



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

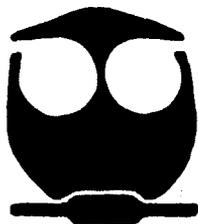
FACULTAD DE QUIMICA



ESTABILIDAD HIDRODINAMICA DE UNA CAPA DE
FLUIDO VISCOELASTICO QUE DESCIENDE POR
UN PLANO INCLINADO EN ROTACION.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO QUIMICO
P R E S E N T A
ANTONIO GAMBOA SUAREZ



MEXICO, D. F.

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Jurado asignado según el tema

Presidente: PROF. JAVIER AUDRY SÁNCHEZ
Vocal: PROF. LUIS ANTONIO DÁVALOS OROZCO
Secretario: PROF. GLINDA IRAZOQUE PALAZUELOS
1er. suplente: PROF. MANUEL JESÚS AGUILAR GÓMEZ
2do. suplente: PROF. MARIANO PÉREZ CAMACHO.

Sitio donde se desarrolló el tema:

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES. IIMUNAM.
CIRCUITO DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA.
CIUDAD UNIVERSITARIA.

Asesor:



Dr. Luis A. Dávalos Orozco

Sustentante:



Antonio Gamboa Suárez

AGRADECIMIENTOS

Al llegar al final, resulta sorprendente mirar hacia atrás y contemplar todas las dificultades que hubo que franquear para llegar a este punto. Es aquí donde recuerdas a todas las personas que estuvieron ahí en el momento preciso, haciendo que todo resultara mucho más fácil y agradable.

A mi padre (q e p. d.), cuya memoria resulta una fuente de inspiración y que sigue dejando su huella en todo lo que hago.

A mi madre, una presencia incondicional y constante, llenando de amor todo lo que toca.

A Mónica, Laura, Julieta y Bernardo, personas de las que sabes que siempre están contigo y con las que puedes contar en cualquier momento.

A Lili, por todos aquellos momentos inolvidables en los cuales me ayudaste a seguir adelante y que me brindaste tu amor.

A todos los amigos que te soportan, te brindan su maravillosa compañía y comparten su vida contigo

A Yayo, cuyo apoyo facilitó y enriqueció enormemente mi carrera

A todos aquellos maestros que dejaron su huella en mi desarrollo profesional y personal. Especialmente a Vicente, que no pudo nacer para otra cosa que dar clase y a Enrique, que tiene la magia de hacer que las cosas difíciles parezcan sencillas

A Luis, por tu apoyo en mi difícil incursión en la Física.

A mi *alma mater* cuya huella ya resulta imborrable y continúa imprimiéndose día con día.

CONTENIDO

RESUMEN	4
INTRODUCCION	5
 1. PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS.	
1.1. Definición de fluido e hipótesis del continuo.....	9
1.2. Sistemas de coordenadas.....	10
1.3. Teorema de transporte de Reynolds.....	11
1.4. Ecuaciones de conservación.....	12
a) Conservación de la masa.....	12
b) conservación del momentum.....	12
1.5. Discusión de las ecuaciones de conservación.....	15
1.6. Condiciones de frontera.....	16
 2. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA VISCOELASTICIDAD.	
2.1. Tipos de fluidos.....	18
2.2. Efectos de la viscoelasticidad.....	22

3. TEORÍA LINEAL DE LA ESTABILIDAD

3.1. Definición del problema	25
3.2. Modos normales	28
3.3. Límites de la teoría lineal	30

4. FLUJO PRINCIPAL

4.1. Obtención de los campos de velocidades	31
4.2. Adimensionalización de las variables de flujo	38
4.3. Análisis del flujo principal	41

5. ECUACIONES DE ORR-SOMMERFELD PARA EL PROBLEMA DEL PLANO INCLINADO EN ROTACIÓN.

5.1. Generalización de la ecuación de Orr-Sommerfeld	45
5.2. Condición cinemática	55
5.3. Condiciones de frontera	56

6. ESTABILIDAD DE PERTURBACIONES A NÚMEROS DE ONDA PEQUEÑOS. APROXIMACIÓN A ORDEN CERO

6.1. Ecuaciones fundamentales y condiciones de frontera	60
6.2. Aproximación a orden cero	64
6.3. Análisis de los resultados a orden cero	70

**7. ESTABILIDAD DE PERTURBACIONES A NÚMEROS DE ONDA PEQUEÑOS.
APROXIMACIÓN A PRIMER ORDEN**

7.1. Introducción	73
7.2. Integración de la ecuación de estabilidad Reducción de orden	76
7.3. Solución particular. Método de parámetros indeterminados.....	83
7.4. Cálculo de c a primer orden.....	85
7.5. Análisis de estabilidad.....	89

8. CONCLUSIONES..... 111

APÉNDICE I. ECUACIONES DE ORR SOMMERFELD..... 114

**APÉNDICE II. PROGRAMA EN MATHEMATICA PARA EL ANÁLISIS DE
RESULTADOS..... 119**

BIBLIOGRAFÍA..... 124

RESUMEN

En este trabajo se investiga la estabilidad lineal de una capa de fluido viscoelástico que desciende sobre un plano inclinado en rotación. Primeramente, se obtiene una solución estacionaria considerando una situación en la que no existen perturbaciones. A partir de estos resultados se aborda el problema de estabilidad de las perturbaciones.

Más adelante, se llega a un sistema de ecuaciones que caracterizan el problema de estabilidad lineal. Dichas ecuaciones son una generalización de la ecuación de Orr-Sommerfeld que describen la evolución de las perturbaciones.

La solución analítica del sistema de ecuaciones se obtiene, en forma aproximada, proponiendo soluciones en serie de potencias para perturbaciones a número de onda pequeño.

Finalmente, se analiza la influencia de los diversos parámetros adimensionales involucrados en el sistema en la estabilidad del flujo y se comparan con resultados de trabajos anteriores.

INTRODUCCIÓN

El estudio del flujo de películas descendentes por paredes tiene una gran importancia a nivel industrial, por ejemplo, en el recubrimiento de superficies con pintura, torres de enfriamiento, etcétera. Debido ello han sido objetos de estudio en los últimos años.

Las primeras investigaciones acerca del escurrimiento de un líquido por un plano inclinado, fueron realizadas por Nusselt en 1926. Este investigador supuso un espesor constante de la película, es decir, que la interfase líquido-aire es plana. Como resultado obtuvo un perfil de velocidades unidireccional y semiparabólico, con vértice en la superficie libre.

Debido a las suposiciones hechas, el modelo de Nusselt predice un flujo estacionario que surge como resultado de un balance entre las fuerzas viscosas y la componente de la gravedad en la dirección del plano inclinado. Los términos inerciales no tienen influencia en el movimiento. El resultado solo es válido cuando el flujo es laminar, ya que de otra manera se tendrían componentes de la velocidad en todas direcciones, por lo que las conclusiones son válidas solamente para números de Reynolds pequeños.

A partir de diversos experimentos se ha detectado la formación de ondas que se propagan en la dirección del plano inclinado, lo cual indica que la superficie del fluido no es plana. Se encuentra también que las ondas pueden crecer hasta llegar a una amplitud de equilibrio, o bien dar lugar a

patrones de flujo más complicados. Estas superficies ondulatorias se observan hasta valores del número de Reynolds alrededor de 300, a partir del cual se tiene un flujo turbulento (Benjamin, 1957)

El estudio de problemas de formación de ondas en capas líquidas descendentes es un fenómeno de estabilidad hidrodinámica. En ella se investiga la evolución temporal y espacial de las perturbaciones dentro del flujo. En particular la teoría lineal de estabilidad investiga si las perturbaciones se amortiguan, dando lugar a un flujo estacionario, o si crecen. El inicio de la teoría de estabilidad hidrodinámica de estos flujos se debe a Orr y a Sommerfeld quien a principios de este siglo obtiene una ecuación diferencial lineal para la función de corriente de una perturbación infinitesimal en un flujo unidireccional, llamada ecuación de Orr-Sommerfeld.

Uno de los trabajos más importantes acerca de la estabilidad de películas en planos inclinados corresponde a Yih (1963). El obtiene soluciones aproximadas a la ecuación de Orr-Sommerfeld para una película de fluido newtoniano, descendiendo por un plano inclinado, para dos casos: a) valores pequeños del número de onda k y b) para valores pequeños del número de Reynolds R .

Yih (1963) demuestra que para valores pequeños de k , las ondas se propagan con una velocidad que es dos veces la del flujo en la superficie libre. Además, dichas ondas crecerán si el número de Reynolds es tal que:

$$R > 5/6 \cot \beta$$

siendo β el ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal

En la aproximación a números de Reynolds pequeños, Yih llega a la conclusión de que el flujo siempre es estable, excepto en el caso en que el plano sea vertical

Un trabajo importante en el estudio del mismo problema es el de fluidos no Newtonianos realizado por Lai (1967). En este trabajo se considera que el fluido que desciende es viscoelástico y presenta tiempos de relajamiento y de retardo. Al analizar la influencia de los parámetros viscoelásticos en la estabilidad encuentra que la elasticidad tiene un efecto desestabilizador sobre el flujo.

Se ha abierto otra línea de investigación de este fenómeno al estudiarse cuál sería el efecto de añadir una fuerza de cuerpo adicional a la gravedad, como podría ser la fuerza de Coriolis. El efecto de la rotación en el plano inclinado para el caso de un fluido Newtoniano fue investigado por Dávalos-Orozco y Ruiz-Chavarría (1992). En este caso, se encuentra que la rotación tiene un efecto estabilizador sobre el flujo.

El presente trabajo es una generalización del de Dávalos-Orozco y Ruiz-Chavarría (1992), en el cual se investiga la estabilidad del flujo para el caso de un fluido viscoelástico que desciende por un plano inclinado en rotación. Dicho problema es de interés ya que contrapone el efecto desestabilizador de la viscoelasticidad, con el efecto estabilizador de la rotación. El capítulo 1 está dedicado a presentar los conceptos y las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos. En el

capítulo 2 se exponen las ecuaciones constitutivas y las principales características de los fluidos viscoelásticos. En el capítulo 3 se da una introducción a la teoría lineal de estabilidad, y se exponen los principales métodos y limitaciones. En el capítulo 4 se plantean y resuelven las ecuaciones del flujo principal en ausencia de perturbaciones. La solución estacionaria obtenida en este capítulo se utilizará en el análisis de estabilidad. El capítulo 5 está dedicado a la obtención del sistema de ecuaciones generalizado de Orr-Sommerfeld, aplicando los métodos de la teoría de estabilidad lineal.

Como las ecuaciones de la estabilidad lineal no tienen una solución analítica, en los capítulos 6 y 7 se obtiene una aproximación válida para números de onda pequeños. Se propone una solución en serie de potencias del número de onda k y se trunca el desarrollo hasta el término lineal. En estos capítulos se presentan los principales resultados de este trabajo a través de gráficas de estabilidad. Por último, en el capítulo 8 se dan las conclusiones del trabajo.

1. PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

1.1. Definición de fluido e hipótesis del continuo

Un fluido se define como una sustancia que cambia de forma continuamente al ser sometida a una tensión cortante, aunque ésta sea infinitesimal. En contraposición, un cuerpo elástico sufre un desplazamiento definido cuando está sujeto a fuerzas de tensión. En ciertos materiales, denominados viscoelásticos, tienen lugar ambos tipos de deformación.

Los fluidos se componen de moléculas, que se mueven y entran en colisión constantemente. Para un análisis riguroso, habría que tener en cuenta la acción de cada molécula o grupo de moléculas, así como las interacciones con las otras partículas en el fluido. Estos procedimientos se utilizan en la teoría cinética de los gases y en la mecánica estadística, pero son, en general, demasiado embarazosos al aplicarlos a sustancias cuyas interacciones son complejas. Otra manera de analizarlos consiste en suponer una distribución continua de materia, denominada el continuo, en lugar de el conglomerado real de moléculas, complejo y discreto. El modelo del continuo permite conocer variables medias medibles experimentalmente que satisfacen principios físicos generales como la conservación de la energía, masa y momento lineal. Debido a los mayores alcances analíticos de dicho modelo con respecto a tratamientos estadísticos, se utilizan ampliamente sus hipótesis y métodos en la mecánica de fluidos y son las que se utilizarán en este trabajo.

1.2 Sistemas de coordenadas

Habiendo seleccionado la aproximación del continuo como el método para obtener las ecuaciones, se tiene que enfrentar el problema de elegir un marco de referencia adecuado para derivar las ecuaciones de conservación. Pueden emplearse dos sistemas de coordenadas básicos, conocidos como euleriano y lagrangiano.

El punto de vista euleriano observa un elemento de volumen fijo, a través del cual pasa el fluido. Las variables independientes serán las coordenadas espaciales x , y , y z además del tiempo t . Debido a la elección de este sistema de coordenadas, el fluido dentro del elemento de volumen estará compuesto por diferentes partículas a cada instante.

En un marco de referencia lagrangiano nos fijamos en una masa particular de fluido y seguimos su movimiento a medida que fluye y cambia de forma, considerando siempre las mismas partículas de fluido. Las variables independientes en este sistema serán unas coordenadas iniciales x_0 , y_0 y z_0 , además del tiempo; las coordenadas espaciales x , y y z no son variables independientes en este sistema, ya que pueden ser determinadas a partir del punto de referencia que se toma.

Generalmente, el procedimiento consiste en aplicar las leyes de conservación a una masa específica de fluido (sistema lagrangiano), y una vez obtenida esta ley, pasar a un sistema de coordenadas euleriano que generalmente es más fácil de manejar para resolver las ecuaciones. La relación entre estos dos sistemas está dada por la llamada derivada material, cuya expresión es:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial y} + W \frac{\partial A}{\partial z} \quad (1.1)$$

Siendo D/Dt la variación temporal de la variable de campo en un sistema de coordenadas lagrangiano y la parte derecha de la ecuación es la expresión correspondiente en el sistema euleriano. En esta ecuación, U , V y W representan las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones x , y , y z respectivamente.

1.3 Teorema de transporte de Reynolds

El método que vamos a aplicar para derivar las ecuaciones de conservación, consiste en seguir un volumen arbitrario de fluido para el cual la masa permanece constante. Esto es equivalente a calcular las derivadas materiales de integrales de volumen que aparecerán en el desarrollo. Su expresión constituye el teorema de transporte de Reynolds, dado por la ecuación:

$$\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (A \underline{u}) \right] dV \quad (1.2)$$

donde \underline{u} es el vector velocidad. Dada esta expresión procedemos a calcular las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos.

1.4. Ecuaciones de conservación

a) Conservación de la masa

Sea una masa específica de fluido cuyo volumen es elegida arbitrariamente. Si esta porción del fluido es seguida a medida que fluye, su tamaño y su forma pueden cambiar, pero su masa permanecerá constante. Esto constituye el principio de conservación de la materia, el cual puede ser expresado matemáticamente, calculando la derivada material de la masa de fluido contenida en V , es decir:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \right] dV \quad (1.3)$$

Esta expresión la variación de la masa total en un elemento de fluido. Debido al principio de conservación de la masa, esta integral debe ser igual a cero; además, el hecho de que volumen de integración sea arbitrario implica que el integrando debe ser igual a cero. La ecuación queda entonces como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (1.4)$$

que expresa el principio de conservación de la masa para un medio continuo.

b) Conservación del momentum

El principio de conservación del momentum constituye una aplicación de la segunda ley de Newton a un elemento de fluido. Esto significa que al considerar una masa de fluido específica, la rapidez de cambio del momentum de la masa de fluido es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el mismo.

Las fuerzas que actúan sobre el fluido pueden dividirse en dos clases: fuerzas de cuerpo, tales como la gravitacional, y fuerzas superficiales, tales como la presión y los esfuerzos viscosos. De esta manera, podemos representar a todas las fuerzas que actúan sobre el fluido mediante la suma de dos integrales. Una integral de volumen que contendrá al total de las fuerzas de cuerpo y una integral de superficie con la resultante de las fuerzas superficiales. La ecuación de conservación del momentum es entonces

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho f dV + \int_S \underline{P} dS \quad (1.5)$$

Donde \underline{P} es un vector que representa la resultante de las fuerzas de superficie por unidad de área y \underline{f} es el vector resultante de las fuerzas de cuerpo por unidad de masa. El lado izquierdo de la ecuación es el cambio total del momentum con respecto al tiempo de la masa de fluido.

En general, existen nueve componentes de los esfuerzos que actúan sobre una masa dada de fluido. Esto se ilustra visualizando un cubo cuyas caras son ortogonales a los ejes coordenados (ver Figura 1.1). Cada componente está dada por la dirección en la que actúa y por la cara del cubo sobre la cual actúa. Como tenemos tres direcciones independientes y tres caras sobre las que se puede actuar, tenemos nueve componentes, las cuales quedan determinadas por el tensor de esfuerzos σ_{ij} . Sin embargo, en la mayoría de los casos este tensor resulta ser simétrico, por lo que únicamente se tienen seis componentes independientes. De esta manera, El vector \underline{P}_j estará dado por la suma $\sigma_{ij} n_j$. La ecuación de movimiento en notación tensorial queda entonces:

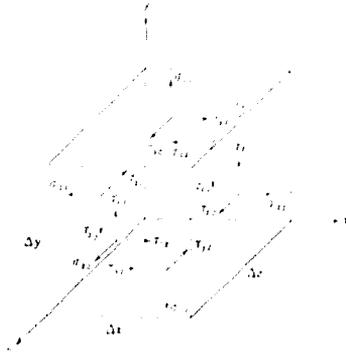


Figura 1.1 Esfuerzos sobre un cubo

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V \rho f_i dV \quad (1.6)$$

Mediante el teorema de la divergencia podemos convertir la integral de superficie en una integral de volumen; también podemos calcular la derivada del lado derecho mediante el teorema de transporte de Reynolds, con lo cual podemos agrupar todos los términos en una sola integral de volumen igualada a cero. Como el volumen es arbitrario, podemos afirmar que el argumento de la integral debe anularse para cualquier volumen, con lo cual se obtiene la expresión final de la ecuación de conservación del momentum:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (1.7)$$

Si en la expresión desarrollamos los productos del lado izquierdo y hacemos simplificaciones, llegamos a la forma final de la ecuación de conservación del momentum

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (18)$$

La última ecuación representa la segunda ley de Newton aplicada a un elemento de fluido. La parte izquierda de la ecuación representa el cambio total de momentum de un elemento de fluido. El primer término es la aceleración temporal y el segundo término es una aceleración convectiva que considera la existencia de aceleraciones locales, aún cuando el flujo sea estacionario. El lado derecho de la ecuación contiene a todas las fuerzas causantes de la aceleración. El primer término es debido a gradientes de esfuerzos sobre la superficie del fluido, mientras que el segundo representa la contribución total de las fuerzas de cuerpo, tales como la gravedad.

En el caso de sistemas no isotérmicos es necesario aplicar al fluido el principio de la conservación de la energía. Como en este trabajo se trabajará solamente con sistemas a temperatura constante, no es necesario obtener dicha ecuación.

1.5. Discusión de las ecuaciones de conservación.

Las ecuaciones básicas de conservación para sistemas isotérmicos constituyen un sistema de cuatro ecuaciones escalares, ya que tenemos una ecuación de movimiento para cada componente de la velocidad y la ecuación de continuidad. La densidad será determinada por medio de una ecuación de estado adicional. Sin embargo, tenemos además diez incógnitas que son la presión, tres componentes de la velocidad y seis componentes del tensor de esfuerzos. Por lo tanto, el sistema está incompleto.

Con el fin de obtener un conjunto completo de ecuaciones para nuestro sistema, las nueve componentes de los esfuerzos deben ser especificadas de antemano. Esto nos lleva a la obtención de las llamadas ecuaciones constitutivas en las cuales el tensor de esfuerzos viscosos se expresa en función del tensor rapidez de deformación que contiene como componentes a los gradientes de velocidad. En el siguiente capítulo nos ocuparemos a fondo de las ecuaciones constitutivas. Por el momento solo daremos la forma general del tensor de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.9)$$

en donde τ_{ij} está relacionado con cambios de forma en el fluido y es llamado el tensor de esfuerzos viscosos o cortantes. La cantidad p es la presión termodinámica y δ_{ij} es la delta de Kronecker. El signo de la presión es negativo debido a la convención de que los esfuerzos de tensión son positivos. Las ecuaciones constitutivas proporcionarán relaciones entre el tensor de esfuerzos cortantes y los gradientes de velocidad del fluido

1.6. Condiciones de Frontera

Para tener unívocamente determinado el sistema, es necesario que existan condiciones en las fronteras que garanticen la unicidad de la solución. Las condiciones de frontera que usualmente se dan son las siguientes: los valores de las velocidades en las fronteras sólidas, y en su caso, los valores de los esfuerzos tangenciales y normales en las entrecaras de fluidos. En cuanto a las primeras, se ha observado experimentalmente que, debido a la viscosidad, siempre existe una pequeña capa de fluido que se mueve a la misma velocidad que la frontera sólida a la cual se encuentra adherida. Dicha condición es conocida como de adherencia o no-deslizamiento. En cuanto a los esfuerzos tangenciales, cuando no hay gradientes de tensión superficial y el fluido del otro lado de la entrecara

no es muy viscoso, se puede suponer con buena aproximación que valen cero. Este sería el caso de muchos fenómenos en la interfaz del agua y del aire. En cuanto a los esfuerzos normales, es necesario hacer un balance entre las presiones, los esfuerzos internos y las fuerzas de tensión superficial a través de la interfaz.

Una vez dadas las condiciones de frontera suficientes para resolver las ecuaciones, el sistema quedará completamente determinado, pudiéndose dar una solución única para el problema que se esté resolviendo.

2. INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA VISCOSIDAD

Como se menciona en el capítulo anterior, para poder resolver las ecuaciones de movimiento para un sistema en particular, es necesario conocer la respuesta del fluido al aplicarle un esfuerzo, la cual depende de la estructura química y física de las moléculas que constituyen el material. Esta información se obtiene a partir de las llamadas ecuaciones constitutivas del fluido, las cuales, si se conocen para un fluido en particular, completan el sistema de ecuaciones y permiten describir el flujo en condiciones particulares.

A través de la ecuación constitutiva, el tensor de esfuerzos cortantes es un función de los tensores deformación γ_{ij} y rapidez de corte e_{ij} . Definidos como:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l_i}{\partial x_j} + \frac{\partial l_j}{\partial x_i} \right) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Donde $\partial l_i / \partial x_j$ mide el desplazamiento de dos puntos en el fluido con respecto a las coordenadas, cuando la distancia entre ambos tiende a cero, y u_i es la velocidad del fluido. Se observa que γ_{ij} mide la deformación total y e_{ij} la rapidez con la que el elemento de fluido se está deformando.

2.1. Tipos de fluidos

La relación más simple entre los esfuerzos y las cantidades definidas arriba, la presentan los llamados fluidos newtonianos, cuya ecuación constitutiva es

$$\tau_{ij} = \mu e_{ij}\tag{2.2}$$

siendo μ es una constante llamada viscosidad del fluido. Como puede apreciarse, en estos fluidos los esfuerzos de corte dependen linealmente de la rapidez de corte, y no son función de la deformación. Este comportamiento define a un fluido puramente viscoso.

Existen otros tipos de fluidos puramente viscosos para los cuales la viscosidad no es una constante sino que depende de la rapidez de corte. El más conocido de estos es el llamado fluido de Ostwald-de-Waele cuya ecuación constitutiva para flujo unidireccional está dada por la ley de la potencias:

$$\tau_{12} = m |e_{12}|^{n-1} e_{12} \quad (2.3)$$

Se observa que si $n=1$ se recupera la expresión para un fluido newtoniano, siendo $m = \mu$; por consiguiente, la desviación del valor de n con respecto a la unidad es una medida del grado de desviación del comportamiento newtoniano. Cuando n es menor que uno, el comportamiento es pseudoplástico, mientras que para valores superiores a la unidad es dilatante (Figura 2.1).

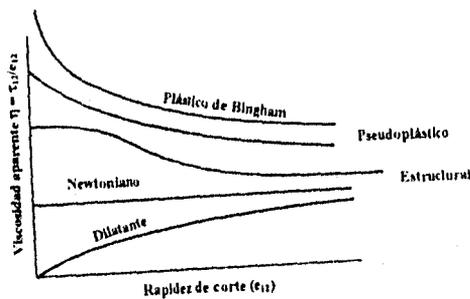


Figura 2.1 Tipos de comportamiento no-newtoniano

En contraposición a los fluidos puramente viscosos, existen materiales para los cuales los esfuerzos internos son función solamente de la magnitud de la deformación. Dichos materiales, al ser sometidos a un esfuerzo, responderán instantáneamente con una deformación de equilibrio que depende de la magnitud del esfuerzo aplicado. Este material debe ser un sólido ya que no presenta un flujo continuo como respuesta al esfuerzo aplicado. Cuando la deformación tiene un comportamiento lineal con el esfuerzo aplicado, se tiene un sólido de Hooke

$$\tau_{ij} = G \gamma_{ij} \quad (2.4)$$

donde G es el llamado módulo de Young

Los materiales viscoelásticos, como su nombre lo indica, poseen tanto propiedades viscosas como elásticas en diferente grado. Este puede variar desde los sólidos viscosos, como el hule, que son más elásticos que viscosos, hasta los líquidos elásticos, tales como polímeros fundidos o en solución, que son más viscosos que elásticos.

Se han construido modelos teóricos intentando describir este comportamiento; el más simple es el fluido de Maxwell, que presenta el mismo comportamiento que tendrían un resorte y un amortiguador en serie. El resorte presentará un comportamiento puramente elástico dado por la ley de Hooke, y el amortiguador será puramente viscoso, representado por la ecuación de Newton. La ecuación general nos quedará

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \mu e_{ij} \quad (2.5)$$

donde $\lambda = \mu/G$ es una constante de tiempo característica del fluido que es representativa del tiempo de relajación de los esfuerzos internos en el material como respuesta a una deformación constante

Otro importante modelo se obtiene al poner al mismo resorte y amortiguador en paralelo. Este fluido es conocido como sólido de Voigt, cuya ecuación constitutiva estará dada por

$$\frac{\tau_{ij}}{G} = \lambda' e_{ij} + \gamma_{ij} \quad (2.6)$$

siendo $\lambda' = m/G$ una constante representativa del tiempo que tarda el material en alcanzar la deformación de equilibrio con respecto a un sólido de Hooke. Dicha constante es conocida como tiempo de retardo del material, y tiene el efecto contrario al que tiene el tiempo de relajación en el sólido de Maxwell

Si combinamos ambos modelos, de tal manera que el fluido presente tiempos de relajación y tiempos de retardo, tenemos el modelo de Oldroyd de dos constantes:

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \left(\frac{D}{Dt} \tau_{ij} \right) = 2\mu \left(e_{ij} + \lambda_2 \left(\frac{D}{Dt} e_{ij} \right) \right) \quad (2.7)$$

En los tres casos anteriores, al momento de fluir, el material presentará torsiones y elongaciones, además de traslaciones. Por lo tanto, todas las derivadas que estamos expresando en el modelo se encuentran dadas en un sistema de coordenadas que se mueve y deforma con el fluido. Una de estas derivadas, conocida como derivada convectiva superior, expresada en un sistema de coordenadas euleriano es:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla A - (\nabla \bar{u}) A + A (\nabla \bar{u})^t \quad (2.8)$$

El modelo de Oldroyd con derivada convectiva superior es el que se empleará en la obtención de la solución para nuestro problema.

2.2. Efectos de la viscoelasticidad

Existen varios efectos que exhiben los materiales viscoelásticos y que no pueden ser observados en fluidos puramente viscosos; algunos de ellos se ilustran en la figura 2.2.

En la figura 2.2a se observa como la forma de la superficie libre de un líquido en un recipiente se modifica al ser sujeta a una deformación angular por medio de un cilindro en rotación. Para fluidos sin elasticidad, la fuerza centrífuga genera un vórtice cóncavo en el líquido. Sin embargo, los fluidos elásticos desarrollan esfuerzos internos que se oponen a la fuerza centrífuga ocasionando que al fluido ascienda por las paredes del cilindro. Esto es conocido como el efecto Weissenberg.

En la figura 2.2b se observa la forma de un chorro emergiendo del extremo de un tubo. El chorro de un fluido inelástico se contrae ligeramente con respecto al diámetro del tubo, mientras que el elástico presenta el efecto contrario

En la figura 2.2c se observa el efecto que tiene la fuerza centrífuga sobre un fluido confinado entre dos placas en rotación. Se observa que la elasticidad tiene el efecto de invertir la dirección hacia la que se moverá el líquido al sentir la fuerza centrífuga

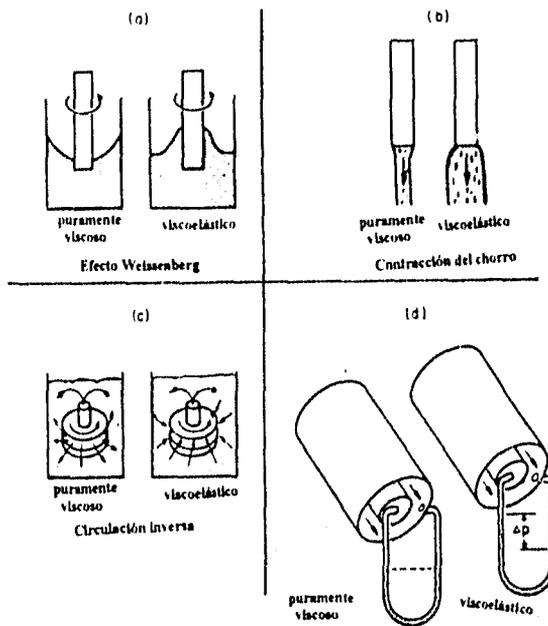


Figura 2.2. Efectos de la diferencia de esfuerzos normales en los fluidos viscoelásticos.

En la figura 2.2d se ilustra un flujo axial estacionario en un anillo. En este caso, la elasticidad tiene el efecto de generar una diferencia de presiones en la dirección radial, efecto que no se observa cuando sólo existen efectos viscosos.

Todos estos fenómenos pueden ser atribuidos a la aparición de esfuerzos normales que no están presentes en otros fluidos. Estos esfuerzos son función de la rapidez de corte y desaparecen cuando el fluido está en reposo. La explicación molecular de dichos efectos tiene que ver con el gran número de interacciones físicas que presentan las macromoléculas debido al aumento de grados de libertad con respecto a otros fluidos.

3. TEORIA LINEAL DE LA ESTABILIDAD

3.1. Definición del problema

Debido a su complejidad, las ecuaciones de la hidrodinámica sólo pueden ser resueltas para ciertos patrones sencillos de flujo. Dichas soluciones serán correctas para ciertas magnitudes de los parámetros que caracterizan el flujo. Esto se debe a la inestabilidad inherente de estos sistemas, es decir, su incapacidad de mantener el flujo ante la presencia de pequeñas perturbaciones a las que todo sistema físico está sujeto. El establecer las magnitudes de los parámetros para los cuales el flujo será estable o inestable es uno de los problemas que estudia la estabilidad hidrodinámica.

La presencia de perturbaciones ocasionará que los campos de velocidad $v(x,t)$, de presión $p(x,t)$ y de esfuerzos $\tau(x,y)$, tengan desviaciones con respecto a los valores calculados para el flujo original. Podemos expresar estas magnitudes como la suma de dos contribuciones:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \underline{u}(x,t) + u'(x,t) \\p(x,t) &= \underline{p}(x,t) + p'(x,t) \\ \tau(x,t) &= \underline{\tau}(x,t) + \tau'(x,t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $U(x,t)$, $P(x,t)$ y $T(x,t)$ son los campos de velocidad, presión y esfuerzos en el flujo principal (en ausencia de perturbaciones), y $u'(x,t)$, $p'(x,t)$ y $\tau'(x,t)$ son los términos correspondientes para las perturbaciones

El problema fundamental de la teoría lineal de estabilidad consiste en determinar si los campos asociados a la perturbación crecen, permanecen constantes o se amortiguan. En el primer caso, el flujo será inestable, ya que las perturbaciones ocasionan que el flujo se aleje cada vez más de su estado original. Si la perturbación se amortigua el flujo será estable ya que $u(x,t)$, $p(x,t)$ y $\tau(x,t)$ tienden a $U(x,t)$, $P(x,t)$ y $T(x,t)$ a lo largo del tiempo. Si la perturbación permanece constante se dice que el flujo tiene estabilidad neutra (Drazin, 1979). Por su parte, el problema básico de la teoría de estabilidad no lineal consiste en obtener la evolución temporal y espacial de la perturbación.

La determinación de la estabilidad o inestabilidad de un sistema consiste en encontrar la dependencia que tienen las perturbaciones con los valores de diferentes parámetros adimensionales, característicos del problema. Uno de ellos es el número de Reynolds (R) que representa la magnitud relativa entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas del flujo. Otros números adimensionales relacionarán las diferentes fuerzas de cuerpo involucradas en el sistema con las fuerzas de inercia. Estos se obtienen al adimensionalizar las ecuaciones de movimiento a partir de cantidades características del problema. Fijaremos la atención exclusivamente en la estabilidad de flujos estacionarios e incompresibles. Además, consideraremos fuerzas de cuerpo constantes o dependientes únicamente de la velocidad.

Los campos de velocidad, presión y esfuerzos en el flujo en ausencia de perturbaciones, denominado flujo principal (U_j , p y \mathbf{T}), así como en el flujo perturbado (u_j , p y \mathbf{T}) son soluciones de las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Por lo tanto, se cumplen las siguientes ecuaciones con variables adimensionales.

$$R \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = S^i f_j^i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

$$R \left(U_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = S^i F_j^i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_i} = 0 \quad (3.5)$$

donde U_j y u_j son las componentes de \underline{U} y \underline{u} respectivamente y f_j son las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido en el flujo perturbado mientras que F_j son las mismas fuerzas en el flujo principal. Por cada una de estas fuerzas podemos definir un parámetro adimensional S_j ,

Las ecuaciones que gobiernan a las perturbaciones se obtienen de restar (3.3) de (3.2) y (3.5) de (3.4), dando por resultado:

$$R \left(\frac{\partial u_j'}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = S^i \delta f_j^i + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.7)$$

donde $\delta f_j = f_j - F_j$ es la diferencia de las fuerzas de cuerpo del flujo perturbado con el flujo principal

Determinar la evolución de las perturbaciones implica resolver completamente las ecuaciones no lineales (3.6) junto con la (3.7), lo cual es un problema muy complejo desde el punto de vista matemático. Sin embargo, si suponemos la presencia de perturbaciones muy pequeñas, podemos despreciar los términos $u'_k (\partial u'_j / \partial x_k)$ en la ecuación de momento, obteniendo:

$$R \left(\frac{\partial u'_j}{\partial t} + U_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = S' \delta f'_j + \frac{\partial \pi'_j}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

el cual es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales acopladas. Una vez conocida la solución para el flujo principal, el sistema debe resolverse ajustándolo a las condiciones iniciales y de frontera del problema.

3.2. Modos normales.

Supongamos que el flujo principal es estacionario. En ese caso, las ecuaciones (3.7) y (3.8) forman un sistema cuyos coeficientes no dependen del tiempo. Esperamos que, después de aplicar una separación de variables, la dependencia temporal para las perturbaciones esté dada por un factor del tipo $\exp(-i \omega t)$, donde el coeficiente ω es, en general, complejo. En el caso en que U_j no dependa explícitamente de alguna de las variables espaciales, podemos aplicar el mismo argumento. Por

ejemplo, supongase que el campo de velocidades depende únicamente de la coordenada x_2 . Las soluciones tendrían entonces un factor del tipo $\exp(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)$. A este método se le da el nombre de "modos normales".

El término $(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)$ puede ser escrito como $k (\cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 - c t)$, siendo $k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$, $k_2/k_1 = \tan \theta$ y $c = (\omega/k)$. La interpretación física de k , c y θ es inmediata si recordamos la descripción matemática de una onda; k es la magnitud del número de onda ($2\pi/\lambda$), donde λ es la longitud de onda, θ es el ángulo de propagación, la parte real de c es la velocidad de fase de la onda y su parte imaginaria multiplicada por k es la razón de crecimiento o decrecimiento de la perturbación. Cuando $\text{Im}(c) > 0$ hay un crecimiento temporal de tipo exponencial y cuando $\text{Im}(c) < 0$ tenemos un decrecimiento temporal. Si $\text{Im}(c) = 0$ se tiene estabilidad neutra (la perturbación se propaga en forma de una onda sin modificación temporal).

Para encontrar la estabilidad procederemos a expresar las soluciones de todas las variables involucradas de acuerdo al método de modos normales:

$$\begin{aligned} u_j &= v_j(x_2) \exp ik (\cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 - c t) \\ p &= g(x_2) \exp ik (\cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 - c t) \\ \tau_{ij} &= Q_{ij}(x_2) \exp ik (\cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 - c t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

siendo v_j , g y Q_{ij} las amplitudes correspondientes.

El problema de estabilidad consiste en determinar los valores que adopta c . El procedimiento usual consiste en introducir estas soluciones a las ecuaciones de movimiento y continuidad, para

obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de las amplitudes que tienen como variable independiente a x_2 . Los coeficientes de estas ecuaciones dependientes de x_2 contienen a k , c , R y otros números adimensionales, además de x_2 .

Las soluciones del sistema deben satisfacer las condiciones de frontera, que por lo general, dan un sistema de ecuaciones homogéneas. El parámetro c se determina como valor propio, en función de los demás parámetros, de manera que las ecuaciones sean consistentes. Por lo tanto, el problema de la estabilidad lineal se convierte en un problema de valores propios.

3.3 Límites de la teoría lineal

Un flujo puede ser estable en presencia de perturbaciones pequeñas, pero aún queda la posibilidad de que sea inestable para perturbaciones finitas. Reynolds lo pudo constatar en sus experimentos. Usando tubos con paredes rugosas o perturbando al líquido a la entrada del tubo, encontró que la estabilidad se perdía a números de Reynolds del orden de 2000.

El estado final de un flujo inestable no puede ser determinado por la teoría lineal ya que a medida que las perturbaciones crecen, resultan importantes los términos no lineales. Sin embargo, la teoría lineal permite en general determinar si un sistema será estable o inestable para un determinado conjunto de valores de los parámetros del flujo.

4. FLUJO PRINCIPAL

4.1. Obtención de los campos de velocidades

Una vez dada una breve introducción acerca de los principales temas con los que se relaciona este trabajo, procedemos a la resolución del problema que nos ocupa.

Primeramente, es necesario encontrar los campos de velocidad, presión y esfuerzos correspondientes al flujo principal. Dichos resultados serán utilizados posteriormente al resolver el problema de estabilidad. Para encontrar dichas soluciones consideramos una capa de un fluido que se ajusta al modelo de Oldroyd con espesor constante, que desciende por un plano inclinado, formando un ángulo α con la vertical y que rota con una velocidad angular constante Ω (figura 4.1).

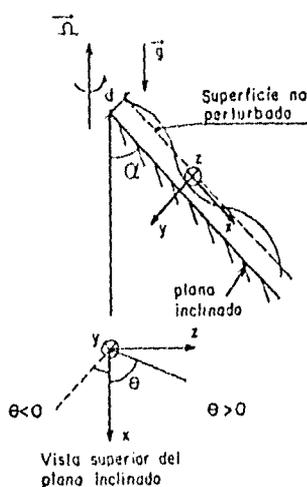


Figura 4.1- Vistas lateral y superior del plano inclinado en rotación.

La dirección del vector velocidad angular es antiparalela a la dirección de la gravedad. Por otra parte, se elige un sistema de referencia que se mueve con el plano inclinado y cuyo origen se localiza en un punto sobre la superficie libre de la capa de fluido (no perturbada). El eje x y el eje z son paralelos al plano inclinado. El primero coincide con la dirección de la componente de la gravedad que es paralela al plano. El eje y es perpendicular a la interfase sólido líquido. La dirección de las coordenadas se elige de tal manera que tengamos un sistema derecho de coordenadas.

Al estar situados en un sistema de referencia no inercial, la ecuación de movimiento contendrá dos fuerzas de cuerpo adicionales: la fuerza ficticia de Coriolis $2\rho(\Omega \times U)$ y la fuerza centrífuga $-\rho \Omega \times (\Omega \times r)$, donde r es un vector que comienza en el eje de rotación y termina en el punto donde está aplicada la fuerza.

En el sistema de coordenadas elegido, el vector Ω tiene componentes en los ejes x y y dados por:

$$\underline{\Omega} = (-\Omega \cos \alpha, -\Omega \sin \alpha, 0) \quad (4.1)$$

La ecuación de conservación de momento, para este sistema, queda:

$$\rho \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \nabla \underline{U}^2 - \rho \underline{U} \times (\nabla \times \underline{U}) = -\nabla p - 2\rho(\underline{\Omega} \times \underline{U}) - \rho \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{r}) + \nabla \cdot \underline{\tau} + \rho \underline{g} \quad (4.2)$$

Como estamos trabajando con un fluido incompresible, la ecuación de conservación de la masa es:

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0 \quad (4.3)$$

Como se aprecia, la fuerza centrífuga ocasiona que las coordenadas (x, y, z) aparezcan explícitamente en las ecuaciones. Esto es un problema serio ya que al resolver el sistema tendremos una dependencia de las velocidades en las coordenadas x y z . Esto hará que sea imposible separar en modos normales las variables dependientes al momento de intentar resolver el problema perturbado.

Con el fin de evitar las grandes dificultades matemáticas asociadas a este problema consideraremos el caso particular en que la fuerza de Coriolis es mucho mayor que la fuerza centrífuga. Esto se puede lograr cuando se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{2|U|}{r\Omega} \gg 1 \quad (4.4)$$

Algunas situaciones relevantes en las que se realiza esta aproximación son: las corrientes marinas inducidas por el viento, estudiadas a principios de siglo por Ekman y las corrientes de aire en la atmósfera terrestre.

La segunda suposición es que el área que ocupa el flujo en una cara paralela al plano inclinado es lo suficientemente grande como para ignorar los efectos de borde. Esta suposición implica que todos los puntos en un plano $y=\text{cte}$, serán equivalentes, es decir, las variables que describen el fenómeno tendrán el mismo valor. Matemáticamente tenemos que los campos de velocidad, presión y esfuerzos sólo pueden depender de la coordenada y .

La primera consecuencia de lo anterior se observa al aplicar la ecuación de continuidad obteniéndose que $dV/dy=0$, lo cual significa que $V=\text{cte}$ pero como la velocidad debe anularse en la frontera sólida, es necesario que $V=0$. Por tanto, se tiene el sistema de ecuaciones que satisfacen los campos del flujo principal:

$$-2\Omega \text{sen}\alpha W = g \cos\alpha + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_{12}}{dy} \quad (4.5)$$

$$2 \Omega \cos \alpha W = g \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} \quad (4.6)$$

$$-2 \Omega \operatorname{sen} \alpha U = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_{13}}{dy} \quad (4.7)$$

donde los subíndices 1, 2 y 3 se refieren a las coordenadas x, y y z, respectivamente

De estas ecuaciones es necesario eliminar los esfuerzos, con el fin de obtener un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales. Para esto, utilizamos el modelo de Oldroyd, y obtenemos cada uno de los esfuerzos como función de las velocidades U y W. Las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2 \mu (\lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \\ \tau_{22} &= 0 \\ \tau_{33} &= 2 \mu (\lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{dW}{dy} \right)^2 \\ \tau_{12} &= \mu \left(\frac{dU}{dy} \right) \\ \tau_{23} &= \mu \left(\frac{dW}{dy} \right) \\ \tau_{13} &= 2 \mu (\lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{dU}{dy} \right) \left(\frac{dW}{dy} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde μ , λ_1 y λ_2 son la viscosidad, el tiempo de relajación y el tiempo de retardo, respectivamente.

Derivando τ_{12} y τ_{23} y posteriormente sustituyendo en las ecuaciones de movimiento se llega al sistema por resolver:

$$-2 \Omega \operatorname{sen} \alpha W = g \cos \alpha + \nu \frac{d^2 U}{dy^2} \quad (4.9)$$

$$2 \Omega \cos \alpha W = g \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} \quad (4.10)$$

$$-2 \Omega \operatorname{sen} \alpha U = \nu \frac{d^2 W}{dy^2} \quad (4.11)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática

Como se observa, las ecuaciones son exactamente iguales que para el fluido newtoniano (ver Dávalos-Orozco y Ruiz-Chavarría, 1992) que para el fluido viscoelástico. Lo anterior implica que la elasticidad no tiene influencia sobre la cinemática del flujo cuando no existen perturbaciones sobre el sistema. Sin embargo, observamos la aparición de nuevos esfuerzos normales y tangenciales, los cuales también tendrán una gran importancia en la determinación de la estabilidad del sistema

Las ecuaciones (4.9) y (4.11) forman un sistema cerrado, cuyas únicas incógnitas son U y W. Estas dos ecuaciones pueden combinarse para formar una sola ecuación compleja. Multiplicamos a (4.9) por i y posteriormente le sumamos (4.11):

$$2 \Omega \operatorname{sen} \alpha (U + i W) = g \cos \alpha + \nu \frac{d^2}{dy^2} (U + i W) \quad (4.12)$$

Podemos definir una nueva variable $F=U+i W$, con lo cual llegamos a una sola ecuación diferencial de segundo orden:

$$2 \Omega \operatorname{sen} \alpha F = g \cos \alpha + \nu \frac{d^2 F}{dy^2} \quad (4.13)$$

La parte real de la solución de esta ecuación será $U(y)$ y la parte imaginaria $W(y)$. Si adimensionalizamos a las coordenadas, usando como distancia característica el espesor de la capa d , se tiene:

$$\nu \frac{d^2 F}{dy^2} - 2 \tau \chi^2 F = \frac{g d^2 \cos \alpha}{\nu} \quad (4.14)$$

donde $\chi^2 = \Omega \sin \alpha d^2 / \nu = \tau \sin \alpha / 2$. Siendo $\tau = 2 \Omega d^2 / \nu$ el número de Taylor que es una medida de la importancia de la fuerza de Coriolis con respecto a las fuerzas viscosas. Este parámetro muestra que la rotación no tiene influencia sobre el flujo cuando el plano es vertical, es decir, cuando $\alpha = 0$.

La solución general de la parte homogénea de la ecuación es:

$$F = A_1 \exp(\lambda_1 y) + A_2 \exp(\lambda_2 y) \quad (4.15)$$

Encontramos las raíces de esta ecuación al resolver el polinomio característico, y se obtiene:

$$\lambda_1 = (1+i)\chi \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -(1+i)\chi \quad (4.16)$$

Por otra parte, una solución particular de F es:

$$F_p = \frac{-i g \cot \alpha}{2\Omega} = -i\beta \quad (4.17)$$

Con esto, se tiene la solución general para F:

$$F = A_1 \exp(1+i)\chi + A_2 \exp-(1+i)\chi - i\beta \quad (4.18)$$

Para determinar totalmente el campo de velocidades es necesario aplicar las condiciones de frontera. En la superficie libre se tiene que los esfuerzos tangenciales deben anularse. Lo cual nos da las condiciones:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dW}{dy} = 0 \rightarrow \frac{dF}{dy} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (4.19)$$

Por otra parte, desde nuestro sistema de referencia el plano inclinado permanece en reposo. La condición de no-deslizamiento en la pared sólida implica la anulación de las velocidades en $y=1$:

$$U(1) = W(1) = 0 \rightarrow F(1) = 0 \quad (4.20)$$

Las dos ecuaciones resultantes de aplicar las condiciones de frontera son:

$$A_1 \exp(1+i)\chi + A_2 \exp-(1+i)\chi - i\beta = 0 \quad (4.21)$$

$$(1+i)\chi (A_1 - A_2) = 0 \quad (4.22)$$

Al resolver para A_1 y A_2 obtenemos

$$A_1 = A_2 = i \frac{\beta}{2 \cosh(1+i)\chi} \quad (4.23)$$

Con esto, se tiene la solución para F que cumple con las condiciones de frontera. Expresándola en función de cosenos hiperbólicos complejos, se tiene:

$$F(y) = i\beta \left[\frac{\cosh(1+i)\chi y}{\cosh(1+i)\chi} - 1 \right] \quad (4.24)$$

Las componentes de la velocidad se obtienen al separar F en sus partes real e imaginaria:

$$U(y) = \beta_1 [\sinh \chi (1+y) \sin \chi (1-y) + \sinh \chi (1+y) \sin \chi (1-y)] \quad (4.25)$$

$$W(y) = \beta_1 [\cosh \chi (1+y) \cos \chi (1-y) + \cosh \chi (1+y) \cos \chi (1-y)] \\ - \beta_1 [\cosh 2\chi + \cos 2\chi] \quad (4.26)$$

$$\text{Con } \beta_1 = \beta / (\cosh 2\chi + \cos 2\chi)$$

4.2 Adimensionalización de las variables de flujo

Con el fin de poder estudiar el problema con una cantidad reducida de parámetros, es necesario adimensionalizar las variables que describen el flujo. Para ello se requieren dos cantidades representativas: una longitud característica y una velocidad característica.

La única longitud característica que se tiene es el espesor d de la capa de fluido sin perturbar. Por otra parte, es necesario escoger una velocidad que tome en cuenta las dos componentes de la velocidad del sistema. La velocidad representativa la definimos como U_0 :

$$U_0^2 = \langle U^2 + W^2 \rangle = \int_0^1 (U^2 + W^2) dy \quad (4.27)$$

esta integral es el promedio espacial del cuadrado de la norma de la velocidad. La U_0 elegida se denomina como velocidad cuadrática media.

Evaluamos la integral usando la propiedad de los números complejos que afirma que si $F = U + iW$ entonces $||\underline{U}|| = (FF^*)^{1/2}$. Al usar la ecuación 4.22 y las identidades $\cosh a \cosh b = 1/2 [\cosh(a+b) + \cosh(a-b)]$ y $\sinh a \sinh b = 1/2 [\cosh(a+b) - \cosh(a-b)]$ la norma de la velocidad al cuadrado es:

$$||\underline{U}||^2 = \mathfrak{G} (\cosh(1+i)\chi y - \cosh(1+i)\chi) (\cosh(1-i)\chi y - \cosh(1-i)\chi), \quad (4.28)$$

donde $\mathfrak{G} = 2\beta^2 / (\cosh 2\chi + \cos 2\chi)$.

Al integrar esta expresión y sacar raíz cuadrada se obtiene la velocidad característica buscada

$$U = U_0 \left(1 - \frac{\sinh 2\chi + \sin 2\chi}{2\chi(\cosh 2\chi + \cos 2\chi)} \right) \quad (4.29)$$

Por medio de esta cantidad podemos expresar a las velocidades en forma adimensional

$$U(y) = T [\sinh \chi (1+y) \sin \chi (1-y) + \sinh \chi (1-y) \sin \chi (1+y)] \quad (4.30)$$

$$W(y) = T [\cosh \chi (1+y) \cos \chi (1-y) + \cosh \chi (1-y) \cos \chi (1+y)] - T [\cosh 2\chi + \cos 2\chi] \quad (4.31)$$

$$\text{donde } T = \frac{1}{(\cos 2\chi + \cosh 2\chi) \left(1 - \frac{\sin 2\chi + \sinh 2\chi}{2\chi(\cos 2\chi + \cosh 2\chi)} \right)^{1/2}}$$

Para adimensionalizar los esfuerzos usaremos a la viscosidad cinemática ν , además de d y U_0 .

Las ecuaciones quedan como:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2(L_1 - L_2) \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \\ \tau_{22} &= 0 \\ \tau_{33} &= 2(L_1 - L_2) \left(\frac{dW}{dy} \right)^2 \\ \tau_{12} &= \left(\frac{dU}{dy} \right) \\ \tau_{21} &= \left(\frac{dW}{dy} \right) \\ \tau_{13} &= 2(L_1 - L_2) \left(\frac{dU}{dy} \right) \left(\frac{dW}{dy} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

siendo $L_i = \lambda_i U_0 / d$, $i=1,2$ los tiempos de relajamiento y de retardo adimensionales.

Con la velocidad característica puede definirse un número de Reynolds adecuado para este problema.

$$R = \frac{g \cos \alpha d^3}{\nu^2} \left(\frac{1}{2\chi^2} \left(1 - \frac{\sin 2\chi + \sinh 2\chi}{2\chi(\cos 2\chi + \cosh 2\chi)} \right) \right)^2 \quad (4.33)$$

Calculando el límite cuando χ tiende a cero se encuentra el número de Reynolds correspondiente para un flujo sin rotación.

$$R_0 = \frac{g \cos \alpha d^3}{\nu^2} \left(\frac{8}{15} \right)^2 \quad (4.34)$$

La diferencia con el número de Reynolds dado por Yih (1963) se debe a que en este caso se tomó la velocidad cuadrática media como velocidad característica.

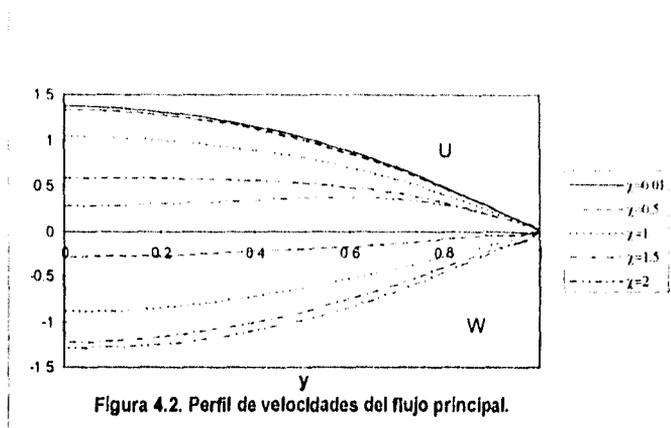
4.3. Análisis del flujo principal.

Se observa que las velocidades solamente son función del parámetro χ . Esto quiere decir que para el flujo principal adimensional el parámetro importante es χ y no τ o α por separado.

Haciendo un desarrollo en series de potencias para las velocidades manteniendo tres términos de la serie para las funciones hiperbólicas, se obtienen expresiones de las velocidades para el caso en que χ es pequeña. Esto es:

$$\begin{aligned} U &= (15/8)^{1/2} (1 - y^2) + O(\chi) \\ W &= 0 + O(\chi) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Esto difiere del resultado obtenido por Yih solamente en una constante multiplicativa debido a que se está definiendo la velocidad característica de otra manera



El comportamiento de las velocidades para diferentes valores de χ puede observarse en la figura 4.2. En ella se ve que la velocidad W aumenta al incrementarse el parámetro χ . Por otra parte, la velocidad U disminuye con el crecimiento del mismo. Se encuentra también que para valores de χ de 2.0 o mayores, el valor máximo de la velocidad no se encuentra en la superficie libre. La razón de esto puede ser el hecho de que no se está tomando en cuenta la fuerza centrífuga, lo cual hace que los resultados difieran cualitativamente para valores grandes de χ .

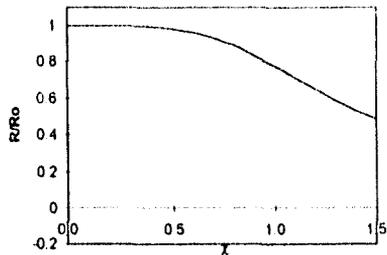


Figura 4.3. Cociente del Número de Reynolds con el número de Reynolds en ausencia de Rotación contra el parámetro χ

Otro análisis consiste en una comparación de R con respecto a R_0 , con el fin de mostrar la influencia de la rotación. En la figura (4.3) se observa la gráfica R/R_0 vs χ . La que muestra que el cociente es una función decreciente de χ . Esto puede interpretarse como un incremento de los esfuerzos viscosos a medida que se aumenta la rotación.

Debido a la importancia de los esfuerzos normales en la viscoelasticidad, se analiza su comportamiento en la dirección de propagación de la velocidad en la superficie. Para esto se realiza una rotación del sistema de coordenadas a lo largo del eje y , por un ángulo γ_1 definido como:

$$\gamma_1 = \arctan \left[\frac{W(0)}{U(0)} \right] \quad (4.36)$$

Con esto, los esfuerzos normales se transforman en:

$$\tau'_{11} = \tau_{11} \cos^2 \gamma_1 + 2 \tau_{13} \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 + \tau_{33} \sin^2 \gamma_1 \quad (4.37)$$

$$\tau'_{33} = \tau_{11} \sin^2 \gamma_1 - 2 \tau_{13} \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 + \tau_{33} \cos^2 \gamma_1 \quad (4.38)$$

El comportamiento de los esfuerzos normales con respecto a χ se analiza en la figura 4.4. En ella se ve un crecimiento de τ'_{33} a medida que la rotación aumenta. Además, observamos un decremento de τ'_{11} . Lo anterior se explica fácilmente debido al crecimiento de la velocidad $W(y)$ a medida que aumenta la rotación. Sin embargo, observamos que la diferencia de esfuerzos normales $\tau_{11} - \tau_{33}$ disminuye a medida que aumenta la rotación. Esto es importante debido a que esta diferencia provoca comportamientos diferentes en el fluido newtoniano y en el viscoelástico, por lo que se puede concluir que un aumento en la rotación provoca una disminución de los efectos viscoelásticos. Esto será importante al momento de estudiar la estabilidad del problema.

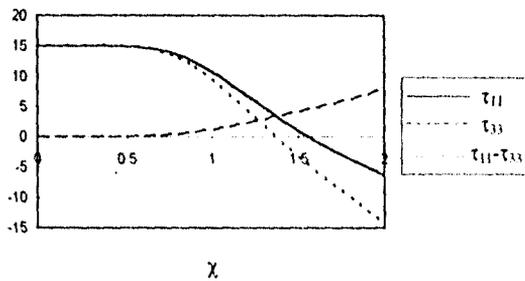


Figura 4.4 Comportamiento de los esfuerzos normales respecto a χ en el sistema rotado un ángulo γ_1 .

5. ECUACIONES DE ORR-SOMMERFELD PARA EL PROBLEMA
DEL PLANO INCLINADO EN ROTACIÓN

5.1. Generalización de la ecuación de Orr-Sommerfeld.

En esta sección se obtendrán las ecuaciones lineales que describen la evolución temporal y espacial de las perturbaciones del problema. Dichas ecuaciones serán una generalización de la ecuación de Orr-Sommerfeld de un fluido viscoelástico de Oldroyd descendiendo por un plano inclinado en rotación.

Siguiendo el desarrollo propuesto en el capítulo 3 podemos encontrar inmediatamente las ecuaciones lineales adimensionales que satisfacen las perturbaciones. Como se realizará posteriormente una rotación del sistema de coordenadas, expresaremos a todas las variables con primas para que las variables obtenidas después de hacer el cambio de coordenadas no estén primadas y se simplifique la notación. Las ecuaciones quedan:

a) Balance de momento:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{dU'}{dy'} + W' \frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\tau}{R} \operatorname{sen} \alpha w' = -\frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \tau'_{11}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{12}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{13}}{\partial z'} \right) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U' \frac{\partial v'}{\partial x'} + W' \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\tau}{R} \operatorname{cos} \alpha w' = -\frac{\partial p}{\partial y'} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \tau'_{21}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{22}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{23}}{\partial z'} \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + U' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{dw'}{dy'} + W' \frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{\tau}{R} (\sin \alpha u' - \cos \alpha v') = -\frac{\partial p}{\partial z'} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \tau'_{11}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{12}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{13}}{\partial z'} \right) \quad (5.3)$$

b) Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad (5.4)$$

c) Ecuaciones constitutivas

$$\tau'_{11} + L_1 \left(\frac{\partial \tau'_{11}}{\partial t} + v' \frac{d\tau'_{11}}{dy'} + U' \frac{\partial \tau'_{11}}{\partial x'} + W' \frac{\partial \tau'_{11}}{\partial z'} - 2\tau'_{21} \frac{dU}{dy'} - 2\tau'_{11} \frac{\partial u'}{\partial x'} - 2\tau'_{12} \frac{\partial v'}{\partial y'} - 2\tau'_{13} \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = 2 \left[e'_{11} + L_2 \left(\frac{\partial e'_{11}}{\partial t} + U' \frac{\partial e'_{11}}{\partial x'} + W' \frac{\partial e'_{11}}{\partial z'} - 2e'_{21} \frac{dU}{dy'} - \frac{dU}{dy'} \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right]$$

$$\tau'_{22} + L_1 \left(\frac{\partial \tau'_{22}}{\partial t} + U' \frac{\partial \tau'_{22}}{\partial x'} + W' \frac{\partial \tau'_{22}}{\partial z'} - 2\tau'_{12} \frac{\partial v'}{\partial x'} - 2\tau'_{21} \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) = 2 \left[e'_{22} + L_2 \left(\frac{\partial e'_{22}}{\partial t} + U' \frac{\partial e'_{22}}{\partial x'} + W' \frac{\partial e'_{22}}{\partial z'} - \frac{dU}{dy'} \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{dW}{dy'} \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \right]$$

$$\tau'_{13} + L_1 \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \tau'_{13}}{\partial t} + v' \frac{d\tau'_{13}}{dy'} + U' \frac{\partial \tau'_{13}}{\partial x'} + W' \frac{\partial \tau'_{13}}{\partial z'} - \tau'_{21} \frac{dW}{dy'} - \tau'_{23} \frac{dU}{dy'} - \tau'_{11} \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) = \\ & \left(-\tau'_{12} \frac{\partial w'}{\partial y'} - \tau'_{11} \left(\frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) - \tau'_{23} \frac{\partial u'}{\partial y'} - \tau'_{13} \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \end{aligned} \right] = 2 \left[e'_{13} + L_2 \left(\frac{\partial e'_{13}}{\partial t} + U' \frac{\partial e'_{13}}{\partial x'} + W' \frac{\partial e'_{13}}{\partial z'} - e'_{21} \frac{dW}{dy'} - \frac{1}{2} \frac{dU}{dy'} \frac{\partial w'}{\partial y'} - e'_{23} \frac{dU}{dy'} - \frac{1}{2} \frac{dW}{dy'} \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right]$$

$$\tau'_{12} + L_1 \left(\frac{\partial \tau'_{12}}{\partial t} + v' \frac{d\tau'_{12}}{dy'} + U' \frac{\partial \tau'_{12}}{\partial x'} + W' \frac{\partial \tau'_{12}}{\partial z'} - \tau'_{12} \frac{dU'}{dy'} - \tau'_{11} \frac{\partial v'}{\partial x'} + \tau'_{12} \frac{\partial W'}{\partial z'} - \tau'_{11} \frac{\partial v'}{\partial z'} - \tau'_{21} \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) =$$

$$2 \left[e'_{12} + L_2 \left(\frac{\partial e'_{12}}{\partial t} + v' \frac{d^2 U'}{dy'^2} + U' \frac{\partial e'_{12}}{\partial x'} + W' \frac{\partial e'_{12}}{\partial z'} + \frac{1}{2} \frac{dU'}{dy'} \frac{\partial W'}{\partial z'} - \frac{1}{2} \frac{dW'}{dy'} \frac{\partial u'}{\partial z'} - e'_{22} \frac{dU'}{dy'} \right) \right]$$

$$\tau'_{23} + L_1 \left(\frac{\partial \tau'_{23}}{\partial t} + v' \frac{d\tau'_{23}}{dy'} + U' \frac{\partial \tau'_{23}}{\partial x'} + W' \frac{\partial \tau'_{23}}{\partial z'} - \tau'_{23} \frac{dW'}{dy'} - \tau'_{31} \frac{\partial v'}{\partial x'} + \tau'_{32} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \tau'_{31} \frac{\partial v'}{\partial z'} - \tau'_{21} \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) =$$

$$2 \left[e'_{23} + L_2 \left(\frac{\partial e'_{23}}{\partial t} + v' \frac{d^2 W'}{dy'^2} + U' \frac{\partial e'_{23}}{\partial x'} + W' \frac{\partial e'_{23}}{\partial z'} + \frac{dW'}{dy'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{1}{2} \frac{dU'}{dy'} \frac{\partial W'}{\partial x'} - e'_{22} \frac{dW'}{dy'} \right) \right]$$

(5.5) - (5.9)

Con el fin de simplificar las ecuaciones anteriores, resulta conveniente realizar un cambio del sistema de coordenadas utilizado mediante una rotación de cierto ángulo θ , de tal forma que las derivadas con respecto a la coordenada z se anulen en esta dirección. Las ecuaciones de transformación para las nuevas variables son:

$$x = x' \cos \theta + z' \sin \theta \quad (5.10)$$

$$y = y' \quad (5.11)$$

$$z = -x' \sin \theta + z' \cos \theta \quad (5.12)$$

$$u = u' \cos \theta + w' \sin \theta \quad (5.13)$$

$$v = v' \quad (5.14)$$

$$w = -u' \sin \theta + w' \cos \theta \quad (5.15)$$

$$U = U' \cos \theta + W' \sin \theta \quad (5.16)$$

$$W = -U' \sin \theta + W' \cos \theta \quad (5.17)$$

$$\tau_{11} = \tau'_{11} \cos^2 \theta + 2 \tau'_{12} \sin \theta \cos \theta + \tau'_{22} \sin^2 \theta \quad (5.18)$$

$$\tau_{22} = \tau'_{22} \quad (5.19)$$

$$\tau_{12} = \sin \theta \cos \theta (\tau'_{12} - \tau'_{11}) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \tau'_{12} \quad (5.20)$$

$$\tau_{12} = \tau'_{12} \cos \theta + \tau'_{22} \sin \theta \quad (5.21)$$

$$\tau_{21} = \tau'_{12} \sin \theta + \tau'_{22} \cos \theta \quad (5.22)$$

Con lo cual, el sistema de ecuaciones anterior se reduce a

a) Balance de momento

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\tau}{R} \sin \alpha w &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\tau}{R} \cos \alpha w &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\tau}{R} (\sin \alpha u - \cos \alpha v) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

b) Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.24)$$

c) Ecuaciones constitutivas

$$\tau_{11} + L_1 \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial t} + v \frac{d\tau_{11}^0}{dy} + U \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} - 2\tau_{21} \frac{dU}{dy} - 2\tau_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2\tau_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \left[e_{11} + L_2 \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial t} + U \frac{\partial e_{11}}{\partial x} - 2e_{21} \frac{dU}{dy} - \frac{dU}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

$$\tau_{22} + L_1 \left(\frac{\partial \tau_{22}}{\partial t} + U \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x} - 2\tau_{12}^0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \left[e_{22} + L_2 \left(\frac{\partial e_{22}}{\partial t} + U \frac{\partial e_{22}}{\partial x} - 2 \frac{dU}{dy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\tau_{13} + L_1 \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial t} + v \frac{d\tau_{13}^0}{dy} + U \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x} - \tau_{21} \frac{dW}{dy} - \tau_{21} \frac{dU}{dy} - \tau_{11}^0 \frac{\partial w}{\partial x} - \tau_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial y} - \tau_{11}^0 \frac{\partial w}{\partial x} - \tau_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \left[e_{13} + L_2 \left(\frac{\partial e_{13}}{\partial t} + U \frac{\partial e_{13}}{\partial x} - e_{21} \frac{dW}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dU}{dy} \frac{\partial w}{\partial y} - e_{21} \frac{dU}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dW}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

$$\tau_{12} + L_1 \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial t} + v \frac{d\tau_{12}^0}{dy} + U \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} - \tau_{22} \frac{dU}{dy} - \tau_{11}^0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \left[e_{12} + L_2 \left(\frac{\partial e_{12}}{\partial t} + v \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^2} + U \frac{\partial e_{12}}{\partial x} - e_{22} \frac{dU}{dy} \right) \right]$$

$$\tau_{23} + L_1 \left(\frac{\partial \tau_{23}}{\partial t} + v \frac{d\tau_{23}^0}{dy} + U \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x} - \tau_{22} \frac{dW}{dy} - \tau_{31}^0 \frac{\partial v}{\partial x} - \tau_{12}^0 \frac{\partial v}{\partial y} - \tau_{31}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 2 \left[e_{23} + L_2 \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial t} + v \frac{d^2 W}{dy^2} + U \frac{\partial e_{23}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{dW}{dy} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{dU}{dy} \frac{\partial w}{\partial x} - e_{22} \frac{dW}{dy} \right) \right]$$

(5.25)

Esto elimina la dependencia de la coordenada z en las ecuaciones teniendo ahora solamente dos variables espaciales independientes.

En este sistema no tenemos coeficientes que dependan explícitamente de la coordenada x o del tiempo. En base a esto, se espera que las soluciones para los campos de velocidades, presión y esfuerzos sean de la forma

$$f(y) \exp i k (x - c t) \quad (5.26)$$

Aún es posible reducir el número de incógnitas en nuestras ecuaciones haciendo algunas consideraciones acerca de la ecuación de continuidad. De las propiedades de operadores vectoriales sabemos que:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \xi = 0 \quad (5.27)$$

siendo ξ una función vectorial arbitraria.

Escribimos \underline{u} como el rotacional de una función vectorial cuya componente en el eje y es nula, es decir:

$$\underline{u} = \operatorname{rot} (\xi_1 \hat{i} + \xi_2 \hat{k}) = \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \hat{j} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \hat{k} \quad (5.28)$$

Con esto, el problema se reduce de tres a dos incógnitas, ya que en lugar de resolver las ecuaciones para las variables u , v y w , se resolverán para las perturbaciones ξ y ζ . Suponemos que las soluciones para ζ , ξ , p y τ_{ij} son de la forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \Phi(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.29)$$

$$\zeta = \Psi(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.30)$$

$$p = \gamma(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.31)$$

$$\tau_{11} = F_1(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.32)$$

$$\tau_{22} = F_2(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.33)$$

$$\tau_{13} = F_3(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.34)$$

$$\tau_{12} = F_4(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.35)$$

$$\tau_{23} = F_5(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.36)$$

$$\tau_{33} = F_6(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.37)$$

Las soluciones de las amplitudes Φ , Ψ , γ y F_i se obtendrán después de sustituir dichas expresiones en las ecuaciones originales para las velocidades. A Φ y Ψ se les denomina amplitudes de las funciones potenciales.

Puede observarse que de acuerdo con estas definiciones, las componentes del campo de velocidades y presiones de la perturbación se expresan como:

$$u = \Psi'(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.38)$$

$$v = -i k \Psi(y) \exp i k (x - ct) \quad (5.39)$$

$$w = \Phi(y) \exp i k (x - c t) \quad (5.40)$$

$$\pi = g(y) \exp i k (x - c t) \quad (5.41)$$

Al sustituir estas expresiones de las perturbaciones se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

a) Balance de Momento:

$$i k \Psi'' (U - c) - i k U' \Psi' + \Lambda_2 \Phi + i k \Lambda_3 \Psi' = -i k \gamma + 1/R (i k F_1 + F_1') \quad (5.42)$$

$$\Psi'' (U - c) - U'' \Psi - i \Lambda_2 / k \Phi' + \Lambda_3 \Psi' = -\gamma' + 1/R (F_1' - i F_4''/k) \quad (5.43)$$

$$i k \Phi (U - c) - i k \Psi' W' - i k \Lambda_1 \Psi - \Lambda_2 \Psi'' = 1/R (F_3' + i k F_3) \quad (5.44)$$

b) Ecuaciones Constitutivas:

$$F_1 [1 - i k L_1 (U - c)] + L_1 [-4 i k (L_1 - L_2) (\Psi'' U^2 + \Psi' U' U'') - 2 F_4 U' - 2 \Psi'' U'] = 2 i k \Psi' - 2 L_2 [k^2 \Psi' (U - c) - (2 \Psi'' + k^2 \Psi) U'] \quad (5.45)$$

$$F_2 [1 - i k L_1 (U - c)] + 2 L_1 k^2 \Psi U' = -2 i k \Psi'' + 2 L_2 [k^2 \Psi' (U - c) - k^2 \Psi U'] \quad (5.46)$$

$$F_3 [1 - i k L_1 (U - c)] + L_1 [-2 i k (L_1 - L_2) (\Phi U^2 + \Psi'' U' W' + \Psi' U' W'' + \Psi U'' W') - U' F_5 - F_4 W' - \Psi'' W' - \Phi' U'] = i k \Phi + L_2 [-k^2 \Phi (U - c) - 2 \Phi' U' - 2 W' \Psi'' - k^2 \Psi W'] \quad (5.47)$$

$$F_4 [1 - i k L_1 (U-c)] + L_1 [-U'' F_2 - i k \Psi U'' + 2 k^2 (L_1 - L_2) U'' \Psi] - \Psi'' (k^2 \Psi + L_2 [i k (\Psi'' + k^2 \Psi) (U-c) - i k \Psi U'' + 2 i k \Psi'' U]) \quad (5.48)$$

$$F_3 [1 - i k L_1 (U-c)] + L_1 [-W'' F_2 - i k \Psi W'' + 2 k^2 (L_1 - L_2) U'' W'' \Psi + i k (\Psi'' W'' + \Phi U'')] = \Phi'' + L_2 [i k \Phi'' (U-c) - i k \Psi W'' + 3 i k \Psi'' W'' - i k \Phi U''] \quad (5.49)$$

Las tres ecuaciones de balance de momento pueden reducirse a 2 si eliminamos de ellas a la variable γ . Esto se consigue derivando la primera ecuación con respecto a y e igualando con la segunda. Esto nos lleva al par de ecuaciones:

$$-i k R [\Psi'''(U-c) - \Psi' (U'' + k^2 (U-c))] + \tau \operatorname{sen} \alpha \Phi' + i k \tau \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \theta \Phi + k^2 F_4 - i k F_2' + i k F_1' + F_4'' = 0 \quad (5.50)$$

$$-i k R [\Phi' (U-c) + \Psi' W''] + i k \tau \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \theta \Psi' + \tau \operatorname{sen} \alpha \Psi' - F_3' - i k F_3'' = 0 \quad (5.51)$$

Dichas ecuaciones contienen aún como incógnitas a las amplitudes de los esfuerzos. Para tener las ecuaciones sólo en función de las amplitudes Φ y Ψ , es necesario resolver el sistema de las cinco ecuaciones constitutivas que se tienen, poniendo las F_i en función de dichas amplitudes. El resultado obtenido es:

$$F_1(y) = -((2 i k \Psi'' - 2 c k^2 L_2 \Psi'' + 2 k^2 L_2 U'' \Psi'' + 2 k^2 L_2 \Psi'' U'' - 4 i \Delta L k L_1 \Psi'' U'' - i k L_1 \Psi'' (2 \Delta L U''^2)' - 2 L_1 U'' \Psi'' + 4 L_2 U'' \Psi'') / (1 - i c k L_1 + i k L_1 U'') - (2 L_1 U'' (2 L_1 U'' (i k \Psi'' + c k^2 L_2 \Psi'' - k^2 L_2 U'' \Psi'' - k^2 L_1 \Psi'' U'' + k^2 L_2 \Psi'' U'') + i (1 - i c k L_1 + i k L_1 U'') (i k^2 \Psi'' + c k^3 L_2 \Psi'' - k^3 L_2 \Psi'' U'' - 2 k L_2 \Psi'' U'' + 2 i \Delta L k^2 L_1 \Psi'' U''^2 + i \Psi'' + c k L_2 \Psi'' - k L_2 U'' \Psi'' - k L_1 \Psi'' U'' + k L_2 \Psi'' U'')) / (1 - i c k L_1 + i k L_1 U''))^3 \quad (5.52)$$

$$F_2(y) = (-2(i k \Psi'' + c k^2 L_2 \Psi' - k^2 L_2 U \Psi' - k^2 (L_1 - L_2) \Psi U')) / (1 + i k L_1 (U - c)) \quad (5.53)$$

$$F_3(y) = ((L_1 W'' (2 L_1 U' (i k \Psi'' + c k^2 L_2 \Psi' - k^2 L_2 U \Psi' - k^2 L_1 \Psi U' + k^2 L_2 \Psi U')) + i (1 - i c k L_1 + i k L_1 U) (i k^2 \Psi'' + c k^3 L_2 \Psi' - k^3 L_2 \Psi U - 2 k L_2 \Psi' U' + 2 i \Delta L k^2 L_1 \Psi U'^2 + i \Psi'' + c k L_2 \Psi'' - k L_2 U \Psi'' - k L_1 \Psi U'' + k L_2 \Psi U'')) / (1 + i k L_1 (U - c))^2 - (i k \Phi' - c k^2 L_2 \Phi + k^2 L_2 \Phi U - L_1 \Phi' U' + 2 L_2 \Phi' U' - 2 i \Delta L k L_1 \Phi U'^2 + k^2 L_2 \Psi W' - 2 i \Delta L k L_1 \Psi U' W' - L_1 W' \Psi'' + 2 L_2 W' \Psi'' - 2 i \Delta L k L_1 \Psi W' U' - 2 i \Delta L k L_1 \Psi U' W'') / (1 + i k L_1 (U - c)) - (L_1 U' ((2 L_1 (i k \Psi'' + c k^2 L_2 \Psi' - k^2 L_2 U \Psi' - k^2 L_1 \Psi U' + k^2 L_2 \Psi U') W') / (1 + i k L_1 (U - c))^2 + (i (\Phi' + c k L_2 \Phi' - k L_2 U \Phi' - k L_1 \Phi U' + k L_2 \Phi U' + k L_1 \Psi' W' - 3 k L_2 \Psi' W' + 2 i \Delta L k^2 L_1 \Psi U' W' - k L_1 \Psi W'' + k L_2 \Psi W'')) / (1 + i k L_1 (U - c)))) / (1 + i k L_1 (U - c)) \quad (5.54)$$

$$F_4(y) = -(2 L_1 U' (i k \Psi'' + c k^2 L_2 \Psi' - k^2 L_2 U \Psi' + k^2 \Delta L \Psi U')) + i (1 - i c k L_1 + i k L_1 U) (i k^2 \Psi'' + c k^3 L_2 \Psi' - k^3 L_2 \Psi U - 2 k L_2 \Psi' U' + 2 i \Delta L k^2 L_1 \Psi U'^2 + i \Psi'' + c k L_2 \Psi'' - k L_2 U \Psi'' - k L_1 \Psi U'' + k L_2 \Psi U'') / (1 + i k L_1 (U - c))^2 \quad (5.55)$$

$$F_5(y) = (-2 L_1 (i k \Psi'' + c k^2 L_2 \Psi' - k^2 L_2 U \Psi' - k^2 L_1 \Psi U' + k^2 L_2 \Psi U') W') / (1 + i k L_1 (U - c))^2 - (i (\Phi' + c k L_2 \Phi' - k L_2 U \Phi' - k L_1 \Phi U' + k L_2 \Phi U' + k L_1 \Psi' W' - 3 k L_2 \Psi' W' + 2 i \Delta L k^2 L_1 \Psi U' W' - k L_1 \Psi W'' + k L_2 \Psi W'')) / (1 + i k L_1 (U - c)) \quad (5.56)$$

Al sustituir estas ecuaciones en (5.50) y (5.51) habremos reducido el sistema inicial de 10 ecuaciones a uno de solamente 2 para las amplitudes Φ y Ψ . Este par de ecuaciones constituye la

generalización de la ecuación de Orr-Sommerfeld para un fluido viscoelástico sometido a la acción de la gravedad y de la fuerza de Coriolis. Las ecuaciones finales tienen la forma

$$Q_1 \Psi'''' + Q_2 \Psi'''' + Q_3 \Psi'' + Q_4 \Psi' + Q_5 \Psi + Q_6 \Phi' + Q_7 \Phi = 0 \quad (5.57)$$

$$P_1 \Phi'' + P_2 \Phi' + P_3 \Phi + P_4 \Psi'' + P_5 \Psi' + P_6 \Psi = 0 \quad (5.58)$$

Dada su complejidad, las expresiones para los coeficientes Q_i y P_j se da en el apéndice I

5.2. Condición cinemática

En ausencia de perturbaciones, la superficie libre de la capa de fluido es plana y la presencia de la perturbación producirá curvaturas provocando que el espesor de la capa no sea constante a lo largo del plano.

La amplitud de una perturbación η de la superficie libre, puede expresarse como una superposición de perturbaciones senoidales del tipo

$$\eta = \eta(0) \exp i k (x - ct) \quad (5.59)$$

La perturbación induce una componente de la velocidad v en la dirección y inexistente en el flujo principal. El valor de v en la frontera superior es igual a la velocidad vertical del elemento de masa situado en la superficie libre. Lo anterior se traduce en:

$$v(0) = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

o bien, usando (5.59)

$$ik^2 P(0) = ik \{U(0) - c\} \vartheta(0) \quad (5.60)$$

A esta ecuación se le conoce como condición cinemática. Despreciando los productos entre las perturbaciones se llega a una ecuación que permite determinar $\vartheta(0)$

$$\vartheta(0) = \frac{-U'(0)}{U(0) - c}$$

5.3. Condiciones de frontera:

La solución de las ecuaciones de Orr-Sommerfeld debe construirse de manera que los campos de velocidad y de presión satisfagan las condiciones de frontera

En la superficie libre, es decir en $y=\eta(x,z,t)$, los esfuerzos tangenciales se anulan. Las ecuaciones resultantes son:

$$\tau_{12} = U'(h) + F_4(\eta) \exp[i k (x - c t)] = 0 \quad (5.61)$$

$$\tau_{23} = W'(h) + F_3(\eta) \exp[i k (x - c t)] = 0 \quad (5.62)$$

En lugar de evaluar las ecuaciones en $y=\eta$ haremos un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $y=0$. Las derivadas de la velocidad tienen el siguiente desarrollo:

$$U'(\eta) = U'(0) + U''(0) \eta + O(\eta^2) = U''(0) \eta + O(\eta^2) \quad (5.63)$$

$$W'(\eta) = W'(0) + W''(0) \eta + O(\eta^2) = W''(0) \eta + O(\eta^2) \quad (5.64)$$

Como las perturbaciones son pequeñas, los términos con η^2 y orden superior son despreciables. En el caso de las perturbaciones de los esfuerzos tangenciales podemos concluir que su evaluación en $y=0$ difiere de su evaluación en $y=\eta$ por productos de perturbaciones por η , por lo que pueden despreciarse dichas contribuciones y evaluarlos en $y=0$. Las condiciones de frontera quedan:

$$U''(0) \vartheta(0) + F_4(0) = 0 \quad (5.65)$$

$$W''(0) \vartheta(0) + F_5(0) = 0 \quad (5.66)$$

Otra de las condiciones de frontera en la superficie libre es un balance entre los esfuerzos normales y la tensión superficial. La ecuación que describe dicho balance es:

$$-\rho + \frac{2}{R} \tau_{22} + \text{We} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{en } y = \eta \quad (5.67)$$

Para poder evaluar esta condición en $y=0$ es necesario hacer una expansión de la presión en serie de Taylor:

$$P = P(0) + \eta P'(0) + \pi(0) + \pi'(0) \eta + O(\eta^2) \quad (5.68)$$

En donde P corresponde al campo de presiones en el flujo principal y π es la perturbación. El primer término vale cero ya que corresponde al estado de referencia fijado para la presión y el cuarto término es despreciable ya que es un producto de perturbaciones. Sustituyendo esta expresión, la condición de esfuerzos normales se expresa como:

$$-\eta P'(0) - \pi(0) + \frac{2}{R} \tau_{22} + \text{We} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (5.69)$$

$$-\eta P'(0) - \pi(0) + \frac{2}{R} \tau_{xy} + We \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (5.69)$$

esto, en función de los potenciales

$$-\frac{E}{R} \gamma(\theta) + g(\theta) + \frac{2}{R} F_1(\theta) - k^2 We \vartheta(\theta) = 0 \quad (5.70)$$

Las condiciones de adherencia en el plano inclinado implican que las componentes tangenciales de la velocidad se anulan:

$$\begin{aligned} U + u &= 0 \\ W + w &= 0 \end{aligned} \quad (5.71)$$

En una pared sin poros, la componente normal de la velocidad también se anula. Estas mismas condiciones se satisfacen en el flujo principal, por lo que se tiene:

$$u(1) = v(1) = w(1) = 0 \quad (5.72)$$

Estas ecuaciones, expresadas para las funciones potenciales se expresan:

$$\Phi(1) = \Psi(1) = 0 \quad (5.73)$$

$$\sin \theta \Phi(1) - \cos \theta \Psi(1) = 0 \quad (5.74)$$

La segunda condición implica que $\Phi(1) = \Psi(1) = 0$, dada la independencia lineal del seno y el coseno. Con estas condiciones el sistema de ecuaciones queda completo.

Como se observa, el sistema de ecuaciones a resolver resulta muy complejo y no es posible encontrar una solución analítica. Existen dos caminos para dar alguna solución a las ecuaciones. El primero, consiste en aplicar técnicas numéricas de solución de ecuaciones diferenciales. El segundo consiste en resolver las ecuaciones para el caso en que el número de onda k es un número muy pequeño, lo cual nos lleva a utilizar métodos asintóticos. Físicamente, el hecho de que k sea muy pequeño implica una longitud de onda de las perturbaciones muy grande comparada con el espesor de la capa. En este caso sí es posible obtener una solución analítica de las ecuaciones de Orr-Sommerfeld y es en el que nos centraremos en este trabajo.

6 ESTABILIDAD DE PERTURBACIONES A NÚMEROS DE ONDA PEQUEÑOS

APROXIMACIÓN A ORDEN CERO

6.1 Ecuaciones fundamentales y condiciones de frontera

No es posible resolver analíticamente el sistema de ecuaciones planteado en el capítulo anterior. La dificultad radica en que los coeficientes dependen de la coordenada y . Por esta razón, vamos a obtener una solución aproximada proponiendo un desarrollo en serie de potencias del número de onda k . Las soluciones propuestas tienen la forma general:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 k + \Phi_2 k^2 + \dots \\ \Psi &= \Psi_0 + \Psi_1 k + \Psi_2 k^2 + \dots \\ g &= g_0 + g_1 k + g_2 k^2 + \dots \\ c &= c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \dots\end{aligned}\tag{6.1}$$

En la aproximación a número de onda pequeño no es conveniente hacer la rotación de coordenadas del capítulo anterior ya que las ecuaciones presentan una simetría que permite hacer ciertas agrupaciones, con lo que se simplifica el problema. Si no se hace el cambio de coordenadas las soluciones propuestas para las componentes de la velocidad, los esfuerzos y la presión son:

$$\begin{aligned}u &= \Psi'(y) \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)] \\ v &= i k [\sin \theta \Phi(y) - \cos \theta \Psi(y)] \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)] \\ w &= -\Phi'(y) \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)] \\ \tau_{11} &= F_1(y) \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)] \\ \tau_{22} &= F_2(y) \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)] \\ \tau_{13} &= F_3(y) \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)]\end{aligned}$$

$$\tau_{12} = F_1(y) \exp [i k (x \cos \theta - y \sin \theta - c t)] \quad (6.2)$$

$$\tau_{21} = F_2(y) \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)]$$

$$\tau_{31} = F_3(y) \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)]$$

$$p = g(y) \exp [i k (x \cos \theta + y \sin \theta - c t)]$$

Con estas definiciones, las ecuaciones de movimiento son:

$$i k (U \cos \theta + W \sin \theta - c) \Psi' + i k U' (\Phi \sin \theta - \Psi \cos \theta) + \tau/R \operatorname{sen} \alpha \Phi' = -i k g \cos \theta + 1/R [i k (F_1 \cos \theta + F_3 \sin \theta) + F_4'] \quad (6.3)$$

$$k^2 (U \cos \theta + W \sin \theta - c) (\Psi \cos \theta + \Phi \sin \theta) - \tau/R \operatorname{sen} \alpha \Phi' = -g' + 1/R [i k (F_4 \cos \theta + F_5 \sin \theta) + F_2'] \quad (6.4)$$

$$-i k (U \cos \theta + W \sin \theta - c) \Phi' - i k W' (\Phi \sin \theta - \Psi \cos \theta) - \tau/R \operatorname{sen} \alpha \Psi'' + i k \tau/R \operatorname{sen} \alpha (\Phi \sin \theta - \Psi \cos \theta) = -i k g \operatorname{sen} \theta + 1/R [i k (F_3 \cos \theta + F_6 \sin \theta) + F_5'] \quad (6.5)$$

Como el número de onda es pequeño, se pueden despreciar los términos que contienen a k^2 o potencias superiores ya que no tendrán una influencia significativa en la estabilidad del sistema.

Las ecuaciones constitutivas para las amplitudes de los esfuerzos pueden expresarse en potencias de k de la siguiente manera:

$$F_1(y) = 4 \Delta L U' \Psi'' + 0(k) \quad (6.6)$$

$$F_2(y) = 2 i k (\operatorname{sen} \theta \Phi' - \cos \theta \Psi') + 0(k^2) \quad (6.7)$$

$$F_3(y) = 2 \Delta L (W' \Psi'' - U' \Phi'') + 0(k) \quad (6.8)$$

$$F_4(y) = \Psi'' + i k \Delta L [-\Psi'' (U \cos \theta + W \sin \theta - c) - U'' (\operatorname{sen} \theta \Phi - \cos \theta \Psi) +$$

$$\Psi'' (U' \cos \theta + W' \sin \theta) + 3 U'' (\sin \theta \Phi' - \cos \theta \Psi'') + 0(k^2) \quad (6.9)$$

$$F_3(y) = \Phi'' + i k \Delta L [\Phi'' (U' \cos \theta + W' \sin \theta - c) - W'' (\sin \theta \Phi' - \cos \theta \Psi') - \Phi' (U' \cos \theta + W' \sin \theta) + 3 W'' (\sin \theta \Phi' - \cos \theta \Psi')] + 0(k^2) \quad (6.10)$$

$$F_6(y) = -i \Delta L W' F'' + 0(k) \quad (6.11)$$

Donde se ha utilizado el desarrollo.

$$[1 + i k L_1 (U \cos \theta + W \sin \theta - c)]^{-1} = 1 - i k L_1 (U \cos \theta + W \sin \theta - c) + 0(k^2)$$

Al sustituir las expresiones de los esfuerzos en las ecuaciones de movimiento, obtenemos 3 ecuaciones a resolver para las variables Φ , Ψ y g :

$$\begin{aligned} & \tau \operatorname{sen} \alpha \Phi_0'' - \Psi_0''' + k \{ (\tau \operatorname{sen} \alpha \Phi_1'' - \Psi_1''') + i R [(U \cos \theta + W \sin \theta - c_0) \Psi_0'' + \\ & U' (\Phi_0 \operatorname{sen} \theta - \Psi_0 \cos \theta) + \cos \theta g_0] - i \Delta L [2 U' (\Phi_0'' \operatorname{sen} \theta - \Psi_0'' \cos \theta) + 2 \Psi_0'' (U' \cos \theta + W' \sin \theta) \\ & + [-\Psi_0'' (U \cos \theta + W \sin \theta - c_0) - U'' (\sin \theta \Phi_0 - \cos \theta \Psi_0) + \Psi_0' (U' \cos \theta + W' \sin \theta) + \\ & 3 U'' (\sin \theta \Phi_0' - \cos \theta \Psi_0')]' \} = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} & (R g_0' - \tau \operatorname{sen} \alpha \Phi_0') + k (R g_1' - \tau \operatorname{sen} \alpha \Phi_1') - i k \Delta L [\Psi_0'' \cos \theta - \Phi_0'' \operatorname{sen} \theta \\ & + 2 (\operatorname{sen} \theta \Phi_0' - \cos \theta \Psi_0')] = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} & -\tau \operatorname{sen} \alpha \Psi_0'' - \Phi_0''' + k \{ (\tau \operatorname{sen} \alpha \Psi_1'' - \Phi_1''') + i R [-(U \cos \theta + W \sin \theta - c_0) \Phi_0' + \\ & W'' (\Phi_0 \operatorname{sen} \theta - \Psi_0 \cos \theta) + \operatorname{sen} \theta g_0] - i \Delta L [-2 W'' (\Phi_0'' \operatorname{sen} \theta - \Psi_0'' \cos \theta) - 2 \Phi_0'' (U' \cos \theta + W' \sin \theta) \\ & + [\Phi_0'' (U \cos \theta + W \sin \theta - c_0) - W'' (\sin \theta \Phi_0 - \cos \theta \Psi_0) - \Phi_0' (U' \cos \theta + W' \sin \theta) + \\ & 3 W'' (\sin \theta \Phi_0' - \cos \theta \Psi_0')]' + \tau \operatorname{sen} \alpha (\sin \theta \Phi_0 - \cos \theta \Psi_0) \} = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

El conjunto de términos $k^0, k^1, k^2, \dots, k^n$ es linealmente independiente. Luego, la única manera de que se cumplan las ecuaciones es que cada uno de los coeficientes de k sea igual a cero.

El mismo desarrollo en serie de potencias se aplica a las condiciones de frontera

a) Anulación de las funciones potenciales y sus derivadas en $y=1$.

$$\Phi_0(1) + \Phi_1(1)k + \dots = 0 \quad (6.15)$$

$$\Psi_0(1) + \Psi_1(1)k + \dots = 0 \quad (6.16)$$

$$\Phi_0'(1) + \Phi_1'(1)k + \dots = 0 \quad (6.17)$$

$$\Psi_0'(1) + \Psi_1'(1)k + \dots = 0 \quad (6.18)$$

b) Condiciones sobre esfuerzos tangenciales.

$$\begin{aligned} & \frac{U'(0)}{C_0} (\text{sen } \theta \Phi_0(0) - \text{cos } \theta \Psi_0(0)) + \Psi_0' + \left[\frac{U'(0)}{C_0} (\text{sen } \theta \Phi_1(0) - \text{cos } \theta \Psi_1(0)) \right] k + \\ & \left[\frac{U'(0)}{C_0^2} (\text{sen } \theta \Phi_0(0) - \text{cos } \theta \Psi_0(0)) c_1 + \Psi_1'(0) \right] k + i \Delta L [-\Psi_0' C_0 - U'(0) (\text{sen } \theta \Phi_1(0) - \\ & - \text{cos } \theta \Psi_1(0)) + \Psi_0'(0) (U'(0) \text{cos } \theta + W'(0) \text{sen } \theta) + 3U'(0) (\text{sen } \theta \Phi_1(0) - \text{cos } \theta \Psi_1(0))] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{W'(0)}{C_0} (\text{sen } \theta \Phi_0(0) - \text{cos } \theta \Psi_0(0)) - \Phi_0' + \left[\frac{W'(0)}{C_0} (\text{sen } \theta \Phi_1(0) - \text{cos } \theta \Psi_1(0)) \right] k + \\ & \left[\frac{W'(0)}{C_0^2} (\text{sen } \theta \Phi_0(0) - \text{cos } \theta \Psi_0(0)) c_1 - \Phi_1'(0) \right] k + i \Delta L [\Phi_0' C_0 - W'(0) (\text{sen } \theta \Phi_1(0) - \\ & - \text{cos } \theta \Psi_1(0)) - \Phi_0'(0) (U'(0) \text{cos } \theta + W'(0) \text{sen } \theta) - 3W'(0) (\text{sen } \theta \Phi_1(0) - \text{cos } \theta \Psi_1(0))] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Con $C_0' = \text{cos } \theta U'(0) + \text{sen } \theta W'(0) - c_0$.

c) Condición sobre esfuerzos normales

$$R g_0 - E (\sin \theta \Phi_0'(0) - \cos \theta \Psi_0'(0)) + O(k) = 0 \quad (6.21)$$

donde $E = (15/2)^{1/2} (R_0/R^2) \tan \alpha - \tau \cos \alpha W(0)$

Al hacer el desarrollo en serie de potencias de las condiciones de frontera se ha empleado la relación:

$$\frac{1}{C_0 + k c_1} = \frac{1}{C_0} \left(1 - k \frac{c_1}{C_0} \right) + O(k^2)$$

6.2. Aproximación a orden cero

Los coeficientes que multiplican a k^0 en las ecuaciones (6.12)-(6.14) se igualan a cero. Esto da lugar a un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes para las funciones Φ_0 , Ψ_0 y g_0 .

$$\tau \sin \alpha \Phi_0' - \Psi_0''' = 0 \quad (6.22)$$

$$R g_0' - \tau \cos \alpha \Phi_0' = 0 \quad (6.23)$$

$$\tau \sin \alpha \Psi_0' + \Phi_0''' = 0 \quad (6.24)$$

La primera y tercera ecuaciones constituyen un sistema cerrado. Si se multiplica a (6.22) por -1 , a (6.24) por el número i y se suma el resultado se obtiene

$$i \tau \operatorname{sen} \alpha (\Psi_0' + i \Phi_0') + (\Psi_0''' + i \Phi_0''') = 0 \quad (6.25)$$

Definiendo una función compleja $h_0 = \Psi_0 + i \Phi_0$, el problema se reduce a resolver la ecuación homogénea:

$$i \tau \operatorname{sen} \alpha h_0' + h_0''' = 0 \quad \text{o bien} \quad h_0''' + 2i\chi^2 h_0' = 0 \quad (6.26)$$

El primer término aparece a causa de la componente de $\underline{\Omega}$ en la dirección y . A un valor fijo de τ , los efectos de la rotación varían al modificar el ángulo de inclinación. En el caso extremo de un plano vertical $\tau \operatorname{sen} \alpha = 0$, y los resultados son los mismos que se obtendrían en ausencia de rotación.

La influencia de la fuerza de Coriolis crece con el aumento del ángulo de inclinación α .

Para encontrar la solución sólo tenemos que resolver el polinomio característico:

$$\lambda (\lambda^2 + i \tau \operatorname{sen} \alpha) = 0$$

Las tres soluciones de esta ecuación son:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = (i-1)\chi$$

$$\lambda_3 = (1-i)\chi$$

La solución general de h_0 es entonces

$$h_0(y) = A_0 + A_1 \exp(-1+i)\chi y + A_2 \exp(1-i)\chi y \quad (6.27)$$

Las constantes A_0 , A_1 y A_2 se determinarán a partir de las condiciones de frontera a orden cero

Las condiciones de las funciones potenciales y sus derivadas en la frontera sólida se traducen en las siguientes condiciones para h_0

$$h_0(1) = h_0'(1) = 0 \quad (6.28)$$

de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_0 + A_1 \exp(-1+i)\chi + A_2 \exp(1-i)\chi = 0 \quad (6.29)$$

$$(-1+i) [A_1 \exp(-1+i)\chi - A_2 \exp(1-i)\chi] = 0 \quad (6.30)$$

Poniendo A_0 y A_2 en función de A_1 se tiene:

$$A_0 = -2 A_1 \exp(-1+i)\chi \quad (6.31)$$

$$A_2 = A_1 \exp[2(-1+i)\chi] \quad (6.32)$$

Al sustituir estos valores en h_0 se obtiene:

$$h_0(y) = 2 A_1 \exp(-1+i)\chi [\cosh(-1+i)\chi(y-1) - 1] \quad (6.33)$$

El coeficiente A_1 se determinará de manera que los esfuerzos tangenciales se anulen en la superficie libre. Las condiciones a orden cero de las funciones potenciales son:

$$U''(0)/C_0' [\text{sen } \theta \Phi_0(0) - \text{cos } \theta \Psi_0(0)] + \Psi_0''(0) = 0 \quad (6.34)$$

$$W''(0)/C_0' [\text{sen } \theta \Phi_0(0) - \text{cos } \theta \Psi_0(0)] - \Phi_0''(0) = 0 \quad (6.35)$$

No hay manera de que (6.34) y (6.35) se combinen para dar una ecuación que contenga únicamente a $h_0(0)$ y sus derivadas. Entonces tenemos que obtener las expresiones para Φ_0 y Ψ_0 a partir de h_0 .

$$\begin{aligned} \Psi_0(y) = \text{Re}(h_0(y)) = a_1 [\cos \chi y e^{-\chi y} - 2 \cos \chi e^{-\chi} + \cos \chi(2-y) e^{-\chi(2-y)}] + \\ b_1 [-\text{sen } \chi y e^{-\chi y} + 2 \text{sen } \chi e^{-\chi} - \text{sen } \chi(2-y) e^{-\chi(2-y)}] \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(y) = \text{Im}(h_0(y)) = a_1 [\text{sen } \chi y e^{-\chi y} - 2 \text{sen } \chi e^{-\chi} + \text{sen } \chi(2-y) e^{-\chi(2-y)}] + \\ b_1 [\cos \chi y e^{-\chi y} - 2 \cos \chi e^{-\chi} + \cos \chi(2-y) e^{-\chi(2-y)}] \end{aligned} \quad (6.37)$$

donde $a_1 = \text{Re}(A_1)$ y $b_1 = \text{Im}(A_1)$.

Haciendo uso de identidades trigonométricas, las expresiones anteriores pueden escribirse como

$$\Psi_0(y) = a_1 [1 - \cos \chi(y-1) \cosh \chi(1-y)] + b_1 [\sin \chi(y-1) \sinh \chi(1-y)] \quad (6.38)$$

$$\Phi_0(y) = -a_1 [\sin \chi(y-1) \sinh \chi(1-y)] + b_1 [1 - \cos \chi(y-1) \cosh \chi(1-y)] \quad (6.39)$$

Al sustituir estas expresiones y sus segundas derivadas en las condiciones sobre esfuerzos tangenciales se obtienen el siguiente par de ecuaciones.

$$a_1 (\sin \chi \sinh \chi \sin \theta + \cos \chi \cosh \chi \cos \theta - \cos \theta) + b_1 (\sin \chi \sinh \chi \cos \theta - \cos \chi \cosh \chi \sin \theta + \sin \theta) = C_0/U''(0) (-2 a_1 \chi^2 \sin \chi \sinh \chi + 2 b_1 \chi^2 \cos \chi \cosh \chi) \quad (6.40)$$

$$a_1 (\sin \chi \sinh \chi \sin \theta + \cos \chi \cosh \chi \cos \theta - \cos \theta) + b_1 (\sin \chi \sinh \chi \cos \theta - \cos \chi \cosh \chi \sin \theta + \sin \theta) = C_0/W''(0) (2 b_1 \chi^2 \sin \chi \sinh \chi + 2 a_1 \chi^2 \cos \chi \cosh \chi) \quad (6.41)$$

Estas expresiones constituyen un sistema homogéneo para las constantes a_1 y b_1 . Por lo tanto, si tenemos una solución para a_1 y b_1 , las cantidades Ka_1 y Kb_1 , donde K es cualquier escalar, también serán soluciones del sistema. Esto implica que las funciones Φ_0 y Ψ_0 serán determinadas salvo por una constante. Las dos condiciones sobre los esfuerzos tangenciales servirán para determinar el parámetro C_0' y una de las constantes. La otra será arbitraria.

Para resolver el sistema definimos las siguientes constantes:

$$I_1 = \sin \chi \sinh \chi \sin \theta + \cos \chi \cosh \chi \cos \theta - \cos \theta \quad (6.42)$$

$$I_2 = \sin \chi \sinh \chi \cos \theta - \cos \chi \cosh \chi \sin \theta + \sin \theta \quad (6.43)$$

$$I_1 = -2 \chi^2 \sin \chi \sinh \chi \quad (6.44)$$

$$I_2 = 2 \chi^2 \cos \chi \cosh \chi \quad (6.45)$$

Con lo cual tenemos las ecuaciones:

$$I_1 a_1 + I_2 b_1 = C_0' U''(0) (I_3 a_1 + I_4 b_1) \quad (6.46)$$

$$I_1 a_1 + I_2 b_1 = C_0' W''(0) (I_4 a_1 - I_3 b_1) \quad (6.47)$$

Rearreglando se tiene:

$$(I_1 - I_3 C_0' / U''(0)) + [I_2 - I_4 C_0' / U''(0)] b_1 / a_1 = 0 \quad (6.48)$$

$$(I_1 - I_4 C_0' / W''(0)) + [I_2 + I_3 C_0' / W''(0)] b_1 / a_1 = 0 \quad (6.49)$$

La igualdad del cociente b_1/a_1 en estas dos ecuaciones nos proporciona una ecuación que contiene a C_0' como única incógnita:

$$\frac{I_1 U''(0) - I_3 C_0'}{I_2 U''(0) - I_4 C_0'} = \frac{I_1 W''(0) - I_4 C_0'}{I_2 W''(0) + I_3 C_0'} \quad (6.50)$$

Una de las raíces de esta ecuación es cero, lo cual es físicamente inaceptable ya que C_0' aparece como un denominador en las condiciones de frontera. La otra nos da la condición de solubilidad del sistema:

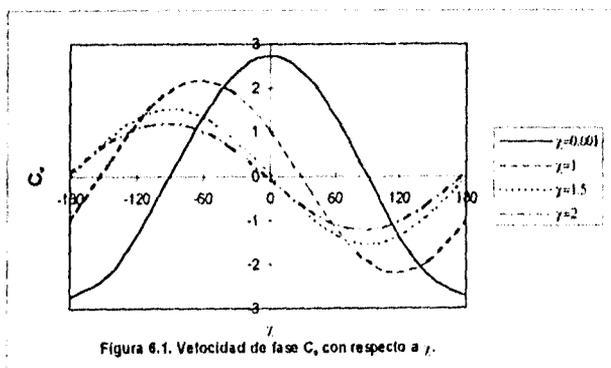
$$C_0' = \frac{(I_1 I_1 + I_2 I_4) U''(0) + (I_1 I_4 - I_2 I_3) W''(0)}{I_1^2 + I_4^2} \quad (6.51)$$

La cual, al aplicar las definiciones se convierte en

$$C_g = \frac{\left[-i \exp(i\theta) (2 \cosh(1+i)\chi - \cosh 2\chi - \cosh 2i\chi) \right] U(0)}{2\chi^2 (\exp 2\chi + \exp -2\chi \cos 2\chi)} + \frac{\left[i \exp(-i\theta) (2 \cosh(1-i)\chi - \cosh 2\chi - \cosh 2i\chi) \right] U(0)}{2\chi^2 (\exp 2\chi + \exp -2\chi \cos 2\chi)} + \frac{\left[\exp(i\theta) (-2 \cosh(1+i)\chi + \cosh 2\chi + \cosh 2i\chi) \right] W(0)}{2\chi^2 (\exp 2\chi + \exp -2\chi \cos 2\chi)} + \frac{\left[\exp(-i\theta) (-2 \cosh(1-i)\chi + \cosh 2\chi + \cosh 2i\chi) \right] W(0)}{2\chi^2 (\exp 2\chi + \exp -2\chi \cos 2\chi)} \quad (6.52)$$

6.3. Análisis de resultados a orden cero.

El valor de c_g es real, por lo que las perturbaciones se propagan como ondas sin crecimiento ni amortiguamiento. Es decir tenemos estabilidad neutra.



La Figura 6.1 muestra el comportamiento de la velocidad de fase c_g como función del parámetro χ y del ángulo de propagación θ . En ella se observa que la velocidad máxima de

propagación de la onda se va desplazando hacia la izquierda a medida que χ aumenta. El caso sin rotación tiene una velocidad máxima para $\theta = 0$. También se aprecia que el aumento de la rotación produce una disminución en el valor máximo de c_0 . Otro aspecto es que c_0 es una función de período 2π con respecto al ángulo de propagación.

Podemos calcular c_0 en el límite cuando χ tiende a cero, el resultado es:

$$c_0 = \left(\frac{15}{2}\right)^{1/2} \cos\theta \quad (6.53)$$

Lo cual coincide con el resultado de Yih, salvo por una constante multiplicativa que tiene que ver con la diferente manera en que se adimensionalizaron las velocidades.

Como ya se mencionó, se tienen una relación $b_1 = M a_1$. Luego de algunas simplificaciones se llega al resultado:

$$M = \frac{\left[e^{-i\theta} \left(\cosh(1+i)\chi - \frac{1}{2} \right) + e^{i\theta} \left(\cosh(1-i)\chi - \frac{1}{2} \right) \right] U''(0) - i\chi^2 (\cosh(1+i)\chi - \cosh(1-i)\chi) C_0}{\left[i e^{-i\theta} \left(\cosh(1+i)\chi - \frac{1}{2} \right) - i e^{i\theta} \left(\cosh(1-i)\chi - \frac{1}{2} \right) \right] U''(0) + \chi^2 (\cosh(1+i)\chi - \cosh(1-i)\chi) C_0} \quad (6.54)$$

De aquí se obtienen las expresiones para h_0 y para las funciones potenciales a orden cero, haciendo $a_1 = 1$

$$h_0(y) = (1 + iM) [1 - \cosh \chi (1-i)(1-y)] \quad (6.55)$$

$$\Psi_0(y) = 1/2 (1-iM) \cosh \chi (1+i)(1-y) + 1/2 (1+iM) \cosh \chi (1-i)(1-y) \quad (6.56)$$

$$\Phi_0(y) = M - 1/2 (M+i) \cosh \chi (1+i)(1-y) - 1/2 (M-i) \cosh \chi (1-i)(1-y) \quad (6.57)$$

Una vez obtenido estos resultados puede determinarse g_0 , utilizando la ecuación (6.13) junto con la condición de esfuerzos normales a orden cero (6.21). El resultado es:

$$g_0(y) = \tau/R \cos \alpha [\Phi_0(y) - \Phi_0(0)] - g(0) E/R \quad (6.58)$$

Como se observa, en ninguna de las expresiones aparece el coeficiente L_1 - L_2 , lo cual indica que los efectos viscoelásticos no tienen influencia en esta aproximación. Por tanto, se espera que la solución a orden cero sea la misma que para el caso newtoniano (Dávalos-Orozco y Ruiz-Chavarría, 1992). Después de comparar los resultados se encontraron pequeñas diferencias cuantitativas, aunque el comportamiento general es muy similar. Dichas diferencias se deben a algunos errores encontrados en la aplicación de las condiciones de frontera hechas en el mencionado trabajo.

Así, se obtiene una primera aproximación al problema de la estabilidad de una perturbación cuyo número de onda tiende a cero. Este resultado será utilizado en la aproximación a primer orden que se trata en el capítulo siguiente.

7. ESTABILIDAD DE PERTURBACIONES A NÚMEROS DE ONDA PEQUEÑOS

APROXIMACIÓN A PRIMER ORDEN.

7.1. Introducción

La sola aproximación a orden cero no es físicamente aceptable ya que supone un valor de k igual a cero que implica una longitud de onda infinita. Sin embargo, los resultados obtenidos son útiles ya que serán utilizados en la aproximación a primer orden. Esta aproximación es válida para el caso en que puedan despreciarse las potencias cuadráticas o mayores de k en el desarrollo en series propuesto para las perturbaciones. Esto implica que tenemos longitudes de onda muy grandes comparadas con el espesor de la capa.

Se propondrán soluciones del tipo $A_0 + k A_1$ para las perturbaciones y para el parámetro c .

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$[-\Psi_1''' + 2 i \chi^2 \Phi_1'] + i R \{ (U \cos\theta + W \operatorname{sen}\theta - c_0) \Psi_0' + U' (\operatorname{sen}\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) \} +$$

$$i k R \cos\theta g_0 - i \Delta L \{ 2 U' (\operatorname{sen}\theta \Phi_0'' - \cos\theta \Psi_0'') + 2 \Psi_0'' (U' \cos\theta + W' \operatorname{sen}\theta) +$$

$$[- \Psi_0'' (U \cos\theta + W \operatorname{sen}\theta - c_0) + U'' (\operatorname{sen}\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) + \Psi_0' (U' \cos\theta + W' \operatorname{sen}\theta) +$$

$$3 U' (\operatorname{sen}\theta \Phi_0' - \cos\theta \Psi_0') \} = 0 \quad (7.1)$$

$$R g_1' - 2 i \chi^2 \Phi_1' - i \Delta L [- (\operatorname{sen}\theta \Phi_0'' - \cos\theta \Psi_0'') + 2 (\operatorname{sen}\theta \Phi_0' - \cos\theta \Psi_0')] \quad (7.2)$$

$$[\Phi_1''' - 2 i \chi^2 \Psi_1'] + i R \{ (U \cos\theta + W \operatorname{sen}\theta - c_0) \Phi_0' + W' (\operatorname{sen}\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) \} + i k R \operatorname{sen}\theta g_0 +$$

$$i k \tau \cos\alpha (\operatorname{sen}\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) - i k \Delta L \{ -2 W' (\operatorname{sen}\theta \Phi_0'' - \cos\theta \Psi_0'') - 2 \Phi_0'' (U' \cos\theta + W' \operatorname{sen}\theta) +$$

$$[\Phi_0'' (U \cos\theta + W \operatorname{sen}\theta - c_0) - W'' (\operatorname{sen}\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) - \Phi_0' (U' \cos\theta + W' \operatorname{sen}\theta) +$$

$$+ 3 W' (\operatorname{sen}\theta \Phi_0' - \cos\theta \Psi_0')] \} = 0 \quad (7.3)$$

Con las correspondientes condiciones de frontera a primer orden

a) Condiciones en la pared rígida

$$\Phi_1(1) = \Psi_1(1) = \Phi_1'(1) = \Psi_1'(1) = 0 \quad (7.4)$$

b) Condiciones sobre esfuerzos tangenciales

$$\begin{aligned} \Psi_1'' + \frac{U''(0)}{C_0} \left[(\sin\theta \Phi_1(0) - \cos\theta \Psi_1(0)) + \frac{c_1}{C_0} (\sin\theta \Phi_0(0) - \cos\theta \Psi_0(0)) \right] = \\ -i \Delta L \{ -\Psi_0'(0) C_0' - U''(0) (\sin\theta \Phi_0(0) - \cos\theta \Psi_0(0)) + \Psi_0'(0) [U'(0) \cos\theta + W'(0) \sin\theta] \\ + 3 U'(0) (\sin\theta \Phi_0(0) - \cos\theta \Psi_0(0)) \} \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} -\Phi_0'' + \frac{W''(0)}{C_0} \left[(\sin\theta \Phi_1(0) - \cos\theta \Psi_1(0)) - \frac{c_1}{C_0} (\sin\theta \Phi_0(0) - \cos\theta \Psi_0(0)) \right] = \\ -i \Delta L \{ \Phi_0''(0) C_0' - W''(0) (\sin\theta \Phi_0(0) - \cos\theta \Psi_0(0)) - \Phi_0'(0) [U'(0) \cos\theta + W'(0) \sin\theta] \\ + 3 W'(0) (\sin\theta \Phi_0(0) - \cos\theta \Psi_0(0)) \} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Los términos no homogéneos de las ecuaciones (7.1)-(7.3) son puramente imaginarios y dependen explícitamente de la coordenada y . Además, aparece el factor $\tau \cos \alpha$, proporcional a la velocidad angular en el eje x . Esto significa que la dependencia de las soluciones con la rotación a primer orden ya no será solamente del parámetro c , sino de los valores de τ y α tomados por separado.

El procedimiento es semejante al de la aproximación a orden cero. Las ecuaciones (7.1) y (7.3) forman un sistema cerrado para Φ_1 y Ψ_1 . Luego, las funciones potenciales se obtienen sin recurrir a (7.2).

La parte homogénea de las ecuaciones (7.1)-(7.3) es idéntica a la de la aproximación a orden cero, lo cual sugiere un cambio de variable $h_1 = \Psi_1 + i \Phi_1$, después de combinar las ecuaciones como se hizo en el capítulo anterior. A diferencia de la aproximación a orden cero, las funciones Φ_1 y Ψ_1 no serán puramente reales sino que tendrán una parte imaginaria derivada de la inhomogeneidad de las ecuaciones

Multiplicando a (7.1) por -1 y a (7.3) por i y sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
 [h_1''' + 2i\chi^2 h_1'] = i R \{ (U \cos\theta + W \sin\theta - c_0) h_0'' + (U'-iW') (\sin\theta \Phi_0'' - \cos\theta \Psi_0'') + \\
 \exp(-i\theta) g_0 \} - i \Delta L \{ 2 h_0'' (U' \cos\theta + W' \sin\theta) + 2 (U'-iW') (\sin\theta \Phi_0'' - \cos\theta \Psi_0'') \} \\
 [- h_0'' (U \cos\theta + W \sin\theta - c_0) + (U''-iW'') (\sin\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) + h_0' (U' \cos\theta + W' \sin\theta) + \\
 3 (U'-iW') (\sin\theta \Phi_0' - \cos\theta \Psi_0')] = 0
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

La solución de esta ecuación puede expresarse como la suma de la solución para la parte homogénea de la ecuación, más una solución particular. Para la parte homogénea se tiene el mismo resultado que en el capítulo anterior:

$$h_{1h}(y) = B_0 + B_1 \exp(-1-i)\chi y + B_2 \exp(i-1)\chi y \tag{7.8}$$

El cálculo de la solución particular es más complicado y se dividirá en dos partes. La primera es una integración directa, cuyo fin es reducir de tres a dos el orden de la ecuación. La segunda parte

es la solución de la ecuación obtenida usando el método de los parámetros indeterminados para resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

7.2. Integración de la ecuación de estabilidad Reducción de orden

Integrando la ecuación (7.7) se tiene.

$$\begin{aligned}
 [h_1'' + 2i\chi^2 h_1] = iR \int \{ [(U \cos\theta + W \sin\theta - c_0) h_0' + (U' - iW') (\sin\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) + \\
 \exp(-i\theta) g_0] \} dy - i \Delta L \int [2 h_0'' (U' \cos\theta + W' \sin\theta) + 2 (U' - iW') (\sin\theta \Phi_0'' - \cos\theta \Psi_0'')] dy \\
 - i \Delta L \{ [- h_0'' (U \cos\theta + W \sin\theta - c_0) + (U'' - iW'') (\sin\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) + h_0' (U' \cos\theta + W' \sin\theta) + 3 (U' \\
 - iW') (\sin\theta \Phi_0' - \cos\theta \Psi_0')] \} = 0 \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Para realizar la integración, es necesario conocer la dependencia explícita de las funciones con la coordenada y y hacer uso de identidades trigonométricas para ponerlas en una forma en la que puedan ser integradas fácilmente. Esto debe realizarse para cada uno de los términos a integrar. Dado que los pasos a seguir son análogos para cada uno de los términos ilustraremos en detalle este procedimiento para el primer término.

Las identidades trigonométricas que se usarán en el proceso son las siguientes:

$$\sin a = i \sinh i a \quad (7.10)$$

$$\cos a = \cosh i a \quad (7.11)$$

$$\sinh a \sinh b = 1/2 [\cosh (a + b) - \cosh (a - b)] \quad (7.12)$$

$$\cosh a \cosh b = 1/2 [\cosh (a + b) + \cosh (a-b)] \quad (7.13)$$

$$\sinh a \cosh b = 1/2 [\sinh (a + b) + \sinh (a-b)] \quad (7.14)$$

a) Término $(U \cos \theta + W \sin \theta - c_0) h_0'$

De las fórmulas (4.30) y (4.31) se tiene:

$$U \cos \theta + W \sin \theta = T \cos \theta [\sin \chi (1-y) \sinh \chi (1+y) + \sin \chi (1+y) \sinh \chi (1-y)] +$$

$$T \sin \theta [\cos \chi (1-y) \cosh \chi (1+y) + \cos \chi (1+y) \cosh \chi (1-y) - \cos 2\chi - \cosh 2\chi]$$

En esta expresión tenemos productos de funciones trigonométricas por funciones hiperbólicas. Para simplificar convertiremos todas las funciones trigonométricas a hiperbólicas por medio de las identidades (7.10) y (7.11) para posteriormente transformar los productos de senos y cosenos hiperbólicos a sumas de funciones hiperbólicas, haciendo uso de las identidades (7.12)-(7.14). El resultado es:

$$U \cos \theta + W \sin \theta = -i T [\exp(i\theta) \cosh \chi (1+i) \cosh \chi (1-i)y - \exp(-i\theta) \cosh \chi (1-i) \cos \chi (1+i)y] - L_1$$

donde:

$$L_1 = T \sin \theta (\cos 2\chi + \cosh 2\chi)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación (6.55) se tiene:

$$h_0'(y) = (1-i) \chi (1+iM) \sinh \chi (1-i)(1-y)$$

De lo cual se obtiene:

$$(U \cos \theta + W \sin \theta - c_0) h_0' = -i T (1-i) \chi (1+iM) [\exp(i\theta) \cosh \chi (1+i) \cosh \chi (1-i)y \sinh \chi (1-i)(1-y) - \exp(-i\theta) \cosh \chi (1-i) \cos \chi (1+i)y \sinh \chi (1-i)(1-y)] - (L_1 + c_0) (1-i) \chi (1+iM) \sinh \chi (1-i)(1-y)$$

Una vez más tenemos productos de funciones hiperbólicas que dependen de y por lo que aplicamos la identidad (7.14) con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} (U \cos\theta + W \operatorname{sen}\theta - c_0) h_0' = & \{A_1 [\operatorname{senh} \chi (1-i) + \operatorname{senh} \chi (1-i)(1-2y)] - \\ & A_2 [\operatorname{senh} \chi (1-i+2iy) + \operatorname{senh} \chi (1-i-2y)]\} / 2 \\ & -(L_1 + c_0) (1-i) \chi (1+i) M \operatorname{senh} \chi (1-i)(1-y) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Donde:

$$A_1 = -(1+i) T \chi (1+i) M \cosh \chi (1+i) \exp(i\theta)$$

$$A_2 = -(1+i) T \chi (1+i) M \cosh \chi (1-i) \exp(-i\theta)$$

Con esto tenemos expresiones que son fáciles de integrar. Siguiendo el mismo procedimiento para los demás términos tenemos

b) Término $(\Phi_0 \operatorname{sen}\theta - \Psi_0 \cos\theta) (U'-i W')$

$$\Phi_0 \operatorname{sen}\theta - \Psi_0 \cos\theta = a_1 + a_2 \cosh \chi (1+i)(1-y) + a_3 \cosh \chi (1-i)(1-y) \quad (7.16)$$

Existe otro término que es $i \tau \cos \alpha (\Phi_0 \operatorname{sen}\theta - \Psi_0 \cos\theta)$ para el que también sirve la expresión anterior

$$U'-i W' = A_3 \operatorname{senh} \chi (1-i)y$$

Siendo:

$$a_1 = M \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$$

$$a_2 = (1-i) M \exp(-i\theta) / 2$$

$$a_3 = (1+i) M \exp(i\theta) / 2$$

$$A_3 = -2 T \chi (i+1) \cosh \chi (1+i)$$

$$\begin{aligned} (\Phi_0 \operatorname{sen}\theta - \Psi_0 \cos\theta) (U'-i W') = & a_1 A_3 \operatorname{senh} \chi (1-i)y \\ & + a_2 A_3 / 2 [\operatorname{senh} \chi (1+i-2iy) + \operatorname{senh} \chi (-1-i+2y)] \end{aligned}$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$+ a_3 A_2 / 2 [\operatorname{senh} \chi (1-i) + \operatorname{senh} \chi (1-i)(2y-1)] \quad (7.17)$$

c) Término $\exp(-i\theta) g_0$

$$\begin{aligned} \exp(-i\theta) g_0 = & A_4 \{ (M+i) [-\cosh \chi (1+i)(1-y) + \cosh \chi (1+i)] \\ & + (M-i) [\cosh \chi (1-i) - \cosh \chi (1-i)(1-y)] \} \\ & - \gamma(0) E \exp(-i\theta) / R \end{aligned} \quad (7.18)$$

d) Término $(\operatorname{sen} \theta W' + \operatorname{cos} \theta U') h_0''$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta W' + \operatorname{cos} \theta U' = & -i T (1-i) \chi \cosh \chi (1+i) \exp(i\theta) \operatorname{senh} \chi (1-i)y \\ & + i T (1+i) \chi \cosh \chi (1-i) \exp(-i\theta) \operatorname{senh} \chi (1+i)y \end{aligned}$$

$$h_0'' = 2 i \chi^2 (1+i M) \cosh \chi (1-i)(1-y)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} \theta W' + \operatorname{cos} \theta U') h_0'' = & A_5 [\operatorname{senh} \chi (1-i) - \operatorname{senh} \chi (1-i)(1-2y)] / 2 \\ & - A_6 [\operatorname{senh} \chi (1-i+2iy) - \operatorname{senh} \chi (1-i-2y)] / 2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

e) Término $(\Phi_0' \operatorname{sen} \theta - \Psi_0' \operatorname{cos} \theta) (U'-i W')$

$$\begin{aligned} (\Phi_0' \operatorname{sen} \theta - \Psi_0' \operatorname{cos} \theta) (U'-i W') = & a_2 A_3 i \chi^2 [\operatorname{senh} \chi (1+i-2iy) + \operatorname{senh} \chi (-1-i+2y)] \\ & - i \chi^2 a_3 A_3 [\operatorname{senh} \chi (1-i) + \operatorname{senh} \chi (1-i)(2y-1)] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Los términos que restan son una derivada total, por lo que al realizar la integración solo quedará el término que está dentro de la derivada y no será necesario hacer la simplificación. Sin embargo, debido a que en el proceso de solución será importante tenerlos en la misma forma que los demás términos, efectuaremos la simplificación de los términos que están bajo el signo de derivación

f) Término $(U' \cos\theta + W \operatorname{sen}\theta - c_n) h_n''$

$$\begin{aligned} (U' \cos\theta + W \operatorname{sen}\theta - c_n) h_n'' &= A_7 [\cosh \chi (1-i) + \cosh \chi (1-i)(1-2y)]/2 \\ &\quad - A_8 [\cosh \chi (1-i+2iy) + \cosh \chi (1-i-2y)]/2 \\ &\quad - (L_1 + c_n) 2 i \chi^2 (1+iM) \cosh \chi (1-i)(1-y) \end{aligned} \quad (7.21)$$

donde:

$$A_7 = 2 T \chi^2 (1+iM) \cosh \chi (1+i) \exp(i\theta)$$

$$A_8 = 2 T \chi^2 (1+iM) \cosh \chi (1-i) \exp(-i\theta)$$

g) Término $(\operatorname{sen}\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) (U'' - i W'')$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}\theta \Phi_0 - \cos\theta \Psi_0) (U'' - i W'') &= a_1 A_3 (1-i) \chi \cosh[\chi (1-i) y] \\ &\quad + (1-i) \chi a_2 A_3 [\cosh \chi (1+i-2iy) + \cosh \chi (-1-i-2y)]/2 \\ &\quad + (1-i) \chi a_3 A_3 [\cosh \chi (1-i) + \cosh \chi (1-i)(2y-1)]/2 \end{aligned} \quad (7.22)$$

h) Término $(U'' \cos\theta + W'' \operatorname{sen}\theta) h_n'$

$$\begin{aligned} (U'' \cos\theta + W'' \operatorname{sen}\theta) h_n' &= A_9 [\cosh \chi (1-i) - \cosh \chi (1-i)(1-2y)]/2 \\ &\quad - A_{10} [\cosh \chi (1-i-2iy) + \cosh \chi (1-i-2y)]/2 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Con

$$A_9 = A_1 (1-i) \chi$$

$$A_{10} = A_2 (1+i) \chi$$

i) Término $(\operatorname{sen} \theta \Phi_0' - \operatorname{cos} \theta \Psi_0')$ $(U-i W)$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} \theta \Phi_0' - \operatorname{cos} \theta \Psi_0') (U-i W) = & A_{11} [\operatorname{senh} \chi (1+i-2iy) - \operatorname{senh} \chi (-1-i+2y)] \\ & + A_{12} [\operatorname{senh} \chi (1-i) - \operatorname{senh} \chi (1-i)(2y-1)] \\ & - i L_2 a_2 (1+i) \chi \operatorname{senh} \chi (1+i)(1-y) \\ & - i L_2 a_3 (1-i) \chi \operatorname{senh} \chi (1-i)(1-y) \end{aligned} \quad (7.24)$$

Siendo:

$$A_{11} = (1-i) \chi T \alpha_2 \operatorname{cosh} \chi (1+i)$$

$$A_{12} = (1+i) \chi T \alpha_3 \operatorname{cosh} \chi (1+i)$$

Con esto, se tiene al término inhomogéneo de la ecuación diferencial en una forma que resulta fácil de integrar ya que solamente se tienen funciones hiperbólicas de y multiplicadas por constantes. Después de realizar la integración y agrupar los términos semejantes, se llega a la forma final del término inhomogéneo de la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} n_1 y + n_2 + n_3 \operatorname{cosh} \chi (1-i+2iy) + n_4 \operatorname{cosh} \chi (1-i-2y) + n_5 \operatorname{cosh} \chi (1+i-2iy) + n_6 \operatorname{cosh} \chi (-1-i+2y) \\ + n_7 \operatorname{senh} \chi (1+i-2iy) + n_8 \operatorname{senh} \chi (-1-i+2y) + n_9 \operatorname{cosh} \chi (1-i)(1-y) + n_{10} \operatorname{senh} \chi (1-i)(1-y) \\ + n_{11} \operatorname{senh} \chi (1+i)(1-y) + n_{12} \operatorname{cosh} \chi (1-i)(1-2y) + n_{13} \operatorname{senh} \chi (1-i)(1-2y) + n_{14} \operatorname{cosh} \chi (1-i)y \end{aligned} \quad (7.25)$$

Donde los valores de las constantes n_i son los siguientes

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{(A_1 + \alpha_1 A_3 + A_6) \operatorname{senh} \chi(1-i) - \gamma(0) E e^{-\alpha}}{2R} + \alpha_1 - i \chi^{-1} \alpha_1 A_1 \operatorname{senh} \chi(1-i) \\
 &+ \frac{e^{-\alpha} \cos \alpha [(M+i) \cosh \chi(1+i) + (M-i) \cosh \chi(1-i)]}{2R} \\
 n_2 &= \frac{A_7 + [(1-i) \chi \alpha_1 A_3 + A_8] \cosh \chi(1-i)}{2} + A_{12} \operatorname{senh} \chi(1-i) \\
 n_3 &= -\frac{(A_2 + A_6)}{4i\chi} - \frac{(A_4 + A_{10})}{2} \\
 n_4 &= \frac{(A_2 - A_6)}{4\chi} - \frac{(A_8 - A_{10})}{2} \\
 n_5 &= -\frac{\alpha_2 A_3}{4i\chi} - \frac{i \alpha_2 A_3 \chi}{2} \\
 n_6 &= \frac{\alpha_2 A_3}{4\chi} + \frac{\alpha_2 A_3 \chi}{2} \\
 n_7 &= A_{11} \quad ; \quad n_8 = -A_{11} \\
 n_9 &= (L_1 + c_0)(1+iM)(1-2i\chi^2) \\
 n_{10} &= \frac{(M-i) + \alpha_1}{\chi(1-i)} - i L_2 \alpha_1 (1-i) \chi \\
 n_{11} &= \frac{A_1(M+i) - \alpha_2}{\chi(1+i)} - i L_2 \alpha_2 (1+i) \chi \\
 n_{12} &= \frac{A_1 - \alpha_1 A_3}{4\chi(i-1)} + \frac{i\chi \alpha_1 A_3}{2(i-1)} + \frac{A_7}{2} + \frac{(1-i)\chi \alpha_1 A_1 - A_9}{2} \\
 n_{13} &= \frac{A_5}{4(1-i)\chi} + A_{12} \\
 n_{14} &= \frac{\alpha_1 A_3}{\chi(1-i)} + \alpha_1 A_3 (1-i) \chi
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

A partir de esta ecuación se podrá encontrar facilmente la solución particular del problema

7.3. Solución particular Método de parámetros indeterminados

La parte inhomogénea de la ecuación diferencial consiste en una suma de términos de la forma $J_i = \text{senh}(w_i y + b_i)$ o bien $J_i = \text{cosh}(w_i y + b_i)$. Ambas funciones tienen la propiedad de que la segunda derivada es proporcional a la función. De esta manera, podemos proponer como solución particular la función $m_i J_i$ para cada una de las funciones de la parte no homogénea de la ecuación. El problema consistirá en determinar los valores de m_i que satisfacen la ecuación diferencial. Debido a que la ecuación es lineal, podemos obtener la solución total aplicando el método a cada una de las funciones.

Al sustituir una solución cualquiera en la ecuación se tiene:

$$m_i J_i'' + 2i\chi^2 m_i J_i = n_i J_i \quad (7.27)$$

Con n_i dada por la ecuación (7.26).

Si suponemos que J_i es de la forma $\text{cosh}(w_i y + b_i)$ o bien $\text{senh}(w_i y + b_i)$ se tiene que:

$$J_i'' = w_i^2 J_i$$

Sustituyendo en la ecuación (7.27):

$$m_i w_i^2 J_i + 2i\chi^2 m_i J_i = n_i J_i \quad (7.28)$$

De la cual se encuentra el valor de m_i que satisface la ecuación diferencial:

$$m_i = \frac{n_i}{2i\chi^2 + w_i^2} \quad (7.29)$$

En algunos casos no se pueden proponer soluciones de la forma $m_i J_i$ debido a que ciertas funciones J_i son soluciones de la ecuación homogénea. Este es el caso de las funciones 9, 10 y 14 para las cuales se empleará una variante del método de parámetros indeterminados proponiendo soluciones de la forma $m_i y J_i'$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$(m_1 y J_0)'' + 2 i \chi^2 m_1 y J_0' = n_1 J_0 \quad (7.30)$$

$$2 m_1 w_1' J_0'' + m_1 y (J_0'' + 2 i \chi^2 J_0') = n_1 J_0 \quad (7.31)$$

Pero el término dentro del paréntesis es cero ya que la función es solución de la ecuación homogénea. De aquí se obtiene el valor de m_1 para estos casos:

$$m_1 = \frac{n_1}{2 w_1'^2} \quad (7.32)$$

Para la función lineal, proponemos una solución de la forma $m_1 y + m_2$. Los valores de estas constantes son directos:

Usando estas fórmulas, las constantes m_i resultan ser las siguientes:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{n_1}{2 i \chi^2}; & m_2 &= \frac{n_2}{2 i \chi^2}; \\ m_3 &= \frac{n_3}{2 \chi^2(i-2)}; & m_4 &= \frac{n_4}{2 \chi^2(i+2)}; & m_5 &= \frac{n_5}{2 \chi^2(i-2)}; & m_6 &= \frac{n_6}{2 \chi^2(i+2)}; \\ m_7 &= \frac{n_7}{2 \chi^2(i-2)}; & m_8 &= \frac{n_8}{2 \chi^2(i+2)}; & m_9 &= -\frac{n_9}{4 i \chi^2}; & m_{10} &= -\frac{n_{10}}{4 i \chi^2}; \\ m_{11} &= \frac{n_{11}}{4 i \chi^2}; & m_{12} &= -\frac{n_{12}}{6 i \chi^2}; & m_{13} &= -\frac{n_{13}}{6 i \chi^2}; & m_{14} &= -\frac{n_{14}}{4 i \chi^2}; \end{aligned} \quad (7.33)$$

Con lo cual se llega a la solución particular de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} H_p(y) &= m_1 y + m_2 + m_3 \cosh \chi (1-i+2iy) + m_4 \cosh \chi (1-i-2iy) + m_5 \cosh \chi (1+i-2iy) \\ &+ m_6 \cosh \chi (-1-i+2iy) + m_7 \sinh \chi (1+i-2iy) + m_8 \sinh \chi (-1-i+2iy) + m_9 \cosh \chi (1-i)(1-y) + m_{10} \\ &\sinh \chi (1-i)(1-y) + m_{11} \sinh \chi (1+i)(1-y) + m_{12} \cosh \chi (1-i)(1-2y) + m_{13} \sinh \chi (1-i)(1-2y) + m_{14} \cosh \\ &\chi (1-i)y \end{aligned} \quad (7.34)$$

De las ecuaciones (7.1) y (7.3), se ve que las soluciones particulares para Ψ y Φ son puramente imaginarias. Por esta razón podemos calcularlas a partir de H_p mediante la fórmula

$$H_p = i(\Psi_p + i\Phi_p) \quad (7.35)$$

De lo cual se obtiene

$$\Psi_p = \text{Re}(-i H_p) \quad (7.36)$$

$$\Phi_p = \text{Im}(-i H_p) \quad (7.37)$$

4. Cálculo de c a primer orden

La solución general de (7.7) es:

$$h_1(y) = B_0 + B_1 \exp(1-i)\chi y + B_2 \exp(i-1)\chi y + H_p(y) \quad (7.38)$$

Impondremos las condiciones de frontera, lo cual nos permitirá determinar los valores de B_0 ,

B_1 y B_2 (salvo por un factor), así como el valor de c_1 .

Las condiciones de no deslizamiento en la pared para h_1 son:

$$h_1(1) = h_1'(1) = 0 \quad (7.39)$$

Sustituyendo la solución para h_1 se tiene:

$$B_0 + B_1 \exp(1-i)\chi + B_2 \exp(i-1)\chi + H_p(1) = 0 \quad (7.40)$$

$$(1-i)\chi B_1 \exp(1-i)\chi - (1-i)\chi B_2 \exp(i-1)\chi + H_p'(1) = 0 \quad (7.41)$$

Este par de ecuaciones nos permiten expresar a B_0 y B_1 en función de la constante compleja

B_2 :

$$B_0 = -2 B_2 \exp(i-1)\chi - H_p(y) + (1+i)/2 \chi H_p'(1) \quad (7.42)$$

$$B_1 = B_2 \exp 2\chi(i-1) - (1+i)/(2c) \exp(i-1)\chi H_p'(1) \quad (7.43)$$

Si descomponemos las constantes B_0 , B_1 y B_2 en sus partes correspondientes a Φ_1 y Ψ_1 tenemos

$$a_0 + i b_0 = -2 e^{-\chi} (a_2 \cos \chi - b_2 \sin \chi) - 2 i e^{-\chi} (b_2 \cos \chi + a_2 \sin \chi) + i \{ 1/(2 \chi) [\Psi_p'(1) - \Phi_p'(1)] + i/(2 \chi) [\Psi_p'(1) + \Phi_p'(1)] - \Psi_p(1) + i \Phi_p(1) \} \quad (7.44)$$

$$a_1 + i b_1 = e^{-2\chi} (a_2 \cos 2\chi - b_2 \sin 2\chi) + i e^{-2\chi} (b_2 \cos 2\chi + a_2 \sin 2\chi) - i \{ e^{-\chi}/(2 \chi) (\cos \chi - \operatorname{sen} \chi) [\Psi_p'(1) - \Phi_p'(1)] + i e^{-\chi}/(2 \chi) (\cos \chi + \operatorname{sen} \chi) [\Psi_p'(1) - \Phi_p'(1)] \} \quad (7.45)$$

Con lo cual se obtienen los valores de las constantes para Φ_1 y Ψ_1 :

$$a_0 = -2 e^{-\chi} (a_2 \cos \chi - b_2 \sin \chi) + i r_1 \quad (7.46)$$

$$b_0 = -2 e^{-\chi} (a_2 \sin \chi + b_2 \cos \chi) + i r_2 \quad (7.47)$$

$$a_1 = e^{-2\chi} (a_2 \cos 2\chi - b_2 \sin 2\chi) - i r_3 \quad (7.48)$$

$$b_1 = e^{-2\chi} (a_2 \sin 2\chi + b_2 \cos 2\chi) - i r_4 \quad (7.49)$$

Siendo:

$$r_1 = 1/(2 \chi) [\Psi_p'(1) - \Phi_p'(1)] - \Psi_p(1)$$

$$r_2 = 1/(2 \chi) [\Psi_p'(1) + \Phi_p'(1)] - \Phi_p(1)$$

$$r_3 = e^{-\chi}/(2 \chi) (\cos \chi - \operatorname{sen} \chi) \Psi_p'(1) - (\cos \chi + \operatorname{sen} \chi) \Phi_p'(1)$$

$$r_4 = e^{-\chi}/(2 \chi) (\cos \chi - \operatorname{sen} \chi) \Phi_p'(1) - (\cos \chi + \operatorname{sen} \chi) \Psi_p'(1)$$

Las condiciones de frontera sobre esfuerzos tangenciales no pueden ser expresadas en función de b_1 , por lo que es necesario descomponerla en función de Φ_1 y Ψ_1 .

$$\Psi_1(y) = a_0 + e^{\chi y} (a_1 \cos \chi y + b_1 \sin \chi y) + e^{-\chi y} (a_2 \cos \chi y - b_2 \sin \chi y) + i \Psi_p(y) \quad (7.50)$$

$$\Phi_1(y) = b_0 + e^{\chi y} (-a_1 \sin \chi y + b_1 \cos \chi y) + e^{-\chi y} (a_2 \sin \chi y + b_2 \cos \chi y) + i \Phi_p(y) \quad (7.51)$$

Sustituyendo los valores de a_0 , b_0 y a_1 y b_1 en estas expresiones tenemos

$$\begin{aligned} \Psi_1(y) = & a_2 [-2 e^{-\chi y} \cos \chi + e^{-\chi(2-y)} \cos \chi(2-y) + e^{\chi y} \cos \chi y] + b_2 [2 e^{-\chi y} \sin \chi - e^{-\chi(2-y)} \sin \chi(2-y) - \\ & e^{\chi y} \sin \chi y] + i [r_1 - e^{\chi y} (r_3 \cos \chi y + r_4 \sin \chi y) + \Psi_p(y)] \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(y) = & a_2 [-2 e^{-\chi y} \sin \chi + e^{-\chi(2-y)} \sin \chi(2-y) + e^{\chi y} \sin \chi y] + b_2 [-2 e^{-\chi y} \cos \chi + e^{-\chi(2-y)} \cos \chi(2-y) + \\ & e^{\chi y} \cos \chi y] + i [r_2 + e^{\chi y} (r_3 \sin \chi y - r_4 \cos \chi y) + \Phi_p(y)] \end{aligned} \quad (7.53)$$

Evaluando las expresiones en $y=0$ se tiene.

$$\Psi_1(0) = a_2 r_3 + b_2 r_6 + i r_7 \quad (7.54)$$

$$\Phi_1(0) = -a_2 r_6 + b_2 r_3 + i r_8 \quad (7.55)$$

Con:

$$r_3 = -2 e^{-\chi} \cos \chi + e^{-\chi(i-1)} \cosh \chi(1+i) + e^{\chi(1-i)} \cosh \chi(i-1)$$

$$r_6 = 2 e^{-\chi} \sin \chi + i e^{-\chi(i-1)} \cosh \chi(1+i) + i e^{\chi(1-i)} \cosh \chi(i-1)$$

$$r_7 = r_1 - r_3 + \Psi_p(0)$$

$$r_8 = r_2 - r_4 + \Phi_p(0)$$

Derivando a Φ y Ψ dos veces y evaluando en $y=0$ obtenemos

$$\Psi_1''(0) = a_2 r_9 + b_2 r_{10} + i (\Psi_p''(0) - 2 \chi^2 r_4) \quad (7.56)$$

$$\Phi_1''(0) = -a_2 r_{10} + b_2 r_9 + i (\Phi_p''(0) + 2 \chi^2 r_3) \quad (7.57)$$

Donde

$$r_9 = 2i \chi^2 e^{\chi(1-i)} \cosh \chi(i+1) - 2i \chi^2 e^{\chi(1+i)} \cosh \chi(1-i)$$

$$r_{10} = 2 \chi^2 e^{\chi(1-i)} \cosh \chi(i+1) + 2 \chi^2 e^{\chi(1+i)} \cosh \chi(1-i)$$

Al aplicar las condiciones de frontera (7.5) y (7.6) se tiene

$$U''(0)/C_0' [\operatorname{sen} \theta (-a_2 r_6 + b_2 r_5 + i r_8) - \operatorname{cos} \theta (a_2 r_3 + b_2 r_6 + i r_7) - c_1/C_0' [\operatorname{sen} \theta \Phi_0(0) - \operatorname{cos} \theta \Psi_0(0)]] + a_2 r_9 + b_2 r_{10} + i (\Psi_p''(0) - 2 \chi^2 r_4) = -i k_1 \quad (7.58)$$

$$W''(0)/C_0' [\operatorname{sen} \theta (-a_2 r_6 + b_2 r_5 + i r_8) - \operatorname{cos} \theta (a_2 r_3 + b_2 r_6 + i r_7) - c_1/C_0' [\operatorname{sen} \theta \Phi_0(0) - \operatorname{cos} \theta \Psi_0(0)]] + a_2 r_{10} - b_2 r_9 - i (\Phi_p''(0) + 2 \chi^2 r_3) = -i k_2 \quad (7.59)$$

donde k_1 y k_2 son las partes viscoelásticas de las condiciones de frontera dadas por:

$$k_1 = \Delta L \{ -\Psi_p''(0) C_0' - U''(0) (\operatorname{sen} \theta \Phi_0(0) - \operatorname{cos} \theta \Psi_0(0)) + \Psi_p'(0) [U'(0) \operatorname{cos} \theta + W'(0) \operatorname{sen} \theta] + 3 U'(0) (\operatorname{sen} \theta \Phi_0(0) - \operatorname{cos} \theta \Psi_0(0)) \} \quad (7.60)$$

$$k_2 = \Delta L \{ \Phi_p''(0) C_0' - W''(0) (\operatorname{sen} \theta \Phi_0(0) - \operatorname{cos} \theta \Psi_0(0)) - \Phi_p'(0) [U'(0) \operatorname{cos} \theta + W'(0) \operatorname{sen} \theta] + 3 W'(0) (\operatorname{sen} \theta \Phi_0(0) - \operatorname{cos} \theta \Psi_0(0)) \} \quad (7.61)$$

Luego de algunas simplificaciones algebraicas obtenemos el par de ecuaciones:

$$A_{11} a_2 + A_{12} b_2 - c_1 [\operatorname{sen} \theta \Phi_0(0) - \operatorname{cos} \theta \Psi_0(0)]/C_0' = i r_{11} \quad (7.62)$$

$$A_{21} a_2 + A_{22} b_2 - c_1 [\operatorname{sen} \theta \Phi_0(0) - \operatorname{cos} \theta \Psi_0(0)]/C_0' = i r_{12} \quad (7.63)$$

donde

$$A_{11} = -r_6 \operatorname{sen} \theta - r_5 \operatorname{cos} \theta + r_9 C_0 / U''(0)$$

$$A_{12} = r_5 \operatorname{sen} \theta - r_6 \operatorname{cos} \theta + r_{10} C_0 / U''(0)$$

$$A_{21} = -r_6 \operatorname{sen} \theta - r_5 \operatorname{cos} \theta + r_{10} C_0 / W''(0)$$

$$A_{22} = r_5 \operatorname{sen} \theta - r_6 \operatorname{cos} \theta - r_9 C_0 / W''(0)$$

$$r_{11} = r_7 \operatorname{cos} \theta - r_8 \operatorname{sen} \theta + (\Psi_p''(0) - 2 i \chi^2 r_4) C_0 / U''(0) - k_1 C_0 / U''(0)$$

$$r_{12} = r_7 \operatorname{cos} \theta - r_8 \operatorname{sen} \theta + (\Phi_p''(0) + 2 i \chi^2 r_3) C_0 / W''(0) - k_2 C_0 / W''(0)$$

Con lo cual tenemos un sistema de dos ecuaciones para encontrar el valor final de c_1 :

$$c_1 = i \left(\frac{-r_{11} \Lambda_{22} + r_{12} \Lambda_{12} + \Lambda_{11} \Lambda_{22} - \Lambda_{21} \Lambda_{12}}{\operatorname{sen} \theta \Phi_0 - \operatorname{cos} \theta \Psi_0} \right) \frac{C_0}{C_0} (\Lambda_{12} - \Lambda_{22}) \quad (7.64)$$

Se observa que c_1 es una cantidad puramente imaginaria y su signo determina la estabilidad del problema.

7.5. Análisis de la estabilidad.

La solución particular que se tiene depende linealmente del número de Reynolds, de $\tau \operatorname{cos} \alpha$, de $\tan \alpha$ y del parámetro viscoelástico ΔL . En base a esto, se tiene una expresión general de la forma:

$$C_1(\theta, \alpha, \tau, R, \Delta L) = \lambda(\theta, \chi) R + v(\theta, \chi) \tau \operatorname{cos} \alpha + \sigma(\theta, \chi) \tan \alpha + \mu(\theta, \chi) \Delta L \quad (7.65)$$

El segundo término del miembro derecho es inducido exclusivamente por la rotación, por lo que se anulará en el caso sin rotación. Por otro lado, el cuarto término es la contribución debida a que se tiene un fluido viscoelástico ya que es el único lugar en donde aparece el parámetro AE . En el caso límite de un fluido newtoniano en que la rotación tiende a cero se llega a la expresión:

$$C_1 = [R \cdot (5/2) \tan \alpha] \cos^2 \theta$$

resultado que coincide con el de Yih (1963) excepto por una constante, que depende de las diferencias en la velocidad característica que se emplea para adimensionalizar.

El análisis de estabilidad se llevó a cabo graficando el comportamiento de C_1 contra los diferentes parámetros involucrados en la estabilidad. La expresión de c_1 es sumamente complicada, por lo que se realizó un programa en Mathematica que permite graficar los resultados. La cantidad que se grafica no es directamente c_1 sino $\text{Im}(c_1)$ al cual llamaremos C_1 . Dicho programa realiza el cálculo de las velocidades en el flujo principal, posteriormente calcula los valores de las soluciones a orden cero, la solución particular y las funciones potenciales a primer orden. Además proporciona una lista de valores del parámetro C_1 contra el parámetro que se desee, dependiendo de aquellos que se hallan introducido como datos. Todos los cálculos fueron realizados en una PC 486 a 66 Mhz en el Instituto de Investigaciones en Materiales UNAM. El listado del programa se da en el apéndice II.

Debido a que en el flujo principal se observa el máximo de la componente x de la velocidad debajo de la superficie para números de Taylor grandes, los valores de dicho parámetro fueron

tomados en el intervalo 0.01 a 2. La razón de este comportamiento puede deberse al hecho de que no se están tomando en cuenta los efectos de la fuerza centrífuga, los cuales se vuelven más importantes a medida que se aumenta la rotación.

En la aproximación de ondas largas, se tiene que $c = c_0 + k c_1$. Ya que c_1 es puramente imaginaria y c_0 puramente real, las perturbaciones se propagan en forma de ondas con una razón de crecimiento o decrecimiento dada por $k C_1$. Considerando que k es una cantidad positiva, el flujo será estable si $C_1 < 0$, mientras que si C_1 es positivo el flujo será inestable. Los puntos para los cuales $C_1 = 0$ nos dan los valores críticos de los parámetros.

En la figura 7.1 se muestra una gráfica de C_1 vs θ para diferentes valores de τ . En el caso sin rotación, se observa que el valor máximo de C_1 ocurre en $\theta = 0$. Debido a que el máximo de C_1 es la zona de mayor inestabilidad, esta gráfica indica que la dirección del flujo que tiene menor estabilidad es aquella en la que se mueve el fluido. Este resultado se menciona en la literatura sobre la estabilidad de flujos unidireccionales (Drazin, 1979). También se observa que C_1 tiene una periodicidad de 180° .

Al aumentar la rotación, la dirección de propagación del fluido se desplaza hacia valores negativos de C_1 . Este desplazamiento se explica por el hecho de que surge una componente adicional de la velocidad en el flujo principal desplazando consigo la zona de mayor inestabilidad. Sin embargo, al momento de comparar el ángulo de máxima propagación con la dirección promedio del flujo principal γ , definida de la siguiente manera:

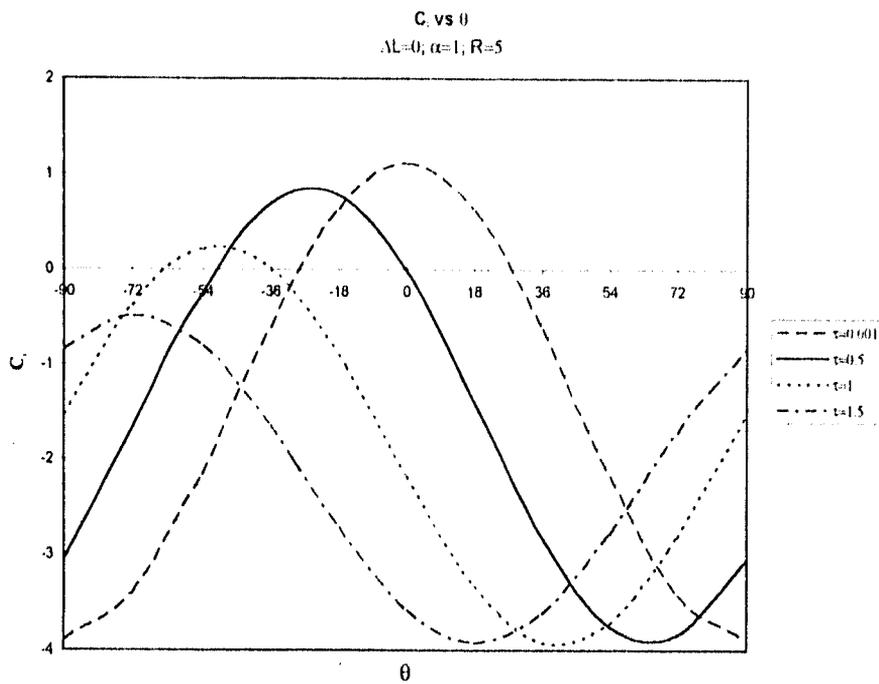


Figura 7.1. La rotación produce un corrimiento del máximo hacia la izquierda.

$$V = \arctan \left(\frac{\langle W \rangle}{\langle U \rangle} \right)$$

donde el símbolo $\langle \rangle$ indica el promedio a lo largo del espesor de la capa. Se encuentra que $\theta_{max} < \gamma$. Inclusive si θ_{max} se compara con γ_1 definido en la ec 5.36, se sigue observando que $\theta_{max} < \gamma_1$, a pesar de que el ángulo entre las velocidades en el flujo principal es mínimo en la superficie. Este fenómeno se explica debido a que la perturbación evoluciona por la acción de la fuerza de Coriolis. En ausencia de dicha fuerza, la dirección de mayor inestabilidad y la del flujo principal coinciden.

En la figura 7.2 se realiza la misma gráfica de C_i vs θ pero con un valor de $\Delta L = 1$. Se observa que el valor máximo de C_i aumenta significativamente en todos los casos, con lo cual puede apreciarse el efecto desestabilizador de ΔL . En el caso límite sin rotación se recuperan los resultados dados por Lai (1967), quien resolvió el problema viscoelástico.

Una comparación de las diferencias que se tienen en el caso viscoelástico con el Newtoniano se realiza en las figuras 7.3 y 7.4, para diferentes valores de la rotación. Aquí se observa que la viscoelasticidad no influye en la dirección de mayor inestabilidad sin importar que haya rotación o no. El único efecto que se observa es un aumento en la razón de crecimiento de la perturbación de una forma significativa.

Posteriormente se realizaron gráficas para estudiar el efecto sobre C_i de los diferentes parámetros involucrados en la estabilidad. Basados en la Ec. 7.65, esto significa estudiar el

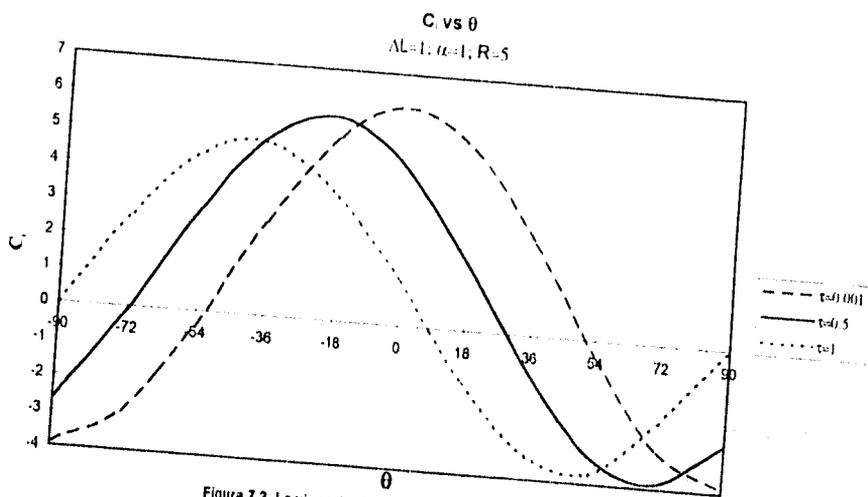


Figura 7.2. La viscoelasticidad aumenta la inestabilidad

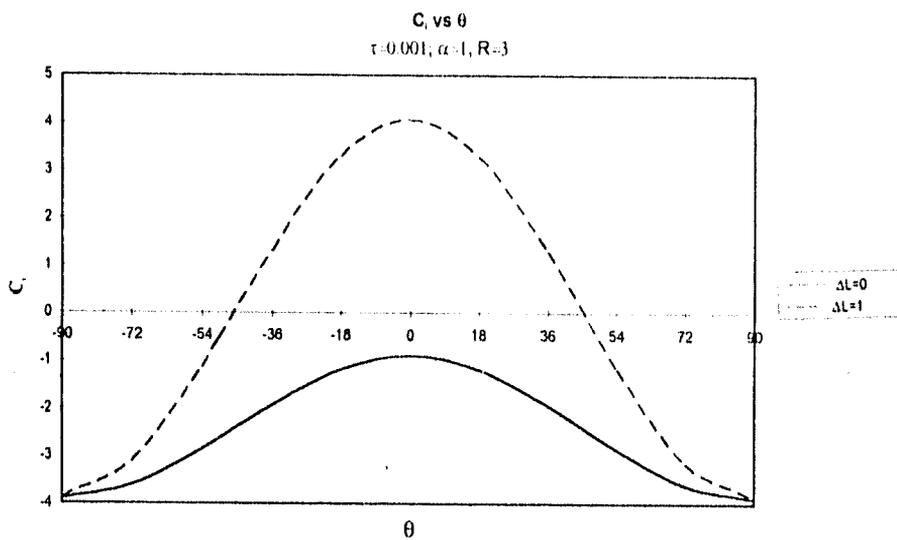


Figura 7.3. Comparación entre el fluido Newtoniano y viscoelástico.

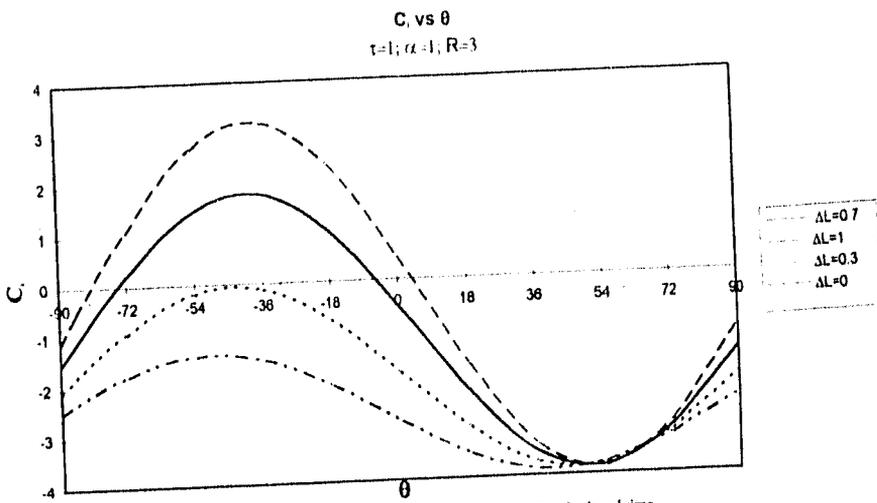


Figura 7.A. Nótese que la viscoelasticidad no modifica el ángulo de máxima inestabilidad.

comportamiento de los coeficientes λ , ν , σ y μ . La figura 7.5 es una gráfica de C_1 con respecto a R . En ella se encuentra que R tiene siempre un efecto desestabilizador, lo cual implica que λ es una función rigurosamente positiva. Sin embargo, dicha función disminuye a medida que se aumenta la rotación provocando un cambio en la pendiente de la recta. Por otra parte, cuando mantenemos constante la rotación y cambiamos ΔL , la pendiente de la gráfica C_1 vs R no cambia pero sí aumenta la ordenada al origen a medida que aumenta la viscoelasticidad. Este efecto se observa en la figura 7.6.

Un comportamiento semejante se observa con respecto al coeficiente μ que es el que multiplica a ΔL . El coeficiente disminuye a medida que aumenta la rotación, lo cual modifica las pendientes de las rectas (Figura 7.7) y aumenta la ordenada al origen al incrementar el número de Reynolds (Figura 7.8).

Las gráficas anteriores muestran que τ tiene un efecto estabilizador no sólo por sí mismo, debido al coeficiente σ de la Ec. 7.65, sino que también disminuye el efecto desestabilizador del número de Reynolds y de la viscoelasticidad. El efecto neto de la rotación en la estabilidad es una función no lineal bastante compleja que puede observarse en la figura 7.9 para diferentes valores de ΔL .

Como se vió en el análisis a orden cero, la rotación y el ángulo de inclinación se encuentran íntimamente relacionados por medio del parámetro χ . Resulta interesante observar cual es el efecto de la rotación en la estabilidad para diferentes ángulos de inclinación. Los resultados se observan en la figura 7.10. En ella se muestra que para ángulos α pequeños (recordemos que α es el ángulo que

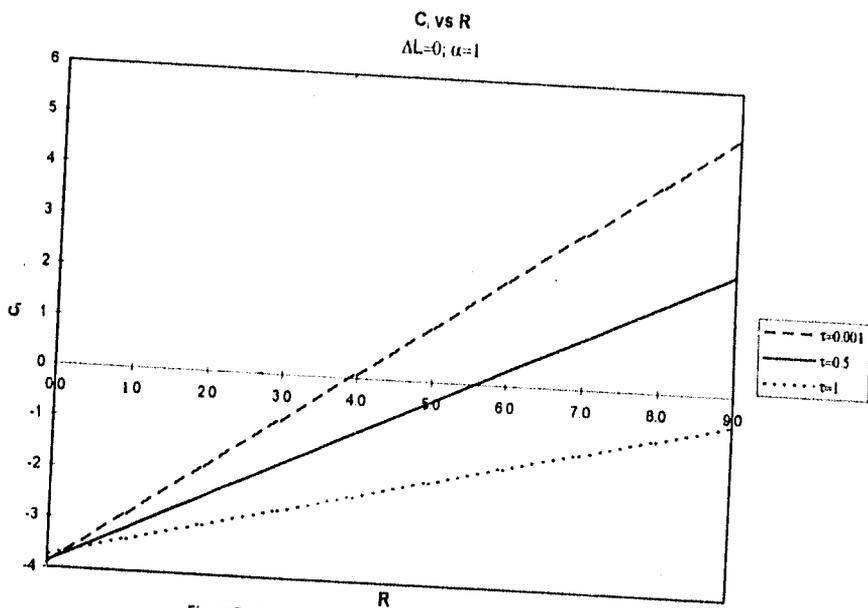


Figura 7.6. Efecto desestabilizador del número de Reynolds.

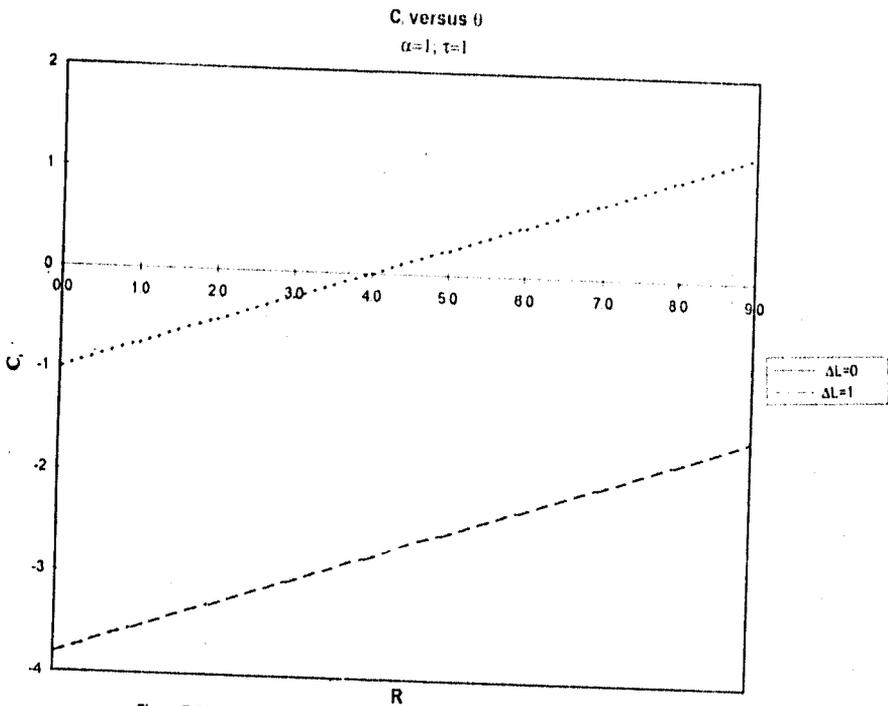


Figura 7.6. El aumento en ΔL produce un incremento en la ordenada al origen.

C, vs ΔL
 $R=1; \alpha=1$

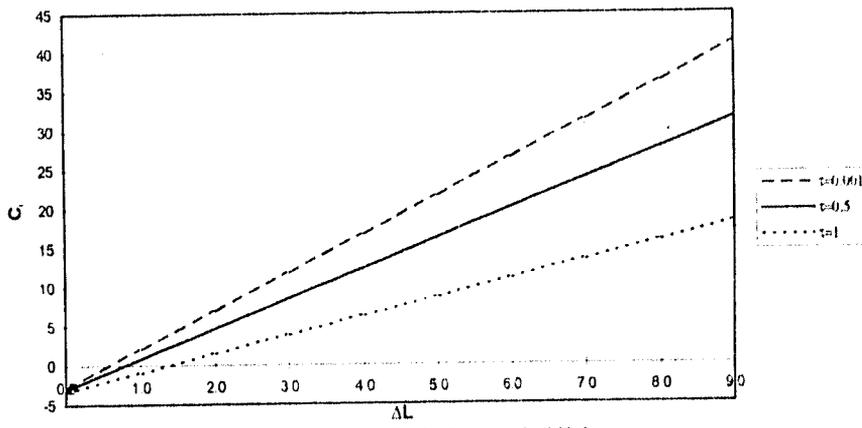


Figura 7.7. Efecto desestabilizador de la viscoelasticidad.

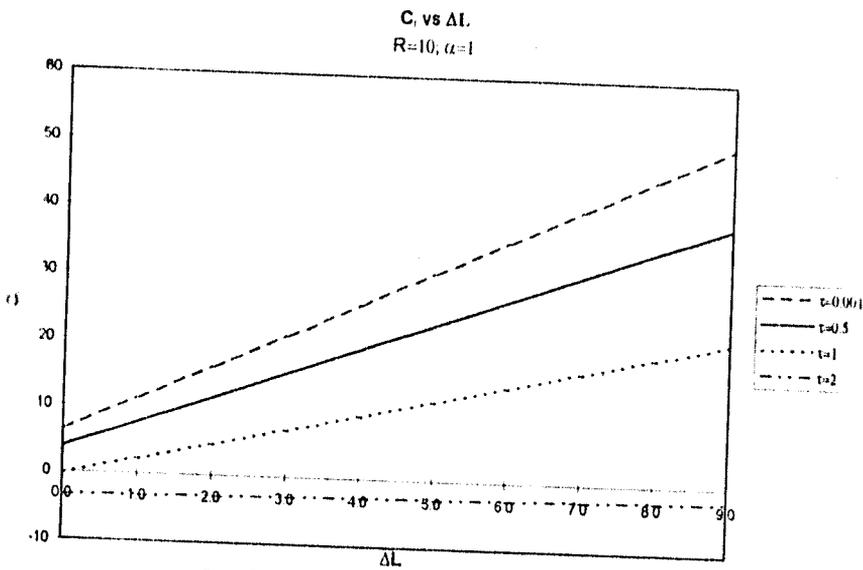


Figura 7.8. Efecto desestabilizador de la viscoelasticidad.

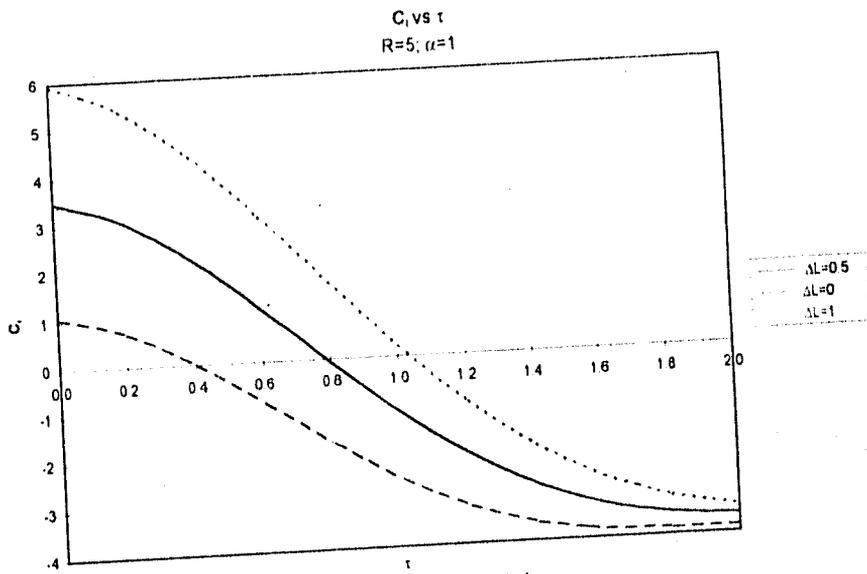


Figura 79 Estabilización con el aumento de t

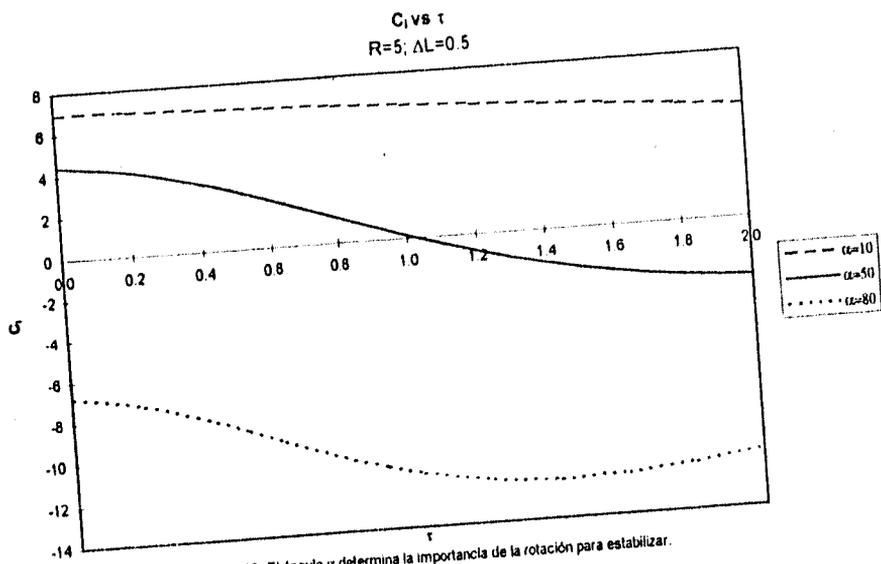


Figura 7.10. El ángulo α determina la importancia de la rotación para estabilizar.

forma el plano con la dirección vertical), el efecto estabilizador de τ es muy pequeño y aumenta a medida que aumenta el ángulo de inclinación. Lo anterior puede explicarse debido a que a mayores ángulos de inclinación, el momento angular provocado por la rotación aumenta, por lo cual el efecto estabilizador de la rotación se vuelve más importante.

Otra razón por la que el ángulo de inclinación estabiliza es porque una fuerza estabilizadora en el flujo es la componente de la gravedad en el eje y , $g \sin \alpha$, la cual aumenta con α . El efecto neto del ángulo de inclinación en la estabilidad del flujo se observa en la figura 7.11.

Otro de los cálculos importantes al hacer análisis de estabilidad es el cálculo de los parámetros críticos. Estos se definen como los valores de los parámetros para los que $C_i = 0$, es decir, nos encontramos en la transición entre la inestabilidad y la estabilidad. Encontrar los valores de dichos parámetros tiene una gran importancia a nivel práctico ya que si deseamos mantener un fenómeno en la zona estable, los parámetros críticos representan la barrera que no podremos sobrepasar.

En la figura 7.12 se presenta una gráfica de R_c vs τ_c para diferentes valores del ángulo de inclinación α y un fluido newtoniano. De nuestra definición vemos que si $R > R_c$, el flujo será inestable por lo que la parte superior de la gráfica representa zonas de inestabilidad, mientras que en la parte inferior de la curva, el flujo será estable. En ella se ve el aumento del número crítico de Reynolds (aumenta el área estable) a medida que aumentamos la rotación, y al mismo tiempo observamos que dicho efecto será más drástico a medida que aumenta el ángulo de inclinación.

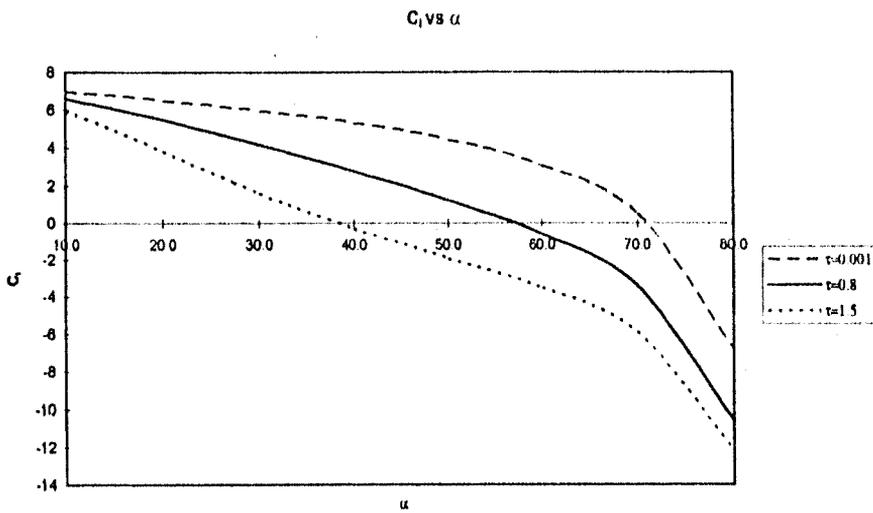


Figura 7.11. Efecto del ángulo de inclinación en la estabilidad.

Valores críticos (R_c versus τ_c)
 $\Delta L=0$

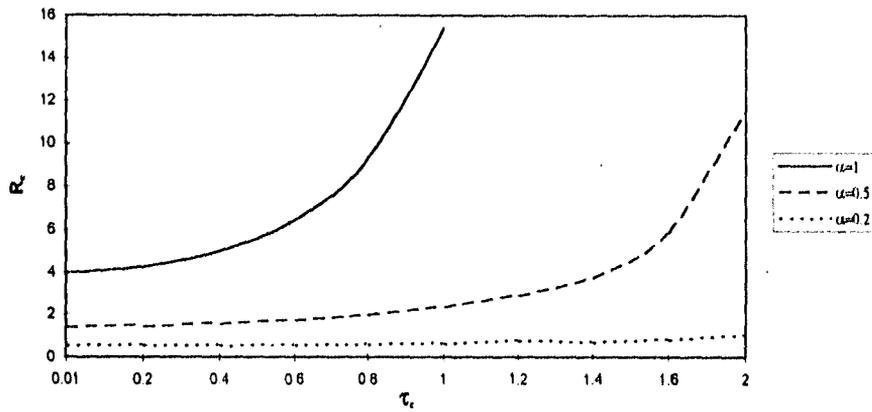


Figura 7.12. La relación aumenta la inestabilidad.

Por otra parte, una mayor viscoelasticidad del fluido implica una disminución en el número de Reynolds crítico provocando que la zona de inestabilidad aumente. Esto se observa en la figura 7.13.

El efecto de τ_c sobre la viscoelasticidad se observa en la figura 7.14. Una vez más, un aumento de la rotación incrementa el valor de ΔL_c , junto con la zona de estabilidad. Lo anterior sugiere aumentar la velocidad angular para mantener estable el flujo viscoelástico. Finalmente, el efecto del R_c sobre el ΔL_c es exactamente el opuesto al de τ_c , lo cual puede observarse en la figura 7.15.

Valores críticos (R_c versus τ_c)

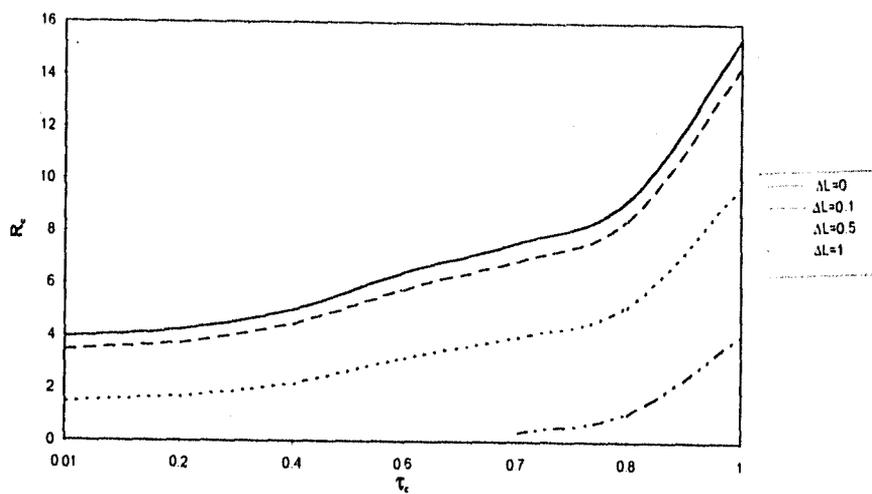


Figura 7.13. El aumento en ΔL produce un incremento en la zona de inestabilidad.

ΔL_e vs τ_c

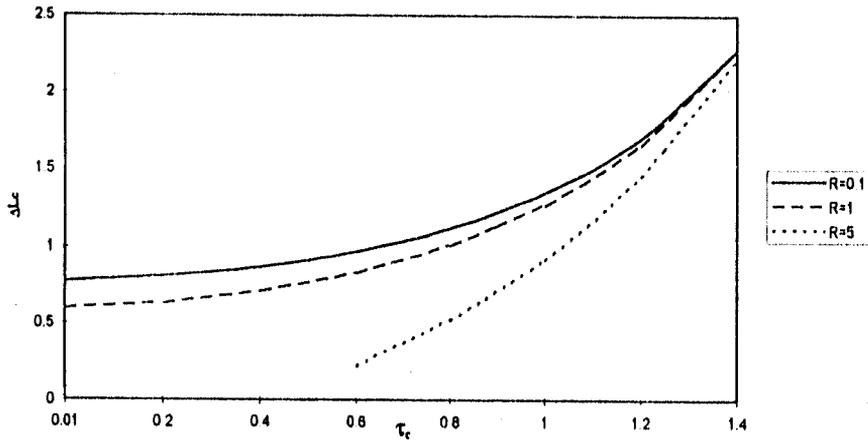


Figura 7.14. La rotación incrementa el ΔL_e

R_c versus ΔL_c

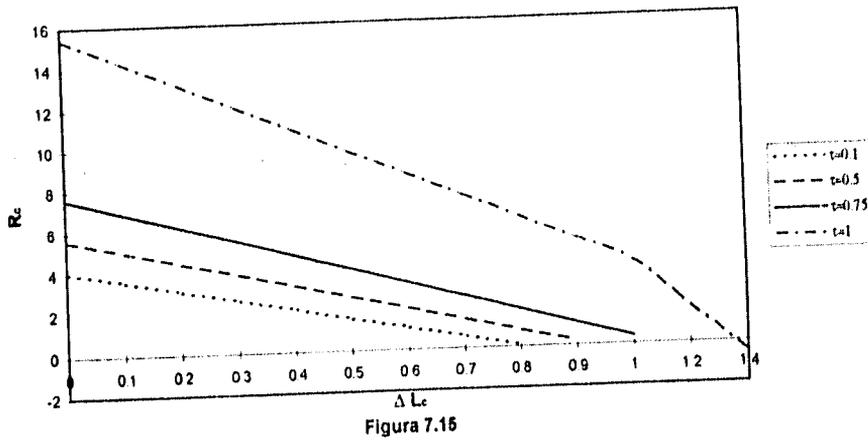


Figura 7.16

8 CONCLUSIONES

En este trabajo se investigó la estabilidad del flujo de un fluido viscoelástico de Oldroyd por un plano inclinado en rotación. Los principales objetivos consistieron en estudiar el comportamiento de un fluido viscoelástico ante la acción de una fuerza de cuerpo adicional como es la fuerza de Coriolis y comparar nuestros resultados con los que se tenían para el mismo problema en el caso de un fluido Newtoniano (Dávalos-Orozco y Ruiz-Chavarría, 1992).

Primeramente, se resolvieron las ecuaciones de movimiento para el flujo no perturbado. Se encontró una solución de un flujo estacionario en forma de una capa descendente con espesor constante. También se mostró la dependencia de las velocidades respecto a un parámetro χ , que toma en cuenta los efectos de la rotación y de la gravedad. También se encontró que las características cinemáticas del flujo eran idénticas a las del fluido Newtoniano, pero aparecen esfuerzos normales y tangenciales adicionales debidos a la viscoelasticidad.

Posteriormente, se obtuvieron las ecuaciones lineales de Orr-Sommerfeld generalizadas para un fluido viscoelástico en rotación haciendo una descomposición en modos normales para las perturbaciones. Se encontró que el problema queda completamente descrito por dos funciones potenciales Φ y Ψ que cumplen un par de ecuaciones diferenciales. Una de cuarto y la otra de segundo orden.

La imposibilidad de resolver el problema en forma analítica condujo a proponer soluciones en forma de serie de potencias del número de onda k . Después de analizar el comportamiento de las soluciones y compararlas con los resultados anteriores, se encontró que

La fuerza de cuerpo adicional tiene un efecto estabilizador ya que R_c es una función creciente de τ . Este resultado es consistente con el del fluido Newtoniano.

La viscoelasticidad, por otra parte, tiene un efecto desestabilizador sobre el flujo, lo cual está de acuerdo con los resultados obtenidos por Lai (1967) para el caso sin rotación.

Las fuerzas que tienen relevancia en el amortiguamiento de las perturbaciones son la componente de la gravedad perpendicular al plano y la parte de la fuerza de Coriolis inducida por la componente de la velocidad angular en el eje y .

Se encontraron ciertas diferencias en los resultados con respecto al caso del fluido Newtoniano (Dávalos-Orozco y Ruiz-Chavarría, 1992). Después de cuidadosas revisiones se encontraron algunos errores en los resultados dados en ese trabajo, por lo que aquí se corrigen y se da explicación a las diferencias. Sin embargo, el comportamiento general es el mismo por lo que las conclusiones de dicho trabajo siguen siendo válidas.

Este trabajo podría ser la base para realizar futuras investigaciones, entre los temas que podrían estudiarse se encuentran:

- a) Resolver las ecuaciones generalizadas de Orr-Sommerfeld para un fluido viscoelástico en rotación encontradas en este trabajo, aplicando técnicas de análisis numérico.
- b) Resolver el problema en otro tipo de geometrías tales como un cono en rotación o un cilindro en rotación.
- c) Resolver el problema en el caso no isotérmico con el fin de encontrar el efecto en la estabilidad de gradientes de tensión superficial.

APENDICE I ECUACIONES DE ORR-SOMMERFELD

La forma final de las ecuaciones de Orr-Sommerfeld para el problema de la capa de fluido viscoelástico que desciende por un plano inclinado en rotación son

$$P_1 \Phi'' + P_2 \Phi' + P_3 \Phi + P_4 \Psi'' + P_5 \Psi' + P_6 \Psi = 0$$

$$Q_1 \Psi'' + Q_2 \Psi'' + Q_3 \Psi'' + Q_4 \Psi' + Q_5 \Psi + Q_6 \Phi' + Q_7 \Phi = 0$$

Donde

$$P_1 = -1 - i c^3 k^3 L_1^2 L_2 + k (2 i c L_1 + i c L_2) + k^2 (c^2 L_1^2 + 2 c^2 L_1 L_2) + (k (-2 i L_1 - i L_2) + 3 i c^2 k^3 L_1^2 L_2 + k^2 (-2 c L_1^2 - 4 c L_1 L_2)) U + (-3 i c k^3 L_1^2 L_2 + k^2 (L_1^2 + 2 L_1 L_2)) U^2 + i k^3 L_1^2 L_2 U^3$$

$$P_2 = (k (-2 i L_1 + 2 i L_2) + k^2 (-4 c L_1^2 + 4 c L_1 L_2) + k^3 (2 i c^2 L_1^3 - 2 i c^2 L_1^2 L_2) + (k^2 (4 L_1^2 - 4 L_1 L_2) + k^3 (-4 i c L_1^3 + 4 i c L_1^2 L_2)) U + k^3 (2 i L_1^3 - 2 i L_1^2 L_2) U^2) U'$$

$$P_3 = k^2 + i c^3 k^4 L_1^2 L_2 + k^3 (-2 i c L_1 - i c L_2) + k^4 (-c^2 L_1^2) - 2 c^2 L_1 L_2 + (-i c k - 3 c^2 k^2 L_1 + 3 i c^3 k^3 L_1^2 + c^4 k^4 L_1^3) R + (k^3 (2 i L_1 + i L_2) - 3 i c^2 k^3 L_1^2 L_2 + k^4 (2 c L_1^2 + 4 c L_1 L_2) + (i k + 6 c k^2 L_1 - 9 i c^2 k^3 L_1^2 - 4 c^3 k^4 L_1^3) R) U + (3 i c k^3 L_1^2 L_2 + k^4 (-L_1 - 2 L_1 L_2) + (-3 k^2 L_1 + 9 i c k^3 L_1^2 + 6 c^2 k^4 L_1^3) R) U^2 + (-i k^3 L_1^2 L_2 + (-3 i k^3 L_1^2 - 4 c k^4 L_1^3) R) U^3 + k^4 L_1^3 R U^4 + (2 \Delta L k^2 L_1 - 4 i c \Delta L k^3 L_1^2 - 2 c^2 \Delta L k^4 L_1^3 + (4 i \Delta L k^3 L_1^2 + 4 c \Delta L k^4 L_1^3) U - 2 \Delta L k^4 L_1^3 U^2) U'^2 + (k (-i L_1 + i L_2) + k^2 (-2 c L_1^2 + 2 c L_1 L_2) + k^3 (i c^2 L_1^3 - i c^2 L_1^2 L_2) + (k^2 (2 L_1^2 - 2 L_1 L_2) + k^3 (-2 i c L_1^3 + 2 i c L_1^2 L_2)) U + k^3 (i L_1^3 - i L_1^2 L_2) U^2) U''$$

$$P_4 = (k (i L_1 - i L_2) + k^2 (c L_1^2 - c L_1 L_2)) W' + k^2 (-L_1^2 + L_1 L_2) U W'$$

$$P_5 = (-A_2 + 3 i A_2 c k L_1 + 3 A_2 c^2 k^2 L_1^2 - i A_2 c^3 k^3 L_1^3) R + (3 A_2 k^2 L_1^2 - 3 i A_2 c k^3 L_1^3) R U^2 + i A_2 k^3 L_1^3 R U^3 + U' ((k^2 (-2 L_1^2 + 2 L_1 L_2) + k^3 (2 i c L_1^3 - 2 i c L_1^2 L_2)) W' + k^3 (-2 i L_1^3 + 2 i L_1^2 L_2) U W') + (k (2 i L_1 - 2 i L_2) + k^2 (2 c L_1^2 - 2 c L_1 L_2)) W'' + U ((-3 i A_2 k L_1 - 6 A_2 c k^2 L_1^2 + 3 i A_2 c^2 k^3 L_1^3) R + k^2 (-2 L_1^2 + 2 L_1 L_2) W'')$$

$$P_6 = (-i A_1 k - 3 A_1 c k^2 L_1 + 3 i A_1 c^2 k^3 L_1^2 + A_1 c^3 k^4 L_1^3) R + (k^3 (-i L_1 + i L_2) + k^4 (-c L_1^2) - c L_1 L_2) + (-i k - 3 c k^2 L_1 + 3 i c^2 k^3 L_1^2 + c^3 k^4 L_1^3) R) W' + U^3 (-A_1 k^4 L_1^3 R) - k^4 L_1^3 R W' - U^2 ((-2 i \Delta L k^3 L_1^2 - 2 c \Delta L k^4 L_1^3) W' + 2 \Delta L k^4 L_1^3 U W') + ((k^2 (-L_1^2 + L_1 L_2) + k^3 (i c L_1^3 - i c L_1^2 L_2)) W' + k^3 (-i L_1^3 + i L_1^2 L_2) U W') U'' + U' ((k^2 (-2 L_1^2 + 2 L_1 L_2) + k^3 (2 i c L_1^3 - 2 i c L_1^2 L_2)) W'' + k^3 (-2 i L_1^3 + 2 i L_1^2 L_2) U W'') + (k (-i L_1 + i L_2) + k^2 (-2 c L_1^2 + 2 c L_1 L_2) + k^3 (i c^2 L_1^3 - i c^2 L_1^2 L_2)) W''' + U^2 ((3 i A_1 k^3 L_1^2 + 3 A_1 c k^4 L_1^3) R + (3 i k^3 L_1^2 - 3 c k^4 L_1^3) R W' - k^3 (6 i L_1^3 - i L_1^2 L_2) W''') + U ((3 A_1 k^2 L_1 - 6 i A_1 c k^3 L_1^2 - 3 A_1 c^2 k^4 L_1^3) R -$$

$$(k^4 (L_1^2 - L_1 L_2) + (3 k^2 L_1 - 6 i c k^3 L_1^2 - 3 c^2 k^4 L_1^3) R) W + (k^4 (2 L_1^2 - 2 L_1 L_2) + k^4 (-2 i c L_1^3 + 2 i c L_1^2 L_2)) W''$$

$$Q_1 = 1 + c^4 k^4 L_1^4 L_2 + k(-3 i c L_1 - i c L_2) + k^3 L_1^3 L_2 U^4$$

$$Q_2 = (4 i k L_1 - 4 i k L_2 + k(-4 i L_1 + 10 c k L_1^2 + 4 i L_2 - 10 c k L_1 L_2) + k^2 (-8 c L_1^2 - 8 c^2 i k L_1^3 + 8 c L_1 L_2 + 8 c^2 i k L_1^2 L_2) + k^3 (4 i c^2 L_1^3 + 2 i c^3 i k L_1^4 - 4 i c^2 L_1^2 L_2 - 2 i c^3 k L_1^3 L_2) + (k(-10 k L_1^2 + 10 k L_1 L_2) + k^2 (8 L_1^2 + 16 c i k L_1^3 - 8 L_1 L_2 - 16 c i k L_1^2 L_2) + k^3 (-8 i c L_1^3 + 6 c^2 k L_1^4 + 8 i c L_1^2 L_2 - 6 c^2 k L_1^3 L_2)) U + (k^2 (-8 i k L_1^3 + 8 i k L_1^2 L_2) + k^3 (4 i L_1^3 - 6 c k L_1^4 - 4 i L_1^2 L_2 + 6 c k L_1^3 L_2)) U^2 + k^3 (2 k L_1^4 - 2 k L_1^3 L_2) U^3) U'$$

$$Q_3 = -2 k^2 - 2 c^4 k^6 L_1^3 L_2 + k^2 (6 c i k L_1 + 2 c i k L_2) + k^4 (6 c^2 L_1^2 + 6 c^2 L_1 L_2) + k^4 (-2 c^3 i k L_1^3 - 6 c^3 i k L_1^2 L_2) + (i c k + 4 c^2 k^2 L_1 - 6 i c^3 k^3 L_1^2 - 4 c^4 k^4 L_1^3 + i c^5 k^5 L_1^4) R + (8 c^3 k^6 L_1^3 L_2 + k^3 (-6 i L_1 - 2 i L_2) + k^4 (-12 c L_1^2 - 12 c L_1 L_2) + k^5 (6 c^2 i L_1^3 + 18 c^2 i L_1^2 L_2) + (-i k - 8 c k^2 L_1 + 18 i c^2 k^3 L_1^2 + 16 c^3 k^4 L_1^3 - 5 i c^4 k^5 L_1^4) R) U + (-12 c^2 k^6 L_1^3 L_2 + k^3 (6 k L_1^2 + 6 k L_1 L_2) + k^4 (-6 c i k L_1^3 - 18 c i k L_1^2 L_2) + (4 k^2 L_1 - 18 i c k^2 L_1^2 - 24 c^2 k^4 L_1^3 + 10 i c^3 k^5 L_1^4) R) U^2 + (8 c k^6 L_1^3 L_2 + k^4 (2 i k L_1^3 + 6 i k L_1^2 L_2) + (6 i k^3 L_1^2 + 16 c k^4 L_1^3 - 10 i c^2 k^5 L_1^4) R) U^3 + (-2 k^6 L_1^3 L_2 + (-4 k^4 L_1^3 + 5 i c k^5 L_1^4) R) U^2 - i k^5 L_1^4 R U^3 + (2 i c^3 \Delta L k^5 L_1^4 + k^2 (-4 \Delta L L_1 + 10 L_1^2 - 10 L_1 L_2) + k^2 (2 \Delta L L_1 - 8 L_1^2 + 12 c \Delta L i k L_1^2 - 12 c i k L_1^3 + 8 L_1 L_2 + 12 c i k L_1^2 L_2) + k^4 (-6 c^2 \Delta L L_1^3 - 2 c^2 L_1^4 - 4 c^3 \Delta L i k L_1^4 + 2 c^2 L_1^3 L_2) + k^3 (-6 i c \Delta L L_1^2 + 6 i c L_1^3 + 12 c^2 \Delta L k L_1^3 - 2 c^2 k L_1^4 - 6 i c L_1^2 L_2 + 2 c^2 k L_1^3 L_2) + (-6 i c^2 \Delta L k^5 L_1^4 + k^2 (-12 \Delta L i k L_1^2 + 12 i k L_1^3 - 12 i k L_1^2 L_2) + k^3 (12 c \Delta L L_1^3 + 4 c L_1^4 + 12 c^2 \Delta L i k L_1^4 - 4 c L_1^3 L_2) + k^3 (6 i \Delta L L_1^2 - 6 i L_1^3 - 24 c \Delta L k L_1^3 + 4 c k L_1^4 + 6 i L_1^2 L_2 - 4 c k L_1^3 L_2)) U + (6 i c \Delta L k^5 L_1^4 + k^4 (-6 \Delta L L_1^3 - 2 L_1^4 - 12 c \Delta L i k L_1^4 + 2 L_1^3 L_2) + k^3 (12 \Delta L k L_1^3 - 2 k L_1^4 + 2 k L_1^3 L_2)) U^2 + (4 \Delta L i k^5 L_1^4 - 2 i \Delta L k^5 L_1^4) U^3) U^2 + (4 i k \Delta L + k(-4 i L_1 + 10 c k L_1^2 + 4 i L_2 - 10 c k L_1 L_2) + k^2 (-7 c L_1^2 - 8 c^2 i k L_1^3 + 7 c L_1 L_2 + 8 c^2 i k L_1^2 L_2) + k^4 (-c^3 L_1^4) + c^3 L_1^3 L_2) + k^3 (2 i c^2 L_1^3 - 2 c^3 k L_1^4 - 2 i c^2 L_1^2 L_2 + 2 c^3 k L_1^3 L_2) + (k^2 (-10 L_1^2 + 10 L_1 L_2) + k^2 (7 L_1^2 + 16 c k L_1^3 - 7 L_1 L_2 - 16 c i k L_1^2 L_2) + k^4 (3 c^2 L_1^4 - 3 c^2 L_1^3 L_2) + k^3 (-4 i c L_1^3 + 6 c^2 k L_1^4 + 4 i c L_1^2 L_2 - 6 c^2 k L_1^3 L_2)) U + (k^2 (-8 i k L_1^3 + 8 i k L_1^2 L_2) + k^3 (-3 c L_1^4 + 3 c L_1^3 L_2) + k^3 (2 i L_1^3 - 6 c k L_1^4 - 2 i L_1^2 L_2 + 6 c k L_1^3 L_2)) U^2 + (k^4 (L_1^4 - L_1^3 L_2) + k^3 (2 k L_1^4 - 2 k L_1^3 L_2)) U^3) U''$$

$$Q_4 = (k^2 (4 i k \Delta L) + k^3 (-4 i L_1 + 8 c k L_1^2 + 4 i L_2 - 8 c k L_1 L_2) + k^5 (8 i c^2 L_1^3 - 8 i c^2 L_1^2 L_2) + k^4 (-10 c L_1^2 - 4 c^2 i k L_1^3 + 10 c L_1 L_2 + 4 c^2 i k L_1^2 L_2) + k^6 (2 c^3 L_1^3 \Delta L) + (k^3 (-8 k L_1^2 + 8 k L_1 L_2) + k^3 (-16 i c L_1^3 + 16 i c L_1^2 L_2) + k^4 (10 L_1^2 + 8 c i k L_1^3 - 10 L_1 L_2 - 8 c i k L_1^2 L_2) + k^6 (-6 c^2 L_1^4 + 6 c^2 L_1^3 L_2)) U + (k^5 (8 i L_1^2 \Delta L) + k^4 (-4 i k L_1^3 + 4 i k L_1^2 L_2) + k^6 (6 c L_1^4 - 6 c L_1^3 L_2)) U^2 + k^6 (-2 L_1^3 \Delta L) U^3) U' + (4 i c^2 \Delta L k^5 L_1^4 + k^4 (-16 c \Delta L L_1^3 - 8 c^2 \Delta L i k L_1^4) + k^3 (20 c \Delta L k L_1^3) + (-8 i c \Delta L k^5 L_1^4 + k^4 (16 \Delta L L_1^3 + 16 c \Delta L i k L_1^4) + k^3 (-20 \Delta L k L_1^3)) U + (-8 \Delta L i k^5 L_1^4 + 4 i \Delta L k^5 L_1^4) U^2) U^3 - k^2 L_1^2 \Delta L (U^2)' + 3 c i k^3 L_1^2 2 \Delta L (U^2)' + 3 c^2 k^4 L_1^3 2 \Delta L (U^2)' - c^3 i k^4 L_1^4 2 \Delta L (U^2)' + i k^5 L_1^4 U^3 2 \Delta L (U^2)' + U^2 (3 k^4 L_1^3 2 \Delta L (U^2)') -$$

$$\begin{aligned}
& 3ci k^5 L_1^4 2 \Delta L (U^2)' + U (-3i k^3 L_1^2 2 \Delta L (U^2)' - 6 c k^1 L_1^1 2 \Delta L (U^2)' + 3c^2 \\
& ik^5 L_1^4 2 \Delta L (U^2)') + (8ic^3 \Delta L k^5 L_1^3 - 2k^2 8 \Delta L k L_1 + k^1 (6 \Delta L L_1 + 20 c \Delta L ik \\
& L_1^2) + k^1 (-34 c^2 \Delta L L_1^3 - 8 c^3 \Delta L ik L_1^3) + k^1 (-32 ic \Delta L L_1^2 + 26 c^2 \Delta L k L_1^3) + \\
& (-24 ic^2 \Delta L k^5 L_1^4 + k^1 (-20 \Delta L i L_1^2) + k^1 (68 c \Delta L L_1^3 + 24 c^2 \Delta L ik L_1^4) + k^1 (32 i \\
& \Delta L L_1^2 - 52 c \Delta L k L_1^3)) U + (24 ic \Delta L k^3 L_1^4 + k^1 (-8 \Delta L L_1^3 - 24 c \Delta L ik L_1^3)) \\
& U^2) U'' + (k^2 (2 c L_1 \Delta L) + k^1 (-4 ic^2 L_1^3 + 4 ic^2 L_1^2 L_2) + k^1 (-2 c^3 L_1^3 \Delta L) + \\
& (k^2 (-2 L_1 \Delta L) + k^1 (8 ic L_1^2 \Delta L) + 6 k^4 c^2 L_1^3 \Delta L) U + (k^1 (-4 i L_1^2 \Delta L) + k^4 (-6 c \\
& L_1^3 \Delta L)) U^2 + k^4 (2 L_1^3 \Delta L) U^3) U'''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_5 = & c^1 k^8 L_1^3 L_2 + k^5 (-3 ic L_1 - ic L_2) + k^6 (-3 c^2 (L_1 + L_2)) + k^7 (ic^3 L_1^3 + 3 ic^1 \\
& L_1^2 L_2) + (ic k^3 - 4 c^2 k^4 L_1 + 6 ic^3 k^3 L_1^2 + 4 c^4 k^6 L_1^3 - ic^5 k^7 L_1^4) R - (k^8 L_1^3 \\
& L_2 + 4 k^6 L_1^4 - 5 ic k^7 L_1^4) R) U^4 + ik^7 L_1^4 R U^5 + (-6 c^2 \Delta L k^6 L_1^3 + 2 ic^5 \Delta L k^7 \\
& L_1^4 + 4 k^4 L_1 \Delta L + 4 ic k^5 \Delta L L_1^2 - 4 ic k^4 L_1^2 \Delta L + (12 c \Delta L k^6 L_1^3 - 6 ic^2 \Delta L k^7 \\
& L_1^4 + 8 ik^5 \Delta L L_1^2) U + (-6 \Delta L k^6 L_1^3 + 6 ic \Delta L k^7 L_1^4) U^2 - 2 i \Delta L k^7 L_1^4 U^3) U'' + \\
& (4 ic \Delta L k^5 L_1^4 - 20 k^4 \Delta L L_1^3 - 8 ic k^5 \Delta L L_1^4 + 4 i \Delta L k^5 L_1^4 U) U^4 + U (2 \Delta L U'' (i \\
& k^3 L_1^2 + 2 c k^4 L_1^3) - 2 \Delta L U'' (ic^2 k^3 L_1^4 - ik^5 L_1^4 U^2 + 2 \Delta L (U^2)') U (-2 k^4 L_1^3 \\
& (2 \Delta L U')' + 2 ic k^3 L_1^4)) + 2 ik^3 \Delta L - k^3 (2 i \Delta L - 4 k L_1 \Delta L) + k^5 (4 ic^2 L_1^2 \Delta L) - k^4 \\
& (5 c L_1 \Delta L + 2 ic^2 k L_1^2 \Delta L) + k^6 (c^3 L_1^3 \Delta L) + (ik + 4 c k^2 L_1 - 6 ic^2 k^3 L_1^2 - 4 c^3 \\
& k^4 L_1^3 + ic^4 k^5 L_1^4) R + (-k^3 (4 k L_1 \Delta L) - k^5 (8 ic L_1^2 \Delta L) + k^4 (5 L_1 \Delta L + 4 ic k \\
& L_1^2 \Delta L) + k^6 (-3 c^2 L_1^3 \Delta L) + (-4 k^2 L_1 + 12 ic k^3 L_1^2 + 12 c^2 k^4 L_1^3 - 4 ic^3 k^5 L_1^4) \\
& R) U + (k^5 (2 i L_1^2 \Delta L) + k^6 (3 c L_1^3 \Delta L) + (-6 ik^3 L_1^2 - 12 c k^4 L_1^3 + 6 ic^2 k^5 L_1^4) \\
& R) U^2 + (k^6 (-L_1^3 \Delta L) + 4 k^4 L_1^3 - 4 ic k^5 L_1^4) R) U^3 + ik^5 L_1^4 R U^4 + (10 ic^2 \Delta L \\
& k^3 L_1^4 + k^3 (28 i \Delta L L_1^2) + k^4 (-42 c \Delta L L_1^3 - 12 ic^2 \Delta L k L_1^4) + k^1 (-32 i \Delta L L_1^2 + \\
& 8 c \Delta L k L_1) + (-20 ic \Delta L k^5 L_1^4 + k^4 (32 \Delta L L_1^3 + 24 ic \Delta L k L_1^4) + k^4 (-40 L_1^3 \\
& \Delta L)) U - 2 i \Delta L k^5 L_1^4 U^2) U^2) U'' + (4 ic^3 \Delta L k^5 L_1^4 + k^2 (-2 L_1 \Delta L) + k^2 (9 \\
& \Delta L L_1 + 4 ic k L_1^2 \Delta L) + k^4 (-17 c^2 \Delta L L_1^3) + k^1 (-22 ic \Delta L L_1^2 + 2 c^2 k L_1^3 \Delta L) + (- \\
& 12 ic^2 \Delta L k^3 L_1^4 + k^2 (-4 ik L_1^2 \Delta L) + k^4 (34 c \Delta L L_1^3) + k^3 (22 i \Delta L L_1^2 - 4 c k L_1^3 \\
& \Delta L)) U + (12 ic \Delta L k^3 L_1^4 + k^4 (-17 \Delta L L_1^3) + k^4 (2 L_1^3 \Delta L)) U^2 - 4 i \Delta L k^5 L_1^4 U^3) \\
& U'' - 2 \Delta L k^2 L_1 ((U')'')'' + 6 ic k^3 L_1^2 \Delta L (U^2)'' + 6 c^2 k^4 L_1^3 \Delta L (U^2)'' + k^4 (1 - 2 \\
& ic^3 k L_1^4 \Delta L (U^2)''') + U^1 (-4 c k^8 L_1^3 L_2 + k^7 (-i L_1^3 - 3 i L_1^2 L_2) + (-6 i k^5 L_1^2 - 16 c \\
& k^6 L_1^3 + 10 ic^2 k^7 L_1^4) R + 2 i k^5 \Delta L L_1^4 (U^2)''') + U^2 (6 c^2 k^4 L_1^3 L_2 + k^6 (-3 L_1 \\
& (L_1 + L_2)) + k^7 (3 ic L_1^3 + 9 ic L_1^2 L_2) + (-4 k^4 L_1 + 18 ic k^5 L_1^2 + 24 c^2 k^6 L_1^3 - 10 i \\
& c^3 k^7 L_1^4) R + 6 k^4 L_1^3 \Delta L (U^2)'' - 3 ci k^5 L_1^4 (2 \Delta L U^2)''') + U (k^5 (3 i L_1 + i L_2) - 4 \\
& c^3 k^8 L_1^3 L_2 + k^6 (6 c L_1 (L_1 + L_2)) + k^7 (-3 ic^2 L_1^3 - 9 ic^2 L_1^2 L_2) + (i k^3 + 8 c k^4 \\
& L_1 - 18 ic^2 k^5 L_1^2 - 16 c^3 k^6 L_1^3 + 5 ic^4 k^7 L_1^4) R - 6 i k^3 L_1^2 \Delta L (U^2)'' - 12 c k^4 \\
& L_1 \Delta L (U^2)'' + 6 ic^2 k^3 L_1^4 \Delta L (U^2)''') + (4 ic^3 \Delta L k^5 L_1^4 + k (-2 k L_1 \Delta L) + k^2 (10 \\
& \Delta L L_1 + 4 ic k L_1^2 \Delta L) + k^4 (-18 c^2 \Delta L L_1^3) + k^3 (-24 ic \Delta L L_1^2 + 2 c^2 k L_1^3 \Delta L) + (- \\
& 12 ic^2 \Delta L k^3 L_1^4 + k^2 (-4 ik L_1^2 \Delta L) + k^4 (36 c \Delta L L_1) + k^3 (24 i \Delta L L_1^2 - 4 c k L_1^3 \\
& \Delta L)) U + (12 ic \Delta L k^3 L_1^4 + k^4 (-18 \Delta L L_1^3) + k^3 (2 k L_1^3 \Delta L)) U^2 - 4 i \Delta L k^5 L_1^4 U^3 \\
&) U'' + (k (i \Delta L) + k^2 (3 c L_1 \Delta L) + k^1 (-3 ic^2 L_1^2 \Delta L) + k^4 (-c^3 L_1^3 \Delta L) + (k^2 (-3 L_1 \\
& \Delta L) + k^1 (6 ic L_1^2 \Delta L) + k^4 (3 c^2 L_1^3 \Delta L)) U + (k^3 (-3 i L_1^2 \Delta L) + k^4 (-3 c L_1^3 \Delta L)) U^2 \\
& + k^4 (L_1^3 \Delta L) U^3) U'''
\end{aligned}$$

$$Q_6 = (-A_2 + 4iA_2ckL_1 + 6A_2c^2k^2L_1^2 - 4iA_2c^3k^3L_1^3 - A_2c^4k^4L_1^4)R + (-4iA_2kL_1 - 12A_2ck^2L_1^2 + 12iA_2c^2k^3L_1^3 + 4A_2c^3k^4L_1^4)RU + (6A_2k^2L_1^2 - 12iA_2ck^3L_1^3 - 6A_2c^2k^4L_1^4)RU^2 + (4iA_2k^3L_1^3 + 4A_2ck^4L_1^4)RU^3 - A_2k^4L_1^4RU^4$$

$$Q_7 = c^4k^8L_1^3L_2 + k^5(-3icL_1 - icL_2) + k^6(-3c^2L_1^2 - 3c^2L_1L_2) + k^7(ic^3L_1^3 + 3ic^3L_1^2L_2) + (-ic^3k - 4c^2k^3L_1 + 6ic^3k^3L_1^2 + 4c^4k^6L_1^3 - ic^5k^7L_1^4)R + (k^8L_1^3L_2 + (4k^6L_1^3 - 5ick^7L_1^4)R)U^4 + ik^7L_1^4RU^5 + (-6c^2\Delta Lk^6L_1^3 + 2ic^3\Delta Lk^7L_1^4 + 4k^4L_1\Delta L - 4k^5ic\Delta L L_1^2 - k^44cikL_1^2\Delta L + (12c\Delta Lk^6L_1^3 - 6ic^2\Delta Lk^7L_1^4 + 4k^3i\Delta L L_1^2 + 4k^4ikL_1^2\Delta L)U + (-6\Delta Lk^6L_1^3 + 6ic\Delta Lk^7L_1^4)U^2 - 2i\Delta Lk^7L_1^4U^3)U^2 + (4ic\Delta Lk^3L_1^4 + k^4(-16\Delta L L_1^3 - 8c\Delta L ikL_1^3) + 20k^3\Delta LkL_1^3 + 4\Delta L ik^5L_1^4)U)U^4 + U^3(ik^3L_1^22\Delta L(U^2)^2 + 2c^2k^3L_1^32\Delta L(U^2)^2 - c^2ik^4L_1^42\Delta L(U^2)^2 - ik^4L_1^4U^22\Delta L(U^2)^2 + U(-2k^4L_1^32\Delta L(U^2)^2 + 2cik^4L_1^42\Delta L(U^2)^2)) + (2k^2ik\Delta L + k^3(-2i\Delta L + 4ckL_1\Delta L) + k^5(4ic^2L_1^2\Delta L) + k^4(-5cL_1\Delta L - 2c^2ikL_1^2\Delta L) + k^6(c^3L_1^3\Delta L) + (ik + 4ck^2L_1 - 6ic^2k^3L_1^2 - 4c^3k^4L_1^3 + ic^3k^5L_1^4)R + (k^3(-4kL_1\Delta L) + k^5(-8icL_1^2\Delta L) + k^4(5L_1\Delta L + 4cikL_1^2\Delta L) + k^6(-3c^2L_1^3\Delta L) + (-4k^2L_1 + 12ick^3L_1^2 + 12c^2k^4L_1^3 - 4ic^3k^5L_1^4)R)U + (k^3(4iL_1^2\Delta L) + k^5(-2iL_1^2\Delta L) + k^6(3cL_1^3\Delta L) + (-6ik^3L_1^2 - 12ck^4L_1^3 + 6ic^2k^5L_1^4)R)U^2 + (k^6(-L_1^4 + L_1^3L_2) + (4k^4L_1^3 - 4ic^3k^5L_1^4)R)U^3 + ik^5L_1^4RU^4 + (10ic^2\Delta Lk^5L_1^4 + 28k^3\Delta LiL_1^2 + k^4(-20c\Delta L L_1^3 - 22cL_1^3\Delta L - 12c^2\Delta L ikL_1^4) + k^3(-10i\Delta L L_1^2 - 22iL_1^2\Delta L + 24c\Delta LkL_1^3 + 16ckL_1^3\Delta L) + (-20ic\Delta Lk^3L_1^4 + k^4(42\Delta L L_1^3 + 24c\Delta L ikL_1^4) + k^4(-8\Delta L L_1^3))U + (-12\Delta L ik^5L_1^4 + 10i\Delta Lk^5L_1^4)U^2)U^2)U^4 + (4ic^3\Delta Lk^5L_1^4 - 2k^2L_1\Delta L + k^2(4\Delta L L_1 + 5L_1\Delta L + 4cikL_1^2\Delta L) + k^4(-17c^2\Delta L L_1^3) + k^3(-12ic\Delta L L_1^2 - 10icL_1^2\Delta L + 2c^2kL_1^3\Delta L) + (-12ic^2\Delta Lk^5L_1^4 + k^3(-4iL_1^2\Delta L) + k^4(34c\Delta L L_1^3) + k^3(22i\Delta L L_1^2 - 4ckL_1^3\Delta L))U + (12ic\Delta Lk^5L_1^4 + k^4(-17\Delta L L_1^3) + k^3(2kL_1^3\Delta L))U^2 - 4i\Delta Lk^5L_1^4U^3)U^2 - 2k^2L_1\Delta L(U^2)^2 + 3cik^2L_1^22\Delta L(U^2)^2 + 6c^2k^4L_1^3\Delta L(U^2)^2 + k^4(1 - 2c^2ikL_1^4\Delta L(U^2)^2) + U^3(-4ck^8L_1^3L_2 + k^7(-iL_1^3 - 3iL_1^2L_2) + (-6ik^5L_1^2 - 16ck^6L_1^3 + 10ic^2k^7L_1^4)R + 2ik^5L_1^4\Delta L(U^2)^2) + U^2(6c^2k^8L_1^3L_2 + k^6(-3L_1\Delta L) + k^7(3icL_1^3 + 9icL_1^2L_2) + (-4k^4L_1 + 18ic^3k^5L_1^2 + 24c^2k^6L_1^3 - 10ic^3k^7L_1^4)R + 3k^4L_1^32\Delta L(U^2)^2 - 3cik^5L_1^42\Delta L(U^2)^2) + U(k^5(3iL_1 + 1L_2) - 4c^3k^8L_1^3L_2 + k^6(6cL_1^2 + 6cL_1L_2) + k^7(-3ic^2L_1^3 - 9ic^2L_1^2L_2) + (ik^3 + 8ck^4L_1 - 18ic^2k^5L_1^2 - 16c^3k^6L_1^3 + 5ic^4k^7L_1^4)R - 6ik^3L_1^2\Delta L(U^2)^2 - 12c^4L_1^3\Delta L(U^2)^2 + 6c^2ik^5L_1^4\Delta L(U^2)^2) + (4ic^3\Delta Lk^5L_1^4 - 2k^2L_1\Delta L + k^2(10\Delta L L_1 + 4cikL_1^2\Delta L) - 18k^4c^2\Delta L L_1^3 + k^3(-24ic\Delta L L_1^2 + 2c^2kL_1^3\Delta L) + (-12ic^2\Delta Lk^5L_1^4 - 4k^3iL_1^2\Delta L + 36k^4c\Delta L L_1^3 + k^3(24i\Delta L L_1^2 - 4ckL_1^3\Delta L))U + (12ic\Delta Lk^5L_1^4 - 18k^4\Delta L L_1^3 + 2k^4L_1^3\Delta L)U^2 - 4i\Delta Lk^5L_1^4U^3)U^2 + (ik\Delta L + 3k^2cL_1\Delta L - 3k^3ic^2L_1\Delta L - k^4c^3L_1^3\Delta L - (3k^2L_1\Delta L + 6k^3icL_1^2\Delta L + 3k^4c^2L_1^4)U + (-3ik^3L_1^2\Delta L - 3k^4cL_1^3\Delta L)U^2 + k^4L_1^3\Delta L U^3)U^4$$

APENDICE II

En este apéndice se anexa el programa en Mathematica que se utilizó para graficar los resultados de los capítulos 4, 6 y 7.

"Introducción de valores iniciales"

```
Tau=N[1],alpha=1,R=3,dL=0.3,
gi=N[Sqrt[Tau Sin[alpha]/2]],
```

"Cálculo del flujo principal"

```
T1=(Cos[2*gi]+Cosh[2 gi])^-1,T2=(1-((Sin[2 gi]+Sinh[2 gi]\
)(2 gi*(Cos[2*gi]+Cosh[2 gi])))^(-1/2)),T=N[T1*T2],
U[y_]=N[T*(Sinh[gi*(1+y)]*Sin[gi*(1-y)]+Sinh[gi*(1-y)]\
*Sinh[gi*(1+y)])],W[y_]=N[T*(Cosh[gi*(1+y)]*Cos[gi*(1-y)]\
+Cosh[gi*(1-y)]*Cos[gi*(1+y)])-T*(Cos[2 gi]+Cosh[2 gi])],
```

"Cálculo a orden cero"

```
l1=Sin[gi] Sinh[gi] Sin[Th]+Cos[gi] Cosh[gi] Cos[Th]\
-Cos[Th],
l2=Sin[gi] Sinh[gi] Cos[Th]-Cos[gi] Cosh[gi] Sin[Th]\
+Sin[Th],
l3=-2 gi^2 Sin[gi] Sinh[gi],
l4=2 gi^2 Cos[gi] Cosh[gi],
cop=((l1*l3 +l2*l4)*U[0]+(l1 l4-l2*l3)*W[0])/\
(l3^2 +l4^2);
co=Sin[Th] W[0]+Cos[Th] U[0]-cop;
a1=1;b1=(l1 U[0]-l3 cop)/(l4 cop-l2 U[0]);M=b1;
psio[y_]:=a1*(1-Cos[gi (y-1)]*Cosh[gi (1-y)])+ \
b1*(Sin[gi (y-1)]*Sinh[gi (1-y)])
fio[y_]=-a1*(Sin[gi (y-1)]*Sinh[gi (1-y)])+ \
b1*(1-Cos[gi (y-1)]*Cosh[gi (1-y)])
ho[y_]:=a1+l1 b1*(1-Cosh[(1-l) gi (1-y)])

s=1/(2 gi^2)*(1-(Sinh[2 gi]+Sin[2 gi])/(2 gi \
(Cosh[2 gi]+Cos[2 gi]))^(1/2);
DE=1/(s);
Ek=N[(15/2)^(1/2)*Tan[alpha]*DE-Tau Cos[alpha]*W[0]],
gam=N[(Sin[Th]*fio[0]-Cos[Th]*psio[0])/cop];
go[y_]:=Tau/R*Cos[alpha]*(fio[y]-fio[0])-gam Ek/R,
```

“Cálculo de la solución particular”

$$\begin{aligned} a1 &= (M \sin[\text{Th}] - \cos[\text{Th}]); \\ a2 &= 1/2 \exp[-1 \text{ Th}] (1 - I M), \\ a3 &= 1/2 \exp[1 \text{ Th}] (1 + I M), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= -(1+I) T \text{ gi} (1+I M) * \cosh[\text{gi} (1+1)] * \exp[1 \text{ Th}], \\ A2 &= -(1+I) T \text{ gi} (1+I M) * \cosh[\text{gi} (1-1)] * \exp[-1 \text{ Th}], \\ A3 &= -2 T \text{ gi} (1+I) \cosh[\text{gi} (1+1)], \\ A4 &= \text{Tau} * \exp[-1 \text{ Th}] * \cos[\text{alpha}] / (2 R), \\ A5 &= 2 T \text{ gi}^2 (1+I M) * \cosh[\text{gi} (1+1)] * \exp[1 \text{ Th}] \\ & * (1-I) \text{ gi}, \\ A6 &= 2 T \text{ gi}^2 (1+I M) * \cosh[\text{gi} (1-1)] * \exp[-1 \text{ Th}] \\ & * (1+I) \text{ gi}, \\ A7 &= 2 T \text{ gi}^2 (1+I M) * \cosh[\text{gi} (1+1)] * \exp[1 \text{ Th}], \\ A8 &= 2 T \text{ gi}^2 (1+I M) * \cosh[\text{gi} (1-1)] * \exp[-1 \text{ Th}], \\ A9 &= A1 * (1-I) \text{ gi}, \\ A10 &= A2 * (1+I) \text{ gi}, \\ A11 &= (1-I) \text{ gi} T a2 \cosh[\text{gi} (1+1)], \\ A12 &= (1+I) \text{ gi} T a3 \cosh[\text{gi} (1+1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L1 &= T \sin[\text{Th}] * (\cos[2 \text{ gi}] + \cosh[2 \text{ gi}]); \\ L2 &= L1 / \sin[\text{Th}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n[1] &= A1 / (4 I \text{ gi}^2) \sinh[\text{gi} (1-1)]; \\ n[2] &= A1 / (24 \text{ gi}^3 (1+1)); \\ n[3] &= A2 / (8 \text{ gi}^3 (1+2 I)); \\ n[4] &= A2 / (8 \text{ gi}^3 (1+2)); \\ n[5] &= (L1 + \text{co}) * (1+I M) / (2 \text{ gi} (1-1)); \\ n[6] &= -a1 A3 / (4 I \text{ gi}^2); \\ n[7] &= a2 A3 / (8 \text{ gi}^3 (1+2 I)); \\ n[8] &= a2 A3 / (8 \text{ gi}^3 (1+2)); \\ n[9] &= a3 A3 / (4 I \text{ gi}^2) * \sinh[\text{gi} (1-1)]; \\ n[10] &= -a3 A3 / (24 \text{ gi}^3 (1+1)); \\ n[11] &= A4 * (M+I) / (4 \text{ gi}^3 (1-1)); \\ n[12] &= A4 * (M-I) / (4 I \text{ gi}^2); \\ n[13] &= A4 / (2 I \text{ gi}^2) * ((M+I) \cosh[\text{gi} (1+1)] + (M-I) * \\ & \cosh[\text{gi} (1-1)] - \text{gam Ek} \exp[-1 \text{ Th}] / (A4 R)); \\ n[14] &= a1 / (2 I \text{ gi}^2); \\ n[15] &= a2 / (4 \text{ gi}^3 (1-1)); \\ n[16] &= -a3 / (4 I \text{ gi}^2); \\ n[17] &= -2 A5 / (4 I \text{ gi}^2) \sinh[\text{gi} (1-1)]; \\ n[18] &= 2 A5 / (24 \text{ gi}^3 (1+1)); \\ n[19] &= -2 A6 / (8 \text{ gi}^3 (1+2 I)), \end{aligned}$$

$n[20] = 2 A6/(8 gi^3 (1-2)),$
 $n[21] = 2 a2 A3/(4 gi (1-2)),$
 $n[22] = 1 2 a2 A3/(4 gi (1+2)),$
 $n[23] = 2 a3 A3 Sinh[gi (1-1)]/2,$
 $n[24] = 2 a3 A3/(12 gi (1-1)),$
 $n[25] = A7/(4 1 gi^2) * Cosh[gi (1-1)],$
 $n[26] = -A7/(12 1 gi^2),$
 $n[27] = -A8/(4 gi^2 (1-2)),$
 $n[28] = -A8/(4 gi^2 (1+2)),$
 $n[29] = (1.1 + co) * I gi^2 (1-1 M)/(1-1),$
 $n[30] = a1 A3/2,$
 $n[31] = (1-1) a2 A3/(4 gi (1-2)),$
 $n[32] = (1-1) a2 A3/(4 gi (1+2)),$
 $n[33] = (1-1) a3 A3/(4 1 gi) Cosh[gi (1-1)],$
 $n[34] = (1-1) a3 A3/(12 1 gi),$
 $n[35] = -A9/(4 1 gi^2) * Cosh[gi (1-1)],$
 $n[36] = -A9/(12 1 gi^2),$
 $n[37] = A10/(4 gi^2 (1-2)),$
 $n[38] = -A10/(4 gi^2 (1+2)),$
 $n[39] = A11/(2 gi^2 (1-2)),$
 $n[40] = -A11/(2 gi^2 (1+2)),$
 $n[41] = A12/(2 1 gi^2) * Sinh[gi (1-1)],$
 $n[42] = A12/(6 1 gi^2),$
 $n[43] = -1.2 a2 * (1+1)/(4 gi),$
 $n[44] = 1 L2 a3/2,$

$H[y_] := R * (n[1] y + n[2] Cosh[gi (1-1) (1-2 y)] + n[3] Cosh[gi (1-1+2 1 y)] + n[4] Cosh[gi (1-1-2 y)] + n[5] y Sinh[gi (1-1) (1-y)] + n[6] y Sinh[gi (1-1) y] + n[7] Cosh[gi (1+1-2 1 y)] + n[8] * Cosh[gi (-1-1+2 y)] + n[9] y + n[10] Cosh[gi (1-1) (2 y-1)] + n[11] Sinh[gi (1+1) (1-y)] + n[12] y Cosh[gi (1-1) (1-y)] + n[13] y + 1 Tau Cos[alpha] * (n[14] y + n[15] Sinh[gi (1+1) (1-y)] + n[16] y Cosh[gi (1-1) (1-y)]) + dL * (n[17] y + n[18] Cosh[gi (1-1) (1-2 y)] + n[19] Cosh[gi (1-1+2 1 y)] + n[20] Cosh[gi (1-1-2 y)] + n[21] * Cosh[gi (1+1-2 1 y)] + n[22] Cosh[gi (-1-1+2 y)] + n[23] y + n[24] Cosh[gi (1-1) (2y-1)] + n[25] + n[26] Cosh[gi (1-1) (1-2 y)] + n[27] Cosh[gi (1-1+2 1 y)] + n[28] Cosh[gi (1-1-2 y)] + n[29] * y Sinh[gi (1-1) (1-y)] + n[30] y Sinh[gi (1-1) y] + n[31] Cosh[gi (1+1-2 1 y)] + n[32] Cosh[gi (-1-1-2 y)] + n[33] + n[34] Cosh[gi (1-1) (2y-1)] + n[35] + n[36] Cosh[gi (1-1) (1-2 y)] + n[37] * Cosh[gi (1-1-2 1 y)] + n[38] Cosh[gi (1-1-2 y)]$

$$-3*(n[39] \operatorname{Sinh}[gi (1+1-2 \cdot 1 y)]+n[40]^{\wedge} \operatorname{Sinh}[gi (-1-1+2 y)]+n[41]+n[42] \operatorname{Sinh}[gi (1-1) (2y-1)]+n[43] \operatorname{Sinh}[gi (1+1) (1-y)]+n[44]^* \operatorname{Cosh}[gi (1-1) (1-y)] y))$$

$$\begin{aligned} p[y_] &= \operatorname{Re}[f[y]], \\ f[y_] &= \operatorname{Im}[f[y]], \\ pp[y_] &= \operatorname{Re}[f'[y]], \\ fp[y_] &= \operatorname{Im}[f'[y]], \\ p2p[y_] &= \operatorname{Re}[f''[y]], \\ f2p[y_] &= \operatorname{Im}[f''[y]]. \end{aligned}$$

"Cálculo de c a primer orden"

$$\begin{aligned} r1 &= 1/(2 \operatorname{gi}) (pp[1]-fp[1])-p[1], \\ r2 &= 1/(2 \operatorname{gi}) (pp[1]+fp[1])-f[1], \\ r3 &= \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi}]/(2 \operatorname{gi}) ((\operatorname{Cos}[gi]-\operatorname{Sin}[gi]) pp[1]- \\ & \quad (\operatorname{Cos}[gi]+ \operatorname{Sin}[gi]) fp[1]), \\ r4 &= \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi}]/(2 \operatorname{gi}) ((\operatorname{Cos}[gi]-\operatorname{Sin}[gi]) fp[1]+ \\ & \quad (\operatorname{Cos}[gi]+ \operatorname{Sin}[gi]) pp[1]), \\ r5 &= -2 \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi}] \operatorname{Cos}[gi]+ \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi} (1+1)]^* \operatorname{Cosh}[gi (1+1)] \\ & \quad + \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi} (1-1)]^* \operatorname{Cosh}[gi (1-1)], \\ r6 &= 2 \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi}] \operatorname{Sin}[gi]- \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi} (1+1)]^* \operatorname{Cosh}[gi (1+1)] \\ & \quad + 1+ \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi} (1-1)]^* \operatorname{Cosh}[gi (1-1)], \\ r7 &= r1-r3+p[0], \\ r8 &= r2-r4+f[0], \\ r9 &= 2 \operatorname{gi}^2 \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi} (1+1)] \operatorname{Cosh}[gi (1+1)]-2 \operatorname{gi}^2 \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi} (1-1)] \operatorname{Cosh}[gi (1-1)], \\ r10 &= 2 \operatorname{gi}^2 \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi} (1+1)] \operatorname{Cosh}[gi (1+1)]+2 \operatorname{gi}^2 \operatorname{Exp}[-\operatorname{gi} (1-1)] \operatorname{Cosh}[gi (1-1)], \\ r11 &= (r7 \operatorname{Cos}[Th]-r8 \operatorname{Sin}[Th])-(p2p[0]-2 \operatorname{gi}^2 r4) \operatorname{cop}/U''[0], \\ r12 &= (r7 \operatorname{Cos}[Th]-r8 \operatorname{Sin}[Th])+(f2p[0]+2 \operatorname{gi}^2 r3) \operatorname{cop}/W''[0], \\ A11 &= -r6 \operatorname{Sin}[Th]-r5 \operatorname{Cos}[Th]+r9 \operatorname{cop}/U''[0], \\ A12 &= r5 \operatorname{Sin}[Th]-r6 \operatorname{Cos}[Th]+r10 \operatorname{cop}/U''[0], \\ A21 &= -r6 \operatorname{Sin}[Th]-r5 \operatorname{Cos}[Th]+r10 \operatorname{cop}/W''[0], \\ A22 &= r5 \operatorname{Sin}[Th]-r6 \operatorname{Cos}[Th]-r9 \operatorname{cop}/W''[0], \\ m &= (fio[0] \operatorname{Sin}[Th]-psio[0] \operatorname{Cos}[Th])/cop, \end{aligned}$$

$$c1 = N[-(r12 A12-r11 A22+A22 A11-A12 A21) \operatorname{Im}^*(-A12+A22)],$$

Donde se tiene la siguiente equivalencia de las variables con respecto a las utilizadas en la tesis

$g_i = \chi$
 $\text{Tau} = \tau$
 $\text{alpha} = \alpha$
 $R = R$
 $\text{Th} = \theta$
 $W[y] = W$
 $U[y] = U$
 $dL = \Delta L$
 $\text{psio} = \Psi_0$
 $\text{fio} = \Phi_0$
 $\text{co} = c_0$
 $\text{cop} = C'_0$
 $\text{Hp} = H_p$
 $\text{cl} = c_1$

BIBLIOGRAFÍA

- Benjamin, T. B. **Wave formation in Laminar Flow Down an Inclined Plane.** *J. Fluid Mechanics*, 2(554) 1957.
- Bird, R. B., Armstrong, R. B., Hassager, O. **Dynamics of Polymeric Liquids.** J. Wiley, New York, 1977.
- Currie, I. G. **Fundamental Mechanics of Fluids.** Mc Graw Hill, New York, 1974.
- Chandrasekhar S. **Hidrodinamic and Hidromagnetic Stability.** Oxford U. P., New York, 1961.
- Charwat, A. F., Kelly, R. E. and Gazley, C. **The flow and stability of thin liquid films on a rotating disk,** *J. Fluid Mech.* 53 (1972), pp 227-257.
- Darby, R. **Viscoelastic Fluids.** Marcel Dekker, inc., New York, 1976.
- Dávalos-Orozco, L. A. **Capillary instability due to a shear stress on the free surface of a viscoelastic fluid layer.** *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 45(1992) pp171-186.
- Dávalos-Orozco, L. A. y Ruiz-Chavarría, G. **Hydrodynamic stability of a fluid layer flowing down a rotating inclined plane.** *Phys. Fluids A*, 4(8) 1992, pp 1651-1665.
- Drazin, R. G. **Hidrodinamic Stability.** Cambridge University, Cambridge, 1979.
- Elmore, W. H. **Physics of Waves.** Dover, New York, 1969.
- Lai, W. **Stability of an elastico-viscous liquid film flowing down an inclined plane.** *Phys. Fluids*, 10(4) 1967, pp 844-847.
- Ruiz-Chavarría, G. **Estabilidad hidrodinámica de una capa de fluido descendiendo por un plano inclinado en rotación (tesis).** Fac. de Ciencias, UNAM, 1988.

- Shivamoggi, B. K. **Theoretical Fluid Dynamics**. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985
- Wolfram, S. **Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer**. Addison Wesley, Illinois, 1991
- Yih, Cha-Shun **Stability of liquid flow down an inclined plane**. *Phys. Fluids*, 6(3) 1980, pp 1585-1601
- Zahorski, S. **Mechanics of viscoelastic fluids**. Martinus Nijhoff Publishers, Warszawa, 1981