00384
2
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

"SOBRE LOS VECTORES DIMENSION DE MODULOS INESCINDIBLES EN ALGEBRAS MANSAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

GILDA ROSA BOLAÑOS EVIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ ANTONIO DE LA PEÑA MENA

1996

INTRODUCCION

Sea k un campo algebraicamente cerrado y Λ una k-álgebra de dimensión finita. Uno de los propósitos de la teoría de representaciones es la de describir la categoría modΛ de Λ-módulos izquierdos de dimensión finita.

El teorema de Krull-Schmidt nos asegura que cualquier Λ-módulo de dimensión finita se puede descomponer en suma directa finita de Λ-módulos inescindibles y esta descomposición es única hasta isomorfismo, salvo permutaciones de los factores. En modΛ existe sólo un número finito de Λ-módulos simples.

En este trabajo las álgebras serán básicas e indescomponibles. Si Λ es una de estas álgebras, existe un carcaj finito y conexo Q con n vértices (donde n es el número de Λ-módulos simples), de forma que Λ=k[Q]/I, con I un ideal admisible del álgebra de caminos k[Q]. La categoría modΛ es equivalente a la categría de representaciones de Q que satisfacen las relaciones impuestas por I. A cada Λ-módulo M le corresponde una representación de Q y <u>dim</u>M, <u>el vector dimensión de M</u>, es el vector de forma que a cada vértice de Q, le asocia la dimensión del espacio vectorial correspondiente a la representación de M en Q.

A lo largo de este trabajo no distinguiremos entre un módulo y su representación asociada.

Uno de los problemas importantes de la teoría de representaciones es clasificar los Λ-módulos inescindibles de una dimensión fija. Para las álgebras hereditarias de tipo de representación finito (en modΛ existe sólo un número finito de módulos inescindibles hasta isomorfía), este problema fué resuelto a través de las raíces de una forma cuadrática. Gabriel probó que para Λ un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, la forma cuadrática asociada χ_Λ es positiva (ver 1.12) y en este caso <u>dim</u> establece una biyección entre las clases de isomorfismo de Λ-módulos inescindibles y las raíces positivas de χ_Λ.

En [Dr] Drozd probó que las k-álgebras de tipo de representación infinito (en modΛ existe un número infinito clases de isomorfía de módulos inescindibles), se dividen en dos clases disjuntas: mansas y salvajes. Informalmente hablando, las álgebras mansas son aquellas que para cada dimensión z las clases de isomorfismo de módulos inescindibles se pueden parametrizar a través de un número finito de familias de un parámetro en esa dimensión . Un álgebra es salvaje si sus representaciones incluyen a las del álgebra libre asociativa en dos variables $k\langle x,y\rangle$.

Para las álgebras hereditarias mansas y otros casos, por ejemplo las álgebras tubulares, mediante la forma cuadrática podemos determinar los vectores dimensión de los inescindibles y establecer si para esos vectores dimensión existe un número finito o infinito de Λ-módulos inescindibles (hasta isomorfía).

Otra de las técnicas usadas en teoría de representaciones de álgebras (de hecho una de las más usadas), es el estudio del carcaj de Auslander-Reiten.

En [CB] Crawley-Boevey probó que si Λ es un álgebra mansa y z es cualquier vector dimensión para Λ, casi todo Λ-módulo inescindible X de dimensión z satisface $X\cong\tau X$ y X está en un tubo homogéneo del carcaj de Auslander-Reiten de Λ, Γ_Λ. Por lo tanto, para álgebras mansas, un problema interesante es conocer los vectores dimen sión de módulos en las bocas de esos tubos y saber si existen familias infinitas de tubos tales que los módulos en sus bocas tienen el mismo vector dimensión.

Si fijamos un vector dimensión z del álgebra Λ, los Λ-módulos con dimensión z forman una variedad algebraica que denotamos por $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, en donde actúa naturalmente un grupo algebraico $G(z)$ (ver 1.3).

Este trabajo intenta determinar a través de condiciones geométricas sobre las variedades de módulos, vectores dimensión z tales que $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ contenga módulos inescindibles que pertenezcan a tubos estables homogéneos de Γ_Λ, cuando Λ es un álgebra mansa, o cuando los módulos en los tubos de Γ_Λ no pertenecen a ciclos infinitos del álgebra.

Para establecer estas condiciones geométricas (se logra en casos particulares), es muy importante el estudio de la descomposición genérica y de las dimensiones del Hom y Ext sobre las variedades de módulos con dimensión fija. El concepto de descomposición genérica fué introducido por Kac en [K1] y [K2] para álgebras hereditarias. En [P1] J.A. de la Peña generaliza este concepto para componentes irreducibles de las variedades de módulos sobre álgebras no hereditarias y prueba interesantes propiedades de la descomposición genérica para álgebras mansas. Informalmente hablando, la descomposición genérica de un vector z determina las dimensiones de los sumandos directos inescindibles de módulos en abiertos de la variedad.

Para determinar los vectores dimensión de módulos en las bocas de tubos debemos conocer los vectores dimensión cuya descomposición genérica es inescindible en alguna componente irreducible de dimensión maximal (es decir, en un abierto de dicha componente irreducible todos los módulos son inescindibles).

En este trabajo generalizamos algunos resultados de [P1] y los usamos para probar propiedades de la descomposición genérica en álgebras mansas. Un ejemplo de estos resultados, es el siguiente: supongamos que Λ es un álgebra mansa, denotemos por $E(z)$ la diferencia $\dim G(z)-\dim \mathrm{mod}_{\Lambda}(z)$. Entonces $E(z)=0$ y la descomposición genérica de z es inescindible en una componente irreducible de dimensión maximal de $\mathrm{mod}_{\Lambda}(z)$ si y sólo si existe una familia infinita de Λ-módulos no isomorfos dos a dos con vector dimensión z, que están en bocas de tubos homogéneos de Γ_{Λ} y que tienen anillo de endomorfismos trivial.

Observemos que la condición $E(z)=0$ se satisface para raíces isotrópicas de q_{Λ}, la forma de Tits del álgebra Λ. En este trabajo probamos que, para tubos homogéneos cuyos módulos no pertenecen a ciclos finitos, los módulos en la boca determinan raíces isotrópicas de q_{Λ}.

Supongamos que para un álgebra Λ y un vector dimensión z de Λ existe una familia infinita de tubos homogéneos cuyos módulos en la boca tienen dimensión z. Es natural preguntarse bajo qué condiciones esta familia tubular es estándar. Aquí probamos que si los módulos en los tubos no pertenecen a ciclos infinitos, la familia tubular es estándar. Probamos también, cuando Λ es de ciclos finitos, que las raíces isotrópicas con descomposición genérica principal inescindible nos proporcionan familias tubulares infinitas estándar.

Este trabajo está organizado en la siguiente forma:

El primer capítulo, que comprende la primera sección, contiene las definiciones, notaciones e hipótesis que serán usadas a lo largo de este trabajo. Se revisan conceptos como los de álgebras mansas, salvajes y estrictamente salvajes, y se presentan algunas de propiedades. Se definen las variedades de módulos con vector dimensión fijo y conceptos ligados a éstas. Presentamos la forma de algunas posibles componentes del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra, en especial los tubos y las familias tubulares separantes.

En el último apartado de este capítulo se introducen las formas bilineales asociadas a un álgebra (forma de Euler y forma de Tits), se distinguen las distintas posibles formas, y recordamos algunas de sus propiedades.

El segundo capítulo se concentra en propiedades geométricas de las variedades de módulos y comprende las secciones dos y tres. En la sección dos probamos la semicontinuidad de las dimensiones del Hom y Ext sobre las variedades de módulos de dimensión fija. Estos resultados han sido probados para los esquemas de módulos [Sc1], pero para este trabajo la versión presentada aquí es suficiente.

En la sección tres se desarrolla el tema de la descomposición genérica cuando el álgebra es hereditaria. Presentamos los resultados de Kac en [K1] y [K2], así como las generalizaciones de éstos por Schofield en [Sc2].

El tercer capítulo recoge consecuencias del capítulo anterior para el caso especial de álgebras mansas y dimensiones de módulos en las bocas de tubos. Esto agrupa las secciones cuatro a seis. En la sección cuatro probamos un teorema que establece propiedades so bre las descomposiciónes genéricas principales en álgebras mansas, que nos servirá de base para probar los teoremas principales de este trabajo y propiedades de la descomposición genérica en caso de álgebras mansas de dimensión global dos. Recordamos la demostración de un resultado de José Antonio de la Peña que nos dice que la forma cuadrática de un álgebra mansa es débilmente no negativa.

En la sección cinco establecemos condiciones para que un vector dimensión de un álgebra mansa tenga alguna descomposición genérica principal inescindible. Estudiamos el comportamiento de la descomposición genérica inescindible para raíces de Schur de álgebras mansas.

En la sección seis se demuestra que para cada vector dimensión z de un álgebra mansa, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $E(z)=0$ y z tiene alguna descomposición genérica principal inescindible.

(b) Existe una familia infinita de tubos homogéneos $(T_i)_{i\in I}$ con módulos inescindibles M_i en la boca de T_i con vector dimensión z y anillo de endomorfismos trivial

El <u>capítulo cuatro</u> que contiene las secciones siete a nueve, estudia el comportamiento de los vectores dimensión de módulos en tubos cuyos módulos no pertenecen a ciclos infinitos del álgebra.

La sección siete contiene las notaciones, definiciones y propiedades que usaremos en el resto del trabajo. En esta sección recordamos las propiedades de las componentes estándar generalizadas y sus relaciones con componentes cuyos módulos no están en ciclos infinitos del álgebra. Así mismo damos ejemplos de álgebras de ciclos finitos y álgebras que su carcaj de Auslander-Reiten contiene tubos que sus módulos no están en ciclos infinitos.

En la sección ocho se prueban propiedades sobre los módulos que yacen en la boca de tubos que sus módulos no pertenecen a ciclos infinitos en el álgebra. Por ejemplo se muestra que estos módulos no tienen segundas extensiones consigo mismos. Se muestra también que estos tubos deben ser estándar y convexos y que una familia tubular estándar separante está formada por tubos que sus módulos no pertenecen a ciclos cortos infinitos del álgebra.

Finalmente en la sección 9 se establecen condiciones para la existencia de familias tubulares estándar infinitas para álgebras sin ciclos infinitos.

Este trabajo pretende dar al lector las herramientas necesarias para su lectura, así como las referencias consideradas como las más accesibles. Es por eso que los primeros dos capítulos contienen en su mayoría, resultados de [K1], [K2], [Sc2] y algunos resultados sobre descomposición genérica de [P1]. El capítulo tres está basado en los resultados publicados en [B], algunos de ellos se presentan en versiones más generales y se obtienen algunas consecuencias no incluídas ahí; la demostración del teorema principal es la misma. Para la realización de [B], usamos los resultados de J.A.la Peña en [P1] de forma importante. El capítulo cuatro integra resultados de J.A. de la Peña en [P2] y de A. Skowronski en [Sk1] y [Sk2] que son usados para los resultados del capítulo.

Quiero agradecer de forma muy especial al Dr. J.A. de la Peña por las útiles y fructíferas discusiones sobre este trabajo, por todas las sugerencias sobre la presentación de éste, y por su invaluable apoyo durante la realización de este proyecto.

CAPITULO 1

NOTACIONES Y CONCEPTOS BASICOS

Este capítulo consta de una sección en la cual se exponen las definiciones, notaciones e hipótesis que usaremos a lo largo de este trabajo. También presentamos y probamos algunas propiedades elementales de estos conceptos. En la parte final de esta sección hacemos un breve estudio sobre las formas cuadráticas.

SECCION 1 NOTACIONES

1.1 Algebras y carcajes

Durante todo este trabajo k denotará un campo algebraicamente cerrado y Λ una k-álgebra de dimensión finita básica e indescomponible. Por modΛ denotamos la categoría de Λ-módulos izquierdos de dimensión finita. Sabemos que dada cualquier k-álgebra B de dimensión finita existen k-álgebras Λ_i de dimensión finita básicas e indescomponibles de modo que modΛ_1 x...x modΛ_s y modB son categorías equivalentes y entonces $\Lambda_1\times\ldots\times\Lambda_s$ y B son Morita equvalentes. Por lo tanto podemos suponer que Λ es básica e indescomponible.

Existe Q carcaj finito y conexo tal que Λ=k[Q]/I donde I es un ideal admisible del álgebra de caminos k[Q]. Para mayor información acerca de estos resultados básicos, remitimos al lector a [G1]. Una exposición elemental puede consultarse en [CLS].

Denotamos por Q_0 el conjunto de vértices de Q y por Q_1 el conjunto de flechas de un carcaj Q. Si I es ideal admisible de k[Q], I(x,y) representará al conjunto de combinaciones lineales de caminos que inician en x y terminan en y, pertenecientes al ideal I.

Si $\alpha\in Q_1$, con $i(\alpha)$ indicaremos al vértice inicial de α y $f(\alpha)$ será el vértice final.

1.2 Representaciones

Sabemos que modΛ es equivalente a la categoría de representaciones de Q que satisfacen las relaciones impuestas por I. De forma que no distinguiremos entre un módulo $M\in\mathrm{mod}\Lambda$ y su representación. Por indΛ indicaremos al conjunto de módulos inescindibles de modΛ.

Si $M\in\mathrm{mod}\Lambda$, y $x\in Q_0$ denotaremos por $M(x)$ al espacio vectorial asociado a la representación M en el vértice x. El <u>vector dimensión</u> de M se define por $\underline{\dim}M=(\dim_k M(x))_{x\in Q_0}$. Un vector $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ se llama un vector dimensión de Λ.

Algunos módulos importantes de modΛ son los siguientes: P_v es el módulo proyectivo inescindible asociado al vértice $v\in Q_0$. I_v es el módulo inyectivo inescindible asociado al vértice $v\in Q_0$. S_v es el módulo simple asociado al vértice $v\in Q_0$.

Dados $X,Y\in\mathrm{mod}\Lambda$, $\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y)$ nos indicará al grupo cociente de $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ módulo el subgrupo de morfismos de $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ que se factorizan a través de módulos proyectivos. Dualmente $\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y)$ será el grupo cociente de $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ módulo el subgrupo de morfismos de $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ que se factorizan a través de módulos inyectivos.

rad_Λ es el ideal bilateral de la categoría modΛ, tal que para dos módulos inescindibles X,Y el <u>radical de los morfismos de X a Y</u> que denotamos $\mathrm{rad}_\Lambda(X,Y)$ es el k-subespacio de $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ formado por todos los morfismos no invertibles. Si $X=\bigoplus_{i=1}^{s} X_i$, $Y=\bigoplus_{j=1}^{t} Y_j$ donde

$X_i, Y_j \in \mathrm{ind}\Lambda$, $\mathrm{rad}_\Lambda(X,Y)$ se define como: $\underset{i,j}{\oplus}\, \mathrm{rad}_\Lambda(X_i,Y_j)$. Además, $\mathrm{rad}_\Lambda^{k+1}(X,Y)=\sum_Z \mathrm{rad}_\Lambda(Z,Y)\,\mathrm{rad}_\Lambda^k(X,Z)$.

El <u>radical infinito</u>, se define como $\mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X,Y)=\bigcap_k \mathrm{rad}_\Lambda^k(X,Y)$. $\mathrm{rad}_\Lambda^{k+1}(X,Y)$ es un $\mathrm{End}_\Lambda(Y)$-$\mathrm{End}_\Lambda(X)$-subbimódulo de $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$.

1.3 La variedad de módulos

En lo que sigue estudiaremos la categoría de módulos $\mathrm{mod}\Lambda$ desde el punto de vista geométrico. Para ello introduciremos las variedades de módulos con dimensión $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$, $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ siguiendo a [G2] y [Pe1].

Observamos que en algunos trabajos [Bo2], [G2], [Ge] [PeSk] se usa el esquema de módulos $\underline{\underline{\mathrm{mod}}}_\Lambda(z)$ de dimensión z, de forma que los puntos racionales de $\underline{\underline{\mathrm{mod}}}_\Lambda(z)$ forman la variedad $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$. En este trabajo sólo consideraremos las variedades $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$.

Denotaremos por $k^{l\mathrm{x}n}$ al k-espacio vectorial de las matrices de tamaño lxn con coeficientes en k. Sea $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$, $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ indicará la <u>variedad de Λ-módulos con vector dimensión</u> z, es decir, el subconjunto cerrado del espacio afín $\prod_{\alpha\in Q_1} k^{z(f(\alpha))\mathrm{x}z(i(\alpha))}$ formado por familias de matrices $M=(M(\alpha))_{\alpha\in Q_1}$, satisfaciendo que si $\rho\in I(x,y)$, $\rho=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\alpha_{j_i}^{i}\ldots\alpha_{j_1}^{i}$ entonces, la matriz $M(\rho)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i M(\alpha_{j_1}^{i})\ldots M(\alpha_{j_i}^{i})$ es la $z(x)\mathrm{x}z(y)$-matriz cero.

Si $X\in\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, denotaremos por $\dim_X\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ al $\max\{\dim\mathscr{C}/X\in\mathscr{C}\}$ donde las $\mathscr{C}$ corren sobre las componentes irreducibles de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$.

Denotamos por $G(z)$ al grupo algebraico afín $\prod_{x\in Q_0} Gl_{z(x)}(k)$ donde $Gl_k(z(x))$ son las matrices invertibles de tamaño $z(x)\times z(x)$ con coeficientes en k. $G(z)$ actúa sobre $mod_\Lambda(z)$ de la siguiente forma: $G(z)\times mod_\Lambda(z) \longrightarrow mod_\Lambda(z)$, $(g=(g_x)_{x\in Q_0}, M) \longmapsto {}^gM$ con ${}^gM(x)=M(x)$ para $x\in Q_0$ y ${}^gM(\alpha)=g_{f(\alpha)}M(\alpha)g^{-1}_{i(\alpha)}$ donde $\alpha\in Q_1$, $i(\alpha)\xrightarrow{\alpha}f(\alpha)$. La órbita de un módulo X bajo esta acción será denotada por $G(z)X$.

Se tiene que dos módulos son isomorfos si y sólo si están en la misma órbita.

Denotaremos por $E(z)$ a la diferencia $\dim G(z)-\dim mod_\Lambda(z)$. Una observación que será de utilidad en los capítulos tres y cuatro es la siguiente:

LEMA: Si Λ es k-álgebra de dimensión finita, para todo z vector dimensión de Λ, y para todo $X\in mod_\Lambda(z)$, $\dim End_\Lambda(X)\geq E(z)$.

En efecto, si $X\in mod_\Lambda(z)$ entonces $\dim mod_\Lambda(z)\geq \dim G(z)X=\dim G(z)-\dim End_\Lambda(X)$, de donde $\dim End_\Lambda(X)\geq \dim G(z)-\dim mod_\Lambda(z)=E(z)$ ∎

$ind_\Lambda(z)$ denotará al <u>subconjunto de Λ-módulos inescindibles de</u> $mod_\Lambda(z)$. Este subconjunto es constructible. En efecto, si p es la proyección natural $p:mod_\Lambda(z)\times \prod_{x\in Q_0} k^{z(x)\times z(x)} \longrightarrow mod_\Lambda(z)$ y N el conjunto $N=\{(M,\rho)/\rho\in End_\Lambda(M),\ \rho \text{ idempotente}, \rho\neq 0, \rho\neq 1\}$, N es constructible (de hecho localmente cerrado) y por teorema de Chevalley [Ha], $p(N)$ es constructible. Tenemos que $ind_\Lambda(z)=mod_\Lambda(z)\setminus p(N)$, por lo tanto $ind_\Lambda(z)$ es constructible ∎

1.4 Morfismos entre variedades

Sean V,W dos variedades afines. Un mapeo $\chi: V \longrightarrow W$ es <u>regular</u> si es continuo en la topología de Zariski y para todo subconjunto abierto U de W con $\chi^{-1}(U) \neq \emptyset$, tenemos que: si $f \in O_W(U)$, entonces $\chi f \in O_V(\chi^{-1}(U))$. Donde O_V, (resp. O_W) denotan la gavilla de funciones regulares de V (resp. de W). El k-mapeo regular χ es <u>dominante</u> si $\overline{\chi(V)}=W$, con $\overline{\chi(V)}$ la cerradura de $\chi(V)$ en la topología de W.

Recordemos también que si $V \subseteq k^n$ y $W \subseteq k^m$ son k-variedades afines, un morfismo $\chi: V \longrightarrow W$ es regular si y sólo si existen polinomios P_1, $P_2, \ldots, P_n \in k[x_1, \ldots, x_m]$ tal que $\chi(x)=(P_1(x), \ldots, P_n(x))$ para todo $x \in V$. Para un tratamiento elemental de este tema ver [Ku].

1.5 Espacios tangentes y teorema de Voigt.

Sea V una variedad afín. Sea $x \in V$ un punto de V. Por $T_x(V)$ denotamos al espacio tangente a la variedad V en el punto x. Observemos que siempre se tiene $\dim T_x(V) \geq \dim_x V$.

Un punto $x \in V$ es <u>suave</u> (<u>o</u> <u>no</u> <u>singular</u>), <u>si</u> $\dim T_x(V)=\dim_x V$.

Observemos que si $X \in \mathrm{mod}_\Lambda(z)$ es un punto suave de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, entonces es un punto no singular de $G(z)X$. En particular, $\dim T_X(G(z)X)=\dim G(z)X$. Un teorema importante que relaciona la dimensión de estos espacios tangentes y que usamos en las pruebas de resultados importantes en este trabajo es el siguiente:

TEOREMA DE VOIGT: Hay un morfismo inyectivo de espacios vectoriales $T_X(\mathrm{mod}_\Lambda(z))/T_X(G(z)X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,X)$.

OBSERVACION: Esta versión del teorema de D.Voigt[Vo, pg 260] es un poco diferente, pues en el trabajo original se consideran esquemas. Otra versión de este teorema puede verse en [G2].

1.6 Tipos de representación

Uno de los principales objetivos de la teoría de representaciones es la de conocer la categoría modΛ. Para ésto, se distingue entre las álgebras de <u>tipo de representación finito</u> que son aquellas que tienen sólo un número finito de clases de isomorfía de módulos inescindibles y las de <u>tipo de representación infinito</u> que son las que tienen un número infinito de estas clases.

En [Dr] Drozd probó que las álgebras de tipo de representación infinito están divididas en dos clases disjuntas: <u>mansas</u> y <u>salvajes</u>. Un álgebra Λ es <u>mansa</u> si para cualquier vector dimensión z existe una familia finita de Λ-k[t]-bimódulos M_i que son libres como k[t]-módulos derechos y tal que cualquier $X\in \mathrm{ind}_\Lambda(z)$ es isomorfo a $M_i \otimes_{k[t]} S$ para algún k[t]-módulo simple S.

Un álgebra Λ es <u>salvaje</u> si existe un Λ-k<x,y>-bimódulo M que es libre y finitamente generado como k<x,y>-módulo derecho tal que el funtor $M\otimes_{k<x,y>}-: \mathrm{mod}k<x,y>\longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

El lema a continuación nos será de utilidad en el capítulo 4.

LEMA Sea B un álgebra de dimensión finita. Si existe un funtor aditivo $F:\mathrm{mod}B\longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ que es exacto derecho y preserva inescindibles entonces F es fiel.

<u>prueba</u>: sean $X,Y\in \mathrm{ind}B$ y sea $f\in \mathrm{Hom}_B(X,Y)$, $f\neq 0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que f es suprayectiva, entonces tenemos en modΛ una sucesión exacta $0 \longrightarrow K\longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$. Como F es exacto derecho el morfismo $Ff\in \mathrm{Hom}_\Lambda(FX,FY)$ es suprayectivo. Si $Ff=0$, en

tonces $FY=0$ lo cual es una contradicción, por tanto $Ff\neq 0$■

PROPOSICION [LRS] Si Λ es álgebra salvaje, entonces para cualquier álgebra B de dimensión finita, existe un funtor $G:\mathrm{mod}B \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ fiel y pleno.

Dentro de las álgebras salvajes distinguimos las siguientes:

DEFINICION Un álgebra Λ es <u>estrictamente salvaje</u> si existe un Λ-$k\langle x,y\rangle$-bimódulo M que es libre y finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$-módulo derecho, tal que el funtor $M\otimes_{k\langle x,y\rangle}-: \mathrm{mod}k\langle x,y\rangle \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ es una inmersión plena.

1.7 Algebras hereditarias

Λ es <u>hereditaria</u> si todo submódulo de un Λ-módulo proyectivo es proyectivo. Lo que significa que la dimensión global de Λ es menor o igual que uno. Es bien conocido el hecho de que si el álgebra Λ es hereditaria, $I=0$ y Q es un carcaj sin ciclos dirigidos. Existen listas de los posibles carcajes Q para álgebras Λ hereditarias de tipo de representación finito o hereditarias mansas. Los carcajes de la primera lista se conocen por <u>Diagramas de Dynkin</u>, y los de la segunda como, <u>Diagramas de Dynkin Extendidos</u>, para un tratamiento de ellos ver [GR].

Una noción importante en la teoría de representaciones es la siguiente:

1.8 El carcaj de Auslander-Reiten

El <u>carcaj de Auslander-Reiten</u> de un álgebra Λ se define de la siguiente forma: Los vértices del carcaj son las clases de isomorfía de los Λ-módulos inescindibles. Ponemos tantas flechas $[M]\longrightarrow[N]$ como la dimensión del $\mathrm{rad}_\Lambda(M,N)$. Un morfismo $f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$

es <u>irreducible</u> si $f\in rad_\Lambda(M,N)$ y cuando $hg=f$ entonces g es una sección o h es retracción. Al carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra Λ, lo denotamos por Γ_Λ. Haciendo abuso de notación identificaremos a cada módulo inescindible con el vértice que le corresponde en Γ_Λ.

Dado $M\in\Gamma_\Lambda$ denotaremos por τM al <u>trasladado de Auslander-Reiten de</u> M [AR].

DEFINICION Un camino $X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_s$ de Γ_Λ es <u>seccional</u> si $X_i \not\cong \tau X_{i+2}$ para $0\le i\le s-2$.

1.9 Carcajes de Traslación

Un <u>carcaj de traslación</u> $\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1,\tau)$ está formado por un carcaj localmente finito Γ_0, con un conjunto de flechas Γ_1 y un mapeo inyectivo $\tau:\Gamma_0' \longrightarrow \Gamma_0$ definido sobre un subconjunto Γ_0' de Γ_0 tal que para cualesquiera $x\in\Gamma_0$ y $z\in\Gamma_0'$ el número de flechas desde x hasta z es igual al número de flechas de τz a x. Los vértices de $\Gamma_0\backslash\Gamma_0'$ se llaman <u>proyectivos</u>, los que no están en la imágen de τ se llaman <u>inyectivos</u>. Una τ-órbita sin vértices proyectivos o inyectivos se llama <u>estable</u>. En caso de que todas las τ-órbitas de Γ sean estables, se dice que Γ es <u>estable</u>. El carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra Λ es un carcaj de traslación, con τ la traslación de Auslander-Reiten y Γ_0' los vértices que no pertenecen a la clase de isomorfía de módulos proyectivos.

Estamos interesados en las diferentes componentes del carcaj de Auslander-Reiten del álgebra Λ. Damos a continuación las definiciones de diversos tipos de componentes que usaremos en este trabajo.

1.10 Componentes de Γ_Λ

Una componente conexa $\mathcal{C}$ de Γ_Λ es <u>regular</u> si no contiene módulos proyectivos ni inyectivos.

Una componente conexa $\mathcal{C}$ es <u>estándar</u> si la subcategoría plena de modΛ formada por todos los módulos de $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría malla $k(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ (ver por ejemplo [Ri]).

Una componente conexa $\mathcal{C}$ es <u>convexa</u> si cuando existe una cadena de morfismos $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \dots \xrightarrow{f_s} X_s$ con $X_0, X_s \in \mathcal{C}$, $X_i \in \mathrm{ind}\Lambda$ para toda i, $0 \neq f_i \in \mathrm{rad}_\Lambda(X_{i-1}, X_i)$, entonces $X_i \in \mathcal{C}$ para $0 \leq i \leq s$.

Una componente $\mathcal{C}$ de Γ_Λ es <u>postproyectiva</u> si no contiene ciclos dirigidos y cualquier τ-órbita contiene un módulo proyectivo.

Una componente $\mathcal{C}$ de Γ_Λ es <u>preinyectiva</u> si no contiene ciclos dirigidos, tiene sólo un número finito de τ-órbitas y cualquier τ-órbita contiene un módulo inyectivo.

En [Ri] está probado que si Λ es hereditaria Γ_Λ tiene una componente preinyectiva y una componente postproyectiva y estas componentes coinciden si y sólo si Λ es de tipo de representación finito. Dlab y Ringel probaron que en el caso manso hereditario, los restantes módulos inescindibles forman una categoría Abeliana $\mathcal{T}$.

1.11 Tubos

La noción de tubo fué introducida por d'Este y Ringel en [ER].

Un carcaj de traslación sin flechas múltiples se llama un <u>tubo</u> si $|\Gamma| \doteq S^1 \times \mathbb{R}_0^+$, donde S^1 es el círculo unitario, $\mathbb{R}_0^+$ es el conjunto de números reales no negativos y $|\Gamma|$ es la realización geométrica del complejo simplicial bi-dimensional asociado a Γ, ver [Ri].

Una componente conexa $\mathcal{C}$ de Γ_Λ se llama un <u>tubo</u> si $\Gamma(\mathcal{C})$, el carcaj de traslación correspondiente a $\mathcal{C}$ es un tubo. $\mathcal{C}$ es <u>estable</u>

si $\Gamma(\mathcal{C})$ es estable. Si I es un conjunto, consideramos una familia de tubos de Γ_Λ $T(\rho)$, $\rho\in I$, $T(\rho)=T(\rho') \Leftrightarrow \rho=\rho'$ y la clase de módulos $\mathcal{T}$ generada por todos ellos. $\mathcal{T}$ será llamada una <u>familia tubular parametrizada por</u> I, o bien, una I-<u>familia tubular</u>. Los casos concíderados en este trabajo son principalmente cuando I es la recta proyectiva $\mathbb{P}_1 k$ sobre k. Por supuesto una I-familia tubular es <u>estable</u> si y sólo si cada uno de los tubos $T(\rho)$, $\rho\in I$ es estable. Como consecuencia $\mathcal{T}$ no contiene módulos proyectivos ni inyectivos.

Una I-familia tubular $\mathcal{T}$ en modΛ es <u>separante</u>, si los Λ-módulos inescindibles restantes se dividen en dos clases $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$, de forma que las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) $\mathcal{T}$ es estándar

(b) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{I},\mathcal{P})=\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{I},\mathcal{T})=\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{T},\mathcal{P})=0$

(c) Dado cualquier mapeo de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{I}$ y cualquier $\rho\in I$, este mapeo se puede factorizar a través de $T(\rho)$.

1.12 Formas cuadráticas

Una herramienta que ha resultado de suma utilidad para determinar los vectores dimensión asociados a módulos inescindibles y en algunos casos el tipo de representación del álgebra, es la forma cuadrática.

Supongamos que $\Lambda=k[Q]/I$, con Q sin ciclos orientados. La <u>forma de Euler de</u> Λ, χ_Λ es la forma cuadrática definida de la siguiente manera: $\chi_\Lambda:\mathbb{Z}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{Z}$, $\chi_\Lambda(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i,j\in Q_0}(-1)^s \dim\mathrm{Ext}_\Lambda^s(S_i,S_j)z(i)z(j)$.

A $\chi_\Lambda(z)$ también lo denotaremos como $<z,z>$. Esta forma cuadrática nos induce una forma bilineal simétrica, que denotamos por $(-,-)$, $(-,-):\mathbb{Z}^{Q_0}\times\mathbb{Z}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{Z}$, con $(z,v)=\chi_\Lambda(z+v)-\chi_\Lambda(z)-\chi_\Lambda(v)$.

Si Q no tiene ciclos orientados, la <u>forma de Tits de</u> Λ está definida en la siguiente forma: $q_\Lambda:\mathbb{Z}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{Z}$,

$q_\Lambda(z)=\sum_{i\in Q_0} z(i)^2-\sum_{\alpha\in Q_1} z(i(\alpha))z(f(\alpha)) +\sum_{i,j\in Q_0} r(i,j)z(i)z(j)$, donde $r(i,j)$ denota la cardinalidad de $R\cap iIj$, para R un sistema de relaciones para I (es decir un subconjunto de $\bigcup_{i,j\in Q_0} iIj$) que genera I como ideal bilateral, pero ningún subconjunto propio de R lo hace.

Bongartz prueba en [Bo1] que los números $r(i,j)$ son independientes del conjunto R elegido.

Bongartz probó que χ_Λ y q_Λ coinciden cuando Λ es de dimensión global menor o igual a dos. De hecho,

$\sum_{\alpha\in Q_1} z(i(\alpha))z(f(\alpha))=\dim \operatorname{Ext}^1_\Lambda(S_{i(\alpha)},S_{f(\alpha)})$ y además $\sum_{i,j\in Q_0} r(i,j)z(i)z(j)$ $=\dim \operatorname{Ext}^2_\Lambda(S_{i(\alpha)},S_{f(\alpha)})$.

Daremos ahora las definiciones de diferentes tipos de formas cuadráticas que usaremos en los capítulos dos y tres.

Sea $q_\Lambda:\mathbb{Z}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{Z}$ la forma cuadrática de Tits del álgebra Λ.

(a) Se dice que q_Λ es <u>positiva</u> si $q_\Lambda(z)>0$ para todo $0\neq z\in\mathbb{Z}^{Q_0}$.

(b) q_Λ es <u>débilmente positiva</u> si $q_\Lambda(z)>0$ para $0\neq z\in\mathbb{N}^{Q_0}$

(c) q_Λ es <u>no negativa</u> si $q_\Lambda(z)\geq 0$ para todo $z\in\mathbb{Z}^{Q_0}$.

(d) q_Λ es <u>débilmente no negativa</u> si $q_\Lambda(z)\geq 0$ para todo $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$.

(e) q_Λ es <u>indefinida</u> si existe un vector $z\in\mathbb{Z}^{Q_0}$ tal que $q_\Lambda(z)<0$.

Si $q_\Lambda:\mathbb{Z}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{Z}$, denotamos por $q_\Lambda^{(j)}$ la restricción de q_Λ al conjunto $\mathbb{Z}^{Q_0\setminus\{j\}}$. Llamamos a $q_\Lambda:\mathbb{Z}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{Z}$ una forma cuadrática <u>crítica</u>, si todas las restricciones $q_\Lambda^{(j)}$ son débilmente positivas pero q_Λ no lo es.

Denotamos $q_\Lambda(-,-)$ a la forma bilineal simétrica $q_\Lambda(-,-)$: $q_\Lambda(-,-):\mathbb{Z}^{Q_0}\times\mathbb{Z}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{Z}$, $q_\Lambda(z,v)=q_\Lambda(z+v)-q_\Lambda(z)-q_\Lambda(v)$.

Por [Ov], si q_Λ es crítica y Q_Λ tiene más de tres vértices, entonces q_Λ es no negativa y existe un vector sincero $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ tal que $\mathbb{Q}z=\mathrm{rad}q_\Lambda=\{v\in\mathbb{Q}^{Q_0}/q_\Lambda(v,-)=0\}$. Llamamos a z un vector <u>crítico</u> de q_Λ. Si v es un vector crítico de $q_\Lambda^{(j)}$, sea $z\in\mathbb{Z}^{Q_0}$ con $z(e_j)=0$ y $z(e_x)=v(e_x)$ para $x\in Q_0\setminus\{j\}$. Por extensión llamamos también a z un vector crítico de q_Λ.

El lema a continuación nos dá una condición necesaria para que q_Λ sea no negativa:

LEMA Sea q_Λ débilmente no negativa, si existe $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ sincero tal que $q_\Lambda(z)=0$ entonces q_Λ es no negativa.

<u>demostración</u>: probaremos primero que $(z,e_x)\geq 0$ $\forall x\in Q_0$. Supongamos que $(z,e_x)<0$, entonces $q_\Lambda(2z+e_x)=1+2(z,e_x)<0$. Una contradicción. Pero $q_\Lambda(z)=0=\sum_{x\in Q}(z,e_x)z(x)$. Como $z(x)>0$ $\forall x\in Q_0$, entonces $(z,e_x)=0$.

Ahora bien, sea $v\in\mathbb{Z}^{Q_0}$. Como z es sincero, existe $n\in\mathbb{Z}$ tal que $v+nz\in\mathbb{N}^{Q_0}$. Además $0\leq q_\Lambda(v+nz)=q_\Lambda(v)+(v,z)=q_\Lambda(v)$. Por tanto q_Λ es no negativa∎

La siguiente proposición establece una relación entre los ceros de una forma cuadrática débilmente no negativa y los vectores críticos de esa forma.

PROPOSICION[P2] Sea q_Λ débilmente no negativa. Entonces existe una familia $z_1,\ldots,z_s$ de vectores críticos de q_Λ tal que $\forall v\in\mathbb{Z}^{Q_0}$, con $q_\Lambda(v)=0$, existen $\mu_1,\ldots,\mu_s\in\mathbb{Q}^+$, de forma que $v=\sum_{i=1}^{s}\mu_i z_i$.

∎

CAPITULO 2

SEMICONTINUIDAD Y DESCOMPOSICION GENERICA

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera se prueba la semicontinuidad de las dimensiones del Hom y Ext, para el caso en que el álgebra y los vectores dimensión sobre ésta son fijos. Estos resultados están probados en versiones más generales en [Sc1]. Sin embargo para este trabajo las versiones presentadas aquí son suficientes, y las demostraciones hacen uso de álgebra elemental. En la segunda sección estudiamos la descomposición genérica de las variedades de módulos con dimensión fija, asociadas a las álgebras de dimensión finita. Se exponen los resultados de Kac en [K1] y [K2], empero el enfoque y algunas de las demostraciones se hacen a través del trabajo de Schofield en [Sc2] y de Kraft y Riedtmann en [KR]. Este último generaliza algunos resultados de Kac.

SECCION 2 SEMICONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES HOM Y EXT

Como veremos en la próxima sección, conocer cuáles son las posibles dimensiones del anillo de Endomorfismos de los módulos, y los morfismos de un módulo con otro en la misma variedad de módulos o incluso con módulos de diferente dimensión, así como extensiones de un módulo consigo mismo y con otros módulos, es de vital importancia para conocer las posibles descomposiciones genéricas en una variedad. Los resultados que se presentan en esta sección nos ayudan a controlar esas dimensiones en algunos casos y fueron usados en las pruebas de resultados importantes para este trabajo.

Una función $f:U \longrightarrow \mathbb{Z}$ para U variedad algebraica es semicontinua superiormente, si $\{x/f(x)\geq t\}$ es un subconjunto cerrado de U, para toda $t\in\mathbb{Z}$.

2.1 El Hom

TEOREMA: Sea Λ k-álgebra de dimensión finita y **z**,**w** vectores dimensión para Λ. Entonces la función $\varphi:\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{w})\times\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(X,Y)=\dim \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ es semicontinua superior.

demostración:

Un módulo $M\in\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{w})$ está identificado con el conjunto de matrices $(M(\alpha))_{\alpha\in Q_1}$ con $M(\alpha)$ matriz de tamaño $\mathbf{w}(i(\alpha))\times\mathbf{w}(f(\alpha))$. Un módulo $N\in\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{z})$ puede ser identificado con un conjunto de matrices $(N(\alpha))_{\alpha\in Q_1}$ con $N(\alpha)$ matriz de tamaño $\mathbf{z}(i(\alpha))\times\mathbf{z}(f(\alpha))$. Un morfismo $f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ es un conjunto de matrices $D=(D(v))_{v\in Q_0}$, con $D(v)$ matriz de tamaño $\mathbf{z}(v)\times\mathbf{w}(v)$ tales que $N(\alpha)D(i(\alpha))=D(f(\alpha))M(\alpha)$. Estas ecuaciones que debe satisfacer **D** son equivalentes a un sistema lineal homogéneo cuyos coeficientes dependen linealmente de las coordenadas **(M,N)**, que deben satisfacer las entradas de **D**. Si llamamos ρ al rango de la matriz **L** de este sistema de ecuaciones, tenemos que $\dim \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)=\sum_{v\in Q_0} \mathbf{z}(v)\times\mathbf{w}(v)-\rho$.

Entonces si $r\in\mathbb{Z}$, $\dim \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)\geq t$ si y sólo $\rho\leq s=\sum_{v\in Q_0} \mathbf{z}(v)\times\mathbf{w}(v)-t$, lo cual ocurre si y sólo si todos los menores $s\times s$ de **L** se anulan, pero esta es una condición cerrada sobre las entradas de **L**, como éstas se obtienen linealmente de las coordenadas de **(M,N)**, es una condición cerrada sobre $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{w})\times\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{z})$ ∎

2.2 El Ext^i

TEOREMA: Sea Λ k-álgebra de dimensión finita y z,w vectores dimensión para Λ. Entonces la función $\varphi:\mathrm{mod}_\Lambda(w)\times\mathrm{mod}_\Lambda(z)\longrightarrow\mathbb{Z}$ tal que $\varphi(X,Y)=\dim\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X,Y)$ es semicontinua superior.

demostración:

Para cualquier $M\in\mathrm{mod}_\Lambda(w)$ tenemos la resolución libre canónica

$$\cdots\longrightarrow\Lambda\otimes_k\Lambda\otimes_k\Lambda\otimes_k M\xrightarrow{\gamma_2}\Lambda\otimes_k\Lambda\otimes_k M\xrightarrow{\gamma_1}\Lambda\otimes_k M\xrightarrow{\gamma_0}M\longrightarrow 0$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,N)$ obtenemos el complejo

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes_k M,N)\xrightarrow{\gamma_1^*}\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes_k\Lambda\otimes_k M,N)\xrightarrow{\gamma_2^*}\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes_k\Lambda\otimes_k\Lambda\otimes_k M,N)\xrightarrow{\gamma_3^*}\cdots$$

con $\gamma_i^*=(\gamma_i,N)$. Tenemos que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,N)=\ker\gamma_i^*/\mathrm{Im}\gamma_{i-1}^*$. Para probar la semicontinuidad de $\dim\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,N)$, basta probar que $\dim\ker\gamma_i^*$ es semicontinua superior, y entonces tenemos que $-\dim\mathrm{Im}\gamma_i^*$ es semicontinua superior.

Si $T\in\ker\gamma_i^*$, entonces $M_{\gamma_i}T=0$. Donde M_{γ_i} es la matriz asociada al morfismo γ_i. Entonces T es la solución de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones sobre las coordenadas de la matriz M_{γ_i}. Si N es la matriz de coeficientes de este sistema homogéneo de ecuaciones, $\dim\ker\gamma_i^*\geq s$ si y sólo si rango $N\leq r_s$, que como en la proposición anterior nos dá una condición cerrada sobre $\mathrm{mod}_\Lambda(w)\times\mathrm{mod}_\Lambda(z)$∎

Un concepto que usaremos con frecuencia en la siguiente sección es el siguiente:

DEFINICION: Sean z y w vectores dimensión de Λ. Sea $\mathcal{C}_1$ componente irreducible de $\mathrm{mod}_\Lambda(w)$ y $\mathcal{C}_2$ componente irreducible de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$. Decimos que Ext^i_Λ es <u>genéricamente cero en</u> $\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2$ si existen $R\in\mathcal{C}_1$ y

$S\in\mathcal{C}_2$ tal que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(R,S)=0$. Decimos que Hom_Λ es <u>genéricamente</u> <u>cero</u> <u>en</u> $\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2$ si existen abiertos U y V de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ respectivamente, tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(R,S)=0$ para toda $R\in\mathcal{C}_1$ y $S\in\mathcal{C}_2$. Si Λ es hereditaria, y z,w son vectores dimensión para Λ, decimos que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(z,w)$ es genéricamente cero si existen $R\in\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ y $S\in\mathrm{mod}_\Lambda(w)$ tal que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(R,S)=0$.

OBSERVACION: Como la función $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(-,-)$ es semicontinua superior, si existen tales R y S, entonces existen abiertos U de $\mathcal{C}_1$ y U' de $\mathcal{C}_2$ tal que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,N)=0$ para todo $M\in U$ y $N\in U'$.

El siguiente lema nos dá una útil relación entre Hom y Ext.

LEMA(Happel y Ringel) [HR] Sea Λ k-álgebra hereditaria. Sean R,S Λ-módulos inescindibles, si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(R,S)=0$ entonces cualquier morfismo de S a R será inyectivo o suprayectivo.

SECCION 3 LA DESCOMPOSICION GENERICA

El concepto de la descomposición genérica fué introducido por Kac en [K1], donde describía las posibles clases de vectores dimensión de módulos inescindibles para álgebras hereditarias. Este concepto ha resultado de utilidad, pues nos permite ver de manera geométrica, los módulos de una dimensión fija y al mismo tiempo se conserva una fuerte relación con la forma cuadrática y la estructura de los módulos. Los resultados de [K1] fueron completados y mejorados en [K2]. H.Kraft y Ch.Riedtmann en [KrR] escriben estos resultados de forma más accesible, razón por la cual hacemos referencia a este último. El concepto de descomposición genérica fué generalizado para las componentes irreducibles en una variedad de módulos por J.A. de la Peña en [P1].

3.1 Definición y ejemplos

DEFINICION: Sea $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ vector dimensión para Λ y sea $\mathcal{C}$ componente irreducible de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$. Una descomposición $z=w_1+\ldots+w_s$ es una <u>descomposición genérica</u> de z en $\mathcal{C}$ si $\{X\in\mathcal{C}/X=X_1\oplus\ldots\oplus X_s,\ X_i\in\mathrm{ind}_\Lambda(w_i)\}$ contiene un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{C}$. Decimos que la descomposición genérica es <u>principal</u> si $\mathcal{C}$ es de dimensión maximal. La descomposición genérica es <u>inescindible</u> si $s=1$.

La existencia y unicidad de la descomposición genérica ha sido probada en [KrR] para el caso hereditario y en [P1] en general.

Si $\Lambda=k[Q]$, es decir, si Λ es k-álgebra hereditaria, $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ es una variedad irreducible y por tanto la descomposición genérica es única.

Daremos ahora algunos ejemplos de descomposiciones genéricas.

<u>Ejemplo</u> 1: Este ejemplo fué tomado de [KrR] y nos muestra que la descomposición genérica depende de la orientación de Q.

Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \underset{}{\overset{b}{\bullet}} & \\ \underset{a}{\bullet} \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & \underset{c}{\bullet} \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

y $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ con $z(a)=1$, $z(b)=2$, $z(c)=1$, se puede ver que cualquier módulo está en la cerradura de la órbita de un módulo M_λ con $M_\lambda(\alpha)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=M_\lambda(\beta)$, $M_\lambda(\gamma)=\lambda$. Por tanto la descomposición genérica es $z=w_1+w_2$ donde w_1 es el vector constante con valor 1 y $w_2=\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 0\end{smallmatrix}$.

Si Q es el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \end{tikzcd}$$

y z es como antes entonces la

descomposición genérica es inescindible.

Sea Λ el álgebra dada por el carcaj $Q=$
$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & a \arrow[dr, "\alpha"] & \\ c \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & b \\ & d \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$
y $z=\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 1 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$. Veremos que la descomposición genérica de z es $w_1+w_2+w_3$ con $w_1=\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$, $w_2=\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}$ y $w_3=\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$. En efecto, sea $M\in\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ satisfaciendo que si $M(\beta)=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$ y $M(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)$, entonces $\lambda=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2\neq 0$ y análogamente si $M(\delta)=\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}$ y $M(\gamma)=(\gamma_1,\gamma_2)$, entonces $\mu=\delta_1\mu_1+\delta_2\mu_2\neq 0$. M es isomorfo al Λ-módulo S con $S(\beta)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, $S(\delta)=\begin{bmatrix}\lambda^{-1}\mu\\ 0\end{bmatrix}$ y $S(\alpha)=(1,0)=S(\gamma)$. El isomorfismo está dado por $g\in G(z)$ con $g(a)=\begin{bmatrix}\lambda^{-1}\alpha_1 & \lambda^{-1}\alpha_2\\ -\beta_2\beta_1^{-1} & 1\end{bmatrix}$ (aquí estamos suponiendo sin pérdida de generalidad que $\beta_1\neq 0$ y $\delta_1\neq 0$), $g(b)=g(c)=\lambda^{-1}$ y $g(d)=\begin{bmatrix}\lambda^{-1}\gamma_1 & \lambda^{-1}\gamma_2\\ -\delta_2\delta_1^{-1} & 1\end{bmatrix}$. Es claro que $S\cong S_1\oplus S_2\oplus S_3$, con $S_i\in\mathrm{ind}_\Lambda(w_i)$ $1\le i\le 3$, donde S_2 y S_3 son los Λ-módulos simples asociados a los vértices a y d respectivamente y S_1 es el Λ-módulo de dimensión w_1, con $S_1(\beta)=S_1(\alpha)=S_1(\gamma)=1$ y $S_1(\alpha)=\lambda^{-1}\mu$. Los módulos que satisfacen estas condiciones forman un abierto no vacío de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$. Por tanto la descomposición genérica de **z** es $w_1+w_2+w_3$.

Ejemplo 2

Si Λ está dada por el carcaj $Q=$
$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & a \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ c & & b \\ & d \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$
y $z=\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 1 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$, la descom

posición genérica de z es z_1+z_2 donde $z_1=\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ y $z_2=\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$. En efecto, si $M\in\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ es tal que si $M(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)$ y $M(\beta)=(\beta_1,\beta_2)$ se cumple que $\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\neq 0$ y para $M(\delta)=(\delta_1,\delta_2)$ y $M(\gamma)=(\gamma_1,\gamma_2)$ entonces $\delta_1\gamma_2-\delta_2\gamma_1\neq 0$, tenemos que M es isomorfo al módulo S con $S(\beta)=(1,0)$, $S(\alpha)=(0,1)$, $S(\delta)=(1,0)$ y $S(\gamma)=(0,1)$. El isomorfismo está dado por

$$g\in G(z) \text{ con } g(a)=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix},\ g(d)=\begin{bmatrix}\delta_1 & \delta_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{bmatrix},\ g(b)=g(c)=1.$$

La descomposición de S en inescindibles es $S\cong S_1\oplus S_2$ $\underline{\dim}S_1=z_1$, $\underline{\dim}S_2=z_2$ con $S_1(\beta)=S_1(\delta)=1$, $S_1(\alpha)=S_1(\gamma)=0$, $S_2(\beta)=S_2(\delta)=0$, $S_2(\alpha)=S_2(\gamma)=1$. Los módulos que satisfacen las condiciones anteriores forman un abierto no vacío de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, por tanto la descomposición genérica de z es z_1+z_2. Esto nos muestra que la descomposición genérica depende de la orientación.

Ejemplo 3 Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "\beta"] & & e \\ a \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & & d \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dr, "\mu"'] & \\ & c \arrow[ur, "\varepsilon"'] & & f \end{tikzcd}$$

sea I el ideal generado por $\{\alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta\mu,\ \delta\varepsilon\mu,\ \delta\varepsilon\gamma\}$ y sea $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ el vector constante con valor 1.

Sea $C(\alpha,\delta)=\{X\in\mathrm{mod}_\Lambda(z)/X(\alpha)=X(\delta)=0\}$. De igual forma definimos $C(\beta,\varepsilon)$, $C(\gamma,\mu)$, $C(\alpha,\varepsilon)$, $C(\alpha,\mu)$, $C(\beta,\delta)$, $C(\beta,\mu)$, $C(\gamma,\delta)$ y $C(\gamma,\varepsilon)$. Estas son componentes irreducibles de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ con dimensión maximal. La descomposición genérica de z en $C(\alpha,\delta)$ es $z=w_1+w_2$ con $w_1=\begin{smallmatrix} & 1 & & 1 \\ 0 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \end{smallmatrix}$ y $w_2=\begin{smallmatrix} & 0 & & 0 \\ 1 & & 0 & \\ & 0 & & 0 \end{smallmatrix}$.

La descomposición genérica de z en $C(\gamma,\mu)$ es $z=w_1+w_2+w_3$ donde $w_1=\begin{smallmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 1 & & 0\end{smallmatrix}$, $w_2=\begin{smallmatrix}0 & & 1\\ & 0 & \\ 0 & & 0\end{smallmatrix}$ y $w_3=\begin{smallmatrix}0 & & 0\\ & 0 & \\ 0 & & 1\end{smallmatrix}$.

<u>Ejemplo</u> 4 Sea Q el carcaj $\underset{a}{\bullet}\xrightarrow{\alpha}\underset{b}{\bullet}\xrightarrow{\beta}\underset{c}{\bullet}$ y sea I el ideal generado $\{\alpha\beta\}$. Sea $z= 2\ \ 1\ \ 1$. Si V es una representación de este carcaj, entonces $V(\alpha)=0$ o $V(\beta)=0$. $mod_\Lambda(z)$ tiene dos componentes irreducibles, $C(\alpha)$ y $C(\beta)$ con $C(\alpha)=\{X\in mod_\Lambda(z)/X(\alpha)=0\}$ y $C(\beta)=\{X\in mod_\Lambda(z)/X(\beta)=0\}$. Si $V\in C(\alpha)$ se tiene que $V(\alpha)=0$, entonces o bien V es isomorfa a la representación $k^2\xrightarrow{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}k\xrightarrow{1}k$ y en este caso su descomposición en inescindibles es $M\oplus N\oplus N$ donde $M=0\xrightarrow{0}k\xrightarrow{1}k$ y $N=k\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}0$, o bien V es la representación $k^2\xrightarrow{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}k\xrightarrow{0}k$. Por lo tanto tenenemos que $C(\alpha)=\overline{G(z)(M\oplus N\oplus N)}$, es decir, la cerradura de la órbita del módulo $M\oplus N$. De aquí que $\dim C(\alpha)=1$ y la descomposición genérica en $C(\alpha)$ es $z=w_1+w_2+w_2$ donde $w_1 = 1\ \ 1\ \ 1$ y $w_2 = 1\ \ 0\ \ 0$.

Si $V\in C(\beta)$, $V(\beta)=0$, entonces o bien $V(\alpha)\neq 0$ y V es isomorfa a la representación $k^2\xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}k\xrightarrow{0}k$ cuya descomposición en inescindibles es $L\oplus S\oplus T$ con $L=k\xrightarrow{1}k\xrightarrow{0}0$, $S=k\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}0$ y $T=0\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}k$, o bien $V(\alpha)=0$ y V es la representación $k^2\xrightarrow{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}k\xrightarrow{0}k$. Por lo tan to $C(\beta)=\overline{G(z)(L\oplus S\oplus T)}$. Tenemos entonces que $\dim C(\beta)=2$ y en $C(\beta)$ la descomposición genérica es $z=w_1+w_2+w_3$ donde $w_1 = 1\ 1\ 0$, $w_2 = 1\ 0\ 0$, $w_3 = 0\ 0\ 1$.

3.2 Algunas propiedades de la descomposición genérica

En este apartado queremos enunciar algunas propiedades de la descomposición genérica que usaremos frecuentemente.

LEMA [P1] Sea $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ vector dimensión para Λ y sea $\mathcal{C}$ una componente irreducible de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, entonces existe una única descomposición genérica en $\mathcal{C}$, $z=w_1+\ldots+ w_s$. Además existen componentes irreducibles $\mathcal{C}_i$ de $\mathrm{mod}_\Lambda(w_i)$ tal que la descomposición genérica en $\mathcal{C}_i$ es inescindible y la siguiente desigualdad se cumple:

$$\dim G(z)-\dim\mathcal{C} \geq \sum_{i=1}^{s} (\dim G(w_i)-\dim\mathcal{C}_i)$$

Del teorema de Voigt(1.5) se obtiene el siguiente útil corolario:

COROLARIO[P1]: Existe un subconjunto abierto denso U de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ tal que para todo $X\in U$, la siguiente desigualdad se cumple:

$$\dim G(z)-\dim_X \mathrm{mod}_\Lambda(z)\geq \dim\mathrm{End}_\Lambda(X)-\dim\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,X).$$

Haremos ahora algunas observaciones que manejaremos en los siguientes apartados.

<u>Observaciones</u>: Sea Λ hereditaria

(1) $\langle z,z\rangle=\dim G(z)-\dim\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ (Esto nos dice que se da la igualdad en el corolario 3.2 en el caso hereditario)

(2) $\langle z,z\rangle=\dim\mathrm{End}_\Lambda M-\dim\mathrm{Ext}^1(M,M)$ para $M\in\mathrm{mod}_\Lambda(z)$.

La siguiente observación se satisface para Λ no necesariamente hereditaria.

(3) (Happel) Si $M \in mod_{\Lambda}(z)$, $\dim G(z)M$ es maximal y $M=M_1 \oplus M_2$ entonces $Ext^1(M_1,M_2)=0$.

3.3 La descomposición genérica en el caso hereditario

En esta sección casi todos los resultados son para álgebras bras hereditarias, es decir, $\Lambda=k[Q]$. Obsérvese que en este tipo de álgebras la variedad $mod_{\Lambda}(z)$ es irreducible para todo $z \in \mathbb{N}^{Q_0}$, por tanto existe una única descomposición genérica. En este caso hay resultados que caracterizan en forma aritmética y homológica la descomposición genérica de un vector dimensión.

Una pregunta natural es, si conocer la descomposición genérica de un vector dimensión es condición suficiente para conocer la descomposición genérica de todos sus múltiplos. Para álgebras hereditarias se dá respuesta a esa pregunta.

Incluiremos algunas pruebas, se escogieron aquellas relacionadas con las técnicas usadas para obtener los principales resultados de este trabajo, y que nos mostrarán cúal es el problema para obtener éstos en el caso no hereditario.

Hemos subdividido este apartado para facilitar su desarrollo.

3.3.1 *Raíces de Schur.*

DEFINICION $z \in \mathbb{N}^{Q_0}$ es una <u>raíz de Schur</u> si existe $R \in mod_{\Lambda}(z)$ tal que $End_{\Lambda}R=k$.

Como veremos aquí, si conocemos cuáles son las raíces de Schur para el álgebra hereditaria Λ, podremos determinar los vectores dimensión de los Λ-módulos inescindibles.

LEMA 1: Sea $\Lambda=k[Q]/I$, si $z \in \mathbb{N}^{Q_0}$ es raíz de Schur, entonces la descomposición genérica de z es inescindible para alguna componente irreducible de $mod_{\Lambda}(z)$.

prueba: Como z es raíz de Schur entonces existe $R\in mod_{\Lambda}(z)$ tal que $\dim End_{\Lambda}R=1$. Pero la función $\dim End_{\Lambda}(-)$ es semicontinua superiormente, por tanto el conjunto $S=\{X\in mod_{\Lambda}(z)/\dim End_{\Lambda}X=1\}$ es abierto no vacío. Entonces existe $\mathcal{C}$ componente irreducible de $mod_{\Lambda}(z)$ con $G(z)S$ denso en $\mathcal{C}$. Pero todo punto de $G(z)S$ es inescindible. En consecuencia en $\mathcal{C}$, la descomposición genérica de z es inescindible∎

COROLARIO: Si Λ es hereditaria y z es raíz de Schur, la descomposición genérica de z es inescindible.

Las raíces de Schur se dividen según la forma de Euler en :

DEFINICION Sea $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ decimos que z es una raíz real si $\langle z,z\rangle=1$, z es una raíz imaginaria si $\langle z,z\rangle\leq 0$, z es isotrópica si $\langle z,z\rangle=0$.

3.3.2 *El teorema de Kac.*

Uno de los teoremas importantes de los trabajos de Kac, que mencionamos al principio de esta sección y que nos dá un amplio panorama sobre la descomposición genérica en el caso hereditario es el siguiente:

TEOREMA[K1] Sea Λ k-álgebra hereditaria. Sea $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$, $z=w_1+\ldots+w_s$ es la descomposición genérica de z si y sólo si w_i es raíz de Schur y $Ext^1_{\Lambda}(w_i,w_j)$ es genéricamente cero para toda $1\leq i,j\leq s$, $i\neq j$. Además $\langle w_i,w_j\rangle\geq 0$.

Kac sugirió que podía valer el converso de la parte combinatoria del teorema anterior es decir, si sabemos que $z=w_1+\ldots+w_s$ y cada w_i es una raíz de Schur y $\langle w_i,w_j\rangle\geq 0$, entonces ¿ se dá la descomposición genérica de z?, el siguiente es un contraejemplo de Schofield [Sc2] a esa conjetura.

Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\bullet \arrow[dr] & & & & \bullet \\
& \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\bullet \arrow[ur] & & & & \bullet
\end{tikzcd}$$

consideremos el siguiente vector

$\begin{smallmatrix}1&&&&1\\&3&2&3&\\1&&&&1\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}1&&&&1\\&2&2&2&\\1&&&&1\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}0&&&&0\\&1&0&0&\\0&&&&0\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}0&&&&0\\&0&0&1&\\0&&&&0\end{smallmatrix}$ se puede ver que ésta es

la descomposición genérica de z, sin embargo la descomposición a continuación satisface las hipótesis de la conjetura también

$$\begin{smallmatrix}1&&&&1\\&3&2&3&\\1&&&&1\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}1&&&&1\\&2&1&2&\\1&&&&1\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}0&&&&0\\&1&1&1&\\0&&&&0\end{smallmatrix} .$$

En muchos casos, la única descomposición que satisface las implicaciones del teorema de Kac es la descomposición genérica, el siguiente es un ejemplo:

Sea Λ el álgebra dada por el carcaj $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & \overset{a}{\bullet} \arrow[dr, "\alpha"] & \\ \underset{c}{\bullet} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \underset{b}{\bullet} \\ & \underset{d}{\bullet} \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$ y $z=\begin{smallmatrix}&2&\\1&&1\\&2&\end{smallmatrix}$. La

descomposición genérica de z es $w_1+w_2+w_3$

con $w_1=\begin{smallmatrix}&1&\\1&&1\\&1&\end{smallmatrix}$, $w_2=\begin{smallmatrix}&1&\\0&&0\\&0&\end{smallmatrix}$, $w_3=\begin{smallmatrix}&0&\\0&&0\\&1&\end{smallmatrix}$, como vimos en 3.1. Comprobemos que esta descomposición satisface las implicaciones del teorema de Kac. Usando que $w_1=\underline{\dim}P_c-\underline{\dim}P_b$, $w_2=\underline{\dim}P_a-\underline{\dim}P_b$ y $w_3=\underline{\dim}P_d-\underline{\dim}P_b$ tenemos que $\langle w_1,w_2\rangle=1$ y $\langle w_1,w_3\rangle=0=\langle w_2,w_1\rangle=\langle w_2,w_3\rangle=\langle w_3,w_1\rangle=\langle w_3,w_2\rangle$. w_1 es raíz isotrópica de Schur, w_2 y w_3 son raíces reales de Schur. En este caso puede verse que cualquier otra descomposición de z no satisface las implicaciones del teorema de Kac.

Haciendo uso del teorema de Kac y del lema de Happel y Ringel, Schofield prueba la siguiente:

PROPOSICION[Sc2] Sea Λ k-álgebra hereditaria, si $z=w_1+\ldots+w_s$ es la descomposición genérica de z entonces para $i\neq j$, o bien $w_i=w_j$ y w_i es una raíz real o bien $w_i\neq w_j$ y $\langle w_i,w_j\rangle\langle w_j,w_i\rangle=0$.

<u>demostración</u> Sea R una representación en el abierto de la descomposición genérica de z, entonces $R=\bigoplus_{i=1}^{s} R_i$ con $R_i\in ind_\Lambda(w_i)$. Entonces del teorema de Kac tenemos que w_i es raíz de Schur, y $Ext^1_\Lambda(R_i,R_j)=Ext^1_\Lambda(R_j,R_i)=0$.

Si $w_i=w_j$, $i\neq j$ entonces existe U abierto denso de $mod_\Lambda(w_i)$ tal que $End_\Lambda X=k$ para toda $X\in U$ y existe V abierto denso de $mod_\Lambda(w_j)$ de forma que $Ext^1_\Lambda(Y,Y)=0$ para toda $Y\in V$. Como $w_i=w_j$, $V\cap U\neq\emptyset$. Además, para $X\in V\cap U$ $\langle dimX,dimX\rangle=1$, por tanto $w_i=w_j$ son raíces reales.

Supongamos $w_i\neq w_j$, por el lema 2.2, $Hom_\Lambda(R_i,R_j)=0$, en cuyo caso $\langle w_i,w_j\rangle=0$, o bien ya que $Hom_\Lambda(R_i,R_j)\neq 0$, entonces $Hom_\Lambda(R_j,R_i)=0$. En este caso $\langle w_j,w_i\rangle=0$. Por tanto tenemos que $\langle w_i,w_j\rangle\langle w_j,w_i\rangle=0$■

3.3.3 *Raíces reales e isotrópicas de Schur.*

Si z es una raíz real o isotrópica de Schur, de un álgebra hereditaria, la descomposición genérica de nz para $n\in\mathbb{N}$ está determinada.

LEMA [Sc2] Si Λ es hereditaria y z es raíz real o isotrópica de Schur, $Ext^1_\Lambda(z,z)$ es genéricamente cero.

TEOREMA [Sc2]. Sea z una raíz real o isotrópica de Schur, de un álgebra hereditaria Λ, entonces $z+\ldots+z$ (n veces) es la descomposición genérica de nz.

demostración Si z es raíz real o isotrópica de Schur, $Ext^1_\Lambda(z,z)$ es genéricamente cero, por teorema de Kac concluímos■

3.3.4 *Raíces imaginarias de Schur.*

La descomposición genérica de nz para z raíz imaginaria no isotrópica de Schur es diferente a la de las otras raíces de Schur.

TEOREMA [Sc2] Sea z una raíz imaginaria de Schur no isotrópica, de un álgebra hereditaria Λ. Entonces nz es una raíz de Schur imaginaria para $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto su descomposición genérica es inescindible.

3.3.5 *La descomposición genérica de* nz

El siguiente teorema contesta a una de las preguntas que nos hacíamos al principio de esta sección.

TEOREMA [Sc2] Sea $z=w_1+\ldots+w_s$ la descomposición genérica de z. Entonces la descomposición genérica de nz está dada por:
$nz=(nw_1)+\ldots+(nw_s)$ donde $(nw_i)=nw_i$ para w_i raíz imaginaria no isotrópica y $(nw_i)= w_i+\ldots+w_i$ (n veces) para w_i real o isotrópica.
demostración si w_i es raíz real o isotrópica, $Ext^1_\Lambda(w_i,w_i)$ es genéricamente cero. Si w_i es raíz imaginaria no isotrópica nw_i es raíz imaginaria, de Schur. Como $Ext^1_\Lambda(w_i,w_j)$ y $Ext^1_\Lambda(w_j,w_i)$ son genéricamente cero, tenemos que $Ext^1_\Lambda(nw_i,w_j)$ y $Ext^1_\Lambda(w_j,nw_i)$ son genéricamente cero. Por [Sc2] a lo más una w_i es imaginaria no isotrópica, por Teorema de Kac, concluimos■

3.3.6 *La descomposición genérica y la forma cuadrática.*

El siguiente teorema nos muestra la estrecha relación que existe entre estos dos conceptos en el caso hereditario.

TEOREMA[Sc2] Sea $z=w_1+\ldots+w_s$ donde cada w_i es una raíz de Schur. Esta es la descomposición genérica de z si y sólo si $<w_i,w_j>\geq 0$ y $<w_i,w_j><w_j,w_i>=0$, $i\neq j$. Además $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(w_i,w_j)$ es genéricamente cero cuando $<w_i,w_j>=0$.

Un ejemplo de las aplicaciones de los teoremas de esta sección es el siguiente: Sea $\Lambda=k[Q]$ con $Q=\underset{a}{\bullet}\rightrightarrows\underset{b}{\bullet}$, se puede ver fácilmente que el vector dimensión $z=(1,1)$ es una raíz isotrópica de Schur cuyos módulos en el abierto de la descomposición genérica son isomorfos a $M_\lambda = k \overset{\lambda}{\underset{1}{\rightrightarrows}} k$ para algún $\lambda\in k$, o bien $M_\infty = \overset{1}{\underset{0}{\rightrightarrows}} k$ además $\mathrm{End}_\Lambda M_\lambda=k$ para $\lambda\in k$. $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_\lambda,M_\mu)=0$ para $\lambda\neq\mu$ y $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_\lambda,M_\mu)=0$, para $\lambda\neq\mu$. Calcular la descomposición genérica de $w=(n,n)$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$ no es tan fácil, sin embargo de los teoremas anteriores sabemos que la descomposición genérica de w es $z+\ldots+z$ (n veces).

3.3.7 *Salvajismo y descomposición genérica.*

Concluímos esta sección con un interesante resultado de Kac, que nos dá algunas condiciones para que la descomposición genérica sea inescindible. Para ésto hacemos uso de los siguientes conceptos.

DEFINICION Sea $z\in\mathbb{N}^{Q_0}$ el <u>soporte de</u> z denotado sopz es el conjunto $\{x\in Q_0 / z(x)\neq 0\}$. Usaremos también sopz para denotar el subcarcaj pleno de Q con vértices $\{x\in Q_0/z(x)\neq 0\}$, sin hacer distinción alguna

DEFINICION Sea Q un carcaj, el <u>cono fundamental</u> F_Q está definido como $\{z\in\mathbb{N}^{Q_0}/<z,e_i>\leq 0$, sopz conexo$\}$.

TEOREMA [KrR] Si $z\in F_Q$ y sopz no es manso, la descomposición genérica de z es inescindible.

CAPITULO 3

DESCOMPOSICIONES GENERICAS PRINCIPALES INESCINDIBLES Y RAICES DE SCHUR PARA ALGEBRAS MANSAS

En 1987 Crawley-Boevey probó que si Λ es una k-álgebra mansa, para cada vector dimensión z casi todo Λ-módulo inescindible X con $\underline{\dim}X=z$, satisface la condición $X\cong\tau X$ y X pertenece a un tubo homogéneo de Γ_Λ. Es decir, que en cada dimensión existe solo un número finito de Λ-módulos inescindibles (hasta isomorfía) que no están en tubos homogéneos.

Un problema interesante es determinar los vectores dimensión de los módulos en la boca de esos tubos. En este capítulo usando métodos geométricos, logramos caracterizar esos vectores dimensión para casos particulares.

Este capítulo está dividido en tres secciones. En la primera se estudia la descomposición genérica para las álgebras mansas. Haciendo uso de esta descomposición, estudiamos las relaciones entre $E(z)=\dim G(z)-\dim \mathrm{mod}_\Lambda(z)$, $q_\Lambda(z)$ y el tipo de representación. Probamos también algunas propiedades de la descomposición genérica para raíces isotrópicas de la forma cuadrática, en el caso de álgebras Λ con dimensión global a lo más dos. Obtendremos algunas propiedades de la descomposición genérica para vectores dimensión z con $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(z,z)$ genéricamente cero en alguna componente irreducible de dimensión maximal.

En la segunda sección se establece una condición necesaria para que una descomposición genérica principal sea inescindible.

Finalmente en la última sección se dan condiciones para la existencia de familias de tubos homogéneos con módulos en la boca de esos tubos con dimensión igual. Se prueba que, (bajo ciertas restricciones) las raíces de Schur nos dan familias de tubos homogéneos que tienen módulos en la boca con vector dimensión esa raíz.

SECCION 4 LA DESCOMPOSICION GENERICA EN ALGEBRAS MANSAS

Usando los resultados expuestos en 3.2, obtenemos la siguiente proposición que es una generalización de [P1, 8.2].

4.1 **TEOREMA** : Sea Λ una k-álgebra mansa de dimensión finita. Sea z un vector dimensión para Λ. Sea $\mathcal{C}$ componente irreducible de dimensión maximal de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, con descomposición genérica $z=w_1+\ldots+w_s$. Entonces, existe un subconjunto abierto denso U de $\mathcal{C}$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) Para todo $X\in U$, existe una descomposición $X=X_1\oplus\ldots\oplus X_s$, donde $X_i\in\mathrm{ind}_\Lambda(w_i)$, con $X_i\simeq\tau X_i$ o bien, $G(w_i)X_i$ es una órbita abierta de $\mathrm{mod}_\Lambda(w_i)$. Además $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_i,X_j)=0$ para $i\neq j$.

(b) Para todo $X\in U$, $\dim\mathrm{End}_\Lambda(X)$ es constante y es minimal en $\mathcal{C}$, además, $s\leq\dim\mathrm{End}_\Lambda(X)\leq s+E(z)$.

(c) Para todo $X\in U\cap\mathcal{C}$, se tiene $\dim\mathrm{End}_\Lambda(X)-\dim\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,X)\leq E(z)$.

<u>demostración</u>:

Como en [P1], existen componentes irreducibles $\mathcal{C}_i$ de $\mathrm{mod}_\Lambda(w_i)$ de forma que w_i tiene descomposición genérica inescindible en $\mathcal{C}_i$ y el mapeo regular $\xi:G(z)\times\prod_{i=1}^{s}\mathcal{C}_i\longrightarrow\mathcal{C}$ tal que $\xi[(g,(X_i)_i)]=(\bigoplus_{i=1}^{s}X_i)^g$

está bien definido y es dominante.

Λ es mansa, por lo tanto existen $M_1,\ldots,M_s$ Λ-k[t]-bimódulos libres como k[t]-módulos derechos, y mapeos $f_i:k\longrightarrow \mathcal{C}_i$ $1\le i\le s$ donde $f_i(\lambda)=M_i \otimes_{k[t]} S_\lambda$ con S_λ el k[t]-módulo simple asociado a λ, de forma que los mapeos $F_i:G(w_i)\times \mathrm{Im} f_i \longrightarrow \mathcal{C}_i$, $(h,Y)\longrightarrow Y^h$ están bien definidos y son dominantes. Entonces $\mathrm{Im}F_i$ es un subconjunto constructible de $\mathcal{C}_i$. Además, la restricción $\zeta:G(z)\times \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Im} f_i \longrightarrow \mathcal{C}$ de ξ, está bien definida y es dominante. Sea U el subconjunto no vacío de $\mathrm{Im}\zeta$ formado por puntos no singulares de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, de forma que si $X\in U$ $\dim\zeta^{-1}(X)=\dim G(z)+\sum_{i=1}^{s}\dim \mathrm{Im} f_i-\dim\mathcal{C} \le E(z)+s$. Entonces U es un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{C}$.

Sea $X=\bigoplus_{i=1}^{s} X_i$ con $X_i\in \mathrm{ind}_\Lambda(w_i)$. Por [CB] sabemos que existe sólo un número finito de puntos (hasta isomorfía) $X_{1i},\ldots,X_{ti}$ en $\mathrm{Im} f_i$ tal que si $W\in \mathrm{Im} f_i/\{X_{1i},\ldots,X_{ti}\}$, $W\cong\tau W$. Por lo tanto si $\dim \mathrm{Im} f_i=1$, podemos suponer que $X_i\cong\tau X_i$. Si $\dim \mathrm{Im} f_i=0$, entonces $G(w_i)X_i$ es denso en $\mathcal{C}_i$ y en ese caso $G(w_i)X_i$ es una órbita abierta de $\mathrm{mod}_\Lambda(w_i)$.

Para cualquier $t\in\mathbb{N}$, sea $U^t=\{X\in\mathcal{C}:\dim \mathrm{End}_\Lambda(X)\le t\}$ Usando la semicontinuidad del Hom(-,-) tenemos que $U^t\cap\mathcal{C}$ es abierto en $\mathcal{C}$. Sea $s_0=\min\{t\in\mathbb{N}:U^t\ne\emptyset\}$, entonces U^{s_0} es abierto y denso en $\mathcal{C}$. Sea $U_0=U^{s_0}\cap U$. Este es el conjunto buscado.

a) La primera afirmación se sigue por construcción

Sea $X=\bigoplus_{i=1}^{s} X_i$, $X_i\in \mathrm{ind}_\Lambda(w_i)$ y $X\in U_0$. Supongamos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_i,X_j)\ne 0$

para alguna $i\neq j$. Consideremos una sucesión exacta no escindible $0 \longrightarrow \underset{t\neq i}{\oplus} X_t \longrightarrow Y \longrightarrow X_i \longrightarrow 0$, podemos entonces construir un mapeo regular $\xi : k \longrightarrow \mathrm{mod}_\Lambda(z)$ con $\xi(\lambda)\cong Y$ $\forall$ $\lambda\neq 0$ y $\xi(0)=X$, obteniendo que $X\in\overline{G(z)Y}$. En efecto, para toda $\alpha\in Q_1$, $Y(\alpha)$ está dado por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \underset{t\neq i}{\oplus} X_t(\alpha) & M(\alpha) \\ 0 & X_i(\alpha) \end{pmatrix} = Y(\alpha).$$

Para cada $\lambda\in k$ definimos el módulo $Y_\lambda(\alpha)$ de dimensión z donde $Y_\lambda(\alpha)=\begin{pmatrix} \underset{t\neq i}{\oplus} X_t(\alpha) & \lambda M(\alpha) \\ 0 & X_i(\alpha) \end{pmatrix}$. Hacemos $\xi(\lambda)=Y_\lambda$.

Por tanto $G(z)Y\cap U\neq\emptyset$. Para $M\in G(z)Y\cap U$, $\dim\mathrm{End}_\Lambda M=\dim\mathrm{End}_\Lambda Y<\dim\mathrm{End}_\Lambda X=s_0$ una contradicción.

b),c) Como U está formado por puntos no singulares de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, entonces para cada $X\in U$, $E(z)=\dim G(z)-\dim\mathscr{C}\geq\dim\mathrm{End}_\Lambda X-\dim\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,X)$.

d) Observemos que si $E(z)=0$, como $E(z)\geq\sum_{i=1}^{s}E(w_i)$ (lema 3.2) y como Λ es mansa $E(w_i)\geq 0$, $1\leq i\leq s$, entonces $E(w_i)=0$. Por tanto $\dim\mathrm{Im}f_i^1=1$, de donde $\dim\mathrm{End}_\Lambda(X)=s$, en consecuencia $\dim\mathrm{Hom}_\Lambda(X_i,X_j)=\delta_{ij}$. Además, $0=E(w_i)\geq\dim\mathrm{End}_\Lambda(X_i)-\dim\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_i,X_i)\geq 0$. Entonces $\dim\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X_i,X_i)=1$ ■

OBSERVACION: Si en las hipótesis del teorema anterior $\mathscr{C}$ es componente irreducible, no necesariamente de dimensión maximal, sin hacer cambios en la demostración, (a) y (b) continúan siendo válidos y (c) quedaría como $\forall$ $X\in U\cap\mathscr{C}$, $s\leq\dim\mathrm{End}\,X\leq s+\dim G(z)-\dim\mathscr{C}$.

Como un corolario del teorema anterior podemos obtener la proposición 8.1 de [P1].

PROPOSICION Sea Λ un álgebra mansa y z es un vector dimensión Λ tal que $E(z)=0$. Si $z=w_1+\ldots+w_s$ es la descomposición genérica de z en una componente irreducible $\mathscr{C}$ de dimensión maximal de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, entonces existe un subconjunto abierto $U_{\mathcal{C}}$ de $mod_\Lambda(z)$ tal que

(a) $\forall\ X\in U_{\mathcal{C}}$, $X=X_1\oplus\ldots\oplus X_s$ con $\underline{\dim}X_i=w_i$ y para todo $i,j\in\{1,\ldots,s\}$

$\dim_k Hom_\Lambda(X_i,X_j)=\delta_{ij}=\dim_k Ext^1_\Lambda(X_i,X_j)$, donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker.

(b) $X_i\cong\tau X_i$ para toda i y X_i está en la boca de un tubo homogéneo de Γ_Λ.

COROLARIO: Si Λ es mansa con $gldim\Lambda\leq 2$, y U el conjunto abierto de la componente irreducible $\mathcal{C}$, como en el teorema 4.1. Entonces para cualquier $X\in U$, $\dim Ext^2_\Lambda(X,X)\geq q_\Lambda(z)-E(z)$.

<u>demostración</u>: Como $gldim\Lambda\leq 2$, entonces para cualquier $X\in U$, tenemos $q_\Lambda(z)=\dim End_\Lambda(X)-\dim Ext^1_\Lambda(X,X)+\dim Ext^2_\Lambda(X,X)$, entonces $\dim Ext^2_\Lambda(X,X)\geq q_\Lambda(z)-E(z)$ pues $E(z)\geq\dim End_\Lambda(X)-\dim Ext^1_\Lambda(X,X)$■

PROPOSICION[P1] Si Λ es mansa, entonces $q_\Lambda(z)\geq E(z)\geq 0$ para todo **z** vector dimensión de Λ.

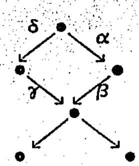
<u>demostración</u>: Por el teorema generalizado de ideales principales de Krull, sabemos que si $\mathcal{C}$ es cualquier componente irreducible de $mod_\Lambda(z)$, $\dim\mathcal{C}\geq\sum_{\alpha\in Q_1}z(i(\alpha))z(j(\alpha))-\sum_{i,j\in Q_0}r(i,j)z(i)z(j)$. Tenemos entonces que $\dim\ mod_\Lambda(z)\geq\sum_{\alpha\in Q_1}z(i(\alpha))z(j(\alpha))-\sum_{i,j\in Q_0}r(i,j)z(i)z(j)$. Por lo tanto $E(z)\leq q_\Lambda(z)$. Usando el lema 3.2 es suficiente probar que $\dim G(z)-\dim\mathcal{C}\geq 0$ para componentes irreducibles $\mathcal{C}$ de $mod_\Lambda(z)$, donde la descomposición genérica de z sea inescindible.

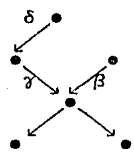
Si U es el abierto de la descomposición genérica en $\mathcal{C}$ y $\exists\ X\in U$ con $X\cong\tau X$, entonces, $\dim G(z)-\dim\mathcal{C}\geq\dim End_\Lambda X-\dim Ext^1_\Lambda(X,X)\geq 0$. En caso contrario, existe una órbita abierta en $\mathcal{C}$, por tanto $E(z)>0$■

EJEMPLOS:

a) Sean Λ y z como en el ejemplo 4 de 3.1, entonces $q_\Lambda(z)=5$ y $E(z)=\dim G(z)-\dim \mathrm{mod}_\Lambda(z)=6-2=4$. Por lo tanto las desigualdades de la proposición anterior pueden ser estrictas.

b) El siguiente ejemplo muestra que las condición $q_\Lambda(z)\geq 0$ para todo z vector dimensión de Λ no es condición suficiente de mansedumbre. Como veremos en la sección 4.2, la condicón $E(z)\geq 0$ para todo z vector dimensión de Λ, tampoco es condición suficiente de mansedumbre.

Sea $\Lambda=k[Q]/I$ donde Q es el carcaj  e $I=<\alpha\beta>$, Λ es salvaje. En efecto, existe una inclusión de la categoría de módulos modΓ en modΛ,

con Γ el álgebra dada por el carcaj $Q^*=$  . La inclusión está dada en la forma canónica, es decir a $M\in\mathrm{mod}\Gamma$ le asociamos M' en modΛ con $M'(v)=M(v)$ para todo $v\in Q_0=Q_0^*$, $M'(\alpha)=0$ y $M'(\mu)=M(\mu)$ para $\mu\in Q_1^*=Q_1\setminus\{\alpha\}$. Γ es salvaje pues su carcaj contiene propiamente un diagrama $\tilde{D}_4$.

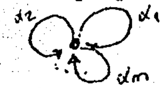
Probaremos ahora que q_Λ es débilmente no negativa. Sea A el álgebra $A=k[Q]/J$, donde $J=<\alpha\beta-\delta\gamma>$. q_A es débilmente no negativa pues $A=B[M]$ con B mansa hereditaria, $M=\mathrm{rad}P_w$ y M es un B-módulo regular en la boca de un tubo de rango 2. Entonces A es tubular doméstica de tipo (2,2,3).

4.2 E(z) y el tipo de representación

PROPOSICION[P1] Si Λ es un álgebra estrictamente salvaje, entonces $E(z)<0$ para un número infinito de vectores dimensión z.

EJEMPLOS:

a) En [P1], De la Peña dá un ejemplo donde prueba que el converso de esta proposición es falso. Sea $\Lambda_m=k[Q]/J^2$ donde

Q= 

y J es el ideal generado por las flechas. Para cualquier m, estas álgebras no son estrictamente salvajes. De la Peña prueba que para n par, $\dim \operatorname{mod}_{\Lambda_m}(n)=(\underline{\frac{m+1}{4}})n^2$ y $\dim \operatorname{mod}_{\Lambda_m}(n)=(\underline{\frac{m+1}{4}})(n^2-1)$ si n es impar. Si m=4 entonces $\dim \operatorname{mod}_{\Lambda_4}(n)>n^2$ para $n\geq 2$, es decir, $E(n)<0$ para $n\geq 2$. En el caso m=3, entonces $E(n)=n^2-n^2=0$, sin embargo Λ no es mansa, lo cual prueba que $E(z)\geq 0$ para todo z vector dimensión de Λ no es condición suficiente de mansedumbre.

b) Daremos ahora un ejemplo que nos muestra que en el caso de algebras salvajes no podemos esperar una descripción más precisa del comportamiento de E(z).

Sea Λ dada por el carcaj , con $I=J^2$, donde J es el ideal generado por todas las flechas. Usando los cálculos de dimensiones de las variedades de módulos para el álgebra Λ_3 del ejemplo anterior, sabemos que si n es par, $\dim \operatorname{mod}\Lambda_3(n)=n^2$. Entonces si $z=(n,n)$ tenemos que $\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)<2n^2$. Por tanto $E(z)>2n^2-2n^2=0$. Si $z=(n,0)$ para n impar , entonces $\operatorname{mod}_{\Lambda_3}(n)=n^2-1=\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)$. De donde $E(z)=1$.

$E(z)$ toma valores positivos tan grandes como se quiera, pues para $z=(1,n)$, $\dim \mathrm{mod}_\Lambda(z)=n$. Entonces $E(z)=n^2+1-n\geq n$ para $n\geq 1$. $E(z)$ toma valores negativos para infinitos vectores dimensión. En efecto, sea $z=(n,1)$ con n par, $n>2$. Como $\dim \mathrm{mod}_{\Lambda_3}(n)=n^2$, y para cada módulo en $M\in\mathrm{mod}_{\Lambda_3}(n)$ podemos construir módulos $M_s\in\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ de la siguiente forma: $M_s(\alpha)=M_s(\beta)=M_s(\gamma)$ y $M_s(\delta)\in\{M(\alpha)_s,M(\beta)_s,M(\gamma)_s\}$ donde A_s denota el s-ésimo renglón de la matriz A. Si $M\in\mathrm{mod}_{\Lambda_3}(n)$ está en el abierto $\emptyset\neq\{M\in\mathrm{mod}_{\Lambda_3}(n)/M(\alpha)\neq\lambda M(\beta)\neq\mu M(\gamma)$ para todo $\lambda,\mu\in k\}$, entonces $\dim\{M(\alpha)_s,M(\beta)_s,M(\gamma)_s\}\geq 2$, de donde $\dim \mathrm{mod}_\Lambda(z)\geq n^2+2$. Por lo tanto $E(z)\leq n^2+1-n^2-2=-1$.

Christof Geiß prueba en [Ge] una interesante caracterización de álgebras mansas. Presentamos aquí sólo una parte de ella, que está relacionada con nuestro trabajo.

TEOREMA: Λ es k-álgebra mansa si y sólo si para todo vector dimensión z, y para $t\in\{1,..,\sum_{v\in Q_0}z(v)^2\}$, $\dim\mathrm{mod}_\Lambda(z,t)\leq \sum_{v\in Q_0}z(v)+\sum_{v\in Q_0}z(v)^2-t$. Donde $\mathrm{mod}_\Lambda(z,t)=\{X\in\mathrm{mod}_\Lambda(z)/ \dim\mathrm{End}_\Lambda M\leq t\}$. Obsérvese que de la semicontinuidad de la función Hom(-,-) se deduce que $\mathrm{mod}_\Lambda(z,t)$ es un subconjunto cerrado de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$.

4.3 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,X)$

Una implicación del trabajo de Crawley-Boevey[CB], es que hasta isomorfía, casi todo módulo X de una dimensión dada satisface entonces $E(z)=q_\Lambda(z)$. Hemos probado (a).

Como $E(z)=q_\Lambda(z)$ entonces $\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)=\dim G(z)-q_\Lambda(z)$. Por tanto $\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)=\sum_{\alpha\in Q_1} z(i(\alpha))z(f(\alpha)) - \sum_{i,j\in Q_0} r(i,j)z(i)z(j)$, lo cual prueba (b). Como en la proposición 4.1, si $\mathcal{D}$ es una componente irreducible de $\operatorname{mod}_\Lambda(z)$, entonces $\dim\mathcal{D}\geq \sum_{\alpha\in Q_1} z(i(\alpha))z(f(\alpha)) - \sum_{i,j\in Q_0} r(i,j)z(i)z(j)$ $=\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)\geq\dim\mathcal{D}$ por lo tanto [Ku] $\operatorname{mod}_\Lambda(z)$ es una intersección completa∎

LEMA Sea Λ mansa con $\operatorname{gldim}\Lambda\leq 2$, si $q_\Lambda(z)=0$, entonces $\operatorname{Ext}^2_\Lambda(z,z)$ es genéricamente cero en toda componente irreducible de dimensión maximal de $\operatorname{mod}_\Lambda(z)$.

<u>demostración</u>: Sea $\mathcal{C}$ componente irreducible de $\operatorname{mod}_\Lambda(z)$, sea U el abierto definido como en 4.1. Si $X\in U$, entonces

$\dim\operatorname{End}_\Lambda X-\dim\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X,X)\geq 0=q_\Lambda(z)=\dim\operatorname{End}_\Lambda X-\dim\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X,X)+\dim\operatorname{Ext}^2_\Lambda(X,X)$,

De donde $\operatorname{Ext}^2_\Lambda(X,X)=0$ para toda $X\in U$∎

COROLARIO: Si Λ es un álgebra mansa y $E(z)=0$, entonces existe una descomposición $z=w_1+\ldots+w_s$ tal que para cada i existe una familia $\{X_{\lambda i}\}$ de módulos en las bocas de tubos homogéneos con

$$\dim_k\operatorname{Hom}_\Lambda(X_{\lambda i},X_{\mu j})=\delta ij\delta_{\lambda\mu}=\dim_k\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X_{\lambda i},X_{\mu j}).$$

Si además $q_\Lambda(z)=0$ y $\operatorname{gldim}\Lambda\leq 2$, entonces los tubos son estándar.

<u>demostración</u>: la primera afirmación se sigue de la proposición 4.1 ahora bien, $q_\Lambda(z)=0$ y $\operatorname{gldim}\Lambda\leq 2$, entonces por 4.4 $\operatorname{Ext}^2_\Lambda(X_{\lambda i},X_{\lambda i})=0$. Por [Ri sección 3] los tubos son estándar.

Un resultado relacionado con los anteriores es el siguiente:

TEOREMA [GP] Sea Λ k-álgebra de dimensión finita. Sea $X\in\operatorname{mod}_\Lambda(z)$

tal que $Ext^2_\Lambda(X,X)=0$. Entonces X es un punto suave de $mod_\Lambda(z)$ y en el teorema de Voigt tenemos que $T_X/T_X^0 \cong Ext^1_\Lambda(X,X)$.

COROLARIO Sea $X \in mod_\Lambda(z)$ tal que $Ext^2_\Lambda(X,X)=0$. Se cumple la siguiente igualdad: $\dim G(z)-\dim_X mod_\Lambda(z)=\dim End_\Lambda(X)-\dim Ext^1_\Lambda(X,X)$.

<u>demostración</u>:

Como X es un punto suave, $\dim T_X=\dim_X mod_\Lambda(z)$ y $\dim T_X^0=\dim G(z)X$. Usando el teorema anterior, $\dim Ext^1_\Lambda(X,X)=\dim T_X-\dim T_X^0=\dim_X mod_\Lambda(z)-\dim G(z)+\dim End_\Lambda(X)$ ∎

SECCION 5 FAMILIAS DE MODULOS Y LA DESCOMPOSICION GENERICA

5.1 **PROPOSICION:** Sea Λ un álgebra mansa. Sea z vector dimensión de Λ. Supongamos que existe una familia infinita $(M_i)_{i\in I}$ de módulos inescindibles de $mod_\Lambda(z)$ no isomorfos dos a dos, tal que para toda $i\in I$, $\dim End_\Lambda(M_i)\leq E(z)+1$.

Entonces z tiene descomposición genérica inescindible en alguna componente irreducible de dimensión maximal.

<u>demostración</u>: Como Λ es mansa, existe $f:k\longrightarrow mod_\Lambda(z)$ mapeo regular tal que Imf intersecta las G(z)-órbitas de un número infinito de módulos de la familia $(M_i)_{i\in I}$. Consideremos el mapeo regular:

$$F:G(z)\times k\longrightarrow mod_\Lambda(z),\ (g,\lambda)\longmapsto f(\lambda)^g$$

Existe un conjunto abierto y denso U de ImF tal que para cualquier $Y\in U$, $\dim F^{-1}(Y)=\dim G(z)+1-\dim ImF$. Eligiendo $X\in U$ y en la familia $(M_i)_{i\in I}$ se tiene que $\dim End_\Lambda(X)\leq E(z)+1$.

El conjunto $\{\lambda\in k/f(\lambda)\cong X\}$ es finito. Si no, $\{\lambda\in k/f(\lambda)\cong X\}$ es un conjunto constructible y cofinito de k lo que contradice la elección de f.

Sea $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}=\{\lambda\in k/f(\lambda)\cong k\}$ y elijamos $g_i\in G(z)$ de forma que

$g_i:f(\lambda_i) \longrightarrow X_i$ es un isomorfismo. Tenemos una biyección regular $\varphi: \bigcup_{i=1}^{n} (Aut_\Lambda(X)\times\{\lambda_i\}) \longrightarrow F^{-1}(X)$, $\varphi(h,\lambda_i)=(g_ih,\lambda_i)$. Obtenemos entonces que $\dim F^{-1}(X)=\dim Aut_\Lambda(X)\leq E(z)+1$. Por lo tanto, $\dim ImF=\dim G(z)+1-\dim F^{-1}(X)\geq \dim G(z)-E(z)=\dim\ mod_\Lambda(z)$.

Sea $\mathcal{C}$ componente irreducible de $mod_\Lambda(z)$ tal que $\mathcal{C}\supseteq ImF$, entonces $\dim\mathcal{C}=\dim\ mod_\Lambda(z)$. Como ImF está formada por módulos inescindibles la descomposición genérica de z es inescindible∎

COROLARIO: Sea Λ k-álgebra mansa y z vector dimensión para Λ. Supongamos que z es raíz de Schur, entonces pueden ocurrir tres casos:

(a) $E(z)=1$, la descomposición genérica de z es inescindible en alguna componente irreducible $\mathcal{C}$ de dimensión maximal de $mod_\Lambda(z)$ y $\mathcal{C}$ es la cerradura de una órbita abierta.

(b) $E(z)=0$, la descomposición genérica de z es inescindible en alguna componente irreducible $\mathcal{C}$ de dimensión maximal de $mod_\Lambda(z)$ y el abierto de la descomposición genérica de $\mathcal{C}$ contiene infinitos módulos no isomorfos dos a dos.

(c) $E(z)=0$, la descomposición genérica de z es inescindible en alguna componente irreducible $\mathcal{C}$ de $mod_\Lambda(z)$ con $\dim\mathcal{C}=\dim\ mod_\Lambda(z)-1$ y $\mathcal{C}$ es la cerradura de una órbita abierta.

<u>demostración</u>: Sabemos que $E(z)\geq 0$. Como vimos en 3.3.1 existe $\mathcal{C}$ componente irreducible de $mod_\Lambda(z)$ con descomposición genérica inescindible y $\dim End_\Lambda X=1$ para toda $X\in U$, U el abierto de la descomposición genérica de $\mathcal{C}$. Del lema 1.3 sabemos que $E(z)\leq 1$.

Supongamos que $E(z)=1$. Para $Y\in U$, tenemos que $\dim\mathcal{C}\geq \dim G(z)Y= \dim G(z)-1=\dim\ mod_\Lambda(z)$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene dimensión maximal y $\dim G(z)Y=\dim\mathcal{C}$. Entonces $\overline{G(z)Y}=\mathcal{C}$ y $G(z)Y$ es abierta en $\mathcal{C}$.

Supongamos ahora que $E(z)=0$, si en el abierto de la descompo- sición genérica de $\mathcal{C}$ hay infinitos módulos inescindibles no isomorfos dos a dos, estos módulos tienen anillo de endomorfismos trivial. Esta componente irreducible debe tener dimensión maximal.

El caso que nos resta considerar es cuando $E(z)=0$ y en el abierto de la descomposición genérica de $\mathcal{C}$ existen sólo finitos módulos no isomorfos con anillo de endomorfismos el campo. En este caso, $\mathcal{C}=\overline{G(z)Y}$ para $Y\in U$, y entonces $\dim\mathcal{C}=\dim G(z)-1=\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)-1$ ∎

COROLARIO: Sea Λ mansa y supongamos que en $\operatorname{mod}_\Lambda(z)$ hay infinitos inescindibles X con $\operatorname{End}_\Lambda(X)$ trivial, entonces $E(z)=0$.

<u>demostración</u>:

Como z es raíz de Schur, por el corolario anterior $0\le E(z)\le 1$. El caso $E(z)=1$ se descarta ∎

Un converso parcial a la proposición 5.1 es el siguiente lema.

LEMA: Sea Λ k-álgebra mansa de dimensión finita. Si $E(z)\neq 0$ y la descomposición genérica de z es inescindible en alguna componente irreducible $\mathcal{C}$, de dimensión maximal, entonces

(a) Existe (hasta isomorfía) en el abierto de la descomposición genérica de $\mathcal{C}$, sólo un número finito de módulos inescindibles, y tienen anillo de endomorfismos de dimensión $E(z)$, o bien,

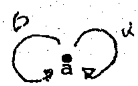
(c) El abierto de la descomposición genérica de $\mathcal{C}$ tiene un número infinito de módulos inescindibles, no isomorfos dos a dos y los módulos tienen anillo de endomorfismos con dimensión $E(z)+1$.

<u>demostración</u>: Si el abierto de la descomposición genérica de $\mathcal{C}$ tiene sólo un número finito de módulos no isomorfos, $\mathcal{C}=\overline{G(z)Y}$ para algún $Y\in\mathcal{C}$, de donde $\dim\operatorname{End}_\Lambda(Y)=\dim G(z)-\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)=E(z)$.

Si en el abierto de la descomposición genérica de $\mathcal{C}$, existen infinitos módulos inescindibles no isomorfos dos a dos, si $Y \in U$, U como en 4.1, $\dim G(z)Y < \dim \mathcal{G} = \dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)$. Entonces $\dim \operatorname{End}_\Lambda Y > E(z)$. Por (b) del teorema 4.1 $\dim \operatorname{End}_\Lambda Y = E(z)+1$∎

OBSERVACION: El lema 5.1 sigue siendo válido si $\mathcal{G}$ no es de dimensión maximal, pero debemos cambiar $E(z)$ por $\dim G(z) - \dim \mathcal{G}$. La demostración es análoga.

5.2 Ejemplo

(1) Sea Λ el álgebra con carcaj Q  y relaciones $\alpha^2=\beta^2=0=\alpha\beta=\beta\alpha$. Sea $z \in \mathbb{N}^{Q_0}$ con $z(a)=2$. Como en [P1,2.2] podemos probar que $\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)=3$. Para $\lambda \in k$, el módulo $V_\lambda \in \operatorname{mod}_\Lambda(z)$, dado por $V_\lambda(\alpha)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \lambda & 0\end{bmatrix}$ y $V_\lambda(\beta)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ es inescindible y está en la boca de un tubo homogéneo. Además, $\dim \operatorname{End}_\Lambda(V_\lambda)=2=\dim G(z)-\dim \operatorname{mod}_\Lambda(z)+1$, si $\lambda \in k$.

Los módulos en la familia $(V_\lambda)_{\lambda \in k}$ son no isomorfos dos a dos. Por la proposición 5.1 la descomposción genérica principal de z es inescindible.

El siguiente teorema nos dá un criterio geométrico para caracterizar, en ciertos casos, los vectores dimensión de módulos en las bocas de una familia de tubos de Γ_Λ cuando Λ es álgebra mansa.

SECCION 6 VECTORES DIMENSION EN FAMILIAS DE TUBOS HOMOGENEOS

Usando esta proposición y los resultados de la sección 5 obtenemos el siguiente:

TEOREMA Sea Λ álgebra mansa. Sea z vector dimensión de Λ. Entonces

$E(z)=0$ y la descomposición genérica de z es inescindible en alguna componente irreducible de dimensión maximal de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, si y sólo si existe una familia infinita de tubos homogéneos $(T_i)_{i\in I}$, con módulos inescindibles M_i en la boca de T_i con vector dimensión z y $\dim\mathrm{End}_\Lambda(M_i)=1$.

<u>demostración</u>: Si existe la familia infinita de tubos homogéneos con las condiciones del teorema, por proposición 5.1 la descomposición genérica de z es inescindible en alguna componente irreducible de dimensión maximal de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$, del corolario 5.1 $E(z)=0$.

Supongamos ahora que z tiene descomposición genérica inescindible en una componente irreducible $\mathscr{C}$ de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$ con dimensión maximal. Por teorema 4.1 existe un subconjunto abierto denso U de $\mathscr{C}$, $\dim U=\dim \mathrm{mod}_\Lambda(z)$, tal que si $X\in U$, X es inescindible, $X\cong\tau X$ y $\dim\mathrm{End}_\Lambda(X)=1$.

Para demostrar el teorema basta probar que U contiene infinitos módulos no isomorfos dos a dos y que están en la boca de tubos homogéneos.

Si U contiene un número finito de módulos(hasta isomorfía), Entonces existen, $X_1,\dots X_s \in U$, tal que $U\subseteq \bigcup_{i=1}^{s} G(z)X_i$. Por lo tanto $\mathscr{C}\subseteq \bigcup_{i=1}^{s}\overline{G(z)X_i}$. Como $\mathscr{C}$ es irreducible, $\exists j$, $1\leq j\leq s$ tal que $\mathscr{C}=\overline{G(z)X_j}$. De donde $\dim\mathscr{C}=\dim G(z)X_j=\dim G(z)-\dim\mathrm{End}_\Lambda(X_j)<\dim G(z)=\dim \mathrm{mod}_\Lambda(z)$.

Por lo tanto U contiene una familia infinita de módulos no isomorfos dos a dos $(M_i)_{i\in I}$ de la misma dimensión. Como $M_i\cong\tau M_i$, podemos suponer que cada M_i está en un tubo homogéneo T_i.

Si M_i no estuviera en la boca de T_i, entonces $\dim\mathrm{End}_\Lambda M_i>1$. Una contradicción∎

CAPITULO 4

LOS VECTORES DIMENSION DE MODULOS EN TUBOS FINITOS

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de los vectores dimensión de módulos en las bocas de tubos del carcaj Γ_Λ, en el caso de que los Λ-módulos en los tubos no pertenezcan a ciclos infinitos de modΛ. En el teorema principal se establecen condiciones para que, conociendo la existencia de una familia infinita de tubos en Γ_Λ, ésta sea estándar y los módulos en la boca de los tubos tengan un mismo vector dimensión que sea un cero de la forma cuadrática.

Dividimos el capítulo en tres secciones. En la primera se desarrollan los conceptos que usaremos y se dan ejemplos. La segunda sección estudia las propiedades de los tubos que sus módulos no pertenecen a ciclos finitos, que llamaremos tubos de ciclos finitos del álgebra y los tubos estándar generalizados (ver 7.2), se dan algunas equivalencias de estas propiedades y se establecen condiciones bajo las cuales estos conceptos son equivalentes.

En la sección final nos enfocamos a condiciones sobre los vectores dimensión para que existan familias infinitas de tubos finitos estándar. Se prueba que para el caso de álgebras de ciclos finitos el teorema 6 nos proporciona una familia tubular estándar.

SECCION 7 CONCEPTOS

7.1 El radical infinito

El radical infinito fué definido en 1.2, daremos ahora algunos ejemplos:

1. $rad_\Lambda(X,X)=End_\Lambda(X)\setminus Aut_\Lambda(X)$, $X\in ind\Lambda$

2. Sabemos de [Aus] Λ es de tipo de representación finita si y sólo si $rad^\infty_\Lambda(mod\Lambda)=0$.

3. Si $X;Y\in ind\Lambda$ y $0\neq f\in Hom_\Lambda(X,Y)\setminus rad^\infty_\Lambda(X,Y)$, entonces X,Y están en la misma componente conexa de Γ_Λ .

<u>demostración</u> <u>de</u> (3)

Si $f\notin rad_\Lambda(X,Y)$, entonces $X\cong Y$. Supongamos que $f\in rad_\Lambda(X,Y)$, como $f\notin rad^\infty_\Lambda(X,Y)$ exite $n\in\mathbb{N}$, tal que $f\in rad^n_\Lambda(X,Y)$ pero $f\notin rad^{n+1}_\Lambda(X,Y)$. Probaremos por inducción sobre n que X e Y están en la misma componente conexa de Γ_Λ. Si n=1, f es irreducible y X e Y están en la misma componente. Si n=2, $f=\sum g_i f_i$ con $f_i\in rad_\Lambda(X,Z_i)$, $g_i\in rad_\Lambda(Z_i,Y)$. Existe j tal que g_j y f_j son irreducibles, pues $f\notin rad^3_\Lambda(X,Y)$. Por lo tanto Z_j, Y y X están en la misma componente conexa. Supongamos por hipótesis de inducción que para toda $m<n$, y cualquier $M\in mod\Lambda$, si $f\in rad^m_\Lambda(X,M)$ pero $f\notin rad^{m+1}_\Lambda(X,M)$, entonces X y M pertenecen a la misma componente conexa de Γ_Λ. Si $f\in rad^{m+1}_\Lambda(X,Y)\setminus rad^{m+2}_\Lambda(X,Y)$, existen $f_i\in rad^m_\Lambda(X,Z_i)$ y $g_i\in rad_\Lambda(Z_i,Y)$ $1\leq i\leq s$ tal que $f=\sum g_i f_i$. Como $f\notin rad^{m+2}_\Lambda(X,Y)$, $\exists j$ tal que $f_i\notin rad^{m+1}_\Lambda(X,Z_j)$ y $g_j\notin rad^2_\Lambda(Z_j,Y)$. Por hipótesis de inducción X,Z_j e Y pertenecen a la misma componente conexa de Γ_Λ■

El concepto que desarrollaremos a continuación es el de componente estándar generalizada que ha sido de utilidad para describir el comportamiento de las componentes regulares de Γ_Λ, para Λ álgebra artiniana.

bra artiniana.

7.2 Componentes estándar generalizadas

DEFINICION: Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita y $\mathscr{C}$ una componente conexa de Γ_Λ. Decimos que $\mathscr{C}$ es estándar generalizada si para $X,Y\in\mathscr{C}$, $\mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X,Y)=0$.

EJEMPLOS:

1.Las componentes postproyectivas, preinyectivas y las componentes de conexión de cualquier álgebra artiniana de tilteo son estándar generalizadas[Ri].

2.[Sk1] Si $\mathscr{C}$ es una componente regular de Γ_Λ que contiene un módulo dirigido, entonces $\mathscr{C}$ es estándar generalizada.

En [Li], S. Liu prueba el siguiente teorema:

TEOREMA: Sea Λ k-álgebra de dimensión finita. Si $\mathscr{C}$ es una componente estándar de Γ_Λ, entonces $\mathscr{C}$ es estándar generalizada.

Una observación es que no toda componente estándar generalizada es estándar. A lo largo de este capítulo daremos condiciones bajo las cuales estas componentes son estándar.

Existen interesantes resultados de Skowronski acerca de las componentes estándar generalizadas que nos describen cómo son estas componentes en los casos de álgebras mansas y salvajes, enunciaremos uno de ellos, que está relacionado con este trabajo.

PROPOSICION [Sk1] Supongamos que Λ no es estrictamente salvaje, entonces toda componente regular estándar generalizada es un tubo estable.

Un concepto ligado directamente al de componentes estándar generalizadas que es fundamental en este capítulo es el de:

7.3 Ciclos infinitos

DEFINICION: Un <u>ciclo</u> en modΛ es una sucesión de morfismos no cero y no isomorfismos $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = M_0$ $t \geq 1$, donde M_i es inescindible para toda i. Si $t \leq 2$, se llama un <u>ciclo corto</u>. Un ciclo es <u>infinito</u> si $\exists i$ tal que $f_i \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(M_{i-1}, M_i)$. En otro caso, se dice que el ciclo es finito.

Un álgebra Λ se dice de <u>ciclos finitos</u> si cualquier ciclo de modΛ es finito, de <u>ciclos cortos finitos</u> si cualquier ciclo corto de modΛ es finito.

EJEMPLOS:

(1) Si $\Lambda = k[Q]/I$ con $Q =$
$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl] & \\ a \arrow[rr, shift left, "\alpha"] \arrow[rr, shift right, "\beta"'] & & b \arrow[ul] \end{tikzcd}$$
e $I = J^2$ con J el ideal generado por las flechas, entonces Λ no es de ciclos finitos, pues contiene el siguiente ciclo infinito:

$$P_c \longrightarrow S_c \longrightarrow I_c \longrightarrow S_b \xrightarrow{f} I_b \longrightarrow S_a \longrightarrow P_c, \quad f \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(S_b, I_b).$$

Las componentes de Γ_Λ son estándar generalizadas, pues Γ_Λ se obtiene de identificar S_c y S_d en $\Gamma_{\Lambda'}$, con Λ' el álgebra dada por el carcaj $\underset{c}{\bullet} \xrightarrow{\gamma} \underset{a}{\bullet} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \underset{b}{\bullet} \xrightarrow{\delta} \underset{d}{\bullet}$ y $\mathrm{rad}^2\Lambda = 0$. Ahora bien, $\Gamma_{\Lambda'}$ tiene la siguiente forma:

Para el álgebra de Kronecker las componentes son estándar generalizadas. Por tanto las componentes de Γ_Λ son estándar generalizadas.

(2) Si Λ es de tipo de representación finito, entonces Λ es de ciclos cortos finitos.

(3) Si Λ es álgebra tal que Γ_Λ consiste de una componente postproyectiva $\mathcal{P}$, una componente preinyectiva $\mathcal{I}$ y una familia tubular se-

parante, entonces Λ es de ciclos cortos finitos.

En efecto, $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$ son estándar generalizadas, $\mathcal{T}$ es estándar generalizada, pues $\mathcal{T}$ es estándar. Sea $X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} X$ un ciclo en modΛ, como $\mathcal{T}$ es separante, X y M deben estar en la misma componente conexa de Γ_Λ y por tanto el ciclo es finito.

Como casos especiales de (3) tenemos que:

(4) El álgebra de Kronecker, $\Lambda=k[Q]$, $Q=\bullet \leftleftarrows \bullet$, es de ciclos cortos finitos.

(5) Sea Λ el álgebra $\Lambda=k[Q]$ con $\underline{Q}$, la gráfica subyacente de Q, donde de Q es un Dynkin extendido y con orientación de forma que no haya ciclos orientados. Λ es de ciclos cortos finitos [Ri].

(6) Las álgebras ocultas mansas son de ciclos cortos finitos.

(7) Las álgebras tubulares iteradas son de ciclos finitos [PeT].

(8) Como un caso especial de las álgebras tubulares iteradas, De la Peña dá el siguiente ejemplo en [P2]. Si $\Lambda=k[Q]/I$ con Q el el siguiente carcaj e I generado por $\{\gamma\beta\alpha,\ \chi\gamma\beta,\ \nu\varepsilon-\gamma\psi,\ \mu\delta-\gamma\lambda\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & c & \\
 & b \arrow[u, "\alpha"] & \\
h & a \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\lambda"] \arrow[u, "\beta"] & f \\
j \arrow[u, "\varepsilon"] & e \arrow[l, "\nu"'] \arrow[r, "\mu"] \arrow[u, "\gamma"] & g \arrow[u, "\delta"'] \\
 & d \arrow[u, "\chi"] &
\end{tikzcd}$$

entonces Λ es de ciclos finitos.

(9) Sea $\Lambda=k[Q]/I$ con $Q= \alpha \circlearrowleft a \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} b$ e $I=\langle\alpha^2,\alpha\beta\rangle$. Λ no es de ciclos cortos finitos. En efecto sea $X\in$modΛ, con $\underline{\dim}X=(1,1)$, $X(\alpha)=0=X(\beta)$, $X(\gamma)=1$. X es sumando directo del radP_a. X está en un tubo estable de Γ_Λ. Como X es sumando directo de radP_1 y X es sincero, tenemos un ciclo corto infinito $X\xrightarrow{f}P_1\xrightarrow{h}X$ donde f es irreduci-

ble y $h \in \mathrm{rad}_{\Lambda}^{\infty}(P_a,X)$.

7.4 Algebras de ciclos cortos finitos y tipos de representación

El siguiente lema técnico fué probado en [AS] para el caso de ciclos finitos. La pueba presentada ahí funciona también en el caso de ciclos cortos finitos.

LEMA Sea Λ una k-álgebra de ciclos cortos finitos y B una subcategoría plena de Λ. Entonces B es de ciclos cortos finitos.

<u>prueba</u>: Supongamos que B tiene ciclos cortos infinitos, entonces existe $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M$ tal que $f \in \mathrm{rad}_B^{\infty}(M,N)$. Sea $E:\mathrm{mod}\Lambda \longrightarrow \mathrm{mod}B$ el funtor restricción asociado a la inclusión plena $B \longrightarrow \Lambda$ y denotemos por $E_1:\mathrm{mod}B \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ un adjunto izquierdo de E tal que $EE_1 \cong 1_{\mathrm{mod}B}$. Entonces $E_1(M)$ y $E_1(N)$ son Λ-módulos inescindibles y la sucesión $E_1(M) \xrightarrow{E(f)} E_1(N) \xrightarrow{E(g)} E_1(M)$ es un ciclo corto infinito de modΛ. En efecto, $E(f) \in \mathrm{rad}_{\Lambda}^{\infty}(E(M),E(N))$, pues para cada $t>0$, f puede ser escrito como una combinación lineal de t morfismos no cero y no isomorfismos entre inescindibles en modB. Como E_1 es un funtor k-lineal, $E_1(f)$ puede ser escrito como una combinación lineal de composiciones de t morfismos no cero y no isomorfismos entre inescindibles en modΛ. Una contradicción ∎

PROPOSICION Sea Λ un álgebra de ciclos cortos finitos, entonces Λ es un álgebra mansa.

<u>demostración</u>:

Supongamos que Λ es álgebra salvaje. Sea B como en el ejemplo 8 de 7.3. B es k-álgebra con ciclos cortos infinitos. Sabemos que existen funtores F y G, de forma que $G:\mathrm{mod}B \longrightarrow \mathrm{mod}k\langle t,s\rangle$ es fiel y pleno, y $F:\mathrm{mod}k\langle t,s\rangle \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ que preserva clases de isomorfía e inescindibles y es exacto derecho. Por tanto F es fiel.

Sea $X \in \mathrm{ind}B$ como en el ejemplo, $Y=P_1$. Entonces existen morfismos $f \in \mathrm{rad}^{\infty}_{\Lambda}(Y,X)$ y $g \in \mathrm{Hom}_B(Y,X)$ $g \neq 0$. Sea $H=FG$, H es fiel, HX, HY son Λ-módulos inescindibles no cero y $Hf \in \mathrm{rad}^{\infty}_{\Lambda}(HX,HY)$, $Hg \neq 0$. Por tanto en Λ existen ciclos cortos infinitos. Una contradicción∎

7.5 Estándar generalizada vs ciclos infinitos

LEMA. Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita y $\mathcal{C}$ una componente convexa estándar generalizada del carcaj Γ_{Λ}, entonces los módulos de $\mathcal{C}$ no pertenecen a ciclos infinitos.

<u>demostración</u>: Supongamos que existe algún ciclo infinito

$$X \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{h_2} Y_2 \xrightarrow{h_3} Y_3 \longrightarrow \ldots\ldots Y_s \xrightarrow{h_s} X$$

con $X \in \mathcal{C}$ y $h_i \in \mathrm{rad}^{\infty}_{\Lambda}(Y_{i-1},Y_i)$, para alguna i, con $Y_0=X=Y_{s+1}$. Como $\mathcal{C}$ es convexo, $Y_i \in \mathcal{C}$ para toda i. Pero $\mathcal{C}$ es estándar generalizado, una contradicción∎

SECCION 8 LOS TUBOS ESTABLES Y LOS CICLOS INFINITOS

8.1 Los tubos estables estándar generalizados

PROPOSICION [Sk2]: Sea $\mathcal{T}$ tubo estable de Γ_{Λ}. $\mathcal{T}$ es estándar generalizado si y sólo si $\mathrm{rad}^{\infty}_{\Lambda}(Z,Z)=0$ para cualquier módulo $Z \in \mathcal{T}$.

<u>demostración</u>: Supongamos que $0 \neq f \in \mathrm{rad}^{\infty}_{\Lambda}(X,Y)$ para $X,Y \in \mathcal{T}$. Podemos suponer que $X \not\cong Y$. Sea δ camino seccional en $\mathcal{T}$, del infinito a X, sea σ camino seccional de Y al infinito. Sea Z un módulo en la intersección de δ y σ. Entonces, existe un camino de epimorfismos irreducibles $Z=X_0 \xrightarrow{g_1} X_1 \xrightarrow{g_2} \ldots \xrightarrow{g_r} X_r=X$ y un camino de monomorfismos irreducibles $Y=Y_0 \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{h_2} \ldots \xrightarrow{h_s} Y_s=Z$. Por lo tanto el morfismo $0 \neq h_1 \ldots h_s f g_1 \ldots g_r \in \mathrm{rad}^{\infty}_{\Lambda}(Z,Z)$. La otra implicación es clara∎

COROLARIO Sea Λ una k-álgebra finito dimensional y $\mathcal{T}$ un tubo estable de Γ_Λ que sus módulos no pertenecen a ciclos cortos infinitos, entonces $\mathcal{T}$ es estándar generalizado.

La siguiente equivalencia para tubos estables fué probada por Skowronski en [Sk1].

TEOREMA Sea Λ k-álgebra de dimensión finita. Sea $\mathcal{T}$ un tubo estable de Γ_Λ, las siguientes condiciones son equivalentes :

(a) $\mathcal{T}$ es estándar generalizado.

(b) Los módulos en la boca de $\mathcal{T}$ son ortogonales dos a dos y tienen anillo de endomorfismos trivial.

(c) Cada lazo $M \longrightarrow M$ en modΛ con $M\in\mathcal{T}$ es finito.

8.2 Los módulos de tubos estables homogéneos cortos finitos

Por simplicidad llamaremos <u>tubos finitos</u>(<u>cortos finitos</u>) a los tubos cuyos módulos no pertenezcan a ciclos infinitos(ciclos cortos infinitos) del álgebra.

LEMA Sea M módulo inescindible sincero en un tubo estable corto finito de Γ_Λ, entonces $\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,M)=\mathrm{Hom}_\Lambda(X,M)$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(M,X)=\mathrm{Hom}_\Lambda(M,X)$ para cualquier Λ-módulo X.

<u>prueba</u>: Supongamos que $\overline{f}=0$ para algún morfismo no cero $f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(X,M)$ entonces f se factoriza a través de un Λ-módulo inyectivo y existe un Λ-módulo inyectivo inescindible I tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(I,M)\neq 0$. Como M es sincero, $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,I)\neq 0$. Lo cual nos produce un ciclo corto de morfismos no cero y no isomorfismos $M \longrightarrow I \longrightarrow M$ en modΛ. Como el ciclo debe ser finito, I y M deben estar en la misma componente de Γ_Λ. Una contradicción al hecho de que M pertenece a un tubo estable. La otra afirmación se prueba en forma similar∎

LEMA Sea M módulo inescindible en un tubo estable finito $\mathcal{T}$ de Γ_Λ, entonces $\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,\tau X)=\mathrm{Hom}_\Lambda(X,\tau X)$.

<u>demostración</u>: Si existe $f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(X,\tau X)$ tal que $\overline{f}=0$, entonces $f=gh$ con $h\in\mathrm{Hom}_\Lambda(X,I)$, $g\in\mathrm{Hom}_\Lambda(I,\tau X)$ e I Λ-módulo inyectivo inescindible.

Tenemos entonces un ciclo $\tau X\longrightarrow E'\longrightarrow X\longrightarrow I\longrightarrow\tau X$, donde E' es un sumando inescindible del término del medio de la sucesión de A-R que termina en X. Como el ciclo debe ser finito $I\in\mathcal{T}$, una contradicción∎

PROPOSICION Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita y $\mathcal{T}$ tubo estable homogéneo corto finito de Γ_Λ. Entonces, si M es un módulo en $\mathcal{T}$ $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M,M)=0$. Si $\mathcal{T}$ es tubo sincero, entonces idimM≤1 y pdimM≤1.

<u>demostración</u>: Supongamos que $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M,M)\neq 0$, entonces existe una sucesión exacta (*) $0\longrightarrow K\longrightarrow P_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$ con $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K,M)\neq 0$ y P_0 la cubierta proyectiva de M. Aplicando el funtor Hom(M,-) a (*) tenemos una sucesión exacta, $0\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(M,K)\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(M,P_0)\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(M,M)$ $\longrightarrow\ldots\ldots$ Ahora bien, $0\neq\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K,M)\cong D\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}M,K)\cong D\mathrm{Hom}_\Lambda(M,K)$. Por tanto $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,K)\neq 0$, de donde $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,P_0)\neq 0$. Entonces existe P_v proyectivo inescindible y sumando directo de P_0, con $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,P_v)\neq 0$.

Pero P_0 es la cubierta proyectiva de M, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_v,M)\neq 0$. Lo cual nos proporciona un ciclo $M\xrightarrow{h}P_v\xrightarrow{f}M$ con $f\in\mathrm{rad}^\infty_\Lambda(P_v,M)$, pues M y P_v pertenecen a diferentes componentes conexas de Γ_Λ, dado que $\mathcal{T}$ es estable. Contradicción.

Supongamos que $\mathcal{T}$ es sincero y pdimM>1, entonces existe $v\in Q_0$ y $0\neq f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(I_v,\tau M)$. Como M es sincero, existe $0\neq g\in\mathrm{Hom}_\Lambda(M,I_v)$. El isomorfismo, $M\cong\tau M$ nos induce un ciclo corto finito $I_v\longrightarrow M\longrightarrow I_v$, como $\mathcal{T}$ es corto finito, $I_v\in\mathcal{T}$, contradicción. De manera análoga podemos probar que idimM≤1∎

COROLARIO 1: Si $\mathcal{T}$ es un tubo estable homogéneo corto finito, entonces $\mathcal{T}$ es estándar.

demostración: Como $\mathcal{T}$ es corto finito, entonces $\mathcal{T}$ es estándar generalizado, por teorema 8.1 el módulo en la boca de $\mathcal{T}$ tiene anillo de endomorfismos trivial y son ortogonales dos a dos. Por la proposición anterior, si M es el módulo de la boca de $\mathcal{T}$, $Ext^2_\Lambda(M,M)=0$ entonces $\mathcal{T}$ es estándar, ver [Ri]■

COROLARIO 2 : Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita y $\mathcal{T}$ tubo estable homogéneo sincero corto finito de Γ_Λ. Entonces, si M es módulo en $\mathcal{T}$, $\chi_\Lambda(\underline{dim}M)=0$.

demostración: $pdimM\leq 1$, entonces $\chi_\Lambda(\underline{dim}M)=dimEnd_\Lambda(M)-dimExt^1_\Lambda(M,M)=dimEnd_\Lambda(M)-dim\overline{Hom}_\Lambda(M,\tau M)$, usando el lema 8.2 $\chi_\Lambda(\underline{dim}M)=dimEnd_\Lambda(M)-dimHom_\Lambda(M,\tau M)=0$■

8.3 Los módulos de tubos estables finitos.

Para tubos finitos no homogeneos se puede probar un resultado similar a la proposición anterior.

PROPOSICION Sea Λ k-álgebra de dimensión finita y $\mathcal{T}$ un tubo estable finito de Γ_Λ, entonces $Ext^2_\Lambda(M,N)=0$ para M,N en $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ es sincero, entonces $idimM\leq 1$ y $pdimM\leq 1$ para $M\in\mathcal{T}$.

demostración: Supongamos que $Ext^2_\Lambda(M,N)\neq 0$ para M y N en la boca de $\mathcal{T}$. Entonces existe una sucesión exacta (*) $0\longrightarrow K\longrightarrow P_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$ con $Ext^1_\Lambda(K,N)\neq 0$ y P_0 la cubierta proyectiva de M. Como $0\neq Ext^1_\Lambda(K,N)\cong DHom_\Lambda(\tau^{-1}N,K)$, entonces existe K′ sumando directo inescindible de K tal que $Hom_\Lambda(\tau^{-1}N,K')\neq 0$. De (*) tenemos que existe $v\in Q_0$ tal que P_v es sumando directo de P_0 con $Hom_\Lambda(P_v,M)\neq 0$ y $Hom_\Lambda(K',P_v)\neq 0$. Como N y M están en la boca de $\mathcal{T}$, existe r tal que $\tau^{-r}M\cong\tau^{-1}N$. Tenemos entonces un ciclo

$$P_v \longrightarrow M \longrightarrow R_0 \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow R_1 \longrightarrow \tau^{-2}M \longrightarrow \ldots \tau^{-r}M \cong \tau^{-1}N \longrightarrow K' \longrightarrow P_v$$

con R_i el término del medio de la sucesión de A-R que comienza en $\tau^{-i}M$. Como $\mathcal{T}$ es finito, $P_v \in \mathcal{T}$, lo que contradice el hecho de que $\mathcal{T}$ es estable. Si M,N no están en la boca de $\mathcal{T}$ y $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M,N) \neq 0$, entonces tenemos un ciclo

$$P_v \longrightarrow M \longrightarrow R_0 \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow R_1 \longrightarrow \tau^{-2}M \longrightarrow \ldots \tau^{(-r)}M \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow$$
$$\ldots \longrightarrow S_l \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow K' \longrightarrow P_v \; .$$

donde $S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_l \longrightarrow N$ es un camino en $\mathcal{T}$, apuntando a N y L es término del medio de la sucesión de A-R que empieza en $\tau^{-1}N$. Como $\mathcal{T}$ es finito, $P_v \in \mathcal{T}$, lo que contradice el hecho de que $\mathcal{T}$ es estable.

Supongamos que $\mathcal{T}$ es sincero y pdimM>1 para $M \in \mathcal{T}$, entonces existe $v \in Q_0$ y $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(I_v, \tau M)$. Si el s es el rango de $\mathcal{T}$, $\tau^{-s+1}M \cong \tau M$. Como $\mathcal{T}$ es sincero, existe $0 \neq g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-s+1}M, I_v)$ y existe una cadena de morfismos irreducibles de τM en $\tau^{-s+1}M$, produciendo un ciclo:

$$I_v \longrightarrow \tau M \longrightarrow R_{-1} \longrightarrow M \longrightarrow R_0 \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow R_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \tau^{-s+1}M \cong \tau M \longrightarrow I_v$$

donde los R_i son términos del medio de la sucesión de A-R que comienza en $\tau^{-i}M$. Como $\mathcal{T}$ es finito, $I_v \in \mathcal{T}$, lo que contradice que $\mathcal{T}$ es estable∎

COROLARIO 1: Si $\mathcal{T}$ es tubo estable finito entonces $\mathcal{T}$ es estándar.

<u>demostración</u>: $\mathcal{T}$ es estándar generalizado entonces por teorema 8.1, los módulos en la boca de $\mathcal{T}$ tienen anillo de endomorfismos trivial y son ortogonales dos a dos. De la proposición anterior para M,N en la boca de $\mathcal{T}$, $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M,N)=0$, entonces $\mathcal{T}$ es estándar∎

COROLARIO 2 Si $\mathcal{T}$ es tubo estable sincero finito de rango p y $M \in \mathcal{T}$, entonces $\chi_\Lambda(\sum_{i=0}^{p-1} \underline{\dim}\tau^i M)=0$. Si p=1, entonces $\chi_\Lambda(\underline{\dim}M)=0$.

entonces un ciclo

$$P_v \longrightarrow M \longrightarrow R_0 \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow R_1 \longrightarrow \tau^{-2}M \longrightarrow \ldots \tau^{-r}M \cong \tau^{-1}N \longrightarrow K' \longrightarrow P_v$$

con R_i el término del medio de la sucesión de A-R que comienza en $\tau^{-i}M$. Como $\mathcal{T}$ es finito, $P_v \in \mathcal{T}$, lo que contradice el hecho de que $\mathcal{T}$ es estable. Si M,N no están en la boca de $\mathcal{T}$ y $Ext^2_\Lambda(M,N) \neq 0$, entonces tenemos un ciclo

$$P_v \longrightarrow M \longrightarrow R_0 \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow R_1 \longrightarrow \tau^{-2}M \longrightarrow \ldots \tau^{-r}M \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow$$

$$\ldots \longrightarrow S_1 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow K' \longrightarrow P_v \; .$$

donde $S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_1 \longrightarrow N$ es un camino en $\mathcal{T}$, apuntando a N y L es término del medio de la sucesión de A-R que empieza en $\tau^{-1}N$. Como $\mathcal{T}$ es finito, $P_v \in \mathcal{T}$, lo que contradice el hecho de que $\mathcal{T}$ es estable.

Supongamos que $\mathcal{T}$ es sincero y pdimM>1 para $M \in \mathcal{T}$, entonces existe $v \in Q_0$ y $0 \neq f \in Hom_\Lambda(I_v, \tau M)$. Si el s es el rango de $\mathcal{T}$, $\tau^{-s+1}M \cong \tau M$. Como $\mathcal{T}$ es sincero, existe $0 \neq g \in Hom_\Lambda(\tau^{-s+1}M, I_v)$ y existe una cadena de morfismos irreducibles de τM en $\tau^{-s+1}M$, produciendo un ciclo:

$$I_v \longrightarrow \tau M \longrightarrow R_{-1} \longrightarrow M \longrightarrow R_0 \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow R_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \tau^{-s+1}M \cong \tau M \longrightarrow I_v$$

donde los R_i son términos del medio de la sucesión de A-R que comienza en $\tau^{-i}M$. Como $\mathcal{T}$ es finito, $I_v \in \mathcal{T}$, lo que contradice que $\mathcal{T}$ es estable■

COROLARIO 1: Si $\mathcal{T}$ es tubo estable finito entonces $\mathcal{T}$ es estándar.

<u>demostración</u>: $\mathcal{T}$ es estándar generalizado entonces por teorema 8.1, los módulos en la boca de $\mathcal{T}$ tienen anillo de endomorfismos trivial y son ortogonales dos a dos. De la proposición anterior para M,N en la boca de $\mathcal{T}$, $Ext^2_\Lambda(M,N)=0$, entonces $\mathcal{T}$ es estándar■

COROLARIO 2 Si $\mathcal{T}$ es tubo estable sincero finito de rango p y $M \in \mathcal{T}$, entonces $\chi_\Lambda(\sum_{i=0}^{p-1} \underline{\dim}\tau^i M)=0$. Si p=1, entonces $\chi_\Lambda(\underline{\dim}M)=0$.

8.4 Una equivalencia para tubos finitos

TEOREMA Sea Λ k-álgebra de dimensión finita. Sea $\mathcal{T}$ un tubo estable de Γ_Λ, las siguientes condiciones son equivalentes :

(a) $\mathcal{T}$ es estándar y convexo

(b) $\mathcal{T}$ es tubo finito.

<u>demostración</u>:

(a)$\Rightarrow$(b) se sigue directamente del lema 7.5

(b)$\Rightarrow$(a) del corolario 1 de la proposición 1 de 8.2. se sigue que $\mathcal{T}$ es estándar. Mostraremos que $\mathcal{T}$ es convexo. Sea $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_s} X_s$, con X_0, $X_s \in \mathcal{T}$. Tenemos en $\mathcal{T}$ un camino $X_s \longrightarrow \dots \longrightarrow X_0$, lo cual nos produce un ciclo $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_s} X_s \longrightarrow \dots \longrightarrow X_0$. Este ciclo debe ser finito, entonces $0 \neq f_i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X_{i-1}, X_i) \setminus \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X_{i-1}, X_i)$, por el ejemplo 5 de 7.1, $X_i \in \mathcal{T}$ para toda i, por lo tanto $\mathcal{T}$ es convexo∎

En el caso de tubos homogéneos cortos finitos, no se satisface que sean convexos, sin embargo se cumple una propiedad de convexidad "en los morfismos", que definimos a continuación:

DEFINICION: Sea $\mathcal{C}$ una componente conexa de Γ_Λ, decimos que $\mathcal{C}$ es <u>dé bilmente</u> <u>convexa</u>, si para todo $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ con X,Y en $\mathcal{T}$, si f=gh con $h \in \mathrm{Hom}\ (X,Z)$, $g \in \mathrm{Hom}\ (Z,Y)$, entonces $Z \in \mathcal{T}$.

PROPOSICION Sea Λ k-álgebra de dimensión finita y $\mathcal{T}$ un tubo estable homogéneo corto finito de Γ_Λ, entonces $\mathcal{T}$ es estándar y débilmente convexo.

<u>demostración:</u> del corolario 1 de la proposición 8.2, $\mathcal{T}$ es estándar. Probaremos ahora que $\mathcal{T}$ es débilmente convexo. Si $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ con $X,Y \in \mathcal{T}$ y f=gh, $h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Z)$, $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Z,Y)$ y $Z \notin \mathcal{T}$ entonces $f \in \mathrm{rad}_\Lambda^2(X,Y)$.

Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & & & Z \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "(g_i)"'] & \\ 0 \arrow[r] & \tau Y \arrow[r] & \overset{t}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i \arrow[r, "(p_i)"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad g=\sum_{i=1}^{t} p_i g_i$$

Entonces $f=\sum_{i=1}^{t} p_i g_i h$. y $f \in \mathrm{rad}_{\Lambda}^{3}(X,Y)$. Continuamos este proceso ahora con los Y_i y obtenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} & & & Z \arrow[d, "g_i"] \arrow[dl, dashed, "(g_{ji})"'] & \\ 0 \arrow[r] & \tau Y \arrow[r] & \overset{t^i}{\underset{j=1}{\oplus}} Y_{ji} \arrow[r, "(p_{ji})"] & Y_i \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad g_i=\sum_{j=1}^{t^i} p_{ji} g_{ji}$$

por tanto $f=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t^i} p_i p_{ji} g_{ji} h$, y $f \in \mathrm{rad}_{\Lambda}^{4}(X,Y)$. Como $Z \notin \mathcal{T}$, podemos continuar este proceso, obteniendo que $f \in \mathrm{rad}_{\Lambda}^{\infty}(X,Y)$. Entonces $\mathcal{T}$ no es estándar generalizado, una contradicción∎

COROLARIO: Sea Λ k-álgebra de dimensión finita. Si $\mathcal{T}$ es una familia tubular estable separante, entonces $\mathcal{T}$ está formada por tubos convexos.

La siguiente proposición fué probada en [P2] para el caso en que Λ es de ciclos finitos. La pueba que presentamos aquí es esencialmente la misma.

PROPOSICION Sea Λ k-álgebra de dimensión finita y $\mathcal{T}$ tubo estable homogéneo finito en Γ_{Λ}. Sea M módulo de $\mathcal{T}$, entonces,

(a) sopM es convexo en Q y genera una subcategoría convexa A de Λ con gldimA≤2.

(b) $q_{\Lambda}(\underline{\dim} M)=0$.

<u>demostración</u>:

(a) que sopM es convexo en Q se sigue de un argumento de Bongartz en [Bo1]. Sea R sumando directo inescindible de $\underline{P}_i$ A-módulo proyectivo inescindible. Probaremos que $pdim_A R\leq 1$. Si no, existe un morfismo no cero $\underline{I}_j \longrightarrow \tau_A R$, donde $\underline{I}_j$ es A-módulo inyectivo inescindible. Como M es A-sincero, obtenemos un ciclo en $mod\Lambda$

$M \longrightarrow \underline{I}_j \longrightarrow \tau_A R \longrightarrow E \longrightarrow R \longrightarrow \underline{P}_i \longrightarrow M$, con E el término de en medio de la sucesión que casi se divide de R. Entonces $\underline{P}_i \in \mathcal{T}$, lo que contradice el hecho de que $\mathcal{T}$ es estable, pues $\mathcal{T}$ sigue siendo una componente estable de Γ_A. Por tanto $pdim_A \leq 1$ y $gldimA\leq 2$.

(b) Como A es convexo en Q, $q_\Lambda(\underline{dim}X)=q_A(\underline{dim}X)$. Como $\underline{dim}X$ es sincero en A, del corolario 2 de 8.3 $\chi_A(\underline{dim}X)=0$, como $gldimA\leq 2$, entonces $q_A(dimX)=0$.

En lo que resta del capítulo desarrollaremos las propiedades de las familias infinitas de tubos estables cortos finitos, los vectores dimensión los módulos en la boca de los tubos, y su relación con la forma cuadrática.

SECCION 9 FAMILIAS TUBULARES

9.1 Tubos ortogonales

LEMA Sea $\mathcal{F}$ una familia infinita de tubos estables finitos, ortogonales dos a dos. Entonces casi todos los tubos en $\mathcal{F}$ son homogéneos

demostración: Sea $\mathcal{F}=(T_{\gamma_i})_{i\in I}$ y sea X_i módulo en la boca de T_{γ_i} con T_{γ_i} no homogéneo. Entonces $Ext^1_\Lambda(X_i,X_i)\cong D\overline{Hom}_\Lambda(X_i,\tau X_i)$ como los módulos en T_{γ_i} no están en ciclos infinitos $\overline{Hom}_\Lambda(X_i,\tau X_i)=0$. Los tubos son ortogonales dos a dos, entonces $Ext^1_\Lambda(X_i,X_j)=0$ para $i\neq j$. Por lo tanto $X=\bigoplus_{i\in I_1} X_i$ (donde T_{γ_i} es un tubo no homogeneo para $i\in I_1$) es un módulo parcial de Tilteo, de aquí que $|I_1|\leq|Q_0|$ ■

9.2 Familias de tubos finitos y vectores dimensión

TEOREMA Sea Λ una k-álgebra finito dimensional con k campo no numerable y sea $\mathcal{T}$ una familia parametrizada infinita de tubos estables finitos del carcaj Γ_Λ. Entonces

(a) Existe una subfamilia infinita estándar, de tubos homogeneos de forma que los módulos en la boca de los tubos tienen dimensión igual, que denotaremos por z.

(b) $(\mathbf{z},e_x)=0$, para todo $x\in\text{sop}z$, donde e_x es el vector dimensión del módulo simple S_x.

<u>demostración</u>:

(a) Sea $\gamma:\mathcal{T}\longrightarrow K_0(\Lambda)$ con $\gamma(T)=\underline{\dim}M$ y M módulo en la boca de T. Como k es no numerable y $K_0(\Lambda)$ numerable, existen $z\in K_0(\Lambda)$ e infinitos y no numerables $T_\gamma\in\mathcal{T}$ con M_γ en la boca de $\mathcal{T}$ tal que $\underline{\dim}M_\gamma=z$. Denotemos por $(T_\gamma)_{\gamma\in I}$ a esta subfamilia. Por teorema 8.4 cada uno de estos tubos es estándar y convexo. Por lema 9.1 podemos suponer que los tubos de $(T_\gamma)_{\gamma\in I}$ son homogeneos, por [Sk1] son ortogonales dos a dos. Por tanto la familia es estándar.

(b) Sea M módulo en la boca de $\mathcal{T}_\gamma$ y $\mathcal{T}_\gamma$ tubo que no contiene al módulo simple S_x, $x\in\text{sop}M$. Sea A la subcategoría convexa de Λ generada por sopM. Entonces gldimA$\leq$2, por tanto $<z,e_x>_A=\dim\text{Hom}_A(S_x,M)-\dim\text{Ext}^1_A(S_x,M)$. $<e_x,z>_A=\dim\text{Hom}_A(M,S_x)-\dim\text{Ext}^1_A(M,S_x)$. Entonces $(\mathbf{z},e_x)_A=<e_x,z>_A+<\mathbf{z},e_x>_A\geq 0$. En efecto, si $\text{Hom}_A(M,S_x)=0=\text{Hom}_A(S_x,M)$, entonces $(\mathbf{z},e_x)_A=<e_x,z>_A+<z,e_x>_A=0$. Si $\text{Hom}_A(M,S_x)\neq 0$, como en T_γ no hay ciclos cortos infinitos $\text{Hom}_A(S_x,M)=0$.

Pero $\text{Ext}^1_A(M,S_x)\cong D\underline{\text{Hom}}_A(M,S_x)$. De forma análoga tenemos que $\text{Ext}^1_A(S_x,M)\cong D\overline{\text{Hom}}_A(M,S_x)$. De aquí $(z,e_x)_A=\dim\text{Hom}_A(M,S_x)-\dim\overline{\text{Hom}}_A(M,S_x)$

y entonces $(z,e_x)_A \geq 0$. Como A es convexa, $(z,e_x)_A=(z,e_x)$, $x\in$ sopM.

De la proposición 8.3 $q_A(\underline{\dim}M)=0=(z,z)_A=\sum_{x\in \mathrm{SopM}} z(x)(z,e_x)=0$. Pero $z(x)>0$, entonces $(z,e_x)=0$, para $x\in$ SopM∎

COROLARIO 1: Si k es no numerable y $\mathcal{T}$ es una familia infinita de tubos estables finitos, entonces $\exists\ 0\neq z\in N^{Q_0}$ tal que $q_\Lambda(z)=0$.

COROLARIO 2: Si $\mathcal{T}$ es familia sincera, entonces z es sincero.

COROLARIO 3 Si Λ es mansa y $\mathcal{T}$ es familia sincera entonces q_Λ es no negativa.

demostración: como Λ es mansa, por [P1] q_Λ es débilmente no negati va, por corolario 2 existe z sincero con $q_\Lambda(z)=0$, por 1.12 q_Λ es no negativa.

9.3 Algebras de ciclos finitos y familias tubulares

Para el caso en que Λ es de ciclos finitos el teorema 9.2 nos dá un teorema equivalente al de la sección 6, pero en este caso los tubos son estándar.

TEOREMA Sea Λ un álgebra de ciclos finitos y z vector dimensión para Λ. Son equivalentes

(a) $E(z)=0$ y la descomposición genérica de z es inescindible en alguna componente irreducible de dimensión maximal de $\mathrm{mod}_\Lambda(z)$.

(b) Existe una familia infinita estándar $\mathcal{T}$ de tubos estables homogéneos, de forma que los módulos en la boca de esos tubos tienen vector dimensión z.

demostración

(b)⇒(a) Por teorema 9.2 $(z,z)=0=q_\Lambda(z)=0$ y por tanto $E(z)=0$. Como los tubos son estándar, si M es un módulo en la boca de uno de los tubos, $\dim \mathrm{End}_\Lambda M=1$. Usando el teorema 6, la descomposición genérica de z es inescindible.

(a)⇒(b). Por teorema 6 existe una familia infinita de tubos homogéneos, que tienen como módulo en la boca, un módulo de dimensión z y anillo de endomorfismos trivial. Por [Sk1] estos tubos son ortogonales y por proposicion 9.1 esta familia es estándar∎

OBSERVACION En las hipótesis del teorema anterior, si $A=\Lambda(\text{sopz})$, entonces A es oculta mansa o tubular.

<u>prueba</u>: Como A es un álgebra de ciclos finitos y contiene un tubo estable sincero, por [Sk3] A es oculta mansa o tubular.

∎

BIBLIOGRAFIA

[AR] M.Auslander e I.Reiten: Representation theory of algebras III. Communications in Algebra 3 (1975) 239-294.

[AS] I.Assem y A.Skowronski: Indecomposable modules over multicoil algebras. Math. Scand. 71 (1992) 31-61.

[Aus] M.Auslander: Representation theory of Artin algebras II. Communicatins in Algebra 1 (1974) 269-310.

[B] G.Bolaños: On the dimension vectors of modules in tubes. Communications in Algebra. 11 (1993) 3861-3869.

[BGP] I.N.Bernstein, I.M.Gelfand, V.A.Ponomarev:Coxeter functors and Gabriel's theorem. Uspechi Mat. Nauk. 28 (1973).

[Bo1] K.Bongartz: Algebras and quadratic forms. J. London Math. Soc. 28 (1983) 461-469.

[Bo2] K.Bongartz: A geometric version of the Morita equivalence. J. Algebra. 139 (1991) 159-171.

[CB] W.W.Crawley-Boevey: Bocses and tame algebras. Proc. London Math. Soc.(56) (1988) 451-483.

[CLS] C.Cibilis, F.Larrión, L.Salmerón: Métodos diagramáticos en teoría de representaciones. Monografías del Ito. de Matemáticas UNAM 11 (1981).

[Dr] Y.A.Drozd: Tame and wild matrix problems. Representation Theory II. Springer LNM 832 (1980).

[E] K.Erdmann: Blocks of tame representation type and related algebras. Springer LNM 1428 (1990).

[ER] G.D'Este y C.M.Ringel: Coherent tubes. J. of Algebra 87 (1984) 150-201.

[G1] P.Gabriel: Unzerlegbare Darstellungen I. Manuscripta Math. (6) (1972) 71-103.

[G2] P.Gabriel: Finite representation type is open. In Spinger LNM 488 (1975) 132-155.

[Ge] Ch.Geiss: On degenerations of tame and wild algebras. Por publicarse.

[GP] Ch.Geiss y J.A. de la Peña: On the deformation theory of finite dimensional algebras. Por publicarse.

[Ha] R.Hartshorne: Algebraic Geometry. GTM 52. Springer Verlag 1977.

[HR] D.Happel y C.M.Ringel: **Tilted algebras.** Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982) 399-443.

[K1] V.Kac: **Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory.** Invent. Math. 56 (1980) 57-92.

[K2] V.Kac: **Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory.** J. of Algebra 78(1982)141-162.

[KrR] H.Kraft y Ch.Riedtmann: **Geometry of representations of quivers.** Representations of Algebras. London Math. Soc. LN. 116 (1986) 1109-145.

[Ku] E.Kunz: **Introduction to Commutative algebra and Algebraic Geometry.** Birkaüser. 1985.

[Li] S.Liu: **Infinite radicals in standard Auslander-Reiten components.** J. of Algebra. Por publicarse.

[LRS] F.Larrión, A.G.Raggi, L.Salmerón. **Rudimentos de mansedumbre y salvajismo en teoría de representaciones.** Por publicarse.

[Ov] S.A.Ovsienko. **Integral weakly positive forms.** In Schur Matrix Problems. Kiev (1978) 3-17.

[Pe1] J.A. de la Peña: **On the dimension of the module-varieties of tame and wild algebras.** Communications in Algebra 19 (6) (1991) 1795-1805.

[Pe2] J.A. de la Peña: **On the corank of the Tits form of a tame algebra.** Por publicarse.

[PeT] J.A. de la Peña y B.Tomé: **Iterated tubular algebras.** J. of Pure Appl. Algebra 64 (1990) 303-314.

[PeSk] J.A. de la Peña y A.Skowronski: Geometric and homological characterization of simply connected polynomial grouth algebras. Por publicarse.

[Ri] C.M.Ringel: **Tame Algebras and Integral quadratic forms.** In Springer LNM 1099 (1984).

[RSkS] I.Reiten, A.Skowronski, S.Smalo: **Short chains and regular components.** Proc. of the American Math. Soc. 117 (3) (1993) 601-612.

[Sc1] A.H.Schofield: **Bounding the global dimension in terms of the dimension.** Bull. London Math. Soc. 17(1985) 393-394.

[Sc2] A.H.Schofield: **General representations of quivers.** Proc. London Math. Soc. (3) 65 (1992) 46-64.

[Sk1] A.Skowronski: **Generalized standard Auslander-Reiten components.** J. Math. Soc. Japan. Por publicarse

[Sk2] A.Skowronski: On the composition factors of periodic modules. J. London Math. Soc. Por publicarse.

[Sk3] A.Skowronski: Cycle finite algebras. J. of Pure and Appl. Algebra. Por publcarse.