2

2 Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

JUEGOS DISYUNTIVOS, FUNCIONES DE GRUNDY Y NUCLEOS EN DIGRAFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A N :

AGUILERA CABAÑAS JORGE ANTONIO
CASTRO TREJO ALINE GABRIELA

1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

JUEGOS DISYUNTIVOS, FUNCIONES DE GRUNDY Y NUCLEOS EN DIGRAFICAS

realizado por Aguilera Cabañas Jorge Antonio
Castro Trejo Aline Gabriela

con número de cuenta 8521204-0
9150822-7 **, pasante de la carrera de** Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dra. Hortensia Galeana Sánchez

Hugo A. Rincón M.
Propietario Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Laura Pastrana R.
Propietario Mat. Laura Pastrana Ramírez

Suplente M.en C. Patricia Cortés Flores

Virginia Abrín Batule
Suplente M.en C. Virginia Abrín Batule

M. en C. Alejandro Bravo Mojica
Consejo Departamental de Matemáticas

A nuestros padres,

con cariño y agradecimiento.

INDICE

INTRODUCCION

A lo largo de las últimas décadas, se ha llevado a cabo una buena cantidad de importantes trabajos teóricos sobre un tipo de juegos bipersonales que todavia no tienen un nombre universalmente aceptado. A veces, se les llama " Juegos de tipo NIM ", o " Juegos de retirar piezas " y también " Juegos disyuntivos ". Todos comienzan con un número finito de elementos, que pueden ser prácticamente cualesquiera cosas: cuentas, fichas, cerillos, piedrecitas, casillas vacias de un tablero, lineas de una gráfica, etc.

Los jugadores van por turno, retirando un número positivo de estos elementos, de acuerdo con las reglas del juego. Dado que el número de elementos a retirar decrece en cada jugada, la partida habrá de finalizar necesariamente. Ninguna de las jugadas está dictada por el azar; hay, pues, " Información completa ", ya que cada jugador conoce lo que su oponente hace. Por lo general, el último jugador que mueve, gana.

El juego debe, además ser " imparcial ", lo que significa que las jugadas licitas dependen tan sólo de la disposición de los elementos en el momento de ir a efectuar la jugada, y no dependen, en cambio, de cuál sea el jugador en turno, ni de las jugadas anteriores. Los juegos donde cada uno de los adversarios dispone de un subconjunto de elementos que le es propio, jamás son imparciales, el ajedrez, por ejemplo, es un juego parcial, porque a ningún jugador se le permite mover piezas del contrario. De las condiciones anteriores, se deduce, que para cada disposición de los elementos, existe, con certeza, un ganador predeterminado, que podra ser bien el primero en actuar, bien el segundo, con tal que las jugadas que éste realice sean " racionales ".

El ejemplo más conocido de juegos de este tipo es el NIM. El vocablo NIM fue acuñado por Charles L. Bouton, un matemático de Harvard, cuando en 1901 publicó el primer analisis del juego. Bouton no explicó la elección del nombre, y lo más que podemos hacer es conjeturar su origen. Tal vez estaba pensando en el alemán nimm, forma imperativa de nehmen. "

tomar ", o tal vez en la forma inglesa arcaica nim " tomar ", que llegó a convertirse en el habla popular en el sinónimo de " robar ".

En el juego NIM se comienza con un número cualquiera de pilas (o de hileras) de objetos, con un número arbitrario de éstos en cada pila. Cada jugada consiste en retirar tantos objetos como se quiera, pero solamente de una de las pilas. Es obligatorio tomar cuando menos un objeto, y es permisible tomar la pila entera. El jugador que consigue llevarse el último objeto gana la partida.

En el desarrollo del presente trabajo, analizaremos este tipo de juegos y presentaremos la forma de obtener una estrategia que permita a alguno de los jugadores, ganar el juego sin importar la forma en que el oponente juegue.

El análisis se realizará utilizando algunos conceptos de Teoria de Gráficas.

En el capitulo I, se darán las definiciones necesarias para poder analizar los juegos tipo NIM. El capitulo II introduce el concepto de núcleo en una digráfica, el cual es muy importante para obtener una estrategia ganadora en estos juegos. Con el capitulo III, se establece un vinculo entre el concepto de núcleo y el de función de Grundy, para describir por medio de ésta, la mencionada estrategia ganadora. Presentaremos algunos juegos tipo NIM en el capitulo IV, mientras que el capitulo V mostrara qué tipos de jugadas nos llevarán al triunfo, a la derrota, y, cuáles no nos garantizarán ninguna de las dos. Finalmente, en el capitulo VI trataremos con un juego en particular del tipo NIM, lo cual nos permitirá presentar un análisis más sencillo para la obtencion de la estrategia ganadora.

En el anexo se presentará el código de un programa para obtener un núcleo de digráficas sin circuitos impares.

I. DEFINICIONES

Definición 1. Una digráfica D está definida por la pareja (X,U), donde

1) X es un conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de elementos llamados vértices, y

2) U es una familia $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ de elementos del producto cartesiano X x X llamados flechas.

Definición 2. El número de vértices en una digráfica se llama el orden de la digráfica, y se denota por $|X|$.

Definición 3. Una flecha de D de la forma (x,x) se llama lazo.

Definición 4. Para una flecha u = (x,y), el vértice x se llama punto inicial, y el vértice y se llama punto terminal.

Definición 5. El vértice y se llama sucesor del vértice x si hay una flecha con x como punto inicial y y como punto terminal.

El conjunto de todos los sucesores de x se denota por $\Gamma^+(x)$.

Similarmente, un vertice y se llama predecesor de un vertice x si hay una flecha de la forma (y,x). El conjunto de todos los predecesores del vertice x se denota por $\Gamma^-(x)$.

Definición 6. El conjunto de todos los vecinos de x, se denota por $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$.

Si $\Gamma(x) = \emptyset$, entonces x se llama vértice aislado.

Para $A \subset X$, sea $\Gamma(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma(a)$

Similarmente, $\Gamma^+(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma^+(a)$ y $\Gamma^-(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma^-(a)$.

Si $x \in \Gamma(A)$, y $x \notin A$, entonces se dice que x es adyacente al conjunto A.

OBSERVACION. Una digráfica D = (X,U) está completamente determinada por X, y la correspondencia $\Gamma^+: X \rightarrow P(X)$. Asi, D puede ser denotada por (X,Γ^+).

Definición 7. Una digráfica es llamada simple si

1) No tiene lazos

2) No mas de una flecha en la misma dirección une dos vértices.

Definición 8.Dos flechas son llamadas adyacentes, si tienen al menos un punto en común.

Definición 9. Si un vértice x es el punto inicial de una flecha u que no es un lazo, se dice que la flecha u, incide desde el vértice x. En una digráfica D, el numero de flechas que inciden desde x más el numero de lazos de x se denota por $\delta^+(x)$, y se llama el grado exterior de x.

Similarmente, una flecha que incide en x, es una flecha cuyo punto final es x, y el grado interior de x, $\delta^-(x)$, es el numero de flechas que inciden en x más el número de lazos de x.

Definición 10. El grado de un vértice x es el número de flechas con x como punto inicial, o con x como punto terminal, contando cada lazo dos veces.

El grado de x se denota por $\delta(x)$, y $\delta(x) = \delta^+(x) + \delta^-(x)$.

Si en una digráfica, cada vértice tiene el mismo grado, entonces se dice que esta digráfica es regular.

Definición 11. Si el punto inicial de una flecha u pertenece a $A \subset X$, y si el punto terminal de la flecha u no pertenece a A, entonces se dice que u incide desde A. Similarmente, definimos una flecha que incide en A.

Una digráfica $D = (X,U)$ es simétrica, si y sólo si $(x,y) \in U$ implica $(y,x) \in U$.

Definición 12. Una digráfica $D = (X,U)$, es antisimétrica si $(x,y) \in U$ y $(y,x) \in U$ implica que $y = x$.

Definición 13. Una digráfica es completa si y sólo si $(x,y) \notin U$, implica que $(y,x) \in U$.

Definición 14. Una digráfica simple y completa de n vértices es llamada un n-clan, y se denota por K_n.

Definición 15. Una digrafica es bipartita, si sus vértices pueden ser partidos en dos conjuntos X_1 y X_2 tal que ningún par de vértices en el mismo conjunto son adyacentes. Esta digráfica se denota por $D = (X_1, X_2, U)$.

Definición 16. Una digáfica bipartita $D = (X_1, X_2, U)$ es completa, si para toda $x_1 \in X_1$ y para toda $x_2 \in X_2$ sucede una de las dos

1) $(x_1, x_2) \in U$

2) $(x_2, x_1) \in U$

y se denota por $K_{p,q}$ si $|X_1| = p$ y $|X_2| = q$.

Definición 17. Si $D = (X, \Gamma^+)$ es una digráfica, entonces la subdigráfica generada por A es la digráfica $D_A = (A, \Gamma_A{}^+)$, donde, $\Gamma_A{}^+(x) = \Gamma^+(x) \cap A$, con $x \in A$.

Definición 18. Una cadena es una sucesión $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ de flechas de D, tal que $u_i \cap u_{i+1} \neq \emptyset$, para $i \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$. El número de flechas en la sucesión, es la longitud de la cadena μ.

Una cadena en la que no se encuentra el mismo vértice dos veces es llamada elemental.

Una cadena que no usa la misma flecha dos veces, es llamada simple.

Definición 19. Un camino de longitud q es una cadena $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_q)$, en la cual el punto terminal de la flecha u_i es el punto inicial de la flecha u_{i+1}, $\forall\ i < q$.

En una digrafica, un camino está completamente determinado por la sucesión de vértices que este encuentra.

Si $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1})$, el vértice u_1 se llama punto inicial, y el vértice u_{k+1} punto terminal del camino μ.

Definición 20. Un ciclo es una cadena tal que

1) Ninguna flecha aparece dos veces en la misma sucesión, y

2) El punto inicial es igual al punto final de la cadena.

Definición 21. Un pseudo-ciclo, es una cadena $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$, cuyos punto inicial y punto terminal son iguales, y cuyas flechas no son necesariamente distintas.

Definición 22. Un circuito es un ciclo $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$, tal que para toda $i < q$, el punto terminal de u_i es el punto inicial de u_{i+1}.

Definición 23. Una digráfica es conexa, si contiene una cadena $\mu = [x, y]$, para cada par x, y de vertices distintos.

Definición 24. La relacion " existe una cadena en D que conecta x con y ", denotada por $x \equiv y$, es una relacion de equivalencia. Esta relación de equivalencia parte X en subdigráficas conexas de D, llamadas componentes conexas.

Definición 25. Se dice que una digráfica es fuertemente conexa, si para toda $x, y \in X$, hay un camino $\mu_1 = [x, y]$, y un camino $\mu_2 = [y, x]$.

Definición 26. Un conjunto S de vértices, se llama independiente, si ninguna flecha une dos vértices distintos en S.

Definición 27. Para una digráfica $D = (X, \Gamma^{+})$, un subconjunto de los vértices ($A \subset X$), se dice que es absorbente si para cada $x \notin A$, sucede que $\Gamma^{+}(x) \cap A \neq \varnothing$.

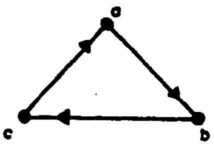
II. NUCLEOS

Definición 28. Para una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$, el conjunto $S \subset X$ se define como núcleo de D si es

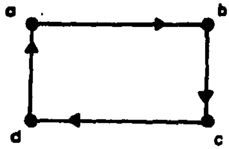
1) Absorbente, es decir, $x \notin S \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap S \neq \emptyset$, y

2) Independiente, es decir, $x \in S \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap S = \emptyset$.

No toda digráfica tiene núcleo, y si una digráfica tiene núcleo, éste, no necesariamente es único.



D_1



D_2

En la figura, la digráfica D_1. no tiene nucleo, mientras que D_2 tiene dos núcleos, a saber, $N_1 = \{ a, c \}$ y $N_2 = \{ b, d \}$.

Ejemplo. (Von Neumann, Morgenstern [1944]). El concepto de núcleo fue presentado por primera vez (bajo el nombre de solución) en Teoría de Juegos.

Supóngase que n jugadores, denotados por (1), (2),...,(n), pueden discutir conjuntamente, cómo seleccionar un punto x de un conjunto X (de situaciones). Si el jugador i prefiere la situación a a la b, escribimos $a \geq^i b$. Las preferencias individuales pueden no ser compatibles, y consecuentemente, es necesario introducir el concepto de preferencia efectiva. La situación a, se dice que es preferentemente efectiva a b, o $a \succ b$, si hay un conjunto de jugadores que prefieren a a b, y son capaces de imponer todos juntos su preferencia por a. Sin embargo, la preferencia efectiva no necesariamente es transitiva, es decir, si $a \succ b$ y $b \succ c$, no necesariamente $a \succ c$.

Considérese la digráfica $D = (X,\Gamma^+)$, donde $\Gamma^+(x)$ denota el conjunto de situaciones efectivamente preferidas a x. Sea S un núcleo de la digráfica (si existe uno). Von Neumann y Morgenstern sugirieron que la mejor selección está limitada a los elementos de S. Como S es independiente, ninguna situación de S es efectivamente preferida a otra situación de S. Como S es absorbente, para cada situación $x \notin S$, hay una situación en S que es efectivamente preferida a x, por lo tanto, x puede ser inmediatamente descartada.

Ejemplo. Base de Axiomas. Considérese una " Teoría ", es decir, un conjunto de proposiciones a,b,c,..., que representaremos por vértices; existirá la flecha (a,b) si la proposición b implica la proposición a. La digráfica resultante, D = (X,U) es transitiva, es decir:

$(a,b) \in U$ y $(b,c) \in U \Rightarrow (a,c) \in U$.

Una base de axiomas de la Teoría es un conjunto B de proposiciones (llamadas axiomas), tales que:

1) Cada proposición que no está en B se sigue de uno de los axiomas.

2) Ningún axioma se sigue de otro axioma.

El problema de encontrar una base de axiomas, se reduce a encontrar un núcleo de D. Se mostrará mas tarde que cada digrafica transitiva tiene núcleo.

Proposición 1. Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $S \subset X$ sea núcleo de $D = (X, \Gamma^+)$ es que la función característica φ_s satisfaga
$\varphi_s(x) = 1 - \max \{ \varphi_s(y) : y \in \Gamma^+(x) \}$.

Demostración

Recordemos que

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in S \\ 0 \text{ si } x \notin S \end{cases}$$

Si $\Gamma^+(x) = \varnothing$, definimos $\max \{ \varphi_s(y) : y \in \Gamma^+(x) \} = 0$

$\Rightarrow]$

Sea S un núcleo.

Como S es independiente, tenemos que:

$\varphi_s(x) = 1 \Rightarrow x \in S \Rightarrow \max \{ \varphi_s(y) : y \in \Gamma^+(x) \} = 0$.

Como S es absorbente,

$\varphi_s(x) = 0 \Rightarrow x \notin S \Rightarrow \max \{ \varphi_s(y) : y \in \Gamma^+(x) \} = 1$

Por lo que $\varphi_s(x) = 1 - \max \{ \varphi_s(y) : y \in \Gamma^+(x) \}$

$\Leftarrow]$

Sea φ_s la funcion caracteristica de un conjunto S que satisface la fórmula, entonces,

$x \in S \Rightarrow \varphi_s(x) = 1 \Rightarrow \max \{ \varphi_s(y) : y \in \Gamma^+(x) \} = 0 \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap S = \varnothing$

$x \notin S \Rightarrow \varphi_s(x) = 0 \Rightarrow \max \{ \varphi_s(y) : y \in \Gamma^+(x) \} = 1 \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap S \neq \varnothing$

Por lo tanto, S es núcleo.

$\square$

Proposición 2. Si S es un núcleo, entonces S es un conjunto independiente máximo, y un conjunto absorbente mínimo.

Demostración

Sea S el núcleo de una digráfica $D = (X, \Gamma^{+})$.

Si $a \notin S$, el conjunto $S \cup \{ a \}$ no es independiente, pues

$\Gamma^{+}(a) \cap S \neq \emptyset$.

Si $b \in S$, entonces $T = S \setminus \{ b \}$ no puede ser absorbente, ya que $b \notin T$, y

$\Gamma^{+}(b) \cap T = \emptyset$.

$\square$

Teorema 1. Si $D = (X, \Gamma^{+})$ es una digráfica simétrica, entonces, D tiene núcleo.

Además, el conjunto $S \subset X$ es núcleo $\Leftrightarrow$ S es un conjunto independiente máximo.

Demostración

$\Leftarrow]$

Claramente, un conjunto independiente máximo S de D es absorbente, ya que de lo contrario, existiría un vértice $x \notin S$, que no incide en S, y, por ser D simétrica, tampoco existiría un vértice $y \in S$ que incida en x, por lo que x no sería adyacente a S, luego, S no podría ser un conjunto independiente máximo, entonces, S es núcleo de D.

$\Rightarrow]$

Si S es un núcleo de una digráfica D, entonces S es un conjunto independiente máximo, por la Proposición 2.

Definición 29. Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los conjuntos absorbentes de D. Entonces, $A \in \mathcal{A}$, $A' \supset A \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$.

El numero de absorción de la digráfica D, se define como $\beta(D) = \min \{ |A| : A \in \mathcal{A} \}$.

Teorema 2. a) Si $D = (X,\Gamma^+)$ es una digráfica transitiva, cada conjunto absorbente mínimo tiene cardinalidad $\beta(D)$.

b) Además, un conjunto $S \subset X$ es un núcleo si y sólo si S es un conjunto absorbente mínimo.

Demostracion

a) Sea $D = (X,\Gamma^+)$ una digráfica transitiva, es decir,

$y \in \Gamma^+(x),\ z \in \Gamma^+(y) \Rightarrow z \in \Gamma^+(x)$.

Considere las componentes fuertemente conexas de D. Si C es una componente de la que no salen flechas hacia vertices fuera de C, entonces C es llamada **componente terminal**.

Como la digráfica obtenida de D condensando cada componente fuertemente conexa en un solo vertice, no contiene circuitos por ser D transitiva, entonces D tiene componentes terminales.

Sean $C_1, C_2, \ldots, C_q$ las componentes terminales de D.

Cada una de éstas es una subdigráfica simétrica completa por la transitividad de D.

Si A es un conjunto absorbente minimo, entonces, A contiene al menos un vértice de cada componente terminal. De otra forma, $A \cap C_i = \emptyset$, y cada $x \in C_i$ satisface que $x \notin A$ y que $\Gamma^+(x) \subset C_i$, luego,

$\Gamma^+(x) \cap A = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que A es absorbente.

Sea $a_i \in A \cap C_i$ para cada $1 \leq i \leq q$.

Considerese el conjunto $A' = \{ a_1, a_2, \ldots, a_q \}$. A' es también un conjunto absorbente, ya que cada $x \notin A'$ es el punto inicial de una flecha que llega a A' (por la transitividad de D).

Luego, $A' = A$, y cada conjunto absorbente mínimo es también un conjunto absorbente de cardinalidad mínima.

b)

⇒]

Si S es núcleo de D, entonces S es absorbente mínimo por la Proposición 2.

⇐]

Si $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_{q'} \}$ es un conjunto absorbente mínimo, entonces es independiente, ya que ninguna flecha incide desde una componente terminal hacia otras componentes.

Por lo tanto, A es núcleo.

□

Corolario 2.1. Toda digráfica transitiva tiene núcleo, y todos sus núcleos tienen la misma cardinalidad.

Corolario 2.2. En una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$, existe un conjunto $B \subset X$ tal que

1) No hay caminos que unan dos vértices distintos de B, y

2) Cada vértice $x \notin B$ es el punto inicial de un camino que llega a B.

Demostracion

Sea $D = (X, \Gamma^+)$ una digráfica.

Considérese la digráfica $D' = (X, \Gamma'^+)$ obtenida de D, agregando las flechas (x,y), si en D existe un camino de x a y.

Por construcción, D' es transitiva. Luego, por el Corolario 2.1, D' tiene núcleo S.

Sea $B = S \subset X$.

B cumple (1) por ser independiente.

B cumple (2), ya que de lo contrario existiría $y \in X$, tal que y no es punto inicial de un camino que llega a B, entonces, en D' no habría flecha de y a B. Luego, $B = S$ no sería absorbente en D', lo que contradice el hecho de que S sea núcleo de D'.

□

Teorema 3. Una digráfica sin circuitos tiene núcleo, y este núcleo es único.

Demostración

Dada una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$ sin circuitos, considere los conjuntos:

$$X(0) = \{ x : x \in X, \Gamma^+(x) = \varnothing \}$$

$$X(1) = \{ x : x \notin X(0), \Gamma^+(x) \subset X(0) \}$$

$$X(2) = \{ x : x \notin X(0) \cup X(1), \Gamma^+(x) \subset X(0) \cup X(1) \}$$

Estos conjuntos son ajenos por pares, y $x \in X(k)$ si y sólo si el camino más largo desde x tiene longitud k. Como D no contiene circuitos, los conjuntos $X(k)$ forman una partición de X.

Una función característica φ_N del núcleo N puede ser definida sucesivamente en los conjuntos $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$, etc. por medio de la Proposición 1. Además, φ_N determina el único nucleo de D.

□

Definición 30. Un seminúcleo de una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$ se define como un conjunto independiente no vacio $S \subset X$ tal que cada $x \in \Gamma^+(S)$ tiene al menos un sucesor en S.

Lema. Si para cada subconjunto no vacio $A \subset X$, la subdigráfica D_A tiene seminúcleo, entonces D tiene nucleo.

Demostración

Sea S un seminúcleo máximo de D, y sea $A = X \setminus (S \cup \Gamma_D(S))$.

Si $A = \emptyset$, entonces S es núcleo.

Si $A \neq \emptyset$, entonces D_A tiene seminúcleo T.

Los conjuntos S y T no tienen adyacencias entre si, luego $S \cup T$ es independiente y cada $x \notin S \cup T$ tal que $x \in \Gamma^+(S \cup T)$, tiene un sucesor en $S \cup T$.

$\therefore$ $S \cup T$ es seminúcleo de D, lo cual contradice la suposición de la elección de S.

$\therefore$ S es núcleo.

□

Teorema 4. (Richardson [1953]). Si $D = (X, \Gamma^+)$ es una digráfica sin circuitos de longitud impar, entonces D tiene al menos un nucleo.

Demostración

Si se pudiera demostrar que D tiene un seminucleo y observando que ninguna subdigrafica tiene circuitos impares, podriamos utilizar el lema anterior, y tendriamos que D tiene nucleo.

Luego, basta demostrar que D tiene un seminúcleo.

Supongamos que D es conexa.

Sea X_1 una componente fuertemente conexa de D, donde $\Gamma^+(X_1) \subset X_1$ (terminal).

Si $|X_1| = 1$, entonces X_1 es un seminúcleo de D.

Si $|X_1| > 1$, y si $x_0 \in X_1$, sea x un vértice en X_1 distinto de x_0.

Entonces, todos los caminos $\mu[x_0,x]$ permanecen en el interior de X_1, y todos ellos tienen la misma paridad (ya que de otra manera se podría formar un circuito impar con un camino $\mu[x,x_0]$).

Sea S el conjunto de todas las $x \in X_1$ tales que los caminos $\mu[x_0,x]$ son pares.

El conjunto S es independiente (pues si suponemos que existe la flecha (y,z) con $y, z \in S$, podríamos formar el camino $\mu'[x_0,z] = \mu[x_0,y] \cup (y,z)$ de longitud impar, lo cual es imposible dentro de S).

Si $z \in X$, $z \in \Gamma^+(S)$, entonces cada sucesor de z está en S.

$\therefore$ S es un seminúcleo de D

$\therefore$ D tiene núcleo.

$\square$

III. FUNCIONES DE GRUNDY

Sea $D = (X, \Gamma^+)$ una digráfica sin lazos.

Una función en los Naturales $g : X \rightarrow \mathbb{N}$ es llamada función de Grundy de D, si para cada vértice $x \in X$, $g(x)$ es el natural más pequeño, que no pertenece al conjunto $\{ g(y) : y \in \Gamma^+(x) \}$.

Este concepto fue originado por P. M. Grundy para digráficas sin circuitos, y éste fue extendido a digráficas simples por Berge y Schützenberger.

Una función de Grundy puede también ser definida como una función g tal que

1) $g(x) = k > 0 \Rightarrow$ para cada $j < k$, $\exists\ y \in \Gamma^+(x)$ con $g(y) = j$

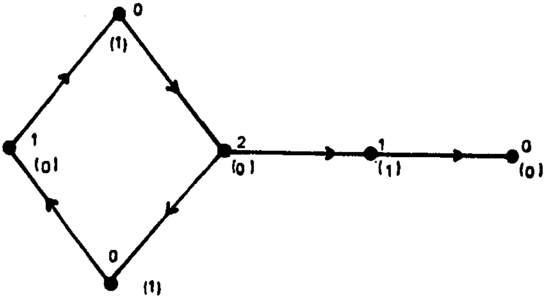
2) $g(x) = k \Rightarrow$ cada $y \in \Gamma^+(x)$ satisface $g(y) \neq k$.

Observaremos que una función de Grundy determina un núcleo en una digráfica.

Nota 1: Algunas digráficas no tienen función de Grundy, por ejemplo, todos los circuitos de longitud impar.

En la digráfica anterior, si damos valor 0 al vértice a, el valor para el vértice c está determinado, y es 1; entonces al vértice b le correspondería el valor 0, pero ésto no satisfacería la condición (2) de la definición de función de Grundy.

Algunas digráficas tienen más de una función de Grundy como en el caso siguiente, donde se muestran dos funciones de Grundy para la misma digráfica.



Nota 2: Si D tiene función de Grundy $g(x)$, entonces D tiene núcleo, ya que el conjunto $N = \{ x : x \in X, g(x) = 0 \}$ satisface simultáneamente:

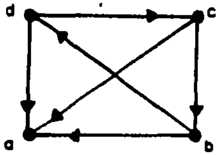
1) $x \in N \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow \min g(y) > 0, \ y \in \Gamma^+(x)$

$\Rightarrow \Gamma^+(x) \cap N = \emptyset$

2) $x \notin N \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow \min g(y) = 0, \ y \in \Gamma^+(x)$

$\Rightarrow \Gamma^+(x) \cap N \neq \emptyset$

El recíproco no es cierto, pues existen digráficas que tienen núcleo y no tienen función de Grundy, por ejemplo:



} a { es el núcleo en la digráfica superior y, ésta no tiene función de Grundy pues a tendría valor 0 para cualquier función de Grundy por ser vértice terminal, luego si b toma valor 1, c tendría que valer 2, lo cual nos lleva a una contradicción, pues d tomaría valor 1, lo cual es imposible pues d es sucesor de b. Si asignamos el valor 1 a c o d se daría una contradicción similar.

Teorema 5. Si D es una digráfica tal que cada subdigráfica inducida tiene núcleo, entonces D tiene función de Grundy.

Demostración

Sea D una digráfica tal que cada subdigráfica inducida tiene núcleo.

Sea N_0 núcleo de D; sea N_1 núcleo de $D_1 = D_X \setminus N_0$.

Sea N_2 núcleo de $D_2 = D_X \setminus (N_0 \cup N_1)$, etc.

Los conjuntos N_i forman una partición de X.

Sea $g : X \rightarrow \mathbb{N}$ una función definida por : $g(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$.

Observaremos que g(x) es una función de Grundy de D.

1) Sea $g(x) = k$; observaremos que para cada $j < k$, existe un vértice $y \in \Gamma^+(x)$ tal que $g(y) = j$.

Como $x \in N_k$ y $k > j$, el vertice x está presente en la digráfica D_j.

Como $x \notin N_j$, entonces existe un vértice $y \in N_j$ tal que $y \in \Gamma^+(x)$; luego, existe un vertice $y \in \Gamma^+(x)$ con $g(y) = j$.

2) Sea $g(x) = k$, entonces no existe $y \in \Gamma^+(x)$ tal que $g(y) = k$ porque N_k no seria independiente.

$\therefore$ $g(x)$ es función de Grundy de D.

□

Corolario 5.1. Una digráfica simétrica tiene funcion de Grundy.

Demostracion

Por el Teorema 1, una digráfica simétrica tiene núcleo, y además, éste es un conjunto independiente máximo.

Además, cada subdigráfica inducida de una digráfica simétrica es simétrica, y entonces tiene nucleo.

Por lo tanto, por el Teorema 5, una digráfica D simétrica tiene función de Grundy.

□

Corolario 5.2. Una digráfica transitiva tiene funcion de Grundy.

Demostracion

Toda subdigráfica de una digráfica transitiva, es transitiva, y por el Teorema 2, éstas tienen nucleo.

Luego, por el Teorema 5, D transitiva tiene función de Grundy.

□

Corolario 5.3. Una digráfica sin circuitos de longitud impar tiene función de Grundy.

Demostración

Toda subdigráfica de una digráfica sin circuitos de longitud impar, presenta la misma característica, y por el Teorema 4, tiene núcleo.

Entonces, por el Teorema 5, si D es una digráfica sin circuitos de longitud impar, entonces D tiene función de Grundy.

□

Teorema 6. (Grundy [1939]) Una digráfica sin circuitos, tiene una única función de Grundy g. Además, para cada vértice x, g(x) no excede la longitud del camino más largo desde x.

Demostración

Como en el Teorema 3, considérense los conjuntos

$$X(0) = \{ x : x \in X, \Gamma^+(x) = \emptyset \}$$

$$X(1) = \{ x : x \notin X(0), \Gamma^+(x) \subset X(0) \}$$

$$X(2) = \{ x : x \notin X(0) \cup X(1), \Gamma^+(x) \subset X(0) \cup X(1) \}$$

Claramente estos conjuntos parten X, y $x \in X(k)$ si y solo si el camino más largo desde x, tiene longitud k. Los valores de $g(x)$ pueden ser definidos sucesivamente sobre los conjuntos $X(0)$, $X(1)$, etc.

Si $x \in X(0)$, entonces hágase $g(x) = 0$.
Si $x \in X(1)$, entonces hágase $g(x) = 1$.

Si para cada $x \in X(k)$ con $k \leq n$, el valor $g(x) = \min \{ i : 0 \leq i \leq k$ y $\Gamma^+(x) \cap X(i) = \emptyset \}$ está univocamente definido y satisface las condiciones (1) y (2) de la definicion de funcion de Grundy y además $g(x) \leq k$.

Entonces para $x \in X(n+1)$, el valor $g(x) = \min \{ i : 0 \leq i \leq n+1$ y $\Gamma^+(x) \cap X(i) = \emptyset \}$ está univocamente definido, y satisface (1) y (2) de la definición de función de Grundy ya que :

1) para cada $j < i$ existe $y \in X(j)$ tal que $\Gamma^+(x) = y$ pues de lo contrario, $g(x)$ tendria valor j por ser menor que i y,

2) cada $y \in \Gamma^+(x)$ satisface que $g(y) \neq i$ pues $\Gamma^+(x) \cap X(i) = \emptyset$.

Además, $g(x) \leq n+1$.

$\sqcap$

Antes de demostrar las propiedades fundamentales de las funciones de Grundy, es necesario definir la suma cartesiana de digráficas.

Sean $D_1 = (X_1, \Gamma_1^+)$, $D_2 = (X_2, \Gamma_2^+)$,..., $D_p = (X_p, \Gamma_p^+)$, digráficas, y sea $P = \{ 1, 2,..., p \}$. El Producto Normal de estas digráficas se define como la digráfica $D = D_1 \cdot D_2 \cdot ... \cdot D_p$, cuyo conjunto de vertices es:

$$X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_p = \prod_{i \in P} X_i$$

y con funcion de adyacencia

$$\Gamma^+(x_1, x_2, ..., x_p) = \bigcup_{I \subset P,\ |I| \neq 0} \left(\prod_{i \in I} \Gamma_i^+(x_i) \times \prod_{j \in P - I} \{x_j\} \right)$$

Nota: En la definicion anterior, se debe seguir el orden de 1...p del vertice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ para encontrar sus sucesores.

La Suma Cartesiana de estas digraficas se define como la digrafica $D = D_1 + D_2 + \ldots + D_p$ con conjunto de vertices:

$$X = \prod_{i \in P} X_i.$$

y con funcion de adyacencia

$$\Gamma^+(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \bigcup_{i \in P} (\{x_1\} \times \ldots \times \{x_{i-1}\} \times \Gamma_i^+(x_i) \times \{x_{i+1}\} \times \ldots \times \{x_p\})$$

Finalmente, el Producto Cartesiano de estas digraficas, se define como la digrafica $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_p$ con conjunto de vértices: $X = \prod_{i \in P} X_i$

y con función de adyacencia:

$$\Gamma^+(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \prod_{i \in P} \Gamma_i^+(x_i)$$

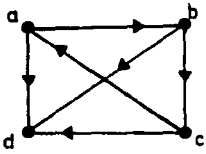
Ejemplo.

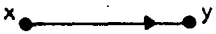
Considerense dos maquinas, y denotamos por X_1 al conjunto de posibles estados de la primera maquina. Para $x_1, y_1 \in X_1$, sea $y_1 \in \Gamma_1^+(x_1)$ si el estado y_1 puede seguirse del estado x_1; luego, la primera maquina define una digrafica $D_1 = (X_1, \Gamma_1^+)$.

Similarmente, la segunda maquina define una digrafica $D_2 = (X_2, \Gamma_2^+)$.

El vertice (x_1, x_2) describe el estado x_1 de la primera maquina, y, el estado x_2 de la segunda maquina. Si el operador trabaja ambas maquinas simultaneamente, la digráfica $D_1 \times D_2$ representa los posibles cambios de situaciones. Si el operador trabaja unicamente una maquina a la vez, la digrafica $D_1 + D_2$ representa los posibles cambios de situaciones. Si el operador puede trabajar con una o con las dos maquinas simultaneamente, la digrafica $D_1 \cdot D_2$ representa los posibles cambios de situaciones.

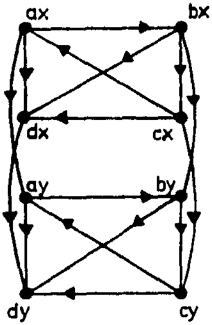
D_1

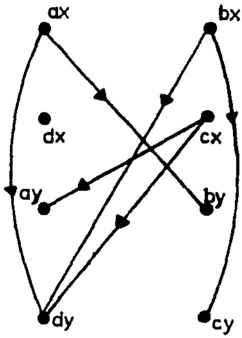




D_2

$D_1 \dotplus D_2$





$D_1 \times D_2$

Proposición 3. Si la digrafica $D = (X_1, \Gamma_1^{-})$ tiene núcleo N, y la digrafica $H = (X_2, \Gamma_2^{+})$ tiene nucleo K, entonces el producto normal $D \cdot H$ tiene al producto cartesiano $N \times K$ como nucleo.

Demostracion

Independencia:

Sea $P = \{1, 2\}$, y sean $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$, elementos de $N \times K$.

Supongamos que $y \in \Gamma^+(x)$, es decir,

$$(y_1,y_2) \in \Gamma^+(x_1,x_2) = \bigcup_{I \subset P,\ |I| \neq 0} \left(\prod_{i \in I} \Gamma_i^+(x_i) \times \prod_{j \in P \setminus I} \{x_j\} \right).$$

Entonces, como $|I| \neq 0$, tiene que suceder que $y_1 \in \Gamma_1^+(x_1)$ o $y_2 \in \Gamma_2^+(x_2)$, o ambas, y en cualquier caso, tenemos una contradicción, pues $x_1, y_1 \in N$, que es núcleo, y $x_2, y_2 \in K$, que también es núcleo.

$\therefore$ $N \times K$ es independiente.

Absorbencia:

Sea $x \in (X_1 \times X_2) \setminus (N \times K)$. $x = (x_1,x_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Como N es núcleo de D, y K es núcleo de H, existen $y_1 \in N$, $y_2 \in K$ tales que sucede una de las tres:

$(y_1,y_2) \in (\Gamma_1^+(x_1), \Gamma_2^+(x_2))$ si $x_1 \notin N$, $x_2 \notin K$.

$(y_1,y_2) \in (\Gamma_1^+(x_1),x_2)$ si $x_1 \notin N$, $x_2 \in K$.

$(y_1,y_2) \in (x_1, \Gamma_2^+(x_2))$ si $x_1 \in N$, $x_2 \notin K$.

Luego, si tomamos $I = P = \{1, 2\}$ en el primer caso, $I = \{1\}$ en el segundo y $I = \{2\}$ en el último caso, tenemos que

$$(y_1,y_2) = [\prod_{i \in I} \Gamma_i^+(x_i)] = [\prod_{i \in I} \Gamma_i^+(x_i) \times \prod_{j \in P \setminus I} \{x_j\}] \subset [\bigcup_{I \subset P,\ |I| \neq 0} (\prod_{i \in I} \Gamma_i^+(x_i) \times \prod_{j \in P \setminus I} \{x_j\})]$$

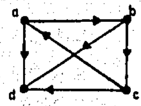
entonces $(y_1,y_2) \in \Gamma^+(x_1,x_2)$.

$\therefore$ $N \times K$ es absorbente.

$\therefore$ $N \times K$ es núcleo.

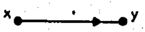
$\square$

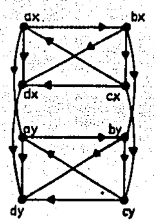
Despues del resultado anterior, surge la pregunta de que ¿ si dos digraficas tienen núcleo, la suma cartesiana tiene nucleo ? ; a lo que C. Y. Chao encontro en 1963 el siguiente contraejemplo.



D_1

D_2





$D_1 + D_2$

El nucleo de la digrafica D_1 es el vertice d, mientras que el núcleo de D_2 es y, sin embargo, $D_1 + D_2$ no tiene nucleo, ya que de tenerlo, el vértice dy estaria en él por ser vértice terminal, en consecuencia, los vertices ay, by, cy y dx tendrian que estar fuera el núcleo por ser advacentes al vertice dy. de los vertices ax, bx y cx, podemos meter cualquiera al núcleo, digamos ax y solo absorberia a cx, por lo que el vertice bx tendria que estar en el núcleo, pero esto es imposible pues es advacente a ax. Si en lugar del vertice ax, metemos al nucleo a alguno de los vertices bx o cx, llegamos a una contradiccion semejante. Por lo tanto, $D_1 + D_2$ no tiene nucleo.

Despues se demmostrara que si dos digraficas D_1 y D_2 tienen funcion de Grundy, entonces la digrafica $D_1 + D_2$ tiene nucleo. Antes de demostrar estos resultados, algunos desarrollos son necesarios.

La expansion binaria de un natural p es la sucesion $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ de ceros y unos tal que $p = p_1 + 2p_2 + 4p_3 + \ldots + 2^{k-1}p_k$

Su forma binaria es $p = p_k\, p_{k-1}\, p_{k-2} \ldots p_2\, p_1$

Por ejemplo:

FORMA DECIMAL	FORMA BINARIA	EXPANSION BINARIA
0	0	(0)
1	1	(1)
2	10	(0,1)
3	11	(1,1)
4	100	(0,0,1)
5	101	(1,0,1)
6	110	(0,1,1)
7	111	(1,1,1)
8	1000	(0,0,0,1)
9	1001	(1,0,0,1)
10	1010	(0,1,0,1)
11	1011	(1,1,0,1)

NOTA: Si $(G, +, 0)$ es un grupo, X es un conjunto y $G^X = \{ f : X \rightarrow G \}$, entonces $(G^X, +, o)$ es un grupo donde:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $o(x) = 0$, para $f, g \in G^X$, $x \in X$ y 0 elemento neutro de G.

En particular, $(\mathbf{Z}_2^{\mathbb{N}}, +, o)$ es un grupo.

A su vez $G^{(X)} = \{ f \in G^X : f(x) = 0$ para casi toda $x \in X \}$ es subgrupo de G^X, luego, $(\mathbf{Z}_2^{(\mathbb{N})}, +, o)$ es un grupo con la suma coordenada a coordenada pues es subgrupo de $(\mathbf{Z}_2^{\mathbb{N}}, +, o)$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Z}_2^{(\mathbb{N})}$ tal que $\varphi(n) = \varphi(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0) = (a_0, a_1, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$, donde $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ es la representacion binaria de n y $(a_0, a_1, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$ es su expansión binaria.

φ es inyectiva pues la representación binaria de un numero natural es única y es suprayectiva ya que cualquier expansión binaria $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ proviene de algún $n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^ka_k$.

Así, φ es biyectiva

Por lo tanto, φ induce de manera única una operación en $\mathbb{N}$ (La Suma Digital $\oplus$) que convierte a $\mathbb{N}$ en un grupo isomorfo a $(\mathbf{Z}_2^{(\mathbb{N})}, +, o)$.

Es decir, para calcular $(n \oplus m)$: $n, m \in \mathbb{N}$, tomense las expansiones binarias de n y m ($\varphi(n), \varphi(m)$), sumense en $\mathbf{Z}_2^{(\mathbb{N})}$ coordenada a coordenada ($\varphi(n) + \varphi(m)$) y luego calculese el numero con la expansion binaria obtenida ($\varphi^{-1}(\varphi(n) + \varphi(m))$). Por lo anterior tenemos:

Proposición 4. ($\mathbb{N}, \oplus, 0$) es un grupo abeliano.

Por ejemplo:

$3 \oplus 7 = \varphi^{-1}(\varphi(3) + \varphi(7)) = \varphi^{-1}((1,1) + (1,1,1)) = \varphi^{-1}(0,0,1) = 4$

$1 \oplus 3 \oplus 11 = \varphi^{-1}(\varphi(1) + \varphi(3) + \varphi(11)) = \varphi^{-1}((1) + (1,1) + (1,1,0,1)) = \varphi^{-1}(1,0,0,1) = 9$

Corolario. Dados dos naturales p y q, existe un único natural r tal que $p \oplus r = q$.

Demostracion

Sea $r = q \oplus p$.

Entonces, $p \oplus r = p \oplus (q \oplus p) = p \oplus (p \oplus q) = (p \oplus p) \oplus q = q$.

Supongamos que existiera r' tal que $p \oplus r' = q$.

Luego, como $p \oplus r = q$, tenemos que $p \oplus r = p \oplus r'$, sumando p de ambos lados, tenemos $p \oplus (p \oplus r) = p \oplus (p \oplus r')$. $\Rightarrow (p \oplus p) \oplus r = (p \oplus p) \oplus r'$.

Asi $r = r'$.

□

Teorema 7. Si las digráficas $D_1 = (X_1, \Gamma_1^+)$, ..., $D_n = (X_n, \Gamma_n^+)$, tienen funciones de Grundy $g_1, \ldots, g_n$ respectivamente; entonces la función g tal que $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \ldots \oplus g_n(x_n)$ es una función de Grundy para la suma cartesiana $D = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$.

Demostracion

Considerese el vertice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en D, y sea

$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Z}_2^{(\mathbb{N})}$, donde la imagen de un natural n bajo φ es su expansión binaria;

también, sea $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overset{\oplus}{\sum\limits_{i=1 \ldots n}} g_i(x_i) = p$.

(I) Debemos mostrar que para cada $q < p$, hay un vertice

$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Gamma^+(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = q$.

$\varphi(p) \in \mathbf{Z}_2^{(\mathbb{N})}$

$\varphi(q) \in \mathbf{Z}_2^{(\mathbb{N})}$

Sea k_0 la k mas grande para la cual $\varphi(p)_k \neq \varphi(q)_k$.

Esto es, $\varphi(p) = (a_0, a_1, \ldots, a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$

$\varphi(q) = (b_0, b_1, \ldots, b_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$

con $b_{k_0} \neq a_{k_0}$

Entonces, $a_{k_0} = 1$, $b_{k_0} = 0$, ya que de otra forma, tendriamos

$p = a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^{k_0}(0) + 2^{k_0+1}a_{k_0+1} + \ldots + 2^n a_n$

$q = b_0 + 2b_1 + \ldots + 2^{k_0}(1) + 2^{k_0+1}a_{k_0+1} + \ldots + 2^n a_n.$

Entonces $p - q = a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^{k_0-1}a_{k_0-1} - b_0 - 2b_1 - \ldots - 2^{k_0-1}b_{k_0-1} - 2^{k_0} > 0,$

entonces $2^{k_0} < (a_0-b_0) + 2(a_1-b_1) + \ldots + 2^{k_0-1}(a_{k_0-1}-b_{k_0-1}) \leq 1 + 2 + \ldots + 2^{k_0-1} = 2^{k_0}-1$, lo cual es imposible, luego,

$a_{k_0} = 1$, $b_{k_0} = 0$.

Sabemos que $\varphi(p) = \varphi(\sum_{i=1,\ldots,n} g_i(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(g_i(x_i))$

Así, $1 = \varphi(p)_{k_0} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(g_i(x_i))_{k_0}$.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $\varphi(g_1(x_1))_{k_0} = 1$.
Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(p) + \varphi(r) = \varphi(q)$

entonces $\varphi(p)_{k_0} + \varphi(r)_{k_0} = \varphi(q)_{k_0}$

así, como $\varphi(p)_{k_0} = 1$ y $\varphi(q)_{k_0} = 0$ entonces $\varphi(r)_{k_0} = 1$.

Además, si $s > k_0$

$\varphi(p)_s = \varphi(q)_s$

Por lo tanto, $\varphi(p)_s + \varphi(r)_s = \varphi(q)_s \Rightarrow \varphi(r)_s = 0$.

$\therefore g_1(x_1) \oplus r < g_1(x_1)$ pues

$\varphi(g_1(x_1) \oplus r) = (c_1, c_2, \ldots, c_{k_0-1}, 0, 0, \ldots)$

$\varphi(g_1(x_1)) = (d_1, d_2, \ldots, d_{k_0-1}, 1, d_{k_0+1}, \ldots)$.

Por lo que hay un vértice $y_1 \in \Gamma_1^+(x_1)$ en D_1 con $g_1(y_1) = g_1(x_1) \oplus r$.

Por lo tanto, para el vértice $(y_1,x_2,\dots,x_n) \in \Gamma^+(x_1,x_2,\dots,x_n)$ en D, tenemos $g(y_1,x_2,\dots,x_n) = g_1(y_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n) = p \oplus r = q$.

(2) Mostraremos que si $(y_1,x_2,\dots,x_n) \in \Gamma^+(x_1,x_2,\dots,x_n)$, entonces $g(y_1,x_2,\dots,x_n) \neq p$.

Si $y_1 \in \Gamma_1^+(x_1)$, entonces $g_1(x_1) \neq g_1(y_1)$. Por esto y por el Corolario anterior :

$$\begin{aligned} g(y_1,x_2,\dots,x_n) &= g_1(y_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n) \\ &\neq g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n) \\ &= g(x_1,x_2,\dots,x_n) = p. \end{aligned}$$

Por (1) y (2), g es función de Grundy de D.

□

IV. JUEGOS TIPO NIM

Dados dos jugadores A y B, y una digrafica $D = (X,\Gamma^+)$, se puede definir el siguiente juego: Comenzando desde un vértice inicial x_0, el jugador A selecciona un vértice x_1 de $\Gamma^+(x_0)$. El jugador B selecciona un vértice x_2 de $\Gamma^+(x_1)$. Posteriormente, el jugador A selecciona cualquier vertice x_3 en $\Gamma^+(x_2)$, etc. Si un jugador selecciona un vértice x_i con $\Gamma^+(x_i) = \emptyset$, entonces, ese jugador gana y su oponente pierde. Claramente, si existen circuitos en la digráfica, el juego no siempre termina.

Este juego se llama tipo NIM. Se estudiarán las representaciones de sus posiciones ganadoras, es decir, aquellos vértices que deben ser escogidos por un jugador para ganar, sin importar como juega su oponente.

Algunos ejemplos de juegos tipo NIM son:

FAN TAN

Hay p pilas de cerillos. Cada uno de los dos jugadores selecciona, alternadamente, una pila, y quita uno o más cerillos de la pila. El jugador que quita el último cerillo, gana. Denotaremos a este tipo de juegos por UJG (último jugador gana).

FAN TAN *

Dos jugadores juegan con las mismas reglas que en el ejemplo anterior, pero el jugador que quita el ultimo cerillo, pierde. Este juego se reduce a un juego tipo NIM al añadir un vertice a la digrafica. Este tipo de juego lo denotamos como UJP (ultimo jugador pierde).

NOTA: En lo siguiente, se considerara solo el juego UJG (ultimo jugador gana).

JUEGO DE WYTHOFF [1907]

Sea X el conjunto de puntos enteros no negativos en el plano.

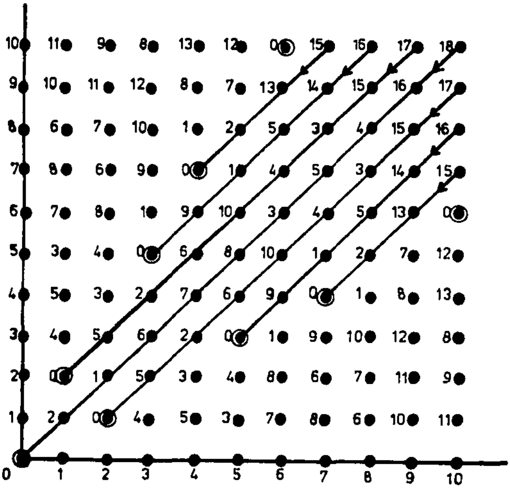
Desde un punto (p,q) $\in \mathbb{N}^2$, un jugador puede seleccionar cualquier punto tal que el valor de una de sus coordenadas se decrementa, mientras que el valor de la otra coordenada permanece igual, o, de tal manera que ambas coordenadas se decrementan en la misma cantidad.

Los jugadores toman turnos alternados. El primer jugador que seleccione el punto (0,0), gana.

Por ejemplo, desde el punto (4,1), los siguientes puntos están disponibles: (4,0), (3,1), (2,1), (1,1), (0,1), (3,0).

La digráfica $D = (X,\Gamma^+)$ definida por este juego, donde $x \in X$ es un estado del juego y, $y \in \Gamma^+(x)$, con $y \in X$, si y sólo si se puede pasar del estado x al estado y en el juego; D no contiene circuitos, y en consecuencia, posee función de Grundy, indicada en la figura siguiente. Las posiciones ganadoras están dentro de un círculo. Nótese que éstas posiciones están distribuidas simétricamente alrededor de la diagonal principal.

El juego aquí descrito es atribuido a R. Isaacs [1958], pero J. Kenyon [1967] se percató de que éste es equivalente a un juego inventado por Wythoff en 1907.



Definición 31. En un juego tipo NIM sobre una digráfica D. diremos que los vértices de Triunfo son aquellos que garantizan el triunfo al jugador que los escoja.

Así mismo los vèrtices de Pérdida se definen como aquellos que llevan al fracaso al jugador que los tome.

Por ultimo, los vértices de Sorteo son los vértices que no garantizan el triunfo (o fracaso) al jugador que los selecciona.

Teorema 8. Si la digráfica $D = (X,\Gamma^+)$ tiene núcleo N, y si un jugador escoge un vértice en N, esta opción le asegura ganar o empatar.

Demostración

Si el jugador A escoge el vértice $x_1 \in N$, o $\Gamma^+(x_1) = \emptyset$ y x_1 es un vértice de triunfo, o su oponente B estará forzado a escoger un vértice $x_2 \in X \setminus N$. Entonces el jugador A puede escoger nuevamente un vértice $x_3 \in N$, y así sucesivamente. El juego termina cuando uno de los jugadores escoge un vértice x_k con $\Gamma^+(x_k) = \emptyset$. Claramente, $x_k \in N$; y el jugador que gana no puede ser B.

□

Para ganar juegos de esta forma, un jugador podría calcular una función de Grundy g (si existe una), y jugar entonces en el núcleo $N = \{ x : g(x) = 0 \}$.

Si el vertice inicial x_0 satisface $g(x_0) = 0$, entonces el jugador A está en una posición peligrosa, pues su oponente puede ganar u obtener un empate. Si $g(x_0) \neq 0$, entonces el jugador A puede asegurarse de ganar o empatar escogiendo cualquier sucesor x_1 de x_0, con $g(x_1) = 0$.

Considérese n juegos tipo NIM (X_1,Γ_1^+), (X_2,Γ_2^+), ..., (X_n,Γ_n^+).

Supóngase ahora que cada jugador puede jugar solamente en uno de los juegos NIM durante su turno; el primer jugador que no pueda jugar es el perdedor. Esta situacion es, de hecho, un juego NIM en la suma cartesiana de digraficas (X_i,Γ_i^+). El siguiente Teorema proporciona una estrategia ganadora.

Teorema 9. Considerese n juegos tipo NIM, $D_1 = (X_1,\Gamma_1^+)$, $D_2 = (X_2,\Gamma_2^+)$, ..., $D_n = (X_n,\Gamma_n^+)$, con funciones de Grundy $g_1, g_2, ..., g_n$.

Un jugador no perderá el juego en la suma cartesiana $D = \Sigma D_i$, si escoge una posición $x = (x_1,...,x_n)$ tal que $g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = 0$.

Demostracion

Se sigue inmediatamente de los Teoremas 7 y 8.

$\square$

Ejemplos:

FAN TAN

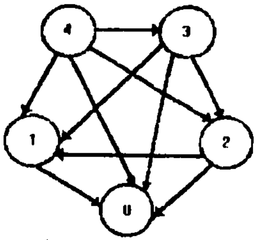
Cada uno de los dos jugadores, selecciona alternadamente una de p pilas de cerillos, y quita al menos un cerillo de esta. El jugador que quite el último cerillo gana.

Este juego es la suma cartesiana de los juegos :

$$D_1 = (X_1,\Gamma_1^+),\ D_2 = (X_2,\Gamma_2^+),\ \ldots,\ D_n = (X_n,\Gamma_n^+).$$

donde $x_k \in X_k$ representa el estado de la k-ésima pila. Claramente, $g_k(x_k)$ es igual al número de cerillos en la k-esima pila. Del Teorema 9, una posición es ganadora si y sólo si la suma digital del numero de cerillos es cero.

$g(0) = 0$
$g(1) = 1$
$g(2) = 2$
$g(3) = 3$
$g(4) = 4$



La digrafica anterior, esta asociada a una pila con 4 cerillos el valor de la funcion de Grundy de cada vertice claramente es igual al numero de cerillos en la pila

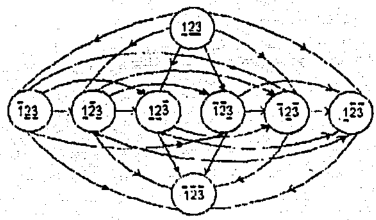
TORTUNIM

El juego consiste en que cada jugador, alternadamente, voltea una tortuga boca arriba, de una fila de tortugas, y puede también voltear una segunda tortuga que esté a la izquierda de la primera.

La segunda tortuga, a diferencia de la primera, puede ser volteada boca arriba o boca abajo. El último jugador que voltea boca arriba una tortuga, es el ganador.

Podemos asociar este juego con una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$, donde X es el conjunto de estados dentro del juego, y $\Gamma^+(x)$ es el conjunto de estados a los que se puede llegar desde $x \in X$ en la jugada siguiente.

La digráfica asociada a un juego con 3 tortugas es la que sigue:



En la digráfica anterior, una barrita arriba o abajo del numero i, indica que la tortuga i, está boca arriba o boca abajo respectivamente.

La digráfica no contiene circuitos, por lo tanto, tiene función de Grundy.

POKER NIM

Este juego es jugado con pilas de fichas de poker. Como en el Fan Tan, cada jugador puede reducir el tamaño de alguna pila, removiendo cualquier cantidad de fichas. Pero ahora, el jugador tiene un movimiento alternativo, incrementar el tamaño de alguna pila añadiendo a ésta, alguna de las fichas adquiridas en movimientos anteriores.

Aquí se puede utilizar la misma estrategia que en el juego de Fan Tan, ya que el movimiento opcional que tienen los jugadores puede ser anulado con un movimiento "reversible" que regrese el juego justo al estado anterior.

Supongamos que tenemos 3 pilas de tamaños (3,4,6), y que el juego ha sido jugado por algún tiempo, de tal forma que los jugadores han acumulado fichas de reserva.

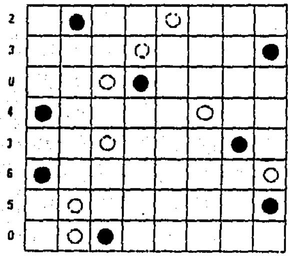
Si es el turno del jugador A, y el mueve a la posición (2,4,6), esta posición es ganadora en el Fan Tan ordinario. Pero ahora, el jugador B suma 50 fichas a la pila con 4, de forma que el juego queda en la posición (2,54,6). El jugador A, lo único que tiene que hacer, es retirar 50 fichas de la pila de 54 para, de esta forma, regresar a la posición (2,4,6).

Tarde o temprano, el jugador B agotará sus fichas de reserva, y tendrá que reducir alguna de las pilas como en el Fan Tan, de esta forma, el jugador A podrá volver a colocarse en una posición ganadora.

Así, podemos ver que una posición ganadora, en el Fan Tan, es aún ganadora en el Poker Nim, ya que el movimiento alternativo, sólo pospone el triunfo, no lo evita indefinidamente.

JUEGO DE NORTHCOTT'S

Este juego se juega sobre un tablero de damas, en el cual se colocan una ficha blanca y una negra en cada renglón como en la siguiente figura:



Cada jugador puede mover una pieza de su propio color a cualquier otra casilla vacía sobre el mismo renglón, con la prohibición de saltar las fichas del oponente.

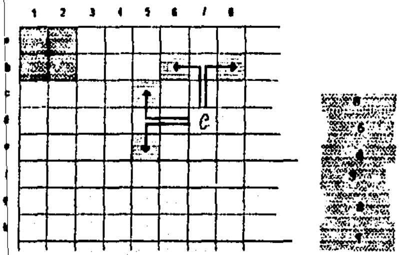
El jugador que no pueda mover porque tenga atrapadas a todas sus fichas en los extremos, pierde el juego.

Este juego es idéntico al Póker Nim, si tratamos los espacios en blanco en cada renglón como si fueran fichas en distintas pilas.

El juego mostrado en la figura anterior es equivalente a un juego de Póker Nim con 8 pilas de tamaños (2.3.0.4.3.6.5.0). Por lo tanto, en este juego, se puede seguir la misma estrategia que en el Poker Nim para ganarlo.

CABALLO BLANCO

El Caballo Blanco puede desde cualquier posición en el tablero de ajedrez, realizar los movimientos siguientes:



Por el Teorema 6 el juego del Caballo Blanco tiene una única función de Grundy ya que su digráfica asociada no tiene ciercuitos.

Ahora considérese el juego en el cual, cada jugador puede mover el caballo a uno de los cuatro lugares marcados o, puede robar cualquier cantidad de cerillos de una pila adicional que se coloca a la derecha del tablero.

El juego termina solo cuando el caballo está en una de las cuatro casillas de la esquina superior izquierda y todas las cajas han sido removidas.

Aqui, el juego total es el resultado de tomar la Suma Cartesiana del juego del caballo con el juego de Fan Tan con una pila.

En la siguiente tabla, se expresan los valores de la función de Grundy para algunas posiciones del caballo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
b	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
c	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	
d	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	
e	0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0		
f	0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0		
g	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3			
h	1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	3			
i	0	0	3	3	0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1				
j	0	0	2	3	0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1				
k	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2						
l	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	1								
m	0	0	3	3	0	0	3	3	0	0										
n	0	0	2	3	0	0	2	3												
o	1	1	2	2	1	1														
p	1	1	2	3																
q	0	0																		

Encontremos el valor de Grundy para la posición d7 de la figura anterior, supongamos que conocemos los valores de las posiciones a las cuales se puede mover el caballo desde d7.

Estas posiciones pueden verse como pilas con 0, 3, 0 y 1 cerillos, y con la pila adicional con 6 cerillos tenemos el valor de la posicion d7 en el juego total.

$$0 \oplus 3 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 6 = 4$$

Así, para asegurar esta posicion, basta con quitar 4 cerillos de la pila adicional.

SYNONIM

Nuevamente, este juego es como el Fan Tan, sólo que ahora, todas las pilas del mismo tamano deben tratarse de la misma forma, es decir, si se reduce una pila, se deben reducir todas las pilas de ese tamaño en la misma cantidad.

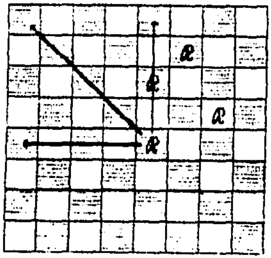
Basta con observar que si consideramos a todas las pilas de un mismo tamaño como una sola pila de ese tamaño, la estrategia para ganar este juego es análoga a la del juego Fan Tan.

REINAS WYT

En el juego de Reinas Wyt, cualquier número de reinas puede estar en la misma casilla de un tablero de ajedrez, y cada jugador, cuando le toca mover, puede mover una sola reina, una distancia arbitraria hacia el Norte, Oeste o Noroeste, aun brincando sobre otras reinas; el objetivo del juego es tener a todas las reinas en la casilla superior izquierda del tablero y el ultimo jugador que pueda mover, gana el juego.

Ya que las reinas se mueven independientemente, podemos tratar el juego total como la suma de juegos con una sola reina. Las reinas sobre el tablero, podemos hacerlas corresponder con pilas tipo NIM que podemos sumar usando la suma digital.

El juego con una reina es una transformacion del juego de Wythoff que ya se vió anteriormente.



JUEGO DE GRUNDY

Aquí, el único movimiento legal consiste en dividir una pila en dos más pequeñas de diferentes tamaños. Eventualmente, todas las pilas tendrán tamaño 1 o 2, y no podrán ser divididas; el jugador que divida la última pila es el ganador.

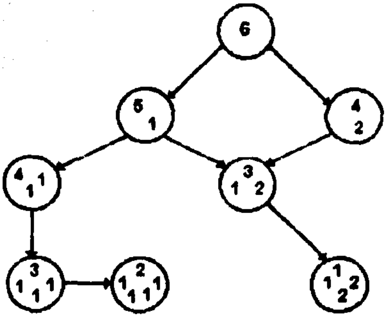
Nuevamente, podemos hacer una digráfica en la que cada vértice represente un estado del juego, es decir, cada vértice indica el tamaño de cada pila, y (u,v) está en las flechas de la digráfica si de la posicion u se puede pasar a la posición v.

La digráfica D asociada al Juego de Grundy no tiene circuitos, entonces admite una única función de Grundy g, en particular, el vértice inicial v (que se identifica con el número inicial n de elementos en la pila) tiene valor g(v) = (g(n)).

A continuación se presentan los primeros 101 valores g(n) de la función de Grundy correspondientes a pilas con n ∈} 1, 2, ... , 101 { .

n =	0 - 19	0 0 0 1 0 2 1 0 2 1	0 2 1 3 2 1 3 2 4 3
	20 - 39	0 4 3 0 4 3 0 4 1 2	3 1 2 4 1 2 4 1 2 4
	40 - 59	1 5 4 1 5 4 1 5 4 1	0 2 1 0 2 1 5 2 1 3
	60 - 79	2 1 3 2 4 3 2 4 3 2	4 3 2 4 3 2 4 3 2 4
	80 - 100	5 2 4 5 2 4 3 7 4 3	7 4 3 7 4 3 5 2 3 5 2

En seguida, se presenta la digráfica asociada a un Juego de Grundy con una pila inicial de 6 elementos.



Para saber si una posicion es segura, basta con que se sumen digitalmente los valores de Grundy de cada una de las pilas de la posición, y se recuerde que una posición es segura si su suma digital es cero.

V. FUNCIONES DE GRUNDY Y DESCOMPOSICION DE JUEGO

Definición 32. Se dice que un juego es un Juego Bipersonal de Suma Cero, si la suma de las ganancias es cero, es decir, si uno de los dos jugadores pierde exactamente tanto como lo que el otro jugador gana.

Definición 33. Un juego en el cual cada participante, al hacer una jugada, conoce los resultados de todas las jugadas hechas previamente, se llama Juego de Información Perfecta.

Hasta ahora hemos encontrado que el conjunto de vértices $X = \{ x : g(x) = 0 \}$, nos garantizan el triunfo o empate en un juego tipo NIM sobre una digráfica $D = (X,\Gamma^+)$. A continuación, caracterizaremos los conjuntos de vertices de triunfo, pérdida y de sorteo en un juego tipo NIM en digráficas, en términos de funciones de Grundy.

El siguiente teorema básico, es debido a Romanowicz y Wozniac.

Teorema 10. Para cada digráfica $D = (X,\Gamma^+)$, existe exactamente una descomposición ajena y ordenada A, B, C, del conjunto X, tal que

1) $\Gamma^+(x) \cap B \neq \emptyset$, para cada $x \in A$.

2) $\Gamma^+(x) \subset A$, para cada $x \in B$.

3) $\Gamma^+(x) \cap B = \emptyset$ y $\Gamma^+(x) \cap C \neq \emptyset$, para cada $x \in C$.

4) Si A', B', C' es otra descomposición ajena y ordenada de X, que satisface las condiciones (1)-(3), $\Rightarrow C' \subseteq C$.

NOTA: Una prueba detallada de este Teorema es presentada en [3]

La descomposición A, B, C del conjunto X del Teorema 10, es llamada Descomposición de Juego de la digráfica D.

Los conjuntos A, B, C son los conjuntos de Triunfo, Pérdida y Sorteo respectivamente, en el juego bipersonal de suma cero de información perfecta en la digráfica D, con último jugador ganador.

Si la descomposición de juego es conocida, es fácil describir una estrategia óptima para el juego mencionado en la digráfica.

Como se vio anteriormente, la función de Grundy de una digráfica es muy utilizada en la solucion de sumas de juegos en digraficas. Esto se sigue, de la posibilidad de la simple construccion de la funcion de Grundy para sumas de digráficas a partir de las funciones de Grundy de las digraficas componentes.

Observemos que una digráfica bipartita no tiene circuitos de longitud impar, luego, por el Teorema 4, esta digrafica tiene núcleo.

Teorema 11. Para una digráfica bipartita $D = (X,\Gamma^+)$, con bipartición X_1, X_2 de X y con descomposición de juego A, B, C, tenemos que los conjuntos

$$N_i = B \bigcup_{i=1,2} (C \cap X_i) \quad \text{son núcleos de la digráfica D.}$$

Demostración.

1)Independencia

Para $i=1, 2$ tenemos que B es independiente, ya que por el Teorema 10

$\forall x \in B, \Gamma^+(x) \subset A$, y $A \cap B = \varnothing$.

Ahora, $(C \cap X_i)$ es independiente por ser X_i independiente.

Ademas, no hay flechas de B a $(C \cap X_i)$, pues $\Gamma^+(x) \subset A$; $\forall x \in B$, y $A \cap C = \varnothing$, y por ultimo, no hay flechas de $(C \cap X_i)$ a B, pues $\Gamma^+(x) \cap B = \varnothing$, $\forall x \in C$.

$\therefore N_i = B \cup (C \cap X_i)$ es independiente.

2) Absorbencia

Sea $x \in X \setminus N_i = A \cup (C \cap X_j)$, con $j \in \{1, 2\}$, y $N_i = B \cup (C \cap X_i)$, $i \in \{1, 2\}$; $i \neq j$.

Por el Teorema 10, tenemos que $\forall\ x \in A$, $\Gamma^+(x) \cap B \neq \varnothing$, por lo tanto, B absorbe a $x \in A$; tambien por el Teorema 10 tenemos que $\forall\ x \in C$, $\Gamma^+(x) \cap C \neq \varnothing$, luego, si $x \in (C \cap X_j)$,

$\Gamma^+(x) \in X_i$, con $i \neq j$, por ser X_1 y X_2 independientes.

Asi, $C \cap X_j$ es absorbido por N_i, con $\{i, j\} = \{1, 2\}$; $i \neq j$.

$\therefore$ N_i es absorbente, con $i \in \{1, 2\}$

$\therefore$ N_i es núcleo, con $i \in \{1, 2\}$.

$\square$

Teorema 12.Para cualquier núcleo N de una digráfica $D = (X,\Gamma^+)$ se tiene :

$B \subset N \subset B \cup C$

$A \subset X \setminus N \subset A \cup C$.

Una demostracion de este Teorema se puede encontrar en [7].

Para los nucleos descritos en el Teorema 11 tenemos la siguiente

Observación. Si N_i es nucleo de $D = (X,\Gamma^+)$ bipartita, entonces:

$B \subset N_i \subset B \cup C$

$A \subset X \setminus N_i \subset A \cup C$.

Demostracion.

Se sigue de las definiciones de N_1 y N_2 .

$\square$

Sea $W(\alpha)$ el conjunto de todos los números naturales menores que α. Para una digráfica $D = (X,\Gamma^+)$, sea γ un número fijo, mayor que la cardinalidad del conjunto potencia de X ($|P(X)|$).

Sea $GF(D)$ el conjunto de todas las funciones de Grundy de D.

Una condicion necesaria y suficiente para la existencia de una función de Grundy de una digráfica, está dada por:

Teorema 13. Una digrafica $D = (X,\Gamma^+)$, tiene función de Grundy si y sólo si existe la descomposicion ajena y ordenada $\{ X_\alpha : \alpha \in W(\gamma) \}$ del conjunto X tal que para cada $\alpha \in W(\gamma)$, el conjunto X_α es un nucleo de la digráfica $D_\alpha = (X_\alpha', \Gamma_\alpha^+)$, donde

$X_\alpha' = X \setminus \bigcup \{ x : x \in X_\beta;\ \beta \in W(\alpha) \}$, y

$\Gamma_\alpha^+(x) = \Gamma^+(x) \cap X_\alpha'$, para $x \in X_\alpha'$.

Demostracion.

$\Rightarrow]$

Es obvio que si $g: X \rightarrow W(\gamma)$ es una función de Grundy de la digráfica $D = (X,\Gamma^+)$, entonces los conjuntos

$X_\alpha = \{ x \in X,\ g(x) = \alpha \}$, $\alpha \in W(\gamma)$, forman una descomposición ajena y ordenada de X.

Ahora, observemos que para $\alpha \in W(\gamma)$ y $x \in X_\alpha$, tenemos por (2) de la definicion de Grundy que: $\Gamma^+(x) \cap X_\alpha = \varnothing$; de manera que tambien $\Gamma_\alpha^+(x) \cap X_\alpha = \varnothing$. (Independencia de X_α en D_α).

Simultáneamente, para $x \in X_\alpha' \setminus X_\alpha$, tenemos que $g(x) > \alpha$ y por (1) de la definicion de funcion de Grundy, existe $y \in \Gamma^+(x)$ tal que $g(y) = \alpha$. De aqui que $y \in X_\alpha$, y obviamente,

$\Gamma_\alpha{}^+(x) \cap X_\alpha = \Gamma^+(x) \cap X_\alpha \neq \varnothing$. (Absorbencia de X_α en D_α).

Consecuentemente, X_α es un núcleo de D_α.

$\Leftarrow$]

Sea $\{ X_\alpha : \alpha \in W(\gamma) \}$ una descomposición de X que cumple las condiciones de la hipótesis.

Sea $g: X \rightarrow W(\gamma)$ una función definida por $g(x) = \alpha$ si $x \in X_\alpha$

Debemos mostrar que g es una función de Grundy de D.

Supóngase que $x \in X_\alpha$. Como X_α es núcleo de D_α, concluimos que:

$\Gamma_\alpha{}^+(x) \cap X_\alpha = \varnothing$, y $\Gamma^+(x) \cap X_\alpha = \varnothing$. De aqui, para cada $y \in \Gamma^+(x)$, tenemos $g(y) \neq g(x)$.

Ahora, sea $x \in X_\alpha$, donde $\alpha > 0$, y sea $\beta \in W(\alpha)$.

Entonces, $x \in X_\beta' \setminus X_\beta$; y por la absorbencia de X_β, núcleo de D_β, tenemos que $\Gamma_\beta{}^+(x) \cap X_\beta \neq \varnothing$.

Consecuentemente, $\exists\, y \in \Gamma^+(x)$, para el cual, $g(y) = \beta$.

Esto prueba que g es función de Grundy de D.

□

El siguiente resultado se demostró en la nota 2 del Capitulo III.

Corolario 13.1. Sea g una función de Grundy de una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$. Entonces, el conjunto $g^{-1}(0) = \{ x \in X : g(x) = 0 \}$ es un nucleo de D.

Sea $D = (X, \Gamma^+)$ una digrafica bipartita. Notese que cada subdigráfica es bipartita tambien. Sea N_0 un núcleo de D (vease el Teorema 11). Definimos por induccion la sucesión (N_α), $\alpha \in W(\gamma)$ de subconjuntos ajenos de X, donde N_α es nucleo de la subdigrafica generada por $X \setminus \bigcup \{ N_\beta : \beta \in W(\alpha) \}$. Esta sucesion satisface las condiciones del Teorema 13, consecuentemente, de acuerdo con el Teorema 13, su prueba y el Corolario 13.1, tenemos:

Corolario 13.2. Para cada núcleo N de la digráfica bipartita D, existe una función de Grundy g de D tal que $N = g^{-1}(0)$.

Teorema 14. La descomposición de juego de la digráfica bipartita $D = (X, \Gamma^+)$, es expresada por sus funciones de Grundy, y :

$A = X \setminus \bigcup \{ g^{-1}(0) : g \in GF(D) \}$

$B = \bigcap \{ g^{-1}(0) : g \in GF(D) \}$

$C = \bigcup \{ g^{-1}(0) : g \in GF(D) \} \setminus \bigcap \{ g^{-1}(0) : g \in GF(D) \}$.

Demostracion.

Como D es bipartita, entonces para el núcleo $N_i = B \cup (C \cap X_i)$, $i \in \{1, 2\}$; descrito en el Teorema 11, existe por el Corolario 13.2, una función de Grundy g_i de D tal que

$N_i = g_i^{-1}(0)$; $i \in \{1, 2\}$.

Simultaneamente, por el Teorema 12, y el Corolario 13.1, para cada funcion de Grundy g de la digrafica D, tenemos

$A \subset X \setminus g^{-1}(0)$, y $B \subset g^{-1}(0)$, entonces,

$A \subset X \setminus \bigcup \{ g^{-1}(0) : g \in GF(D) \} \subset X \setminus (g_1^{-1}(0) \cup g_2^{-1}(0)) = A$, y

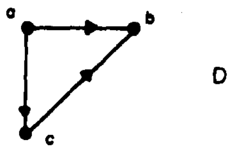
$B \subset \bigcap \{ g^{-1}(0) : g \in GF(D) \} \subset (g_1^{-1}(0) \cup g_2^{-1}(0)) = B$

La tercera igualdad es consecuencia inmediata de las primeras dos, y del hecho de que $C = X \setminus (A \cup B)$.

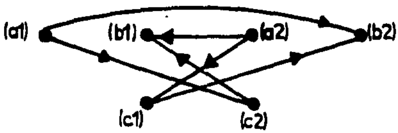
$\square$

Por medio de las funciones de Grundy, es posible también caracterizar una descomposición de juego de una digráfica no bipartita. En este caso, para una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$, sea $D' = (X', \Gamma'^+)$, la digráfica bipartita en la cual, $X' = X \times \{1, 2\}$ y $\Gamma'^+(x,i) = \Gamma^+(x) \times \{j\}$, para $(x,i) \in X'$; $\{i, j\} = \{1, 2\}$; $i \neq j$.

Para ejemplificar la construccion de D' a partir de D, sea $D = (X, \Gamma^+)$ la siguiente digrafica:



Entonces, D' luciria de la siguiente manera:



Teorema 15. A, B, C es la descomposición de juego de una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$ si y sólo si la descomposición ajena y ordenada $A' = A \times \{1, 2\}$; $B' = B \times \{1, 2\}$; $C' = C \times \{1, 2\}$ del conjunto X', es una descomposición de juego de la digráfica bipartita $D' = (X', \Gamma'^+)$, donde $\Gamma'^+(x,i) = \Gamma^+(x) \times \{j\}$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$; $i \neq j$.

Demostración.

$\Rightarrow$]

Sea A, B, C la descomposición de juego de $D = (X, \Gamma^+)$.

1) Sea $x' \in A'$, entonces $x' = (x,i)$; $x \in A$; $i \in \{1, 2\}$.

Como B es elemento de la descomposición de juego de D, tenemos que

$\Gamma^+(x) \cap B \neq \emptyset$; $\Rightarrow \exists\, y \in \Gamma^+(x)$ tal que $y \in B$, y como

$\Gamma'^+(x,i) = \Gamma^+(x) \times \{j\}$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$; $i \neq j$, entonces $\exists\, y' = (y,j) \in \Gamma'^+(x')$, entonces $y' \in B'$, pues $y \in B$.

$\therefore \Gamma'^+(x') \cap B' \neq \emptyset$.

2) Sea $x' \in B'$, entonces $x' = (x,i)$ con $x \in B$; $i \in \{1, 2\}$ y $\Gamma^+(x) \subset A$, pues A es un elemento de la descomposición de D.

Se sigue de aquí que $\forall\, y \in \Gamma^+(x)$, $y \in A$.

Luego, $\forall\, y' = (y,j) \in \Gamma'^+(x')$, $j \in \{1, 2\}$; $i \neq j$, tenemos que $y' \in A'$ por la definición de A'.

$\therefore \Gamma'^+(x') \subset A'$.

3) Sea $x' \in C'$, entonces $x' = (x,i)$, con $x \in C$; $i \in \{1, 2\}$; entonces

a) $\Gamma^+(x) \cap B = \emptyset$ por hipotesis, entonces no existe $y \in \Gamma^+(x)$ $\ni$

$y \in B$, entonces no existe $y' \in \Gamma'^+(x')$ $\ni$ $y' \in B'$ puesto que

$y' = (y,j)$, con $y \in B$, $j \in \{1, 2\}$; $i \neq j$.

b) $\Gamma^+(x) \cap C \neq \emptyset$ por hipótesis, entonces $\exists\ y \in \Gamma^+(x) \ni y \in C$ por lo que $\exists\ y' = (y,j)$; $j \in \{1, 2\}$; $i \neq j$, $\ni y' \in C'$

$\therefore \Gamma'^+(y') \cap C' \neq \emptyset$.

$\therefore$ A', B', C' es una descomposición de juego de D'.

$\Leftarrow$]

Sea A', B', C' una descomposición de juego de $D' = (x', \Gamma'^+)$.

1) Sea $x' \in A'$, $x' = (x,i)$ con $x \in A$ por la definición de A'; $i \in \{1, 2\}$.

Como $\Gamma'^+(x') \cap B' \neq \emptyset$, entonces $\exists\ y' \in \Gamma'^+(x')$; $y' \in B'$, con $y' = (y,j)$; $y \in \Gamma^+(x)$; $j \in \{1, 2\}$; $j \neq i$.

Entonces $y \in B$ por la definición de B'.

$\therefore \Gamma^+(x) \cap B \neq \emptyset$.

2) Sea $x' \in B'$, $x' = (x,i)$; $x \in B$; $i \in \{1, 2\}$.

$\Gamma'^+(x') \subset A'$, entonces $\forall\ y' = (y,j) \in \Gamma'^+(x')$; $j \in \{1, 2\}$; $i \neq j$, tenemos que $y' \in A'$, así $y \in \Gamma^+(x)$ y $y \in A$ por definición de A'.

$\therefore \Gamma^+(x) \subset A$, $\forall\ x \in B$.

3) Sea $x' \in C'$, $x' = (x,i)$; $x \in C$; $i \in \{1, 2\}$.

a) Como $\Gamma'^+(x') \cap B' = \emptyset$, entonces no existe $y' = (y,j) \in \Gamma'^+(x')$; $j \in \{1, 2\}$; $i \neq j$.

$\therefore$ no existe $y \in \Gamma^+(x) \ni y \in B$; $x \in C$.

$\therefore \Gamma^+(x) \cap B = \emptyset$, $\forall\ x \in C$.

b) Ya que $\Gamma'^+(x') \cap C' \neq \emptyset$, tenemos que $\exists\ y' \in \Gamma'^+(x')$; $y' = (y,j)$, con $y \in \Gamma^+(x)$; $j \in \{1, 2\}$; $i \neq j$ $\ni y' \in C'$, $\Rightarrow \exists\ y \in \Gamma^+(x) \ni y \in C$.

$\therefore \Gamma^+(x) \cap C \neq \emptyset$.

$\therefore$ A, B, C es una descomposición de juego de D.

$\square$

Por el Teorema anterior, y el hecho de que la descomposición A', B', C' de D' se puede caracterizar por funciones de Grundy (Teorema 14), tenemos el siguiente resultado :

Teorema 16. Una descomposición de juego de cada digráfica es caracterizada por funciones de Grundy.

VI. ESTRATEGIA PARA TAN

En lo que resta del trabajo, consideraremos el juego Fan Tan (ordenado), que a diferencia del Fan Tan, los jugadores remueven alternadamente cualquier número de cerillos de la primera pila, y sólo toman de la segunda pila hasta que la primera se halla terminado, y así sucesivamente, hasta que el jugador que hace el último movimiento pierde el juego.

La variante en el análisis de este tipo de juegos es que, se presentará una estrategia ganadora sin recurrir a su presentación como suma de juegos.

Rudeanu [14], probó que el problema de determinar los núcleos de una digráfica sin circuilos se reduce a determinarlos en sus subdigráficas obtenidas removiendo todos sus vértices terminales $T = \{ x \in X : \Gamma^+(x) = \varnothing \}$, y sus predecesores $\Gamma^-(T)$.

Precisamente, tenemos:

Proposición 5. Sea $D' = (X', \Gamma'^+)$, una subdigráfica de una digráfica generada por el conjunto $X' = X \setminus (T \cup \Gamma^-(T))$, entonces un subconjunto $N \subset X'$ es núcleo de D', si y sólo si el conjunto $N \cup T$ es núcleo de D.

Aplicando la Proposición 5, tantas veces como sea posible a una digráfica finita, sin circuitos, concluimos:

Corolario. Para cada digrafica $D = (X, \Gamma^+)$, existe una sucesion finita $D_0, D_1, \ldots, D_k$ de subdigráficas de D, tal que:

1) $D_0 = D$.

2) Cada digráfica $D_i = (X_i, \Gamma_i^+)$, es subdigráfica de D_{i-1} generada por el conjunto

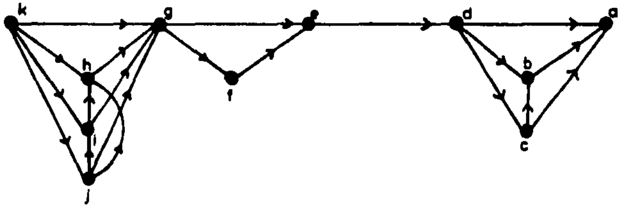
$X_i = X_{i-1} \setminus (T_{i-1} \cup \Gamma_{i-1}^-(T_{i-1}))$ de vértices, los cuales no son terminales ni predecesores de terminales en D_{i-1}; $1 \leq i \leq k$.

3) El conjunto X_k de vértices de D_k es no vacío, y $X_k = T_k \cup \Gamma_k^-(T_k)$.

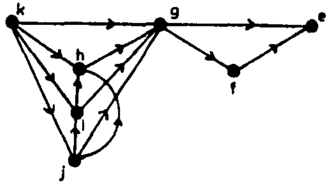
4) La unión $N = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_k$ de todos los conjuntos de vértices terminales de las digráficas $D_0, D_1, \ldots, D_k$ es un único núcleo de la digráfica D.

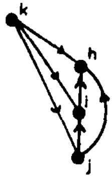
Ejemplo:

Sea D la siguiente digráfica:



Aquí, tenemos la sucesión D_0, D_1, D_2, donde $T_0 = \{ a \}$, $\Gamma_0^-(T_0) = \{ b, c, d \}$, $X_1 = \{ e, f, g, h, i, j, k \}$, $T_1 = \{ e \}$, $\Gamma_1^-(T_1) = \{ f, g \}$, $X_2 = \{ h, i, j, k \}$, $T_2 = \{ h \}$, $\Gamma_2^-(T_2) = \{ i, j, k \}$, entonces el conjunto $N = \{ a, e, h \}$ es núcleo de D.





Ahora, intentaremos investigar algunas clases especiales de digráficas, y caracterizar sus núcleos. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, y sea $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Con la sucesión finita $\alpha = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbb{N}_+^m$, $m \in \mathbb{N}_+$, asociamos la digráfica $D_\alpha = (X_\alpha, \Gamma_\alpha^+)$, en la cual

$X_\alpha = \{ (0,\ldots,0,l_i',l_{i+1},\ldots,l_m) \in \mathbb{N}^m;\ 0 < l_i' \leq l_i,\ i = 1,\ldots,m \cup \{ (0,\ldots,0) \}$ es el conjunto de vértices y Γ_α^+ es una función tal que para $x = (0,\ldots,0,l_i',l_{i+1},\ldots,l_m) \in X_\alpha$, tenemos:

$$\Gamma_\alpha^+(x) = \{(0,\ldots,0,l_i'',l_{i+1},\ldots,l_m) : 0 \leq l_i'' < l_i'\} \quad y \quad \Gamma_\alpha^+(0,\ldots,0) = \emptyset.$$

Análogamente, definimos la digráfica D_α' para

$$\alpha' = (l_1,\ldots,l_m,0,\ldots,0),\ \ \alpha' \in \mathbb{N}_+^m \times \{0\}^k;\ \text{donde } m, k \in \mathbb{N} \text{ y, } m+k > 1.$$

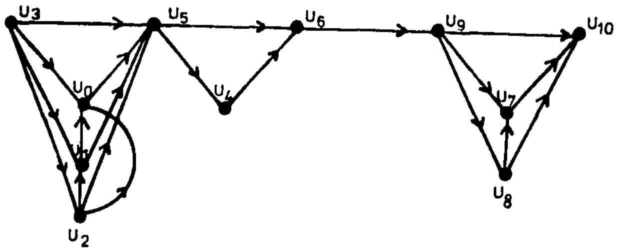
Definición 34. Dos digráficas D_1 y D_2 son isomorfas si existe una función biyectiva $\varphi: X(D_1) \rightarrow X(D_2)$ tal que $u \in \Gamma^+(v) \Leftrightarrow \varphi(u) \in \Gamma^+(\varphi(v))$.

A continuación, se dara un ejemplo de la construcción de las digráficas $D_\alpha = (X_\alpha, \Gamma_\alpha^+)$.

Sea $\alpha = (4,2,1,3)$.

Entonces el conjunto $X_\alpha = \{ u_0 = (1,2,1,3),\ u_1 = (2,2,1,3),\ u_2 = (3,2,1,3),\ u_3 = (4,2,1,3),\ u_4 = (0,1,1,3),\ u_5 = (0,2,1,3),\ u_6 = (0,0,1,3),\ u_7 = (0,0,0,1),\ u_8 = (0,0,0,2),\ u_9 = (0,0,0,3),\ u_{10} = (0,0,0,0) \}$

Mientras que $\Gamma^+(u_0) = \{ u_5 \}$, $\Gamma^+(u_1) = \{ u_0, u_5 \}$, $\Gamma^+(u_2) = \{ u_0, u_1, u_5 \}$, $\Gamma^+(u_3) = \{ u_0, u_1, u_2, u_5 \}$, $\Gamma^+(u_4) = \{ u_6 \}$, $\Gamma^+(u_5) = \{ u_4, u_6 \}$, $\Gamma^+(u_6) = \{ u_9 \}$, $\Gamma^+(u_7) = \{ u_{10} \}$, $\Gamma^+(u_8) = \{ u_7, u_{10} \}$, $\Gamma^+(u_9) = \{ u_7, u_8, u_{10} \}$, $\Gamma^+(u_{10}) = \emptyset$.



La digrafica D_0 del ejemplo del Corolario de la Proposición 5, es isomorfa a la digrafica $D_{(4,2,1,3)}$. A continuación se muestra el isomorfismo.

$\varphi: X(D_{(4,2,1,3)}) \rightarrow X(D_0)$ tal que

$\varphi(u_{10}) = a$, $\varphi(u_7) = b$, $\varphi(u_8) = c$, $\varphi(u_9) = d$, $\varphi(u_6) = e$, $\varphi(u_4) = f$, $\varphi(u_5) = g$, $\varphi(u_0) = h$,

$\varphi(u_1) = i$, $\varphi(u_2) = j$, $\varphi(u_3) = k$.

Así mismo, las digráficas D_1 y D_2 son isomorfas a $D_{(4,2)}$ y a $D_{(3)}$ respectivamente.

Proposición 6. La digráfica $D_{(l_1,\ldots,l_m,0,\ldots,0)}$ es isomorfa a la digráfica $D_{(l_1,\ldots,l_m)}$, y la digráfica $D_{(0,\ldots,0)}$ tiene exactamente un vértice.

Demostración.

Sea $\varphi: X_\alpha \to X_{\alpha'}$ tal que $\varphi(a_1,a_2,\ldots,a_m) = (a_1,\ldots,a_m,0,\ldots,0)$

1) Sean $y, z \in X_\alpha$; $y = (y_1,\ldots,y_m)$, $z = (z_1,\ldots,z_m)$.

Supongamos que $\varphi(y) = \varphi(z)$

$\varphi(y) = (y_1,y_2,\ldots,y_m,0,\ldots,0) = (z_1,\ldots,z_m,0,\ldots,0) = \varphi(z)$

$\Rightarrow y_i = z_i$; $i = 1,\ldots,m$.

$\therefore$ $y = z$.

$\therefore \varphi$ es inyectiva.

2) Sea $z' \in X_{\alpha'}$, $z' = (z_1,\ldots,z_m,0,\ldots,0)$ entonces sea $z = (z_1,\ldots,z_m) \in X_\alpha$, $\ni$

$\varphi(z) = \varphi(z_1,\ldots,z_m) = (z_1,\ldots,z_m,0,\ldots,0) = z'$.

$\therefore$ φ es suprayectiva.

$\therefore$ φ es biyectiva.

Sólo falta demostrar que φ preserva adyacencias.

Sean $x, y \in X_\alpha$, $x = (x_1,\ldots,x_m)$; $y = (y_1,\ldots,y_m)$ tales que

$y \in \Gamma_\alpha^+(x) \Rightarrow 0 \leq y_i < x_i$; con $0 < i < m$.

Ahora, $\varphi(x) = (x_1,x_2,\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots,x_m,0,\ldots,0)$ y,

$\varphi(y) = (y_1,y_2,\ldots,y_i,y_{i+1},\ldots,y_m,0,\ldots,0)$.

Pero, $0 \leq y_i \quad x_i$, luego, $\varphi(y) \in \Gamma_{\alpha'}^+(\varphi(x))$.

$\therefore$ φ es biyectiva y preserva adyacencias.

$\therefore$ D_α es isomorfa a $D_{\alpha'}$.

□

Lo anterior se sigue de la definicion de D_α que tiene una estructura muy simple: es finita, sin circuitos y tiene exactamente un vertice terminal. Propiedades análogas son encontradas en cada subdigrafica conexa de D_α. Entonces, por el Corolario de la Proposición 5., la digrafica D_α tiene un unico nucleo, el cual denotaremos por N_α.

Daremos un algoritmo simple para generar un nucleo N_α de D_α.

Primero tenemos las siguientes observaciones.

Proposición 7. Si $\alpha = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbb{N}_+^m$, y si $(0, \ldots, 0, l_i', l_{i+1}, \ldots, l_m)$, $0 < l_i' \leq l_i$, pertenece al núcleo N_α de D_α, entonces $l_i' = 1$.

Demostracion.

Supongamos que $(0, \ldots, 0, l_i', l_{i+1}, \ldots, l_m) \in N_\alpha$ y que $l_i' \geq 2$,

entonces por ser N_α núcleo, los sucesores $y = (0, \ldots, 0, l_{i+1}, \ldots, l_m)$ y $z = (0, \ldots, 0, 1, l_{i+1}, \ldots, l_m)$ no estan en N_α, luego, $\Gamma_\alpha^+(z) = y$, lo cual es una contradicción, pues $\Gamma_\alpha^+(z) \cap N_\alpha = \emptyset$, pero z tiene que ser absorbido

$\therefore$ $l_i' = 1$.

□

Corolario 7.1. Cada vertice de N_α, nucleo de D_α, tiene a lo mas un sucesor.

Corolario 7.2. Sea x cualquier vertice del conjunto X_α N_α. Entonces el conjunto $\Gamma_\alpha^+(x) \cap N_\alpha$ tiene exactamente un elemento.

Demostración.

Si el vertice $x = (0,\dots,0,l_i',l_{i+1},\dots,l_m)$. $0< l_i' \le l_i$ esta en $X_\alpha \setminus N_\alpha$ entonces $\Gamma_\alpha^+(x) \cap N_\alpha \neq \emptyset$.

Si $l_i' = 1$, entonces, la implicacion es obviamente cierta.

Asumamos que $l_i' > 1$, entonces por la Proposicion 7, a $\Gamma_\alpha^+(x) \cap N_\alpha$ pertenecen a lo más los vertices $z = (0,\dots,0,1,l_{i+1},\dots,l_m)$ y, $y = (0,\dots,0,l_{i+1},\dots,l_m)$, si $l_{i+1} = 1$.

Como $y \in \Gamma_\alpha^+(z)$ si $l_{i+1} = 1$, entonces exactamente uno de los vertices pertenece a $\Gamma_\alpha^+(x) \cap N_\alpha$.

□

Sea $m \in \mathbb{N}_+$, y sea p la función que mapea el conjunto $\bigcup_{i=0}^{m} [\,\mathbb{N}_+^i \times \{0\}^{m-i}\,]$

en si mismo, donde $p\alpha = \alpha$ si $\alpha \in (\,\mathbb{N}_+ \times \{0\}^{m-1}\,) \cup \{0\}^m$, y

$p\alpha = (l_1,\dots,l_{i-2},l_{i-1}-1,0,\dots,0)$, si $\alpha = (l_1,\dots,l_i,0,\dots,0) \in \mathbb{N}_+^i \times \{0\}^{m-i}$, para $2 \le i \le m$.

Ahora, definimos recursivamente las funciones p^l, $l \in \mathbb{N}$, donde

$p^0\alpha = \alpha$ y $p^l\alpha = p(p^{l-1}\alpha)$ para $l \in \mathbb{N}_+$.

De estas definiciones, se sigue que para cada

$\alpha = (l_1,\dots,l_m) \in \bigcup_{i=0}^{m} [\mathbb{N}_+^i \times \{0\}^{m-i}]$, existe el numero k_0,

siendo el entero más pequeño k tal que

$p^k\alpha = p^{k+1}\alpha = (l_1',0,\dots,0)$, donde $0 \le l_1' \le l_1$.

Para la sucesión $\alpha \in \mathbb{N}_+^m$, podemos construir k_0+1 digráficas diferentes D_α, $D_{p\alpha}$, $D_{p^2\alpha},\dots,D_{p^{k_0}\alpha}$, para las cuales tenemos:

Proposición 8. Sea $\alpha \in \mathbb{N}_+^m$, $m \geq 2$, y sea D la digráfica obtenida de la digráfica $D_{p^i\alpha}$ removiendo sus vértices terminales y todos sus predecesores. Entonces D es isomorfa a $D_{p^{i+1}\alpha}$ si y sólo si $0 \leq i \leq k_0$.

Demostración.

$\Rightarrow]$

Supongamos que D es isomorfa a $D_{p^{i+1}\alpha}$, y que $k_0 \leq i$.

Entonces, ya que cualquier α genera una digráfica no vacía y ya que $i \geq k_0$, se tiene que

$p^i\alpha = p^{i+1}\alpha$.

Por lo tanto, $D_{p^i\alpha} = D_{p^{i+1}\alpha} \neq \emptyset$; pero esto contradice el hecho de que D es vacía, pues quitamos los vértices terminales y predecesores, luego, debemos tener que $0 \leq i < k_0$.

$\Leftarrow]$

Sea $\alpha = (l_1,\ldots,l_m) \in \mathbb{N}_+^m$, $m \geq 2$, y sea $0 \leq i \leq k_0$, entonces, existen números k y l_{k+1}', $1 \leq k < m$, $0 < l_{k+1}' \leq l_{k+1}$ tales que $p^i\alpha = (l_1,\ldots,l_k,l_{k+1}',0,\ldots,0)$ $p^{i+1}\alpha = (l_1,\ldots,l_{k-1},l_k-1,0,\ldots,0)$, y la subdigráfica D de $D_{p^i\alpha}$ es generada por el conjunto de vértices :

$$X = \{(0,\ldots,0,l_j',l_{j+1},\ldots,l_k,l_{k+1}',0,\ldots,0) : 1 \leq j \leq k,\ 0 < l_j' \leq l_j\}.$$

La digráfica $D_{p^{i+1}\alpha}$ tiene el conjunto de vértices

$$X_{p^{i+1}\alpha} = \{(0,\ldots,0,l_j',l_{j+1},\ldots,l_{k-1},l_k-1,0,\ldots,0) : 1 \leq j \leq k-1,\ 0 < l_j' \leq l_j\}$$

$$\cup \{(0,\ldots,0,l_k',0,\ldots,0) : 0 \leq l_k' \leq l_k - 1\}.$$

Podemos establecer rápidamente que la funcion

$\varphi : X \rightarrow X_{p^{i+1}\alpha}$, para la cual

$\varphi(0,\ldots,0,l_j,l_{j+1},\ldots,l_k,l_{k+1},0,\ldots,0) = (0,\ldots,0,l_j,l_{j+1},\ldots,l_{k-1},l_k-1,0,\ldots,0)$ es el único isomorfismo entre D y $D_{p^{i+1}\alpha}$.

□

Para cualesquiera m-adas $\alpha = (l_1,\ldots,l_m)$, $\beta = (l_1',\ldots,l_m')$ con entradas reales, denotamos por $\alpha - \beta$ la m-ada $\alpha - \beta = (l_1 - l_1',\ldots,l_m - l_m')$.

El siguiente resultado provee una caracterización del núcleo N_α de D_α.

Teorema 17. Si $\alpha \in \mathbb{N}_+^m$, $m \in \mathbb{N}_+$, entonces, el conjunto $\{ \alpha - p^i\alpha : 0 \le i \le k_0 \}$ es un único nucleo de la digrafica D_α.

Demostracion.

Sean $D_0,\ldots,D_k$ la sucesión de subdigráficas inducidas de D_α que satisfacen las condiciones (1), (2), (3) del Corolario de la Proposición 5.

Entonces por (3) de ese Corolario, tenemos inmediatamente que

$k = k_0$ y $N = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_{k_0}$.

Luego, para demostrar el Teorema, es suficiente mostrar que

$T_i = \{ \alpha - p^i\alpha \}$; $0 \le i \le k_0$.

(Demostracion por induccion sobre i)

Como $x = (0,\ldots,0) \in \mathbb{N}^m$ es el único vertice terminal de $D_0 = D_\alpha$ y $x = \alpha - p^0\alpha$ $\Rightarrow T_0 = \{ \alpha - p^0\alpha \}$.

Ahora, supongamos que $T_i = \{ \alpha - p^i\alpha \}$ para alguna $i < k_0$.

Entonces como en la prueba de la Proposición 8, hay números k y l_{k+1}', $1 \le k < m$, $0 \quad l_{k+1}' \le l_{k+1}$ tales que

$p^i\alpha = (l_1,\ldots,l_k,l_{k+1}',0,\ldots,0)$ y $p^{i+1}\alpha = (l_1,\ldots,l_{k-1}, l_k - 1,0,\ldots,0)$.

$\Rightarrow \alpha - p^i\alpha = (0,\ldots,0,l_{k+1} - l_{k+1}',l_{k+2},\ldots,l_m) \subset T_i \subset N_i$; y por la Proposicion 7.

$l_{k+1} - l_{k+1}' \quad 1$ o $l_{k+1} - l_{k+1}' = 0$ y $l_{k+2} = 1$.

Removiendo de D_i el vertice $\alpha - p^i\alpha$ y sus predecesores (el conjunto de predecesores es $\{ (0,\dots,0,l_{k+1}'',l_{k+2},\dots,l_m) : 1 < l_{k+1}'' \leq l_{k+1} \}$ en el primer caso, y el conjunto $\{ (0,\dots,0,l_{k+1}'',l_{k+2},\dots,l_m) : 1 \leq l_{k+1}'' \leq l_{k+1} \}$ en el segundo caso), tenemos la digráfica D_{i+1} en la cual el vertice $y = (0,\dots,0,1,l_{k+1},\dots,l_m)$ es el único vértice terminal.

Asi, como $y = \alpha - p^{i+1}\alpha$, $\Rightarrow$ $T_{i+1} = \{ \alpha - p^{i+1}\alpha \}$

y esto completa la demostración.

$\square$

Para el conjunto de vértices X_α de D_α, definimos la relación binaria $\leq$ como sigue.

Para elementos $x = (0,\dots,0,l_i',l_{i+1},\dots,l_m)$ y $y = (0,\dots,0,l_j'',l_{j+1},\dots,l_m)$ de X tenemos $y \leq x$ si y solo si

$y = x$ o

$i < j$ o

$i = j$ y $l_i'' < l_i'$.

Escribimos $y < x$ si $y \leq x$ y $y \neq x$. Nótese que si $x \in \Gamma_\alpha^+(y)$, entonces tenemos que $x < y$.

Tenemos entonces la siguiente observación inmediata:

Proposición 9. Sean x, y y z vértices de D. Si las desigualdades $y > z > x$ se dan, y $x \in \Gamma_\alpha^+(y)$, entonces $z \in \Gamma_\alpha^+(y)$.

Es inmediato que $\leq$ es un orden lineal de X_α, y para elementos del conjunto X tenemos las desigualdades: $(0,\dots,0) < \alpha - p^1\alpha < \dots < \alpha - p^{k_0}\alpha \leq \alpha$, luego para cualquier vertice $x \in X_\alpha$ X_α, existe un numero $i_0 \in \mathbb{N}$, siendo la mayor i tal que

$$\alpha - p^i \alpha < y \quad y, \quad i \leq k_0.$$

Del Corolario 7.2, el Teorema 17, y la definicion de i_0 se sigue que:

$\Gamma_\alpha^+(y) \cap N_\alpha = \{ \alpha - p^i \alpha \}$ para alguna $i \leq i_0$.

Luego, por la Proposición 9 $\Gamma_\alpha^+(y) \cap N_\alpha = \{ \alpha - p^{i_0} \alpha \}$

Asi, tenemos:

Teorema 18. Para cada vértice $y \in X_\alpha \setminus N_\alpha$ tenemos que

$\Gamma_\alpha^+(y) \cap N_\alpha = \text{máx} \{ x \in N_\alpha : x < y \}$.

Definición 35. Para juegos en una digráfica $D = (X, \Gamma^+)$, con vértices terminales T, por una Estrategia entenderemos: Una función

$\hat{E} : X \setminus T \to X \ni \hat{E}(x) \in \Gamma^+(x)$, para cada $x \in X \setminus T$.

Si $x \in X$, y si los jugadores A y B adoptan estrategias $\hat{E}_A$ y $\hat{E}_B$ respectivamente, el juego queda completamente determinado, y la sucesión

$(x, \hat{E}_A, \hat{E}_B) : x_0 = x, x_1 = \hat{E}_A(x_0), x_2 = \hat{E}_B(x_1), x_3 = \hat{E}_A(x_2), \ldots$ es una realizacion del juego.

Esta sucesión es finita, y su ultimo elemento es un vertice terminal de D.

Diremos que un vertice $x \in X$ es de triunfo para el jugador P_1 en el juego UJG (UJP) sobre D, si existe una estrategia $\hat{E}_1$, la cual es llamada estrategia ganadora para el vértice x en el juego UJG (UJP) en D, tal que para cada estrategia $\hat{E}_2$ el último elemento de la realización $(X, \hat{E}_1, \hat{E}_2)$ es de la forma

$x_{2k+1} = \hat{E}_1(x_{2k})$, $(x_{2k+2} = \hat{E}_2(x_{2k+1}))$ para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Un vertice $x \in D$ es de fracaso para el jugador P_1 en el juego UJG (UJP) en D si cada vertice de $\Gamma^+(x)$ es de triunfo en el juego UJG (UJP) en D.

Denotemos por $Wx(D)$, $Lx(D)$ al conjunto de todos los vertices de triunfo y de fracaso para el jugador P_1 en el juego UJx en una digrafica D, respectivamente, donde $x = G$ o $x = P$

En otras palabras, el conjunto $Wx(D)$ ($Lx(D)$) consiste de todos los vértices de D tales que moviendose a traves de ellos, el jugador P_1 puede ganar independientemente de los movimientos del oponente (P_1 no puede forzar el triunfo).

Por supuesto, los conjuntos $Wx(D)$, $Lx(D)$ crean una partición del conjunto X.

Las definiciones de $WG(D)$ y $LG(D)$ implican que $x \in WG$ si y sólo si $\Gamma^+(x) \cap LG(D) \neq \varnothing$, mientras que $x \in LG(D)$ si y solo si $\Gamma^+(x) \subset WG(D)$.

Asi, el conjunto $LG(D)$ es el nucleo de D. Este hecho, junto con el Corolario de la Proposicion 5, dan el siguiente resultado.

Proposición 10. Para el juego UJG en una digráfica $D = (X,\Gamma^+)$, tenemos: $WG(D) = X \setminus N$, y $LG(D) = N$, donde N es el unico núcleo de D.

Junto con la Proposición 10, el cálculo del núcleo N para una digráfica D, implica una estrategia ganadora para el jugador A en el juego UJG en D: el jugador A va del vértice actual en $X \setminus N$, a cualquier sucesor en N, y si el vértice seleccionado por A no es terminal, el siguiente jugador B tiene que ir a un sucesor en $X \setminus N$. Como D es finita y sin circuitos, el jugador A juega sobre todos los vertices de $X \setminus N$, después de un número finito de pasos, escoge un vertice terminal y gana.

Si queremos considerar cualquier juego UJP en D, debemos formar una nueva digráfica D^+, obtenida de D anexandole un nuevo vértice t y las flechas que unan cada vértice terminal de D con t.

Ahora, no es dificil ver que los vertices ganadores y perdedores en el juego UJP en D, son ganadores y perdedores respectivamente, en el juego UJG en D^+.

Entonces tenemos una útil Proposicion:

Proposición 11. Para el juego UJP en la digráfica D, y el juego UJG en D^+, tenemos:

$WG(D^+) = WP(D)$ y $LG(D^+) = LP(D) \cup \{ t \}$.

Se sigue de las Proposiciones 10 y 11 que los vértices de triunfo y de fracaso en el juego UJP en una digráfica y las estrategias de triunfo en tal juego pueden ser caracterizadas por el núcleo de la digráfica.

Es evidente que el juego del que se hace mención, con una posición inicial $\alpha = (l_1,\dots,l_m)$ es el juego UJP en D_α, iniciando en el vértice $(l_1,\dots,l_m)$.

Como la digráfica $(D_\alpha)^+$ es isomorfa a la digráfica D_{α^+}, donde $\alpha^+ = (l_1,\dots,l_m,1)$ si $\alpha = (l_1,\dots,l_m)$; entonces, por la Proposición 11, una posición inicial α en un juego Fan Tan (ordenado) es ganadora si y sólo si el vértice α es de triunfo en el juego UJG en D_{α^+}.

Como resultado de esto, de la Proposición 10, y del Teorema 17, se sigue que:

Una posición inicial α es de triunfo en un juego como el descrito si y sólo si

$\alpha^+ \notin LG(D_{\alpha^+}) = \{ \alpha^+ - p^i \alpha^+ : 0 \leq i \leq k_0 \}$, donde k_0 es el menor entero k para el cual

$p^k \alpha^+ = p^{k+1} \alpha^+$, esto es si y sólo si $p^{k_0} \alpha^+ \neq (0,\dots,0)$.

Así tenemos:

Teorema 19. Una posicion inicial $\alpha \in \mathbb{N}^m$ en el juego Fan Tan (ordenado) es de triunfo si y sólo si $p^{k_0} \alpha^+ \neq (0,\dots,0) \in \mathbb{N}^{m+1}$.

Por los Corolarios 7.1 y 7.2, existe exactamente una funcion $\hat{E}$ que mapea el conjunto de vértices no terminales de D_{α^+} sobre el conjunto de todos los vértices, y para el cual,

$\{ \hat{E}(x) \} = \Gamma^+_{\alpha^+}(x)$ si $x \in \mathbb{N}_{\alpha^+} = LG(D_{\alpha^+})$, $x \neq (0,\dots,0)$ y,

$\hat{E}(x) = \max \{ y \in N_{\alpha^+} : y < x \}$ si $x \in X_{\alpha^+} \setminus N_{\alpha^+} = WG(D_{\alpha^+})$.

Por el Teorema 18, la función $\hat{E}$ es una estrategia, y entonces tenemos:

Teorema 20. Sea $\alpha \in \mathbb{N}-^{m}$, y sea $\hat{E} : X_{\alpha^+} \setminus \{(0,\ldots,0)\} \to X_{\alpha^+}$ una función para la cual $\hat{E}(x) = \max \{ y \in N_{\alpha^+} : y < x \}$, para cada $x \in X_{\alpha^+} \setminus N_{\alpha^+}$. Entonces, $\hat{E}$ es la única estrategia (para cada vértice de triunfo) en el juego UJG en D_{α^+}.

Del Teorema 20 y la Proposición 11, se sigue:

Corolario 20.1. En el juego Fan Tan (ordenado), comenzando con una posición de triunfo, existe una única estrategia ganadora.

En la realizacion práctica del juego Fan Tan (ordenado), asociamos la sucesión $\alpha^+ = (l_1,\ldots,l_m,1)$ con la sucesión $\alpha = (l_1,\ldots,l_m)$.

En seguida, creamos la sucesión $p^0\alpha^+, p^1\alpha^+,\ldots,p^{k_0}\alpha^+$, donde el conjunto

$\{ \alpha^+ - p^i\alpha^+ : 0 \leq i \leq k_0 \}$, es el unico nucleo N_{α^+} de D_{α^+}, y una estrategia $\hat{E}$ tal que

$\hat{E}(x) = \max \{ y \in N_{\alpha^+} : y < x \}$, para $x \in X_{\alpha^+} \setminus N_{\alpha^+}$, donde $\hat{E}$ es la única estrategia ganadora para cada vértice de triunfo en el juego UJG en D_{α^+}, y entonces su restricción al conjunto $X_{\alpha^+} \setminus \{(0,\ldots,0), (0,\ldots,0,1)\}$ es la única estrategia ganadora en el juego UJP en la subdigráfica D de D_{α^+}, la cual es isomorfa a la digráfica D_α.

Obviamente, si α es una posicion de triunfo en un juego Fan Tan (ordenado), y si el jugador A adopta la estrategia anterior $\hat{E}$ al juego UJG en D_{α^+}, iniciando en el vértice α^+, entonces el debe ganar el juego.

Ejemplo.

Considérese el juego Fan Tan (ordenado), comenzando en la posición α = (4,2,1,3).

Entonces, α^+ = (4,2,1,3,1); tenemos entonces que

N_{α^+} = { (0,0,0,0,0), (0,0,0,1,1), (0,0,1,3,1), (1,2,1,3,1) }.

Así, el jugador A mueve de α^+ a (1,2,1,3,1) y, B se mueve a (0,2,1,3,1). Ahora, A se mueve a (0,0,1,3,1) y B se debe mover a (0,0,0,3,1). Entonces, A se mueve al (0,0,0,1,1) y B se debe mover al (0,0,0,0,1) y él perderá el juego.

VII. ANEXO

A continuacion se presentará el codigo de un programa para obtener un núcleo de una digráfica sin circuitos de longitud impar.

El algoritmo se basa en identificar los vértices terminales y meterlos al núcleo, eliminarlos junto con sus vértices predecesores, y repetir la búsqueda de vértices terminales sobre la digráfica inducida por los vértices restantes. En caso de que no existan vértices terminales, se obtiene un vértice de alguna componente fuertemente conexa terminal, incluyéndolo en el núcleo y se procede a quitarlo junto con sus vértices predecesores de la digráfica. Este proceso se repite hasta que la digráfica resultante sea vacia.

```
Program Nucleo;
USES Crt;
Const
   NumMaxNodos = 100;
Type
   TipoNodo = Integer;
   Apunta  = ^Nodo;
   Nodo    = Record
               Nombre  : TipoNodo;
               Suc     : Apunta
            End;
   Lista   = Array[1..NumMaxNodos] of
            Record
               Nombre  : TipoNodo;
               Visitado : Boolean;
```

```
        Suc     : Apunta
      End;

   Digrafica = ^Lista;
Var
  NumNodos,NumFlechas : Integer;
  Juego : Digrafica;
  Arch : Text;
  Alcance : Array[1..NumMaxNodos] of Integer;


Function DigraficaVacia : Digrafica;
Var
  D : Digrafica;
  i : Integer;
Begin
   New(D);
   For i := 1 to NumMaxNodos do
   Begin
      D^[i].Nombre := 0;
      D^[i].Visitado := False;
      D^[i].Suc := Nil
   End;
   DigraficaVacia := D
End;


Function AgregaNodo(u : TipoNodo; D : Digrafica) : Digrafica;
Begin
   D^[u].Nombre := u;
   D^[u].Suc := Nil;
   AgregaNodo := D
End;
```

```
{ AgregaNodo presupone que no existe el nodo u }


Function AgregaFlecha(u,v : TipoNodo; D : Digrafica) : Digrafica;
Var
  Aux : Apunta;
Begin
   New(Aux);
   Aux^.Nombre := v;
   Aux^.Suc := D^[u].Suc;
   D^[u].Suc := Aux;
   AgregaFlecha := D
End;

{ AgregaFlecha presupone que existen u y v y que no existe la flecha (u,v) }

Function EsVacia(D : Digrafica) : Boolean;
Var
  Aux : Boolean;
  i : Integer;
Begin
   Aux := True;
   i := 1;
   Repeat
      If D^[i].Nombre <> 0 then
        Aux := False;
      i := i + 1
   Until (i > NumMaxNodos) Or (Not(Aux));
   EsVacia := Aux
End;


Function ExisteNodo(u : TipoNodo; D : Digrafica) : Boolean;
Begin
```

```
  ExisteNodo := (D^[u].Nombre = u)
End;

Function EsTerminal(v : TipoNodo; D : Digrafica) : Boolean;
Begin
  If D^[v].Suc = Nil then
    EsTerminal := True
  Else
    EsTerminal := False
End;

Function ExGrado(u : TipoNodo; D : Digrafica) : Integer;
Var
  Cont : Integer;
  Aux : Apunta;
Begin
  Cont := 0;
  If Not(EsTerminal(u,D)) then
  Begin
    Aux := D^[u].Suc;
    Repeat
      Inc(Cont);
      Aux := Aux^.Suc
    Until Aux = Nil
  End;
  ExGrado := Cont
End;

Function ExisteFlecha(u,v : TipoNodo; D : Digrafica) : Boolean;
Var
  Aux : Apunta;
  t,Cont : TipoNodo;
Begin
```

```
  ExisteFlecha := False;
  If Not(EsTerminal(u,D)) then
  Begin
    New(Aux);
    Aux := D^[u].Suc;
    t := ExGrado(u,D);
    For Cont := 1 to t do
      If Aux^.Nombre = v then
        ExisteFlecha := True
      Else
        Aux := Aux^.Suc
  End
End;

Function BorraFlecha(u,v : TipoNodo; D : Digrafica) : Digrafica;
Var
  Aux1,Aux2 : Apunta;
  Borrado : Boolean;
Begin
  New(Aux1);
  New(Aux2);
  Borrado := False;
  Aux1 := D^[u].Suc;
  Aux2 := Aux1^.Suc;
  If Aux1^.Nombre = v Then
    D^[u].Suc := Aux2
  Else
    Repeat
      If Aux2^.Nombre = v Then
      Begin
        Aux1^.Suc := Aux2^.Suc;
        Borrado := True
      End;
      Aux1 := Aux2;
```

```
        Aux2 := Aux1^.Suc
      Until (Aux2 = Nil) Or (Borrado);
    BorraFlecha := D;
  End;

      { BorraFlecha presupone que existe la flecha (u,v) }


Function BorraNodo(u : TipoNodo; D : Digrafica) : Digrafica;
Var
  i : Integer;
Begin
    For i := 1 to NumMaxNodos do
      If ExisteFlecha(i,u,D) then
        D := BorraFlecha(i,u,D);
    D^[u].Nombre := 0;
    D^[u].Visitado := False;
    D^[u].Suc := Nil;
    BorraNodo := D
End;
        { BorraNodo presupone que existe el nodo u }

Procedure Inicializa(Var D : Digrafica);
Var
  i,Origen,Destino : Integer;

Begin
   D := DigraficaVacia;
   Assign(Arch,'Flechas.txt');
   Reset(Arch);
   ReadLn(Arch,NumNodos);
   For i := 1 to NumNodos do
   Begin
      D := AgregaNodo(i,D);
```

```
      Alcance[i] := 0
    End;
    ReadLn(Arch,NumFlechas);
    For i := 1 to NumFlechas do
    Begin
       ReadLn(Arch,Origen,Destino);
       If (Not(ExisteFlecha(Origen,Destino,D))) And
                              (Origen <> Destino) then
         D := AgregaFlecha(Origen,Destino,D)
    End;
    ClrScr;
    Close(Arch)
End;

Procedure CuantosAlcanzan(D : Digrafica);
Var
  i,j : TipoNodo;
  Cont : Integer;

Procedure BuscaEnProfundidad(u : TipoNodo; Var D : Digrafica);
Var
  p : Apunta;
  v : TipoNodo;
Begin
   New(p);
   D^[u].Visitado := True;
   p := D^[u].Suc;
   While p <> NIL  do
   Begin
      v := p^.Nombre;
      If D^[v].Visitado = False then
        BuscaEnProfundidad(v,D);
      p := p^.Suc
   End
```

```
End;

Begin
   For i := 1 to NumNodos do
   Begin
      Cont := 0;
      BuscaEnProfundidad(i,D);
      For j := 1 to NumNodos do
        If D^[j].Visitado = True then
        Begin
           Inc(Cont);
           D^[j].Visitado := False
        End;
      Alcance[i] := Cont
   End
End;

Procedure ObtenNucleo(D : Digrafica);
Var
  NucleoD : Set Of 1..NumMaxNodos;
  u : TipoNodo;
  i,j : Integer;
  HuboTerminal : Boolean;

Function NodoEnComponenteT : TipoNodo;
Var
  Minimo,Aux,i : Integer;

Begin
   Minimo := NumNodos;
   For i := 1 to NumNodos do
   Begin
     If ExisteNodo(i,D) then
       Begin
```

```
            Aux := Alcance[i];
            If Aux <= Minimo then
            Begin
               Minimo := Aux;
               NodoEnComponenteT := i
            End
         End
      End
   End;


   Begin
      NucleoD := [];
      Repeat
         Repeat
            HuboTerminal := False;
            For i := 1 to NumNodos do
              If ExisteNodo(i,D) then
               If EsTerminal(i,D) then
               Begin
                  HuboTerminal := True;
                  NucleoD := NucleoD + [i];
                  For j := 1 to NumNodos do
                    If ExisteNodo(j,D) then
                     If ExisteFlecha(j,i,D) then
                       D := BorraNodo(j,D);
                  D := BorraNodo(i,D)
               End
         Until (EsVacia(D)) Or (Not(HuboTerminal));
         If Not(EsVacia(D)) then
         Begin
            CuantosAlcanzan(D);
            u := NodoEnComponenteT;
            NucleoD := NucleoD + [u];
```

```
        For i := 1 to NumNodos do
          If ExisteNodo(i,D) then
            If ExisteFlecha(i,u,D) then
              D := BorraNodo(i,D);
        D := BorraNodo(u,D);
      End
    Until EsVacia(D);
    ClrScr;
    GotoXY(5,5);
    Write('Nucleo : { ');
    For i := 1 to NumNodos do
      If i in NucleoD then
        Write(i,' ');
    Write('}');
    Repeat
    Until KeyPressed
End;


Begin
    Inicializa(Juego);
    ObtenNucleo(Juego)
End.
```

BIBLIOGRAFIA

[1] Berge, C.
GRAPHS.
North Holland. Mathematical Library.

[2] Jerzy Topp.
GRUNDY FUNCTIONS AND GAMES IN DIGRAPHS.
ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ, Matematyka XII.
1982.

[3] Romanowicz, Z. , Wozniak K.
GAMES ON A GRAPH .
Proc. Symp on Combinatorial Analysis, Zielona Góra 1976. Wsi Zielona Góra 1976,
231 - 237.

[4] Berge, C.
LA FUNCTION DE GRUNDY D' UN GRAPHE INFINI.
C. R. Acad. Sciences, Paris. 242 (1956), 1404-1405.

[5] Berge. C.
THEORIE DES GRAPHES ET SES APPLICATIONS.
Dunod. Paris. 1958.

[6] Berge, C. , Schützenberger M. P.
Jeux de Nim et Solutions.
C. R. Acad. Sciences. Paris, 242 (1956), 1672-1674.

[7] Bucan G. P. , Varvak L. P.
K VOPROSU OB IGRACH NA GRAFE.
ALGEBRA I Matematiceskaja Logika. Kiev. 1966, 122-138.

[8] Grundy, P. M
MATHEMATICS AND GAMES.
Eureka. 2 (1939), 6-8

[9] Kummer, B
SPIELE AUF GRAPHEN

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
[10] Smith, C. A. B.
GRAPHS AND COMPOSITE GAMES.
J. Comb. Theory, 1 (1966), 51-81.
[11] Topp J.
ASYMMETRIC GAMES ON DIGRAPHS (en preparación).
[12] Berge, C.
GRAPHS AND HYPERGRAPHS.
North Holland, Amsterdam 1973.
[13] Roth A.
TWO-PERSON GAMES ON GRAPHS
J. Comb. Theory, 24 (1978), 238-241.
[14] Rudeanu, S.
NOTES SUR L' EXISTENCE ET L' UNICITE DU NOYAU D' UN GRAPHE
Revue Française Rech. Operat. , 33 (1964), 20-26.
[15] Tan, K. T.
AN EASY NIM TYPE GAME.
Menemui Mat. 1 (1979), 30-34.
[16] Topp, J.
GAMES ON A GRAPH.
Ph. D. Dissertation, Nicholas Copernicus University, Torun (1978).
[17] H. Milewczyk; J. Topp
ON TAN'S GAMES AND THEIR GRAPHS.
INSTITUTE OF MATHEMATICS, GDAŃSK TECHNICAL UNIVERSITY,
80-952 GDAŃSK, POLAND.
[18] Elwyn R. Berlekamp; John H. Conway; Richard R. Guy.
WINNING WAYS.
Vols. 1 y 2 Academic Press, 1982.
[19] Martin Gardner
NIM Y PODAARBUSTOS
[20] E. S. Venttsel
INTRODUCCION A LA TEORIA DE JUEGOS.
Ed. Limusa, Mexico 9-12