto $\Phi(q) \in \mathcal{U}$ se tiene que:

$$f(\Phi(q)) = F(f_1(\Phi(q)), f_2(\Phi(q)), ..., f_m(\Phi(q))).$$

iv) La función $F(u_1, u_2, ..., u_m)$ es analítica en el punto:

$$\Psi(\Phi(q)) = (f_1(\Phi(q)), f_2(\Phi(q)), ..., f_m(\Phi(q))).$$

Está última condición es consecuencia inmediata de la relación $(**)$ puesto que por hipótesis la función $F(u_1, u_2, ..., u_m)$ es analítica en el punto:

$$\varphi(p) = \Psi(\Phi(p))$$

Por consiguiente, de acuerdo con la definición de la función f, está depende analíticamente de la funciones $f_1, f_2, ..., f_m$ en el entorno del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$:

$$f \underset{\Phi(p)}{\sim} f_1, f_2, ..., f_m$$

Además la relación $(**)$ nos permite escribir para todo punto $q \in V$. Calculando

$$\begin{aligned}
\Phi_* f(q) &= f \circ \Phi(q) \\
&= f(\Phi(q)) \\
&= F(f_1(\Phi(q)), ..., f_m(\Phi(q))) \\
&= F(\Psi(\Phi(q))) \\
&= F(\Psi \circ \Phi(q)) \\
&= F(\varphi(q)) \\
&= F(\Phi_* f_1(q), \Phi_* f_2(q), ..., \Phi_* f_m(q)) \\
&= g(q)
\end{aligned}$$

Es decir $g = \Phi_* f$ sobre la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$. Y así la Proposición 2.1.3 está demostrada. ∎

2.2 Variedades

Lema 2.2.1 *Si se efectua una permutación ω arbitraria sobre el sistema*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

de funciones de la familia $\mathcal{F}(p)$: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{F}(p)$ dejando fija a la vecindad V y al número real $a > 0$ del axioma C_{III}) se obtiene el sistema:

$$(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \ldots, x_{\omega(n)})$$

de funciones. Entonces, esté conjunto satisface las propiedades del axioma C_{III}).

Demostración.

i) Todas las funciones $x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \ldots, x_{\omega(n)}$ están definidas en la vecindad V:

$$x_{\omega(i)} : V \to \mathbb{R}$$

definidas por la correspondencia

$$q \mapsto x_{\omega(i)}(q)$$

para $(1 \leq i \leq n)$.

ii) La aplicación:

$$\varphi' : V \to \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi'(q) = (x_{\omega(1)}(q), \ldots, x_{\omega(n)}(q))$$

mapea homeomorficamente a V sobre el cubo:

$$I_a^n = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \ | x_i - x_i(p) | < a \ \ para \ \ (1 \leq i \leq n) \}$$

es decir

$$\varphi' : V \cong I_a^n.$$

Para verificar la propiedad ii) observemos el siguiente conjunto:

$$\varphi'(V) = \{ (x_{\omega(1)}(q), x_{\omega(2)}(q), ..., x_{\omega(n)}(q)) \in \mathbb{R}^m \mid q \in V \}$$

si ahora consideramos el conjunto:

$$\varphi(V) = \{ (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) \in \mathbb{R}^m \mid q \in V \}$$

los cuales son biyectivos. Por tanto

$$\varphi'(V) \cong \varphi(V) \cong I_a^n \quad \Rightarrow \quad \varphi'(V) \cong I_a^n$$

y así ii) de C_{III}) está verificada. Es inmedito que:

iii) a) Para toda $q \in V \quad \Rightarrow \quad x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, ..., x_{\omega(n)} \in \mathcal{F}(q)$.

iii) b) Para toda $q \in V$ se tiene que

$$f \in \mathcal{F}(q) \quad \Rightarrow \quad f \underset{q}{\sim} x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, ..., x_{\omega(n)}.$$

Como por definición del concepto de dependencia analítica la función f es analítica en la vecindad V del punto $q \in V$:

$$\varphi(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q))$$

es inmediato que la función f también depende analíticamente de las funciones $x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, ..., x_{\omega(n)}$ en el entorno del punto $q \in V$:

$$f \in \mathcal{F}(q) \quad \Rightarrow \quad f \underset{q}{\sim} x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, ..., x_{\omega(n)}$$

y así el Lema 2.2.1 está demostrado. ■

Esté Lema nos permite establecer la siguiente definición:

Definición 2.2.1 *Si el sistema finito ordenado*

$$(x_1, x_2, ..., x_n)$$

de funciones de la familia $\mathcal{F}(p)$:

$$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathcal{F}(p)$$

satisface las condiciones del axioma C_{III}), se dirá que el conjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de funciones de la familia $\mathcal{F}(p)$: $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathcal{F}(p)$ es

un sistema de coordenadas *sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y se denotará como:*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

en algunos casos simplemente se denotará como $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. A la vecindad V se le llamará **la vecindad cúbica** *del punto $p \in \mathcal{V}$ y al número real $a > 0$ se le llamará* **la amplitud** *de la vecindad cúbica V.*

Proposiciòn 2.2.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sea*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

i) *Para todo punto $q \in V$ el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sigue siendo un sistema de coordenadas:*

$$\varphi' : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V', a')$$

ii) *Toda W vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$ contiene una vecindad cúbica V_1 con respecto al sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$:*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V_1, a_1) \quad con \quad V_1 \subset W$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$.

iii) *Si f es una función analítica en el punto p: $f \in \mathcal{F}(p)$. Entonces, existe una vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{V}$, tal que, f es analítica en todo punto $q \in V$: $f \in \mathcal{F}(q)$.*

Demostración.

i) Sea un punto $q \in V$ $\Rightarrow$ *existe un abierto $U \in \vartheta(\mathcal{V})$ tal que :*

$$U \subset V \;\Rightarrow\; \varphi(U) \subset \varphi(V) \cong I_a^n \subset \mathbb{R}^n$$

y como $\varphi(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$ esto implica que existe $I_{a'}^n$ con centro $\varphi(q)$:

$$\varphi(q) \in I_{a'}^n \subset \varphi(U).$$

Si ahora definimos la vecindad cúbica $V_1 = \varphi^{-1}(I_{a'}^n) \subset V$, de tal suerte que la restricción:

$$\varphi\Big|_{V_1} = \varphi' : V_1 \cong I_{a'}^n$$

esto último implica que

$$\varphi' : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V_1, a') \quad con \quad 0 < a' < a$$

es un sistema de coordenadas. En otras palabras $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sigue siendo un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $q \in V$ y con $V_1 \subset V$.

ii) Consideremos ahora una vecindad W del punto $p \in \mathcal{V}$, estó implica que $p \in (V \cap W)$, es vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$, estó implica que existe un abierto U, tal que

$$p \in U \subset (V \cap W) \subset V$$

y como

$$\varphi : V \cong I_a^n \quad \Rightarrow \quad \varphi(U) \subset \varphi(V \cap W) \subset \varphi(V) \quad \Rightarrow \quad \varphi(U) \subset \varphi(V) \cong I_a^n$$

como antes existe $I_{a'}^n$ con centro $\varphi(q)$: $\varphi(q) \in I_{a'}^n \subset \varphi(U)$. Si ahora definimos la vecindad cúbica:

$$V_1' = \varphi^{-1}(I_{a'}^n) \subset (V \cap W)$$

de tal suerte que la restricción:

$$\varphi\Big|_{V_1'} = \varphi' : V_1' \cong I_{a'}^n$$

esto último implica

$$\varphi'(\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V_1', a') \quad con \quad 0 < a' < a$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ con $V_1' \subset W$.

iii) Sea una función analítica $f \in \mathcal{F}(p)$ y sea

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Por b) de iii) de C_{III}); la función f depende analíticamente de las funciones $x_1, x_2, ..., x_n$ en el entorno del punto $p \in V_1$:

$$f \underset{p}{\sim} x_1, x_2, ..., x_n$$

de acuerdo con la Definición 2.1.1, la función f se puede expresar como

$$f(q) = F(x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) \text{ para toda } q \in V_1$$

donde $F(u_1, u_2, ..., u_n)$ es una función en n variables reales analítica en el punto:

$$\varphi(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)).$$

Por consiguiente, la función f está definida y es analítica en una vecindad abierta U de $\mathbb{R}^n$ del punto $\varphi(p)$. Y sea $W = \varphi^{-1}(U)$ una vecindad del punto p, de acuerdo con i) existe una vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{V}$ con respecto al sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, tal que, $V \subset V_1$, de tal suerte que para toda $q \in V$ se tiene que:

$$f(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)).$$

Por consiguiente, f es una función analítica para todo punto $q \in V$. Y así la Proposición 2.2.1 está demostrada. ■

Observación 2.2.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad real, p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$, sea*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y sea f una función definida en la vecindad del punto p y analítica: $f \in \mathcal{F}(p)$. De acuerdo a la propiedad iii) de la Proposición 2.2.1 existe una vecindad cúbica $V = V(p)$, tal que, $f \in \mathcal{F}(q)$ para toda $q \in V$. Con la propiedad:

$$*) \qquad f(q) = F(x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) \text{ para toda } q \in V$$

donde $F(u_1, u_2, ..., u_n)$ es una función real en n variables reales definida y analítica sobre un abierto U en el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$: $U \subset \mathbb{R}^n$, tal que:

$$(x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) \in U \text{ para toda } q \in V.$$

A la fórmula (*) *se le llama* **la expresión de la función f con respecto al sistema de coordenadas** $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Por abuso de escritura se escribirá:*

$$f = F(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Teorema 2.2.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Sea*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y sea $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ un conjunto finito de funciones de la clase $\mathcal{F}(p)$. Entonces, $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ si y solo si:

i) $m = n$.

ii) $y_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ *tal que*

$$det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_{\varphi(p)} \neq 0$$

donde $\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p))$.

Demostración. La condición es necesaria. En efecto, supongamos que $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Como

$$y_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \;\; con \;\; (1 \leq i \leq n)$$

la cual es su expresión con respecto al sistema de coordenadas

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \quad para \quad x_i \in \mathcal{F}(p) \quad para \quad (1 \leq i \leq n).$$

Pero podemos expresar $x_i = G_i(y_1, y_2, ..., y_m)$ *para* $(1 \leq i \leq n)$. Sea V suficientemente pequeña como para que se tenga

$$y_i = F_i(G_1(y_1(q), y_2(q), ..., y_m(q)), ..., G_n(y_1(q), y_2(q), ..., y_m(q)))$$

calculando

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial G_k}{\partial y_j} = \partial_{ij} \quad para \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

donde

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_k}\right|_{\varphi(p)} \qquad\qquad \frac{\partial G_k}{\partial y_j} = \left.\frac{\partial G_n}{\partial y_j}\right|_{\varphi(p)}$$

esté sistema de ecuaciones se puede expresar como el producto de la $m \times n$ matriz

$$A = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right) \quad para \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1 \leq j \leq m) \;\; por\ el\ vector \;\; \left(\frac{\partial G_k}{\partial y_j}\right).$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \frac{\partial F_i}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_i}{\partial y_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial y_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_j$$

consideremos ahora la aplicación:

$$\alpha^n_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$v \mapsto \alpha^n_m(v) = A(v)$$

con la propiedad que $Im(\alpha^n_m) \supset \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ es la base canónica del espacio $\mathbb{R}^m$. Es decir

α^n_m *es un epimorfismo.*

Por tanto

$$0 \longrightarrow Ker(\alpha^n_m) \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. Por consiguiente

$$dim(\alpha^n_m) + dim(\mathbb{R}^m) = dim(\mathbb{R}^n)$$

calculando

$$dim(\alpha^n_m) + m = n \quad \Rightarrow \quad m = n - dim(\alpha^n_m) \quad \Rightarrow \quad (1) \quad \mathbf{m \geq n}.$$

Por otro lado, si consideramos ahora

$$x_i = G_i(F_1(x_1, x_2, ..., x_n), F_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., F_m(x_1, x_2, ..., x_n))$$

calculando

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial y_k} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \textit{para} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

donde

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \frac{\partial F_m}{\partial x_j}\bigg|_{\varphi(p)} \qquad\qquad \frac{\partial G_i}{\partial y_k} = \frac{\partial G_n}{\partial y_k}\bigg|_{\varphi(p)}$$

esté sistema de ecuaciones se puede expresar como el producto de la $n \times m$ matriz

$$A = \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_k}\right) \quad con \quad (1 \le i \le n) \quad (1 \le k \le m) \quad por\ el\ vector \quad \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\right).$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_i}{\partial y_1} & \frac{\partial G_i}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial G_i}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial y_1} & \frac{\partial G_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i$$

consideremos ahora la aplicación:

$$\alpha_n^m : I\!\!R^m \to I\!\!R^n$$

definida por la correspondencia

$$v \mapsto \alpha_n^m(v) = A(v)$$

con la propiedad que $Im(\alpha_n^m) \supset \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es la base canónica del espacio $I\!\!R^n$. Es decir

α_n^m *es un epimorfismo.*

Por tanto

$$0 \longrightarrow Ker(\alpha_n^m) \longrightarrow I\!\!R^n \longrightarrow I\!\!R^m \longrightarrow 0$$

la cual es una sucesión exacta corta. Por consiguiente

$$dim(\alpha_n^m) + dim(I\!\!R^n) = dim(I\!\!R^m)$$

calculando

$$dim(\alpha_n^m) + n = m \quad \Rightarrow \quad n = m - dim(\alpha_n^m) \quad \Rightarrow \quad (2) \quad \mathbf{n \ge m}.$$

Por tanto, (1) y (2) $\Rightarrow$ $\mathbf{m = n}$. Es decir se tiene que la sucesión:

$$0 \longrightarrow I\!\!R^n \xrightarrow{\alpha_n^m} I\!\!R^m \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Donde

α_n^m *es un isomorfismo.*

Por consiguiente:

si A *es invertible* $\Rightarrow$ $det(A) \neq 0$. Por tanto:

$$det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi(p)} \neq 0.$$

La condición es suficiente. En efecto, supongamos que las condiciones i) y ii) se satisfacen. Por hipótesis, se tiene el sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y con una vecindad cúbica V suficientemente pequeña como para que las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ estén definidas y sean analíticas sobre V:

$$y_1, y_2, ..., y_n \in \mathcal{F}(p) \ \ \textit{para toda} \ \ p \in V$$

es decir, si

$$y_1 = F_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., y_n = F_n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

son sus expresiones en el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, donde las funciones

$$F_i(u_1, u_2, ..., u_n) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

en n variables reales están definidas y son analíticas sobre el cubo I_a^n de $\mathbb{R}^n$ con centro en el punto $\varphi(p) = (x_1(p), ..., x_n(p))$:

$$I_a^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid \ | x_i - x_i(p) | < a \ \ (1 \leq i \leq n)\} \in \mathbb{R}^n$$

estas funciones nos permiten definir la aplicación:

$$F : I_a^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por la correspondencia

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto F(x) = (F_1(x_1, ..., x_n), ..., F_n(x_1, ..., x_n))$$

Por hipótesis, el determinante de la matriz Jacobiana de esta aplicación es distinta de cero en el punto $\varphi(p) = (x_1(p), ..., x_n(p)) \in \mathbb{R}^n$:

$$det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi(p)} \neq 0$$

está propiedad nos permite utilizar el Teorema de la función inversa y obtener una vecindad abierta U del punto $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$, tal que, la restricción de F a la vecindad abierta U:

$$F\Big|_U$$

es un homeomorfismo analítico del abierto U sobre un abierto $U' \subset \mathbb{R}^n$, restricción que seguiremos llamando F. En otras palabras, se puede resolver el sistema de ecuaciones

$$y_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1 \le i \le n)$$

definidas y analíticas sobre el abierto U, con respecto a $x_1, x_2, ..., x_n$ por medio de las funciones

$$x_i = G_i(y_1, y_2, ..., y_n) \qquad (1 \le i \le n)$$

definidas y analíticas sobre el abierto U', de tal suerte, que la aplicación

$$G : U' \to U$$

definida por la correspondencia

$$y = (y_1, ..., y_n) \mapsto G_i(y) = (G_1(y_1, ..., y_n), ..., G_n(y_1, ..., y_n))$$

deviene el mapeo inverso de F:

$$F\,G = id_{U'}. \quad y \quad G\,F = id_U.$$

Consideremos ahora el cubo $I^n_{a_1}$ de $\mathbb{R}^n$ con centro en el punto $\varphi(p)$:

$$I^n_{a_1} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \; | x_i - x_i(p) | < a_1 \quad (1 \le i \le n)\}$$

cuya amplitud a_1 es, tal que, $0 < a_1 < a$, y suficientemente pequeña como para que se tenga:

$$I^n_{a_1} \subset U$$

y sea I^n_b el cubo de $\mathbb{R}^n$ con centro en el punto $F(\varphi(p))$:

$$I^n_b = \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \; | y_i - f_i(x_1(p), ..., x_n(p)) | < b \quad (1 \le i \le n)\}$$

con una amplitud $b > 0$ suficientemente pequeña como para que se tenga:

$$I^n_b \subset F(I^n_{a_1})$$

en seguida, consideremos la aplicación Φ del cubo I_b^n en la variedad $\mathcal{V}$:

$$\Phi : I_b^n \to \mathcal{V}$$

definida por la correspondencia

$$y = (y_1, ..., y_n) \mapsto \Phi(y) = \varphi^{-1} \circ G(y)$$

Como tanto φ como G son homeomorfismos, Φ mapea homeomorficamente al cubo I_b^n sobre un subconjunto W de la vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{V}$. En efecto, si definimos y calculamos

$$W = \Phi(I_b^n) = \varphi^{-1} \circ G(I_b^n) \subset \varphi^{-1} \circ G \circ F(I_{a_1}^n) \subset \varphi^{-1}(I_a^n) = V$$

obtenemos

$$I_b^n \cong \Phi(I_b^n) = W \subset V = \varphi^{-1}(I_a^n).$$

Se afirma que W es una vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$. En efecto, si a_2 es un número real positivo, tal que, $0 < a_2 < a_1$ y suficientemente pequeño como para que el cubo $I_{a_2}^n$ de centro en el punto $\varphi(p)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$I_{a_2}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \; | x_i - x_i(p) | < a_2 \quad (1 \leq i \leq n)\}$$

esté contenido en el conjunto $G(I_b^n)$:

$$I_{a_2}^n \subset G(I_b^n)$$

lo cual implica

$$F(I_{a_2}^n) \subset I_b^n$$

de tal suerte, que si se aplica Φ a esta inclusión se obtiene

$$\Phi(F(I_{a_2}^n)) \subset \Phi(I_b^n) = W$$

si en seguida calculamos

$$\Phi(F(I_{a_2}^n)) = \varphi^{-1} \circ G \circ F(I_{a_2}^n) = \varphi^{-1}(I_{a_2}^n)$$

y si definimos

$$W' = \varphi^{-1}(I_{a_2}^n)$$

se obtiene que el abierto W' está contenido en el conjunto W: $W' \subset W$. Además como

$$\varphi(p) \in I_{a_2}^n \quad \Rightarrow \quad p \in \varphi^{-1}(I_{a_2}^n) = W'$$

por consiguiente

$$p \in W' \subset W$$

y así la afirmación está demostrada. A continuación se tiene la siguiente afirmación:

$$\Psi : (\{y_1, y_2, ..., y_n\}, W, b)$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad V en el punto $p \in V$. En efecto, de acuerdo con la hipótesis, hemos establecido que la expresión de las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ en el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ está dado por:

$$y_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

por consiguiente

$$y_i(p) = F(x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

para todo punto $p \in V$, en particular para todo punto $p \in W$, puesto que el abierto W está contenido en la vecindad cúbica V: $W \subset V$, es decir:

i) Las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ están definidas sobre la vecindad W:

$$y_i : W \to \mathbb{R}^n$$

definidas por la correspondencia

$$q \mapsto y_i(q) = F_i(x_1(q), .., x_n(q))$$

$(1 \leq i \leq n)$.

ii) La aplicación:

$$\Psi : W \to \mathbb{R}^n$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Psi(p) = (y_1(p), ..., y_n(p))$$

mapea homeomorficamente a la vecindad W sobre el cubo I_b^n:

$$\Psi(W) \cong I_b^n \quad \textit{para todo} \quad q \in I_b^n.$$

En efecto, sea q un punto fijo pero arbitrario del cubo I_b^n: $q \in I_b^n$; si calculamos

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(q) &= \Psi(\Phi(q)) \\
&= (y_1(\Phi(q)), y_2(\Phi(q)), ..., y_n(\Phi(q))) \\
&= (F_1(x_1(\Phi(q)), ..., x_n(\Phi(q)), ..., F_n(x_1(\Phi(q)), ..., x_n(\Phi(q))) \\
&= F(\varphi(\Phi(q))) \\
&= F \circ \varphi(\Phi(q)) \\
&= F \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ G(q) \\
&= F \circ G(q) \\
&= q
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\Psi \circ \Phi(q) = q \ \textit{para todo} \ q \in I_b^n$$

en otras palabras

$$\Psi \circ \Phi = id_{I_b^n}.$$

Por otro lado, por construcción para todo punto $p \in W$ se puede expresar como $p = \Phi(q)$ con $q \in I_b^n$; si calculamos:

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi(p) &= \Phi \circ \Psi(\Phi(q)) \\
&= \Phi \circ (\Psi \circ \Phi)(q) \\
&= \Phi(q) \\
&= p
\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\Phi \circ \Psi(p) = p \ \textit{para toda} \ p \in W$$

por consiguiente

$$\Phi \circ \Psi = id_W.$$

Como por definición Φ es un homeomorfismo, se obtiene que también la aplicación Ψ es un homeomorfismo. Y así la condición ii) está demostrada.

iii)a) Para todo punto $q \in W$ las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ pertenecen a la clase $\mathcal{F}(q)$:

$$y_1, y_2, ..., y_n \in \mathcal{F}(q).$$

En efecto, como $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y puesto que $W \subset V$, se tiene que

$$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathcal{F}(q) \quad \textit{para toda} \quad q \in V.$$

En particular

$$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathcal{F}(q) \quad \textit{para toda} \quad q \in W.$$

Por otro lado, como por hipótesis las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ dependen analíticamente de las funciones $x_1, x_2, ..., x_n$ en el entorno del punto $q \in W$:

$$y_i \underset{q}{\sim} x_1, x_2, ..., x_n \quad (1 \leq i \leq n)$$

lo cual de acuerdo con el axioma C_{II}) de la Definición 1.0.6 se obtiene que:

$$y_1, y_2, ..., y_n \in \mathcal{F}(q)$$

y así la afirmación a) está demostrada.

iii)b) Toda función f que pertenece a la clase de funciones $\mathcal{F}(q)$ depende analíticamente de las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ en el entorno del punto $q \in W$:

$$f \underset{q}{\sim} y_1, y_2, ..., y_n$$

En efecto, consideremos una función $f \in \mathcal{F}(q)$ fija pero arbitraria y si calculamos

$$\begin{aligned} G \circ \Psi(q) &= G \circ \Phi^{-1}(q) \\ &= G(\varphi^{-1} \circ G)^{-1}(q) \\ &= G \circ G^{-1} \circ \varphi(q) \\ &= \varphi(q) \\ &= (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) \end{aligned}$$

obtenemos

$$G \circ \Psi(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) \quad \textit{para todo} \quad q \in W.$$

Por otro lado, calculando nuevamente

$$\begin{aligned} G \circ \Psi(q) &= G(\Psi(q)) \\ &= G(y_1(q), y_2(q), ..., y_n(q)) \\ &= (G_1(y_1(q), ..., y_n(q)), ..., G_n(y_1(q), ..., y_n(q))) \end{aligned}$$

obtenemos

$$G \circ \Psi(q) = (G_1(y_1(q), ..., y_n(q)), ..., G_n(y_1(q), ..., y_n(q))) \textit{ para todo } q \in W.$$

Por consiguiente

$$x_i(q) = G_i(y_1(q), y_2(q), ..., y_n(q)) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

si ahora tomamos en cuenta que $G_i(u_1, u_2, ..., u_n)$ es una función en valores reales en n variables reales analítica en el punto:

$$\Psi(q) = (y_1(q), y_2(q), ..., y_n(q))$$

podemos afirmar que la función x_i $(1 \leq i \leq n)$ depende analíticamente de las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ en el entorno del punto $q \in W$:

$$x_i \underset{q}{\sim} y_1, y_2, ..., y_n \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Si ahora utilizamos la Proposición 2.1.1 obtenemos que la función f depende analíticamente de las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ en el entorno del punto $q \in W$, es decir:

$$f \underset{q}{\sim} x_1, ..., x_n \quad y \quad x_i \underset{q}{\sim} y_1, ..., y_n \quad (1 \leq i \leq n)$$
$$\Rightarrow \quad f \underset{q}{\sim} y_1, ..., y_n$$

y como la función f se eligió arbitrariamente en la familia de funciones $\mathcal{F}(q)$ se tiene verificada la afirmación b). Con ésta hemos demostrado que la condición es suficiente y con la misma el Teorema 2.2.1. está demostrado. ■

Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sea

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Se dirá que el entero n es la dimensión de la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y se denotará con el símbolo

$$Dim_p(\mathcal{V}) = n.$$

Corolario 2.2.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Entonces, la dimensión de la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$:*

$$dim_p(\mathcal{V}) = n$$

no depende del punto $p \in \mathcal{V}$.

Demostración. Para todo entero n positivo: $n \in \mathbb{N}$ se considera el conjunto

$$U_n = \{ p \in \mathcal{V} \mid dim_p(\mathcal{V}) = n \}$$

Se afirma que el conjunto U_n es un conjunto abierto en la variedad $\mathcal{V}$; (en el espacio topólogico subyacente a la variedad):

$$U_n \in \vartheta(\mathcal{V})$$

En efecto, sea un punto $p \in U_n$ fijo pero arbitrario y consideremos un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\} , V, a)$$

Se ha observado que el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ lo sigue siendo en todo punto $q \in V$. En otras palabras

$$dim_p(\mathcal{V}) = n \quad para\ toda\ \ q \in \mathcal{V}.$$

Estó último implica que $V \subset U_n$. Por tanto, U_n es una vecindad del punto $p \in U_n$ y como p se se eligió arbitrariamente en U_n se tiene que U_n es vecindad en cada uno de sus puntos. Estó implica que, U_n es un conjunto abierto sobre la variedad $\mathcal{V}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si consideramos la familia de conjuntos:

$$\{U_n\}_n \quad n \in \mathbb{N}$$

y como U_n es un conjunto abierto para toda $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$U_m \cap U_n = \emptyset$$

y como para todo punto $p \in V$ se tiene que $V \subset U_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

Es decir, la variedad $\mathcal{V}$ es la unión de conjuntos abiertos y ajenos, lo cual es imposible ya que la variedad $\mathcal{V}$ es conexa. Por consiguiente

$$\mathcal{V} = U_{n_0} \ \ para\ alguna\ \ n_0 \in \mathbb{N}$$

es decir $dim(\mathcal{V}) = n_0$. Por consiguiente

$$dim_p(\mathcal{V}) = n.$$

La cual no depende del punto $p \in \mathcal{V}$. Y así el Corolario 2.2.1 está demostrado. ■

Proposiciòn 2.2.2 *Sea V un conjunto arbitrario y sean $x_1, x_2, ..., x_n$ n funciones reales definidas sobre el conjunto V:*

$$x_i : V \to \mathbb{R}$$

por medio de la correspondencia

$$q \mapsto x_i(q) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

con las siguientes propiedades:
La aplicación:

$$\Phi : V \to \mathbb{R}^n$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(q) = (x_1(q), ..., x_n(q))$$

es una biyección del conjunto V sobre un conjunto abierto y conexo U del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$: $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, existe una variedad $\mathcal{U}$ determinada por la condición de que el sistema

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

de funciones definidas sobre el conjunto V, sea un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en todo punto $q \in \mathcal{V}$.

Demostración. En primer lugar se dota al conjunto V de la topología menos fina que hace de la aplicación Φ un mapeo continuo del espacio topólogico $\mathcal{T}$ sobre el conjunto abierto y conexo $U \in \vartheta(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi : \mathcal{T} \to U$$

y como Φ es una biyección el mismo deviene un homeomorfismo del espacio topológico $\mathcal{T}$ sobre el subespacio $\mathcal{U}$; cuyo conjunto subyacente es el conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Phi : \mathcal{T} \cong \mathcal{U}$$

Por consiguiente, el espacio topológico $\mathcal{T}$ es un espacio topológico conexo. Si a todo punto q del espacio $\mathcal{T}$: $q \in \mathcal{T}$ le asignamos la familia: $\mathcal{F}(q)$ de funciones reales definidas en el entorno del punto $q \in \mathcal{T}$; que dependen analíticamente de las funciones $x_1, x_2, ..., x_n$ en el entorno del punto $q \in \mathcal{T}$:

$$q \mapsto \mathcal{F}(q) = \{\, f : V = V(f) \to \mathbb{R} \mid f \underset{q}{\sim} x_1, x_2, ..., x_n \,\}$$

para todo $q \in \mathcal{T}$, se afirma que esta asignación así definida da lugar a una variedad $\mathcal{V}$ cuyo conjunto subyacente es el conjunto V dado.

En efecto, como por definición para toda $f \in \mathcal{F}(p)$ existe una vecindad V (que puede depender de la función f), tal que, f está definida sobre el conjunto V:

$$f : V \to \mathbb{R}$$

es decir, el axioma C_I) se verifica.

También por definición, si f es una función real analítica definida en la vecindad del punto $p \in \mathcal{U}$, tal que

$$f \underset{p}{\sim} f_1, f_2, \ldots, f_n \quad con \quad f_i \in \mathcal{F}(p) \quad (1 \leq i \leq n) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{F}(p).$$

En efecto, como

$$f \underset{p}{\sim} f_1, f_2, \ldots, f_n \quad y \quad f_i \underset{p}{\sim} x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\Rightarrow \quad f \underset{p}{\sim} x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{F}(p)$$

es decir, el axioma C_{II}) de la Definición 1.0.6 se verifica.

Consideremos ahora un punto $\Phi(p)$ del conjunto abierto U: $\Phi(p) \in U$ y sea I_a^n un cubo de centro el punto $\Phi(p)$ y de amplitud $a > 0$ contenido en el abierto U:

$$\Phi(p) \subset I_a^n \subset U$$

si definimos $V = \Phi^{-1}(I_a^n)$ obtenemos una vecindad abierta V del punto p. En particular las funciones $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{F}(p)$ están definidas sobre la vecindad V:

$$x_i : V \to \mathbb{R}$$

definidas por la correspondencia

$$q \mapsto x_i(q) \quad (1 \leq i \leq n)$$

La aplicación Φ mapea homeomorficamente a la vecindad V sobre el cubo I_a^n:

$$\Phi : V \cong I_a^n$$

y como para todo punto $q \in V$ las funciones $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{F}(q)$ y si $f \in \mathcal{F}(q)$ por definición:

$$f \underset{q}{\sim} x_1, x_2, \ldots, x_n$$

en otras palabras el axioma C_{III}) de la Definición 1.0.6 se satisface. De está manerá se tiene verificado que la asignación:

$$q \mapsto \mathcal{F}(q) \quad \textit{para toda} \quad q \in \mathcal{T}$$

define una variedad $\mathcal{V}$ cuyo subconjunto subyacente es el conjunto dado. De acuerdo con la Definición 2.2.1 la familia de funciones $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ constituyen un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en todo punto $q \in \mathcal{V}$. Este sistema de funciones determina la variedad $\mathcal{V}$. En efecto, supongamos que se ha definido otra variedad $\mathcal{V}'$ cuyo conjunto subyacente es el conjunto $\mathcal{T}$ dotado del sistema de coordenadas

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

sobre la variedad $\mathcal{V}'$ en todo punto $q \in \mathcal{V}'$. Sea

$$q \mapsto \mathcal{F}'(q) \quad \textit{para toda} \quad q \in \mathcal{T}$$

la asignación de la familia de funciones reales que define la variedad $\mathcal{V}'$. Sea q un punto fijo pero arbitrario de la variedad $\mathcal{V}'$: $q \in \mathcal{V}'$ si

$$f \in \mathcal{F}'(q) \quad \Leftrightarrow \quad f \underset{q}{\sim} x_1, x_2, ..., x_n \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{F}(q).$$

Por consiguiente

$$\mathcal{F}'(q) = \mathcal{F}(q)$$

como q se eligió arbitrariamente en el espacio $\mathcal{T}$ se obtiene:

$$\mathcal{F}(q) = \mathcal{F}'(q) \quad \textit{para toda} \quad q \in \mathcal{T}.$$

En otras palabras, la variedad está bien definida por el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sobre la variedad $\mathcal{V}$ en todo punto $q \in \mathcal{V}$.

Observación 2.2.2 *Si el conjunto V está dotado apriori de una topología y si la aplicación Φ es un homeomorfismo entonces, el espacio topológico previamente definido sobre el conjunto V coincide con el espacio topológico dado apriori.*

En efecto, sea ϑ la topología definida sobre el conjunto V y sea ϑ' la topología definida apriori. De acuerdo con la topología ϑ se tiene que

$$\vartheta \subset \vartheta'$$

como Φ es un homeomorfismo se obtiene

$$\vartheta' \subset \vartheta$$

Por consiguiente

$$\vartheta = \vartheta'$$

Y así la afirmación está demostrada. Esta afirmación implica que la variedad $\mathcal{V}$ tiene como espacio subyacente al espacio dado apriori. Y así la Proposición 2.2.2 está demostrada. ■

Teorema 2.2.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sea V un subconjunto abierto y conexo de la variedad $\mathcal{V}$: $V \subset \mathcal{V}$. Entonces, existe una variedad cuyo conjunto subyacente es el conjunto V.*

Demostración. En primer lugar asignemos a todo punto $p \in \mathcal{V}$ la clase de funciones $\mathcal{F}(p)$:

$$p \mapsto \mathcal{F}(p) = \{ g = \imath_* f \mid f \in \mathcal{F}(\imath(p)) \}$$

donde $\imath$ es la aplicación:

$$\imath : V \to \mathcal{V}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \imath(q) = q$$

y $\imath_*$ es la aplicación de $\mathcal{F}(\imath(p))$ en $\mathcal{F}(p)$:

$$\imath_* : \mathcal{F}(\imath(p)) \to \mathcal{F}(p)$$

definida por la correspondencia

$$f \mapsto \imath_*(f) = f \circ \imath$$

es inmediato que:

C_I) Para toda $g \in \mathcal{F}(p)$ existe una vecindad $V_1 = V_1(g)$, sobre la cual la función g está definida:

$$g : V_1 \to I\!R$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto g(q)$$

En efecto, como $g = \imath_* f$ con $f \in \mathcal{F}(\imath(p))$ y como $\mathcal{V}$ es una variedad existe una vecindad $V = V(f)$, tal que

$$f : V \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto f(q)$$

como $\imath$ es un mapeo continuo podemos definir:

$$V_1 = \imath^{-1}(V) = V \cap U.$$

Por tanto

$$p \mapsto g(p) = \imath_* f(p) = f(\imath(p))) = f(p)$$

y como $\imath(p) \in V$ se tiene la función g definida en V. Y así C_I) está verificado.

C_{II}) Sea g una función definida en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$, tal que

$$g \underset{p}{\sim} g_1, g_2, \ldots, g_m \quad con \quad g_1, g_2, \ldots, g_m \in \mathcal{F}(p) \quad \Rightarrow \quad g \in \mathcal{F}(p).$$

En efecto, por definición:

$$g_i = \imath_* f_i \quad con \quad f_i \in \mathcal{F}(\imath(p)) \quad para \quad (1 \leq i \leq m).$$

Como $\imath$ es una función continua se puede aplicar la Proposición 2.1.2 y como por hipótesis:

$$\begin{aligned} & g \underset{p}{\sim} \imath_* f_1, \imath_* f_2, \ldots, \imath_* f_m \\ \Rightarrow \quad & \exists \quad f \in \mathcal{F}(\imath(p)) \quad tal\, que \quad f \underset{\imath(p)}{\sim} f_1, f_2, \ldots, f_m \end{aligned}$$

además como $g = \imath_* f$. Por consiguiente:

$$g \in \mathcal{F}(p)$$

y así C_{II}) está verificado.

Sea

$$\Psi : (\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, W, b)$$

un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $(\imath(p)) \in \mathcal{V}$. Como $V \cap W$ es una vecindad del punto $(\imath(p)) \in \mathcal{V}$ existe una vecindad cúbica (Proposición 2.2.1) W_1 con respecto al sistema de coordenadas $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de amplitud b_1 contenida en $V \cap W$:

$$W_1 \subset V \cap W$$

consideremos ahora las funciones:

$$x_1 = \imath_* y_1,\ x_2 = \imath_* y_2, \ldots, x_n = \imath_* y_n \in \mathcal{F}(p)$$

Sea $V_1 = \imath^{-1}(W_1)$. Se afirma que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{F}(p), V_1$ y b_1 satisfacen las condiciones i), ii) y iii) del axioma C_{III}). En efecto

i) Las funciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están definidas sobre la vecindad V_1:

$$x_i : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

por medio de la correspondencia

$$q \mapsto x_i(q) \quad (1 \leq i \leq n).$$

En efecto como

$$x_i(q) = \imath_* y_i(q) = y_i(\imath(q)) = y_i(q)$$

y así se tiene la afirmación demostrada y con esto i).

ii) La aplicación:

$$\varphi : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q))$$

mapea homeomórficamente a la vecindad V_1 sobre el cubo $I_{b_1}^n$.

En efecto, sea $q \in V_1$ y calculando

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= (x_1(q), x_2(q), \ldots, x_n(q)) \\
&= (\imath_* y_1(q), \imath_* y_2(q), \ldots, \imath_* y_n(q)) \\
&= (y_1 \circ \imath(q), y_2 \circ \imath(q), \ldots, y_n \circ \imath(q)) \\
&= (y_1(\imath(q)), y_2(\imath(q)), \ldots, y_n(\imath(q))) \\
&= \Psi(\imath(q)) \in I_{b_1}^n
\end{aligned}$$

y como

$$\varphi(V_1) = \Psi(W) \cong I_{b_1}^n \quad \Rightarrow \quad \varphi(V_1) \cong I_{b_1}^n$$

y así ii) se verifica.

iii)a) Para toda $q \in V_1 \Rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{F}(q)$.

Está se verifica trivialmente puesto que por definición:

$$x_i = \imath_* y_i \ \ con \ \ y_i \in \mathcal{F}(\imath(p)) \ \ para \ \ \mathcal{M}.$$

iii)b) Para toda $q \in V_1$ se debe de tener que si:

$$g \in \mathcal{F}(q) \ \Rightarrow \ g \underset{q}{\sim} x_1, x_2, \ldots, x_n$$

En efecto, por definición $g = \imath_* f$ con $f \in \mathcal{F}(\imath(q))$ y como $\mathcal{V}$ es una variedad se tiene que

$$f \underset{\imath(q)}{\sim} y_1, y_2, \ldots, y_n \ \Rightarrow \ \imath_* f \underset{q}{\sim} \imath_* y_1, \imath_* y_2, \ldots, \imath_* y_n \ \Rightarrow \ g \underset{q}{\sim} x_1, x_2, \ldots, x_n$$

y así iii) está verificada. Por tanto C_{III}) también. Y así está demostrado el Teorema 2.2.2. ■

A la variedad $\mathcal{W}$ así obtenida se le llama **subvariedad abierta** de la variedad $\mathcal{V}$.

Proposiciòn 2.2.3 *Sea $\mathcal{W}$ una variedad, sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico y sea Φ un homeomorfismo del espacio topológico $\mathcal{T}$ sobre un subconjunto conexo U de la variedad $\mathcal{W}$: $U \subset \mathcal{W}$.*

$$\Phi : \mathcal{T} \to U$$

definido por la correspondencia:

$$p \mapsto \Phi(p)$$

Entonces, existe una variedad $\mathcal{V}$ cuyo espacio topológico subyacente es el espacio $\mathcal{T}$.

Demostración. Como $\mathcal{W}$ es una variedad, la imagen del espacio $\mathcal{T}$ bajo el homeomorfismo Φ; es un subconjunto abierto (Principio de la invarianza del dominio):

$$Im(\Phi) = U$$

el cual por hipótesis, es un conjunto conexo. Por consiguiente, U es un conjunto abierto y conexo de la variedad $\mathcal{W}$: $U \subset \mathcal{W}$. De acuerdo al Teorema 2.2.2, existe una subvariedad abierta $\mathcal{U}$ de la variedad $\mathcal{W}$: $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$.

Esta subvariedad $\mathcal{U}$: $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ tiene por definición asignada a cada punto u de $\mathcal{U}$: $u \in \mathcal{U}$ una clase de funciones $\mathcal{F}(u)$:

$$u \mapsto \mathcal{F}(u) \quad \textit{para todo} \quad u \in \mathcal{U}.$$

Para definir la variedad $\mathcal{V}$ que deberá tener como espacio subyacente el espacio topológico dado $\mathcal{T}$, se tiene que seleccionar para cada punto $p \in \mathcal{T}$ una clase de funciones $\mathcal{F}(p)$, y demostrar que se satisfacen los axiomas de la Definición 1.0.6. La clase de funciones que seleccionaremos para asignarle a cada punto $p \in \mathcal{T}$ es la siguiente:

$$\mathcal{F}(p) = \{g = \Phi_* f = f \circ \Phi \mid f \in \mathcal{F}(\Phi(p))\}$$

se afirma que la correspondencia:

$$p \mapsto \mathcal{F}(p)$$

para todo punto $p \in \mathcal{T}$, define una variedad $\mathcal{V}$ cuyo espacio subyacente es el espacio $\mathcal{T}$. En efecto, sea g una función de la familia $\mathcal{F}(p)$ fija pero arbitraria: $g \in \mathcal{F}(p)$ y como:

$$g = \Phi_* f = f \circ \Phi \quad con \quad f \in \mathcal{F}(\Phi(p))$$

y como $\mathcal{U}$ es una variedad, existe una vecindad W del punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$, sobre la cual la función f está definida:

$$f : W \to \mathbb{R}$$

Se afirma que sobre la vecindad $V = \Phi^{-1}(W)$ está definida la función g:

$$g : V \to \mathbb{R}$$

En efecto, sea p un punto fijo pero arbitrario de la vecindad V: $p \in V$, si calculamos:

$$g(p) = \Phi_* f(p) = f \circ \Phi(p) = f(\Phi(p))$$

y si observamos que el punto $\Phi(p) \in W$, se obtiene que efectivamente la función g está definida en el punto $p \in V$ y como esta se eligió arbitrariamente en la vecindad V, se tiene demostrada la afirmación y con esta el axioma C_I) de la Definición 1.0.6 está demostrado.

Sea g una función que depende analíticamente de las funciones:

$$g_1, g_2, \ldots, g_m \in \mathcal{F}(p)$$

en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$:

$$g \underset{p}{\sim} g_1, g_2, \ldots, g_m$$

Se afirma que la función $g \in \mathcal{F}(p)$. En efecto, como Φ es un homeomorfismo existe su aplicación inversa $\Psi = \Phi^{-1}$:

$$\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$$

lo cual permite aplicar la Proposición 2.1.3 a las funciones $g, g_1, g_2, \ldots, g_m$ y como $p = \Psi(\Phi(p))$ se tiene:

$$\Psi_* g = f \underset{\Phi(p)}{\sim} \Psi_* g_1, \Psi_* g_2, \ldots, \Psi_* g_m$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_* g = f \underset{\Phi(p)}{\sim} f_1, f_2, \ldots, f_m \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{F}(\Phi(p))$$

lo cual implica:

$$g = \Phi_* f \quad con \quad f \in \mathcal{F}(\Phi(p)).$$

Por consiguiente:

$$g \in \mathcal{F}(p)$$

y así la afirmación está demostrada y con esta el axioma C_{II}) de la Definición 1.0.6 está demostrado.

Consideremos ahora un sistema de coordenadas locales:

$$\Psi : (\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}, W, b)$$

sobre la variedad $\mathcal{U}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{U}$, y el sistema de funciones:

$$\{\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m\} \quad con \quad \Phi_* y_i \in \mathcal{F}(p) \quad (1 \leq i \leq m).$$

i) Se afirma que las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m$ están definidas sobre la vecindad $V = \Phi^{-1}(W)$ del punto $p \in \mathcal{T}$:

$$\Phi_* y_i : V \to I\!R \qquad (1 \leq i \leq m)$$

En efecto, sea q un punto fijo pero arbitrario de la vecindad V: $q \in V$, si calculamos

$$\Phi_* y_i(q) \doteq y_i \circ \Phi(q) = y_i(\Phi(q)) \quad (1 \leq i \leq m)$$

y como el punto $\Phi(q) \in W$ y si tomamos en cuenta que $\mathcal{U}$ es una variedad, las funciones $y_1, y_2, ..., y_m$ están definidas sobre la variedad $\mathcal{W}$. Por consiguiente las funciones:

$$\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m$$

están definidas en el punto $q \in V$ y como éste se eligió arbitrariamente se tiene demostrada la afirmación i).

Si a todo punto $q \in V$ se le asigna el punto:

$$\varphi(q) = (\Phi_* y_1(q), \Phi_* y_2(q), ..., \Phi_* y_m(q))$$

del espacio euclideano $\mathbb{R}^m$, se tiene definida una aplicación φ de V en el espacio $\mathbb{R}^m$:

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi(q) = (\Phi_* y_1(q), \Phi_* y_2(q), ..., \Phi_* y_m(q))$$

ii) Se afirma que φ es un homeomorfismo de V sobre el cubo:

$$I_b^m = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid |y_i - y_i(\Psi(\Phi(p))| < b \; ; \; (1 \leq i \leq m) \}$$

es decir:

$$\varphi(V) \cong I_b^m.$$

En efecto, si $q \in \mathcal{T}$ es un punto fijo pero arbitrario de la vecindad V: $q \in V$, y si calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= (\Phi_* y_1(q), \Phi_* y_2(q), ..., \Phi_* y_m(q)) \\
&= (y_1 \circ \Phi(q), y_2 \circ \Phi(q), ..., y_m \circ \Phi(q)) \\
&= (y_1(\Phi(q)), y_2(\Phi(q)), ..., y_m(\Phi(q))) \\
&= \Psi(\Phi(q)) \\
&= \Psi \circ \Phi(q)
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\varphi(q) = \Psi \circ \Phi(q)$$

y como el punto $q \in \mathcal{T}$ se eligió arbitrariamente en la vecindad V, del punto $p \in \mathcal{T}$, la aplicación:

$$\varphi : V \to I_b^m$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi(q) = \Psi \circ \Phi(q)$$

es un homeomorfismo, puesto que tanto Ψ como Φ lo son. De está menerá la condición *ii*) del axioma C_{III}) de la Definición 1.0.6 está demostrada.

iii)a) Se afirma que las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m$ pertenecen a la clase de funciones $\mathcal{F}(q)$:

$$\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m \in \mathcal{F}(q)$$

para todo punto $q \in V$.

En efecto, sea q un punto fijo pero arbitrario de la vecindad V: $q \in V$. Como $\mathcal{U}$ es una variedad las funciones $y_1, y_2, ..., y_m$ pertenecen a la clase de funciones $\mathcal{F}(w)$ para todo punto $w \in W$. En particular

$$y_1, y_2, ..., y_m \in \mathcal{F}(\Phi(q))$$

por consiguiente, de acuerdo con la definición de la familia de funciones $\mathcal{F}(q)$ con $q \in \mathcal{T}$, se tiene:

$$\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m \in \mathcal{F}(q)$$

y como el punto q se eligió arbitrariamente en la vecindad V, la afirmación *iii*)*a*) está demostrada.

iii)b) Se afirma que toda función $g \in \mathcal{F}(p)$ depende analíticamente de las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{T}$:

$$g \underset{p}{\sim} \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m$$

En efecto, sea q un punto fijo pero arbitrario de la vecindad V : $q \in V$; y como por definición:

$$g = \Phi_* f \quad con \quad f \in \mathcal{F}(\Phi(q))$$

y como $\mathcal{U}$ es una variedad, la función f depende analíticamente de las funciones $y_1, y_2, ..., y_m$ en el entorno del punto $\Phi(q) \in \mathcal{U}$:

$$f \underset{\Phi(q)}{\sim} y_1, y_2, ..., y_m$$

si en seguida aplicamos la Proposición 2.1.3 a las funciones $f, y_1, y_2, \ldots, y_m$ obtenemos que la función $\Phi_* f = g$ depende analíticamente de las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m$ en el entorno del punto $q \in \mathcal{T}$:

$$g \underset{q}{\sim} \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m.$$

Como el punto q se eligió arbitrariamente en la vecindad V del punto $p \in \mathcal{T}$, la afirmación *iii)b)* está demostrada, y así la condición C_{III}) de la Definición 1.0.6 está demostrada. Con la verificación de este axioma se termina la demostración de la Proposición 2.2.3∎

Definición 2.2.2 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades y sea Φ una aplicación de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

Se dirá que Φ **es un mapeo analítico** *en el punto $p \in \mathcal{V}$, si se satisfacen las condiciones siguientes:*

i) *Φ es un mapeo continuo en el punto $p \in \mathcal{V}$.*

ii) *Si f es una función analítica en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$: $f \in \mathcal{F}(\Phi(p))$. Entonces, la función $\Phi_* f = f \circ \Phi$ es analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$: $\Phi_* f \in \mathcal{F}(p)$. En otras palabras la correspondencia:*

$$f \mapsto \Phi_* f$$

define una aplicación

$$\Phi_* : \mathcal{F}(\Phi(p)) \to \mathcal{F}(p)$$

Se dirá que Φ es un **morfismo analítico** *de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$. Si Φ es un* **mapeo analítico dondequiera.**

Definición 2.2.3 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades y sea Φ un mapeo de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

Se dirá que Φ *es un* **isomorfismo analítico** *de* $\mathcal{V}$ *sobre* $\mathcal{W}$*:*

$$\Phi : \mathcal{V} \cong \mathcal{W}$$

si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) Φ *es un homeomorfismo del espacio subyacente* $\mathcal{X}$ *a la variedad* $\mathcal{V}$ *sobre el espacio subyacente* $\mathcal{Y}$ *a la variedad* $\mathcal{W}$*.*

ii) *Tanto* Φ *como su inverso* Φ^{-1} *son morfismos analíticos.*

Proposiciòn 2.2.4 *Sean* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *variedades, sea* Φ *una aplicación continua de* $\mathcal{V}$ *en* $\mathcal{W}$*:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

sea p *un punto de la variedad* $\mathcal{V}$*:* $p \in \mathcal{V}$ *, sea* $\Phi(p)$ *su imagen en la variedad* $\mathcal{W}$*:* $\Phi(p) \in \mathcal{W}$ *y sea*

$$\Psi : (\{y_1, y_2, ..., y_m\}, W, b)$$

un sistema de coordenadas locales sobre $\mathcal{W}$ *en el punto* $\Phi(p)$ *de la variedad* $\mathcal{W}$*:* $\Phi(p) \in \mathcal{W}$*. Entonces, para que la aplicación* Φ *sea un mapeo analítico en el punto* $p \in \mathcal{V}$*, es necesario y suficiente que se satisfaga la siguiente condición:*

$$(*) \qquad \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m \in \mathcal{F}(p)$$

Demostración. Supongamos que la condición es es necesaria. Esta se verifica trivialmente de acuerdo a la Definición 2.2.3.

Reciprocamente supongamos que la condición es suficiente. Es decir

$$\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m \in \mathcal{F}(p)$$

Por tanto, si consideramos una función $f \in \mathcal{F}(\Phi(p))$ fija pero arbitraria y si tomamos en cuenta que $\mathcal{W}$ es una variedad, está función f depende analíticamente de las funciones:

$$y_1, y_2, ..., y_m$$

en el entorno del punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$:

$$f \underset{\Phi(p)}{\sim} y_1, y_2, \ldots, y_m.$$

Si en seguida aplicamos la Proposición 2.1.2 a las funciones $f, y_1, y_2, \ldots, y_m$ obtenemos la función $\Phi_* f$ la cual depende analíticamente de las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\Phi_* f \underset{p}{\sim} \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m$$

Como por hipótesis la condición se satisface y como $\mathcal{V}$ es una variedad se obtiene una función a saber $\Phi_* f \in \mathcal{F}(p)$; habida cuenta de que f se eligió arbitrariamente en la clase de las funciones $\mathcal{F}(\Phi(p))$, se tiene definida una aplicación Φ_* de $\mathcal{F}(\Phi(p))$ en $\mathcal{F}(p)$:

$$\Phi_* : \mathcal{F}(\Phi(p)) \to \mathcal{F}(p)$$

por medio de la correspondencia

$$f \mapsto \Phi_* f = f \circ \Phi$$

la cual es un mapeo analítico. Así se tiene demostrada la suficiencia de la condición $(*)$. Y así la Proposición 2.2.4 está demostrada. ∎

Teorema 2.2.3 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades analíticas y sea Φ una aplicación de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

Entonces, Φ es un isomorfismo analítico si y solo si cumple las siguientes condiciones:

a) *Φ es un homeomorfismo.*

b) *Sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$ arbitrario: $p \in \mathcal{V}$ y sea $\Phi(p)$ su imagen en $\mathcal{W}$: $\Phi(p) \in \mathcal{W}$. Si*

$$\Psi : (\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, W, b)$$

es un sistema de coordenadas locales sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$. Entonces, las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n$ constituyen un sistema de coordenadas locales sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\varphi : (\{\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n\}, V, a)$$

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que Φ es un isomorfismo analítico y sea Ψ el mapeo analítico de Φ:

$$\Psi \cdot \Phi = \Phi \cdot \Psi = id.$$

Como en particular Φ es una aplicación continua el conjunto $V = \Phi^{-1}(W)$ es una vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$. La hipótesis implica que las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_n$ pertenecen a la familia de funciones $\mathcal{F}(p)$:

$$\Phi_* y_i \in \mathcal{F}(p) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

están funciones satisfacen las siguientes condiciones:

i) Las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_n$ están definidas sobre la vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\Phi_* y_i : V \to \mathbb{R} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

En efecto, si $q \in V$ es un punto fijo pero arbitrario. Calculando

$$\Phi_* y(q) = y \circ \Phi(q) = y(\Phi(q))$$

de donde

$$\Phi_* y_i(q) = y_i \circ \Phi(q) = y_i(\Phi(q)) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

y observemos que $\Phi(p) \in \mathcal{W}$ y si tomamos en cuenta que q se eligió arbitrariamente en V; la condición i) está verificada.

ii) La aplicación:

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^n$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi(q) = (\Phi_* y_1(q), ..., \Phi_* y_n(q))$$

mapea homeomorficamente a la vecindad cúbica V sobre el cubo I_a^n con $a = b$.

En efecto, si calculamos para toda $q \in V$:

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= (\Phi_* y_1(q), \Phi_* y_2(q), ..., \Phi_* y_n(q)) \\
&= (y_1 \circ \Phi(q), y_2 \circ \Phi(q), ..., y_n \circ \Phi(q)) \\
&= (y_1(\Phi(q)), y_2(\Phi(q)), ..., y_n(\Phi(q))) \\
&= \Psi\,(\Phi(q)) \\
&= \Psi \circ \Phi(q)
\end{aligned}$$

y obtener la relación $\varphi = \Psi \circ \Phi$ sobre la vecindad V del punto $p \in V$. Está relación implica que

$$\varphi(V) = \Psi \circ \Phi(V) = \Psi(W) \cong I_a^n$$

y si definimos $a = b$ entonces $\Phi(V) \cong I_a^n$. Así la condición ii) está verificada.

iii)a) Para todo punto $q \in V$ se tiene que las funciones $(*)$ pertenecen a la clase $\mathcal{F}(p)$:

$$(*) \qquad \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n \in \mathcal{F}(p)$$

En efecto, como $\Phi(q) \in \mathcal{W}$ y como $\mathcal{W}$ es una variedad analítica, la hipótesis implica que $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{F}(\Phi(q))$ y puesto que Φ es un mapeo analítico se tiene que:

$$\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n \in \mathcal{F}(q)$$

y así la condición a) está verificada.

iii)b) Para todo punto $q \in V$. Si $f \in \mathcal{F}(q)$, entonces la función f depende analíticamente de las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n$ en el entorno del punto $q \in \mathcal{V}$:

$$f \in \mathcal{F}(q) \quad \Rightarrow \quad f \underset{q}{\sim} \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n.$$

En efecto, como Ψ es un mapeo analítico se tiene que

$$f \in \mathcal{F}(q) \quad \Rightarrow \quad \Psi_* f \in \mathcal{F}(\Phi(q))$$

y si se toma en cuenta la hipótesis la función $\Psi_* f$ depende analíticamente de las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en el entorno del punto $\Phi(q) \in \mathcal{W}$:

$$\Psi_* f \underset{\Phi(q)}{\sim} y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Si ahora aplicamos la Proposición 2.1.2, obtenemos que $f = \Phi_* \Psi_* f$ la cual depende analíticamente de las funciones $\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n$ en el entorno del punto $q \in \mathcal{V}$:

$$f = \Phi_* \Psi_* f \underset{q}{\sim} \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n$$

y así la condición b) está verificada. De está manera se tiene demostrado que

$$\varphi : (\{\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_n\}, V, a) \quad con \quad a = b$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que las condiciones a) y b) se satisfacen y sea p un punto fijo pero arbitrario de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sea $\Phi(p)$ su imagen bajo Φ en $\mathcal{W}$: $\Phi(p) \in \mathcal{W}$. Por consiguiente, si $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ es un sistema de coordenadas locales sobre $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p)$. Entonces, las funciones

$$\Phi_*(y_i) \quad para \quad (1 \leq i \leq n)$$

pertenecen a la familia $\mathcal{F}(p)$:

$$\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_n \in \mathcal{F}(p)$$

lo cual de acuerdo con la Proposición 2.2.4, implica que la aplicación:

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

es analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$. Como el punto $p \in \mathcal{V}$ se eligió arbitrariamente en $\mathcal{V}$. Por tanto:

Φ es un mapeo analítico.

Análogamente si denotamos con Ψ al mapeo inverso de Φ:

$$\Psi = \Phi^{-1}$$

y si q es un punto fijo pero arbitrario de $\mathcal{W}$; $\Psi(q)$ denotará su imagen bajo Ψ en $\mathcal{V}$: $\Psi(q) = p \in \mathcal{V}$. Por hipótesis

$$\{\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_n\}$$

es un sistema de coordenadas locales sobre $\mathcal{V}$ en el punto $\Psi(q) \in \mathcal{V}$ y como también por hipótesis las funciones $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathcal{F}(\Phi(p))$. La propiedad inmediata:

$$\Psi \, \Phi_* y_i = y_i \quad para \quad (1 \leq i \leq n)$$

permite afirmar que las funciones:

$$\Psi(\Phi_* y_i) = y_i \quad para \quad (1 \leq i \leq n)$$

pertenecen a la familia $\mathcal{F}(q)$:

$$\Psi(\Phi_* y_1), \Psi(\Phi_* y_2), ..., \Psi(\Phi_* y_n) \in \mathcal{F}(q)$$

de acuerdo a la Proposición 2.2.4, implica que la aplicación:

$$\Psi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$$

es analítica en el punto $q \in \mathcal{W}$. Como esté punto $q \in \mathcal{W}$ se eligió arbitrariamente. Por tanto:

Ψ es un mapeo analítico.

Y así se tiene demostrado que Φ es un isomorfismo analítico. Y con esto el Teorema 2.2.3 está demostrado. ■

Capítulo 3

Vectores tangentes y diferenciales

3.1 Vectores Tangentes

Definición 3.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad analítica real y sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Por un vector tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ se entenderá una aplicación L de la clase de funciones $\mathcal{F}(p)$ en los números reales $\mathbb{R}$:*

$$L : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$f \mapsto L(f)$$

satisfaciendo las siguientes condiciones:

i) *L es lineal:*

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \textit{para todas} \quad f, g \in \mathcal{F}(p)$$

$$\textit{y para todas} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) *L es una derivación:*

$$L(f \cdot g)(p) = L(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot L(g) \quad \textit{para todas} \quad f, g \in \mathcal{F}(p).$$

el número real $L(f)$ se llama la **derivada de la función** *f en el punto p en la dirección L.*

Proposición 3.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sean L_1 y L_2 vectores tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Entonces:*

i) *La aplicación:*

$$L_1 + L_2 : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$f \mapsto (L_1 + L_2)(f) = L_1(f) + L_2(f)$$

es un vector tangente sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$.

ii) *La aplicación:*

$$\lambda L : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$f \mapsto (\lambda L)(f) = \lambda (L(f))$$

para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, es un vector tangente en el punto $p \in \mathcal{V}$.

Demostración. Calculando

$$\begin{aligned}
(L_1 + L_2)(\alpha f + \beta g) &= L_1(\alpha f + \beta g) + L_2(\alpha f + \beta g) \\
&= L_1(\alpha f) + L_1(\beta g) + L_2(\alpha f) + L_2(\beta g) \\
&= \alpha L_1(f) + \beta L_1(g) + \alpha L_2(f) + \beta L_2(g) \\
&= \alpha(L_1 + L_2)(f) + \beta(L_1 + L_2)(g)
\end{aligned}$$

es decir

$$(L_1 + L_2)(\alpha f + \beta g) = \alpha(L_1 + L_2)(f) + \beta(L_1 + L_2)(g).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(L_1 + L_2)(f \cdot g)(p) &= L_1(f \cdot g)(p) + L_2(f \cdot g)(p) \\
&= L_1(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot L_1(g) + L_2(f) \cdot g(p) \\
&\qquad + f(p) \cdot L_2(g) \\
&= (L_1(f) + L_2(f))g(p) + f(p)(L_1(g) + L_2(g)) \\
&= (L_1 + L_2)(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot (L_1 + L_2)(g)
\end{aligned}$$

Por tanto $(L_1 + L_2)$ es un vector tangente sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Finalmente si calculamos

$$\begin{aligned}(\lambda L)(\alpha f + \beta g) &= \lambda(L(\alpha f + \beta g)) \\ &= \lambda(\alpha L(f) + \beta L(g)) \\ &= \lambda(\alpha L(f)) + \lambda(\beta L(g))\end{aligned}$$

es decir

$$(\lambda L)(\alpha f + \beta g) = \lambda(\alpha L(f)) + \lambda(\beta(L(g)).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(\lambda L)(f \cdot g) = \lambda(L(f \cdot g)) &= \lambda(L(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot L(g)) \\ &= \lambda L(f) \cdot g(p) + \lambda f(p) \cdot L(g) \\ &= \lambda(L(f)) \cdot g(p) + f(p) \cdot \lambda(L(g)) \\ &= (\lambda L)(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot (\lambda L)(g)\end{aligned}$$

es decir

$$(\lambda L)(f \cdot g) = (\lambda L) \cdot g(p) + f(p) \cdot (\lambda L)(g).$$

Por tanto
λL es un vector tangente sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$. Y así la Proposición 3.1.1 está demostrada. ■

Observación 3.1.1 *El conjunto:*

$$\{L : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R} \mid L \text{ es un vector tangente a } \mathcal{V} \text{ en el punto } p \in \mathcal{V}\}$$

se denota con el símbolo:

$$\mathcal{T}_p\mathcal{V}$$

y se dirá que es el **espacio vectorial tangente** *a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$.*

Corolario 3.1.1 *Si L es un vector tangente: $L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$, entonces para toda función constante c: $c \in \mathcal{F}(p)$:*

$$L(c) = 0$$

Demostración. Calculando

$$\begin{aligned} L(c) = c\,L(1) &= c\,L(1\cdot 1) = c((1)\,L(1) + L(1)(1)) \\ &= c\,L(1) + c\,L(1) = 2c\,L(1) = 2L(c) \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$L(c) = 2L(c) \;\Rightarrow\; L(c) = 0$$

Y así el Corolario 3.1.1 está demostrado. ■

Observación 3.1.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sea*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas locales sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, y si se considera una función analítica $f \in \mathcal{F}(p)$ fija pero arbitraria, misma que por definición se puede expresar como

$$f(q) = F(x_1(q), x_2(q), \ldots, x_n(q))$$

donde $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ es una función en n variables reales definida y analítica en alguna vecindad del punto:

$$\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n$$

entonces, hagamos la siguiente convención:

$$\left.\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}(x)}{\partial x_i}\right|_{\varphi(p)} = \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{\varphi(p)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (1 \le i \le n).$$

Está última observación nos permite escribir el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea p un punto arbitrario de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y si*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, V, a)$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Entonces:

$$L \in T_p\mathcal{V} \;\Leftrightarrow\; L = \sum_{i=1}^{n} L(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde $L(x_i) \in \mathbb{R}$ para $(1 \le i \le n)$.

Demostración. $\Leftarrow$) Observemos que dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n números reales. Se afirma que la aplicación L dada de $\mathcal{F}(p)$ en $\mathbb{R}$:

$$L : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$f \mapsto L(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

es un vector tangente sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$.

En efecto, si g es otra función analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$: $g \in \mathcal{F}(p)$ y si hacemos las consideraciones sobre la representación de g y del producto $f \cdot g$ (el cual evidentemente es analítico en el punto $p \in \mathcal{V}$: $f \cdot g \in \mathcal{F}(p)$), que hemos hecho para aquella de la función f y podemos escribir para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L(\alpha f + \beta g) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f + \beta g) \\ &= \alpha \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big) + \beta \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big) \end{aligned}$$

es decir

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \textit{para todas} \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

En otras palabras, L es lineal. Por otro lado si calculamos:

$$\begin{aligned} L(f \cdot g)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g)(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} g(p) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(p) \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big) g(p) + f(p) \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big) \\ &= L(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot L(g) \end{aligned}$$

es decir

$$L(f \cdot g) = L(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot L(g) \quad \textit{para todas} \;\; f, g \in \mathcal{F}(p).$$

En otras palabras, L es una derivación. Como en particular $L(x_i) = \lambda_i$ para $(1 \leq i \leq n)$. Por consiguiente

$$L = \sum_{i=1}^{n} L(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{T}_p \mathcal{V}$$

es decir, la condición es necesaria.

$\Rightarrow$) Recíprocamente, sea $L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$, sea f una función analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$: $f \in \mathcal{F}(p)$ y sea

$$f = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

su expresión en el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ donde

$$F(u_1, u_2, ..., u_n)$$

es una función real en n variables reales analítica en el punto

$$\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f = a_0 \ &+ \ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_1(p)) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - x_n(p)) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))\, g_{ij} \end{aligned}$$

donde $g_{ij} \in \mathcal{F}(p)$ *para* $(1 \leq i, j \leq n)$. Si $L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$, entonces

$$L(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} L(x_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} L(x_n) + \sum_{i,j=1}^{n} L(((x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))\, g_{ij})$$

pero como

$$\begin{aligned} L(x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p)) \ &= \ (x_i(p) - x_i(p))\, L(x_j - x_j(p)) \\ &\quad + L(x_i - x_i(p))(x_j(p) - x_j(p)) \\ &= \ 0 \end{aligned}$$

y como también

$$\begin{aligned} L((x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))g_{ij} \ &= \ L((x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))\, g_{ij}(p) \\ &\quad + (x_i(p) - x_i(p))(x_j(p) - x_j(p))\, L(g_{ij}) \\ &= \ 0 \end{aligned}$$

es decir

$$L(((x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))\, g_{ij}) = 0$$

obtenemos

$$L(f) = \sum_{i=1}^{n} L(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \textit{para toda} \quad f \in \mathcal{F}(p).$$

Por consiguiente

$$L = L(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + L(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + L(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

es decir

$$L = \sum_{i=1}^{n} L(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

es un vector tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Y así el Teorema 3.1.1 está desmostrado. ■

Corolario 3.1.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea p un punto arbitrario de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y si*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, V, a)$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, entonces los vectores tangentes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$:

$$X_i \in \mathcal{T}_p\mathcal{V} \quad \textit{para} \quad (1 \leq i \leq n)$$

definidos por la relación

$$X_i\, x_j = \delta_{ij} \quad \textit{para} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

forman una base sobre los números reales $\mathbb{R}$ para el espacio vectorial tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto p:

$$\mathcal{T}_p\mathcal{V}$$

es decir

$$dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}_p\mathcal{V}) = n\,; \qquad (n = dim(\mathcal{V})).$$

Demostración. En primer lugar se afirma que los vectores

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$$

son linealmente independientes sobre la variedad $\mathcal{V}$. En efecto, supongamos que se tiene la siguiente relación

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = 0 \quad para \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

por tanto

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

y así la afirmación está demostrada.

Por otro lado, de acuerdo con el Teorema 3.1.1 tenemos que

$$X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i x_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

obtenemos

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

y el mismo Teorema 3.1.1, afirma que todo vector $L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$ se puede escribir como

$$L = L(x_1)X_1 + L(x_2)X_2 + \dots + L(x_n)X_n.$$

Por consiguiente

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

es una base del espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, de tal suerte que la dimensión:

$$dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}_p\mathcal{V}) = n = dim(\mathcal{V}).$$

Y así el Corolario 3.1.2 está demostrado. ■

El Teorema 3.1.1 y su Corolario esencialmente significan que todo vector tangente está unívocamente determinado por los valores que asigna a las funciones de un sistema de coordenadas. Consideremos ahora el siguiente

Lema 3.1.1 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades, sea Φ un mapeo de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

analítico en el punto $p \in \mathcal{V}$. Si L es un vector tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$: $L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$ y si f es una función analítica en el punto $q = \Phi(p) \in \mathcal{W}$. Entonces, la aplicación:

$$M : \mathcal{F}(\Phi(p)) \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$f \mapsto M(f) = L\,\Phi_*\,f = L(\Phi_*\,f)$$

es un vector tangente a la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $q = \Phi(p) \in \mathcal{W}$. Además la asignación

$$L \mapsto d\Phi_p\,L = M$$

define un mapeo lineal del espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ en el espacio tangente $\mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}$:

$$d\Phi_p : \mathcal{T}_p\mathcal{V} \to \mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}$$

Demostración. Tenemos que verificar que se cumplen las condiciones de la Definición 3.1.1 :

i) M es lineal.

En efecto, observemos que para todas $f,g \in \mathcal{F}(\Phi(p))$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, y si calculamos:

$$\begin{aligned}
M(\alpha\, f + \beta\, g)(q) &= L\Phi_*(\alpha\, f + \beta\, g)(q) \\
&= L(\alpha\,\Phi_*\, f + \beta\,\Phi_*\, g)(q) \\
&= L(\alpha\,\Phi_*\, f)(q) + L(\beta\,\Phi_*\, g)(q) \\
&= \alpha\, L\,(\Phi_*\, f)(q) + \beta\, L\,(\Phi_*\, g)(q) \\
&= \alpha\, M(f)(q) + \beta\, M(g)(q)
\end{aligned}$$

es decir

$$M(\alpha\, f + \beta\, g)(q) = \alpha\, M(f)(q) + \beta\, M(g)(q) \ \ \textit{para toda} \ \ q \in \mathcal{W}.$$

Por tanto
$$M(\alpha f + \beta g) = \alpha M(f) + \beta M(g)$$
y así la condición *i*) está demostrada.

ii) M es una derivación.

En efecto, si calculamos para todas $f, g \in \mathcal{F}(\Phi(p))$ y para todo punto $q \in \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} M(f \cdot g)(q) &= L\,\Phi_*(f \cdot g)(q) \\ &= L(\Phi_* f) \cdot g(q) + f(q) \cdot L(\Phi_* g) \\ &= L\,\Phi_*(f) \cdot g(q) + f(q) \cdot L\,\Phi_*(g) \\ &= M(f) \cdot g(q) + (f)(q) \cdot M(g) \end{aligned}$$

es decir
$$M(f \cdot g)(q) = M(f) \cdot g(q) + f(q) \cdot M(g)$$
es decir, M es una derivación, y así la condición *ii*) está demostrada. Por consiguiente, M es un vector tangente sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $q = \Phi(p) \in \mathcal{W}$:
$$M \in \mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}$$

iii) La aplicación $d\Phi_p$ es lineal.

En efecto, si calculamos para todas $L_1, L_2 \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$ y todas $\alpha, \beta \in I\!R$ y toda función analítica $f \in \mathcal{F}(\Phi(p))$:

$$\begin{aligned} d\Phi_p(\alpha\, L_1 + \beta\, L_2)(f) &= M(\alpha\, L_1 + \beta\, L_2)(f) \\ &= M(\alpha\, L_1)(f) + M(\beta\, L_2)(f) \\ &= \alpha M(L_1)(f) + \beta M(L_2)(f) \\ &= \alpha L_1\, M(f) + \beta L_2\, M(f) \\ &= \alpha\, d\Phi_p\, L_1(f) + \beta\, d\Phi_p\, L_2(f) \end{aligned}$$

es decir
$$d\Phi_p(\alpha\, L_1 + \beta\, L_2)(f) = \alpha\, d\Phi_p\, L_1(f) + \beta\, d\Phi_p\, L_2(f)$$
y como la función f se eligió arbitrariamente. Por consiguiente
$$d\Phi_p(\alpha\, L_1 + \beta\, L_2) = \alpha\, d\Phi_p L_1 + \beta\, d\Phi_p L_2$$
es decir $d\Phi_p$ es lineal. Y así la condición *iii*) está demostrada y con la misma el Lema 3.1.1 está demostrado. ■

Esté Lema nos permite establecer la siguiente:

3.2 Diferenciales

Definición 3.2.1 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades, sea Φ un mapeo de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

analítico en el punto $p \in \mathcal{V}$. A la aplicación $d\Phi_p$ del Lema 3.1.1 que mapea linealmente al espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ en el espacio tangente $\mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}$ a la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$:

$$d\Phi_p : \mathcal{T}_p\mathcal{V} \to \mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}$$

definida por la correspondencia

$$L \mapsto d\Phi_p(L) = M$$

se le llama la **diferencial** $d\Phi_p$ **de la aplicación** Φ *en el punto $p \in \mathcal{V}$. La cual es denotada usualmente por $d\Phi_p$ ó simplemente por $d\Phi$.*

Consecuencias inmediatas de está definición están contenidas en la siguiente:

Proposiciòn 3.2.1 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades, sea Φ una aplicación de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

analítica en el punto $p = \Phi(q) \in \mathcal{W}$. Entonces, si $\mathcal{Z}$ es otra variedad y Ψ es una aplicación de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{Z}$:

$$\Psi : \mathcal{W} \to \mathcal{Z}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \Psi(q)$$

analítica en el punto $p = \Phi(q)$. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones:

i) $d(\Psi\circ\Phi)_p = d\Psi_{\Phi(q)}\circ d\Phi_p$ *para todo* $p\in\mathcal{V}$.

ii) *Si* Φ *es un isomorfismo analítico, entonces:*

$$d\Phi_p^{-1} = (d\Phi_p)^{-1}$$

Demostración. Sabemos que para toda función h sobre la variedad $\mathcal{Z}$ analítica en el punto $p = \Psi(q)$ las funciones

$$h\circ(\Psi\circ\Phi) = (\Psi\circ\Phi)_* h$$

$$y$$

$$(\Phi_*\circ\Psi_*)h = (h\circ\Psi)\circ\Phi$$

coinciden en la vecindad del punto $p\in\mathcal{V}$. Por tanto, para todo vector tangente $L\in\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ y toda $h\in\mathcal{F}(\Psi(q))$ se tiene:

$$\begin{aligned} d(\Psi\circ\Phi)_p L(h) &= L(\Psi\circ\Phi)_*(h) \\ &= L(\Phi_*\circ\Psi_*)(h) \\ &= d\Phi_p L\,\Psi_*(h) \\ &= d\Psi_{\Phi(q)}\circ d\Phi_p L(h) \end{aligned}$$

y por tanto

$$d(\Psi\circ\Phi)_p = d\Psi_{\Phi(q)}\circ d\Phi_p.$$

Por tanto, como h y L se eligieron arbitrariamente se obtiene la propiedad i).

Finalmente, la propiedad ii) es consecuencia inmediata de la propiedad i). En efecto, sea $\Psi = \Phi^{-1}$. Entonces, calculando:

$$id_{\mathcal{T}_p\mathcal{V}} = d(\Psi\circ\Phi)_p = d\Psi_{\Phi(q)}\cdot d\Phi_p$$

$$id_{\mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}} = d(\Phi\circ\Psi)_p = d\Phi_p\cdot d\Psi_{\Phi(q)}$$

Por tanto

$$d^{-1}\Phi_p = d(\Phi_p)^{-1}.$$

Y así la condición *ii*) está demostrada. Y con esto la Proposición 3.2.1 está demostrada. ■

Proposición 3.2.2 *Si $\mathcal{V}$ es una variedad y si p es un punto arbitrario de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Entonces, el conjunto de diferenciales*

$$\mathcal{D}_p = \{\, df_p \mid f \in \mathcal{F}(p) \,\}$$

es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$, de dimensión n: $dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_p) = n$ con respecto a las operaciones:

$$\Psi : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

definida por la correspondencia

$$(df_p, dg_p) \mapsto \Psi(df_p, dg_p) = df_p + dg_p$$

y

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

definida por la correspondencia

$$(\lambda, df_p) \mapsto \Phi(\lambda, df_p) = \lambda df_p$$

mismo que coincide con el espacio $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$ dual del espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\mathcal{D}_p = \mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$$

Además, si $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un sistema de coordenadas locales sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, entonces, el sistema de diferenciales

$$\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$$

forma una base del espacio $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$ dual del espacio $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$, de tal suerte que toda diferencial $df \in \mathcal{D}_p$ se puede expresar en este sistema de coordenadas locales como

$$df_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{para toda} \quad df_p \in \mathcal{D}_p$$

o también

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Demostración. En primer lugar observemos que el conjunto de diferenciales:

$$\mathcal{D}_p = \{\, df \mid f \in \mathcal{F}(p) \,\}$$

es un espacio vectorial.

En efecto, sean $df_1, df_2 \in \mathcal{D}_p$ y sean $\lambda_1, \lambda_2 \in I\!R$ y puesto que toda diferencial $df \in \mathcal{D}_p$ es una funcional lineal sobre el espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, si $L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$ es un vector fijo pero arbitrario y si calculamos:

$$\begin{aligned}
(\lambda_1\, df_1 + \lambda_2\, df_2)(L) &= \lambda_1\, df_1(L) + \lambda_2\, df_2(L) \\
&= \lambda_1\, L(f_1) + \lambda_2\, L(f_2) \\
&= L(\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2) \\
&= d(\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2)(L)
\end{aligned}$$

es decir

$$(\lambda_1\, df_1 + \lambda_2\, df_2)(L) = d(\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2)(L) \quad \textit{para toda} \quad L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$$

y como el vector $L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$ se eligió arbitrariamente se obtiene

$$\lambda_1\, df_1 + \lambda_2\, df_2 = d(\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2)$$

lo cual significa

$$\lambda_1\, df_1 + \lambda_2\, df_2 \in \mathcal{D}_p$$

de esta manerá la observación está demostrada.

Consideremos ahora un sistema de coordenadas locales $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y sea un vector $X_p \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$ fijo pero arbitrario. Si tomamos en cuenta el Teorema 3.1.1 y el Corolario 3.1.2, podemos escribir:

$$df(X_p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_p\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(X_p)$$

es decir

$$df(X_p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(X_p) \quad \textit{para toda} \quad df \in \mathcal{D}_p$$

y como el vector $X_p \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$ se eligió arbitrariamente, se obtiene

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

o también
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$
En otras palabras las diferenciales
$$\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$$
generan al espacio vectorial $\mathcal{D}_p$. Más aun se afirma que éstas son linealmente independientes. En efecto, supongamos que existe una relación no trivial
$$\lambda_1\, dx_1 + \lambda_2\, dx_2 + ... + \lambda_n\, dx_n = 0 \quad con \quad \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$$
y sean $X_{p,i} \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$ los vectores definidos por las relaciones:
$$X_{p,i}\, x_j = \delta_{ij} \quad para\ todas \quad (1 \leq i, j \leq n).$$
Por consiguiente, calculando
$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, dx_j\right)(X_{p,i}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, dx_j\,(X_{p,i}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, X_{p,i}\, x_j = \lambda_i$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$
por tanto, el sistema de diferenciales
$$\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$$
es linealmente independiente. Y así la Proposición 3.2.2 está demostrada. ■

Corolario 3.2.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea p un punto arbitrario de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sea*
$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$
un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Entonces, la familia finita de funciones $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ es un sistema de coordenadas locales sobre la variedad $\mathcal{V}$, en el punto $p \in \mathcal{V}$, si y solo si:

i) $m = n$.

ii) *El sistema de diferenciales*
$$\{dy_1, dy_2, ..., dy_m\}$$
es una base del espacio cotangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$.

Demostración. La condición es suficiente. En efecto, supongamos que se satisfacen las condiciones *i*) y *ii*). Como por hipótesis

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

es un sistema de coordenadas locales sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, el sistema de diferenciales

$$\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$$

es una base del espacio cotangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$ y puesto que la Proposición 3.2.2 nos permite expresar a las diferenciales de las funciones $y_1, y_2, ..., y_m$ como

$$dy_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \qquad (1 \leq i \leq m)$$

donde

$$y_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

es la expresión de las funciones y_i en función del sistema de coordenadas

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

La condición *ii*) implica que el

$$det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\varphi(p)} \neq 0$$

de acuerdo al Teorema 2.2.1 *i*) y *ii*) es la condición suficiente para que la familia finita de funciones

$$\{y_1, y_2, ..., y_m\}$$

sea un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$.

$\Rightarrow$) La condición es necesaria. En efecto, supongamos que las funciones

$$\{y_1, y_2, ..., y_m\} \qquad y_i \in \mathcal{F}(p) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, lo cual implica:

i) m = n.

ii) De acuerdo al Teorema 2.2.1:

$$det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi(p)} \neq 0$$

Por tanto

$$dy_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Esto último implica, que el sistema de diferenciales

$$\{dy_1, dy_2, ..., dy_m\}$$

es linealmente independiente. Y como $m = n$, por consiguiente el sistema de diferenciales

$$\{dy_1, dy_2, ..., dy_m\}$$

es una base del espacio $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$. De esta manera el Corolario 3.2.1 está demostrado. ■

Definición 3.2.2 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades y sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

Se dirá que Φ **es regular** *en el punto p de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$; si cumple las siguientes condiciones:*

i) *El mapeo Φ:*

$$\Phi : \mathcal{F}(\Phi(p)) \to \mathcal{F}(p)$$

es analítico en el punto $p \in \mathcal{V}$.

ii) *La sucesión corta:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_p\mathcal{V} \xrightarrow{d\Phi_p} \mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}$$

es exacta.

Proposición 3.2.3 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades, sea p un punto arbitrario de la variedad $\mathcal{V}$ y sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(q)$$

regular en el punto p de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Entonces, si

$$\Psi : (\{y_1, y_2, ..., y_m\}, W, b)$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$ del sistema de funciones

$$\{\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m\}$$

se puede extraer un sistema de coordenadas

$$\{\Phi_* y_{i_1}, \Phi_* y_{i_2}, ..., \Phi_* y_{i_n}\}$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Además, si

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

es un sistema de coordenadas arbitrario sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Entonces, existe un sistema de coordenadas

$$\{z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1}, ..., z_m\}$$

sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$, tal que, las funciones $\Phi_* z_i$ y x_i coinciden en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\Phi_* z_i = x_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Demostración. La hipótesis, de acuerdo con el **Lema 1A** implica, que la sucesión corta

$$0 \longleftarrow \mathcal{T}_p\mathcal{V}^* \xleftarrow{\Phi^*} \mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}^*$$

es exacta y como el Corolario 3.2.1 de la Proposición 3.2.2 afirma que el sistema de diferenciales

$$\{dy_1, dy_2, ..., dy_m\}$$

es una base del espacio cotangente $\mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}^*$; el mismo Corolario afirma que del sistema de formas lineales

$$\{\Phi^* dy_1, \Phi^* dy_2, ..., \Phi^* dy_m\}$$

definidas sobre el espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ se puede extraer una base a saber

$$\{\Phi^* dy_{i_1}, \Phi^* dy_{i_2}, ..., \Phi^* dy_{i_n}\}$$

para el espacio cotangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$. Por otro lado, la definición del homomorfismo lineal Φ^* dual del homomorfismo lineal $d\Phi$ nos permite calcular

$$\Phi^* dy_i = dy_i \circ d\Phi = d(y_i \circ \Phi) = d(\Phi_* y_i)$$

y obtener

$$\Phi^* dy_i = d(\Phi_* y_i) \quad \textit{para toda} \quad (1 \leq i \leq m).$$

Estas relaciones nos permiten expresar a la base del espacio cotangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$ como

$$\{d(\Phi_* y_{i_1}), d(\Phi_* y_{i_2}), ..., d(\Phi_* y_{i_n})\}$$

y si aplicamos el Teorema 2.2.1 obtenemos que la familia finita de funciones

$$\{\Phi_* y_{i_1}, \Phi_* y_{i_2}, ..., \Phi_* y_{i_n}\}$$

forman un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Y así la primera parte de la Proposición está demostrada.

Para demostrar la segunda parte se procede como sigue, si

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y como por definición

$$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathcal{F}(p) \quad \Rightarrow \quad x_i \underset{p}{\sim} \Phi_* y_{i_1}, \Phi_* y_{i_2}, ..., \Phi_* y_{i_n}$$

esto último, de acuerdo con la Proposición 2.1.3, implica la existencia de una función $z_i \in \mathcal{F}(\Phi(p))$ tal que

$$\Phi_* z_i \underset{p}{\sim} \Phi_* y_{i_1}, \Phi_* y_{i_2}, ..., \Phi_* y_{i_n}$$

con la propiedad

$$\Phi_* z_i = x_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$. Se afirma, que la familia finita de funciones

$$\{z_1, ..., z_n, z_{n+1}, ..., z_m\}$$

donde:

$$z_{n+j} = y_{i_{n+j}} \quad con \quad y_{i_{n+j}} \neq y_{i_k} \quad (1 \leq k \leq m) \quad para\ toda \quad (1 \leq j \leq m-n).$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$.

En efecto, consideremos las expresiones de las funciones $\Phi_* z_i$ con respecto al sistema de coordenadas

$$\{\Phi_* y_{i_1}, \Phi_* y_{i_2}, ..., \Phi_* y_{i_n}\}$$

a saber

$$\Phi_* z_i = F_i(\Phi_* y_{i_1}, \Phi_* y_{i_2}, ..., \Phi_* y_{i_n}) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

donde $F_i(u_1, u_2, ..., u_n)$ es una función real en n variables reales y definida en la vecindad del punto:

$$\varphi(p) = (\Phi_* y_{i_1}(p), \Phi_* y_{i_2}(p), ..., \Phi_* y_{i_n}(p))$$

y analítica en el mismo punto y como podemos escribir

$$z_i(\Phi(p)) = F_i(y_{i_1}(\Phi(p)), y_{i_2}(\Phi(p)), ..., y_{i_n}(\Phi(p))) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

para todo punto $\Phi(p) \in W$. La expresión de las funciones z_i en el sistema de coordenadas $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ están dadas por las expresiones

$$z_i = F_i(y_1, y_2, ..., y_m) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

donde $F_i(u_1, u_2, ..., u_n)$ es una función real en n variables reales, definida en la vecindad del punto

$$\Psi(\Phi(p)) = (y_1(\Phi(p)), y_2(\Phi(p)), ..., y_m(\Phi(p)))$$

y analítica en el mismo punto. Si ahora calculamos:

$$det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_{i_j}}\right)_{\Psi(\Phi(p))} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{i_n}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{i_n}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{\Psi(\Phi(p))}$$

$$= det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{i_n}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{i_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial F_n}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{i_n}} \end{pmatrix}_{\Psi(\Phi(p))}$$

$$= det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_2}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \end{pmatrix}_{\varphi(p)}$$

obtenemos

$$det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_{i_j}}\right)_{\Psi(\Phi(p))} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_2}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \end{pmatrix}_{\varphi(p)}$$

Utilizando el Teorema 2.2.1 obtenemos

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_2}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_1}} & \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \Phi\circ y_{i_n}} \end{pmatrix}_{\varphi(p)} \neq 0$$

Por consiguiente

$$det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_{i_j}}\right)_{\Psi(\Phi(p))} \neq 0$$

Y así la afirmación está demostrada y con la misma la Proposición 3.2.3 está demostrada. ■

Corolario 3.2.2 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades y sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(q)$$

regular en el punto p de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Entonces, existe una vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$ que es mapeada topológicamente bajo el mapeo Φ:

$$V \cong \Phi(V).$$

Demostración. De acuerdo con la Proposición 3.2.3 si

$$\Psi : (\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}, W, b)$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$, entonces, existe un sistema de coordenadas

$$\{\Phi_* y_{i_1}, \Phi_* y_{i_2}, \ldots, \Phi_* y_{i_n}\}$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ de tal suerte que si

$$\varphi : (\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, V, a)$$

es otro sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, entonces, existe un sistema de coordenadas

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_m\}$$

sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$, con la propiedad

$$\Phi_* z_i = x_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$, vecindad que sin perdida de generalidad se puede suponer igual a la vecinda cúbica V. La Proposición 3.2.3 afirma que el sistema de diferenciales

$$\{dz_1, dz_2, \ldots, dz_n, dz_{n+1}, \ldots, dz_m\}$$

es una base del espacio cotangente:

$$\mathcal{T}_{\Phi(p)} \mathcal{W}^*$$

Como por hipótesis el mapeo Φ es regular el **Lema 1A**, implica que la sucesión de los espacios cotangentes

$$0 \longrightarrow Ker(\Phi_*) \longrightarrow \mathcal{T}_{\Phi(p)} \mathcal{W}^* \xrightarrow{\Phi^*} \mathcal{T}_p \mathcal{V}^* \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Por otro lado, se afirma que las diferenciales $dz_{n+1}, dz_{n+2}, \ldots, dz_m$ pertenecen al $Ker(\Phi_*)$:

$$dz_{n+j} \in Ker(\Phi_*) \qquad (1 \leq j \leq m-n).$$

En efecto, consideremos el sistema de vectores $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$:

$$X_i \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$$

definidos por la relación:

$$X_i x_j = \delta_{ij} \quad \textit{para toda} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Si ahora calculamos:

$$\begin{aligned} \Phi^*(dz_{n+j})X_i &= d(\Phi_*\, z_{n+j})X_i \\ &= X_i(\Phi_*\, z_{n+j}) \\ &= \frac{\partial \Phi_*\, z_{n+j}}{\partial x_i}(p) \\ &= \frac{\partial \Phi_*(z_{n+j})}{\partial \Phi_*\, z_i}(p) \\ &= \frac{\partial z_{n+j}}{\partial z_i}(\Phi(p)) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\Phi^*(dz_{n+j})X_i = \frac{\partial z_{n+j}}{\partial z_i}(\Phi(p)) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1 \leq j \leq m-n).$$

Como el sistema de vectores $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una base del espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} d(\Phi_* z_{n+j}) &= \Phi^* d(z_{n+j}) \\ &= \frac{\partial z_{n+j}}{\partial z_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $(1 \leq i \leq m)$ $(1 \leq j \leq m-n)$. Lo cual implica, que las funciones $\Phi_*\, z_{n+j}$ son constantes sobre la vecindad cúbica del punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\Phi_*\, dz_{n+j} = cte. = c_j \; ; \quad c_j \in I\!R \qquad (1 \leq j \leq m-n)$$

es decir

$$z_{n+j}(\Phi(p)) = c_j \quad \textit{para toda} \;\; q \in V \quad \textit{y toda} \;\; (1 \le j \le m-n).$$

Consideremos ahora el homeomorfismo:

$$\imath_m^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definido por la correspondencia

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \imath_m^n(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}(\Phi(p)), \ldots, z_m(\Phi(p)))$$

si en seguida calculamos para toda $q \in V$:

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1} \circ \imath_m^n \circ \varphi(q) &= \Psi^{-1} \circ \imath_m^n(z_1(\Phi(q)), z_2(\Phi(q)), \ldots, z_n(\Phi(q))) \\
&= \Psi^{-1}(z_1(\Phi(q)), \ldots, z_n(\Phi(q)), z_{n+1}(\Phi(q)), \ldots, z_m(\Phi(q))) \\
&= \Psi^{-1}\,\Psi(\Phi(q)) \\
&= \Phi(q)
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\Psi^{-1} \circ \imath_m^n \circ \Phi(q) = \Phi(q) \quad \textit{para toda} \;\; q \in V$$

es decir

$$\Psi^{-1} \circ \imath_m^n \circ \Phi(V) = \Phi(V)$$

y como Ψ^{-1}, $\imath_m^n$ *y* Φ son homeomorfismos sobre la vecindad V. Por tanto

$$V \cong \Phi(V)$$

Y así el Corolario 3.2.2 está demostrado. ■

Proposiciòn 3.2.4 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades, sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(q)$$

si la sucesión corta:

$$\mathcal{T}_p\mathcal{V} \xrightarrow{d\Phi} \mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W} \to 0$$

es una sucesión exacta y si

$$\Psi : (\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}, W, b)$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$, entonces, la familia de funciones

$$\{ \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m \}$$

constituye una parte de un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$.

Demostración. Como por hipótesis la familia de funciones

$$\{y_1, y_2, ..., y_m\} \in \mathcal{F}(\Phi(p))$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$ la Proposición 3.2.2 afirma que el sistema de diferenciales

$$\{ dy_{1,p}, dy_{2,p}, ..., dy_{m,p} \}$$

constituyen una base para el espacio cotangente $\mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}^*$ dual del espacio tangente $\mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}$ a la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$ y como la hipótesis, de acuerdo al **Lema 2A**, implica que la sucesión dual:

$$0 \to \mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}^* \xrightarrow{\Phi^*} \mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$$

es una sucesión exacta, se obtiene que la familia de funciones

$$\{ \Phi^* dy_{1,p}, \Phi^* dy_{2,p}, ..., \Phi^* dy_{m,p} \}$$

de formas lineales del espacio cotangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$ son linealmente independientes y como Φ^* es la aplicación dual de la diferencial $d\Phi$ se tiene que

$$\Phi^* dy_i = d(\Phi_* y_i) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

lo cual permite expresar a la familia de formas lineales del espacio cotangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}^*$ como:

$$\{ d(\Phi_* y_1), d(\Phi_* y_2), ..., d(\Phi_* y_m) \}.$$

Por consiguiente, esta familia de diferenciales linealmente independientes se puede completar a una base

$$\{ d(\Phi_* y_1), d(\Phi_* y_2), ..., d(\Phi_* y_m), dz_{m+1}, dz_{m+2}, ..., dz_n \}$$

del espacio dual $\mathcal{T}_{\Phi(p)}\mathcal{W}^*$ y si ahora tomamos en cuanta el Corolario 3.2.1 obtenemos que la familia de funciones

$$\{ \Phi_* y_1, \Phi_* y_2, ..., \Phi_* y_m, z_{m+1}, ..., z_n \}$$

forman un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Y así la Proposición 3.2.4 está demostrada. ■

Corolario 3.2.3 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades, sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(q)$$

si la sucesión:

$$T_p\mathcal{V} \xrightarrow{d\Phi_p} T_{\Phi(p)}\mathcal{W} \to 0$$

es una sucesión corta exacta y si

$$\Psi : (\ \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}\ , W, b\ )$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$. Entonces, la imagen bajo Φ de cualquier vecindad del punto p de la variedad $\mathcal{V}$ cubre a una vecindad del punto $\Phi(p)$ en la variedad $\mathcal{W}$.

Demostración. Sea U una vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$ y sea $W = \Phi(U)$ su imagen bajo Φ en la variedad $\mathcal{W}$:

$$\Phi(p) \in W \subset \mathcal{W}$$

Se afirma que W es una vecindad del punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$. En efecto, de acuerdo con la Proposición 2.2.1 la familia de funciones

$$\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m \in \mathcal{F}(p)$$

se puede completar a un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m\}, V, a\ )$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. La Proposición 2.2.1 afirma que existe una vecindad cúbica V del punto p, con respecto a este sistema de coordenadas, contenida en la vecindad U:

$$p \in V \subset U$$

Como en particular Φ es un mapeo continuo, la vecindad cúbica V se puede tener, de tal suerte que se tenga $\Phi(V) \subset W$. Si ahora consideramos la proyección:

$$\rho^n_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definida por la correspondencia

$$x = (x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) \mapsto \rho^n_m(x) = (x_1, ..., x_m)$$

y si calculamos para todo punto $q \in V$:

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1} \circ \rho^n_m \circ \varphi(q) &= \Psi^{-1} \circ \rho^n_m(\Phi_* y_1(q), ..., \Phi_* y_m(q), \Phi_* y_{m+1}(q), ..., \Phi_* y_n(q)) \\
&= \Psi^{-1}(\Phi_* y_1(q), \Phi_* y_2(q), ..., \Phi_* y_m(q)) \\
&= \Psi^{-1}(y_1 \circ \Phi(q), y_2 \circ \Phi(q), ..., y_m \circ \Phi(q)) \\
&= \Psi^{-1}(y_1(\Phi(q)), y_2(\Phi(q)), ..., y_m(\Phi(q))) \\
&= \Psi^{-1}\, \Psi(\Phi(q)) \\
&= \Phi(q)
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\Psi^{-1} \circ \rho^n_m \circ \varphi(q) = \Phi(q) \quad \textit{para toda} \quad q \in V$$

es decir

$$\Psi^{-1} \circ \rho^n_m \circ \varphi(V) = \Psi(V).$$

Por consiguiente:

$$\Phi(V) \subset W.$$

y así el Corolario 3.2.3 está demostrado. ■

Proposición 3.2.5 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades y sea Φ una aplicación analítica de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definida por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

Si la diferencial $d\Phi_r$ de la aplicación Φ se anula en todo punto $r \in \mathcal{V}$:

$$d\Phi_r = 0 \ \textit{para toda} \ r \in \mathcal{V}.$$

Entonces, la aplicación Φ es constante (es decir, Φ aplica a la variedad $\mathcal{V}$ en un sólo punto de $\mathcal{W}$).

Demostración. Sea q un punto fijo pero arbitrario de la imagen de Φ:

$$q \in Im(\Phi)$$

como en particular Φ es una aplicación continua $\Phi^{-1}(q)$ es un subconjunto cerrado de la variedad $\mathcal{V}$ y como

$$\mathcal{V} = \Phi^{-1}(q) \cup (\Phi^{-1}(q))^c$$

es suficiente para obtener la Proposición, demostrar la siguiente. Afirmación:

El conjunto $\Phi^{-1}(q)$ es un abierto en la variedad $\mathcal{V}$. En efecto, consideremos un sistema de coordenadas locales

$$\Psi : (\{y_1, y_2, ..., y_m\}, W, b)$$

sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$. En seguida, consideremos un punto fijo pero arbitrario p del conjunto $\Phi^{-1}(q)$: $p \in \Phi^{-1}(q)$ y un sistema de coordenadas locales

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, tal que, $\Phi(V) \subset \mathcal{W}$.

Sean $X_{1,p}, X_{2,p}, ..., X_{m,p}$ m vectores tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$:

$$X_{1,p}, X_{2,p}, ..., X_{m,p} \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$$

definidos por las relaciones

$$X_{i,p}\, x_j = \delta_{i,j} \qquad (1 \leq i, j \leq m)$$

De acuerdo con el Teorema 3.1.1, podemos escribir

$$\begin{aligned} d\Phi_p(X_{i,p}(y_j)) &= \sum_{j=1}^{m} d\Phi_p(X_{i,p})(y_j)\frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= d\Phi_p X_{i,p}(y_j) \end{aligned}$$

por consiguiente

$$d\Phi_p(X_{i,p})\, y_j = d\Phi_p(X_{i,p})(y_j) = X_{i,p}(\Phi_*\, y_j) \qquad (1 \leq i, j \leq m).$$

Si ahora tomamos en cuenta la hipótesis obtenemos que las derivadas parciales de las funciones

$$\Phi_*\, y_j = F_j(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (1 \leq j \leq m)$$

son nulas
$$\frac{\partial \Phi_* y_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (1 \le i \le n) \qquad (1 \le j \le m)$$
lo cual implica que las funciones $\Phi_* y_j$ son constantes
$$\Phi_* y_j = y_j \circ \Phi = \ \textit{constante}$$
y como en particular
$$y_j(\Phi(p)) = y_j(q) \qquad (1 \le j \le m)$$
se obtiene
$$y_j(\Phi(r)) = y_j(q) \ \ \textit{para toda} \ \ r \in \mathcal{V}.$$
Por consiguiente:
$$\begin{aligned} \Psi(\Phi(r)) &= (y_1(\Phi(r)), y_2(\Phi(r)), \ldots, y_m(\Phi(r))) \\ &= (y_1(q), y_2(q), \ldots, y_m(q)) \\ &= \Psi(q) \end{aligned}$$
Lo cual implica
$$\Phi(r) = q \ \ \textit{para toda} \ \ r \in \mathcal{V}.$$
Por tanto
$$\Phi(V) = q$$
o lo que es lo mismo
$$V \subset \Phi^{-1}(q)$$

Esto último significa que $\Phi^{-1}(q)$ es una vecindad cúbica del punto p, y como este punto p se eligió arbitrariamente, se obtiene que $\Phi^{-1}(q)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{V}$. Por otro lado, $\Phi^{-1}(q)$ es un conjunto cerrado en la variedad $\mathcal{V}$. Por consiguiente, $\Phi^{-1}(q)$ es un conjunto cerrado y abierto, y si se toma en cuenta que $\mathcal{V}$ es una variedad conexa, se obtiene que
$$\Phi^{-1}(q) = \mathcal{V} \ \ , \textit{es decir}, \ \ \Phi(\mathcal{V}) = q.$$
Y así la afirmación está demostrada y con esto la Proposición 3.2.5. ∎

3.3 La Diferencial de una Función

Proposición 3.3.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Entonces, toda función f analítica en el punto p: $f \in \mathcal{F}(p)$, define un mapeo de la variedad $\mathcal{V}$ en la variedad $\mathbb{R}^1$:*

$$f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^1$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto f(q) \quad si \;\; q \in Dom(f)$$

analítico en el punto $p \in \mathcal{V}$.

Demostración. Sea f una función analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$: $f \in \mathcal{F}(p)$ fija pero arbitraria. Por definición, existe una vecindad abierta V del punto p: $V \in \vartheta(p)$ sobre la cual la función f está definida. Supongamos además que sobre V está definido un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Se afirma que el mapeo:

$$f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^1$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto f(q) \quad si \;\; q \in Dom(f)$$

es analítico en el punto $p \in \mathcal{V}$.

En efecto, como por hipótesis $f \in \mathcal{F}(p)$ esto implica en particular que la condición:

i) El mapeo f de la variedad $\mathcal{V}$ en la variedad $\mathbb{R}^1$ es un mapeo continuo en el punto $p \in \mathcal{V}$.

de la Definición 2.2.3 se satisface. Para verificar que la condición:

ii) La aplicación f_* de $\mathcal{F}(f(p))$ en $\mathcal{F}(p)$:

$$f_* : \mathcal{F}(f(p)) \to \mathcal{F}(p)$$

definida por la correspondencia:

$$g \mapsto f_* g = g \circ f$$

de la Definicion 2.2.3 tambien se satisface. Consideremos un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. No se pierde ninguna generalidad si se supone que la vecindad cúbica V del punto p coincide con la vecindad abierta sobre la cual la función $f \in \mathcal{F}(p)$ está definida. Sea

$$f = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

la expresión de la función f en el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ donde $F(u_1, u_2, ..., u_n)$ es una función con valores reales en n variables reales definida sobre un abierto U y analítica en el punto

$$\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)) \in U.$$

Sea

$$\{x\}$$

un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathbb{R}^1$ y sea g una función analítica en el punto $f(p) \in \mathbb{R}^1$: $g \in \mathcal{F}(f(p))$ fija pero arbitraria y cuya expresión en el sistema de coordenadas $\{x\}$ es

$$g = G(x)$$

donde $G(x)$ es una función con valores reales en una variable real, definida sobre un abierto U_1 del espacio $\mathbb{R}^1$: $U_1 \subset \mathbb{R}^1$ y analítica en el punto $(x(f(p))) \in U_1$. Como $g \in \mathcal{F}(f(p))$, existe una vecindad abierta W del punto

$$f(p) \in W \subset \vartheta(f(p))$$

sobre la cual la función g está definida. No se pierde ninguna generalidad si se supone que la vecindad abierta $f^{-1}(W)$ del punto $p \in \mathcal{V}$:

$$f^{-1}(W) \in \vartheta(p)$$

coincide con la vecindad cúbica V del punto p:

$$V = f^{-1}(W) \in \vartheta(p)$$

lo cual implica que la función $f_*g = g \circ f$ está definida sobre la vecindad $V \in \vartheta(p)$. Si ahora calculamos:

$$\begin{aligned} f_*g(p) &= g \circ f(p) \\ &= g(f(p)) \\ &= G(x(f(p))) \\ &= G(x(F(x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)))) \\ &= G \circ x \circ F(x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)) \end{aligned}$$

obtenemos

$$f_*g(p) = G \circ x \circ F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Un instante de reflexión y podemos concluir que la expresión de la función f_*g es

$$f_*g = G \circ x \circ F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

en el sistema de coordenadas $\{x\}$, donde $G \circ x \circ F$ es una función con valores reales en n variables reales definida en un abierto U_2 del espacio $\mathbb{R}^n$: $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ y analítica en el punto:

$$\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p))$$

Por consiguiente

$$f_*g \in \mathcal{F}(f(p))$$

y como la función g se eligió arbitrariamente en la clase de funciones $\mathcal{F}(f(p))$ se ha demostrado que

$$f_*g \in \mathcal{F}(f(p)) \subset \mathcal{F}(p)$$

Y así se ha demostrado que la condición *ii*) de la Definición 2.2.3 se satisface y con la misma la Proposición 3.3.1 está demostrada. ■

La Proposición 3.3.1 nos permite establecer la:

Definición 3.3.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sea f una función analítica en el punto p: $f \in \mathcal{F}(p)$. Por la diferencial de la función f en el punto $p \in \mathcal{V}$, se entenderá la diferencial del mapeo f de la variedad $\mathcal{V}$ en la variedad $\mathbb{R}^1$:*

$$f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^1$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto f(q) \quad si \quad q \in Dom(f).$$

analítico en el punto $p \in \mathcal{V}$. A la diferencial de la función $f \in \mathcal{F}(p)$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ se denota con el símbolo:

$$df_p$$

Observación 3.3.1 *De acuerdo con el concepto general de la diferencial de un mapeo analítico de una variedad $\mathcal{V}$ en otra variedad $\mathcal{W}$, la diferencial df_p de una función $f \in \mathcal{F}(p)$ en un punto $p \in \mathcal{V}$ es una transformación lineal del espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$ a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ en el espacio tangente $\mathcal{T}_{f(p)}\mathbb{R}^1$ a la variedad $\mathbb{R}^1$ en el punto $f(p) \in \mathbb{R}^1$:*

$$df_p : \mathcal{T}_p\mathcal{V} \to \mathcal{T}_{f(p)}\mathbb{R}^1$$

definida por la correspondencia

$$L \mapsto df_p(L)$$

Sea $\{x\}$ un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathbb{R}^1$. Como la variedad $\mathbb{R}^1$ es de dimensión igual a 1:

$$Dim(\mathcal{T}_{f(p)}\mathbb{R}^1) = 1$$

el vector $X_{f(p)}$ tangente a la variedad $\mathbb{R}^1$ en el punto $f(p) \in \mathbb{R}^1$:

$$X_{f(p)} \in \mathcal{T}_{f(p)}\mathbb{R}^1$$

definido por la relación

$$X_{f(p)} \cdot x = 1$$

genera al espacio tangente $\mathcal{T}_{f(p)}\mathbb{R}^1$:

$$\mathcal{T}_{f(p)}\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}X_{f(p)}$$

si identificamos al vector tangente $X_{f(p)}$ con el número real 1:

$$X_{f(p)} = 1$$

obtenemos la identificación del espacio tangente $\mathcal{T}_{f(p)}\mathbb{R}^1$ a la variedad $\mathbb{R}^1$ en el punto $f(p) \in \mathbb{R}^1$ con el espacio $\mathbb{R}$ de los números reales:

$$\mathcal{T}_{f(p)}\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}.$$

Esta identificación nos permite demostrar la:

Proposición 3.3.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sea f una función analítica en el punto p: $f \in \mathcal{F}(p)$. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones:*

i) *La diferencial df de la función f en el punto $p \in \mathcal{V}$ satisface la siguiente condición:*

$$df_p L = L(f) \quad \textit{para todo } L \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}.$$

ii) *La diferencial df de la función f en el punto $p \in \mathcal{V}$ es una forma lineal definida sobre el espacio tangente $\mathcal{T}_p\mathcal{V}$.*

Demostración. Sea L un vector tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, fijo pero arbitrario. El vector $df_p L$ tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $q = f(p) \in \mathbb{R}^1$:

$$df_p L \in \mathcal{T}_q \mathbb{R}^1 .$$

cuyo símbolo en el sistema de coordenadas $\{x\}$ es:

$$df_p\, L = df_p\, L(x) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Si ahora tomamos en cuenta la identificación establecida a saber:

$$\frac{\partial}{\partial x} = X_q = 1$$

se obtiene la identificación:

$$1) \qquad df_p\, L = df_p\, L\, x$$

Por otro lado, si consideramos un sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ y si calculamos:

$$\begin{aligned}
df_p\, L_p\, x_i &= L_p\, f_*\, x_i \\
&= L_p\, x_i \circ f \\
&= \sum_{i=1}^{n} L_p(x_i) \frac{\partial x \circ f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} L_p(x_i) \frac{\partial x}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} L_p(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= L_p(f)
\end{aligned}$$

obtenemos

$$2) \qquad df_p\, L\, x = L(f)$$

las igualdades 1) y 2) implican que:

$$df_p\, L = L(f)$$

en otras palabras, la condición $i)$ se satisface.

Consideremos ahora la aplicación:

$$df_p : \mathcal{T}_p\mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$L \mapsto df_p(L) = L(f)$$

se verifica sin ninguna dificultad que la aplicación df_p es una forma lineal. En otras palabras, la condición $ii)$ está demostrada. Y así la Proposición 3.3.2 está demostrada. ■

Capítulo 4

Campos Vectoriales

4.1 Campos Vectoriales

Definición 4.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Por un* **campo vectorial** *definido sobre la variedad $\mathcal{V}$, se entenderá una aplicación X de la variedad $\mathcal{V}$ en la unión ajena $\coprod_{q\in\mathcal{V}} \mathcal{T}_q\mathcal{V}$ de todos los espacios tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en todo punto $p \in \mathcal{V}$:*

$$X : \mathcal{V} \to \coprod_{q\in\mathcal{V}} \mathcal{T}_q\mathcal{V}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto X(q) = X_q$$

donde:
X_q es un vector tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$: $X_q \in \mathcal{T}_q\mathcal{V}$.

Definición 4.1.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sea X un campo vectorial definido sobre la variedad $\mathcal{V}$. Se dirá que X es un campo vectorial definido y analítico sobre la variedad $\mathcal{V}$, si para toda función f definida y analítica en todo punto de algún conjunto abierto U de la variedad $\mathcal{V}$: $U \subset \mathcal{V}$ la función:*

$$X\,f : V \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto X\,f(q) = X(q)\,f = X_q\,f$$

es una función analítica en todo punto del conjunto abierto U.

Proposiciòn 4.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea U una vecindad abierta de la variedad $\mathcal{V}$: $U \subset \mathcal{V}$ sobre la cual está definido un sistema de coordenadas*

$$\varphi : (\ \{x_1, x_2, ..., x_n\}\ , V, a\ ).$$

Si para todo punto $q \in U$ se consideran los vectores tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$:

$$X_1, X_2, ..., X_n \in \mathcal{T}_q\mathcal{V}$$

definidos por la relación:

$$X_i x_j = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Entonces, las aplicaciones X_i que asignan a todo punto $q \in U$ el vector $X_{i,q} \in \mathcal{T}_{i,q}\mathcal{V}$:

$$X_i : U \to \coprod_{q \in \mathcal{V}} \mathcal{T}_q\mathcal{V}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto X_i(q) = X_{i,q} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

definen n campos vectoriales analíticos sobre la vecindad abierta U; linealmente independientes en todo punto $q \in U$.

Demostración. El Teorema 3.1.1 implica que para todo punto $q \in U$ los vectores tangentes

$$X_{1,q}, X_{2,q}, ..., X_{n,q} \in \mathcal{T}_{i,j}\mathcal{V}$$

se pueden expresar en el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ como

$$X_{i,q} = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi(q)} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Por otro lado, si f es una función definida sobre la variedad $\mathcal{V}$ fija pero arbitraria y analítica sobre el abierto U, y si $q \in U$, en particular $f \in \mathcal{F}(q)$, esta función se puede expresar en función del sistema de coordenadas como

$$f = F(u_1, u_2, ..., u_n)$$

donde $F(u_1, u_2, ..., u_n)$ es una función en n variables reales definida en la vecindad del punto $\varphi(q)$ y analítica en el mismo punto. Un instante de reflexión y se ve que las funciones

$$X_{i,q}\, f = \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{\varphi(q)} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

definidas en la vecindad del punto $\varphi(q)$ son analíticas en el mismo punto. Por tanto, la correspondencia que asigna a todo punto $q \in U$ el valor

$$X_{i,q}(f) = \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{\varphi(q)} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

define una función analítica sobre el abierto U:

$$X_i f : U \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto X_i f(q) = X_i(q) f = X_{i,q}(f) = \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{\varphi(q)}$$

es analítica en el abierto U.

El Corolario del Teorema 3.1.1 nos asegura que para todo punto $q \in U$ los vectores tangentes $X_{1,q}, X_{2,q}, \ldots, X_{n,q} \in T_{i,q}\mathcal{V}$ son linealmente independientes. Y así la Proposición 4.1.1 está demostrada. ∎

Como para todo punto $q \in U$ y toda función $f \in \mathcal{F}(q)$ se tiene

$$X_i f(q) = X_i(q) f = X_{i,q} f = \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{\varphi(q)} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

llamaremos a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ el símbolo del campo vectorial X_i:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Proposición 4.1.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, sea U un conjunto abierto de la variedad $\mathcal{V}$: $U \subset \mathcal{V}$ y sea*

$$\varphi : (\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas locales sobre la variedad $\mathcal{V}$, cuya vecindad cúbica V cubre al conjunto abierto U: $U \subset V$. Entonces:

i) *Existe un sistema de n campos vectoriales $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ definidos y analíticos en todo punto del conjunto abierto U, tal que, el sistema de campos vectoriales*

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ forman una base del espacio tangente $T_q\mathcal{V}$ a la variedad $\mathcal{V}$ para todo punto $q \in U$.

ii) *Si X es otro campo vectorial definido sobre el conjunto abierto U, entonces*

$$X_q = \mathcal{A}_1(q)\,X_{1,q} + \mathcal{A}_2(q)\,X_{2,q} + \dots + \mathcal{A}_n(q)\,X_{n,q}$$

donde $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ son funciones definidas sobre todo punto del conjunto abierto U de la variedad $\mathcal{V}$.

iii) *X es un campo vectorial definido y analítico en todo punto del conjunto abierto U, si y solo si, las funciones $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ están definidas y son analíticas en todo punto del conjunto abierto U de la variedad $\mathcal{V}$.*

Demostración. Consideremos la aplicación:

$$X_i : U \to \coprod_{q \in \mathcal{V}} \mathcal{T}_q\mathcal{V}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto X_i(q) = X_{i,q}$$

con $X_q \subset \mathcal{T}_q\mathcal{V}$. Donde $X_{i,q}$ es la aplicación:

$$X_{i,q} : \mathcal{F}(q) \to \mathbb{R}$$

definida por la correspondencia

$$f \mapsto X_{i,q}f = \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_q \quad (1 \le i \le n)$$

y donde $f = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es la expresión de la función f en el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Es inmediato que el campo vectorial X_i $(1 \le i \le n)$ así definido es un campo vectorial definido y analítico en todo punto del conjunto abierto U de la variedad $\mathcal{V}$. Se afirma que para todo punto $q \in U$ el sistema de vectores

$$\{X_{1,q}, X_{2,q}, \dots, X_{n,q}\}$$

tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $q \in U$ son linealmente independientes. En efecto, consideremos la relación:

$$\lambda_1 X_{1,q} + \lambda_2 X_{2,q} + \dots + \lambda_n X_{n,q} = 0 \quad \textit{con} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

si calculamos:

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{i,q}\right) x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{i,q} x_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Por consiguiente, la afirmación está verificada. Por otro lado, como

$$dim(\mathcal{T}_q\mathcal{V}) = n$$

se obtiene que el sistema de vectores

$$\{X_{1,q}, X_{2,q}, ..., X_{n,q}\}$$

forman una base del espacio $\mathcal{T}_q\mathcal{V}$ para todo punto $q \in U$. Y así la propiedad $i)$ está demostrada.

Consideremos ahora otro campo vectorial X definido en todo punto q del conjunto abierto U: $q \in U$, lo cual implica que

$$X_q \in \mathcal{T}_q\mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad X_q = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(q) X_{i,q}$$

para todo punto $q \in U$. Por consiguiente

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(q),\ \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(q), ..., \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q)$$

son funciones definidas en todo punto q del conjunto abierto U: $q \in U$. Y así la propiedad $ii)$ está demostrada.

$\Rightarrow$) Si X es un campo vectorial definido y analítico en cada punto del conjunto abierto U. De acuerdo con la propiedad $ii)$ podemos escribir

$$X_q = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j(q) X_{j,q} \quad \Rightarrow \quad X_q\, x_i = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j\, X_{j,q}\, x_i$$

lo cual implica

$$X_q\, x_i = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j(q) \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

lo cual implica

$$X_q\, x_i = \mathcal{A}_i(q) \quad para\ toda \quad q \in U \quad (1 \leq i \leq n)$$

y como por hipótesis las funciones

$$X\, x_1, X\, x_2, ..., X\, x_n$$

son funciones definidas y analíticas en cada punto del conjunto abierto U, lo cual implica que las funciones

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n$$

están definidas y son analíticas en cada punto del conjunto abierto U. Es decir, la condición es necesaria.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, supongamos que la condición se satisface, es decir las funciones $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n$ están definidas y son analíticas en cada punto del abierto U. Sea f una función analítica fija pero arbitraria definida y analítica en cada punto del abierto U. La propiedad *ii*) nos permite escribir

$$X_q f = \mathcal{A}_1 X_{1,q} f + \mathcal{A}_2 X_{2,q} f + ... + \mathcal{A}_n X_{n,q} f \quad \textit{para todo} \quad q \in U.$$

De acuerdo con la propiedad *i*) las funciones

$$X_1 f(q) = X_{1,q} f \,, \; X_2 f(q) = X_{2,q} f \,, ..., \; X_n f(q) = X_{n,q} f$$

están definidas y son analíticas en cada punto q del abierto U: $q \in U$. Por consiguiente la hipótesis implica que la función

$$X f(q) = X_q f$$

está definida y es analítica en cada punto q del abierto U. Como la función analítica f se eligió arbitrariamente. Por consiguiente, el campo vectorial X está definido y es analítico en cada punto del abierto U y como el punto q se eligió arbitrariamente en U. Por tanto, X es un campo vectorial analítico sobre U. Así la condición *iii*) está verificada y con esto la Proposición 4.1.2 está demostrada. ■

Observación 4.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, si X y Y son campos vectoriales definidos sobre $\mathcal{V}$. Entonces, la operación*

$$X Y = X \circ Y$$

en general no es un campo vectorial sobre la variedad $\mathcal{V}$.

En efecto, sea $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Sea

$$\varphi : (\{x_1, x_2, ..., x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, sea f una función analítica en el punto p: $f \in \mathcal{F}(p)$ y sean X y Y campos vectoriales sobre $\mathcal{V}$ cuyos símbolos en el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ son

$$X = \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} \quad y \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_{j_0}} \quad i_0 \neq j_0$$

si calculamos

$$Y \circ X\, f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_p$$

Ahora consideremos a las funciones $f, g \in \mathcal{F}(p)$ y si calculamos nuevamente

$$\begin{aligned}(X\,Y)_p(f+g) &= X_p(Y_p(f+g)) \\ &= X_p(Y_p\, f + Y_p\, g) \\ &= X_p Y_p\, f + X_p Y_p\, g \\ &= 0\end{aligned}$$

es decir, la operación $X\,Y$ no es lineal. Por consiguiente, la aperación $X\,Y$ no es un vector tangente en la variedad $\mathcal{V}$. ■

Observación 4.1.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, si X y Y son campos vectoriales definidos sobre $\mathcal{V}$. Entonces, la operación*

$$\mathcal{N} = Y\,X - X\,Y$$

es un vector tangente analítico sobre la variedad $\mathcal{V}$.

En efecto, sea p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$, sea f una función analítica en el punto p: $f \in \mathcal{F}(p)$ y sean X y Y campos vectoriales analíticos sobre la variedad $\mathcal{V}$ cuyos símbolos en el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ son

$$X_p\, f = \sum_{i_0=1}^{n} X_p\, x_{i_0} \frac{\partial f}{\partial x_{i_0}} \quad y \quad Y_p\, f = \sum_{j_0=1}^{n} Y_p\, x_{j_0} \frac{\partial f}{\partial x_{j_0}} \quad i_0 \neq j_0$$

si calculamos

$$(Y\,X)_p\, f \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n} Y_p\, x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_p\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{B}_j \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{B}_j \mathcal{A}_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}
\end{aligned}
$$

donde

$$\mathcal{A}_i = X_p\, x_i \quad y \quad \mathcal{B}_j = Y_p\, x_j$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
(X\,Y)_p f &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_i \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_i \mathcal{B}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{N} f)_p &= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{B}_j \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{B}_j \mathcal{A}_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_i \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_i \mathcal{B}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{B}_j \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_i \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\mathcal{B}_j \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_j} - \mathcal{A}_i \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial x_j}\right)_p \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$(\mathcal{N} f)_p = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\mathcal{B}_j \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_i} - \mathcal{A}_i \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_p$$

es decir

$$(Y\,X - X\,Y)_p \in \mathcal{T}_q \mathcal{V}$$

en otras palabras

$$\mathcal{N} = Y\,X - X\,Y$$

es un campo vectorial analítico sobre la variedad $\mathcal{V}$. ■

Definición 4.1.3 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, si X y Y son campos vectoriales definidos sobre $\mathcal{V}$. Entonces, el campo vectorial*

$$\mathcal{N} = YX - XY$$

lo denotaremos con el símbolo

$$[X, Y] = YX - XY$$

y se le llama el **paréntesis ó corchete de Lie.**

Definición 4.1.4 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sean X y Y campos vectoriales definidos sobre $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ es el conjunto de todos los campos vectoriales definidos sobre $\mathcal{V}$ y si $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ está dotado de la operación*

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}) \times \mathcal{L}(\mathcal{V}) \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$$

definida por la correspondencia

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

con las siguientes propiedades:

i) $[X, Y]$ *es bilineal, es decir:*

a) $[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$ *para todos* $X_1, X_2, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$.

b) $[X, Y_1 + Y_2] = [X, Y_1] + [X, Y_2]$ *para todos* $X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$.

ii) $[X, X] = 0$ *para todo* $X \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$.

iii) *La relación de Jacobi:*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \text{para todos} \quad X, Y, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{V}).$$

Si se cumplen las propiedades anteriores se dirá que $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ es un **álgebra de Lie.**

Proposición 4.1.3 *El espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ sobre los números reales $\mathbb{R}$ de todos los campos vectoriales analíticos sobre la variedad $\mathcal{V}$ dotado de la aperación*

$$\pounds : \mathcal{L}(\mathcal{V}) \times \mathcal{L}(\mathcal{V}) \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$$

definida por la correspondencia

$$(X, Y) \mapsto \pounds(X, Y) = [X, Y]$$

es un álgebra de Lie.

Demostración.
i) Sean X_1, X_2, Y campos vectoriales analiticos sobre $\mathcal{V}$: $X_1, X_2, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, sea f una función analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$: $f \in \mathcal{F}(p)$, si utilizamos la definición de campo vectorial analítico y si calculamos para todo $p \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
[X_1 + X_2, Y]\, f(p) &= Y(X_1 + X_2)\, f(p) - (X_1 + X_2) Y\, f(p) \\
&= Y(X_1\, f(p)) + Y(X_2\, f(p)) - X_1(Y\, f(p)) - X_2(Y\, f(p)) \\
&= Y \circ X_1 f(p) + Y \circ X_2 f(p) - X_1 \circ Y f(p) - X_2 \circ Y f(p) \\
&= (Y \circ X_1 - X_1 \circ Y)\, f(p) + (Y \circ X_2 - X_2 \circ Y)\, f(p) \\
&= (Y\, X_1 - X_1\, Y)\, f(p) + (Y\, X_2 - X_2\, Y)\, f(p) \\
&= [X_1, Y]\, f(p) + [X_2, Y]\, f(p)
\end{aligned}$$

es decir
$$[X_1 + X_2, Y]\, f(p) = [X_1, Y]\, f(p) + [X_2, Y]\, f(p)$$
y como f se eligió arbitrariamente en $\mathcal{F}(p)$ se tiene que:

a) $[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$ para todos $X_1, X_2, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Por otro lado, sean $X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ y sea f una función analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$: $f \in \mathcal{F}(p)$, utilizando nuevamente la definición de campo vectorial analítico y si calculamos para todo punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
[X, Y_1 + Y_2]\, f(p) &= (Y_1 + Y_2)\, X\, f(p) - X\,(Y_1 + Y_2)\, f(p) \\
&= Y_1(X\, f(p)) + Y_2(X\, f(p)) - X(Y_1\, f(p)) - X(Y_2\, f(p)) \\
&= Y_1 \circ X f(p) + Y_2 \circ X f(p) - X \circ Y_1 f(p) - X \circ Y_2 f(p) \\
&= (Y_1 \circ X - X \circ Y_1)\, f(p) + (Y_2 \circ X - X \circ Y_2)\, f(p) \\
&= (Y_1\, X - X\, Y_1)\, f(p) + (Y_2\, X - X\, Y_2)\, f(p) \\
&= [X, Y_1]\, f(p) + [X, Y_2]\, f(p)
\end{aligned}$$

es decir
$$[X, Y_1 + Y_2]\, f(p) = [X, Y_1]\, f(p) + [X, Y_2]\, f(p)$$
y como f se eligió arbitrariamente en $\mathcal{F}(p)$. Por tanto:

b) $[X, Y_1 + Y_2] = [X, Y_1] + [X, Y_2]$ para todos $X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Por consiguiente **a)** y **b)** implica que la operación $\mathcal{L}$ es bilineal, y así la condición *i*) está demostrada.
ii) Sea X un campo vectorial sobre la variedad $\mathcal{V}$: $X \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, si calculamos

$$[X, X] = X\, X - X\, X = 0 \quad \Rightarrow \quad [X, X] = 0 \quad \textit{para todo} \quad X \in \mathcal{L}(\mathcal{V}).$$

por tanto 1) y 2) implica que

$$[X,Y]+[Y,X]=0 \quad \Rightarrow \quad [Y,X]=-[X,Y]$$

es decir, el paréntesis de Lie es antisimétrico. Y así el Corolario 4.1.1 está demostrado. ■

Definición 4.1.5 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades y sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:.*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(q)$$

Si X y Y son campos vectoriales sobre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ respectivamente, entonces se dirá que X y Y **están Φ relacionados** *si para todo punto $p \in \mathcal{V}$, se satisface la relación:*

$$d\Phi_p X_p = Y_{\Phi(q)}$$

o también lo denotaremos con el símbolo

$$X \underset{\Phi}{\sim} Y$$

Las primeras consecuencias de está definición están contenidas en el siguiente:

Lema 4.1.1 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades, sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(q)$$

y sean X y Y campos vectoriales analíticos definidos sobre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ respectivamente. Si

$$X \underset{\Phi}{\sim} Y$$

entonces se cumplen las siguientes condiciones:

i) $Y_{\Phi(q)} \in Im(d\Phi_q)$ *para todo punto* $q \in \mathcal{V}$.

ii) *Si* Y *es un campo vectorial definido y analítico sobre la variedad* $\mathcal{W}$, *entonces, para todo punto* $p \in \mathcal{V}$ *y toda función* f *analítica en el punto* $\Phi(p) \in \mathcal{W}$: $f \in \mathcal{F}(\Phi(p))$ *existe una vecindad* V *del punto* $p \in \mathcal{V}$ *sobre la cual las funciones:*

$$X\,\Phi_* f \qquad y \qquad \Phi_* Y f$$

coinciden:

$$X\,\Phi_* f = \Phi_* Y f \quad \textit{sobre la vecindad } V.$$

Además la función

$$X\Phi_* f$$

está definida y es analítica en todo punto del conjunto abierto V.

iii) *Si* Φ *es un mapeo regular dondequiera y si* X' *es otro campo vectorial definido y analítico sobre la variedad* $\mathcal{V}$, *tal que*

$$X' \underset{\Phi}{\sim} Y \;\Rightarrow\; X' = X.$$

Demostración. Sea q un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $q \in \mathcal{V}$, fijo pero arbitrario. Por hipótesis

$$Y_{\Phi(q)} = d\Phi_q\, X_q \in d\Phi_q(\mathcal{T}_q\mathcal{V}) = Im(d\Phi_q)$$

es decir

$$Y_{\Phi(q)} \in Im(d\Phi_q)$$

y como el punto q se eligió arbitrariamente en la variedad $\mathcal{V}$, se tiene verificada la condición *i*).

Analogamente, para verificar la propiedad *ii*) consideremos un punto q de la variedad $\mathcal{V}$: $q \in \mathcal{V}$ fijo pero arbitrario y una función f analítica en el punto $\Phi(q)$ de la variedad $\mathcal{W}$: $f \in \mathcal{F}(\Phi(q))$. Por definición existe una vecindad abierta W del punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$, vecindad que podemos elegir suficientemente pequeña como para que la función f esté definida y sea analítica en todo punto del conjunto abierto W. Se afirma que la función:

$$\Phi_* Y f$$

está definida y es analítica en todo punto de la vecindad abierta $V = F^{-1}(W)$ del punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\Phi_* Y f \in \mathcal{F}(q) \quad \textit{para todo punto } q \in V.$$

En efecto para todo punto $q \in V$ se tiene que

$$q \in V \quad \Rightarrow \quad \Phi(q) \subset W \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{F}(\Phi(q))$$

y como por hipótesis Y es un campo vectorial definido y analítico sobre la variedad $\mathcal{W}$ podemos escribir

$$Y f \in \mathcal{F}(\Phi(q))$$

si además tomamos en cuenta que Φ es un mapeo analítico se obtiene

$$1) \qquad \Phi_* Y f \in \mathcal{F}(q) \quad \textit{para toda} \quad q \in V$$

con lo cual la afirmación está demostrada. Si ahora tomamos en cuenta la hipótesis:

$$X \underset{\Phi}{\sim} Y$$

y calculamos para todo punto $q \in V$:

$$\begin{aligned} X\,\Phi_* f(q) &= X_q\,\Phi_* f \\ &= d\Phi_q\,X_q\,f \\ &= Y_{\Phi(q)}\,f \\ &= Y\,f(\Phi(q)) \\ &= Y\,f \circ \Phi(q) \\ &= \Phi_* Y\,f(q) \end{aligned}$$

obtenemos

$$X\Phi_* f(q) = \Phi_* Y f(q) \quad \textit{para todo} \quad q \in V$$

es decir

$$2) \qquad X\,\Phi_* f = \Phi_* Y\,f \quad \textit{sobre la vecindad} \quad V.$$

La afirmación 1) y la igualdad 2) implican que la función:

$$X\,\Phi_* f$$

está definida y es analítica en todo punto de la vecindad abierta V de la variedad $\mathcal{V}$. Como el punto p y la función f se eligieron arbitrariamente en la variedad $\mathcal{V}$ y en la clase de funciones $\mathcal{F}(\Phi(p))$ respectivamente, la propiedad *ii*) está demostrada.

Supongamos ahora que se tiene otro campo vectorial X' definido y analítico sobre la variedad $\mathcal{V}$, tal que

$$X' \underset{\Phi}{\sim} Y \quad \Rightarrow \quad d\Phi_q X'_q = Y_{\Phi(q)} \;\; \textit{para toda} \;\; q \in \mathcal{V}$$

lo cual implica

$$d\Phi_q X'_q = d\Phi_q X_q \quad \Rightarrow \quad d\Phi_q(X'_q - X_q) = 0$$

y como por hipótesis la diferencial $d\Phi_q$ es una transformación lineal inyectiva en todo punto $q \in \mathcal{V}$ se obtiene

$$X'_q = X_q \;\; \textit{para todo} \;\; q \in \mathcal{V}.$$

Por consiguiente

$$X' = X$$

y así la propiedad *iii*) está verificada y con la misma el Lema 4.1.1 está demostrado. ■

Proposición 4.1.4 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ varidades y sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p)$$

regular dondequiera y sea Y un campo vectorial definido y analítico sobre la variedad $\mathcal{W}$, tal que

$$Y_{\Phi(p)} \in Im(\, d\Phi_p\,) \;\; \textit{para todo} \;\; p \in \mathcal{V}.$$

Entonces, existe uno y sólo un campo vectorial X definido y analítico sobre la variedad $\mathcal{V}$, $\Phi-$relacionado con Y:

$$X \underset{\Phi}{\sim} Y.$$

Demostración. La hipótesis implica la existencia de un vector X_p tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$: $X_p \in \mathcal{T}_p\mathcal{V}$, tal que

$$d\Phi_p X_p = Y_{\Phi(p)} \;\; \textit{para todo} \;\; p \in \mathcal{V}.$$

lo cual implica que el campo vectorial:

$$X : \mathcal{V} \to \coprod_{p\in\mathcal{V}} \mathcal{T}_p\mathcal{V}$$

definido por la correspondencia

$$p \mapsto X(p) = X_p$$

está Φ relacionado con Y:

$$X \underset{\Phi}{\sim} Y.$$

Se afirma, que el campo vectorial X así definido es un campo vectorial definido y analítico sobre la variedad $\mathcal{V}$. En efecto, sea f una función definida y analítica sobre todo punto q de algún conjunto abierto U de la variedad $\mathcal{V}$, fijo pero arbitrario. Consideremos un punto p del conjunto abierto U: $p \in U$ y sea

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\Phi(p) \in \mathcal{W}$. La Proposición 3.2.3 , afirma que de la familia $\mathcal{F}(p)$ de funciones analíticas en el punto $p \in \mathcal{V}$:

$$\Phi_* y_1, \Phi_* y_2, \ldots, \Phi_* y_m \in \mathcal{F}(p)$$

se puede extraer un sistema de coordenadas

$$\{\Phi_*\, y_{i_1}, \Phi_*\, y_{i_2}, \ldots, \Phi_*\, y_{i_m}\}$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$. Como por hipótesis Y es un campo vectorial definido y analítico y por definición:

$$X \underset{\Phi}{\sim} Y$$

la propiedad *ii*) del Lema 4.1.1 implica que existe una vecindad abierta V del punto $p \in \mathcal{V}$, que podemos suponer sin perdida de generalidad que coincide con el conjunto abierto U:

$$U = V$$

sobre el cual, las funciones

$$X\Phi_* y_{i_1}\,,\; X\Phi_* y_{i_2}\,, \ldots, X\Phi_* y_{i_m}$$

están definidas y son analíticas en todo punto $q \in U$. Lo cual implica, de acuerdo con la Proposición 4.1.2, que la función

$$Xf$$

está definida y es analítica en todo punto q del conjunto abierto U. Como la función analítica f se eligió arbitrariamente se ha demostrado que el campo vectorial X está definido y es analítico sobre la variedad $\mathcal{V}$. Y así la Proposición 4.1.4 está demostrada. ■

A

Apéndice

Lema A.0.2 *Sean V y W espacios vectoriales reales de dimensión finita:*

$$dim(V) = m \quad y \quad dim(W) = m$$

y sean V^* y W^* sus espacios duales correspondientes. Si la sucesión:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\Phi} W$$

es exacta, entonces la sucesión dual:

$$0 \longleftarrow V^* \xleftarrow{\Phi^*} W^*$$

también es exacta. Además si

$$\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$$

es una base del espacio dual, entonces del sistema de vectores

$$\{\Phi^*\omega_1, \Phi^*\omega_2, ..., \Phi^*\omega_m\}$$

del espacio W^* se puede extraer una base para el espacio V^* dual del espacio V.

Demostración. Para demostrar la primera parte del lema es suficiente verificar que la aplicación lineal Φ^* (dual de Φ) es de rango igual a n. Esta verificación se obtiene de la siguiente manera, sean

$$\{e_1, e_2, ..., e_n\} \quad y \quad \{f_1, f_2, ..., f_n\}$$

un par de bases "*mutuamente dual*" :

$$\left\langle f_j, e_i \right\rangle = \left\langle e_i, f_j \right\rangle = \delta_{ij} \qquad (1 \le i \le m)$$

y sea

$$\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$$

una base del espacio dual W^*, y sea

$$\Phi^* \omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j \qquad (1 \le i \le m).$$

Se afirma que la $m \times n$ matriz (a_{ij}) es de rango igual a n:

$$ran(a_{ij}) = n$$

En efecto, supongamos que existe una relación no trivial entre las columnas de la matriz (a_{ij}) a saber:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix} = 0 \qquad \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} = 0 \qquad (1 \le i \le m)$$

Si definimos el vector

$$L = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$$

en el espacio V y si calculamos

$$\begin{aligned} \omega_i \Phi L &= \Phi^* \omega_i L = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi \omega_i e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ij} f_j \Big) e_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_j e_k \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} \end{aligned}$$

se obtiene

$$\omega_i \Phi L = 0 \qquad (1 \leq i \leq m)$$

si ahora se toma en cuenta la dualidad se obtiene

$$\Phi L = 0$$

y como por hipótesis Φ es inyectiva, se obtiene que $L = 0$ y por consiguiente

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$$

Con esto último la afirmación está demostrada y con la misma se tiene que efectivamente el rango de Φ es n. Y como esto último implica que Φ^* es una aplicación lineal suprayectiva, y la primera parte del Lema 1 está demostrada. Para demostrar la segunda parte se procede como sigue: se ha demostrado que el rango de Φ es igual a n o lo que es lo mismo que la matriz asociada a (a_{ij}) es de rango igual a n, y como por hipótesis el sistema de vectores

$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$$

es una base del espacio W^*, la $m \times n$ matriz del sistema de ecuaciones

$$\Phi^* \omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j \qquad (1 \leq i \leq m)$$

es de

$$ran(a_{ij}) = n$$

Esto último implica la existencia de un determinante, de menor grado que n de la $m \times n$ matriz (a_{ij}) distinto de cero:

$$det(a_{i_k j}) \neq 0 \qquad (1 \leq k, j \leq n)$$

de tal suerte que los vectores

$$\Phi^* \omega_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_k j} f_j \qquad (1 \leq k \leq n)$$

forman una base del espacio V^*. Esta última afirmación se demuestra como sigue; supongamos que se tiene una relación no trivial

$$\lambda_1 \Phi^* \omega_{i_1} + \lambda_2 \Phi^* \omega_{i_2} + \ldots + \lambda_n \Phi^* \omega_{i_n} = 0$$

y si calculamos

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi^* \omega_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{j=1}^{n} a_{i_k j} f_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k j} \right) f_j$$

obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_k a_{i_k j} = 0 \qquad (1 \leq k \leq n)$$

o equivalentemente

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_{i_k 1}, a_{i_k 2}, \ldots, a_{i_k n}) = 0$$

Ahora bien como el

$$det(a_{i_k j}) \neq 0$$

las hileras de la $m \times n$ matriz $(a_{i_k j})$ son linealmente independientes. Por consiguiente

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

y así la afirmación está demostrada y con la misma también la segunda parte del Lema 1 está demostrada. ∎

Lema A.0.3 *Sean V y W espacios vectoriales reales de dimensión finita:*

$$dim(V) = n \quad y \quad dim(W) = m$$

y sean V^* y W^* sus espacios duales correspondientes. Si la sucesión:

$$V \xrightarrow{\Phi} W \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces la sucesión dual:

$$V^* \xleftarrow{\Phi^*} W^* \longleftarrow 0$$

también es exacta.

Demostración. Para demostrar el lema 2 es suficiente verificar que la aplicación lineal Ψ^* (dual de Ψ) es de rango igual a m. Esta verificación se obtiene de la siguiente manera, sea

$$\{W_1, W_2, ..., W_m\} \quad y \quad \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$$

un par de bases mutuamente dual

$$\left\langle \omega_i, W_j \right\rangle = \left\langle W_j, \omega_i \right\rangle = \delta_{ij} \qquad (1 \leq i \leq m)$$

del espacio W y sea

$$\Psi^* \omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, f_j \qquad (1 \leq i \leq m)$$

se afirma que la $m \times n$ matriz (a_{ij}) es de rango igual a n:

$$ran(a_{ij}) = n$$

en efecto supongamos que existe una relación no trivial entre las hileras de la matriz (a_{ij}), a saber

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, a_{ij} = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)$$

como por hipótesis Ψ es suprayectiva, existe un sistema de vectores:

$$\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m \in V \quad tales\ que \quad \omega_i\, \nu_j = W_i \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Si ahora calculamos

$$\Psi^* \omega_i\, \nu_j = \omega_i\, \Psi\, \nu_j = \omega_i\, W_j = \delta_{ij}$$

entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \Psi\, \omega_i\, \nu_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, f_j \Big) \nu_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, a_{ij} \Big) f_j\, \nu_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$$

y así la afirmación está demostrada y con esta se obtiene que efectivamente el rango de Ψ es n:

$$ran(\Psi) = n$$

Y así el Lema 2 está demostrado. ∎

B

Bibliografía

1) C. Chevaley. Theory of Lie Groups.

2) Sigundur Helgason. Groups and Geometric Analysis.

3) Arthur A. Sagle. Introduccion to Lie Groups and Algebras.

4) James R. Munkres. Analysis on Manifolds.

5) Notas del curso de maestria de "Grupos de Lie I" impartido por el Dr. Félix Recillas Juárez .