

28  
2Ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL DIAGRAMA DE BLASCHKE

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
M A T E M Á T I C O  
P R E S E N T A:  
GABRIEL RUIZ HERNANDEZ



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1996



FACULTAD DE CIENCIAS  
REGIÓN ESCOLAR

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

EL DIAGRAMA DE BLASCHKE

realizado por GABRIEL RUIZ HERNANDEZ

con número de cuenta 9262282-9 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT

Propietario

DR. VICTOR NEUMANN LARA

Propietario

DR. JAVIER BRACHO CARPIZO

Suplente

DR. JORGE LUIS AROCHA PEREZ

Suplente

DR. ALEJANDRO DIAZ BARRIGA CASALES

Consejo Departamental de Matemáticas

13/01/2010  
13/01/2010

# El Diagrama de Blaschke

Gabriel Ruiz Hernández

Director de Tesis:  
Dr. Luis Montejano Peimbert

Dedico esta tesis a mis padres, que con su esfuerzo y amor han hecho posible este sueño:

Antonio Ruiz Luna  
Catalina Henández González

A mis hermanos:

Margarita  
Elena  
Antonio  
Francisco  
Benito

Por su amistad y apoyo.

A mi familia, por todos aquellos momentos que unieron aún más nuestros corazones, por sus consejos, por ser la luz que iluminó el sendero de este soñador.

## AGRADECIMIENTOS

A través de estas líneas quiero expresar mi gratitud a todas aquellas personas que en algún momento me brindaron su apoyo en mi vida académica o social. La razón por la que no menciono a todos, se debe a razones de espacio. La ayuda que me prodigaron es invaluable y parte de mi agradecimiento será imitar esa actitud de ayuda.

Agradezco al Dr. Luis Montejano Peimbert, quien a pesar de tener un enorme compromiso de trabajo al frente del IMATE, acepto ser mi director de tesis. A través de su libro *la cara oculta de las esferas* percibí la belleza de la convexidad. Este libro junto con su tesis de licenciatura fueron determinantes para mi decisión de hacer mi tesis en Geometría Convexa. Gracias por la libertad que me concedió en este trabajo y la confianza que me brindó.

Gracias a todos mis sinodales, en especial al Dr. Alejandro Díaz Barriga C., por ser mi profesor en Querétaro, por sus consejos y apoyo en todo momento.

Gracias a todos mis profesores de Querétaro, en especial a Herminio Blancarte por su apoyo y consejos.

A mis padres, por su amor, su ejemplo. Este momento es un fruto de todos sus esfuerzos.

A mi mamá, por su callado ejemplo, por sus consejos, por sus nobles sentimientos que siempre han sido para mí una inmensa luz ante todas las oscuridades.

A mi papá, por sus consejos, por su infinito optimismo e infatigable deseo de trabajar.

A mis hermanos:

A Mago, por sus consejos, apoyo incondicional y por ser tan chambeadora.

A Lena, por aquellos invaluable consejos y ser una gran madre de familia.

A Toño, por su ejemplo y nobles sentimientos. Y por su valiosa ayuda en la escritura de esta tesis, para lo cual tuvo que aprender  $\LaTeX$ .

A Paco, por aquellos partidos de fútbol y aquellos problemas de matemáticas que resolvimos.

A Beni, por aquellos cuentos que nos contaba en su niñez, por ser un gran amigo y confidente.

A Marcos y a Willy por la gran amistad que nos une y por compartir conmigo muchos de sus sueños y metas. A los cuates del instituto por su ayuda en la edición y lectura de esta tesis.

Gracias a la Universidad Autónoma de Querétaro por haberme iniciado en el estudio de las Matemáticas.

Gracias a la UNAM, por haberme permitido caminar en su frondoso bosque de conocimientos, construido por tantos y tantos hombres.

Gracias a todos.

# Contenido

<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>1 Magnitudes Fundamentales de Masa</b>	<b>3</b>
1.1 Preliminares. . . . .	3
1.1.1 Definiciones. . . . .	3
1.1.2 Suma de Minkowski. . . . .	5
1.1.3 Cuerpos Paralelos. . . . .	7
1.2 Teorema de Descomposición. . . . .	9
1.2.1 Topología de $\mathcal{K}$ . . . . .	9
1.2.2 Simetrización de Steiner. . . . .	12
1.3 Teorema Esférico. . . . .	13
1.4 Magnitudes Fundamentales. . . . .	15
1.5 Magnitudes Fundamentales para Poliedros. . . . .	16
1.6 Formula de Steiner para Poliedros. . . . .	16
1.7 Magnitudes Fundamentales en General. . . . .	18
1.8 Formula de Steiner en General. . . . .	20
1.9 Magnitudes de Cuerpos Convexos Impropios. . . . .	23
<b>2 Teorema Funcional</b>	<b>25</b>
2.1 Funcionales. . . . .	25
2.2 Teorema Funcional. . . . .	30
2.3 Formulas de Cauchy para Proyecciones. . . . .	36



CONTENIDO

<b>3</b>	<b>Desigualdades de Minkowski</b>	<b>45</b>
3.1	Comportamiento de las Magnitudes Fundamentales Bajo la Simetrización de Steiner. . . . .	45
3.2	Simetrización de Steiner y Suma de Minkowski. . . . .	47
3.3	Familia Lineal de Cuerpos Convexos. . . . .	48
3.4	Desigualdades de Minkowski. . . . .	49
3.5	Cuerpos Extremales. . . . .	52
<b>4</b>	<b>Diagrama de Blaschke</b>	<b>57</b>
4.1	El Problema Principal. . . . .	57
4.2	El Diagrama de Blaschke . . . . .	58
4.3	Soluciones Relativas a la Frontera Desconocida. . . . .	70
4.4	Solucion relativa al problema principal. . . . .	73
<b>A</b>	<b>Simetrización de Steiner</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Volumenes Mixtos.</b>	<b>81</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>87</b>

**TESIS**

**COMPLETA**

## Lista de Figuras

1	Suma de Minkowski. . . . .	5
2	Poliedro paralelo. . . . .	10
3	Simetrización de Steiner. . . . .	12
4	Descomposición por una Sección Plana. . . . .	26
5	Descomposición en subpoligonos . . . . .	34
6	Proyección en la dirección $v$ . . . . .	37
7	Cono sólido. . . . .	40
8	Esfera con un truncamiento. . . . .	42
9	Cuerpo gorra. . . . .	55
10	Diagrama de Blaschke. . . . .	64
11	Esfera truncada. . . . .	67

*LISTA DE FIGURAS*

# INTRODUCCION

El espacio de los cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$ , es una gran fuente de misteriosos ejemplos que rompen nuestra intuición geométrica; como lo son los cuerpos de ancho constante [10].

Dentro de los innumerables estudios que se han hecho de este espacio, nos podemos encontrar el relacionado con ciertas magnitudes naturales asociadas a un cuerpo convexo, como lo son: el área y el perímetro en el caso plano; el volúmen, la superficie y la integral de curvatura media en el caso de cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^3$ . Todos hemos escuchado acerca de la desigualdad isoperimétrica del plano, pero muy poco acerca de las desigualdades de Minkowski para cuerpos convexos, las cuales no tienen que ver con otras famosas desigualdades de Minkowski.

El estudio de estas magnitudes, junto con otros conceptos de Álgebra Lineal, dio origen a la teoría de Brunn-Minkowski. Algunas ideas fundamentales de esta teoría, ya se encontraban ocultas en los trabajos de Brunn. El genio de Minkowski se dio cuenta de su importancia y los reinterpretó para ponerlos bajo la perspectiva correcta.

Si el lector desea una exposición más completa y precisa de esta teoría puede consultar el libro de Schneider [12].

Para la lectura de esta tesis no se requieren conocimientos muy avanzados.

En los primeros tres capítulos se exponen algunas de las ideas fundamentales de la teoría de Brunn-Minkowski.

En el cuarto capítulo, se hace uso de esta teoría para entender un problema planteado por W. Blaschke en 1916 y que aún continúa abierto. Además se exponen algunos resultados con relación a este problema y se enuncian conjeturas a las que ha dado lugar.



# CAPITULO 1

## Magnitudes Fundamentales de Masa

### 1.1 Preliminares.

En esta sección desarrollaremos las nociones elementales que usaremos a lo largo de la exposición.

Hablaremos en forma breve de la estructura geométrica y topológica de los cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^3$ .

#### 1.1.1 Definiciones.

**Definición 1.1.1** El conjunto  $A \subset \mathbb{R}^3$  es un conjunto convexo, si para todo  $P, Q \in A$ , se tiene que  $PQ \subset A$ , donde  $PQ = \{(1 - \lambda)P + \lambda Q \in \mathbb{R}^3 / \lambda \in [0, 1]\}$ , es el segmento cerrado de  $P$  a  $Q$ .

El conjunto  $B \subset \mathbb{R}^3$  es un cuerpo convexo, si es un conjunto convexo, acotado y cerrado. En caso de que el interior de  $B$  (al que denotaremos por  $B^0$ ) sea distinto del vacío, diremos que  $B$  es un cuerpo convexo propio, de lo contrario será impropio. El conjunto de todos los cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^3$  se denotará por  $\mathcal{K}$ .

**Definición 1.1.2** Dado  $A \in \mathcal{K}$ , definimos la función soporte de  $A$ ,  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , como  $h(A, v) = \sup\{(x, v) / x \in A\}$ .

Dado  $v \in S^2$  definimos el ancho de  $\mathbf{A}$  en la dirección  $v$ , denotado  $b(v)$ , como  $b(\mathbf{A}, v) = h(v) + h(-v)$ . El mínimo de los anchos de  $\mathbf{A}$  es alcanzado en alguna dirección y se conoce como el grueso de  $\mathbf{A}$ .

El plano soporte de  $\mathbf{A}$  en la dirección  $v \in S^2$ , es

$$E(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \langle x, v \rangle = h(v)\}.$$

La intersección  $\mathbf{A}(v) = \mathbf{A} \cap E(v)$  se conoce como subconjunto soporte de  $\mathbf{A}$  en la dirección  $v$ .

**Definición 1.1.3** El cuerpo  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  es de ancho constante si  $b(\mathbf{A}, v)$  tiene el mismo valor para todo  $v \in S^2$ , de esta manera diremos que  $b(\mathbf{A}, v)$  es el ancho de  $\mathbf{A}$ .

Dado cualquier  $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^3$ , denotaremos por  $\text{conv}(\mathbf{A})$  al elemento más pequeño de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $\mathbf{A}$ ,  $\text{conv}(\mathbf{A})$  también se conoce como el casco convexo de  $\mathbf{A}$ .

Se puede probar que  $\text{conv}(\mathbf{A}) = \bigcap \{\mathbf{B} \in \mathcal{K} / \mathbf{A} \subset \mathbf{B}\}$ .

A menos que se diga lo contrario, de aquí en adelante trabajaremos solamente con cuerpos convexos.

Dado  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ . La circunferencia de  $\mathbf{A}$  es la más pequeña de las esferas sólidas que contienen a  $\mathbf{A}$ , su radio lo llamaremos circunradio. Se puede probar fácilmente que la circunferencia es única.

La insfera de  $\mathbf{A}$  es una esfera sólida contenida en  $\mathbf{A}$  de radio máximo. La insfera no es única, pero su radio si lo es y se conoce como el inradio de  $\mathbf{A}$ .

**Definición 1.1.4** Una traslación por un vector  $v$  es una función  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $T(x) = x + v$ .

Una rotación con eje de rotación  $v \in S^2$  y ángulo de rotación  $\theta$  es una función  $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $R(x) = \cos \theta x + (1 - \cos \theta)\langle v, x \rangle v + (\sin \theta) v \times x$ .<sup>1</sup>

Una congruencia es la composición de una rotación seguida de una traslación  $T \circ R$ .

Dados  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$  decimos que son congruentes, denotado  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$  si  $\mathbf{A} = T \circ R(\mathbf{B})$  para algunas  $T$  y  $R$ .

<sup>1</sup>  $v \times x$  denota el producto cruz del vector  $v$  con el vector  $x$ .



### 1.1.2 Suma de Minkowski.

**Definición 1.1.5** Dadas  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ , se define la suma de Minkowski de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{a + b \in \mathbb{R}^3 / a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$ .

Directamente se puede probar que  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ .

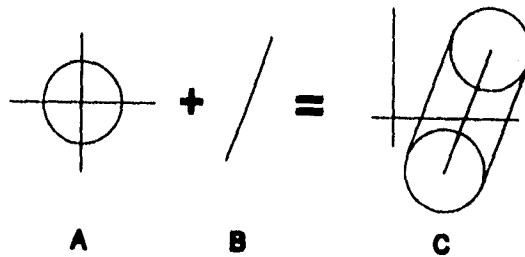


Figura 1: Suma de Minkowski.

**Teorema 1.1.1** Si  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  y  $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , entonces

- 1)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ .
- 2)  $\lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} = \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ , donde  $\lambda \mathbf{A} = \{\lambda a / a \in \mathbf{A}\}$ .
- 3) Si  $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ , entonces  $\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A} = (\lambda + \mu)\mathbf{A}$ .

*Demostración:* Sólo probaremos 3). Si  $\lambda = 0, \mu = 0$  no hay nada que probar.

Es claro que  $(\lambda + \mu)\mathbf{A} \subset \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$ . Afirmamos que  $\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A} \subset (\lambda + \mu)\mathbf{A}$ .

Sea  $\lambda a + \mu b \in \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$ ,  $a, b \in \mathbf{A}$ . Escribimos  $\lambda a + \mu b = (\lambda + \mu) \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b \right)$ , como  $\mathbf{A}$  es convexo, haciendo  $t = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \in [0, 1]$  obtenemos

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b = ta + (1 - t)b \in \mathbf{A}.$$

Por lo tanto  $\lambda a + \mu b \in (\lambda + \mu)\mathbf{A}$ . ■

**Teorema 1.1.2** Si  $T_1, T_2$  son traslaciones y  $R$  es una rotación entonces

- 1)  $R(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$ .
- 2)  $R(\lambda\mathbf{A}) = \lambda R(\mathbf{A})$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- 3)  $T_1(\mathbf{A}) + T_2(\mathbf{B}) = (T_1 + T_2)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ .
- 4)  $T_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = T_1(\mathbf{A}) + \mathbf{B} = \mathbf{A} + T_1(\mathbf{B})$ .

Demostración: La prueba se sigue directamente de las definiciones. ■

**Teorema 1.1.3** Sea  $T$  una traslación por un vector  $v$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $w \in S^2$ , entonces

$$h(\lambda\mathbf{A}, w) = \lambda h(\mathbf{A}, w), \quad h(T(\mathbf{A}), w) = \langle v, w \rangle + h(\mathbf{A}, w),$$

$$h(\mathbf{A} + \mathbf{B}, w) = h(\mathbf{A}, w) + h(\mathbf{B}, w).$$

Demostración: La prueba se sigue directamente de las definiciones. ■

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente corolario.

**Corolario 1.1.1** Sean  $T$  una traslación,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $w \in S^2$ . Para cualesquiera  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$  se tiene

$$h(\mathbf{A} + \mathbf{B}, w) = h(\mathbf{A}, w) + h(\mathbf{B}, w),$$

$$h(\lambda\mathbf{A}, w) = \lambda h(\mathbf{A}, w),$$

$$h(T(\mathbf{A}), w) = h(\mathbf{A}, w),$$

$$h(\mathbf{B}, w) \leq h(\mathbf{A}, w), \text{ si } \mathbf{B} \subset \mathbf{A}.$$

La demostración del siguiente teorema aunque no es complicada no será incluida en este texto.

**Teorema 1.1.4 (de Descomposición)**

Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$  poliedros convexos propios, tal que  $\bar{o} \in \mathbf{B}$  entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} \cup \bigcup_{i=1}^k \left( \mathbf{A}(v_i) + \text{conv} \left( \mathbf{B}(v_i) \cup \{\bar{o}\} \right) \right),$$

donde  $k$  denota el número finito de direcciones necesarias para la descomposición. ■

Algunos otros hechos interesantes, cuya demostración es fácil de obtener, son  
 a)  $\bigcup_{\alpha \in I} (\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{B}) = (\bigcup_{\alpha \in I} \mathbf{A}_\alpha) + \mathbf{B}$ , donde  $\{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia de cuerpos convexos.

b) Si  $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}' \subset \mathbf{B}'$  entonces  $\mathbf{A} + \mathbf{A}' \subset \mathbf{B} + \mathbf{B}'$ .

Denotaremos a la esfera sólida de radio  $\delta$  y con centro en el origen por  $K_\delta$ .

Observese que  $K_\delta + K_\sigma = K_{\delta+\sigma}$ , y que  $K_\delta = \delta K_1$ .

### 1.1.3 Cuerpos Paralelos.

**Definición 1.1.6** Sea  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ . Por el cuerpo paralelo exterior de  $\mathbf{A}$ , denotado  $\mathbf{A}_\delta$  ( $0 \leq \delta < \infty$ ), entendemos la unión de todas aquellas esferas sólidas de radio  $\delta$  cuyo centro se encuentra en  $\mathbf{A}$  (ver la figura 11).

El cuerpo paralelo interior de  $\mathbf{A}$ , denotado  $\mathbf{A}_{-\delta}$  ( $0 \leq \delta \leq \text{inradio de } \mathbf{A}$ ), es el conjunto formado por los centros de todas las esferas sólidas de radio  $\delta$  que están completamente contenidas en  $\mathbf{A}$ .

Obsérvese que si  $\delta > \text{inradio de } \mathbf{A}$ , entonces  $\mathbf{A}_{-\delta} = \emptyset$  ya que no existe una esfera de radio  $\delta$  contenida en  $\mathbf{A}$ . Además se puede probar que  $\mathbf{A}_\delta$  y  $\mathbf{A}_{-\delta}$  son convexos.

También es fácil ver que si  $\delta \geq 0$ , entonces

$$\mathbf{A}_\delta = \bigcup_{a \in \mathbf{A}} (a + K_\delta) = \left( \bigcup_{a \in \mathbf{A}} a \right) + K_\delta = \mathbf{A} + K_\delta,$$

(ver al final del teorema 1.1.4).

**Teorema 1.1.5** Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ . Entonces

$$1) (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})_\delta = \mathbf{A}_\delta \cap \mathbf{B}_\delta.$$

$$2) (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})_\delta = \mathbf{A}_\delta \cup \mathbf{B}_\delta.$$

**Demostración:** (1) Dado que  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subset \mathbf{B}$ , entonces

$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})_\delta \subset \mathbf{A}_\delta$ ,  $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})_\delta \subset \mathbf{B}_\delta$ , por lo tanto  $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})_\delta \subset \mathbf{A}_\delta \cap \mathbf{B}_\delta$ .

Sea  $T \in \mathbf{A}_\delta \cap \mathbf{B}_\delta$ , entonces existen  $P \in \mathbf{A}$ ,  $Q \in \mathbf{B}$  tales que  $T \in (P + K_\delta) \cap (Q + K_\delta)$ .

Para cualquier  $\lambda \in [0, 1]$   $\lambda T \in \lambda P + \lambda K_\delta$  y  $(1 - \lambda)T \in (1 - \lambda)Q + (1 - \lambda)K_\delta$ , entonces  $T \in \lambda P + (1 - \lambda)Q + K_\delta$ . Como  $P \in \mathbf{A}$ ,  $Q \in \mathbf{B}$  existe  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $\lambda P + (1 - \lambda)Q \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ . Por lo tanto  $T \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})_\delta$ .

(2)  $\mathbf{A} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ , entonces  $\mathbf{A}_\delta \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})_\delta$ ,  $\mathbf{B}_\delta \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})_\delta$ , por lo tanto  $\mathbf{A}_\delta \cup \mathbf{B}_\delta \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})_\delta$ .

Sea  $T \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})_\delta$ , entonces existe  $P \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  tal que  $T \in P + K_\delta$  y por lo tanto  $T \in \mathbf{A}_\delta \cup \mathbf{B}_\delta$ . ■

**Teorema 1.1.6** Sean  $\delta \geq 0$ ,  $\sigma \geq 0$ , entonces

$$1) (\mathbf{A}_\delta)_\sigma = \mathbf{A}_{\delta+\sigma} \quad 3) (\mathbf{A}_{-\delta})_{-\sigma} = \mathbf{A}_{-\delta-\sigma}$$

$$2) (\mathbf{A}_\delta)_{-\sigma} = \mathbf{A}_{\delta-\sigma} \quad 4) (\mathbf{A}_{-\delta})_\sigma \subset \mathbf{A}_{-\delta+\sigma}$$

Demostración: Solo probaremos una y las demás son análogas.

$$(\mathbf{A}_\delta)_\sigma = \mathbf{A}_\delta + K_\sigma = (\mathbf{A} + K_\delta) + K_\sigma = \mathbf{A} + (K_\delta + K_\sigma) = \mathbf{A} + K_{\delta+\sigma} = \mathbf{A}_{\delta+\sigma} \quad \blacksquare$$

Veamos que relación hay entre la función soporte de  $\mathbf{A}$  y la función soporte de  $\mathbf{A}_\delta$ .  $h(\mathbf{A}_\delta, w) = h(\mathbf{A} + K_\delta, w) = h(\mathbf{A}, w) + h(K_\delta, w)$  como  $K_\delta$  es una esfera sólida  $h(K_\delta, w) = \delta$ . Por lo tanto

$$h(\mathbf{A}_\delta, w) = h(\mathbf{A}, w) + \delta.$$

De aquí se sigue inmediatamente que

$$b(\mathbf{A}_\delta, w) = b(\mathbf{A}, w) + 2\delta.$$

Una observación importante es que si  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$  son de ancho constante entonces  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  también es de ancho constante, ya que

$$b(\mathbf{A} + \mathbf{B}, w) = b(\mathbf{A}, w) + b(\mathbf{B}, w) = \text{ancho de } \mathbf{A} + \text{ancho de } \mathbf{B}.$$

**Teorema 1.1.7** Si  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$  entonces  $\mathbf{A}_\delta \cong \mathbf{B}_\delta$ .

Demostración: Por hipótesis tenemos que  $\mathbf{A} = T \circ R(\mathbf{B})$  para alguna traslación  $T$  y una rotación  $R$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\delta &= (T \circ R(\mathbf{B}))_\delta = T \circ R(\mathbf{B}) + K_\delta = T(R(\mathbf{B}) + K_\delta) \\ &= T(R(\mathbf{B} + K_\delta)) = T \circ R(\mathbf{B}_\delta) \end{aligned}$$

■

Debido a que vamos a usarlo más tarde, debemos considerar en la siguiente sección el cuerpo paralelo exterior de un poliedro convexo.

## 1.2 Teorema de Descomposición.

### Teorema 1.2.1 (de Descomposición para Poliedros Paralelos)

Sea  $\mathbf{A}$  un poliedro convexo. Entonces

$$\mathbf{A}_\delta = \mathbf{A} \cup \left( \bigcup_{k=1}^r \mathbf{F}_\delta^k \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^p \mathbf{E}_\delta^i \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^q \mathbf{V}_\delta^j \right)$$

donde:

$\mathbf{F}_\delta^k$  = Prisma rectangular con base  $F^k$ .

$\mathbf{E}_\delta^i$  = El sector cilíndrico cuya altura es igual a la longitud de la arista  $E^i$  y cuya base es el sector con ángulo central  $\varphi_i$  (ángulo entre las caras adyacentes).

$\mathbf{V}_\delta^j$  = Es el sector de la esfera sólida  $K_\delta$  cuyo ángulo espacial esta formado por el vértice  $V^j$ .

$r$  = el número de caras de  $\mathbf{A}$ .

$p$  = el número de aristas de  $\mathbf{A}$ .

$q$  = el número de vertices de  $\mathbf{A}$ . ■

### 1.2.1 Topología de $\mathcal{K}$ .

**Definición 1.2.1** En  $\mathcal{K}$  se define una métrica, llamada la métrica de Hausdorff, de la siguiente manera: Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \inf \{ \delta > 0 / \mathbf{A} \subset \mathbf{B}_\delta \text{ y } \mathbf{B} \subset \mathbf{A}_\delta \}.$$

Se puede probar que con esta métrica  $\mathcal{K}$  es un espacio métrico compacto. Además como  $\mathcal{K}$  es conexo, entonces  $\mathcal{K}$  es un continuo.

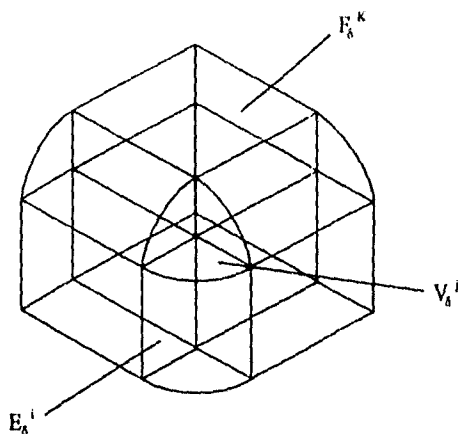


Figura 2: Poliedro paralelo.

La compacidad de  $\mathcal{K}$  se puede expresar en el siguiente teorema probado por primera vez por W. Blaschke.

**Teorema 1.2.2**

Sea  $L$  un conjunto no finito y acotado de cuerpos convexos (es decir, todos ellos están contenidos en una esfera sólida de radio suficientemente grande), entonces existe una sucesión  $\{A_n\} \subset L$  infinita que converge a un cuerpo convexo en  $L$ . ■

**Teorema 1.2.3 de Aproximación.**

[1] Sea  $A \in \mathcal{K}$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe un poliedro  $P$  tal que  $P \subset A \subset P_\epsilon$ . Por lo tanto se tiene que  $d(A, P) < \epsilon$ .

**2)** Sea  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ ,  $\bar{o} \in \mathbf{A}$ . Entonces para cada  $\lambda > 1$  existe un poliedro  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P} \subset \mathbf{A} \subset \lambda\mathbf{P}$ .

Demostración:

**1)**  $\mathbf{A}$  se puede cubrir con un número finito de esferas sólidas de radio  $\epsilon$  con centro en  $\mathbf{A}$ ; el casco convexo de los centros de estas esferas es el poliedro requerido.

**2)** Veamos primero el caso en el que  $\mathbf{A}$  es un cuerpo convexo propio.

Sea  $\lambda > 1$ . Como  $\bar{o} \in \mathbf{A}$ , existe  $\delta > 0$  y un cubo  $\mathbf{C}_{2\delta}$  de lado  $2\delta > 0$ , con centro en  $\bar{o}$  tal que  $\mathbf{C}_{2\delta} \subset \mathbf{A}$ . Sea  $K_\delta$  la inesfera de  $\mathbf{C}_{2\delta}$ . Sea  $0 < \epsilon \leq \delta(\lambda - 1)$ ; en base al inciso anterior, existe un poliedro  $\mathbf{Q}$  tal que  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{Q}_\epsilon$ . Construya  $\mathbf{P} = \text{conv}(\mathbf{Q} \cup \mathbf{C}_{2\delta})$ , entonces  $\mathbf{P}$  es un poliedro tal que  $K_\delta \subset \mathbf{P} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{P}_\epsilon$ . Sólo resta ver que  $\mathbf{A} \subset \lambda\mathbf{P}$ . La dilatación  $\lambda\mathbf{P}$  mueve cada cara lateral de  $\mathbf{P}$  hacia afuera en una distancia  $\Delta_p = (\lambda - 1)p$ , donde  $p$  es la distancia de la cara en cuestión a  $\bar{o}$ . Para ver la razón de la última afirmación, considere una cara de  $\mathbf{P}$ , sea  $p$  su distancia a  $\bar{o}$  y sea  $\Delta_p$  la distancia entre esta cara y la respectiva cara de  $\lambda\mathbf{P}$ . Observe que  $\Delta_p + p$  es la distancia de la respectiva cara de  $\lambda\mathbf{P}$  a  $\bar{o}$ . Por lo tanto  $\frac{\Delta_p + p}{p} = \lambda$ , de aquí que  $\Delta_p = (\lambda - 1)p$ . Para concluir, veamos que  $\mathbf{P}_\epsilon \subset \lambda\mathbf{P}$ . Sabemos que  $\epsilon \leq \delta(\lambda - 1)$ , pero  $p \geq \delta$ , ya que  $K_\delta \subset \mathbf{P}$ , por lo tanto  $\epsilon \leq (\lambda - 1)p = \Delta_p$ , entonces  $\mathbf{P}_\epsilon \subset \lambda\mathbf{P}$ .

Si  $\mathbf{A}$  es un cuerpo convexo impropio, entonces  $\mathbf{A}$  está contenido en un hiperplano con respecto al cual  $\bar{o}$  es un punto interior. La demostración se sigue ahora en forma análoga a la anterior. ■

**Corolario 1.2.1** Sea  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tal que  $K_\alpha \subset \mathbf{A} \subset K_\beta$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$  y  $\lambda > 1$ ,

$$1) \mathbf{A}_\epsilon \subset \left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \mathbf{A},$$

$$2) \lambda \mathbf{A} \subset \mathbf{A}_{(\lambda-1)\beta}.$$

Demostración:

$$1) K_\alpha \subset \mathbf{A}, \text{ o sea } \alpha K_1 \subset \mathbf{A} \iff K_1 \subset \frac{1}{\alpha} \mathbf{A} \iff \epsilon K_1 \subset \frac{\epsilon}{\alpha} \mathbf{A}, \text{ entonces}$$

$$\mathbf{A} + \epsilon K_1 \subset \mathbf{A} + \frac{\epsilon}{\alpha} \mathbf{A}, \text{ por lo tanto } \mathbf{A}_\epsilon \subset \left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \mathbf{A}.$$

$$2) \mathbf{A} \subset K_\beta = \beta K_1 \iff (\lambda - 1) \mathbf{A} \subset (\lambda - 1) \beta K_1 \iff \mathbf{A} + (\lambda - 1) \mathbf{A} \subset \mathbf{A} + (\lambda - 1) \beta K_1$$

$$\iff \lambda \mathbf{A} \subset \mathbf{A}_{(\lambda-1)\beta}.$$

### 1.2.2 Simetrización de Steiner.

El siguiente concepto debido a J Steiner es extraordinariamente fructífero. Vamos asociar a cada  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  un cuerpo simétrico  $\Sigma(\mathbf{A}) \in \mathcal{K}$ , con respecto a un plano dado  $\pi$ .

Construcción: Dados  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  y  $\pi$  un plano fijo (plano de simetría) construya  $\Sigma(\mathbf{A})$  de la siguiente manera:

Tomamos cualquier línea recta  $L$  perpendicular a  $\pi$ , tal que  $L \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$ , entonces  $L \cap \mathbf{A}$  es un punto o un segmento, trasladamos este punto o segmento dentro de  $L$  hasta que su punto medio este sobre  $\pi$  (haciendo este proceso para cada recta  $L$ , obtenemos  $\Sigma(\mathbf{A})$  (ver figura 3). Claramente  $\Sigma(\mathbf{A})$  es simétrico con respecto a  $\pi$ , pero además  $\Sigma(\mathbf{A})$  es un cuerpo convexo.

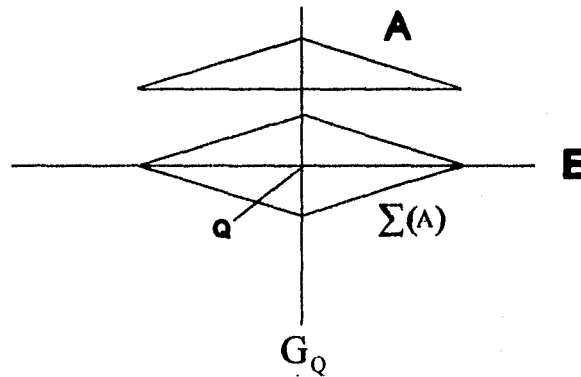


Figura 3: Simetrización de Steiner.

**Teorema 1.2.4** Si  $\mathbf{A}$  es un cuerpo convexo entonces  $\Sigma(\mathbf{A})$  también lo es.

Demostración: Si  $P \in \mathbf{A}$ , denotaremos por  $l_P$  la recta perpendicular a  $\pi$  y que pasa por  $P$ .

Sean  $P, Q \in \Sigma(\mathbf{A})$ ,  $P, Q \in T' = \text{conv}((\Sigma(\mathbf{A}) \cap l_P) \cup (\Sigma(\mathbf{A}) \cap l_Q))$  donde



$L_P, L_Q$  son las líneas ortogonales a  $\pi$  que pasan por P y Q.

Sea  $T = \text{conv}((A \cap L_P) \cup (A \cap L_Q))$ . Como  $A$  es convexo  $T \subset A$ . Además

$T' = \sum(T) \subset \sum(A)$ , (ya que si  $B \subset A$ ,  $\sum(B) \subset \sum(A)$ ).

Entonces  $T' \subset \sum(A)$ , por lo tanto el segmento PQ está contenido en  $\sum(A)$ , (ya que PQ está contenido en  $T'$ ). ■

En los dos teoremas siguientes se listan algunas propiedades de la simetrización de Steiner. Las pruebas están en el apéndice B.

**Teorema 1.2.5** Sean  $A, B \in \mathcal{K}$

- 1)  $\sum(A) \subset \sum(B)$ , si  $A \subset B$ .
- 2)  $\sum(K) = K$ , si el centro de  $K$  está en  $\pi$ .
- 3)  $\sum(\lambda A) = \lambda \sum(A)$ , si  $\bar{o} \in \pi$ .
- 4)  $\sum(A) + \sum(B) \subset \sum(A + B)$ , si  $\bar{o} \in \pi$ .
- 5)  $\sum(A)_\delta \subset \sum(A_\delta)$ , si  $\bar{o} \in \pi$ .

**Teorema 1.2.6 de Continuidad.**

- 1) Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente de cuerpos convexos con límite el cuerpo convexo  $A$ . Entonces  $\{\sum(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\sum(A)$ .
- 2) Sean  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dos sucesiones con límites  $A$  y  $B$  respectivamente, entonces la sucesión  $\{A_n + B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A + B$ .

## 1.3 Teorema Esférico.

**Teorema 1.3.1 Esférico I.**

Sea  $A$  un cuerpo convexo propio con  $\bar{o} \in A^d$ . Sea

$$\mathbf{R} = \left\{ B \in \mathcal{K} / B = \sum_n \circ \sum_{n-1} \circ \dots \circ \sum_1(A) \right\},$$

donde  $\sum_i$  es la simetrización de Steiner con respecto al plano  $E_i$ , a través del origen. Entonces existe una sucesión  $\{A_n\} \subset \mathbf{R}$  que converge a una esfera sólida  $K_r$ , para algún  $r$ .

Demostración:

Sea  $r = \inf \{R(\mathbf{A}') / \mathbf{A}' \in \mathbf{R}\}$ , donde  $R(\mathbf{A}')$  denota el radio de la esfera circunscrita a  $\mathbf{A}'$  con centro en  $\bar{o}$ .

Observe que como  $\bar{o} \in \mathbf{A}^0$ , existe una esfera sólida de radio  $\lambda > 0$  tal que  $K_\lambda \subset \mathbf{A}$ . Por lo tanto  $K_\lambda \subset \mathbf{A}'$ , para todo  $\mathbf{A}' \in \mathbf{R}$  (ya que  $\sum(K_\lambda) = K_\lambda$ ). De aquí que  $\lambda \leq R(\mathbf{A}')$  para todo  $\mathbf{A}' \in \mathbf{R}$ , entonces  $r$  existe. Como  $r$  es un punto de acumulación de  $\{R(\mathbf{A}') / \mathbf{A}' \in \mathbf{R}\}$ , existe una sucesión  $\{\mathbf{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\mathbf{R}$  tales que  $\{R(\mathbf{A}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $r$ .

Por la compacidad de  $\mathcal{K}$  y como  $\mathbf{R}$  es acotado podemos suponer que  $\{\mathbf{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un cuerpo convexo  $\mathbf{A}_0$ . La funcional  $R$  es continua, de aquí que  $R(\mathbf{A}_0) = r$ .

$\mathbf{A}_0$  es un cuerpo convexo propio ya que  $K_\lambda \subset \mathbf{A}_n$  (para todo  $n$ ).

Vamos a probar que  $\mathbf{A}_0 = K_r$ . Supongamos que no,  $\mathbf{A}_0 \subset K_r$  entonces  $\mathbf{A}_0 \not\subset K_r$ . Se sigue que existe un pequeño disco  $T$  de radio positivo en la superficie de  $K_r$  que no intersecta a  $\mathbf{A}_0$ . Cubramos ahora la superficie de  $K_r$  con un número finito de discos  $T, T_1, \dots, T_k$  congruentes con  $T$ . Sea  $\sum_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) la simetrización dada por un plano de simetría  $E_i$  por el origen y proyectemos ortogonalmente  $T_i$  en  $T$ . Por lo tanto  $T$  y  $T_i$  son ajenos a  $\sum_1(\mathbf{A}_0)$ , ya que para cualquier línea de simetría  $G$  ortogonal a  $E_1$  que pasa por  $T$  (y por tanto por  $T_1$ ), el intervalo  $\mathbf{A}_0 \cap G$  es más corto que  $K_r \cap G$ . Finalmente sea  $\sum'(\mathbf{A}_0) = \sum_k$  o ... o  $\sum_1(\mathbf{A}_0)$ , entonces la superficie de  $K_r$  es ajena a  $\sum'(\mathbf{A}_0)$ . Notemos que  $\mathbf{A}_0 \notin \mathbf{R}$ , pero como  $\{\mathbf{A}_n\}$  converge a  $\mathbf{A}_0$ ,  $\{\sum'(\mathbf{A}_n)\}$  converge a  $\sum'(\mathbf{A}_0)$  (teorema de continuidad), entonces existe  $\mathbf{A}_m \in \mathbf{R}$  tal que  $\sum'(\mathbf{A}_m)$  es disjunta de la superficie de  $K_r$ , y claramente  $R(\sum'(\mathbf{A}_m)) < r$  pero  $\sum'(\mathbf{A}_m) \in \mathbf{R}$  lo cual contradice el hecho de que  $r = \inf \{R(\mathbf{A}') / \mathbf{A}' \in \mathbf{R}\}$ .

Por lo tanto  $\mathbf{A} = K_r$  y  $\{\mathbf{A}_n\}$  converge a  $K_r$ . ■

**Teorema 1.3.2** (Esférico 2).

Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo propio con  $\bar{o} \in \mathbf{A}^0$ . Sea  $\mathbf{R}$  el conjunto de todos los cuerpos convexos  $\mathbf{A}'$  obtenidos mediante un número finito de sumas de Minkowski de la forma

$$\mathbf{A}' = \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{A}^{\delta_1} + \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{A}^{\delta_2} + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{A}^{\delta_k},$$

en donde  $\delta_i, i = 1, \dots, k$ , denota una rotación con centro en  $\bar{o}$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces

existe una sucesión  $\{A_n\} \subset \mathbb{R}$  que converge a una esfera sólida  $K_0$  con centro en  $\bar{o}$ .

La prueba de este teorema es esencialmente la prueba del teo. anterior.

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente

**Corolario 1.3.1** Sea  $A' \in \mathbb{R}$ , con  $\mathbb{R}$  como en el teorema anterior. Entonces  $\bar{b}(A)$  es igual al diámetro de  $K_0$ .

Demostración:

Por definición  $\bar{b}(A) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^1} b(A, v) dv$ , donde  $b(A, v)$  es el ancho del cuerpo  $A$  en la dirección  $v$ , ver 1.1.2. Entonces usando la continuidad de  $b(A, v)$  vista como función de  $S^1$  en  $\mathbb{R}$  y el corolario 1.1.1, obtenemos el resultado deseado. ■

## 1.4 Magnitudes Fundamentales.

A cualquier cuerpo convexo  $A$  se le pueden asociar diferentes números reales, como son su volúmen, su superficie, su diámetro, su grueso etc.

Estas cantidades son muy geométricas; sin embargo también le podemos asociar su curvatura total, su integral de curvatura media, las cuales a pesar de no ser muy intuitivas, destacan por su gran importancia en el estudio de los cuerpos convexos.

**Definición 1.4.1** Sea  $A$  un cuerpo convexo. Las magnitudes fundamentales de masa de  $A$  son:

$$V = V(A) = \text{Volúmen},$$

$$S = S(A) = \text{Superficie},$$

$$M = M(A) = \text{Integral de Curvatura Media},$$

$$C = C(A) = \text{Curvatura Total}.$$

Obsérvese que la magnitud fundamental de masa  $C$  es una magnitud que para cuerpos convexos es una constante igual a  $4\pi$ , esto es debido a un teorema (curvatura integral) de K.F Gauss. Este hecho nos puede hacer pensar que esta magnitud  $C$  no es muy importante, pero más adelante veremos que no es así.

Ahora vamos a definir en forma más precisa estas cuatro magnitudes fundamentales de masa.

Primero lo haremos para poliedros convexos y usando aproximaciones obtendremos las definiciones en general.

## 1.5 Magnitudes Fundamentales para Poliedros.

**Definición 1.5.1** Sea  $\mathbf{A}$  un poliedro convexo .

$V(\mathbf{A}), S(\mathbf{A})$  se definen de manera usual.

$$M(\mathbf{A}) = 1/2 \sum s_i \varphi_i$$

en donde la suma se extiende sobre todas las aristas  $s_i$  de longitud  $s_i$  y en donde  $\varphi_i$  denota el ángulo entre los vectores normales a las dos caras del poliedro, adyacentes a  $s_i$ .

$C(\mathbf{A}) = \sum \theta_j$ , en donde la suma se extiende sobre todas las vértices,  $P_j$ , del poliedro y en donde  $\theta_j$  denota el ángulo espacial del sector que se forma a través de los vectores normales en  $P_j$ .

Obsérvese que  $C(\mathbf{A}) = 4\pi$ .

La siguiente fórmula fue dada por J. Steiner y su importancia se destacará en lo sucesivo.

## 1.6 Formula de Steiner para Poliedros.

**Teorema 1.6.1** Sea  $\mathbf{A}$  un poliedro convexo . Entonces

$$V(\mathbf{A}_\delta) = V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A})$$

Demostración:

En virtud del teorema de descomposición

$$\mathbf{A}_\delta = \mathbf{A} \cup \left( \bigcup_{k=1}^r \mathbf{F}_\delta^k \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^p \mathbf{E}_\delta^i \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^q \mathbf{V}_\delta^j \right)$$

entonces

$$\begin{aligned} V(\mathbf{A}_\delta) &= V\left(\mathbf{A} \cup \left( \bigcup_{k=1}^r \mathbf{F}_\delta^k \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^p \mathbf{E}_\delta^i \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^q \mathbf{V}_\delta^j \right)\right) \\ &= V(\mathbf{A}) + V\left(\bigcup_{k=1}^r \mathbf{F}_\delta^k\right) + V\left(\bigcup_{i=1}^p \mathbf{E}_\delta^i\right) + V\left(\bigcup_{j=1}^q \mathbf{V}_\delta^j\right) \\ &= V(\mathbf{A}) + \sum_{k=1}^r V(\mathbf{F}_\delta^k) + \sum_{i=1}^p V(\mathbf{E}_\delta^i) + \sum_{j=1}^q V(\mathbf{V}_\delta^j) \\ &= V(\mathbf{A}) + \sum_{k=1}^r \delta \text{área}(\mathbf{F}^k) + \sum_{i=1}^p \frac{\theta \delta^2}{2} s^i + \frac{\delta^3}{3} C \\ &= V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

■

Otras propiedades de estas magnitudes que utilizaremos se resumen en el siguiente corolario.

**Corolario 1.6.1** Sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  poliedros convexos tal que  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$  y sea  $\lambda > 0$ , entonces

i)  $V(\mathbf{A}) \geq 0$ ,  $S(\mathbf{A}) \geq 0$ ,  $M(\mathbf{A}) \geq 0$ .

ii)  $V(\mathbf{A}) \geq V(\mathbf{B})$ ,  $S(\mathbf{A}) \geq S(\mathbf{B})$ ,  $M(\mathbf{A}) \geq M(\mathbf{B})$ .

iii)  $V(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^3 V(\mathbf{A})$ ,  $S(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^2 S(\mathbf{A})$ ,  $M(\lambda \mathbf{A}) = \lambda M(\mathbf{A})$ .

Demostración: sólo probaremos que  $M(\mathbf{A}) \geq M(\mathbf{B})$  y iii).

Como  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ , entonces para todo  $\delta \geq 0$ ,  $\mathbf{B}_\delta \subset \mathbf{A}_\delta$ ,

de aquí que  $V(\mathbf{B}_\delta) \leq V(\mathbf{A}_\delta)$ ; entonces

$$V(\mathbf{B}) + \delta S(\mathbf{B}) + \frac{\delta^2}{3} C \leq V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C,$$

haciendo tender  $\delta \rightarrow \infty$ , obtenemos  $M(\mathbf{B}) \leq M(\mathbf{A})$

ahora vamos a probar iii).

Sea  $T$  la transformación :  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  
 $T(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (u, v, w)$ , de donde  $T(\mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}$ . Entonces

$$\begin{aligned} V(\lambda \mathbf{A}) &= \int \int \int_{\lambda \mathbf{A}} 1 \, du \, dv \, dw = \int \int \int_{\mathbf{A}} |DT| \, dx \, dy \, dz \\ &= \int \int \int_{\mathbf{A}} \lambda^3 \, dx \, dy \, dz = \lambda^3 V(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Para probar que:  $S(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^2 S(\mathbf{A})$ , basta ver que para un polígono convexo plano  $\mathbf{A}'$ , el área  $(\lambda \mathbf{A}')$  es igual a  $(\lambda^2 \text{área} \mathbf{A}')$ , lo cual se demuestra de manera similar al hecho anterior, es decir

Sea  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $F(x, y) = (\lambda x, \lambda y) = (u, v)$ , en donde  $F(\mathbf{A}') = \lambda \mathbf{A}'$

$$\text{área}(\lambda \mathbf{A}') = \int \int_{\lambda \mathbf{A}'} du \, dv = \int \int_{\mathbf{A}'} |DF| \, dx \, dy = \lambda^2 \text{área}(\mathbf{A}')$$

por lo que

$$S(\lambda \mathbf{A}) = \sum_i \text{área}(\lambda F_i) = \sum_i \lambda^2 \text{área}(F_i) = \lambda^2 S(\mathbf{A}).$$

Por último, observe que los ángulos entre los vectores normales entre dos caras adyacentes de  $\mathbf{A}$  es igual al ángulo respectivo en  $\lambda \mathbf{A}$ , y si una arista de  $\mathbf{A}$  tiene longitud  $s_i$ , entonces la arista respectiva de  $\lambda \mathbf{A}$  tiene longitud  $\lambda s_i$ ; por lo que  $M(\lambda \mathbf{A}) = \lambda M(\mathbf{A})$ . ■

## 1.7 Magnitudes Fundamentales en General.

Ahora procederemos a extender las definiciones de las magnitudes fundamentales de masa a cualquier cuerpo convexo y también la fórmula de Steiner.

**Definición 1.7.1** Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo cualquiera y sea  $\mathbf{P}$  un poliedro convexo.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{A}) &= \inf\{V(\mathbf{P})/\mathbf{A} \subset \mathbf{P}\} & \underline{V}(\mathbf{A}) &= \sup\{V(\mathbf{P})/\mathbf{P} \subset \mathbf{A}\} \\ \dot{S}(\mathbf{A}) &= \inf\{S(\mathbf{P})/\mathbf{A} \subset \mathbf{P}\} & \underline{S}(\mathbf{A}) &= \sup\{S(\mathbf{P})/\mathbf{P} \subset \mathbf{A}\} \\ \bar{M}(\mathbf{A}) &= \inf\{M(\mathbf{P})/\mathbf{A} \subset \mathbf{P}\} & \underline{M}(\mathbf{A}) &= \sup\{M(\mathbf{P})/\mathbf{P} \subset \mathbf{A}\} \end{aligned}$$

Sea  $\mathbf{Q}_0$  un poliedro fijo tal que  $\mathbf{Q}_0 \subset \mathbf{A}$ .

Entonces para todo poliedro convexo  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{A} \subset \mathbf{P}$  tenemos que:

$V(\mathbf{Q}_0) \leq V(\mathbf{P})$ ,  $S(\mathbf{Q}_0) \leq S(\mathbf{P})$ ,  $M(\mathbf{Q}_0) \leq M(\mathbf{P})$ , por lo tanto, los ínfimos existen.

Sea  $\mathbf{P}_0$ , un poliedro fijo que contenga a  $\mathbf{A}$ , entonces para todo poliedro convexo  $\mathbf{Q}$  tal que  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A}$

$V(\mathbf{Q}) \leq V(\mathbf{P}_0)$ ,  $S(\mathbf{Q}) \leq S(\mathbf{P}_0)$ ,  $M(\mathbf{Q}) \leq M(\mathbf{P}_0)$ ,  
por lo tanto los supremos existen.

Es claro que  $\underline{V}(\mathbf{A}) \leq \bar{V}(\mathbf{A})$ ,  $\underline{S}(\mathbf{A}) \leq \bar{S}(\mathbf{A})$ ,  $\underline{M}(\mathbf{A}) \leq \bar{M}(\mathbf{A})$ .

A continuación vamos a probar que:

$$\bar{V}(\mathbf{A}) \leq \underline{V}(\mathbf{A}), \quad \bar{S}(\mathbf{A}) \leq \underline{S}(\mathbf{A}), \quad \bar{M}(\mathbf{A}) \leq \underline{M}(\mathbf{A}).$$

Por el teorema de aproximación: (teorema: 1.2.3.), para todo  $\lambda > 0$ , existe un poliedro  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P} \subset \mathbf{A} \subset \lambda\mathbf{P}$ . Entonces

$$\bar{V}(\mathbf{A}) \leq V(\lambda\mathbf{P}) = \lambda^3 V(\mathbf{P}) < \lambda^3 \underline{V}(\mathbf{A})$$

(para toda  $\lambda > 1$ ).

De aquí que  $\bar{V}(\mathbf{A}) < \lambda^3 \underline{V}(\mathbf{A})$ , para todo  $\lambda > 1$ .

Por lo tanto  $\bar{V}(\mathbf{A}) \leq \underline{V}(\mathbf{A})$ . Finalmente obtenemos:

$$\bar{V}(\mathbf{A}) = \underline{V}(\mathbf{A}). \text{Análogamente}$$

$$\bar{S}(\mathbf{A}) \leq \underline{S}(\mathbf{A}), \quad \bar{M}(\mathbf{A}) \leq \underline{M}(\mathbf{A}).$$

**Definición 1.7.2** Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} V(\mathbf{A}) &:= \underline{V}(\mathbf{A}) = \bar{V}(\mathbf{A}), \\ S(\mathbf{A}) &:= \underline{S}(\mathbf{A}) = \bar{S}(\mathbf{A}), \\ M(\mathbf{A}) &:= \underline{M}(\mathbf{A}) = \bar{M}(\mathbf{A}), \\ C(\mathbf{A}) &:= 4\pi. \end{aligned}$$

**Teorema 1.7.1** De aproximación simultánea.

Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo y sea  $\epsilon > 0$ .

Entonces existen poliedros convexos  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  tales que  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{P}$  y las siguientes desigualdades se dan simultáneamente:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{P}) - V(\mathbf{A}) < \epsilon, \quad S(\mathbf{P}) - S(\mathbf{A}) < \epsilon, \quad M(\mathbf{P}) - M(\mathbf{A}) < \epsilon \\ V(\mathbf{A}) - V(\mathbf{Q}) < \epsilon, \quad S(\mathbf{A}) - S(\mathbf{Q}) < \epsilon, \quad M(\mathbf{A}) - M(\mathbf{Q}) < \epsilon \end{aligned}$$

Demostración: De la definición de las magnitudes fundamentales se sigue que existen poliedros convexos  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  tales que

$$V(\mathbf{P}_1) - V(\mathbf{A}) < \epsilon, \quad S(\mathbf{P}_2) - S(\mathbf{A}) < \epsilon, \quad M(\mathbf{P}_3) - M(\mathbf{A}) < \epsilon$$

y poliedros convexos  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$  tales que

$$V(\mathbf{A}) - V(\mathbf{Q}_1) < \epsilon, \quad S(\mathbf{A}) - S(\mathbf{Q}_2) < \epsilon, \quad M(\mathbf{A}) - M(\mathbf{Q}_3) < \epsilon$$

Sea  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 \cap \mathbf{P}_3$  entonces

$$\begin{aligned} V(\mathbf{P}) - V(\mathbf{A}) &\leq V(\mathbf{P}_1) - V(\mathbf{A}) < \epsilon \\ S(\mathbf{P}) - S(\mathbf{A}) &\leq S(\mathbf{P}_2) - S(\mathbf{A}) < \epsilon \\ M(\mathbf{P}) - M(\mathbf{A}) &\leq M(\mathbf{P}_3) - M(\mathbf{A}) < \epsilon \end{aligned}$$

Sea  $\mathbf{Q} = \text{conv}(\mathbf{Q}_1 \cup \mathbf{Q}_2 \cup \mathbf{Q}_3)$  entonces

$$\begin{aligned} V(\mathbf{A}) - V(\mathbf{Q}) &< V(\mathbf{A}) - V(\mathbf{Q}_1) < \epsilon \\ S(\mathbf{A}) - S(\mathbf{Q}) &< S(\mathbf{A}) - S(\mathbf{Q}_2) < \epsilon \\ M(\mathbf{A}) - M(\mathbf{Q}) &< M(\mathbf{A}) - M(\mathbf{Q}_3) < \epsilon \end{aligned}$$

**1.8** Formula de Steiner en General.

En esta sección vamos a verificar que la fórmula de Steiner es válida para cualquier cuerpo convexo.

**Teorema 1.8.1** Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo cualquiera, entonces

$$V(\mathbf{A}_\delta) = V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}).$$



*Demostración:* Sean  $\delta > 0$  y  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo cualquiera. Considere dos poliedros convexos  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  tal que  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}_\delta \subset \mathbf{P}$ , entonces  $\mathbf{Q}_\delta \subset \mathbf{P}$  y usando Steiner para poliedros obtenemos

$$V(\mathbf{Q}) + \delta S(\mathbf{Q}) + \delta^2 M(\mathbf{Q}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{Q}) = V(\mathbf{Q}_\delta) \leq V(\mathbf{P}) ,$$

Esto es válido para todo poliedro  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A}$ , en particular para uno como en el teorema anterior en donde para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A}$  tal que

$V(\mathbf{A}) - V(\mathbf{Q}) < \epsilon$ ,  $S(\mathbf{A}) - S(\mathbf{Q}) < \epsilon$ ,  $M(\mathbf{A}) - M(\mathbf{Q}) < \epsilon$ . entonces

$$(V(\mathbf{A}) - \epsilon) + \delta(S(\mathbf{A}) - \epsilon) + \delta^2(M(\mathbf{A}) - \epsilon) + \frac{\delta^3}{3}C(\mathbf{A}) < V(\mathbf{Q}_\delta) \leq V(\mathbf{P})$$

$$V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}) - (1 + \delta + \delta^2)\epsilon < V(\mathbf{P})$$

entonces  $V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}) \leq V(\mathbf{P})$ , se cumple para todo poliedro  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{A}_\delta \subset \mathbf{P}$ , en particular para un  $\mathbf{P}$  tal que  $V(\mathbf{P}) - V(\mathbf{A}_\delta) < \epsilon$ , donde  $\epsilon > 0$ , la existencia de tal poliedro es garantizada por el teorema anterior.

Entonces  $V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}) \leq V(\mathbf{P}) < V(\mathbf{A}_\delta) + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ , lo cual implica que

$$V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}) \leq V(\mathbf{A}_\delta)$$

Para la desigualdad en la otra dirección consideremos dos poliedros  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  tal que  $\mathbf{P} \subset \mathbf{A}_\delta$  y  $\mathbf{A} \subset \mathbf{Q}$ , entonces  $\mathbf{P} \subset \mathbf{Q}_\delta$ ; usando Steiner para poliedros obtenemos que

$$V(\mathbf{P}) \leq V(\mathbf{Q}_\delta) = V(\mathbf{Q}) + \delta S(\mathbf{Q}) + \delta^2 M(\mathbf{Q}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{Q})$$

para todo poliedro  $\mathbf{Q}$  tal que  $\mathbf{A} \subset \mathbf{Q}$ , en particular para un  $\mathbf{A} \subset \mathbf{Q}$  como en el teorema anterior: es decir existe  $\mathbf{A} \subset \mathbf{Q}$  tal que para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$V(\mathbf{Q}) - V(\mathbf{A}) < \epsilon , \quad S(\mathbf{Q}) - S(\mathbf{A}) < \epsilon , \quad M(\mathbf{Q}) - M(\mathbf{A}) < \epsilon$$

por lo tanto

$$V(\mathbf{P}) \leq V(\mathbf{Q}_\delta) < V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}) + \epsilon(1 + \delta + \delta^2)$$

$$V(\mathbf{P}) \leq V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A})$$

para todo poliedro tal que  $\mathbf{P} \subset \mathbf{A}_\delta$ , en particular para un  $\mathbf{P} \subset \mathbf{A}_\delta$  tal que  $V(\mathbf{A}_\delta) - V(\mathbf{P}) < \epsilon$  y para todo  $\epsilon > 0$ . Entonces

$$V(\mathbf{A}_\delta) - \epsilon < V(\mathbf{P}) \leq V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A})$$

$$V(\mathbf{A}_\delta) \leq V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A})$$

Otras fórmulas análogas para  $S_\delta$ ,  $M_\delta$  y  $C_\delta$  se enuncian a continuación.

**Corolario 1.8.1** Dado un cuerpo convexo  $\mathbf{A}$  se tiene que

$$S_\delta = F + 2M_\delta + C\delta^2.$$

$$M_\delta = M + \delta C.$$

$$C_\delta = C.$$

Demostración: Dado que  $(\mathbf{A}_\delta)_\gamma = \mathbf{A}_{\delta+\gamma}$ , se tiene  $V((\mathbf{A}_\delta)_\gamma) = V(\mathbf{A}_{\delta+\gamma})$ .

$$V(\mathbf{A}_\delta) + \gamma S(\mathbf{A}_\delta) + \gamma^2 M(\mathbf{A}_\delta) + \frac{\gamma^3}{3} C(\mathbf{A}_\delta) =$$

$$\begin{aligned} &= V(\mathbf{A}) + (\delta + \gamma)S(\mathbf{A}) + (\delta + \gamma)^2 M(\mathbf{A}) + \frac{(\delta + \gamma)^3}{3} C(\mathbf{A}) \\ &= [V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^2}{3} C(\mathbf{A})] + \gamma(S(\mathbf{A}) + 2\delta M(\mathbf{A}) + \delta^2 C(\mathbf{A})) \\ &\quad + \gamma^2 [M(\mathbf{A}) + \delta C(\mathbf{A})] + \frac{\gamma^3}{3} C(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

El primer y el tercer polinomio son polinomios de grado 3 con variable  $\gamma$ , por lo tanto los coeficientes son iguales.

Observe que también se obtiene

$$S_\delta = V'_\delta, \quad M_\delta = \frac{1}{2} S'_\delta, \quad C_\delta = M'_\delta$$

Donde ( ' ) significa la derivada con respecto de  $\delta$ .

Más adelante se analizarán cálculos de las magnitudes fundamentales de masa para algunos cuerpos convexos en general.

## 1.9 Magnitudes de Cuerpos Convexos Impropios.

Ahora vamos analizar que significan las cuatro magnitudes fundamentales de masa cuando el cuerpo convexo tiene interior vacío. Por ejemplo si esta contenido en un plano o en una recta.

**Notación:**

Si  $\mathbf{A}$  es un cuerpo convexo impropio, denotamos en este caso

$$a = a(\mathbf{A}) = \text{área de } \mathbf{A},$$

$$p = p(\mathbf{A}) = \text{perímetro de } \mathbf{A},$$

$$l = l(\mathbf{A}) = \text{longitud de } \mathbf{A}.$$

**Teorema 1.9.1** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  entonces*

1) *Si  $\mathbf{A}$  está contenido en un plano y tiene interior relativo no vacío, sus magnitudes son*

$$V(\mathbf{A}) = 0, S(\mathbf{A}) = 2a(\mathbf{A}), M(\mathbf{A}) = \frac{\pi}{2}p(\mathbf{A}), C(\mathbf{A}) = 4\pi.$$

2) *Si  $\mathbf{A}$  es un intervalo, sus magnitudes son*

$$V(\mathbf{A}) = 0, S(\mathbf{A}) = 0, M(\mathbf{A}) = \pi l(\mathbf{A}), C(\mathbf{A}) = 4\pi.$$

3) *Si  $\mathbf{A}$  es un punto, sus magnitudes son*

$$V(\mathbf{A}) = S(\mathbf{A}) = M(\mathbf{A}) = 0, C(\mathbf{A}) = 4\pi.$$

**Demostración:**

1) *Sea  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de polígonos convexos tal que  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge al cuerpo convexo  $\mathbf{A}$ . Construya el cilindro recto  $\mathbf{Q}_n$  de  $\mathbf{P}_n$  con altura  $\frac{1}{n}$ , entonces  $\mathbf{Q}_n$  converge a  $\mathbf{A}$ . Las magnitudes de  $\mathbf{Q}_n$  son,*

$$V(\mathbf{Q}_n) = a(\mathbf{P}_n)\frac{1}{n}, \quad S(\mathbf{Q}_n) = p(\mathbf{P}_n)\frac{1}{n} + 2a(\mathbf{P}_n),$$

$$M(\mathbf{Q}_n) = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} \varphi_i + \frac{\pi}{2} p(\mathbf{P}_n) = \frac{1}{2n} \sum \varphi_i + \frac{\pi}{2} p(\mathbf{P}_n) = \frac{1}{2n} 2\pi + \frac{\pi}{2} p(\mathbf{P}_n)$$

y en donde  $\varphi_i$  denota el ángulo entre los vectores normales a los lados adyacentes a  $P_n$ , cuya suma siempre es igual a  $2\pi$ .

Haciendo uso del Teo. 2.1.1 obtenemos para  $n \rightarrow \infty$  el resultado deseado.

2 ) Sea  $\mathbf{A}$  un intervalo, construya un rectángulo  $\mathbf{P}_n$  de lados  $l(\mathbf{A})$  y  $\frac{1}{n}$ , claramente  $\mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{A}$ .

Segun el inciso anterior las magnitudes de  $\mathbf{P}_n$  son,

$$V(\mathbf{P}_n) = 0, \quad S(\mathbf{P}_n) = 2 \, a(\mathbf{P}_n) = 2 \frac{l(\mathbf{A})}{n},$$

$$M(\mathbf{P}_n) = \frac{\pi}{2} p(\mathbf{P}_n) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{2}{n} + 2l(\mathbf{A}) \right).$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$  se obtiene el resultado deseado.

3 ) Sea  $\mathbf{A}$  un punto, construya un intervalo  $\mathbf{P}_n$  de longitud  $\frac{1}{n}$ , claramente  $\mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{A}$ .

Segun el inciso anterior las magnitudes de  $\mathbf{P}_n$  son,

$V(\mathbf{A}) = 0, \quad S(\mathbf{A}) = 0, \quad M(\mathbf{A}) = \pi l(\mathbf{A}) = \pi \frac{1}{n}$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$  se obtiene el resultado deseado.

## CAPITULO 2

### Teorema Funcional

En este capítulo vamos a probar un teorema muy hermoso e importante, el Teorema Funcional, el cual clasifica las funcionales definidas en los cuerpos convexos con ciertas propiedades naturales. Haciendo uso de el daremos una prueba de las Formulas de Cauchy para Proyecciones, las cuales son clásicas en la Geometría Integral.

#### 2.1 Funcionales.

Sea  $\mathcal{K}$  el conjunto de los cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.1.1** Una funcional sobre  $\mathcal{K}$  es una función

$$X : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$$

Por ejemplo  $V, S, M, C$  son funcionales sobre  $\mathcal{K}$ .

Vamos a decir que:

**[1.]**  $X$  es invariante bajo el movimiento, cuando cualesquiera dos cuerpos congruentes  $A$  y  $B$ , denotado  $A \cong B$ , se tiene que  $X(A) = X(B)$ .

Una descomposición por una sección plana de un cuerpo convexo  $C$ , en las partes  $A$  y  $B$  consiste de dos cuerpos convexos  $A, B$  tales que  $C = A \cup B$  y  $A \cap B$  esta contenido en un plano.

**II.**  $X$  es aditiva para alguna descomposición por una sección plana, en las partes  $A$  y  $B$ , de un cuerpo convexo, si la siguiente relación se da:

$$X(A \cup B) + X(A \cap B) = X(A) + X(B)$$

en donde  $A \cap B$  denota la sección.

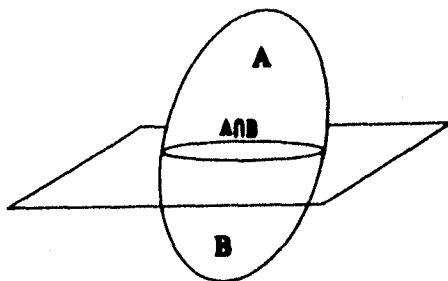


Figura 4: Descomposición por una Sección Plana.

**III.**  $X$  es continua cuando para cualquier sucesión de cuerpos convexos  $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  que converge al cuerpo convexo  $A$  se tiene que

$$\{X(A_n)\}_{n \in \mathbf{N}} \rightarrow X(A)$$

en otras palabras:  $X$  es continua por sucesiones.

Ya conocemos algunas funcionales, pero no todas satisfacen I, II, III. Por ejemplo el diámetro de un cuerpo convexo satisface I y II pero no III. Otras funcionales que si satisfacen I, II, III y son de gran importancia para la teoría están dadas en el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.1** Sea  $\mu$  la clase de todas las funcionales continuas, aditivas e invariantes bajo el movimiento, definidas en el conjunto de los cuerpos convexos. Entonces  $V, S, M, C$  están en  $\mu$ .

Demostración: Primero vamos a probar que la siguiente funcional está en  $\mu$  y como consecuencia probaremos que  $V, S, M, C$  están en  $\mu$ .

Sea  $X_\delta : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  la funcional dada por  $X_\delta(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A}_\delta)$

Vamos a probar que  $X_\delta \in \mathcal{L}$ .

**I)**  $X_\delta$  es invariante bajo el movimiento. Por el teorema 1.1.7,  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$  implica que  $\mathbf{A}_\delta \cong \mathbf{B}_\delta$ . Por lo tanto  $V(\mathbf{A}_\delta) = V(\mathbf{B}_\delta)$ , o sea  $X_\delta(\mathbf{A}) = X_\delta(\mathbf{B})$ .

**II)**  $X_\delta$  es aditiva.

Sean  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  la descomposición de un convexo en convexos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tal que  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$  es una sección plana, queremos probar que:

$$X_\delta(\mathbf{A}) + X_\delta(\mathbf{B}) = X_\delta(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + X_\delta(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$$

Empezaremos haciendo las siguientes observaciones cuyas demostraciones se siguen del teorema 1.1.5 y la sección 1.2.1.

$$\mathbf{A}_\delta \cap \mathbf{B}_\delta = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})_\delta \quad \mathbf{A}_\delta \cup \mathbf{B}_\delta = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})_\delta. \text{ Si } d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < \theta \text{ entonces } \mathbf{A} \subset \mathbf{B}_\theta \text{ y } \mathbf{B} \subset \mathbf{A}_\theta.$$

Por propiedades del volúmen tenemos que:

$$V(\mathbf{A}_\delta \cup \mathbf{B}_\delta) + V(\mathbf{A}_\delta \cap \mathbf{B}_\delta) = V(\mathbf{A}_\delta) + V(\mathbf{B}_\delta)$$

entonces sustituyendo obtenemos:

$$V((\mathbf{A} \cup \mathbf{B})_\delta) + V((\mathbf{A} \cap \mathbf{B})_\delta) = V(\mathbf{A}_\delta) + V(\mathbf{B}_\delta)$$

$$X(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + X(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = X(\mathbf{A}) + X(\mathbf{B})$$

**III)**  $X_\delta$  es continua por sucesiones.

En realidad vamos a probar que  $X_\delta$  es continua. Lo cual implica que  $X_\delta$  es continua por sucesiones.

Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo fijo y sea  $\delta_0 \geq 0$ . Se afirma que  $X_\delta$  es continua en  $\mathbf{A}$  para todo  $\delta \in [0, \delta_0]$ , es decir:  $\forall \epsilon > 0, \exists \theta > 0$  tal que

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < \theta \Rightarrow |X_\delta(\mathbf{A}) - X_\delta(\mathbf{B})| < \epsilon.$$

Demostración de III): Sea  $0 < \epsilon < 1$  y  $K$  una esfera suficientemente grande para que cualquier convexo  $\mathbf{B}$  contenido en  $K$  tal que si  $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < 1$  entonces:

$$\mathbf{A}_{\delta_0}, \mathbf{B}_{\delta_0} \subset K$$

defina  $\eta = S(K) + M(K) + \frac{1}{3}C$  entonces  $\eta > 1$ , es un número fijo. Defina  $\theta = \frac{\epsilon}{\eta}$ .

Si  $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < \theta$  entonces  $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}_\theta$  y  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}_\theta$  por lo tanto  $\mathbf{A}_\delta \subset (\mathbf{B}_\delta)_\theta$ ,  $\mathbf{B}_\delta \subset (\mathbf{A}_\delta)_\theta$  aplicando Steiner obtenemos:

$$V(\mathbf{A}_\delta) \leq V((\mathbf{B}_\delta)_\theta) = V(\mathbf{B}_\delta) + \theta S(\mathbf{B}_\delta) + \theta^2 M(\mathbf{B}_\delta) + \frac{1}{3}\theta^3 C$$

$$V(\mathbf{B}_\delta) \leq V((\mathbf{A}_\delta)_\theta) = V(\mathbf{A}_\delta) + \theta S(\mathbf{A}_\delta) + \theta^2 M(\mathbf{A}_\delta) + \frac{1}{3}\theta^3 C$$

es decir:

$$X_\delta(\mathbf{A}) \leq X_\delta(\mathbf{B}) + \theta S(\mathbf{B}_\delta) + \theta^2 M(\mathbf{B}_\delta) + \frac{1}{3}\theta^3 C$$

$$X_\delta(\mathbf{B}) \leq X_\delta(\mathbf{A}) + \theta S(\mathbf{A}_\delta) + \theta^2 M(\mathbf{A}_\delta) + \frac{1}{3}\theta^3 C$$

como  $\theta < 1$  y  $\theta = \frac{\epsilon}{\eta} = \frac{\epsilon}{S(K) + M(K) + \frac{1}{3}C}$

$$X_\delta(\mathbf{A}) < X_\delta(\mathbf{B}) + (S(\mathbf{B}_\delta) + M(\mathbf{B}_\delta) + \frac{1}{3}C)\theta \leq X_\delta(\mathbf{B}) + (S(K) + M(K) + \frac{1}{3}C)\theta$$

$$X_\delta(\mathbf{B}) < X_\delta(\mathbf{A}) + (S(\mathbf{A}_\delta) + M(\mathbf{A}_\delta) + \frac{1}{3}C)\theta \leq X_\delta(\mathbf{A}) + (S(K) + M(K) + \frac{1}{3}C)\theta$$

como  $0 \leq \delta \leq \delta_0$  entonces  $\mathbf{A}_\delta, \mathbf{B}_\delta \subset \mathbf{A}$ . De aquí que

$$X_\delta(\mathbf{A}) \leq X_\delta(\mathbf{B}) + \eta\theta, \quad X_\delta(\mathbf{B}) \leq X_\delta(\mathbf{A}) + \eta\theta.$$

Entonces  $|X_\delta(\mathbf{A}) - X_\delta(\mathbf{B})| < n\theta = \epsilon$

Con esto hemos probado que  $X_\delta \in \mathcal{M}$  para todo  $\delta \in [0, \delta_0]$ .

Ahora veamos que  $C, M, S, V \in \mathcal{M}$ .

Observaciones:



$C \in \mathcal{L}$  ya que es una funcional constante. Si  $\delta = 0$ ,  $X_\delta = V$ ,  $V \in \mathcal{L}$ .  
Ahora veamos que  $M$  y  $S \in \mathcal{L}$ .

**I)** Sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  convexos congruentes. Entonces  
 $X_\delta(\mathbf{A}) = X_\delta(\mathbf{B})$ ,  $V(\mathbf{A}_\delta) = V(\mathbf{B}_\delta)$   
 $V(\mathbf{A}_\delta) = V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C = V(\mathbf{B}) + \delta S(\mathbf{B}) + \delta^2 M(\mathbf{B}) + \frac{\delta^3}{3} C$   
 como son polinomios de grado tres, entonces

$$V(\mathbf{A}) = V(\mathbf{B}), \quad S(\mathbf{A}) = S(\mathbf{B}), \quad M(\mathbf{A}) = M(\mathbf{B}).$$

Entonces  $S$ ,  $M$  satisfacen I).

**II)**  $X_\delta(\mathbf{A}) + X_\delta(\mathbf{B}) = X_\delta(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + X_\delta(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

$$V(\mathbf{A}_\delta) + V(\mathbf{B}_\delta) = V((\mathbf{A} \cup \mathbf{B})_\delta) + V((\mathbf{A} \cap \mathbf{B})_\delta)$$

$$V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C + V(\mathbf{B}) + \delta S(\mathbf{B}) + \delta^2 M(\mathbf{B}) + \frac{\delta^3}{3} C =$$

$$= V(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + \delta S(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + \delta^2 M(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + \frac{\delta^3}{3} C + V(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + \delta S(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) +$$

$$\delta^2 M(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + \frac{\delta^3}{3} C$$

por el mismo razonamiento anterior.

$$S(\mathbf{A}) + S(\mathbf{B}) = S(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + S(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$M(\mathbf{A}) + M(\mathbf{B}) = M(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + M(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

entonces  $S$ ,  $M$  satisfacen II.

**III)** Como  $X_\delta$  es continua para todo  $\delta \in [0, \delta_0]$ .  
 Si  $\{\mathbf{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión fija de convexos que convergen al cuerpo  $\mathbf{A}$  Entonces  
 $\{X_\delta(\mathbf{A}_n)\}_n \rightarrow X_\delta(\mathbf{A})$  para todo  $\delta \in [0, \delta_0]$ . En otras palabras la sucesión de polinomios  $f_n : [0, \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$  dada

$$f_n(\delta) = X_\delta(\mathbf{A}_n) = V((\mathbf{A}_n)_\delta) = V(\mathbf{A}_n) + \delta S(\mathbf{A}_n) + \delta^2 M(\mathbf{A}_n) + \frac{\delta^3}{3} C$$

convergen al polinomio

$$f(\delta) = X_\delta(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C.$$

Además esta convergencia es uniforme ya que un resultado de análisis conocido como Teorema de Dini, ver [13], nos dice que:

Si  $f_n$  es una sucesión monótona de funciones continuas que tienden a una función continua  $f$  en un conjunto compacto  $D$ , entonces  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $D$ .

En nuestro caso  $f'_n > 0$ , de aquí que  $f_n$  sea monótona.

Por lo tanto  $f - f_n \rightarrow 0$  esto implica que cada coeficiente tiende a cero, por lo que:

$$V(\mathbf{A}_n) \rightarrow V(\mathbf{A}), \quad S(\mathbf{A}_n) \rightarrow S(\mathbf{A}), \quad M(\mathbf{A}_n) \rightarrow M(\mathbf{A})$$

Con esto se prueba que  $M$  y  $S$  satisfacen III. De aquí se sigue que  $V, S, M, C \in \mathcal{M}$ . ■

El siguiente lema técnico será de vital importancia para los resultados subsecuentes.

**Lema 2.1.1 :** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(u+v) = f(u) + f(v)$ , entonces  $f(u) = f(1)u$ .

*Demostración:* Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(u) = f(1)u$ , claramente  $g$  es continua. La idea es probar que  $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$  y como  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , tendremos que  $f(u) = g(u)$  para todo  $u \in \mathbb{R}$  y por lo tanto  $f(u) = f(1)u$ .

Sea  $p \in \mathbb{Z}$  y  $x \in \mathbb{R}$ , vamos a probar que  $f(px) = pf(x)$ . Para tal efecto tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1: si  $p \geq 0$  aplicamos  $f(u+v) = f(u) + f(v)$  y obtenemos  $f(px) = pf(x)$ .

Caso 2: si  $p < 0$ ,  $f(px) = f(2px - px) = f(2px) + f(-px)$ ,  $-p > 0$ . Por el caso 1, tenemos que  $f(px) = 2f(px) - pf(x)$ , por lo tanto  $f(px) = pf(x)$ .

Sea  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ .  $f(1) = f(\frac{q}{q}) = f(q\frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$ , por lo tanto  $f(\frac{1}{q}) = f(1)\frac{1}{q}$ .

Por último sean  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ , entonces  $f(\frac{p}{q}) = f(p\frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = f(1)\frac{p}{q}$ . ■

## 2.2 Teorema Funcional.

En esta sección saltará mostraremos la importancia de las cuatro magnitudes fundamentales de masa, en especial veremos una razón para que la cuarta magnitud

$C(\mathbf{A}) = 4\pi$  sea tomada en cuenta.

El siguiente teorema es muy fuerte, ya que clasifica las funcionales definidas en los cuerpos convexos y satisfacen las propiedades I), II) y III).

### Teorema 2.2.1 Funcional

Sea  $\mu$  la clase de todas las funcionales continuas, aditivas e invariantes bajo el movimiento, definidas en el conjunto de los cuerpos convexos. Entonces  $\mu$  es isomorfo al espacio vectorial

$$F = \{\alpha C + \beta M + \gamma S + \rho V \mid \alpha, \beta, \gamma, \rho \in \mathbb{R}\}.$$

Es decir  $\mu$  es el espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  en donde  $C, M, S, V$  forman una base.

Demostración: Primero vamos a probar que  $\mu$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , y después que  $C, M, S, V$  forman una base para  $\mu$ .

Las operaciones de suma y producto por un escalar en  $\mu$  son las mismas que se definen en el espacio vectorial de todas las funciones definidas en un conjunto arbitrario cualquiera, en los números reales.

Vamos a probar que  $\mu$  es un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las funciones definidas en el conjunto de los cuerpos convexos y con valores reales.

Sea  $X_0$  la funcional que a cada cuerpo convexo le asocia el número real  $c$ . Claramente  $X_0$  es invariante bajo el movimiento y continua por sucesiones.

Sea  $\mathbf{C}$  un cuerpo convexo, considere alguna descomposición de él por una sección plana, en las partes  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Entonces

$$X_0(\mathbf{C}) = X_0(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = c = c + c - c = X_0(\mathbf{A}) + X_0(\mathbf{B}) - X_0(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

De aquí se deduce que  $X_0$  es aditiva y  $X_0 \in \mu$ . Ahora sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{X} \in \mu$ .

Si  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$  entonces  $X(\mathbf{A}) = X(\mathbf{B})$ , de lo cual se sigue que  $\lambda X(\mathbf{A}) = \lambda X(\mathbf{B})$  es decir  $(\lambda X)(\mathbf{A}) = (\lambda X)(\mathbf{B})$ . Como  $X$  es continua por sucesiones, para cualquier sucesión de cuerpos convexos  $\{\mathbf{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge al cuerpo convexo  $\mathbf{A}$  se tiene que

$\{X(\mathbf{A}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow X(\mathbf{A})$  por lo tanto  $\lambda\{X(\mathbf{A}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \lambda X(\mathbf{A})$  es decir

$\{(\lambda X)(\mathbf{A}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (\lambda X)(\mathbf{A})$ , de aquí que  $\lambda X$  sea continua por sucesiones.

Por hipótesis  $X(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + X(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = X(\mathbf{A}) + X(\mathbf{B})$ , entonces

$\lambda X(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + \lambda X(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \lambda X(\mathbf{A}) + \lambda X(\mathbf{B})$  es decir

$(\lambda X)(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + (\lambda X)(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = (\lambda X)(\mathbf{A}) + (\lambda X)(\mathbf{B})$ , de aquí que  $\lambda X$  es aditiva.

Por lo tanto  $\lambda X \in \mu$ . Sean  $X, Y$  funcionales en  $\mu$

Por hipótesis si  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$  se tiene que  $X(\mathbf{A}) = X(\mathbf{B})$  y  $Y(\mathbf{A}) = Y(\mathbf{B})$  entonces

$(X + Y)(\mathbf{A}) = (X + Y)(\mathbf{B})$ , por lo tanto  $X + Y$  es invariante bajo el movimiento. De manera analoga se obtienen las otras dos propiedades para la funcional  $X + Y$ .

Y así  $X + Y$  esta en  $\mu$

Sea  $X$  una funcional aditiva, continua e invariante bajo el movimiento. Vamos a probar que  $X \in F$  es decir que existen escalares  $\alpha, \beta, \gamma, \rho \in \mathbb{R}$  tal que  $X = \alpha C + \beta M + \gamma S + \rho V$ .

Sea  $Q \in \mathbb{R}^3$  un punto cualquiera,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$X(Q) = \alpha C(Q) \quad (1)$$

como  $X$  es invariante,  $X(P) = \alpha C(P)$  para todo  $P \in \mathbb{R}^3$ .

Definamos ahora

$$X' = X - \alpha C \quad (2)$$

claramente  $X'$  satisface I, II y III. Si  $Q \in \mathbb{R}^3$ ,  $X'(Q) = X(Q) - \alpha C(Q) = 0$ , entonces

$$X'(Q) = 0 \quad (3)$$

para todo  $Q \in \mathbb{R}^3$ .

Escojamos ahora un intervalo  $U$  de longitud  $u$ . Como  $X'$  es invariante bajo el movimiento,  $X'(U)$  sólo depende de la longitud, ya que cualesquiera dos intervalos de la misma longitud son congruentes, denotemos esta dependencia por  $X'(U) = f(u)$ . Si  $U \cup V$  es un intervalo de longitud  $u+v$  con  $U$  y  $V$  intervalos de longitud  $u$  y  $v$  respectivamente, entonces

$X'(U \cup V) + X'(U \cap V) = X'(U) + X'(V)$  (ya que  $X'$  es aditiva), pero  $U \cap V$  es un punto en  $\mathbb{R}^3$ , por lo tanto  $X'(U \cup V) = X'(U) + X'(V)$  de aquí se sigue que

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad (4)$$

además  $f$  es continua, ya que  $X'$  es continua. Por el lema 2.1.1 anterior  $f(u) = f(1)u$ , sea  $\beta$  tal que  $f(1) = \pi\beta$ , por lo tanto  $X'(U) = f(1)u = \beta\pi u = \beta M(U)$  para todo intervalo  $U$ . Recuerde que  $M(U) = \pi\ell(U)$ , donde  $\ell(U)$  es la longitud de  $U$ .

Definamos ahora

$$X'' = X' - \beta M \quad (5)$$

claramente  $X''$  satisface I, II y III, y para todo intervalo  $U$ ,

$$X''(U) = X'(U) - \beta M(U) = 0 \quad (6)$$

Sea ahora  $P$  un polígono convexo. Vamos a probar que  $X''(P)$  sólo depende del área de  $P$ . Supongamos que este polígono tiene una descomposición en subpolígonos convexos, es decir  $P = \bigcup_{i=1}^k P_i$  y si  $i \neq j$   $P_i \cap P_j = \emptyset$ .

Vamos a probar que  $X''(P) = \sum_{i=1}^k X''(P_i)$ . Por inducción sobre  $k$ . Si  $k = 1$  es evidente y para  $k = 2$  se sigue de la ecuación 6 y de la aditividad de  $X''$ . Sea  $k > 2$  y supongamos que nuestra relación se satisface para todas las descomposiciones con menos de  $k$  subpolígonos. Tracemos a través de uno de los lados (que contenga un punto interior de  $P$ ) de  $P_i$  una línea recta que divida el plano (que contiene a  $P$ ) en dos semiplanos  $H'$  y  $H''$ .

Definamos  $P' = P \cap H'$ ,  $P'_j = P_j \cap H'$  y análogamente  $P'' = P \cap H''$ ,  $P''_j = P_j \cap H''$  (ver figura 5).

Por lo tanto  $P' = \bigcup P'_j$  y  $P'' = \bigcup P''_j$ , donde cada una de estas descomposiciones tiene menos de  $k$  subpolígonos. Por la hipótesis tenemos

$$X''(P') = \sum_j X''(P'_j), \quad X''(P'') = \sum_j X''(P''_j)$$

Además  $X''(P') + X''(P'') = X''(P)$  (caso  $k = 2$ ) y  $X''(P'_j) + X''(P''_j) = X''(P_j)$  (caso  $k = 2$ ).

Entonces

$$\begin{aligned} X''(P) &= X''(P') + X''(P'') &= \sum_j X''(P'_j) + \sum_j X''(P''_j) \\ &= \sum_j (X''(P'_j) + X''(P''_j)) &= \sum_{i=1}^k X''(P_i) \end{aligned}$$

lo cual queríamos probar.

Una consecuencia inmediata de lo anterior es la afirmación de que para cualesquiera

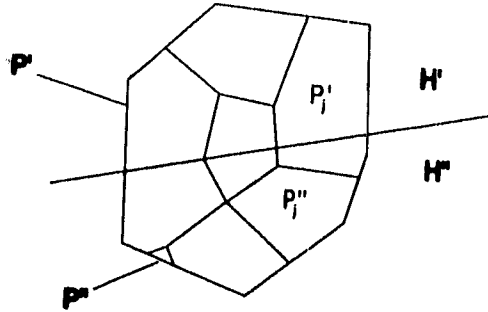


Figura 5: Descomposición en subpolígonos

dos polígonos convexos  $P$  y  $Q$  con la misma área,  $X''(P) = X''(Q)$ . Esto se debe a que  $X''$  es invariante bajo el movimiento y el Teorema de la Geometría Elemental, ver [5], que afirma que si dos polígonos convexos tienen la misma área, entonces pueden descomponerse en el mismo número de subpolígonos congruentes. De esta forma llegamos a que  $X''(P) = f(p)$ , donde  $p$  es el área del polígono convexo  $P$ . Es decir  $X''$  de un polígono convexo sólo depende de su área.

Ahora podemos escoger un polígono convexo con área  $p+q$  que se descompone en dos de área  $p$  y  $q$  respectivamente.

Entonces  $f(p+q) = f(p) + f(q)$ , por aditividad de  $X''$  y  $f$  es continua, por la continuidad de  $X''$ . Por lo tanto  $f(p) = f(1)p$ . Defina  $\gamma$  tal que  $f(1) = 2\gamma$ , y como  $S(P) = 2a(P) = 2p$ , por lo tanto  $X''(P) = f(p) = f(1)p = 2\gamma p = 2p\gamma = S(P)\gamma$ .

De nuevo definamos

$$Y = X'' - \gamma S \quad (7)$$

claramente  $Y$  satisface I, II y III. Además  $Y(P) = X''(P) - \gamma S(P) = 0$  para cualquier polígono  $P$ .

Sea ahora  $P$  un poliedro convexo. Si  $P = \bigcup P_j$  es una descomposición en subpoliedros convexos congruentes, entonces  $Y(P) = \sum_j Y(P_j)$ , la prueba es análoga al caso de los polígonos.

Si dos poliedros  $P$  y  $Q$  se pueden descomponer en el mismo número de subpoliedros convexos,  $Y(P) = Y(Q)$ . Para avanzar en la dirección análoga a los polígonos, hay un problema. Se trata del tercer problema de Hilbert, que afirma existen poliedros convexos con el mismo volumen pero sin una descomposición en subpoliedros congruentes, por lo cual no es posible concluir que  $V(P)$  sólo depende del volumen de  $P$ . Sin embargo, podemos concluir en forma análoga que es posible escoger una constante adecuada tal que  $Y(P) = \rho V(P)$  para todo  $P$  que tenga una descomposición congruente con el cubo del mismo volumen.

Finalmente defina  $Z = Y - \rho V$ ,  $Z$  satisface I, II, III y para cualquier poliedro  $P$  que tenga una descomposición congruente con el cubo del mismo volumen,

$$Z(P) = Y(P) - \rho V(P) = 0.$$

La parte difícil de esta prueba será ahora demostrar que  $Z$  realmente se anula para todo poliedro. Consideremos la suma de Minkowski  $\mathbf{P} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , de dos poliedros convexos propios. Con ayuda del teorema de descomposición, teorema 1.1.4, y debido a  $Z$  se anula en los poliedros que tienen una descomposición en subpoliedros congruentes con el cubo del mismo volumen, se sigue que  $Z$  es aditiva con respecto a la suma de Minkowski, es decir  $Z(\mathbf{A}) + Z(\mathbf{B}) = Z(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ . Para un poliedro fijo  $\mathbf{P}$  y una variable  $\lambda$  definimos  $Z(\lambda\mathbf{P}) = f(\lambda)$ . Sabemos que  $\lambda\mathbf{P} + \mu\mathbf{P} = (\lambda + \mu)\mathbf{P}$ , usando la propiedad de aditividad de  $Z$  obtenemos:  $f(\lambda) + f(\mu) = f(\lambda + \mu)$ . Como  $f$  es continua entonces  $f(\lambda) = \lambda f(1)$ . Hemos obtenido que  $Z(\lambda\mathbf{P}) = \lambda Z(\mathbf{P})$ .

Vamos a considerar el teorema Esférico 2, 1.3.2, en donde un poliedro convexo  $\mathbf{P}$  da lugar a un conjunto  $\mathbf{R}$ . Para todo  $\mathbf{P}' \in \mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{P}' = \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_1} + \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_2} + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_k},$$

$$Z(\mathbf{P}') = Z\left(\left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_1} + \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_2} + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_k}\right),$$

$$Z(\mathbf{P}') = Z\left(\left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_1}\right) + Z\left(\left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_2}\right) + \dots + Z\left(\left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}^{\delta_k}\right),$$

$$Z(\mathbf{P}') = \frac{1}{k}Z(\mathbf{P}^{\delta_1}) + \frac{1}{k}Z(\mathbf{P}^{\delta_2}) + \dots + \frac{1}{k}Z(\mathbf{P}^{\delta_k}),$$

de aquí que  $Z(\mathbf{P}) = Z(\mathbf{P}')$ . Por la continuidad de  $Z$  se sigue que  $Z(\mathbf{P}) = Z(K_0)$ , donde  $K_0$  es la esfera que tiene el mismo ancho promedio de  $\mathbf{P}$ , ver el corolario 1.3.1.

Sea ahora  $\mathbf{W}$ , un cubo con el ancho promedio de  $K_0$ , entonces también  $Z(\mathbf{W}) = Z(\mathbf{P})$ , pero  $Z(\mathbf{W}) = 0$ , ya que  $\mathbf{W}$  tiene una descomposición en subpoliedros congruentes con el cubo del mismo volumen. Por lo tanto  $Z(\mathbf{P}) = 0$  para todo poliedro  $\mathbf{P}$ . Usando los teoremas de aproximación por poliedros y la continuidad de  $Z$ , podemos concluir que  $Z(\mathbf{A}) = 0$ , para todo cuerpo convexo  $\mathbf{A}$ .

Siguiendo la demostración hacia atrás podemos ver que:

$$X = \alpha C + \beta M + \gamma S + \rho V$$

que era lo que queríamos probar. ■

### 2.3 Formulas de Cauchy para Proyecciones.

Como una aplicación del teorema funcional, vamos a deducir la famosas fórmulas integrales para las proyecciones de los cuerpos convexos, obtenidas por primera vez por L. A. Cauchy.

Antes de probar estas formulas necesitamos probar dos lemas, que nos seran de gran utilidad.

**Lema 2.3.1** Sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$  tales que  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  es convexo. Entonces

$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

*Demostración:* Sea  $T \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ , entonces  $T = P + Q$  con  $P \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ ,  $Q \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ , es decir  $P \in \mathbf{A}$  o  $P \in \mathbf{B}$ ,  $Q \in \mathbf{A}$  y  $Q \in \mathbf{B}$ , de esta manera es claro que en cualquier caso  $T = P + Q \in (\mathbf{A} + \mathbf{B})$ .

Sea  $P + Q \in (\mathbf{A} + \mathbf{B})$  con  $P \in \mathbf{A}$  y  $Q \in \mathbf{B}$ , como  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  es convexo, entonces  $PQ \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ . Por lo tanto existe  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $T = (1 - \lambda)P + \lambda Q \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ . Entonces  $T' = \lambda P + (1 - \lambda)Q \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$  y  $P + Q = T + T'$ .

De aquí obtenemos que  $P + Q = T + T' \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ . ■



Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo,  $v \in S^2$ . Projete  $\mathbf{A}$  en la dirección  $v$ , sobre un plano  $\Pi$  ortogonal a  $v$  (ver figura 6).

Sea  $\Pi(\mathbf{A})$  la figura plana obtenida en la proyección, defina  $f(\mathbf{A}, v) = a(\Pi(\mathbf{A}))$ ,  $\ell(\mathbf{A}, v) = p(\Pi(\mathbf{A}))$  el área, el perímetro de  $\Pi(\mathbf{A})$  respectivamente y  $h(v) = b(\mathbf{A}, v)$  el ancho de  $\mathbf{A}$  en la dirección  $v$ .

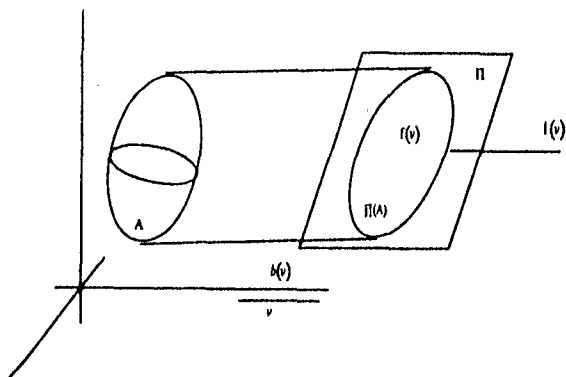


Figura 6: Proyección en la dirección  $v$

Notese que si  $v \in S^2$  es un vector fijo, entonces  $f(\cdot, v)$ ,  $\ell(\cdot, v)$ ,  $b(\cdot, v)$  son funciones continuas de  $S^2$  en  $\mathbb{R}$ , y si  $\mathbf{C}$  es un cuerpo convexo fijo, entonces  $f(\mathbf{C}, \cdot)$ ,  $\ell(\mathbf{C}, \cdot)$ ,  $b(\mathbf{C}, \cdot)$

**Lema 2.3.2** Sea  $\{\mathbf{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de cuerpos convexos, que converge al cuerpo convexo  $\mathbf{A}$ , y sea  $v \in S^2$ . Defina

$$X(\mathbf{A}_n) = \int_{S^2} b(\mathbf{A}_n, w) dw, \quad X(\mathbf{A}) = \int_{S^2} b(\mathbf{A}, w) dw.$$

Entonces

$$b(\mathbf{A}_n, v) \rightarrow b(\mathbf{A}, v) \quad \text{y} \quad X(\mathbf{A}_n) \rightarrow X(\mathbf{A}).$$

Demostración: Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}$ , existe  $N > 0$  tal que  $n \geq N$  implica que  $d(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}) < \epsilon$  y por la definición de la métrica de Hausdorff (definición 1.2.1), se tiene que

$$\mathbf{A}_n \subset \mathbf{A} + \mathbf{K}_\epsilon, \quad \mathbf{A} \subset \mathbf{A}_n + \mathbf{K}_\epsilon,$$

usando el corolario 1.1.1, obtenemos que

$$b(\mathbf{A}_n, w) \leq b(\mathbf{A} + \mathbf{K}_\epsilon, w) = b(\mathbf{A}, w) + b(\mathbf{K}_\epsilon, w) = b(\mathbf{A}, w) + 2\epsilon$$

$$b(\mathbf{A}, w) \leq b(\mathbf{A}_n + \mathbf{K}_\epsilon, w) = b(\mathbf{A}_n, w) + b(\mathbf{K}_\epsilon, w) = b(\mathbf{A}_n, w) + 2\epsilon,$$

por lo tanto

$$|b(\mathbf{A}, w) - b(\mathbf{A}_n, w)| < 2\epsilon.$$

De aquí que  $b(\mathbf{A}_n, v) \rightarrow b(\mathbf{A}, v)$ .

Para probar que  $X(\mathbf{A}_n) \rightarrow X(\mathbf{A})$ , vamos a usar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, el cual se puede consultar en [1] el capítulo 5.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b(\mathbf{A}_n, \cdot) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y por lo tanto acotada, ya que su dominio es compacto. Además la sucesión de funciones  $b(\mathbf{A}_n, \cdot)$  converge a  $b(\mathbf{A}, \cdot)$  según acabamos de probar, y es uniformemente acotada, ya que los  $\mathbf{A}_n$  se pueden encerrar en una esfera suficientemente grande, de radio  $r$  cuyo ancho acota a las funciones  $b(\mathbf{A}_n, \cdot)$ , es decir  $|b(\mathbf{A}_n, \cdot)| < 2r$ .

Por otro lado sabemos que las funciones  $b(\mathbf{A}_n, \cdot)$  y  $b(\mathbf{A}, \cdot)$  son integrables por ser continuas, acotadas y tener un dominio de medida finita, como lo es la esfera  $S^2$ , ya que  $\int_{S^2} 1 dv = 4\pi$ .

También las funciones constantes son integrables ya que  $\int_{S^2} c dv = 4\pi c$ .

Entonces usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$X(\mathbf{A}_n) \rightarrow X(\mathbf{A}).$$

**Teorema 2.3.1** Para un cuerpo convexo  $\mathbf{A}$  se tiene lo siguiente

- 1)  $\int_{S^2} b(v) dv = 2M$
- 2)  $\int_{S^2} f(v) dv = \pi S$
- 3)  $\int_{S^2} \ell(v) dv = 2\pi M$
- 4)  $\bar{b} = \frac{1}{2\pi} M$
- 5)  $\bar{f} = \frac{1}{4} S$
- 6)  $\bar{\ell} = \frac{1}{2} M$

donde  $b, f, \bar{\ell}$  denotan el ancho, el área y el perímetro promedio respectivamente.

Demstración: sólo probaremos 1). Las demas demostraciones son totalmente analogas.

Recuerde que  $b(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}, v) + b(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}, v) = b(\mathbf{A}, v) + b(\mathbf{B}, v)$  en donde el cuerpo convexo  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  se descompone por medio de un plano en los convexos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  (ver el lema 2.3.1).

Defina ahora:

$$X(\mathbf{A}) = \int_{S^2} b(\mathbf{A}, v) dv$$

entonces usando los dos lemas anteriores tenemos que  $X$  es continua por sucesiones, aditiva e invariante bajo el movimiento.

Por lo tanto  $X = \alpha C + \beta M + \gamma S + \rho V$ .

En particular si  $\mathbf{A}$  es  $K_r$ , la esfera de radio  $r$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} X(\mathbf{A}) &= X(K_r) = \int b(K_r, v) dv = \int 2r dv \\ &= 2r \int_{S^2} 1 dv = 2r (4\pi) = 8\pi r. \end{aligned}$$

Y dado que  $C(K_r) = 4\pi$ ,  $M(K_r) = 4\pi r^2$ ,  $S(K_r) = 4\pi r^2$ ,  $V(K_r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ , se tiene que

$$\begin{aligned} 8\pi r &= 4\pi\alpha + 4\pi r\beta + 4\pi r^2\gamma + \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 2r &= \alpha + r\beta + r^2\gamma + \frac{\rho}{3}r^3 \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\frac{\rho}{3}r^3 + \gamma r^2 + (\beta - 2)r + \alpha = 0$  esto para todo  $r$ , y dado que es un polinomio de grado tres,

$\rho = \gamma = \alpha = 0$  y  $\beta = 2$ . De aquí que

$X = 2M$  y como  $\bar{b} = \frac{1}{4\pi} \int b(v) dv$  obtenemos  $\bar{b} = \frac{M}{2\pi}$ . ■

Como una aplicación de las formulas de Cauchy para proyecciones vamos a calcular la integral de curvatura media de algunos cuerpos convexos.

Sea  $\mathbf{A}$  un cono sólido circular recto de altura  $R \cos \theta_0$  y base circular de radio  $R \operatorname{sen} \theta_0$ .

El volúmen y la superficie del cono son:

$$S(\mathbf{A}) = \pi R^2 \operatorname{sen} \theta_0 + \pi R^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0, \quad V(\mathbf{A}) = \frac{\pi R^3 \operatorname{sen}^2 \theta_0 \cos \theta_0}{3}.$$

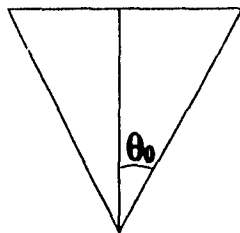


Figura 7: Cono sólido.

Lo interesante será calcular su integral de curvatura media. La formula 1) del teorema 2.3.1 nos dice que al integrar sobre  $S^2$  la función: que a cada dirección le asocia el ancho del cuerpo convexo, obtenemos el doble de su integral de curvatura media. Entonces para aplicar esta formula necesitamos calcular la función ancho. La función ancho es una función con la propiedad  $b(v) = b(-v)$  para todo  $v \in S^2$ . Entonces basta calcular  $b(v)$  para la semiesfera superior, la cual denotaremos por  $S^2_+$ .

Si parametrizamos la semiesfera superior mediante coordenadas esféricas, cada punto de ella es de la forma  $(1, \theta, \varphi)$  con  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Coloque el cono con vértice en el origen y su eje en el eje  $z$  positivo. Para calcular el ancho del cono en la dirección  $(1, \theta, \varphi)$  tome dos planos con esta dirección como vector normal de tal forma que sean planos soporte del cono. Como el cono es de revolución este ancho no depende de  $\theta$  y entonces basta calcular este ancho en el plano  $YZ$  para el triángulo que se obtiene al intersectar el plano  $X = 0$  con el cono. Las intersecciones de los planos soporte con el plano  $YZ$ , son dos rectas soporte de este triángulo. Calculando las distancias entre estas rectas obtenemos:

$$h(1, \theta, \varphi) = \begin{cases} R \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \varphi + R \cos \theta_0 \cos \varphi & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0 \\ 2R \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \varphi & \text{si } \frac{\pi}{2} - \theta_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

donde la condición  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0$  garantiza que una de las rectas soporte pasa por el origen; lo cual no sucede en el otro caso.

Aplicando la formula de Cauchy:

$$2M(\mathbf{A}) = \int_{S^2} h(v) dv = 2 \int_{S_+^2} h(v) dv,$$

por lo que

$$M(\mathbf{A}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi b(1, \theta, \varphi) d\theta d\varphi,$$

donde  $\operatorname{sen} \varphi$  es el jacobiano de las coordenadas esféricas que usamos para parametrizar la semiesfera superior.

$$\begin{aligned} M(\mathbf{A}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi (R \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \varphi + R \cos \theta_0 \cos \theta) d\theta d\varphi \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_0} \operatorname{sen} \varphi 2R \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \varphi d\theta d\varphi \\ &= 4\pi R \operatorname{sen} \theta_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi - 2\pi R \operatorname{sen} \theta_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_0} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi \\ &+ \pi R \cos \theta_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_0} \operatorname{sen} 2\varphi d\varphi, \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos obtenemos:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{A}) &= \frac{\pi^2}{2} R \operatorname{sen} \theta_0 + \pi R \operatorname{sen} \theta_0 \theta_0 + \frac{\pi}{2} R \cos \theta_0 + \frac{\pi}{2} (R \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} 2\theta_0 + R \cos \theta_0 \cos 2\theta_0) \\ &= \pi^2 R \operatorname{sen} \theta_0 + \pi R \operatorname{sen} \theta_0 (\tan \alpha - \alpha), \end{aligned}$$

con  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ .

Ahora vamos a calcular las magnitudes fundamentales de una esfera truncada  $\mathbf{B}$  obtenida al quitar, de una esfera sólida de radio  $R$ , un casquete esférico cuya base circular tiene radio  $R \operatorname{sen} \theta_0$ .

El lector puede checar que:

$$S(\mathbf{B}) = 4\pi R^2 - 2\pi R^2(1 - \cos \theta_0) + \pi R^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0.$$

$$V(\mathbf{B}) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3(1 - \cos \theta_0)^2(2 + \cos \theta_0).$$

Para calcular la integral de curvatura media de esta esfera truncada, vamos a proceder en forma análoga a el caso del cono sólido.

La esfera truncada tiene la siguiente función ancho.

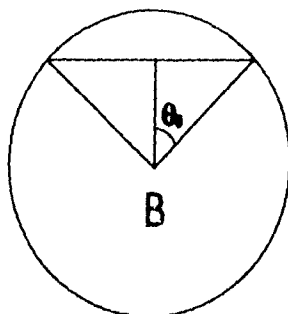


Figura 8: Esfera con un troncamiento.

$$h(1, \theta, \varphi) = \begin{cases} R + R \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \varphi + R \cos \theta_0 \cos \varphi & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \theta_0 \\ 2R & \text{si } \theta_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Entonces

$$2M(\mathbf{B}) = \int_{S^2} b(v) dv = 2 \int_{S^2_+} b(v) dv,$$

por lo que

$$M(\mathbf{B}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi b(1, \theta, \varphi) d\theta d\varphi,$$

$$M(\mathbf{B}) = 2\pi \int_0^{\theta_0} (R + R \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \varphi + R \cos \theta_0 \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi d\theta d\varphi + 2\pi \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2R \operatorname{sen} \varphi d\theta d\varphi.$$

Haciendo los cálculos obtenemos:

$$M(\mathbf{B}) = 2\pi R(1 + \cos \theta_0) + \pi R \theta_0 \operatorname{sen} \theta_0$$

Por último vamos a calcular las magnitudes de un casquete esférico.

Sea  $\mathbf{C}$  un casquete esférico tomado de una esfera de radio  $R$ . Sea  $\theta_0$  el ángulo del cono que se forma con la base de  $\mathbf{C}$  y el centro de la esfera.

De la manera usual se puede ver que:

$$S(\mathbf{C}) = 2\pi R^2(1 - \cos \theta_0) + \pi R^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0.$$

$$V(\mathbf{C}) = \frac{1}{3}\pi R^3(1 - \cos \theta_0)^2(2 + \cos \theta_0).$$

Para calcular  $M$ , a  $\mathbf{C}$  usaremos la propiedad de aditividad de  $M$ .

Sea  $\mathbf{B}$  la esfera troncada anterior y  $\mathbf{C}$  el casquete esférico definido. Entonces

$K_R = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ , de aquí que

$$M(K_R) = 4\pi R = M(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = M(\mathbf{B}) + M(\mathbf{C}) - M(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}),$$

usando el cálculo de  $M(\mathbf{B})$ , y el hecho de que  $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$  es un disco de radio  $R$ , por lo cual podemos calcular  $M(\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$  usando el teorema 1.9.1, podemos concluir que:

$$M(\mathbf{C}) = 2\pi R + \pi R \operatorname{sen} \theta_0 (\pi - \theta_0) - 2\pi R \cos \theta_0.$$

Ya hemos calculado las magnitudes de tres cuerpos convexos. Ahora usaremos estos cálculos para dar la idea del cálculo de las magnitudes de una esfera troncada  $\mathbf{C}_n$ , con  $n$  truncamientos, véase la definición 4.2.2.

Sean  $\mathbf{C}_i$  los casquetes esféricos suprimidos de una esfera sólida de radio  $R$ . Sea  $\mathbf{B}_i$  la esfera troncada definida por:

$\mathbf{B}_i = \operatorname{conv}(\mathbf{B}_{i-1} - \mathbf{C}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , con  $\mathbf{B}_0 = K_R$ . Note que  $\mathbf{B}_i \cup \mathbf{C}_i = \mathbf{B}_{i-1}$ .

Aplicando la aditividad de  $M$ , obtenemos:

$$M(K_R) = M(\mathbf{B}_n) + \sum_{i=1}^n M(\mathbf{C}_i) - \sum_{i=1}^n M(\mathbf{B}_i \cap \mathbf{C}_i),$$

es decir

$$M(\mathbf{B}_n) = 4\pi R - \sum_{i=1}^n M(\mathbf{C}_i) + \sum_{i=1}^n M(\mathbf{B}_i \cap \mathbf{C}_i).$$

Análogamente obtenemos:

$$S(\mathbf{B}_n) = 4\pi R^2 - \sum_{i=1}^n S(\mathbf{C}_i) + \sum_{i=1}^n S(\mathbf{B}_i \cap \mathbf{C}_i).$$

$$V(\mathbf{B}_n) = \frac{4\pi}{3} R^3 - \sum_{i=1}^n V(\mathbf{C}_i) + \sum_{i=1}^n V(\mathbf{B}_i \cap \mathbf{C}_i).$$

Usando esta misma idea se puede calcular las magnitudes fundamentales de un cuerpo gorra, ver la definición 9.





## CAPITULO 3

### Desigualdades de Minkowski

En el capítulo 1 se definió la simetrización de Steiner y probamos el teorema esférico 1. Ahora haremos uso de ellos para deducir importantes desigualdades que satisfacen las magnitudes fundamentales de cualquier cuerpo convexo.

#### 3.1 Comportamiento de las Magnitudes Fundamentales Bajo la Simetrización de Steiner.

Primero analizaremos que relación guardan las magnitudes fundamentales de un cuerpo convexo  $\mathbf{A}$  con las magnitudes de su simetrización  $\Sigma(\mathbf{A})$ . Para simplificar la notación escribiremos  $\bar{\mathbf{A}}$  en lugar de  $\Sigma(\mathbf{A})$ .

**Lema 3.1.1** Sea  $\mathbf{P}$  un poliedro convexo entonces

$$V(\mathbf{P}) = V(\bar{\mathbf{P}}) .$$

*Demostración: Sea  $\mathbf{P}$  un poliedro. Proyecte ortogonalmente  $\mathbf{P}$  en el plano de simetrización, obteniendo así un polígono convexo. Triangule este polígono. Ahora tome un triángulo y construya su cilindro recto  $H$ , ortogonal al plano. Observe que  $H \cap \bar{\mathbf{P}}$  y  $H \cap \mathbf{P}$  son prismas triangulares con sección transversal de área  $f$  igual y aristas de longitud  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , por lo que su volumen es  $\frac{(u+v+w)}{3} f$ . Por lo tanto  $V(H \cap \bar{\mathbf{P}}) = V(H \cap \mathbf{P})$ .*

Y esto sucede para cualquier triángulo que elijamos. Por el principio de Cavalieri tenemos que  $V(\tilde{\mathbf{P}}) = V(\mathbf{P})$ . ■

**Teorema 3.1.1** Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo entonces

$$V(\mathbf{A}) = V(\tilde{\mathbf{A}}).$$

Demostración: Sabemos por el teorema 1.2.3, que para todo  $\lambda > 1$ , existe un poliedro  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P} \subset \mathbf{A} \subset \lambda\mathbf{P}$ , entonces usando el teorema 1.2.3 obtenemos  $\tilde{\mathbf{P}} \subset \tilde{\mathbf{A}} \subset \lambda\tilde{\mathbf{P}} = \lambda\tilde{\mathbf{P}}$ .

Por lo tanto  $V(\mathbf{P}) \leq V(\mathbf{A}) \leq V(\lambda\mathbf{P}) = \lambda^3 V(\mathbf{P})$  y

$$V(\mathbf{P}) = V(\tilde{\mathbf{P}}) \leq V(\tilde{\mathbf{A}}) \leq V(\lambda\tilde{\mathbf{P}}) = V(\lambda\mathbf{P}) = \lambda^3 V(\mathbf{P}),$$

de aquí que para todo  $\lambda > 1$ ,

$$V(\mathbf{P}) \leq V(\mathbf{A}) \leq \lambda^3 V(\mathbf{P}), \quad V(\mathbf{P}) \leq V(\tilde{\mathbf{A}}) \leq \lambda^3 V(\mathbf{P}),$$

entonces para todo  $\lambda > 1$   $V(\mathbf{A}) \leq \lambda^3 V(\tilde{\mathbf{A}})$ ,  $V(\tilde{\mathbf{A}}) \leq \lambda^3 V(\mathbf{A})$ , por lo tanto  $V(\mathbf{A}) = V(\tilde{\mathbf{A}})$ . ■

**Corolario 3.1.1** Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo, entonces

$$i) S(\tilde{\mathbf{A}}) \leq S(\mathbf{A}), \quad ii) M(\tilde{\mathbf{A}}) \leq M(\mathbf{A}).$$

Demostración: Por el teorema 1.2.5 para toda  $\delta \geq 0$ ,  $(\tilde{\mathbf{A}})_\delta \subset (\tilde{\mathbf{A}}_\delta)$  entonces

$$V((\tilde{\mathbf{A}})_\delta) \leq V((\tilde{\mathbf{A}}_\delta)) = V(\mathbf{A}_\delta).$$

Aplicando Steiner obtenemos:

$$V(\mathbf{A}) + \delta S(\tilde{\mathbf{A}}) + \delta^2 M(\tilde{\mathbf{A}}) + \frac{\delta^3}{3} C \leq V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C.$$

Simplificando la expresión y haciendo tender  $\delta \rightarrow 0$  y  $\delta \rightarrow \infty$  obtenemos respectivamente  $S(\tilde{\mathbf{A}}) \leq S(\mathbf{A})$ , y  $M(\tilde{\mathbf{A}}) \leq M(\mathbf{A})$ . ■

### 3.2 Simetrización de Steiner y Suma de Minkowski.

En esta sección analizaremos como se comportan las magnitudes fundamentales con respecto a la simetrización de Steiner y a la suma de Minkowski.

**Corolario 3.2.1** Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  cuerpos convexos. Entonces

$$V(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) \leq V(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$S(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) \leq S(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$M(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) \leq M(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

*Demostración:* Por el teorema 1.2.5  $\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}} \subset \overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}}$ , por lo tanto  $V(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) \leq V(\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}}) = V(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ . Análogamente se demuestran las otras desigualdades. ■

El siguiente teorema es una de las piedras angulares para deducir las desigualdades de Minkowski.

**Teorema 3.2.1** Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  cuerpos convexos. Entonces

$$i) V(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{1/3} \geq V(\mathbf{A})^{1/3} + V(\mathbf{B})^{1/3}$$

$$ii) S(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{1/2} \geq S(\mathbf{A})^{1/2} + S(\mathbf{B})^{1/2}$$

$$iii) M(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \geq M(\mathbf{A}) + M(\mathbf{B})$$

*Demostración:* Probaremos solamente i) y iii), el inciso ii) no se probará, a pesar de que las ideas involucradas son semejantes, debido a que son muy largas las operaciones algebraicas necesarias para su demostración,

i) nuevamente haremos uso del hecho  $\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}} \subset \overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}}$ , entonces  $V(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) \leq V(\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}})$ , lo mismo es cierto si pensamos en  $\bar{\mathbf{A}}$  y  $\bar{\mathbf{B}}$  como los cuerpos convexos que se obtienen al aplicar sucesivamente un número finito de veces la simetrización de Steiner a  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  respectivamente, con planos por el origen. Sin pérdida de generalidad supondremos que el origen está en  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$ . Sean  $K_a, K_b$  dos esferas sólidas con centro en el origen, de radios  $a$  y  $b$  respectivamente tales que  $V(\mathbf{A}) = V(K_a)$ ,  $V(\mathbf{B}) = V(K_b)$ . Por el teorema esférico,

tea. 1.3.1, dado  $0 < \epsilon < a, b$ , podemos aplicar sucesivamente un número finito de veces la simetrización de Steiner a  $\mathbf{A}$ , con planos por el origen, para obtener convexos  $\tilde{\mathbf{A}}$  y  $\tilde{\mathbf{B}}$  con la propiedad de que  $K_{a-\epsilon} \subset \tilde{\mathbf{A}}$ . Después aplicar a  $\tilde{\mathbf{B}}$  un número finito de veces la simetrización de Steiner para obtener un convexo  $\tilde{\tilde{\mathbf{B}}}$  tal que  $K_{b-\epsilon} \subset \tilde{\tilde{\mathbf{B}}}$ , por otro lado  $K_{a-\epsilon} \subset \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}$  se preserva ya que  $\overline{K_{a-\epsilon}} = K_{a-\epsilon}$  y la simetrización de Steiner preserva contenciones. Entonces  $K_{a+b-2\epsilon} = (K_{a-\epsilon}) + (K_{b-\epsilon}) \subset (\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\tilde{\mathbf{B}}})$ .

por lo tanto

$V(K_{a+b-2\epsilon}) = V(K_{a-\epsilon} + K_{b-\epsilon}) \leq V((\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\tilde{\mathbf{B}}})) \leq V(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ , esto para todo  $\epsilon > 0$  y como el volúmen es continuo

$$\begin{aligned} V(K_{a+b}) &\leq V(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}4\pi^3 &\leq V(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ \Leftrightarrow (\frac{1}{3}4\pi^3)^{1/3} + (\frac{1}{3}4\pi^3)^{1/3} &\leq V(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{1/3} \\ \Leftrightarrow V(\mathbf{A})^{1/3} + V(\mathbf{B})^{1/3} &\leq V(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{1/3} \end{aligned}$$

**(iii)** Por las fórmulas de Cauchy para las proyecciones dadas en la sección 2.3,  $M(\mathbf{A}) = 2\pi b(\mathbf{A})$ , donde  $b(\mathbf{A})$  es el ancho promedio de  $\mathbf{A}$ .

En base al corolario 1.1.1  $b(\mathbf{A} + \mathbf{B}, v) = b(\mathbf{A}, v) + b(\mathbf{B}, v)$ , de aquí se tiene que

$$b(\mathbf{A} + \mathbf{B}, v) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} b(\mathbf{A} + \mathbf{B}, v) dv = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} b(\mathbf{A}, v) dv + \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} b(\mathbf{B}, v) dv,$$

es decir

$$\begin{aligned} \bar{b}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \bar{b}(\mathbf{A}) + \bar{b}(\mathbf{B}) \\ \Leftrightarrow M(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= M(\mathbf{A}) + M(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

### 3.3 Familia Lineal de Cuerpos Convexos.

Una noción muy importante que nos abrirá las puertas hacia las desigualdades de Minkowski es la de familia lineal de cuerpos convexos.

**Definición 3.3.1** Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  cuerpos convexos. Sea  $\lambda \in [0, 1]$ . Combinando la suma de Minkowski y la homotecia definimos

$$C^\lambda = (1 - \lambda)\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$$

A la familia  $\{\mathbf{C}^\lambda\}$  se le conoce como la familia lineal de cuerpos convexos con extremos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

**Teorema 3.3.1 Teorema de Brunn-Minkowski.**

Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  cuerpos convexos fijos.

Sea  $\theta(\lambda) = V(\mathbf{C}^\lambda)^{1/3}$ , entonces  $\theta$  es una función cóncava del parámetro  $\lambda \in [0, 1]$ .

Demostración: Necesitamos probar que  $\theta(\lambda) \geq (1 - \lambda)\theta(0) + \lambda\theta(1)$ .

Por el teorema anterior sabemos que:

$$\theta(\lambda) = V(\mathbf{C}^\lambda)^{1/3} = V((1 - \lambda)\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B})^{1/3} \geq (1 - \lambda)V(\mathbf{A})^{1/3} + \lambda V(\mathbf{B})^{1/3}$$

pero  $V(\mathbf{A})^{1/3} = \theta(0)$  y  $V(\mathbf{B})^{1/3} = \theta(1)$ , por lo tanto  $\theta(\lambda) \geq (1 - \lambda)\theta(0) + \lambda\theta(1)$  ■

### 3.4 Desigualdades de Minkowski.

Hemos llegado al momento importante de deducir las desigualdades de Minkowski.

**Teorema 3.4.1 Las desigualdades de Minkowski.**

Para un cuerpo convexo  $\mathbf{A}$  se tienen las siguientes desigualdades:

- i)  $S^2 - 3MV \geq 0$
- ii)  $M^2 - CS \geq 0$
- iii)  $S^3 - 9CV^2 \geq 0$
- iv)  $M^3 - 3C^2V \geq 0$

Demostración: Vamos a aplicar el teorema de Brunn-Minkowski a

$\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + K_1$ , los cuales definen la familia lineal:

$$\mathbf{C}^\lambda = (1 - \lambda)\mathbf{A} + \lambda\mathbf{A}_1 = (1 - \lambda)\mathbf{A} + \lambda\mathbf{A} + \lambda K_1 = \mathbf{A} + \lambda K_1 = \mathbf{A}_\lambda.$$

Entonces  $\theta(\lambda) = V(\mathbf{A}_\lambda)^{1/3}$  es cóncava, donde  $\theta(\lambda)$  es

$$\theta(\lambda) = \left( V(\mathbf{A}) + \lambda S(\mathbf{A}) + \lambda^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\lambda^3}{3} C \right)^{1/3},$$

así que  $\theta''(\lambda) \leq 0$  para toda  $\lambda \in [0, 1]$ .

Calculando la segunda derivada y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}\theta'(\lambda) &= \frac{1}{3}[\theta(\lambda)]^{-2}(S + 2M\lambda + C\lambda^2) \\ \theta''(\lambda) &= \frac{1}{3}[-2[\theta(\lambda)]^{-3}\theta'(\lambda)(S + 2M\lambda + C\lambda^2) + [\theta(\lambda)]^{-2}(2M + 2C\lambda)] \\ &= -\frac{2}{9}[\theta(\lambda)]^{-5}[(S + 2M\lambda + C\lambda^2)^2 - 3(V(\mathbf{A}) + \lambda S(\mathbf{A}) + \lambda^2 M(\mathbf{A}) + \frac{1}{3}C)(M + C\lambda)] \\ &= -\frac{2}{9}[\theta(\lambda)]^{-5}[S^2 + 4M^2\lambda^2 + 4MS\lambda + 2SC\lambda^2 - 3MV - 3VC\lambda - 3SM\lambda - 3SC\lambda^2 - 3M^2\lambda^2] \\ \theta''(\lambda) &= -\frac{2}{9}(\theta(\lambda))^{-5}[(S^2 - 3MV) + (MS - 3CV)\lambda + (M^2 - CS)\lambda^2],\end{aligned}$$

como  $\theta(\lambda) > 0$  si  $\lambda \in [0, 1]$ , entonces

$$(S^2 - 3MV) + (MS - 3CV)\lambda + (M^2 - CS)\lambda^2 \geq 0,$$

para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Haciendo  $\lambda = 0$  obtenemos  $S^2 - 3MV \geq 0$ .

Ahora sea  $\lambda = 1$ .  $(S^2 - 3MV) + (MS - 3CV) + (M^2 - CS) \geq 0$

se cumple para las magnitudes de cualquier cuerpo convexo  $\mathbf{A}$ , en particular

$\frac{1}{\alpha}\mathbf{A}$  con  $\alpha > 0$ . Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{1}{\alpha^4}(S^2(\mathbf{A}) - 3M(\mathbf{A})V(\mathbf{A})) + \frac{1}{\alpha^3}(M(\mathbf{A})S(\mathbf{A}) - 3CV(\mathbf{A})) + \frac{1}{\alpha^2}(M^2(\mathbf{A}) - CS(\mathbf{A})) \geq 0$$

multiplicando por  $\alpha^2$  obtenemos

$$\frac{1}{\alpha^2}(S^2(\mathbf{A}) - 3M(\mathbf{A})V(\mathbf{A})) + \frac{1}{\alpha}(M(\mathbf{A})S(\mathbf{A}) - 3CV(\mathbf{A})) + (M^2(\mathbf{A}) - CS(\mathbf{A})) \geq 0$$

haciendo  $\alpha \rightarrow \infty$  llegamos a  $M^2 - CS \geq 0$ . Obsérvese además que  $MS - 3CV \geq 0$ ,

ya que

$$S^2 \geq 3MV \text{ y } M^2 \geq CS \implies M^2S^2 \geq 3CVMS \implies S^3 \geq 9CV^2$$

Sólo resta deducir iii) y iv).

$$S^4 \geq 9M^2V^2 \geq 9CSV^2 \implies S^3 \geq 9CV^2$$

$$M^4 \geq C^2S^2 \geq C^2(3MV) \implies M^3 \geq 3C^2V$$

■

En el siguiente teorema vamos a dar una prueba alternativa de las desigualdades de Minkowski iii) y iv) del teorema anterior. A diferencia de la prueba dada en el teorema anterior esta no depende de las desigualdades i) y ii). Aunque las ideas involucradas son semejantes.

No hay que olvidar que en Matemáticas es muy importante tener distintas demostraciones de un teorema basadas en distintos argumentos.

**Teorema 3.4.2** Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo y  $V, S, M, C$ , sus magnitudes fundamentales. Entonces

$$\text{iii) } S^3 - 9CV^2 \geq 0$$

$$\text{iv) } M^3 - 3C^2V \geq 0$$

*Demostración:* Sea  $\delta \geq 0$ , por el Teorema 1.2.5

$$\sum(\mathbf{A}) + \sum(\mathbf{K}_\delta) \subset \sum(\mathbf{A} + \mathbf{K}_\delta) = \sum(\mathbf{A}_\delta)$$

usando el corolario 1.6.1 y el lema 3.1.1 obtenemos

$$V(\sum(\mathbf{A}) + \sum(\mathbf{K}_\delta)) \leq V(\sum(\mathbf{A} + \mathbf{K}_\delta)) = V(\sum(\mathbf{A}_\delta))$$

es decir

$$V^{\frac{1}{3}}(\sum(\mathbf{A}) + \sum(\mathbf{K}_\delta)) \leq V^{\frac{1}{3}}(\sum(\mathbf{A}_\delta))$$

aplicando la fórmula de Steiner y el teorema 3.2.1, se tiene que

$$V^{\frac{1}{3}}(\mathbf{A}) + V^{\frac{1}{3}}(\mathbf{K}_\delta) \leq (V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}))^{\frac{1}{3}}$$

por lo que

$$3V(\mathbf{A})^{\frac{2}{3}}(\frac{4\pi}{3})^{\frac{1}{3}}\delta + V(\mathbf{A})^{\frac{1}{3}}(\frac{4\pi}{3})^{\frac{2}{3}}\delta^2 \leq \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A})$$

haciendo tender  $\delta \rightarrow 0$  y  $\delta \rightarrow \infty$  obtenemos respectivamente,

$$3V^{\frac{2}{3}}(\mathbf{A})(\frac{4\pi}{3})^{\frac{1}{3}} \leq S(\mathbf{A})$$

$$3V^{\frac{1}{3}}(\mathbf{A})(\frac{4\pi}{3})^{\frac{2}{3}} \leq M(\mathbf{A})$$

entonces

$$36\pi V^2(\mathbf{A}) \leq S^3(\mathbf{A})$$

$$48\pi^2 V(\mathbf{A}) \leq M^3(\mathbf{A})$$

recuerde que  $C = 4\pi$ . ■

### 3.5 Cuerpos Extremales.

Por cuerpos extremales vamos a entender aquellos cuerpos convexos donde las desigualdades de Minkowski se convierten en igualdad.

Es importante observar que en la esfera se dan las cuatro igualdades, ya que  $V(K_1) = \frac{4}{3}\pi$ ,  $S(K_1) = 4\pi$ ,  $M(K_1) = 4\pi$ .

La pregunta es si será el único cuerpo convexo donde se da la igualdad en alguna de las desigualdades de Minkowski.

Responderemos a esto con el siguiente teorema pero antes necesitaremos un lema, cuya demostración se puede consultar en [8].

**Lema 3.5.1** *Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo tal que  $M^2(\mathbf{A}) = 4\pi S(\mathbf{A})$  y  $\mathbf{B}$  un cuerpo convexo. Entonces*

$$S(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \geq S(\mathbf{A}) + S(\mathbf{B}) + \frac{1}{2\pi}M(\mathbf{A})M(\mathbf{B})$$

**Teorema 3.5.1** *En el teorema 3.4.1 la desigualdad ii) es igualdad sólo para la esfera sólida, al igual que iv). En los cuerpos convexos propios (cuerpos convexos con interior no vacío) la desigualdad iii) es igualdad sólo para las esferas sólidas.*

Demostración:

La igualdad en ii) sólo se da para esferas sólidas. Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo tal que  $M(\mathbf{A})^2 - CS(\mathbf{A}) = 0$ . Sea  $\mathbf{B}$  un segmento de longitud  $s$  y dirección  $v$ . Por el lema anterior:

$$S(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \geq S(\mathbf{A}) + S(\mathbf{B}) + \frac{1}{2\pi}M(\mathbf{A})M(\mathbf{B}) \quad (8)$$

$$\text{pero } S(\mathbf{B}) = 0, \quad M(\mathbf{B}) = \pi s \quad \text{y} \quad S(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = S(\mathbf{A}) + \ell(v)s \quad (9)$$

donde  $\ell(v)$  es el perímetro de la figura plana convexa obtenida al proyectar  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  ortogonalmente en el plano  $H$ . Para ver porque  $S(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = S(\mathbf{A}) + \ell(v)s$ , vamos a describir geoméricamente  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

Trace el cilindro en la dirección  $v$  de  $\mathbf{A}$ . Así obtenemos un tubo que contiene al cuerpo  $\mathbf{A}$  y la intersección de la frontera de  $\mathbf{A}$  con la frontera del cilindro es una curva



$\alpha$  no necesariamente plana. Ahora corte a  $\mathbf{A}$  a lo largo de  $\alpha$  y traslade la rebanada derecha en la dirección  $v$  a una distancia  $s$ ; de esta manera obtenemos dos rebanadas de  $\mathbf{A}$  separadas, por último tome el caso convexo de estas dos rebanadas; el resultado es:  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

Ahora sustituyendo las igualdades en la desigualdad y simplificando la expresión obtenemos:

$$\ell(v) \geq \frac{M(\mathbf{A})}{2} \quad (10)$$

para toda  $v \in S^2$ .

Vamos a recordar las fórmulas de Cauchy para proyecciones, ver la sección 2.3.

$$\frac{\int \ell(v) dv}{4\pi} = \frac{M(\mathbf{A})}{2} = \ell \quad (11)$$

$$\frac{\int b(v) dv}{4\pi} = \frac{M(\mathbf{A})}{2\pi} = b \quad (12)$$

$$\frac{\int f(v) dv}{4\pi} = \frac{S(\mathbf{A})}{4} = f \quad (13)$$

donde  $\ell(v)$ ,  $b(v)$ ,  $f(v)$  son el perímetro, el ancho y el área de la proyección ortogonal del cuerpo convexo  $\mathbf{A}$  en la dirección  $v$ , y  $\bar{\ell}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{f}$  son el promedio de estas cantidades respectivamente.

Vamos a probar que (10) realmente es una igualdad.

Si para algún  $v \in S^2$ ,  $\ell(v) - \frac{M(\mathbf{A})}{2} > 0$  y como  $\ell : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, existiría una vecindad de  $v$  donde  $\ell(v) - \frac{M(\mathbf{A})}{2} > 0$  ya que  $v \in \left(\ell - \frac{M(\mathbf{A})}{2}\right)^{-1}(0, \infty)$  el cual es abierto en  $S^2$ .

Entonces tendríamos

$$\int_v \ell(v) dv > \frac{M(\mathbf{A})}{2} \int_{v \in S^2} 1 dv = 4\pi \frac{M(\mathbf{A})}{2},$$

por lo tanto  $\frac{\int \ell(v) dv}{4\pi} > \frac{M(\mathbf{A})}{2}$  para todo  $v \in S^2$ . Conviene detenernos para recordar que  $M^2(\mathbf{A}) = 4\pi S(\mathbf{A})$  y que queremos probar que  $\mathbf{A}$  es una esfera sólida. Es importante señalar que la idea de la demostración es ver que las proyecciones ortogonales

de  $\mathbf{A}$  son círculos.

La desigualdad isoperimétrica dice que  $\ell^2(v) - 4\pi f(v) \geq 0$  sustituyendo  $\ell(v)$  obtenemos  $M^2(\mathbf{A}) - 16\pi f(v) \geq 0$  por lo tanto

$$\frac{M^2(\mathbf{A})}{16\pi} \geq f(v), \quad \frac{1}{4\pi} \int \frac{M^2(\mathbf{A})}{16\pi} dv \geq \int \frac{f(v)}{4\pi} dc \geq \frac{S}{4},$$

entonces  $M^2(\mathbf{A}) \geq 4\pi S(\mathbf{A})$  lo cual ya lo sabíamos pero ahora además subemos que se da la igualdad  $M^2 - 4\pi S = 0$ .

Ahora regresándonos y por un argumento de continuidad parecido al anterior obtenemos  $M^2(\mathbf{A}) - 16\pi f(v) = 0$  por lo tanto (sustituyendo  $M(\mathbf{A}) = 2\ell(v)$ )

$4\ell^2(v) = 16\pi f(v)$  es decir  $\ell^2(v) = 4\pi f(v)$ , así cada proyección satisface la desigualdad isoperimétrica. Por lo tanto cada proyección es un círculo. Obteniendo que  $\mathbf{A}$  es una esfera.

A continuación vamos a probar que la igualdad iii) sólo se da para las esferas sólidas (siempre que  $V > 0$ ).

Si  $\mathbf{A}$  es un intervalo se da la igualdad. Pero si  $V > 0$  sólo se da para las esferas sólidas a saber:

$$0 = S(S^3 - 9CV^2) = (S^4 - 9M^2V^2) + 9V^3(M^2 - CS).$$

Como  $V > 0$   $M^2 - CS = 0$ , entonces  $\mathbf{A}$  es una esfera sólida.

La igualdad en iv) sólo se da para las esferas sólidas.

$$0 = M^6 - 9C^4V^2 = C^3(S^3 - 9CV^2) + (M^6 - C^3S^3),$$

por lo tanto  $M^2 - CS = 0$  y por lo tanto  $\mathbf{A}$  es una esfera sólida. ■

Existen otros cuerpos convexos que al igual que la esfera también son extremales. Estos cuerpos se conocen como cuerpos gorra de la esfera y como su nombre lo indica tienen una íntima relación con la esfera sólida.

**Definición 3.5.1** Un cuerpo gorra de la esfera sólida, es el casco convexo de una esfera sólida, unión un número finito o numerable de puntos con la propiedad que el segmento que une a dos cualesquiera de ellos intersecta a la esfera.

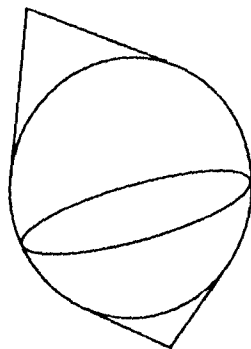


Figura 9: Cuerpo gorra.

Una observación importante es que la esfera sólida se puede tomar de radio cero y así poder considerar a un intervalo como un cuerpo gorra de la esfera sólida, lo cual será importante más adelante.

Como los cuerpos gorra son extremales surge naturalmente la siguiente pregunta: ¿Existen otros cuerpos convexos para los cuales la desigualdad i) en el teorema número 3.4.1 se convierte en igualdad?

**Teorema 3.5.2** *En el teorema número 3.4.1 la desigualdad i) se convierte en igualdad sólo para los cuerpos convexos llamados cuerpos gorra de la esfera.*

Demostración:

*La igualdad en i) sólo se da para los cuerpos gorra de la esfera sólida, como bien lo supuso Minkowski; pero fue demostrado rigurosamente por G. Bol. Debido a que no tenemos los elementos necesarios, tendremos que renunciar a la demostración. ■*



## CAPITULO 4

### Diagrama de Blaschke

#### 4.1 El Problema Principal.

Hasta ahora hemos visto los siguientes resultados en la teoría de las magnitudes fundamentales de masa:

- La Igualdad de Steiner.
- El Teorema funcional.
- El Teorema de Brunn-Minkowski.
- Las Desigualdades de Minkowski.

Es importante observar que todo lo hemos hecho en  $\mathbb{R}^3$ , pero es relativamente sencillo generalizar estos resultados a  $\mathbb{R}^n$ .

Calcular las magnitudes fundamentales de masa de un cuerpo convexo es muy complicado, sin embargo para ciertos cuerpos convexos interesantes, esto se puede hacer sin mucha herramienta (ver la última sección del capítulo II), al respecto un problema natural que aparece es el siguiente:

Determinar las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer tres números no negativos dados  $M$ ,  $S$  y  $V$ , para ser las magnitudes de masa de algún cuerpo convexo.

Este problema tiene una larga historia, y desde principios de este siglo se ha logrado avanzar relativamente poco en su solución. Aún hoy en día permanece sin ser

resuelto.

Como todo problema importante, la búsqueda de su solución ha dado lugar a nuevos e importantes desarrollos. En el presente capítulo se exponen algunas ideas importantes que permiten ganar terreno hacia la solución del problema, además veremos conjeturas que han sido derrumbadas y otras nuevas que se mantienen firmes.

Dados tres números  $M$ ,  $S$ ,  $V$  que satisfagan las cuatro desigualdades de Minkowski, no necesariamente son las magnitudes fundamentales de algún cuerpo convexo.

Por ejemplo sea  $M = 2\pi$ ,  $S = \pi$ ,  $V = 0$ , claramente satisfacen las desigualdades:

$$S^2 - 3MV \geq 0 \quad (14)$$

$$M^2 - 4\pi S \geq 0 \quad (15)$$

$$S^3 - 36\pi V^2 \geq 0 \quad (16)$$

$$M^3 - 48\pi^2 V \geq 0 \quad (17)$$

Como  $V=0$ , para que un cuerpo convexo  $\mathbf{A}$  los realizara como sus magnitudes fundamentales,  $\mathbf{A}$  tendría que ser plano.

Pero recuerde que si  $\mathbf{A}$  es plano, 1.9.1,  $S(\mathbf{A}) = 2a(\mathbf{A})$ ,  $M(\mathbf{A}) = \frac{\pi}{2}p(\mathbf{A})$ , entonces

$$a(\mathbf{A}) = \frac{\pi}{2}, \quad p(\mathbf{A}) = 4,$$

esto último contradice la conocida desigualdad isoperimétrica  $[p(\mathbf{A})]^2 \geq 4\pi a(\mathbf{A})$  para el plano.

## 4.2 El Diagrama de Blaschke .

En 1916 W. Blaschke propuso mapear la familia de conjuntos convexos  $\mathcal{K}$ , en el espacio 2-dimensional  $\mathbb{R}^2$ , de la siguiente manera:

La función que Blaschke propuso, y a la cual llamaremos función de Blaschke, es la siguiente:

$\beta : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^2$  como sigue:

$$\beta(\mathbf{A}) = (x(\mathbf{A}), y(\mathbf{A})) = \left( \frac{4\pi S(\mathbf{A})}{M^2(\mathbf{A})}, \frac{48\pi^2 V(\mathbf{A})}{M^3(\mathbf{A})} \right) \quad (18)$$

**Definición 4.2.1 Diagrama de Blaschke**

Se conoce como *diagrama de Blaschke*, a la imagen de la función de Blaschke, es decir:

$$\beta(\mathcal{K}) = \{ \beta(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{A} \in \mathcal{K} \} \quad (19)$$

¿Qué relación tiene el Diagrama de Blaschke con el problema principal?

Retomando el problema principal, observamos que  $V, S, M$  son las magnitudes de un cuerpo convexo si y sólo si  $(x, y) \in \beta(\mathcal{K})$ , entonces el problema será resuelto, si la forma geométrica de  $\beta(\mathcal{K})$  es completamente determinada, y para esto necesitamos conocer otra desigualdad para acotar completamente el lado derecho (ver figura 10) de  $\beta(\mathcal{K})$ . Por esta razón este problema principal también se conoce como el problema de encontrar un Sistema Completo de Desigualdades, ya que se trata de obtener un sistema de desigualdades de tal forma que: si cualesquiera cuatro números reales no negativos las satisfacen, entonces exista un cuerpo convexo que las realice como sus magnitudes fundamentales.

Se conjetura que falta una desigualdad, sin embargo no podemos descartar la posibilidad de que sean más.

Más adelante se dará una conjetura acerca de esta desigualdad desconocida.

De esta forma Blaschke transformó el problema principal: en uno más geométrico, pero que el tiempo nos ha enseñado que no es más sencillo.

**Propiedades de la función de Blaschke.**

Algunas propiedades importantes de la función de Blaschke se enuncian en los siguientes resultados.

Ya se probó que  $M, S, V$  son funcionales continuas, por lo tanto  $x, y$  son funcionales continuas, entonces la función de Blaschke es continua.

**Teorema 4.2.1** *Bajo la función de Blaschke cuerpos homotéticos van a dar al mismo punto, es decir*

$\beta(\lambda\mathbf{A}) = \beta(\mathbf{A})$ , para toda  $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ . Además a cuerpos congruentes también los manda al mismo punto.

Demostración: Sea  $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$   $\beta(\lambda\mathbf{A}) = (x(\lambda\mathbf{A}), y(\lambda\mathbf{A}))$ , pero

$$\begin{aligned} x(\lambda\mathbf{A}) &= \frac{4\pi S(\lambda\mathbf{A})}{M^2(\lambda\mathbf{A})} = \frac{4\pi\lambda^2 S(\mathbf{A})}{\lambda^2 M^2(\mathbf{A})} = \frac{4\pi S(\mathbf{A})}{M^2(\mathbf{A})} = x(\mathbf{A}) \\ y(\lambda\mathbf{A}) &= \frac{48\pi^2 V(\lambda\mathbf{A})}{M^3(\lambda\mathbf{A})} = \frac{48\pi^2 \lambda^3 V(\mathbf{A})}{\lambda^3 M^3(\mathbf{A})} = \frac{48\pi^2 V(\mathbf{A})}{M^3(\mathbf{A})} = y(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

por lo tanto  $\beta(\lambda\mathbf{A}) = \beta(\mathbf{A})$ . Recuerdese que:

$$V(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^3 V(\mathbf{A}), \quad M(\lambda\mathbf{A}) = \lambda M(\mathbf{A}), \quad S(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^2 S(\mathbf{A}).$$

La segunda parte del teorema se sigue debido a que  $V$ ,  $S$ , y  $M$  son invariantes bajo el movimiento. ■

Es importante hacer notar que no sólo cuerpos homotéticos van a dar al mismo punto. Por ejemplo; el cono ( $R = 0.7479$ ,  $H = 2.0241$ ) y el cilindro ( $R = 0.3883$ ,  $H = 2.1065$ ) tienen las mismas magnitudes de masa ( $V = 1.000$ ,  $S = 6.0944$ ,  $M = 10.4544$ ).

**Lema 4.2.1** Sean  $(x_0, y_0) = \beta(\mathbf{A})$  y  $\delta \geq 0$ . Entonces  $\beta(\mathbf{A}_\delta) = (x_\delta, y_\delta)$ , donde

$$\begin{aligned} x_\delta &= \frac{1}{(1+\lambda)^2} (x_0 + 2\lambda + \lambda^2) \\ y_\delta &= \frac{1}{(1+\lambda)^3} (y_0 + 3x_0\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3) \end{aligned}$$

Demostración:

$$x_\delta = x(\mathbf{A}_\delta) = \frac{4\pi S(\mathbf{A}_\delta)}{M^2(\mathbf{A}_\delta)}, \quad y_\delta = y(\mathbf{A}_\delta) = \frac{48\pi^2 V(\mathbf{A}_\delta)}{M^3(\mathbf{A}_\delta)}$$

Ahora vamos a usar las fórmulas para las magnitudes fundamentales de un cuerpo paralelo.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{A}_\delta) &= V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{\delta^3}{3} C(\mathbf{A}) \\ M(\mathbf{A}_\delta) &= M(\mathbf{A}) + \delta C(\mathbf{A}) = M(\mathbf{A}) + 4\pi\delta \\ S(\mathbf{A}_\delta) &= S(\mathbf{A}) + 2\delta M(\mathbf{A}) + \delta^2 C(\mathbf{A}) \end{aligned}$$



Sea  $\lambda = \frac{4\pi\delta}{M(\mathbf{A})}$  entonces  $M(\mathbf{A}_\delta) = M(\mathbf{A})(1 + \lambda)$

$$\begin{aligned} x(\mathbf{A}_\delta) &= \frac{4\pi(S(\mathbf{A}) + 2\delta M(\mathbf{A}) + \delta^2 4\pi)}{M^2(\mathbf{A})(1 + \lambda)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda)^2} \left( \frac{S(\mathbf{A})4\pi}{M^2(\mathbf{A})} + \frac{8\pi\delta}{M(\mathbf{A})} + \frac{16\pi^2\delta^2}{M^2(\mathbf{A})} \right) \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda)^2} (x_0 + 2\lambda + \lambda^2) \end{aligned}$$

Recuerde que  $x_0 = \frac{4\pi S(\mathbf{A})}{M^2(\mathbf{A})}$ ,  $y_0 = \frac{48\pi^2 V(\mathbf{A})}{M^3(\mathbf{A})}$

$$\begin{aligned} y_\delta &= \frac{48\pi^2(V(\mathbf{A}) + \delta S(\mathbf{A}) + \delta^2 M(\mathbf{A}) + \frac{4}{3}\pi\delta^3)}{M^3(\mathbf{A})(1 + \lambda)^3} \\ &= \left( \frac{48\pi^2 V(\mathbf{A})}{M^3(\mathbf{A})} + \frac{48\pi^2 \delta S(\mathbf{A})}{M^3(\mathbf{A})} + \frac{48\pi^2 \delta^2 4\pi M(\mathbf{A})}{M^3(\mathbf{A}) M^2(\mathbf{A})} + \frac{1}{(1 + \lambda)^3} \right) \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda)^3} (y_0 + 3x_0\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3) \end{aligned}$$

**Lema 4.2.2** Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo de ancho constante  $h$ , entonces:

$$3hS(\mathbf{A}) - 6V(\mathbf{A}) = 2\pi h^3, \quad \text{y} \quad M(\mathbf{A}) = 2\pi h.$$

Ver la prueba en el apéndice B.

**Teorema 4.2.2** Sea  $\ell$  la recta  $y = 3x - 2$ , la cual une el punto  $(\frac{2}{3}, 0)$  con  $(1, 1)$  en el diagrama de Blaschke. entonces

- 1) Si  $\mathbf{A}$  es un cuerpo convexo de ancho constante, entonces  $\beta(\mathbf{A}) \in \ell$ .
- 2) Si  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  y  $\beta(\mathbf{A}) \in \ell$ , entonces para todo  $\delta > 0$   $\beta(\mathbf{A}_\delta) \in \ell$

*Demostración:* 1) Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo de ancho constante  $h$ ,  $\beta(\mathbf{A}) = (x(\mathbf{A}), y(\mathbf{A}))$ , como  $\beta(\lambda\mathbf{A}) = \beta(\mathbf{A})$  para todo  $\lambda > 0$ , podemos suponer que  $h=1$ . Entonces por el lema anterior,

$$\begin{aligned}
 3S(\mathbf{A}) - 6V(\mathbf{A}) &= 2\pi, & M(\mathbf{A}) &= 2\pi \\
 \Leftrightarrow 3S(\mathbf{A}) - 2\pi &= 6V(\mathbf{A}) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi} \left( \frac{4\pi S(\mathbf{A})}{(2\pi)^2} \right) - \frac{2\pi}{(2\pi)^2} &= \frac{6V(\mathbf{A})}{(2\pi)^2} = \left( \frac{1}{4\pi} \right) \frac{48\pi^2 V(\mathbf{A})}{(2\pi)^3} \\
 \Leftrightarrow \frac{3}{4\pi} r(\mathbf{A}) - \frac{2}{4\pi} &= \frac{1}{4\pi} y(\mathbf{A}) \\
 \Leftrightarrow 3r(\mathbf{A}) - 2 &= y(\mathbf{A})
 \end{aligned}$$

por lo tanto  $\beta(\mathbf{A}) \in \ell$ .

**2)** Sea  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ , tal que  $\beta(\mathbf{A}) \in \ell$

Sea  $\delta > 0$ .

supongamos que  $\beta(\mathbf{A}) = (x_0, y_0)$  y  $\beta(\mathbf{A}_\delta) = (x_\delta, y_\delta)$ . Como  $\beta(\mathbf{A}) \in \ell$ ,  $3x_0 - 2 = y_0$ .

Queremos probar que  $3x_\delta - 2 = y_\delta$ .

recuerde que  $x_\delta = \frac{x_0 + 2\lambda + \lambda^2}{(1+\lambda)^2}$ ,  $y_\delta = \frac{y_0 + 3x_0\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3}{(1+\lambda)^3}$

con  $\lambda = \frac{4\pi}{M(\mathbf{A})} \delta$

$$\begin{aligned}
 3x_\delta - 2 &= \frac{3x_0 + 6\lambda + 3\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - 2 \\
 &= \frac{3x_0 + 6\lambda + 3\lambda^2 - 2 - 4\lambda - 2\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \\
 &= \frac{(3x_0 - 2) + 2\lambda + \lambda^2}{(1+\lambda)^2} \\
 &= \frac{(3x_0 - 2) + 2\lambda + \lambda^2 + 3x_0\lambda - 2\lambda + 2\lambda^2 + \lambda^3}{(1+\lambda)^3} \\
 &= \frac{y_0 + 3x_0\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3}{(1+\lambda)^3} \\
 &= y_\delta
 \end{aligned}$$

### Propiedades Topológicas y Geométricas del Diagrama de Blaschke.

A continuación se estudiarán propiedades topológicas y geométricas del diagrama de Blaschke.

**Teorema 4.2.3**  $\beta(\mathcal{K})$  es compacto y convexo.

Demostración: Sea  $K_\delta$  una esfera sólida de radio  $\delta \geq 0$ . Entonces el conjunto de

todos los cuerpos convexos contenidos en ella, es un subespacio compacto de  $\mathcal{K}$ , el conjunto de los cuerpos convexos de  $\mathbb{R}^3$ , debido al teorema de Blaschke 1.2.2. Además debemos observar que la imagen de este subespacio es el Diagrama de Blaschke. Esto se debe al teorema 1.2.1 y al hecho que con una homotecia y traslación podemos llevar a cualquier cuerpo convexo dentro de  $K_\delta$ .

Por otro lado sabemos que  $\mathcal{K}$  es conexo por trayectorias, ya que la familia lineal entre dos cuerpos convexos es una función continua del intervalo  $[0, 1]$  en  $\mathcal{K}$ . En particular  $\mathcal{K}$  es conexo.

De esta forma usando la continuidad de la función de Blaschke, obtenemos que  $\beta(\mathcal{K})$  es compacto y conexo. ■

De hecho más adelante veremos que  $\beta(\mathcal{K})$  es arco-conexo.

#### Teorema 4.2.4

$$\beta(\mathcal{K}) \subseteq \mathbb{I}^2 = [0, 1] \times [0, 1], \quad (20)$$

y además  $x^2 \geq y$ .

Demostración:

$$\begin{aligned} M^2 \geq 4\pi S & \quad \text{entonces} & 1 \geq \frac{4\pi S}{M^2} = x \\ M^3 \geq 48\pi^2 V & \quad \text{entonces} & 1 \geq \frac{48\pi^2 V}{M^3} = y \\ \text{por lo tanto} & & \beta(\mathcal{K}) \subseteq \mathbb{I}^2. \\ \text{por otro lado} & S^2 - 3MV \geq 0 \\ \iff & S^2 \geq 3MV \\ \iff & 16\pi^2 S^2 \geq 48\pi^2 MV \\ \iff & \frac{16\pi^2 S^2}{M^4} \geq \frac{48\pi^2 V}{M^3} \\ & x^2 = \left(\frac{4\pi S}{M^2}\right)^2 \geq \frac{48\pi^2 V}{M^3} = y \end{aligned}$$

Es decir el diagrama de Blaschke esta por debajo de la parábola  $y = x^2$ . ■

Ahora veamos cual es la imagen de los cuerpos convexos impropios.

Si  $y=0$ ,  $x \leq \frac{8}{\sqrt{3}}$  ya que:  $0 = y = \frac{48\pi^2 V(\mathbf{A})}{M(\mathbf{A})^3}$ , entonces  $V = 0$  entonces el cuerpo convexo

es plano y por lo tanto satisface la desigualdad isoperimétrica

$$[p(\mathbf{A})]^2 \geq 4\pi a(\mathbf{A})$$

pero recuerde que en figuras planas:

$p(\mathbf{A}) = \frac{2}{\pi}M(\mathbf{A})$  ,  $a(\mathbf{A}) = \frac{S(\mathbf{A})}{2}$  entonces

$$\frac{4}{\pi^2} \geq 4\pi \frac{S(\mathbf{A})}{2} \iff \frac{S}{\pi^2} \geq \frac{4\pi S(\mathbf{A})}{M^2(\mathbf{A})} = x.$$

Esto nos dice que sólo una parte de la base de  $I^2$  puede estar en el diagrama de Blaschke, a saber:  $x \leq \frac{8}{\pi^2}$  y  $y=0$  , (ver figura 10).

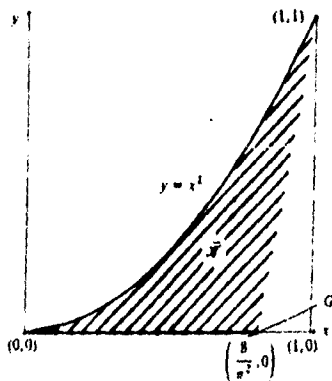


Figura 10: Diagrama de Blaschke.

Existe otra desigualdad que nos ayuda a acotar  $\beta(K)$ , aunque no completamente, esta es debida a H. Groemer [6].

$$V \geq \frac{\pi S}{24M} \left( S - \frac{2M^2}{\pi^3} \right) \quad (21)$$

**Teorema 4.2.5**  $y \geq \frac{\pi}{8} r \left( r - \frac{8}{\pi^2} \right)$ .

*Demostración:*

$$\begin{aligned} V \geq \frac{\pi S}{24M} \left( S - \frac{2M^2}{\pi^2} \right) &\iff \frac{48\pi^2}{M^3} V \geq \frac{48\pi^2}{M^3} \frac{\pi S}{24M} \left( S - \frac{2M^2}{\pi^2} \right) \\ \frac{48\pi^2}{M^3} V &\geq \frac{2\pi^4 S}{M^4} \left( \frac{M^2}{4\pi} \left( \frac{4\pi S}{M^2} \right) - \left( \frac{2M^2}{8\pi} \right) \frac{8}{\pi^2} \right) \\ \frac{48\pi^2}{M^3} V &\geq \frac{2\pi^4 S}{M^4} \frac{M^2}{4\pi} \left( \frac{4\pi S}{M^2} - \frac{8}{\pi^2} \right) \\ \frac{48\pi^2}{M^3} V &\geq \frac{4\pi S}{M^2} \frac{\pi}{8} \left( \frac{4\pi S}{M^2} - \frac{8}{\pi^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{pero } x = \frac{4\pi S}{M^2}, \quad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}$$

$$\text{por lo tanto } y \geq \frac{\pi}{8} x \left( x - \frac{8}{\pi^2} \right). \quad \blacksquare$$

Esta es una parábola que pasa por  $(0, \frac{8}{\pi^2})$  (ver figura 10).

Entonces  $\beta(\mathcal{K})$  queda por arriba de esta parábola.

Una propiedad topológica muy importante de  $\beta(\mathcal{K})$  se enuncia en el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.6**  $\beta(\mathcal{K})$  es conexo por trayectorias.

*Demostración:* Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$  tales que  $\beta(\mathbf{A}) \neq \beta(\mathbf{B})$

sea  $C_\lambda = (1-\lambda)\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$  con  $\lambda \in [0, 1]$ .

Definir  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \beta(\mathcal{K})$  como  $\alpha(\lambda) = \beta(C(\lambda))$ .

Observe que  $C_\lambda: [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}$  es una función continua y como  $\beta: \mathcal{K} \rightarrow \beta(\mathcal{K})$  es continua, entonces  $\alpha$  es continua. Claramente  $\alpha(0) = \mathbf{A}$ ,  $\alpha(1) = \mathbf{B}$ , por lo tanto  $\beta(\mathcal{K})$  es conexo por trayectorias.  $\blacksquare$

Más aún podemos probar que  $\beta(\mathcal{K})$  es arco-conexo. Para probar esto, tenemos que ver que para cualquier convexo  $\mathbf{A}$ ,  $\beta(\mathbf{A})$  se puede conectar con  $\beta(K_1)$ , donde  $K_1$  es la esfera sólida de radio 1, por medio de un arco<sup>1</sup> contenido en  $\beta(\mathcal{K})$ .

Para justificar esta afirmación vamos a recurrir a los cuerpos paralelos.

<sup>1</sup>un arco es una curva homotomórfica al intervalo  $[0,1]$ , y a diferencia de una trayectoria no se permiten autointersecciones.

Sea  $\delta > 0$ .  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  entonces  $\mathbf{A}_\delta$  denota el cuerpo paralelo de  $\mathbf{A}$ . Obsérvese que  $B(K_1) = (1, 1)$  y además es el único cuerpo convexo con esa propiedad, debido al teorema 3.5.1.

Geoméricamente si hacemos tender  $\delta$  al infinito, el cuerpo  $\mathbf{A}_\delta$  dividido entre su volumen tiende a una esfera sólida. De aquí que no es de extrañar que si  $\delta$  tiende al infinito,  $\beta(\mathbf{A}_\delta)$  tiende al punto  $(1, 1)$ .

$$f : [0, \infty) \rightarrow \beta(\mathcal{K}) \text{ dada por}$$

$$f(\lambda) = \left( \frac{x_0 + 2\lambda + \lambda^2}{(1+\lambda)^2}, \frac{y_0 + x_0\lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{(1+\lambda)^3} \right)$$

donde  $(x_0, y_0) = \beta(\mathbf{A})$ ,

es una función continua e inyectiva que une  $\beta(\mathbf{A})$  con  $(1, 1)$ . Es decir la cerradura topológica de  $f([0, \infty))$  es un arco contenido en  $\beta(\mathcal{K})$ , ya que  $\beta(\mathcal{K})$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^2$ . Este arco tiene puntos extremos  $\beta(\mathbf{A})$  y  $(1, 1)$ .

Si  $x_0 \neq 1$  se prueba que  $f$  es inyectiva, haciendo las cuentas directamente.

Con ayuda del estudio hecho acerca del Diagrama de Blaschke y la función de Blaschke, vamos a enumerar las imágenes de algunas familias interesantes de cuerpos convexos.

La imagen bajo la función de Blaschke de:

- 1) los intervalos es el origen, ya que tienen volumen y superficie nula.
- 2) las figuras planas es parte del eje  $x$ : del origen al punto  $(\frac{2}{3}, 0)$  el cual corresponde a la imagen del disco; mas allá del eje  $x$  ya no hay nada debido a la desigualdad isoperimétrica.
- 3) la esfera, es el punto  $(1, 1)$ .
- 4) los cuerpos de ancho constante, es un segmento de la recta  $y = 3x - 2$ , la cual une el punto  $(\frac{2}{3}, 0)$  con  $(1, 1)$  y además contiene al punto  $(1, 1)$  ya que la esfera es de ancho constante.
- 5) los cuerpos gorra, es la parábola  $y = x^2$ .

### Conjeturas con relación al Diagrama de Blaschke.

Dos conjeturas bien conocidas han sido planteadas acerca de la frontera desconocida.

Hadwiger [8] probó que de todos los cuerpos de revolución, con superficie y ancho promedio fijos, las esferas truncadas centralmente simétricas tienen el más pequeño volumen.

La imagen de estos cuerpos es una curva que une  $(\frac{8}{\pi^2}, 0)$  con  $(1, 1)$  y Hadwiger conjeturó que esta era la curva desconocida.

**Definición 4.2.2** Una esfera truncada es una esfera a la cual se le han removido un número numerable de casquetes esféricos, disjuntos dos a dos. Por un casquete esférico queremos decir la intersección no vacía de un semiespacio abierto, con una esfera el cual no contiene el centro de la esfera.

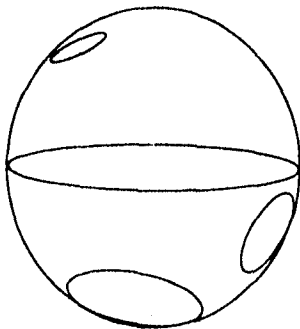


Figura 11: Esfera truncada.

Bieri [4] probó que esta conjetura es falsa, exhibiendo un cuerpo cuya imagen queda a la derecha de la curva propuesta por Hadwiger. Este cuerpo es una esfera

truncada asimétrica, obtenido al remover tres casquetes esféricos congruentes máximos de una esfera.

Una esfera es totalmente truncada, si es una esfera truncada y ningún subconjunto abierto relativo sobre la superficie de la esfera original permanece.

Bieri conjeturó que la imagen de las esferas totalmente truncadas es la curva que acota la derecha del Diagrama de Blaschke. Cabe hacer mención que la conjetura de Bieri permanece sin resolver.

Una observación importante es que la parábola  $y = x^2$  que acota la izquierda del Diagrama de Blaschke son la imagen bajo la función de Blaschke de los cuerpos gorra, ya que el teorema número 3.1.1 nos dice que la desigualdad i) se convierte en igualdad sólo para los cuerpos convexos llamados cuerpos gorra de la esfera.

Las esferas totalmente truncadas son los duales polares de los cuerpos gorra.

Otra conjetura acerca de la frontera desconocida es la siguiente:

Directamente de las desigualdades de Minkowski se ve que:

$$\frac{M}{4\pi} \geq \frac{S}{M} \geq \frac{3V}{S}$$

J.R. Sangwine-Yager [11], plantea una conjetura a partir de estas desigualdades, desigualdades geométricas válidas (por ejemplo la desigualdad de Bonnesen) involucrando media aritmética con peso.

La conjetura es la siguiente:

Para todo  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ :

$$\frac{S(\mathbf{A})}{M(\mathbf{A})} \leq \frac{8}{\pi^2} \frac{M(\mathbf{A})}{4\pi} + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \frac{3V(\mathbf{A})}{S(\mathbf{A})}$$

Vamos a ver como se traduce esta desigualdad en el diagrama de Blaschke.

Se afirma que en caso de la igualdad, esta desigualdad se traduce a una parábola a través de los puntos  $(0,0)$ ,  $(\frac{8}{\pi^2}, 0)$  y  $(1,1)$ .

$$\frac{S(\mathbf{A})}{M(\mathbf{A})} = \frac{8}{\pi^2} \frac{M(\mathbf{A})}{4\pi} + \left(1 + \frac{8}{\pi^2}\right) \frac{3V(\mathbf{A})}{S(\mathbf{A})}$$



multiplicando a la igualdad por  $\frac{(4\pi)^2 S}{M^3}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi S}{M^2}\right)^2 &= \frac{32}{\pi} \frac{S}{M^2} + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \frac{48\pi^2 V}{M^3} \\ \left(\frac{4\pi S}{M^2}\right)^2 &= \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{4\pi S}{M^2}\right) + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \frac{48\pi^2 V}{M^3} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x^2 = \frac{8}{\pi^2} x + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) y$$

la cual en efecto es una parábola a través de los puntos  $(0, 0)$ ,  $(\frac{8}{\pi^2}, 0)$  y  $(1, 1)$ .

Para saber cual es la imagen de una esfera totalmente truncada, se tienen que calcular sus magnitudes fundamentales, lo cual es sumamente complicado.

Cabe hacer mención que:

los Drs. Luis Montejano Peimbert y Jorge L. Arocha Perez, junto con el Matemático Ricardo Quintero, han calculado aproximaciones de las magnitudes fundamentales de algunas esferas totalmente truncadas. Como por ejemplo de la generada al suprimir cuatro casquetes congruentes y mutuamente tangentes. Para despues quitar nuevamente un casquete tangente a los círculos que determinan las regiones, de la superficie de la esfera, restantes.

Todo esto lo han hecho con ayuda de una formula que hallarán, la cual relaciona los radios de cuatro círculos sobre la superficie de la esfera, mutuamente tangentes. Algunas imagenes de estas esferas totalmente truncadas quedan ligeramente a la izquierda de la curva que propone J.R. Sangwine-Yager y otras ligeramente a la derecha.

### 4.3 Soluciones Relativas a la Frontera Desconocida.

En la definición 3.3.1 hemos introducido el concepto de familia lineal de cuerpos convexos  $\mathbf{C}^\lambda = (1 - \lambda)\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$  para dos cuerpos convexos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Ahora seguiremos una generalización de W. Blaschke, quien consideró una familia de cuerpos convexos  $\mathbf{C}[\theta]$ , donde el parámetro  $\theta$  puede variar continuamente en un intervalo.

**Definición 4.3.1** Decimos que  $\mathbf{C}[\theta]$  es una familia cóncava de cuerpos convexos si  $(1 - \lambda)\mathbf{C}[\alpha] + \lambda\mathbf{C}[\beta] \subset \mathbf{C}[(1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta]$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Se puede verificar fácilmente que la familia  $\mathbf{C}^\lambda$ , arriba mencionada, es una familia cóncava en el intervalo  $0 \leq \lambda \leq 1$ . De hecho la contención es una igualdad.

**Teorema 4.3.1** Sea  $\mathbf{C}[\theta]$  una familia cóncava de cuerpos convexos y sean  $V(\theta)$ ,  $S(\theta)$ , y  $M(\theta)$  las tres magnitudes fundamentales de masa del cuerpo convexo  $\mathbf{C}[\theta]$ , entonces las tres funciones  $V(\theta)^{\frac{1}{2}}$ ,  $S(\theta)^{\frac{1}{2}}$ , y  $M(\theta)$  son funciones cóncavas del parámetro  $\theta$ . ■

Para probar que  $V(\theta)^{\frac{1}{2}}$  es cóncava, tenemos que probar que  $V(\mathbf{C}[(1 - \lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1])^{\frac{1}{2}} > (1 - \lambda)V(\mathbf{C}[\theta_0])^{\frac{1}{2}} + \lambda V(\mathbf{C}[\theta_1])^{\frac{1}{2}}$ , donde  $\theta$  varía en  $[\theta_0, \theta_1]$  y  $\lambda \in [0, 1]$ .

Pero la prueba es directa usando el Teorema de Brunn-Minkowski y el hecho de que  $\mathbf{C}[\theta]$  es una familia cóncava; análogamente  $S(\theta)^{\frac{1}{2}}$ , y  $M(\theta)$ .

Una familia de cuerpos convexos muy importante es la familia paralela completa  $\mathbf{A}[\delta]$  subordinada al cuerpo convexo  $\mathbf{A}$ , en el intervalo  $-r \leq \delta \leq \infty$ , donde  $r$  es el radio de la inesfera de  $\mathbf{A}$ . La familia paralela une tanto a los cuerpos paralelos interiores  $\mathbf{A}[-\sigma] = \mathbf{A}_{(-\sigma)}$ ,  $0 < \sigma < r$ , como también a los cuerpos paralelos exteriores  $\mathbf{A}[\sigma] = \mathbf{A}_{(\sigma)}$ ,  $0 < \sigma < \infty$ , en un sólo parámetro  $\sigma$ . Probaremos que la familia paralela completa es cóncava, para lo cual necesitamos el siguiente:

**Lema 4.3.1** 1)  $(\mathbf{A}[\delta])[\sigma] \subset \mathbf{A}[\delta + \sigma]$  2)  $\mathbf{A}[\delta] + \mathbf{B}[\sigma] \subset (\mathbf{A} + \mathbf{B})[\delta + \sigma]$

Demostración. 1) se obtiene directamente del Teorema 1.1.6.

2)

CASO 1: Si  $\delta \leq 0, \sigma \leq 0$ ; sea  $P \in \mathbf{A}[\delta] + \mathbf{B}[\sigma]$ . entonces existen  $X \in \mathbf{A}[\delta], Y \in \mathbf{B}[\sigma]$ ,

tal que  $P = X + Y$ . por definición de cuerpo paralelo interior, la esfera de radio  $|\delta|$  y centro en  $X$  está contenida en  $\mathbf{A}$  y la de radio  $|\sigma|$  y centro en  $Y$  está contenida en  $\mathbf{B}$ . Se sigue entonces que  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  contiene a la esfera sólida de radio  $|\delta + \sigma|$  y centro en  $X + Y = P$ . Por lo tanto,  $P \in (\mathbf{A} + \mathbf{B})[|\delta + \sigma|]$ .

CASO 2: Si  $\delta \geq 0, \sigma \geq 0$ .  $\mathbf{A}[\delta] + \mathbf{B}[\sigma] = \mathbf{A}_\delta + \mathbf{B}_\sigma = (\mathbf{A} + K_\delta) + (\mathbf{B} + K_\sigma) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + (K_{\delta+\sigma}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{\delta+\sigma} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})[|\delta + \sigma|]$ .

CASO 3:  $\delta \leq 0, \sigma \geq 0$ ; por el caso 1, se tiene que  $\mathbf{A}[\delta] + \mathbf{B}[\sigma] = \mathbf{A}[\delta] + (\mathbf{B}[\sigma])[0] \subset (\mathbf{A} + \mathbf{B}[\sigma])[|\delta|]$  y por el caso 2,  $\mathbf{A} + \mathbf{B}[\sigma] \subset (\mathbf{A} + \mathbf{B})[\sigma]$  así que

$$\mathbf{A}[\delta] + \mathbf{B}[\sigma] \subset ((\mathbf{A} + \mathbf{B})[\sigma])[|\delta|] \subset (\mathbf{A} + \mathbf{B})[|\delta + \sigma|].$$

**Teorema 4.3.2** Para cualquier cuerpo convexo  $\mathbf{A}$ , la familia paralela completa  $\mathbf{A}[\delta], (-r \leq \delta \leq \infty)$  es cóncava.

*Demostración:* Sean  $\alpha, \beta \in [-r, \infty)$ , debemos probar que  $(1 - \lambda)\mathbf{A}[\alpha] + \lambda\mathbf{A}[\beta] \subset \mathbf{A}[(1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta]$ .

Observe que  $(1 - \lambda)\mathbf{A}[\alpha] = ((1 - \lambda)\mathbf{A})[(1 - \lambda)\alpha]$  y  $\lambda\mathbf{A}[\beta] = (\lambda\mathbf{A})[\lambda\beta]$ , entonces  $(1 - \lambda)\mathbf{A}[\alpha] + \lambda\mathbf{A}[\beta] = ((1 - \lambda)\mathbf{A})[(1 - \lambda)\alpha] + (\lambda\mathbf{A})[\lambda\beta]$  y por 2) del teorema anterior  $(1 - \lambda)\mathbf{A}[\alpha] + \lambda\mathbf{A}[\beta] \subset \mathbf{A}[(1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta]$ . ■

Sean  $V_\delta, S_\delta$  y  $M_\delta$  las magnitudes de masa de la familia  $\mathbf{A}_\delta$ , las cuales son estrictamente crecientes (y por lo tanto monotonas) con respecto al parámetro  $\delta$ . Ya se mencionó que las funcionales  $V_\delta^{\frac{1}{3}}, S_\delta^{\frac{1}{2}}$ , y  $M_\delta$  son funciones cóncavas y por lo tanto las funciones  $V_\delta, S_\delta$  y  $M_\delta$  tienen una derivada derecha e izquierda en el intervalo  $-r \leq \delta \leq \infty$ . Además

- 1)  $'V_\delta \geq V'_\delta \geq S_\delta$
- 2)  $'S_\delta \geq S'_\delta \geq 2M_\delta$
- 3)  $'M_\delta \geq M'_\delta \geq C_\delta = 4\pi$ .

Las desigualdades de la parte izquierda son un caso particular de la cóncavidad. Las de la derecha se siguen del hecho que para  $\sigma > 0$  se da la relación  $(\mathbf{A}[\delta])[|\sigma|] \subset \mathbf{A}[\delta + \sigma]$ , y las fórmulas de Steiner para las magnitudes de masa del cuerpo paralelo exterior  $(\mathbf{A}[\delta])[|\sigma|]$  de  $\mathbf{A}[\delta]$ . Note que las magnitudes de masa para  $\delta > 0$ , son diferenciables y entonces por la observación al final del corolario 1.2.2, se dan las igualdades.

**Teorema 4.3.3**  $V_\delta = V'_\delta = S_\delta$

Demostración: Obsérvese que es suficiente probar que  $V \leq S_\delta$ , para  $-\delta \leq \delta \leq 0$ . Sea en primer lugar,  $\mathbf{A}$  un poliedro convexo con el origen  $\bar{o}$  como el centro de una de sus esferas. Sea  $0 < \sigma < \delta + r$  y sean,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\delta]$  y  $\mathbf{C} = \mathbf{A}[\delta - \sigma]$  los dos poliedros convexos cuyos radios de sus esferas son  $\delta + r$  y  $w = \delta + r - \sigma$ . Consideremos el poliedro  $\mathbf{D} = (1 + \frac{\sigma}{w})\mathbf{A}[\delta - \sigma]$  y compáremoslo con el poliedro  $\mathbf{B}$  y con el poliedro paralelo interior  $\mathbf{C}$ . Pongamos nuestra atención en un plano soporte de  $\mathbf{C}$  que pase por una de sus caras y cuya distancia a  $\bar{o}$  sea  $p$ . Al pasar de  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$ , el plano soporte se mueve hacia afuera en una distancia  $\Delta_p = \frac{p\sigma}{w}$ , hasta convertirse en un plano soporte de  $\mathbf{D}$ . Por otro lado, al pasar de  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{B}$ , este plano soporte sólo necesita moverse hacia afuera una distancia de  $\sigma$  para convertirse en un plano soporte de  $\mathbf{B}$ . Ya que  $p \geq w$ , entonces  $\Delta_p \geq \sigma$  con lo que, en cualquier caso,  $\mathbf{B} \subset \mathbf{D}$ . Más aun, vamos a escoger, de una manera muy sencilla, ciertos subpoliedros de  $\mathbf{D}$  que de seguro no intersecten a  $\mathbf{B}$ . Para tal efecto consideremos una cara  $F$  de  $\mathbf{C}$  cuya distancia al origen sea  $p$  y consideremos el cilindro recto con base  $F$  y altura  $\Delta_p = \frac{p\sigma}{w}$ , que se encuentra entre  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ . La parte superior de este cilindro, de altura  $\Delta_p - \sigma$ , de seguro no intersecta a  $\mathbf{B}$ . Por lo tanto, para los volúmenes se tiene la siguiente relación:

$V(\mathbf{B}) \leq V(\mathbf{D}) - \sum (\Delta_p - \sigma) f$ , en donde la sumatoria de la derecha se extiende sobre todas las caras  $F$  de  $\mathbf{C}$ , con área  $f$ . Entonces

$V_\delta \leq (1 + \frac{\sigma}{w})^3 V_{\delta-\sigma} - \sum (\frac{\sigma}{w} - 1) \sigma f$ . En vista de las formulas para el volumen y la superficie de un poliedro:

$\frac{1}{3} \sum p f = V(\mathbf{C})$  y  $\sum f = S(\mathbf{C})$ , substituyendo obtenemos

$$V_\delta \leq (1 + \frac{\sigma}{w})^3 V_{\delta-\sigma} - \frac{3\sigma}{w} (\frac{1}{3} \sum p f) + \sigma \sum f$$

$$\text{o sea } V_\delta \leq (1 + \frac{\sigma}{w})^3 V_{\delta-\sigma} - \frac{3\sigma}{w} V(\mathbf{C}) + \sigma S(\mathbf{C})$$

$$V_\delta \leq (1 + \frac{\sigma}{w})^3 V_{\delta-\sigma} - \frac{3\sigma}{w} V_{\delta-\sigma} + \sigma S_{\delta-\sigma} \leq \sigma S_{\delta-\sigma} + [(1 + \frac{\sigma}{w})^3 - \frac{3\sigma}{w}] V_{\delta-\sigma}$$

y como  $V_{\delta-\sigma} \leq v_\delta$ , entonces

$$V_\delta \leq \sigma S_{\delta-\sigma} + [1 + \frac{3\sigma^2}{w^2}] V_{\delta-\sigma} \leq \sigma S_{\delta-\sigma} + V_{\delta-\sigma} + \frac{3\sigma^2}{w^2} V_\delta. \text{ Por lo tanto } V_\delta - V_{\delta-\sigma} \leq \sigma S_{\delta-\sigma} + \frac{3\sigma^2}{w^2} V_\delta.$$

Con la ayuda de la propiedad de aproximación poliedral simultánea, para  $\delta$  y  $\sigma$  fijos y para cualquier cuerpo convexo cuyo radio de su esfera sea  $r$ , se tiene que la última desigualdad también es válida. De aquí se sigue, cuando  $\sigma$  tiende a cero que  $V'_\delta \geq S_\delta$ .

■

**Definición 4.3.2** Un cuerpo convexo  $\mathbf{A}$  es de la primera categoría (denotado  $R_1$ ), segunda categoría ( $R_2$ ) ó tercera categoría (denotado  $R_3$ ), si dentro de todo el intervalo de definición de su correspondiente familia paralela completa  $V_\delta, S_\delta$  y  $M_\delta$  son diferenciables respectivamente.

Por lo ya mostrado se tiene que  $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset K$ . No es difícil ver que un cubo esta en  $R_1$ , —  $R_2$ , un cuerpo gorra de la esfera sólida esta en  $R_2$  —  $R_3$ , y un cilindro esférico (el cuerpo paralelo exterior de un intervalo) esta en  $R_3$ .

#### 4.4 Solucion relativa al problema principal.

Recordemos que el problema principal (también conocido como el problema del sistema completo de desigualdades), era el de dar condiciones suficientes y necesarias para que tres números no negativos  $V, S$  y  $M$  sean las magnitudes fundamentales de algún cuerpo convexo.

En esta sección se resolverá este problema restringiéndonos a las familias  $R_2$  y  $R_3$ .

**Teorema 4.4.1** Para que tres números no negativos  $M, S$  y  $V$  representen las tres magnitudes de masa de un cuerpo convexo es necesario y suficiente que satisfagan las desigualdades:

CLASE  $R_2$ :

$$1) \quad V \leq S^2/3M,$$

$$2) \quad V \geq \frac{1}{24\pi^2} [6\pi MS - M^3 - (12 - \pi^2)\pi \left\{ \frac{M^2 - 4\pi S}{\pi^2 - 8} \right\}^{3/2}]$$

CLASE  $R_3$ :

$$3) \quad V \leq \frac{1}{24\pi^2} [6\pi MS - M^3 + (M^2 - 4\pi S)^{3/2}],$$

$$4) \quad V \geq \frac{1}{24\pi^2} [6\pi MS - M^3 - (12 - \pi^2)\pi \left\{ \frac{M^2 - 4\pi S}{\pi^2 - 8} \right\}^{3/2}].$$

**Demostración:** CLASE  $R_2$ : Denotaremos a los cuerpos de la familia paralela completa, interior y exterior, del cuerpo  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{A}(\lambda)$ ;  $\lambda$  es el parámetro de la familia, en donde hemos elegido que  $\mathbf{A}(0)$  sea idéntico al cuerpo formado por los centros de las esferas inscritas de  $\mathbf{A}$ , al cual llamamos el núcleo de  $\mathbf{A}$ . El cuerpo original  $\mathbf{A}$ , por la manera en la que hemos construido la familia es idéntico a  $\mathbf{A}(r)$ , en donde  $r$  es el radio de la insfera. Son por lo tanto  $\mathbf{A}(r+a)$  y  $\mathbf{A}(r-a)$  los cuerpos paralelos

exteriores e interiores, respectivamente, de  $\mathbf{A}$ , en donde  $a > 0$ . Las magnitudes de masa de  $\mathbf{A}(\lambda)$  serán denotadas por  $V(\lambda)$ ,  $S(\lambda)$ , y  $M(\lambda)$ .

Sólo necesitamos probar 2). Consideremos las siguientes funcionales

$$J(\lambda) = M^2(\lambda) - 4\pi S(\lambda) \text{ y } H(\lambda) = M(\lambda)^3 - 6\pi M(\lambda)S(\lambda) + 24\pi^2 V(\lambda).$$

Al derivar por la derecha se obtiene, en vista de que en la clase  $R_\beta$  se dan las igualdades  $'V(\lambda) = V'(\lambda) = S(\lambda)$ , y  $'S(\lambda) = S'(\lambda) = 2M(\lambda)$ , las expresiones

$$J'(\lambda) = 2M(\lambda)[M'(\lambda) - 4\pi] \text{ y}$$

$$H'(\lambda) = [3M(\lambda)^2 - 6\pi S(\lambda)]M'(\lambda) - 12\pi M(\lambda)^2 + 24\pi^2 S(\lambda),$$

entonces, debido a que  $M'(\lambda) \geq 4\pi$ , resulta que  $J'(\lambda) \geq 0$  y  $H'(\lambda) \geq 0$ .

CASO 1:  $H(r) \geq 0$ ; esto es equivalente a la desigualdad  $V \geq \frac{M(6\pi S - M^2)}{24\pi^2}$ ,  $M = M(r)$ ,  $V = V(r)$ ,  $S = S(r)$ . Como  $M^2 - 4\pi S \geq 0$ , se sigue que la desigualdad 2) se da.

CASO 2:  $H(r) < 0$ ; entonces, como ya fue comprobado arriba,  $H(\lambda)$  es creciente (ya que  $H' \geq 0$ ), por lo que para toda  $0 \leq \lambda < r$  se tiene también que  $H(\lambda) < 0$ .

Definamos ahora

$$\phi(\lambda) = \pi^2(12 - \pi^2)^2 J(\lambda)^3 - (\pi^2 - 8)^3 H(\lambda)^2, \text{ entonces}$$

$\phi'(\lambda) = 3\pi^2(12 - \pi^2)^2 J(\lambda)^2 J'(\lambda) - 2(\pi^2 - 8)^3 H(\lambda)H'(\lambda) \geq 0$ . Esto nos dice que  $\phi$  es creciente, entonces  $\phi(r) \geq \phi(0)$ . Como el núcleo  $\mathbf{A}(0)$  del cuerpo  $\mathbf{A}$  es una figura plana, con superficie  $f$  y perímetro  $l$ , se tiene que

$$J(0) = (\pi l/2)^2 - 8\pi f \text{ y } H(0) = (\pi l/2)^3 - 6\pi^2 l f \text{ y entonces}$$

$$\phi(0) = \frac{1}{4}(\pi l/2)^6 \omega(\Delta) \text{ en donde}$$

$\omega(\Delta) = 4\pi^2(12 - \pi^2)^2(1 - \Delta)^3 - (\pi^2 - 8)^3(2 - 3\Delta)^2$  y  $\Delta = \frac{32f}{\pi^2 l}$ . Debido a la desigualdad isoperimétrica,  $\Delta$  esta sujeta a la restricción  $0 \leq \Delta \leq \frac{8}{\pi^2}$ ; en este intervalo  $\omega(\Delta) \geq 0$  por lo que  $\phi(r) \geq 0$ , y de aquí haciendo los calculos directamente se concluye 2).

CLASE  $R_\gamma$ : Como la clase  $R_\gamma \subset R_\beta$  y los elementos de  $R_\beta$  satisfacen la desigualdad 2), entonces los elementos de  $R_\gamma$  satisfacen la desigualdad 4).

De esta manera sólo resta probar la desigualdad 3). Para esto recordemos que para la clase  $R_\gamma$  se dan las igualdades:

$$V'(\lambda) = S(\lambda), \quad S'(\lambda) = 2M(\lambda), \quad M'(\lambda) = 4\pi.$$

Sustituyéndolas en las derivadas del lado derecho de las funcionales  $J(\lambda)$  y  $H(\lambda)$ , definidas en el caso anterior, obtenemos:

$$J = J(r) = J(0) = (\pi l/2)^2 - 8\pi f, \quad H = H(r) = H(0) = (\pi l/2)^3 - 6\pi^2 l f.$$

Eliminando a  $f$  de estas dos ecuaciones obtenemos la ecuación:

$$\pi^3 l^3 - 12\pi J l + 16H = 0, \text{ la cual sólo depende de } f \text{ ya que } J \text{ y } H \text{ son constantes.}$$

CASO 1:  $H = H(r) \leq 0$ ; esto es equivalente a la desigualdad  $V \leq \frac{M(6\pi S - M^2)}{24\pi^2}$ , de la cual se deduce la primera parte, a la derecha de la desigualdad 3).

CASO 2:  $H = H(r) \geq 0$ ; la condición de que la ecuación cúbica en términos de  $\lambda$ , establecida arriba, tenga una solución real no negativa implica, como es sabido, que  $J^3 - H^2 \geq 0$ . De aquí se concluye 3) se cumple.

Finalmente debemos probar que las desigualdades también son suficientes. Por lo tanto debemos mostrar la existencia de cuerpos convexos, en la respectiva clase, con sus magnitudes de masa  $V$ ,  $S$  y  $M$  dadas. En primer lugar, se puede probar que dadas tres magnitudes de masa satisfaciendo las desigualdades 3) y 4), entonces existe el cuerpo paralelo de una figura convexa plana, que realiza estas magnitudes; además cualquiera de estos cuerpos pertenecen a la clase  $R_\gamma$ . Más aún, dadas tres magnitudes de masa satisfaciendo las desigualdades 1) y 2) existe, o bien el cuerpo paralelo de un cuerpo gorra de la esfera o el cuerpo paralelo de una figura convexa plana, que realiza estas magnitudes; ambos tipos de cuerpos pertenecen a la clase  $R_\beta$ . ■





## Apéndice A

### Simetrización de Steiner

A lo largo de este apéndice  $K$  denotará la esfera sólida de radio 1.

**Teorema 1** Sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  dos cuerpos convexos. Entonces

- 1)  $\Sigma(\mathbf{A}) \subset \Sigma(\mathbf{B})$  si  $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ .
- 2)  $\Sigma(K) = K$  si el centro de  $K$  está en  $E$ .
- 3)  $\Sigma(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\Sigma(\mathbf{A})$ , si  $\bar{o} \in E$ .
- 4)  $\Sigma(\mathbf{A}) + \Sigma(\mathbf{B}) \subset \Sigma(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ , si  $\bar{o} \in E$ .
- 5)  $\Sigma(\mathbf{A})_\delta \subset \Sigma(\mathbf{A}_\delta)$ , si  $\bar{o} \in E$ .

*Demostración:* [1] y [2] se prueban sin dificultad a partir de la definición.

[3] primero veamos que  $\lambda\Sigma(\mathbf{A}) \subset \Sigma(\lambda\mathbf{A})$ . Supongamos que  $\bar{o} \in E$ , donde  $E$  es el plano de simetría. Sea  $\lambda x \in \lambda\Sigma(\mathbf{A})$  con  $x \in \Sigma(\mathbf{A})$ , considere la recta  $G_x$  que pasa por  $x$  y es ortogonal a  $E$ , entonces  $G_x \cap \Sigma(\mathbf{A})$  es congruente a  $G_x \cap \mathbf{A}$ , con  $x \in G_x \cap \Sigma(\mathbf{A})$ .

Ahora considere el segmento  $\lambda(G_x \cap \mathbf{A}) \subset \lambda\mathbf{A}$ , y la recta  $L$  que lo contiene, observe que  $G_x$  y  $L$  son rectas paralelas y además  $L = \lambda G_x$ , de aquí que  $\lambda(G_x \cap \Sigma(\mathbf{A}))$  sea la simetrización del segmento  $L \cap (\lambda\mathbf{A})$  y como  $\lambda x \in \lambda(G_x \cap \Sigma(\mathbf{A}))$ ,  $\lambda x \in \Sigma(\lambda\mathbf{A})$ .

Para la otra contención observe que acabamos de probar que para todo  $\gamma > 0$  y  $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ ,  $\gamma\Sigma(\mathbf{B}) \subset \Sigma(\gamma\mathbf{B})$ , ahora sea  $\gamma = \frac{1}{\lambda}$  y  $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$ .

[4] Sea  $t \in \Sigma(\mathbf{A}) + \Sigma(\mathbf{B})$ ,  $t = p + q$ , con  $p \in \Sigma(\mathbf{A})$ ,  $q \in \Sigma(\mathbf{B})$ .

Por  $G_t$ ,  $G_p$  y  $G_q$  vamos a denotar las líneas de simetría que pasan por  $t$ ,  $p$  y  $q$  respectivamente (ver 3).  $t \in (\Sigma(\mathbf{A}) \cap G_t) + (\Sigma(\mathbf{B}) \cap G_t)$ . Esta es una suma de

intervalos paralelos y simétricos con respecto a  $E$ , entonces su suma es un intervalo simétrico a  $E$  ( $o \in E$ ) y de longitud la suma de las longitudes de los intervalos involucrados. Más aún este intervalo está en  $G_i$ , excepto por esta última simetría, es igual a la suma  $(\mathbf{A} \cap G_p) + (\mathbf{B} \cap G_p)$ . De aquí que

$$\sum \left( (\mathbf{A} \cap G_p) + (\mathbf{B} \cap G_q) \right) = \left( \sum (\mathbf{A}) \cap G_p \right) + \left( \sum (\mathbf{B}) \cap G_q \right)$$

por lo tanto  $t \in ((\sum(\mathbf{A}) \cap G_p) + (\sum(\mathbf{B}) \cap G_q) \subset \sum(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

[5] Esta es una consecuencia inmediata de 4 haciendo  $B = K_\delta$  y usando 2). ■

### Teorema 2 de continuidad

[1] Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente de cuerpos convexos con límite el cuerpo convexo  $\mathbf{A}$ . Entonces  $\{\sum(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\sum(\mathbf{A})$ .

[2]  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones con límite  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  respectivamente, entonces  $\{A_n + B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

Demostración: [1] Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\bar{o} \in \dot{A} \cap E$ , donde  $E$  es el plano de simetría.

Por lo tanto existen dos esferas sólidas  $K_\alpha$ ,  $K_\beta$  de radios  $0 < \alpha < \beta$  con centro en  $\bar{o}$  tal que  $K_\alpha \not\subset \mathbf{A} \not\subset K_\beta$ .

Como  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{A}$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n > N$  se tiene  $K_\alpha \subset A_n \subset K_\beta$ .

Por el teorema anterior,  $K_\alpha \subset \sum(\mathbf{A}) \subset K_\beta$  y  $K_\alpha \subset \sum(A_n) \subset K_\beta$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $M_\epsilon$  tal que  $\mathbf{A} \subset (A_n)_\epsilon$  y  $A_n \subset A_\epsilon$ , para toda  $n > M_\epsilon$  (por definición de la métrica de Hausdorff).

Por 1) del último teorema de aproximación poliedral tenemos que  $A_\epsilon \subset (1 + \frac{\epsilon}{\alpha}) \mathbf{A}$ , pero  $A_n \subset A_\epsilon$  por lo tanto  $(A_n) \subset (1 + \frac{\epsilon}{\alpha}) \mathbf{A}$ . Entonces

$$\sum(A_n) \subset \sum \left( \left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \mathbf{A} \right) = \left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \sum(\mathbf{A})$$

usando 2) del último teorema de aproximación poliedral, tenemos que

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \sum(\mathbf{A}) \subset \left(\sum(A_n)\right)_{\frac{\epsilon}{\alpha}}$$

Por otro lado  $(A_n)_\epsilon \subset (1 + \frac{\epsilon}{\alpha}) A_n$ , pero  $\mathbf{A} \subset (A_n)_\epsilon$ , entonces  $\mathbf{A} \subset (1 + \frac{\epsilon}{\alpha}) A_n$ ,

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

79

se sigue que

$$\sum(\mathbf{A}) \subset \sum\left(\left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) A_n\right) = \left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \sum(A_n) \subset \left[\sum(A_n)\right]_{\frac{2\epsilon}{\alpha}}$$

Por lo tanto  $\sum(\mathbf{A}) \subset (\sum(A_n))_{\frac{2\epsilon}{\alpha}}$ . Entonces  $d(\sum(\mathbf{A}), \sum(A_n)) < \frac{2\epsilon}{\alpha}$ , o sea  $\{\sum(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\sum(\mathbf{A})$ .

[2] Sea  $\epsilon > 0$ , como  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{A}$  existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $A_n \subset A_\epsilon = \mathbf{A} + K_\epsilon$  y análogamente existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{B}_\epsilon = \mathbf{B} + K_\epsilon$ , de aquí que  $A_n + \mathbf{B}_n \subset (\mathbf{A} + K_\epsilon) + (\mathbf{B} + K_\epsilon) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + K_{2\epsilon}$  para toda  $n > \max(N_1, N_2)$ . Análogamente  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \subset (\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n) + K_{2\epsilon}$ , por lo tanto  $d(\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n) < 2\epsilon$ , entonces  $\{\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ . ■



## Apéndice B

### Volumenes Mixtos.

El profundo y misterioso concepto de volúmen mixto fue elaborado por H. Minkowski en el año de 1900. Al respecto, es interesante la carta que H. Minkowski le envía David Hilbert en donde le comunica acerca de este descubrimiento. Como veremos a continuación, el concepto de volúmen mixto nos permitirá, de manera un tanto misteriosa, probar varios teoremas clásicos sobre volúmenes de cuerpos de ancho constante. Sea  $\mathcal{K}^n$  el espacio de todos los cuerpos convexos de dimensión menor o igual a  $n$  con la métrica de Hausdorff. Para toda  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}^n$ , denotamos por  $V(\mathbf{A})$  el volúmen  $n$ -dimensional de  $\mathbf{A}$  y por  $S(\mathbf{A})$  el área  $(n-1)$ -dimensional de su superficie. Recuerde que  $\mathbf{K}$  denota la esfera sólida de radio uno.

**Definición 1** *Un volúmen mixto es una funcional no negativa de cuerpos convexos.*

$$V : (\mathcal{K}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades:

i)  $V$  es multilineal, es decir

$$V(\mathbf{A}_1, \dots, \lambda \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n) = \lambda V(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n), \lambda \geq 0.$$

$$V(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i, \dots, \mathbf{A}_n) = V(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n) + V(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{B}_i, \dots, \mathbf{A}_n).$$

ii)  $V$  es simétrico, es decir

$$V(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_n) = V(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n)$$

iii)  $V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}) = V(\mathbf{A})$ .

**Teorema 3** Si  $V$  es un volúmen mixto, entonces  $V$  es una funcional continua en todas sus variables. ■

**Teorema 4** Para todo volúmen mixto se tiene que:

$$V(\mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}, K) = \frac{S(\mathbf{A})}{n}$$

El siguiente resultado es bastante sorprendente.

**Teorema 5** Para cada dimensión  $n$  existe una única funcional  $V$  que satisface las condiciones i), ii) y iii) de la definición, y que por lo tanto es un volúmen mixto. ■

Debido al teorema anterior, hablaremos del volúmen mixto  $n$ -dimensional y no de un volúmen mixto.

**Teorema 6** Sea  $V$  el volúmen mixto  $n$ -dimensional, entonces

$$V(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n) \leq V(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{B}_i, \dots, \mathbf{A}_n)$$

cuando  $\mathbf{A}_i \subset \mathbf{B}_i$ .

Es claro que estamos suponiendo la existencia de el volúmen mixto  $n$ -dimensional. Esta existencia se puede probar rigurosamente. ■

**Definición 2** Para  $m$  un entero entre 0 y  $n$ , sea

$$W_m(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}, K, \dots, K)$$

en donde en el volúmen mixto anterior aparece  $n-m$   $\mathbf{A}$ 's y  $m$   $K$ 's.

De este modo  $W_0(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A})$ ,  $W_1(\mathbf{A}) = \frac{S(\mathbf{A})}{n}$  y  $W_n(\mathbf{A}) = V(K)$ . Si  $n=3$  entonces  $W_0(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}) = V(\mathbf{A})$ ,  $W_1(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, K) = \frac{S(\mathbf{A})}{3}$ ,  $W_2(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A}, K, K) = \frac{M(\mathbf{A})}{3}$ ,  $W_3(\mathbf{A}) = V(K, K, K) = \frac{4}{3}\pi$ .

Si  $n=2$  entonces  $W_0(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = \Lambda(\mathbf{A})$  (área de  $\mathbf{A}$ )  $W_1(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A}, K) = \frac{P(\mathbf{A})}{2}$

(perímetro de  $\mathbf{A}$ ) y  $W_2(\mathbf{A}) = V(K, K) = \pi$ .

Las funcionales de  $W_K(\mathbf{A})$  son conocidas como las magnitudes fundamentales de masa del cuerpo convexo  $\mathbf{A}$ .

**Teorema 7** Sean  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$  cuerpos convexos de dimensión menor o igual a  $n$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  reales positivos y  $V$  el volumen mixto  $n$ -dimensional. Entonces  $V(\lambda_1 \mathbf{A} + \dots + \lambda_r \mathbf{A}_r)$  es un polinomio homogéneo de grado  $n$ , en las variables  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ .

Para ilustrar este teorema vamos a considerar los casos  $n=2$  y  $3$ .

Sea  $n=2$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}^2$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= V(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) = V(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}, x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) \\ \mathbf{A}(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= V(\mathbf{A})x^2 + 2V(\mathbf{A}, \mathbf{B})xy + V(\mathbf{B})y^2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= V(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}, K) = V(\mathbf{A}, K)x + V(\mathbf{B}, K)y \\ &= \frac{1}{2}P(\mathbf{A})x + \frac{1}{2}P(\mathbf{B})y \\ P(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= P(\mathbf{A})x + P(\mathbf{B})y \end{aligned} \quad (23)$$

Ahora veamos el caso  $n=3$ .

Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} V(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= V(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}, x\mathbf{A} + y\mathbf{B}, x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) \\ V(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= V(\mathbf{A})x^3 + 3V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{B})x^2y + 3V(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B})xy^2 + V(\mathbf{B})y^3 \quad (24) \\ \frac{1}{3}S(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= V(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}, x\mathbf{A} + y\mathbf{B}, K) \\ &= V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, K)x^2 + 2V(\mathbf{A}, \mathbf{B}, K)xy + V(\mathbf{B}, \mathbf{B}, K)y^2 \\ &= \frac{1}{3}S(\mathbf{A})x^2 + 2V(\mathbf{A}, \mathbf{B}, K)xy + \frac{1}{3}S(\mathbf{B})y^2 \\ S(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= S(\mathbf{A})x^2 + 6V(\mathbf{A}, \mathbf{B}, K)xy + S(\mathbf{B})y^2 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}M(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) &= V(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}, K, K) = xV(\mathbf{A}, K, K) + yV(\mathbf{B}, K, K) \\ &= \frac{1}{3}M(\mathbf{A})x + \frac{1}{3}M(\mathbf{B})y \end{aligned}$$

$$M(x\mathbf{A} + y\mathbf{B}) = M(\mathbf{A})x + M(\mathbf{B})y \quad (26)$$

Como una aplicación de volúmenes mixtos, probaremos un teorema clásico sobre el volúmen de cuerpos de ancho constante.

**Teorema 8 de Blaschke**

Sea  $\mathbf{A}$  un cuerpo convexo tridimensional de ancho constante  $h$ . Entonces

$$3hS(\mathbf{A}) = -6V(\mathbf{A}) = 2\pi h^3 \quad \text{y} \quad M(\mathbf{A}) = 2\pi h.$$

Demostración:

Como  $\mathbf{A}$  es de ancho constante  $h$ ,  $-\mathbf{A}$  también es de ancho constante  $h$  y por lo tanto  $\mathbf{A}-\mathbf{A}$  es de ancho constante  $2h$  ver la observación al final del teo. 1.1.6, además  $\mathbf{A}-\mathbf{A}$  es centralmente simétrico en el origen (es decir si  $x \in \mathbf{A}-\mathbf{A}$ ,  $-x \in \mathbf{A}-\mathbf{A}$ ), pero si  $\mathbf{A}-\mathbf{A}$  es un cuerpo de ancho constante  $2h$ , entonces  $\mathbf{A}-\mathbf{A}$  es una esfera sólida de ancho  $2h$  (o sea de radio  $h$ ). Por lo tanto

$$\mathbf{A}-\mathbf{A} = hK$$

Entonces para todo  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ , se tiene la igualdad

$(1-t)\mathbf{A} - t\mathbf{A} = (1-2t)\mathbf{A} + thK$ , ya que

$$\begin{aligned} (1-t)\mathbf{A} - t\mathbf{A} &= ((1-2t)\mathbf{A} + t\mathbf{A}) + t(-\mathbf{A}) \\ &= (1-2t)\mathbf{A} + (t\mathbf{A} + t(-\mathbf{A})) = (1-2t)\mathbf{A} + t(\mathbf{A}-\mathbf{A}) \\ &= (1-2t)\mathbf{A} + thK \end{aligned}$$

De aquí que para todo  $t \in [0, \frac{1}{2}]$

$$S((1-t)\mathbf{A} - t\mathbf{A}) = S((1-2t)\mathbf{A} + thK) \quad (27)$$

$$V((1-t)\mathbf{A} - t\mathbf{A}) = V((1-2t)\mathbf{A} + thK) \quad (28)$$



Usando la igualdad 25 y la igualdad 27 obtenemos los polinomios

$$\begin{aligned} P_1(t) &= S(\mathbf{A})(1-t)^2 + 6V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, K)t(1-t) + S(-\mathbf{A})t^2 \\ P_2(t) &= S(\mathbf{A})(1-2t)^2 + 6V(\mathbf{A}, K, K)th(1-2t) + S(K)t^2h^2 \end{aligned}$$

pero  $S(-\mathbf{A}) = S(\mathbf{A})$ ,  $3V(\mathbf{A}, K, K) = M(\mathbf{A})$ ,  $S(K) = 4\pi$

$$\begin{aligned} P_1(t) &= [2S(\mathbf{A}) - 6V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, K)]t^2 + (6V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, K) - 2S(\mathbf{A}))t + S(\mathbf{A}) \\ P_2(t) &= [4\pi h^2 + 4S(\mathbf{A}) - 12hM(\mathbf{A})]t^2 + (2hM(\mathbf{A}) - 4S(\mathbf{A}))t + S(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

$P_1$  y  $P_2$  coinciden si  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  por lo tanto coinciden si  $t \in \mathbf{R}$ , entonces sus coeficientes son iguales.

$$\begin{aligned} 2S(\mathbf{A}) - 6V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, K) &= 4\pi h^2 + 4S(\mathbf{A}) - 4hM(\mathbf{A}) \\ 6V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, K) - 2S(\mathbf{A}) &= 2hM(\mathbf{A}) - 4S(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Sumando estas igualdades obtenemos  $M(\mathbf{A}) = 2\pi h$ .

Ahora desarrollemos la igualdad 28 usando la igualdad 24 para obtener los polinomios

$$\begin{aligned} P_3(t) &= (1-t)^3V(\mathbf{A}) + 3(1-t)^2tV(\mathbf{A}, \mathbf{A}, -\mathbf{A}) + 3(1-t)t^2V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, -\mathbf{A}) + t^3V(-\mathbf{A}). \\ P_4(t) &= (1-2t)^3V(\mathbf{A}) + 3(1-2t)^2thV(\mathbf{A}, \mathbf{A}, K) + 3(1-2t)t^2h^2V(\mathbf{A}, K, K) + t^3h^3V(K). \end{aligned}$$

recuerde que  $3V(\mathbf{A}, K, K) = M(\mathbf{A}) = 2\pi h$ ,  $V(K) = \frac{4}{3}\pi$ ,  $3V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, K) = S(\mathbf{A})$ ,  $V(-\mathbf{A}) = V(\mathbf{A})$

$$\begin{aligned} P_3(t) &= [3V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, -\mathbf{A}) - 3V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, -\mathbf{A})]t^3 + \\ &\quad [3V(\mathbf{A}) - 6V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, -\mathbf{A}) + 3V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, -\mathbf{A})]t^2 + \\ &\quad [-3V(\mathbf{A}) + 3V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, -\mathbf{A})]t + V(\mathbf{A}). \\ P_4(t) &= \left[ -8V(\mathbf{A}) + 4hS(\mathbf{A}) - 2h^2M(\mathbf{A}) + \frac{4}{3}\pi h^3 \right]t^3 + \\ &\quad [12V(\mathbf{A}) - 4hS(\mathbf{A}) + h^2M(\mathbf{A})]t^2 + [-6V(\mathbf{A}) + hS(\mathbf{A})]t + V(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Estos polinomios coinciden para  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ , por lo tanto coinciden para todo  $t \in \mathbf{R}$ , entonces sus coeficientes son iguales.

$$\begin{aligned}3V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, -\mathbf{A}) - 3V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, -\mathbf{A}) &= -8V(\mathbf{A}) + 4hS(\mathbf{A}) - 2h^2M(\mathbf{A}) + \frac{4}{3}\pi h^3 \\3V(\mathbf{A}) - 6V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, -\mathbf{A}) + 3V(\mathbf{A}, -\mathbf{A}, -\mathbf{A}) &= 12V(\mathbf{A}) - 4hS(\mathbf{A}) + h^2M(\mathbf{A}) \\-3V(\mathbf{A}) + 3V(\mathbf{A}, \mathbf{A}, -\mathbf{A}) &= -6V(\mathbf{A}) + hS(\mathbf{A})\end{aligned}$$

sumando estas igualdades y sustituyendo  $M(\mathbf{A}) = 2\pi h$ , obtenemos

$$3hS(\mathbf{A}) - 6V(\mathbf{A}) = 2\pi h^3$$

■

## Bibliografía

- [1] Bartle Robert G., The Elements of Integration. John Wiley & Sons. Inc. New York.
- [2] Boltianski, W.G. y Yaglom, I.M., Convex Figures. Holt Reinhart and Winston, New York 1961.
- [3] Bonnesen T. y Fenchel W., 1987, Theory of convex bodies. Translated from the German and edited by L. Boron, C. Christenson and B. Smith whit collaboration of W. Fenchel. Moscow; BCS Associates.
- [4] Bieri H., Mitteilung zum Problem eines Konvexen Extremalkörpers, Arch. Math., 1 (1948-49) 462-463.
- [5] Eves Howard, 1969, Estudio de las Geometrias. UTEHA (vol. I).
- [6] Groemer H., Eine neue Ungleichung fr Konvexe Körper, Math. Z. , 86(1965) 361-364.
- [7] Hadwiger H., 1955, Lo Antiguo y lo Nuevo acerca de los Conjuntos Convexos. Aportaciones Matemáticas, traducción de Luis Montejano Peimbert.
- [8] Hadwiger H., Beweis einer Extremaleigenschaft der Symmetrischen Kugelzone, Portugaliae Math. 7 (1948) 74-85.
- [9] Lay, Steven R., 1982, Convex Sets and their Applications. New York Wiley.
- [10] Montejano Peimbert L., 1993, Cuerpos de Ancho Constante. Aportaciones Matemáticas, México.

- [11] Sangwine-Yager, J.R. 1989, The missing boundary of the Blaschke diagram. Amer. Math. Monthly 96, 233-7.
- [12] Schneider R., 1993, Convex Bodies : The Brunn-Minkowski Theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications (vol.44), Cambridge.
- [13] Takeuchi Yu, 1976, Sucesiones y Series. LIMUSA (tomo II).