



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

31  
ZEFJ

FACULTAD DE CIENCIAS

PERDIDAS DE PRESION DEBIDAS A  
FRICCION EN DUCTOS CON FLUJOS  
OSCILANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

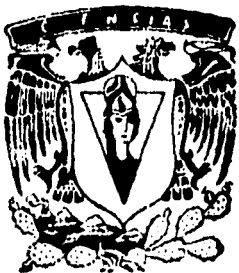
F I S I C O

P R E S E N T A

PAULA PEREZ BRUNIUS



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR  
1995



FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVANZANDO DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "PERDIDAS DE PRESION DEBIDAS A FRICCION EN DUCTOS CON FLUJOS OSCILANTES"

realizado por PAULA PEREZ BRUNIUS

con número de cuenta 8721192-2 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. STEVEN PETER REED CZITROM BAUS

Propietario DR. RAMON PERALTA-FABI

Propietario DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN

Suplente DR. CESAR TREVIÑO TREVIÑO

Suplente DR. ARTEMIO GALLEGOS GARCIA

*Steven Citrom*

*Ramon Peralta Fabi*

*Victor Manuel Romero Rochin*

*Cesar Treviño Treviño*

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA  
Coordinador de Licenciatura

*Roberto Alejandro Ruelas Mayorga*  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FISICA

Till morfar Teddy, för att det var han som först visade mej den akademiska världen och satte i mej dillen för att fortsätta på denna väg, för att han alltid har varit ett exempel att följa.

A mis padres, por la confianza que depositaron en mí en todos estos años escolares; gracias por mostrarme toda esa gama de posibilidades y abrirme tantas puertas y, sobretodo, por dejarme tomar mis propias decisiones, contando siempre con su apoyo.

En los cinco años en la facultad quiero agradecer a: Gil y Alejandro, por ayudarme a superar el primer susto y a Luis y Julieta, porque con ellos empecé a agarrarle el gusto a este negocio. A los de FAM por hacerme sentir en casa y por su apoyo y ayuda en todos esos menesteres que acompañan a la vida escolar... especialmente a Raúl por haber sido como un tutor a lo largo de la carrera. A Eugenio Ley Koo por sus clases.

A Steven, porque con él encontré justo el enfoque que estaba buscando, por contagiarme de su entusiasmo, ayudarme a abrirme camino en el área de la oceanografía, enseñarme a ensuciarme las manos y mostrarme de lo que realmente se trata la ciencia experimental. Por encontrar en él a un gran amigo con quien pasé ratos muy agradables, y por lo mucho que me ref!. A los de (este lado) del Lab. de Oceanografía Física, por lo grato que fue trabajar con ellos y por su paciencia en esas semanas de martillazos, caladora, taladro, solventes y pegamentos... especialmente a Esteban, Ranulfo y Ramiro por su ayuda en la construcción del dispositivo experimental.

A mi tío Tito por prestarme su taller y herramientas y a mi tía Fina por lo rico que comí en esos días...

A los del Lab. de Fluidos por sus valiosas sugerencias. Muy especialmente a Ramón, por sus clases, por las oportunidades que me brindó, por las pláticas que tanto ayudaron a ordenar las ideas en una cabeza revuelta y por lo importante que fue su apoyo para el desarrollo de este trabajo.

A todos los compañeros con los que compartí la carrera, en los que encontré a muy buenos amigos que hicieron que estos años fueran realmente maravillosos. Muy especialmente a Sandra por darle el contrapeso al escepticismo inherente a la ciencia y a *la banda* (¿cómo no!) por lo mucho que me divertí y porque, a fin de cuentas, fue con ellos con quienes más aprendí...

*"In the beginning, the Universe was created.  
This has made a lot of people very angry and  
been widely regarded as a bad move..."*

*"There is a theory that states that if ever  
anyone discovers exactly what the Universe  
is for and why it is here, it will instantly  
disappear and be replaced by something  
even more bizarre and inexplicable.*

*There is another theory which states that this  
has already happened."*

Douglas Adams: The Hitchhiker's Guide to  
the Galaxy.

## INDICE

|  |    |
|--|----|
| Resumen.....   | 1  |
| Introducción.....  | 2  |
| Capítulo 1.- Conceptos básicos.....  | 4  |
| 1. Mecánica de Fluidos.....  | 4  |
| 1.1. Ecuaciones que gobiernan al movimiento de un fluido.....                    | 4  |
| 1.1.1. Leyes de conservación.....  | 5  |
| 1.1.2. Ecuaciones constitutivas.....   | 8  |
| 1.1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes.....  | 9  |
| 1.2. Líneas de corriente.....  | 10 |
| 1.3. Número de Reynolds.....   | 10 |
| 1.4. Ecuación de Bernoulli.....  | 11 |
| 2. Hidráulica.....   | 12 |
| 2.1. Fricción en tuberías con flujos unidireccionales.....                       | 12 |
| 2.2. Pérdida de carga ( $h_f$ ).....   | 12 |
| 2.3. Pérdidas de carga por fricción en tuberías con flujos unidireccionales..... | 13 |
| 2.3.1. Diagrama de Stanton.....  | 14 |
| 2.4. Pérdidas de presión.....  | 15 |
| 2.5. Teorema $\pi$ de Buckingham (análisis dimensional).....                     | 15 |
| Capítulo 2.- Flujo laminar oscilante dentro de un cilindro horizontal.....       | 16 |
| 1. Velocidad.....  | 16 |
| 2. Comportamiento asintótico.....  | 19 |
| 3. Esfuerzo de corte.....  | 20 |
| 4. Comportamiento del flujo para distintos números de Reynolds.....              | 21 |
| 5. Velocidad promedio.....   | 25 |
| 6. Pérdida de presión por fricción.....  | 26 |
| 7. Energía disipada.....   | 26 |
| 8. Pérdida de presión en función de la velocidad promedio.....                   | 28 |
| Capítulo 3.- Parte experimental.....   | 31 |
| 1. Planteamiento.....  | 31 |
| 2. Análisis dimensional.....   | 31 |
| 3. Diseño experimental.....  | 33 |
| 4. Construcción.....   | 36 |
| 4.1. Primeros dispositivos.....  | 36 |
| 4.1.1. Tubos de acrílico.....  | 36 |
| 4.1.2. Tubo de manguera.....   | 40 |
| 4.2. Dispositivo final.....  | 41 |

|  |    |
|--|----|
| 5. Realización de los experimentos y análisis de los resultados..... | 43 |
| Conclusiones.....  | 45 |
| Apéndice .....   | 47 |
| Bibliografía.....  | 48 |

## RESUMEN

### PERDIDAS DE PRESION DEBIDAS A FRICCION EN DUCTOS CON FLUJOS OSCILANTES

Se estudia la disipación de energía debida a fricción en flujos oscilantes dentro de ductos. Se resuelve la ecuación de movimiento para un flujo laminar oscilante dentro de un cilindro recto y se discute el comportamiento del flujo. Se encuentra la disipación de energía y la pérdida de presión por fricción para ese caso. Ambas son funciones de un número de Reynolds modificado ( $R_m = \omega a^2 / \nu$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación,  $a$  es el radio del cilindro y  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido). También se obtiene una relación algebraica entre la pérdida de presión y la velocidad promedio del flujo, que en general da una relación distinta al resultado para flujos laminares unidireccionales.

Se proponen experimentos con tubos en U, en los que una columna de fluido se pone en movimiento oscilante por medio de la gravedad y compresión de aire. Se encuentran los parámetros que juegan un papel importante en el fenómeno y se obtiene la ecuación que modela al movimiento de la columna de fluido. Se construye el dispositivo experimental y se discute cómo se realizarán los experimentos y cómo se analizarán los datos en trabajos futuros.



## INTRODUCCION

En los últimos años, la importancia de encontrar y aprovechar fuentes de energía alternativas ha ido en aumento, tanto por la necesidad de buscar otros recursos distintos a los hidrocarburos, (recursos que ahora se saben finitos y muy contaminantes), como para encontrar una manera de producir energía a bajo costo, lo cual sería de gran beneficio para un país como México.

En este siglo se han desarrollado varias técnicas para aprovechar la energía del oleaje marino, principalmente para producir electricidad. En países como Inglaterra y Noruega, por ejemplo, se han construido varias hidroeléctricas cuyo motor son precisamente las olas del mar. Hay otras maneras de aprovechar este tipo de energía. Un grupo de investigadores mexicanos [13, 14] están desarrollando un sistema de bombeo por resonancia que utiliza al oleaje marino para bombear agua de mar a lagunas costeras, ya sea para limpiarlas de los contaminantes que se han ido acumulando debido a un tiempo de residencia muy largo del agua dentro de éstas, y/o para introducir agua de mar rica en oxígeno, nutrientes e inclusive larvas en lagunas cuyas barras han permanecido cerradas a falta de mayor transporte litoral o por la disminución en la descarga de ríos. Esto último puede servir para restaurar en estos sistemas los criaderos biológicos, principal fuente de ingresos de las comunidades que viven alrededor de la laguna, y resulta ser una alternativa de muy bajo costo comparada con las soluciones comúnmente usadas, como lo es el dragado de barras [13].

En la mayoría de los sistemas que utilizan la energía de oleaje para producir otros tipos de energía o para realizar un trabajo mecánico específico, como es el caso de los sistemas mencionados en el párrafo anterior, se encuentran flujos oscilantes dentro de ductos. En el diseño de dichos sistemas es de gran importancia el tener un modelo preciso para el flujo promedio. La manera como se acostumbra modelar a estos flujos es utilizando la ecuación de Bernoulli (que supone un fluido ideal, no viscoso) y simulando los efectos viscosos con un término adicional que se puede escribir como una pérdida de presión por fricción, el cual sólo depende de la velocidad promedio y de las características geométricas del flujo. Para obtener la forma de dicha dependencia, suele ser necesario recurrir a la experimentación. En el caso de flujos unidireccionales dentro de ductos, las pérdidas de presión han sido muy estudiadas y la relación entre éstas y los distintos parámetros característicos del flujo se conoce bastante bien, y se encuentra en cualquier libro de hidráulica. Para el caso en el que el flujo es oscilante, comúnmente se utiliza un modelo que depende del cuadrado de la velocidad promedio, con una constante de proporcionalidad (conocida como factor de fricción) cuyo valor se ha dado sólo para algunos casos, por lo que resulta común el tener que ajustar dicho valor al caso que se esté analizando. Esto último es lo que motivó el estudio de esta tesis, con el objetivo de investigar la dependencia del término de fricción con las características físicas y geométricas del flujo oscilante, y así buscar un resultado más general que evite el tener que recurrir a la experimentación cada vez que se desee encontrar la pérdida de presión asociada a un caso dado.

Esta investigación tiene una componente teórica y otra experimental. En el capítulo dos se estudia un caso simplificado de manera teórica y en el capítulo tres se proponen

experimentos con tubos en U y se describe el desarrollo y construcción del dispositivo experimental que se usará en el futuro para obtener resultados para un caso real.

## Capítulo 1

### CONCEPTOS BASICOS

Es importante decir que en este capítulo se introducen sólo los conceptos de la mecánica de fluidos y de la hidráulica que son necesarios para desarrollar el trabajo expuesto en esta tesis; se hace un recuento de las herramientas utilizadas en los capítulos siguientes.

#### 1. Mecánica de Fluidos

Un fluido es un material que fluye. Un material fluye cuando, al aplicársele una fuerza, éste se deforma sin límite (esto depende del tiempo de observación, pues un vidrio es un fluido si consideramos tiempos de observación de muchísimos años, pero si reducimos el tiempo de observación a un día, el vidrio se comporta como un sólido). Esto es, un fluido tiene la característica de que, al verse sometido a una fuerza de corte, se produce un movimiento relativo entre sus capas, el cual continua hasta que se deja de aplicar la fuerza, sin importar la resistencia que el fluido ofrezca a dicho movimiento. Así también se tiene que no existe movimiento relativo entre capas de fluido en ausencia de fuerzas de corte.

Los fluidos pueden clasificarse a *grosso modo* en líquidos y gases. Los líquidos son fluidos tales que al confinarse cierta cantidad en un recipiente, su forma geométrica corresponde al recipiente que lo contiene. En líquidos muy espesos (como la brea) esta característica no es evidente, dado que la resistencia que ofrecen al movimiento relativo entre sus partículas es grande, pero si se espera el tiempo necesario, es posible observarla. Una cantidad de líquido tiene un volumen definido que sólo varía con la temperatura y/o la presión, y si dicho volumen es menor al del recipiente que lo contiene, el líquido sólo ocupa parte de él. Un gas, por el contrario, al verse confinado en un recipiente, se expandirá hasta ocupar todo el volumen de éste. Otra característica de los gases es que, en general, son más fáciles de comprimir que los líquidos. Es decir, cualquier movimiento del fluido que involucre variaciones apreciables en la presión implicará cambios en el volumen por unidad de masa mayores para un gas que para un líquido [2].

Para estudiar el comportamiento de los fluidos de una manera cuantitativa, se recurre a la hipótesis del continuo, en la que se trata al fluido como una distribución continua de materia, sin tomar en cuenta el comportamiento de las moléculas individuales que lo componen. Esta manera de tratar a los fluidos funciona bien siempre y cuando el camino libre medio de las moléculas sea muy pequeño comparado con la escala física más pequeña del flujo bajo estudio (el diámetro del cilindro alrededor del cual escurre el fluido, por ejemplo) [3]. En vez de moléculas, se habla de *elementos* o *partículas de fluido*, que son pequeñas cantidades de masa de fluido tales que contengan una cantidad suficiente de moléculas como para que se pueda desprestigiar el efecto individual de ellas, y que las características promedio de dicho conjunto determinen a las características macroscópicas de todo el fluido.

#### 1.1. Ecuaciones que gobiernan al movimiento de un fluido

Para deducir a las ecuaciones que describen al comportamiento de un fluido, se supone que en cada punto se tiene un valor único para la velocidad ( $\vec{u}$ ), presión ( $p$ ),

densidad ( $\rho$ ) y demás variables de campo (hipótesis del continuo), y que éstas varían continuamente con el tiempo y la posición. Pidiendo que la materia obedezca a las leyes de conservación de masa, momento y energía, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales que involucran a las variables de campo, de manera que al resolverlas se obtenga el valor de éstas para cada instante en cada punto del fluido.

Es necesario escoger un sistema o marco de referencia en el cual formular las leyes de conservación. El sistema euleriano es en el cual se suelen resolver la mayoría de los problemas. En él, las variables independientes son las coordenadas espaciales ( $x, y, z$ ) y el tiempo  $t$ , y las ecuaciones se deducen a partir de estudiar lo que ocurre en un *volumen de control* (pequeño volumen en el cual caben muchas moléculas) fijo en el espacio, de manera que, para instantes fijos de tiempo  $t$ , tenemos dentro del volumen a diferentes partículas de fluido de las que se encontraban un instante antes. Es decir, nos fijamos en un punto y observamos el comportamiento del fluido con el tiempo. El otro sistema de referencia es el lagrangiano, el cual se fija en una sola partícula de fluido y sigue su evolución en el tiempo. Aquí las variables independientes son el tiempo inicial y la posición de la partícula en ese instante ( $x_0, y_0, z_0, t_0$ ), pues la posición de la partícula para cualquier tiempo posterior se calcula a partir de las componentes de la velocidad; este sistema nos permite introducir directamente a las leyes de la física [3].

La relación entre las derivadas lagrangianas (o materiales) y las eulerianas es la siguiente:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\alpha, \quad (1.1)$$

*lagrangiana*      *eulerianas*

con  $\alpha$  una variable de campo [3].

El teorema del transporte de Reynolds nos sirve para transformar la derivada material de una integral de volumen en una integral de las derivadas eulerianas. Lo que nos dice es que, si estamos viendo como cambia la propiedad  $\alpha$  del fluido en un volumen de control  $V$ , la evolución temporal de  $\alpha$  queda determinada por [3]:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \int_V \left[ \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) \right] dV. \quad (1.2)$$

### 1.1.1. Leyes de conservación

**Conservación de la Masa.** Si nos fijamos en la evolución de una masa de fluido cuyo volumen  $V$  elegimos arbitrariamente, veremos que su tamaño y forma cambiarán con el tiempo mientras que su masa permanecerá constante. Esto se expresa como:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 = \int_V \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV;$$

y como vale para todo volumen entonces

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.3)$$

a esta ecuación se le conoce como *ecuación de continuidad*.

Cuando las variaciones de la densidad del fluido pueden ignorarse, se dice que el fluido es *incompresible*, esto es, al seguir la evolución de una masa de fluido, no sólo su masa permanece constante, sino también su volumen. En este caso la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \rho &= 0 \text{ (coordenadas lagrangianas),} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ (coordenadas eulerianas).} \end{aligned} \quad (1.3b)$$

Hay fluidos incompresibles en los cuales la densidad no es constante en todos lados. Un ejemplo son los fluidos estratificados, en los que las partículas de fluido se mueven en superficies en donde la densidad es constante, pero el valor de la densidad para cada superficie no es el mismo. Así pues, aunque  $\frac{D}{Dt} \rho = 0$ ,  $\nabla \rho \neq 0$ .

Estrictamente, sólo se puede hablar de *flujos* incompresibles, dado que un mismo fluido puede comportarse de manera incompresible bajo ciertas condiciones y compresible bajo otras. Para ver cuando se puede usar la suposición de incompresibilidad en un flujo dado, se utiliza un parámetro adimensional, llamado número de Mach ( $M=v/c$ , donde  $v$  es una velocidad característica del flujo y  $c$  es la velocidad del sonido en el fluido). Este parámetro se obtiene al desarrollar en serie de Taylor a la densidad en función de la presión (a temperatura constante), alrededor del estado de equilibrio ( $\rho_0, p_0$ ):

$$\rho = \rho_0 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 (p - p_0) + \dots$$

donde  $\rho_0$  y  $p_0$  son la densidad y presión del fluido en equilibrio.

Como  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 = c^2$  [12] entonces:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + M^2 p' + \dots, \text{ donde } p' = \frac{p - p_0}{\rho_0 v^2} \quad (1.3c)$$

Si en la ecuación de continuidad se adimensionaliza a la densidad con  $\rho_0$ , a la presión la escribimos en términos de  $p'$ , a los tiempos, longitudes y velocidades los adimensionalizamos con una longitud  $l$  característica del flujo y con la velocidad  $v$ , y utilizamos la ecuación (1.3c) a primer orden, entonces la ecuación resultante es:

$$\nabla \cdot \vec{u}' + M^2 \left\{ \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla' \cdot (p' \vec{u}') \right\} = 0, \quad (1.3d)$$

en donde se observa que sólo si  $M$  es pequeño se puede hacer la aproximación de incompresibilidad (el apóstrofe indica que las cantidades son adimensionales).

**Conservación del momento lineal.** Resulta de aplicar la segunda ley de Newton al volumen de fluido que nos interesa estudiar. Las fuerzas que actúan sobre una masa de fluido se clasifican en fuerzas volumétricas o másicas (como la gravitacional o la electromagnética) y fuerzas superficiales (como las fuerzas de presión y las fuerzas viscosas). Las fuerzas volumétricas dependen básicamente de la masa en cuestión y son fuerzas externas; las

representaremos como fuerzas por unidad de volumen. Las fuerzas de superficie se deben a lo que el resto del fluido ejerce sobre un volumen dado de éste, son de corto alcance y se representan como fuerzas por unidad de área, es decir, esfuerzos. Las componentes de dichos esfuerzos pueden representarse como componentes de un tensor de rango dos ( $\vec{\sigma}$ ), de manera que  $\sigma_{ij}$  representa a la componente del esfuerzo que actúa en el plano  $x_i = \text{cte}$  y va en la dirección de  $x_j$ . Así se tiene que el esfuerzo que actúa en la dirección  $x_j$  es  $P_j = \sigma_{ij} n_i$ , con  $\vec{n}$  el vector normal a la superficie donde se está aplicando el esfuerzo. Si las fuerzas volumétricas están dadas por  $\vec{f}$ , entonces la conservación del momento implica [3]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV &= \int_S \sigma_{ij} n_i dS + \int_V f_j dV; \\ \Rightarrow \frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV &= \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int_V f_j dV, \end{aligned} \quad (1.4)$$

en donde se utiliza la convención de suma de Einstein para tensores (se suma sobre índices repetidos).

**Conservación de la Energía.** Resulta de aplicar la primera ley de la Termodinámica a un elemento de fluido en movimiento. La primera ley de la Termodinámica sólo se puede aplicar a sistemas que empiezan en un estado de equilibrio y terminan en otro estado de equilibrio, y nos dice que el cambio en la energía interna del sistema termodinámico que se produjo al pasar de un estado de equilibrio al otro, es igual al trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre él, más el calor añadido. Los fluidos casi nunca se encuentran en reposo, por lo que en general no se encuentran en equilibrio desde el punto de vista termodinámico. Para poder aplicar la primera ley a una masa de fluido se utiliza la hipótesis de equilibrio local, en la que se supone que cada elemento de fluido de dicha masa se encuentra en equilibrio termodinámico, por lo que podemos hablar de las variables termodinámicas asociadas a éste. Además, la primera ley debe aplicarse a la energía interna y cinética del fluido en conjunto. Con lo anterior se puede hacer un balance de energía; la variación temporal de la energía (interna y cinética) del flujo queda determinada por la suma de los trabajos efectuados por las fuerzas volumétricas y las superficiales (por unidad de tiempo) durante el mismo evento, más el calor que haya sido añadido (también por unidad de tiempo) [2,3]. Si  $e$  es la energía interna del fluido y  $\vec{q}$  el flujo de calor que sale del volumen de control  $V$ , lo anterior implica:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \right) dV &= \int_S \vec{u} \cdot \vec{P} dS + \int_V \vec{u} \cdot \vec{f} dV - \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS; \\ \Rightarrow \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} &= \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_j f_j - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para resolver los sistemas de ecuaciones que resultan de las leyes de conservación, es necesario dar más información sobre el fluido que se quiere estudiar, pues el problema, hasta ahora, no está matemáticamente cerrado. Hacen falta más ecuaciones, unas son las ecuaciones de estado de la Termodinámica, que nos relacionan a la presión y a la energía

interna con la densidad y la temperatura (T) en un elemento de fluido ( $p=p(\rho,T)$  y  $e=e(\rho,T)$ ), y otras que resultan de ciertas suposiciones y características del fluido en cuestión. A estas últimas se les llama ecuaciones constitutivas [3].

### 1.1.2. Ecuaciones constitutivas

**Viscosidad.** La resistencia que presenta un fluido a los esfuerzos de corte que intenten mover a una de sus capas sobre otra, se atribuye a la viscosidad del fluido. Newton postuló un modelo para un flujo rectilíneo y paralelo, en el cual el esfuerzo de corte viscoso entre dos capas adyacentes de fluido es proporcional al gradiente de velocidad normal a las capas. Esto es, si el flujo va en la dirección  $x$  y  $y$  es la dirección perpendicular al movimiento, entonces el esfuerzo de corte queda dado por:  $E_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , donde  $\mu > 0$  es la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo de corte y los gradientes de velocidad, y se le conoce como *coeficiente de viscosidad cortante*.  $\mu$  sólo depende de las propiedades locales del fluido. La mayoría de los fluidos cumplen con el modelo de Newton y se conocen con el nombre de *fluidos newtonianos*. Las hipótesis que deben satisfacer son que el fluido sea isotrópico, la resistencia al movimiento relativo entre capas adyacentes dependa solamente de los gradientes de velocidad y que dicha dependencia sea lineal [2,3]. Conviene introducir de una vez a la viscosidad *cinemática*, que es el cociente  $\nu = \mu/\rho$ , y suele aparecer frecuentemente al resolver problemas de fluidos. Este trabajo sólo pretende estudiar fluidos que satisfagan al modelo de Newton, como el agua, por lo que de ahora en adelante al decir fluido nos estaremos refiriendo a un fluido newtoniano.

El tensor de esfuerzos para un fluido incompresible es de la forma:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + E_{ij}, \quad \text{donde } E_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

A  $E_{ij}$  se le conoce como el *tensor de esfuerzos de corte* o *viscosos*. El primer sumando del tensor de esfuerzos se refiere a los esfuerzos normales, ahí  $p$  es la presión termodinámica y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. El signo menos es por convención, pues los esfuerzos normales se consideran positivos cuando tensionan. El tensor de esfuerzos de corte se obtiene al utilizar las hipótesis del modelo newtoniano y la conservación del momento angular. La ecuación 1.6 es otra ecuación constitutiva [3].

**Flujo de calor.** La transferencia neta de energía cinética del movimiento molecular en un medio, o *conducción de calor*, ocurre cuando existe una diferencia de temperaturas en éste, de modo que se presenta un flujo neto de calor en la dirección en la que la temperatura del medio disminuye. La ley de conducción de calor de Fourier es una manera de cuantificar este hecho. Las hipótesis que están detrás de ella son que, para variaciones pequeñas de la temperatura con la posición (i.e.,  $|\nabla T|$  pequeños), el flujo de calor sólo va a depender de las propiedades locales del fluido y de los valores locales de  $T$  y  $\nabla T$ , y que la relación entre el flujo de calor y el gradiente de temperatura es lineal, esto es, nos quedamos con el desarrollo en serie de Taylor a primer orden del flujo de calor en función de la temperatura. Si además

se supone que el fluido es isotrópico y homogéneo, entonces el factor de proporcionalidad es constante:

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1.7)$$

donde  $k > 0$  es el coeficiente de conductividad térmica. La razón por la cual la constante que resulta del primer término de la serie de Taylor es cero es que cuando el gradiente de temperaturas es nulo, no hay transferencia de calor. Esta es la otra ecuación constitutiva que faltaba para tener al problema matemático cerrado [2].

### 1.1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes (caso incompresible)

A las ecuaciones que resultan de las tres leyes de conservación y de las ecuaciones constitutivas 1.6 y 1.7, se les conoce con el nombre de ecuaciones de Navier-Stokes. En el caso incompresible, éstas quedan reducidas a:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{u} + \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad (1.4b)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla e = k \Delta T + \Phi, \quad (1.5b)$$

con  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$  es el laplaciano. En la última ecuación

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2; \quad (1.8)$$

se conoce como función de disipación, y mide cuánta energía mecánica se convierte en energía térmica debido a la viscosidad. Así pues,  $\Phi$  es la energía disipada por unidad de tiempo y volumen:

$$\int_V \Phi dV = \frac{dE_k}{dt}, \quad (1.8b)$$

donde  $E_k$  es la energía cinética del fluido contenido en  $V$  [3,5].

La suposición de incompresibilidad hace que la ecuación de conservación de momento y la de conservación de la energía estén desacopladas, lo cual simplifica mucho al problema, dado que se puede encontrar la distribución de presiones y velocidades sin tener que usar la ecuación de conservación de la energía. Una vez teniendo esa distribución, se puede encontrar al campo de temperaturas en el flujo.

El conjunto de ecuaciones dadas arriba deben satisfacer condiciones iniciales y condiciones de frontera. Las condiciones de frontera que se utilizan son las de Dirichlet o de Neumann (para fronteras cerradas), lo cual físicamente se traduce en especificar a la velocidad en las interfaces. Cuando se tiene a un fluido de expansión infinita, la condición de frontera que suele utilizarse es que para  $\|\vec{r}\| \rightarrow \infty$ ,  $\|\vec{u}\| \rightarrow 0$  [3]. En esta tesis se estudia a un fluido confinado entre límites sólidos, en ese caso la condición de frontera es conocida como la *condición de no-deslizamiento*, que consiste en que la velocidad en los elementos de fluido adyacentes al límite sólido debe ser igual a la velocidad de éste (esto es, si  $\vec{U}$  es la velocidad de la pared, entonces la velocidad del fluido en la pared es  $\vec{u} = \vec{U}$ ), lo cual es una



consecuencia de que las componentes de la velocidad (tanto normales como tangenciales) deben ser continuas en la frontera. Esta condición ha sido verificada observacionalmente en flujos en condiciones normales [2] y se puede explicar con el hecho de que una frontera sólida, por más lisa que sea, tiene irregularidades que en general son más grandes que las moléculas del fluido, por lo que una parte del fluido quedará retenida en éstas, además de que algunas moléculas se pegarán a la superficie por adherencia, esto es, se verán atraídas por las moléculas del sólido.

### 1.2. Líneas de corriente

Son las líneas de campo de la velocidad. Esto es, son líneas tales que, en todo punto, son tangentes al vector velocidad. Si el flujo no es estacionario y la velocidad cambia tanto su magnitud como su dirección con el tiempo, también cambiarán las líneas de corriente.

### 1.3. Número de Reynolds

Si hacemos una comparación entre las magnitudes de los términos que aparecen en la ecuación de conservación del momento, obtendremos números adimensionales que nos darán bastante información sobre el flujo que estemos estudiando. Analizando entonces a la ecuación de momento dada por (1.4b), tendríamos que analizar a cada una de las tres ecuaciones que resultan de las tres componentes de  $\ddot{u}$ . Supongamos que tenemos un flujo unidireccional. Estudiando a la ecuación correspondiente a la dirección de la velocidad, tenemos que: si la velocidad característica del flujo es  $V_c$ , la cual tendrá variaciones a lo más de sí misma en un tiempo característico  $T$  y una longitud característica  $L$ , y si la componente de  $\vec{f}$  en esa dirección tiene variaciones en ese tiempo y longitud característicos de a lo más  $f_0$ , los órdenes de magnitud de los miembros de la ecuación son:

$$\frac{V_c}{T} + \frac{V_c^2}{L} \approx \frac{|\nabla p|}{\rho} + \frac{\nu V_c}{L^2} + \frac{f_0}{\rho}; \quad (1.9)$$

el lado izquierdo de la igualdad representa la magnitud de las fuerzas inerciales y el lado derecho a las fuerzas debidas a la presión, a los esfuerzos viscosos y a las fuerzas externas, respectivamente. se puede comparar al término de las fuerzas inerciales con el de las fuerzas viscosas, obteniéndose lo siguiente:

$$\text{Re} \equiv \frac{LV_c}{\nu} \quad \text{comparando con las aceleraciones convectivas,} \quad (1.11)$$

$$\text{Rm} \equiv \frac{L^2}{T\nu} \quad \text{comparando con las aceleraciones locales.} \quad (1.12)$$

El tamaño de estos parámetros nos dice que tanto más grandes, o chicas, son las fuerzas inerciales respecto a las viscosas para un flujo dado, lo cual nos brinda más información sobre el comportamiento del flujo. Osborne Reynolds (1842-1912) fue el primero en darse cuenta de la importancia que tiene el parámetro adimensional así construido y es por eso que lleva su nombre. Sus experimentos con flujos unidireccionales dentro de tubos mostraron que el valor del parámetro  $\text{Re}$  sirve para indicar si el régimen es laminar o turbulento. Reynolds construyó el parámetro adimensional tomando como

longitud característica al diámetro del tubo y como velocidad característica a la velocidad promedio del flujo. Lo que descubrió es que para  $Re$  pequeños se tiene un flujo laminar con un perfil determinado y fijo y que cuando se sobrepasa un cierto valor crítico de  $Re$  (aproximadamente 2000), el flujo se vuelve inestable y se hace turbulento.

#### 1.4. Ecuación de Bernoulli

Es la ecuación que resulta de hacer la suposición de fluido ideal, (es decir, fluido con viscosidad cero) en la ecuación de momento de Navier-Stokes, y que las fuerzas son conservativas. La ecuación de momento (1.4b) puede reescribirse como:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla G;$$

de donde

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left( \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} - G \right) = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}), \quad (1.10)$$

donde  $G$  es el potencial de la fuerza conservativa, por unidad de volumen ( $\vec{f} = \nabla G$ ) [3].

Flujo estacionario. Cuando la velocidad del fluido no varía con el tiempo ( $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ ) se puede multiplicar escalarmente por  $\vec{u}$  a la ecuación anterior e integrarla a lo largo de una línea de corriente, con lo cual se obtiene que:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} - G = \text{constante en cada línea de corriente} \quad (1.10b)$$

Flujo irrotacional. En este caso  $\nabla \times \vec{u} = 0$ , lo cual implica que la velocidad se puede escribir como el gradiente de un potencial de velocidad  $\phi$  tal que  $\vec{u} = \nabla \phi$ , y se obtiene que, al integrar sobre una línea de corriente, la ecuación queda:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - G = F(t) \quad (1.10c)$$

donde  $F(t)$  es una función del tiempo que se puede quitar sin pérdida de generalidad después de haber hecho la integración sobre las coordenadas espaciales [3].

Cualquiera de las dos versiones de la ecuación de Bernoulli tienen la ventaja de ser ecuaciones escalares, por lo que el problema matemático se simplifica, y es válida siempre y cuando los efectos viscosos sean despreciables.

## 2. Hidráulica

### 2.1. *Fricción en tuberías con flujos unidireccionales*

Por todo lo que hemos visto hasta aquí, tenemos que en una tubería lisa en la cual hay un flujo laminar, la resistencia a dicho flujo se debe al esfuerzo de corte viscoso entre las partículas que se mueven en recorridos paralelos con diferentes velocidades. Se dice que dicha resistencia al flujo se debe a la *fricción en las paredes*, o *fricción en la tubería*, y se puede ver de esa manera dado que la viscosidad del fluido tiene ese efecto precisamente por la presencia de la pared de la tubería. Si el flujo es turbulento, el esfuerzo cortante viscoso se ve aumentado por los innumerables vórtices o remolinos que acompañan a la turbulencia, y las tuberías con paredes ásperas o incrustadas tienden a aumentar dicha turbulencia. Aún en este caso, la resistencia es puramente viscosa, pero se refieren a ella como fricción en la tubería [7].

### 2.2. *Pérdida de carga ( $h_f$ )*

Para mantener el movimiento relativo entre capas adyacentes de un fluido, se debe realizar un trabajo, o lo que es lo mismo, administrar energía de manera constante en contra de las fuerzas viscosas. La energía necesaria para vencer a esta "fricción" del fluido se transforma en energía térmica, la cual aumenta la energía interna y temperatura del fluido y termina disipándose en forma de calor transferido por el fluido a los alrededores. Por ello, toda esa energía térmica puede considerarse (para fines prácticos) como pérdida para siempre. En hidráulica, a esa pérdida de energía mecánica se le acostumbra expresar por unidad de peso, y se le conoce como *pérdida de carga por fricción*, y representa a la cantidad de energía mecánica que se convierte en energía térmica por efectos viscosos [4,6].

La razón por la cual este concepto es importante en hidráulica es que, al estudiar flujos para los cuales las ecuaciones de Navier-Stokes resultan muy complicadas y/o en los que sólo interesa conocer la evolución temporal de las variables de campo promedio, un posible procedimiento a seguir es utilizar la ecuación de Bernoulli y corregir la falta del término viscoso añadiendo un término de fricción (dado como una pérdida de carga) que produzca la misma disipación de energía que los esfuerzos viscosos reales. Para el caso de flujos en ductos, se utiliza la ecuación de Bernoulli (1.10) con las siguientes suposiciones:

- el fluido se mueve como cuerpo rígido con la velocidad promedio del flujo,
- el movimiento del fluido se debe a una diferencia de presión entre los dos extremos de la línea de corriente,
- la única fuerza externa es la de gravedad,

al integrar a (1.10) sobre una línea de corriente con vector dirección  $\hat{s}$  y longitud  $L$ , y dividiendo todo entre  $g$  (aceleración de la gravedad) se tiene:

$$\frac{L}{g} \frac{dV_p}{dt} + \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \int \hat{k} \cdot \hat{s} ds = h_f, \quad (1.10d)$$

donde  $V_p$  es la velocidad promedio del flujo y  $\hat{k}$  el vector unitario en dirección de la fuerza de gravedad.

### 2.3. Pérdidas de carga por fricción en tuberías con flujos unidireccionales

Caso laminar. Al flujo unidireccional y laminar dentro de una tubería de sección circular se le conoce como flujo de Hagen-Poiseuille y es uno de los pocos problemas que tienen una solución analítica en mecánica de fluidos. Lo obtenemos al aplicar un gradiente de presión constante en la dirección del eje del tubo ( $\nabla p = -\hat{k}P_o$  con  $\hat{k}$  en la dirección del eje del tubo). El perfil de velocidades es parabólico, y queda dado por:

$$u(R) = -\frac{P_o}{4\mu}(a^2 - R^2), \quad (1.11)$$

donde  $a$  es el radio del tubo,  $R$  la distancia radial medida desde el centro del tubo y  $z$  va en la dirección del eje del cilindro.

El esfuerzo de corte para este flujo es:

$$Ec_{Rz}(R) = \frac{1}{2}P_oR. \quad (1.12)$$

Para calcular la pérdida de carga, lo que se hace es calcular el trabajo que realiza la resistencia viscosa del fluido al movimiento de éste en una longitud  $L$  del fluido y dividirla entre el peso de esa porción de fluido, lo cual resulta en:

$$h_f = 6 \frac{L\bar{u}v}{a^2g}, \quad (1.13)$$

donde  $\bar{u} = -\frac{P_o}{6\mu}a^2$  es la velocidad promedio del flujo.

Caso turbulento. Henry Darcy (1803-58) realizó varios experimentos para determinar cuál es la diferencia de carga necesaria para forzar al fluido bajo cierto régimen estable a través de tuberías. Sus investigaciones las hizo para flujos en condiciones turbulentas, con tubos largos, rectos, lisos, no obstruidos y de diámetro uniforme y encontró que la disipación de energía resulta en una caída de la carga en la dirección del flujo [6]. Si la sección transversal es uniforme y el flujo se ha desarrollado totalmente, esta caída se da de manera uniforme:

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad (\text{Fórmula de Darcy}), \quad (1.14)$$

donde  $\bar{u}$  es la velocidad del fluido,  $D$  es el diámetro del tubo y  $f$  es un factor de fricción (adimensional).

El estudio de este tema ha llevado a resultados más generales y lo que se sabe actualmente (Russell, 1968 [7]) es que la pérdida de carga es:

- Independiente de la presión bajo la cual escurre el fluido.
- Proporcional a la longitud de la tubería.
- Proporcional a cierta potencia (positiva) de la velocidad.

- Inversamente proporcional a cierta potencia (positiva) del diámetro.
- Variable con la rugosidad de la tubería cuando el flujo es turbulento.

Esto es,  $h_f = K \frac{L \bar{u}^n}{D^x}$ , donde  $K$  es una constante que depende de la rugosidad.

Los experimentos muestran que  $n$  varía de valor, siendo  $n=1$  para flujo laminar. Para turbulento  $n \in [1.7, 2]$ , ( $n$  pequeño implica tubería lisa y  $n$  grande es para una tubería rugosa). Para flujo laminar  $x=2$  y  $x \in [1.0, 1.3]$  para flujo turbulento.

### 2.3.1. Diagrama de Stanton

Nikuradse (1894- ) [6] hizo un diagrama que relaciona al factor de fricción ( $f$ ) con el número de Reynolds ( $Re$ ) y la rugosidad de las paredes de los tubos. La manera como cuantificó a la rugosidad fue mediante la *rugosidad relativa* ( $\epsilon = k/D$ , con  $k$  el tamaño de las protuberancias y  $D$  el diámetro del tubo) y para hacer su diagrama utilizó tubos con rugosidad uniforme. Lo que encontró fue que:

- Para flujo turbulento, (i.e.  $Re > 2000$ ),  $f$  sólo depende de la rugosidad.
- Para  $Re$  cercano al crítico las curvas para cada  $\epsilon$  coinciden con la curva para tubos lisos.
- Para flujo turbulento, a mayor  $\epsilon$ , la curva se ramifica para valores de  $Re$  cada vez más bajos.

El diagrama resultante se conoce como diagrama de Stanton, en la figura 1.1 se muestra éste en una versión más completa, modificada por Lewis F. Moody [6].

Se puede clasificar al diagrama en tres zonas:

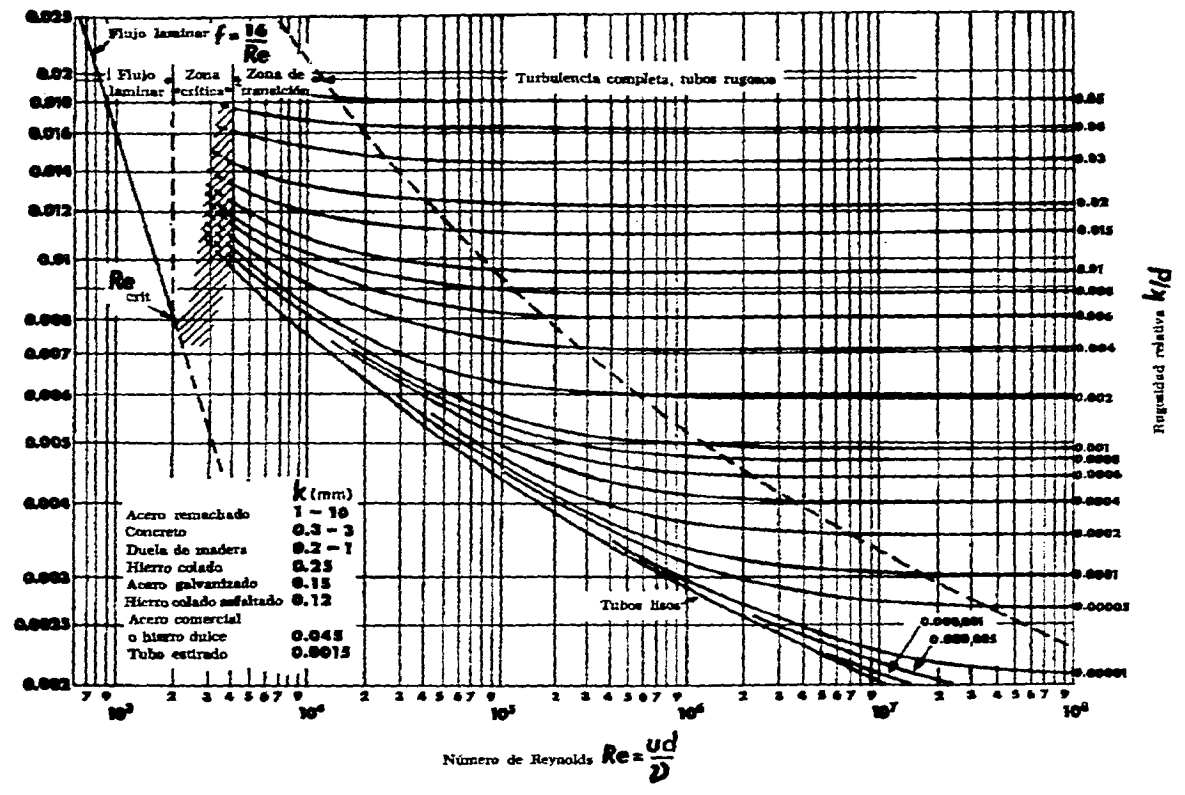
- ZONA LISA DEL FLUJO: Región en la que las curvas coinciden con la curva para tubo liso.
- ZONA RUGOSA: Región en la que la curva sólo depende de la rugosidad.
- ZONA DE TRANSICION: Números de Reynolds entre 2000 y 3000, es la región intermedia entre las dos zonas anteriores.

Experimentos similares a los de Nikuradse se han hecho con tuberías de distintos materiales, en los que la rugosidad no es uniforme. El comportamiento del factor de fricción es idéntico, excepto que las curvas están algo movidas en la zona de transición. Haciendo una comparación del valor de  $f$  para los resultados de Nikuradse permite especificar un tamaño de grano de arena *equivalente*; con estos tamaños equivalentes Moody hizo un diagrama modificado para varios tubos comerciales ordinarios [6].

Se han propuesto varias fórmulas empíricas para describir algunas de las partes del diagrama de Stanton que tienen validez para cierto rango de  $Re$  y, en algunos casos, sólo para ciertos materiales [9].

Es importante observar que se ha encontrado experimentalmente que la forma geométrica y el espaciamento entre las irregularidades en las paredes de las tuberías tienen un efecto importante, el cual no es considerado en la rugosidad relativa utilizada en el análisis anterior, y todavía no se tiene un resultado confiable de cómo cuantificar la rugosidad [7].

Figura 1.1. Diagrama de Stanton (Publicado por Massey (6))



Carsten [15] propone usar en el caso de flujos oscilantes la misma forma de la pérdida de carga que la que se usa para flujos permanentes, sólo que con un factor de fricción diez veces mayor.

#### 2.4. Pérdidas de presión

Nosotros no hablaremos de pérdidas de carga en este trabajo, sino de lo que denominamos *pérdidas de presión*. Esto es, hablaremos de la fuerza viscosa total por unidad de área que actúa sobre el fluido, y no del trabajo por unidad de peso realizado por ésta. La relación entre la pérdida de carga ( $h_f$ ) y la pérdida de presión ( $\Delta p_f$ ) es  $\Delta p_f = \rho g h_f$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido y  $g$  la aceleración de la gravedad.

#### 2.5. Teorema $\pi$ de Buckingham (análisis dimensional)

Este teorema asegura que en un problema físico en el cual participan  $n$  cantidades (velocidad, densidad, viscosidad, etc.), en las que hay involucradas  $m$  dimensiones (longitud, masa, tiempo, etc.), las cantidades se pueden acomodar en  $n-m$  parámetros adimensionales independientes, llamados parámetros  $\pi$ , y que éstos están relacionados por una ecuación de la forma:  $f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$ . Una vez que se tiene esa ecuación, se puede despejar a cualquiera de los parámetros  $\pi_i$  en términos de los demás. De esta manera se puede encontrar cómo depende una cantidad física de las demás cantidades involucradas en el problema. La utilidad de éste teorema es que se reduce el número de variables involucradas en el problema original, y se obtienen los parámetros que son importantes en el fenómeno que se estudia, lo cual resulta muy útil cuando se planea encontrar experimentalmente a la cantidad desconocida. Streeter [11] describe el método para encontrar a dichos parámetros. En resumen, lo que hay que hacer es:

- encontrar las variables pertinentes que estén involucradas en el problema,
  - escoger a  $m$  de esas variables, que contengan a las  $m$  dimensiones del problema y usarlas como *variables repetidas*, cuidando de no escoger a la cantidad que se quiere determinar en ese conjunto,
  - escribir a cada uno de los parámetros  $\pi_i$  en términos de las variables repetidas y una de las cantidades físicas restantes, con exponentes desconocidos,
  - obtener el valor de los exponentes para que los parámetros  $\pi_i$  sean adimensionales,
  - establecer la relación funcional para la  $\pi_i$  deseada:  $\pi_i = f(\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{n-m})$ ,
- recombinar, si se desea, a los parámetros  $\pi_i$ . Esto se puede hacer elevándolos a potencias o multiplicándolos entre sí, manteniendo siempre el mismo número de éstos ( $n-m$ ).

## Capítulo 2

### FLUJO LAMINAR OSCILANTE DENTRO DE UN CILINDRO CIRCULAR HORIZONTAL

Nos proponemos encontrar la pérdida de presión debida a la fricción, es decir, por efectos viscosos, en el caso de un flujo laminar oscilante. Este se obtiene al aplicar un gradiente de presión que varía armónicamente con el tiempo sobre un fluido incompresible, el cual está contenido dentro de un cilindro circular, recto, de longitud infinita y colocado de manera horizontal. Nos fijaremos en el flujo una vez que se haya desarrollado por completo.

#### 1. Velocidad

Empecemos encontrando el campo de velocidades correspondiente. Se utilizarán coordenadas cilíndricas para los cálculos. Sea  $a$  el radio del cilindro, el gradiente de presión se aplica en la dirección del eje del cilindro ( $\mathbf{k}$ ) y es de la forma:

$$\nabla p = -\hat{k} \operatorname{Re}(P_0 e^{i\omega t}) = -\hat{k} P_0 \cos(\omega t), \quad (2.1)$$

donde  $P_0$  es una constante (diferencia de presión por unidad de longitud) y  $\omega$  es la frecuencia angular con que oscila el gradiente de presión (el menos es para que con  $\omega=0$ , i.e., flujo de Poiseuille, tengamos que el gradiente favorezca al flujo en la dirección de  $\mathbf{k}$ ).

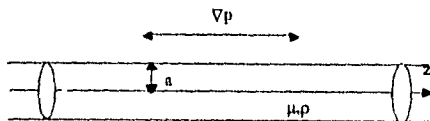


Figura 1. Diagrama del cilindro infinito de radio  $a$ , dentro del cual se tiene a un fluido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ , sujeto a un gradiente de presión oscilante en la dirección del eje del cilindro.

Por simetría, podemos suponer que la velocidad del fluido no dependerá de la coordenada angular. Dado que estamos analizando al caso laminar, la dirección de la velocidad irá en la misma dirección que el gradiente de presión ( $\mathbf{k}$ ) y dado que el movimiento del fluido se debe únicamente al gradiente de presión, se espera encontrar la misma dependencia temporal en la velocidad, salvo por un posible desfaseamiento. Con esas suposiciones, se propone la siguiente forma para la velocidad:

$$\vec{v} = \hat{k} v(r, z, t) = \hat{k} \operatorname{Re}\{u(r, z) e^{i\omega t}\}; \quad (2.2)$$

donde  $u(r, z)$  es una función compleja.



La función velocidad debe satisfacer a las ecuaciones de Navier-Stokes, con las condiciones de frontera correspondientes (sección 1.1.3, capítulo 1).

La ecuación de continuidad (1.3b) implica:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \Rightarrow v = v(r, t), \quad u = u(r); \quad (2.3)$$

esto es, la velocidad sólo dependerá de la coordenada radial y de la temporal.

De la ecuación de conservación del momento (1.4b) sólo queda la componente z, y por la forma propuesta para la velocidad y el gradiente de presión, resulta

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (2.4)$$

con la condición de frontera de que en la pared el fluido esté en reposo, es decir:  $v(r=a, t)=0$  para toda  $t$ , y la restricción física de permanecer finita para toda  $r$  y  $t$ , es decir:  $|v(r, t)| < \infty \quad \forall t \in \mathcal{R}, r \in [0, a]$ .

Dado que la dependencia temporal en todos los términos es la misma, la ecuación que teníamos se reduce a una ecuación para  $u(r)$ . Al dividir todo entre  $v$  y desarrollando la derivada, adimensionalizando a la coordenada radial con el radio del cilindro ( $R=r/a$ ), la ecuación para  $u(R)$  tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} - \frac{i\omega a^2}{\nu} u = -\frac{P\omega a^2}{\rho \nu}. \quad (2.5)$$

La solución general a esta ecuación se compone de una solución particular de la ecuación (2.5) y la solución general de la ecuación homogénea.

Por inspección, se encuentra a la siguiente solución particular:

$$u_p = -\frac{iP\omega}{\rho \nu}; \quad (2.6)$$

falta encontrar la solución general de

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} - \frac{i\omega a^2}{\nu} u = 0. \quad (2.5b)$$

Esta ecuación se puede reescribir al hacer el cambio de variable

$$z = R \sqrt{\frac{i\omega a^2}{\nu}} = R \sqrt{iRm},$$

como

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du(z)}{dz} - u(z) = 0, \quad (2.5c)$$

que es la ecuación modificada de Bessel de orden cero, cuya solución general es  $u(z) = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z)$  donde  $I_0$  es la función modificada de Bessel de primera clase de orden cero y  $K_0$  la función modificada de Bessel de segunda clase de orden cero.  $C_1, C_2$  son constantes [9]. Dado que  $z$  es una variable compleja, la solución se puede descomponer en su parte real e imaginaria, apareciendo entonces las funciones de Kelvin:  $\text{ber}(R\sqrt{Rm}), \text{bei}(R\sqrt{Rm})$  (parte real e imaginaria de  $I_0(z)$ ), y  $\text{ker}(R\sqrt{Rm}), \text{kei}(R\sqrt{Rm})$  (parte real e imaginaria de  $K_0(z)$ ). (En el apéndice se muestran las expresiones para las funciones de Kelvin).

Se observa que el comportamiento de la solución está regido por el número de Reynolds  $Rm = \omega a^2 / \nu$ , en el cual se tiene como tiempo característico al periodo de oscilación (escrito en términos de la frecuencia angular) y como longitud característica al radio del cilindro (ver sección 1.3 del capítulo 1). Es importante observar que no es el número de Reynolds que se suele utilizar en flujos unidireccionales dentro de tubos ( $Re = V_p D / \nu$ , donde  $V_p$  es la velocidad promedio del flujo y  $D$  el diámetro del tubo), pues son otras las cantidades físicas que lo constituyen, así que no es posible extrapolar los resultados obtenidos para  $Re$  en flujos unidireccionales al caso de  $Rm$  en el problema que estamos analizando.

Volviendo a la solución general a la ecuación (2.4b) en términos de  $Rm$  y del radio adimensionalizado del cilindro:

$$u(R) = C_1 [\text{ber}(R\sqrt{Rm}) + i \text{bei}(R\sqrt{Rm})] + C_2 [\text{ker}(R\sqrt{Rm}) + i \text{kei}(R\sqrt{Rm})] - \frac{i p_0}{\omega \rho}. \quad (2.6)$$

Para que  $v(R, T)$  (con  $T = \omega t$ , dimensionalizamos al tiempo con la frecuencia angular) satisfaga las restricciones impuestas sobre  $v(r, t)$  es necesario que:

$$* \quad |v(R, T)| < \infty \Rightarrow \|u(R)e^{iT}\| < \infty.$$

Como la norma de  $e^{iT}$  es menor o igual que 1 para toda  $T$ , basta con que  $u(R)$  sea finita para toda  $R$ .  $\text{ber}(R\sqrt{Rm})$  y  $\text{bei}(R\sqrt{Rm})$  convergen para toda  $R$ , pero  $\text{ker}(R\sqrt{Rm})$  y  $\text{kei}(R\sqrt{Rm})$  divergen para  $R=0$ , por lo que con  $C_2=0$  tenemos que se cumple la restricción.

$$* \quad v(1, T) = 0 \Rightarrow u(1)e^{iT} = 0 \quad \text{para toda } T.$$

Aquí es necesario que  $u(1)=0$  para que se cumpla la condición de frontera, eso implica que:

$$C_1 = -i \frac{Po}{w\rho} \frac{1}{\text{ber}(R\sqrt{Rm}) + i\text{bei}(R\sqrt{Rm})}$$

Sustituyendo  $C_1$  y  $C_2$  en  $u(R)$ , y a  $u(R)$  en  $v(R,T)$  tenemos que

$$\bar{v}(R,T) = \hat{k} \text{Re}[u(R)e^{iT}] = \hat{k} \frac{Po}{\rho w} [P(R)\cos T + I(R)\text{sen} T], \quad (2.6)$$

donde

$$P(R) = A \cdot \text{ber}(R\sqrt{Rm}) - B \cdot \text{bei}(R\sqrt{Rm}), \quad (2.6a)$$

$$I(R) = 1 - (B \cdot \text{ber}(R\sqrt{Rm}) + A \cdot \text{bei}(R\sqrt{Rm})), \quad (2.6b)$$

$$A = \frac{\text{bei}(\sqrt{Rm})}{\text{ber}^2(\sqrt{Rm}) + \text{bei}^2(\sqrt{Rm})} \quad \text{y} \quad B = \frac{\text{ber}(\sqrt{Rm})}{\text{ber}^2(\sqrt{Rm}) + \text{bei}^2(\sqrt{Rm})}. \quad (2.6c)$$

Ya tenemos al campo de velocidades, analicemos su comportamiento antes de continuar.

## **2. Comportamiento asintótico**

Veamos que resultados físicos nos esperaríamos encontrar en los casos límite en que la frecuencia es muy grande ( $w \rightarrow \infty$ ) o muy pequeña ( $w \rightarrow 0$ ), para ver si el resultado obtenido para el flujo es físicamente posible.

$w \rightarrow \infty$ : Dado que no es posible físicamente que la velocidad del fluido en algún punto sea infinita, cuando la frecuencia de oscilación es muy alta, nos esperaríamos desplazamientos del fluido despreciables, es decir, el límite en que  $w \rightarrow \infty$  es el caso en que tenemos al fluido parado, i.e.,  $v(R,T)=0$  para toda  $R$  y  $T$ . Si sacamos el límite cuando  $w$  tiende a infinito en

nuestro resultado para  $v(R,T)$ , obtenemos que, efectivamente, nuestra solución tiende a cero.

$w \rightarrow 0$ : Para frecuencias bajas, el gradiente de presión tiende a ser constante, y el flujo tarda cada vez más en cambiar de dirección, por lo que en el límite nos esperaríamos encontrar a un flujo unidireccional debido a un gradiente de presión constante, que corresponde al flujo de Hagen-Poiseuille (Cap 1, sección 2.3). Al sacar el límite cuando  $w$  tiende a cero en nuestra solución obtenemos que:

$$\bar{v}(R,T) \xrightarrow{w \rightarrow 0} \hat{k} \frac{P_0 a^2}{4\mu} [1 - R^2], \quad (2.7)$$

que es el perfil de velocidades para el flujo de Poiseuille (ver ecuación 1.11).

Con esto concluimos que nuestro resultado para el perfil de velocidades del flujo a describir sí cumple con los resultados físicos esperados, por lo menos en los casos asintóticos, y podemos entonces confiar en que para otros valores de la frecuencia, nuestro resultado matemático nos describa fielmente lo que queremos físicamente. Aprovechemos pues para sacarle información a nuestra solución. Por ejemplo, encontremos el esfuerzo de corte que actúa en las capas adyacentes de fluido, pues el valor de éste en la pared va a ser quien nos dé información sobre la magnitud de las fuerzas viscosas.

### 3. Esfuerzo de corte

Encontremos al tensor de esfuerzos cortantes. De la ecuación (1.6) se tiene que, dado que la velocidad sólo tiene componente en la dirección de  $z$ , las únicas componentes distintas de cero del tensor de esfuerzos son:

$$E_c \equiv E_{c_{rz}} = E_{c_{zr}} = \mu \left( \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right) = \frac{\mu}{a} \left( \frac{\partial v(R,T)}{\partial R} \right), \quad (2.8)$$

por lo que el esfuerzo de corte resultante queda dado por

$$\bar{E}_c(R,T) = \hat{k} P_0 \sqrt{\frac{\nu}{2w}} \left[ E_1(R) \cos T + E_2(R) \sin T \right], \quad (2.9)$$

$$\text{donde} \quad E_1(R) = (A + B) \text{ber}_1(R\sqrt{Rm}) + (A - B) \text{bei}_1(R\sqrt{Rm}) \quad (2.9a)$$

y

$$E_2(R) = (A - B) \text{ber}_1(R\sqrt{Rm}) - (A + B) \text{bei}_1(R\sqrt{Rm}), \quad (2.9b)$$

con  $A$  y  $B$  dados por las ecuaciones 2.6c.

El esfuerzo de corte en la pared se obtiene al sustituir  $R=1$  en  $E_c(R,T)$ .

Estudiando estos dos resultados, el perfil de velocidades (2.6) y el perfil de esfuerzos de corte (2.9), podemos darnos una idea del comportamiento del flujo.

#### 4. Comportamiento del flujo para distintos números de Reynolds

En las figuras 2a y 2b se tiene la gráfica de la velocidad versus la distancia radial para varios números de Reynolds, en  $T=0$ , que es el tiempo para el cual el gradiente de presión es máximo. Se observa que el flujo alrededor del eje se va desfasando del gradiente de presión conforme aumentamos  $Rm$ . Sólo para  $Rm < 1$  tenemos que el desfasamiento es prácticamente cero, mientras que para  $Rm > 40$  tenemos al desfasamiento máximo de  $\pi/2$ , y que mientras mayor es el número de Reynolds, la región en la cual el desfasamiento es de  $\pi/2$  se hace cada vez más grande. Cerca de la pared tenemos que el fluido se mueve en fase con el gradiente de presión.

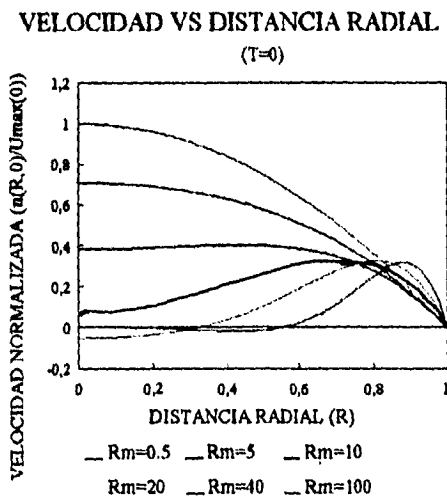


Figura 2a

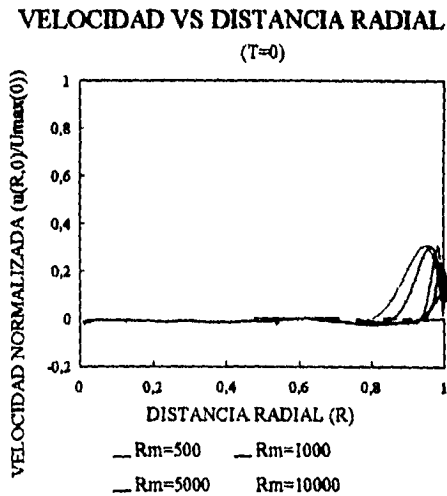


Figura 2b

En cuanto al esfuerzo de corte (figuras 3a y 3b) en  $T=0$ , se tiene que conforme aumentamos a  $Rm$ , el esfuerzo de corte es cero en una región cada vez mayor alrededor del eje

ESFUERZO DE CORTE VS D. RADIAL  
( $T=0$ )

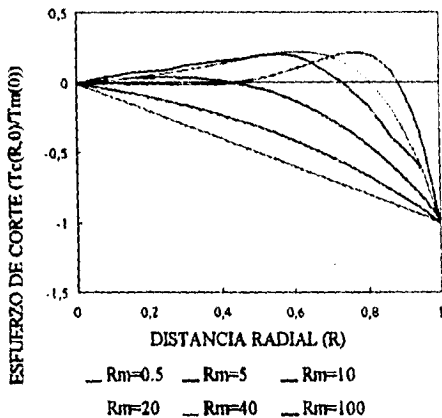


Figura 3a

ESFUERZO DE CORTE VS D. RADIAL  
( $T=0$ )

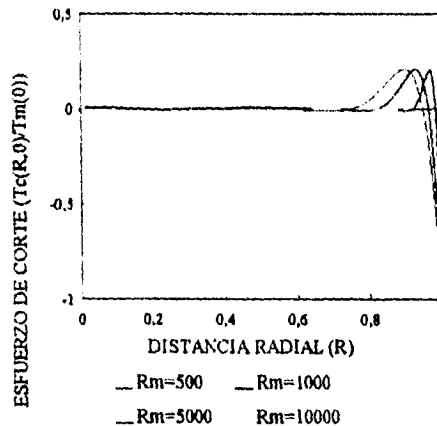


Figura 3b

En las figuras 4 a 7 se tiene la evolución temporal de algunos perfiles de velocidad y esfuerzos de corte para tiempos en  $0 \leq T \leq \pi$ . Sólo para  $Rm < 1$  se tiene el perfil de Poiseuille para todo  $T$ , y sólo en ese caso se tiene que el cambio de dirección del flujo se da al mismotiempo en todos los puntos, i.e., hay un  $T$  para el cual la velocidad y el esfuerzo de

POISEUILLE ( $Rm=0.5$ )  
 $T=\pi/20$

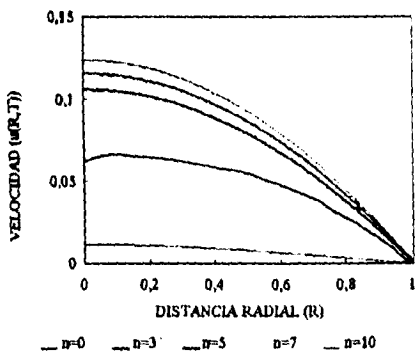


Figura 4a

POISEUILLE ( $Rm=0.5$ )  
 $T=\pi/20$

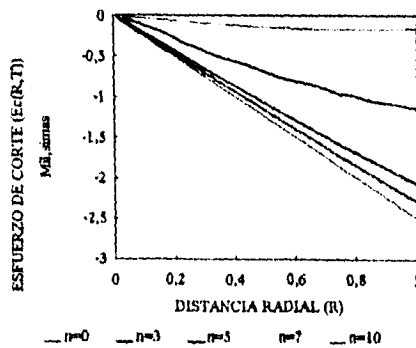


Figura 4b

corte son cero en todos los puntos del fluido. Conforme se aumenta  $Rm$  se tiene que el cambio de dirección del flujo se da antes cerca de la pared que en el centro, lo cual implica que hay tiempos para los cuales se tiene flujo en ambos sentidos.

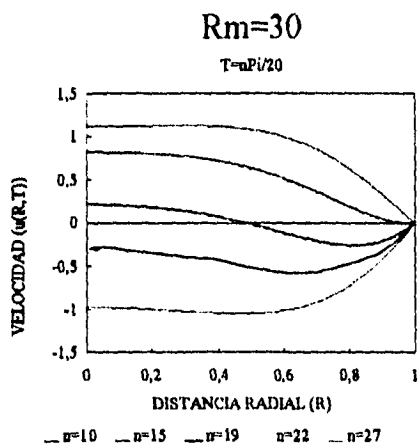


Figura 5a

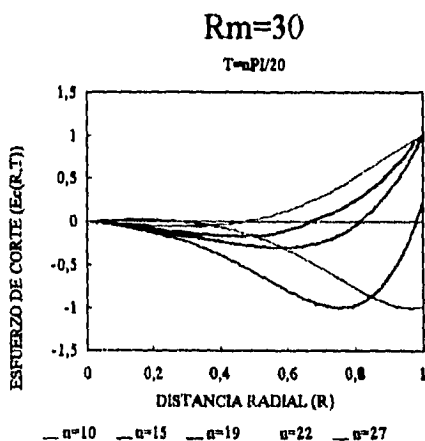


Figura 5b

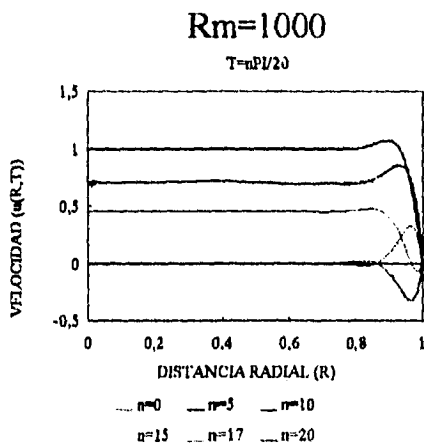


Figura 6a

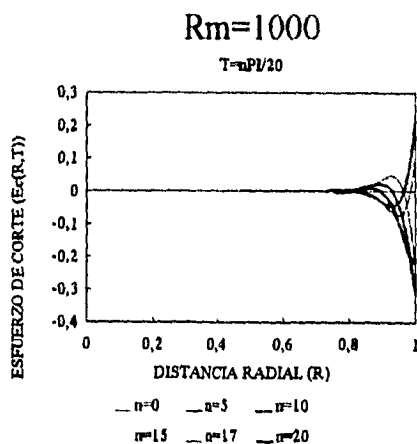


Figura 6b

También se observa que para  $Rm > 100$  la velocidad de los puntos entre  $0 < R < 0.5$  es la misma; que esta región se hace cada vez más grande conforme  $Rm$  aumenta. Por ende, los

esfuerzos son cero en esa región, mientras que se hacen cada vez más grandes alrededor de la pared del cilindro. Para  $Rm > 1000$  se tiene que el 80% del fluido se mueve con la misma velocidad y que los esfuerzos de corte son distintos de cero sólo en  $0.8 < R \leq 1$ , y para  $Rm > 10,000$  más del 90% del fluido se mueve como cuerpo rígido y los esfuerzos de corte sólo son importantes entre  $0.9 < R \leq 1$ .

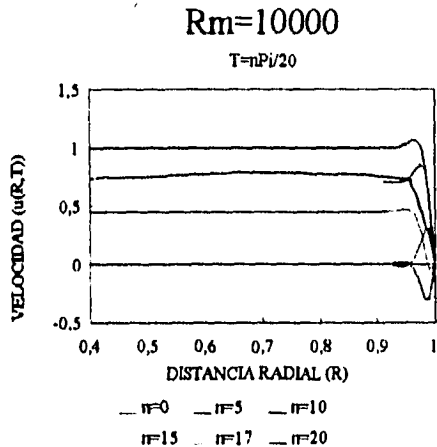


Figura 7a

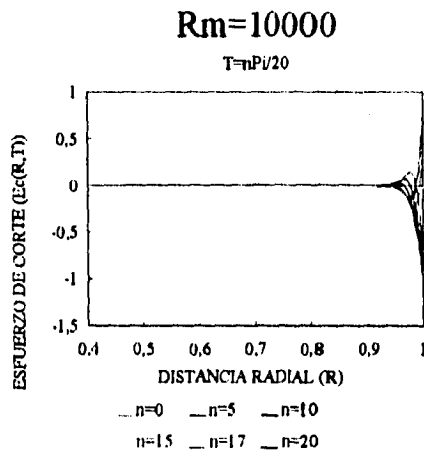


Figura 7b

Esto es lo que se obtiene de estudiar la solución, pero ¿cuáles son las razones físicas por las cuales tenemos ese comportamiento en el flujo?. Pues bien, si nos ponemos a pensar en la sincronía del flujo con el gradiente de presión, es de esperarse que para periodos de oscilación largos del gradiente de presión (i.e.  $Rm$  bajos) el fluido tenga el tiempo necesario para reaccionar a los ligeros cambios en el gradiente de presión. Además, si recordamos que  $Rm$  nos da la razón entre fuerzas inerciales y viscosas (sección 1.3 del capítulo 1, ecuación 1.12),  $Rm < 1$  implica que las fuerzas viscosas son más importantes que las inerciales, por lo que la viscosidad se encarga de que el efecto producido por el gradiente de presión sobre el fluido cerca de la pared se transmita al fluido en toda la sección del cilindro, y así el fluido se mueva sincronizado con el gradiente. Para  $Rm > 1$ , las fuerzas inerciales son más importantes que las viscosas (¡OJO!: esto lejos de la pared, cerca de la pared siempre predominarán las fuerzas viscosas) de manera que lejos de la pared, la inercia del fluido hace que "tarde" en frenarse, pues la presión actuando en sentido contrario al movimiento del fluido tiene que ocuparse en frenar la inercia de éste, originándose así un desfaseamiento; mientras que más cerca de la frontera, las fuerzas viscosas ayudan a frenar a las de inercia, respondiendo el fluido antes a la señal de presión, de ahí que el cambio de dirección se dé antes cerca de la pared que en el eje. Conforme  $Rm$  aumenta, la región en donde las fuerzas inerciales predominan se va acercando cada vez más a la pared, por lo que los esfuerzos viscosos se restringen a una zona cada vez más pequeña al lado de la pared, y como la zona en la cual la velocidad tiene que disminuir del valor promedio a cero se reduce, el tamaño de los esfuerzos aumenta.



Para hacemos una idea del orden de magnitud de  $Rm$  para los casos que nos interesan, si consideramos que nuestro fluido es agua, entonces un  $Rm$  de lo más bajo que pudiésemos conseguir sería teniendo al fluido oscilando muy lentamente dentro de un cilindro muy angosto. Si la frecuencia fuese de  $0.5 \text{ rad/s}$  (eso corresponde a un periodo de oscilación de unos 15 segundos) y el cilindro tuviera un centímetro de ancho, el  $Rm$  correspondiente es de aproximadamente 10. A nosotros nos interesan los números de Reynolds correspondientes a los dispositivos mencionados en la introducción, y en los prototipos de éstos. Esto corresponde a  $Rm \in (1 \times 10^3, 1.5 \times 10^5)$ . Para esos valores, la solución para el caso laminar nos indica que el fluido se mueve prácticamente como cuerpo sólido, es decir, con la misma velocidad para toda  $R$  excepto muy cerca de la pared.

Ahora que ya tenemos una idea de cómo se comporta el flujo, encontremos lo que nos interesa para la experimentación y/o la aplicación práctica de este problema; calculemos la velocidad promedio del flujo, la pérdida de presión por efectos viscosos y la energía disipada.

### 5. Velocidad promedio

Como vimos en el comportamiento del flujo, para los valores de  $Rm$  que nos interesan, la velocidad del fluido es prácticamente la misma en todo el cilindro, excepto muy cerca de las paredes, por lo que la velocidad promedio en la sección transversal del tubo es una cantidad de interés práctico, dado que en ese caso se puede suponer que el fluido se mueve con la misma velocidad en todos lados y que el valor de ésta es el de la velocidad promedio ( $V_p$ ). Promediando a  $v(R, T)$  en la sección transversal tenemos ( $\hat{n}$  vector normal a la sección transversal):

$$\begin{aligned} \bar{v}_p(T) &= \frac{1}{A} \oint_S \vec{v}(R, T) \cdot \hat{n} \, d\sigma = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 v(R, T) R \, dR \, d\theta; \\ \Rightarrow \bar{v}_p(T) &= \hat{k} \frac{P_0}{a} \sqrt{\frac{2\mu}{(\rho\nu)^3}} [V1(Rm)\cos T + V2(Rm)\sen T]; \\ \Rightarrow \bar{v}_p(T) &= \hat{k} \frac{P_0}{\rho a} \sqrt{\frac{2\nu}{w^3}} [V1(Rm)\cos T + V2(Rm)\sen T], \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde

$$V1(Rm) = (B - A)\text{ber}_1(\sqrt{Rm}) + (A + B)\text{bei}_1(\sqrt{Rm}) \quad \text{y} \quad (2.10a)$$

$$V2(Rm) = \sqrt{\frac{Rm}{2}} + (A + B)\text{ber}_1(\sqrt{Rm}) + (A - B)\text{bei}_1(\sqrt{Rm}) . \quad (2.10b)$$

Para  $Rm$  entre 0 y 1000 el desfaseamiento de la velocidad promedio respecto al gradiente de presión va disminuyendo de  $\pi/4$  hasta  $-3\pi/2$ . Para valores de  $Rm$  mayores a

1000, la velocidad promedio está desfasada del gradiente de presión en  $-3\pi/2$ , por lo que varía en el tiempo como un seno. En el apéndice se tienen las expresiones asintóticas para las funciones de Kelvin, las cuales son una buena aproximación para  $Rm > 1000$ , y a partir de ellas se observa que, para esos valores de  $Rm$ ,  $V_1$  es aproximadamente cero mientras que  $V_2$  tiende a  $\sqrt{Rm/2}$ , lo cual explica el desfase.

## 6. Pérdida de presión por fricción

La pérdida de presión debida a fricción está dada por:  $\Delta p_f = F_v/A$ , donde  $F_v$  es la fuerza debida a la viscosidad y  $A$  es el área de la sección transversal. (ver Cap 1, sección 2.4). Calculemos entonces a la fuerza debida a la viscosidad que actúa sobre una longitud  $L$ :

$$F_v = \oint_S \sigma_{ij} n_j da;$$

$$\Rightarrow F_v(t) = \int_{\text{Cilindro}} \sigma_{ij}(r,t) n_j da = \int_0^L \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & E_c(r,t) \\ 0 & 0 & 0 \\ E_c(r,t) & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2\pi r dz \\ 0 \\ 0 \end{array} \Bigg|_{r=a} ;$$

$$\Rightarrow \bar{F}_v(T) = \hat{k} 2\pi a \int_0^L E_c(1,T) dz = 2\pi a L \bar{E}_c(1,T) \quad (2.11)$$

$$\text{y la fuerza viscosa por unidad de longitud es } \bar{f}_v(T) = 2\pi a \bar{E}_c(1,T) \quad (2.12)$$

Así tenemos que la fuerza viscosa depende linealmente de la longitud, por eso será más conveniente usar a la fuerza por unidad de longitud. Usando estos resultados, tenemos que la pérdida de presión por unidad de longitud es:

$$\Delta p_f/L = 2E_c(1,T)/a \quad (2.13)$$

Analizando el comportamiento de dicha función se observa que, para  $Rm$  entre 0 y 1000, el desfase con el gradiente de presión varía de  $\pi/5$  hasta  $-9\pi/5$ , y que para  $Rm > 1000$ , el desfase se mantiene en  $-9\pi/4$  (i.e.  $-\pi/4$ ), lo cual implica un desfase con respecto a la velocidad promedio de  $-3\pi/4$ , aproximadamente. De las expresiones asintóticas dadas en el apéndice se encuentra que para esos valores de  $Rm$ , la magnitud de  $E_1$  es comparable con la de  $E_2$ , lo cual explica el desfase.

## 7. Energía disipada

La energía disipada queda dada por (1.8), esto es:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \int_V \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dV.$$

En nuestro caso tenemos que :

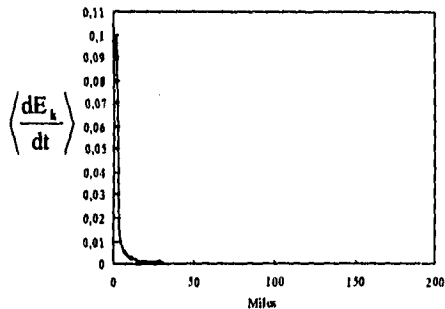
$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} &= 2 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = 2 \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} = \frac{2E_c(r,t)}{\mu}, \\ \Rightarrow \frac{dE_k}{dt} &= \frac{2}{\mu} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a (E_c(r,t))^2 r dr d\theta dz = \frac{2a^2}{\mu} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^1 (E_c(R,T))^2 R dR d\theta dz; \\ \Rightarrow \frac{dE_k}{dt} &= \frac{2\pi LP_0^2 a^2}{\rho w} \int_0^1 [F_1(R)\cos^2 T + F_2(R)\cos T \sin T + F_3(R)\sin^2 T] R dR \quad (2.14) \end{aligned}$$

donde:  $F_1(R) = E_1^2(R)$ ,  $F_2(R) = 2E_1(R)E_2(R)$  y  $F_3(R) = E_2^2(R)$ .

Promediando a la energía disipada en un periodo de oscilación:

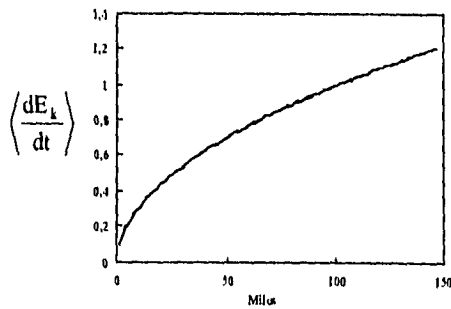
$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_k}{dt} \right\rangle &= \frac{w}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{dE_k}{dt} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{dE_k}{dt} (T) \right) dT; \\ \Rightarrow \left\langle \frac{dE_k}{dt} \right\rangle &= \frac{\pi LP_0^2 a^2}{\mu} \sqrt{\left( \frac{v}{w} \right)^3} \left\{ (B-A)ber_1(\sqrt{Rm}) + (A+B)bei_1(\sqrt{Rm}) \right\}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

En las figuras 8a y 8b se muestran las gráficas de la energía disipada promediada en un ciclo versus  $w$  y versus  $a$ , respectivamente. Aquí observamos que ésta disminuye conforme se aumenta la frecuencia, mientras que aumenta conforme aumentamos al radio del cilindro.



Rm(a,v fijos)

Figura 8a



Rm(w,v fijos)

Figura 8b

## 8. Pérdida de presión en función de la velocidad promedio

Esto es lo que más nos interesa encontrar (ver sección 2.2 del capítulo 1) y para ello se graficó a la pérdida de presión versus la velocidad promedio para varios tiempos, obteniéndose lo que se muestra en las figuras 11a,b,c y d. Como las dos funciones tienen la misma frecuencia, las únicas gráficas posibles son círculos (si es que las dos señales tienen la misma amplitud y están desfasadas en  $\pi/2$ ), elipses (ya sea rotadas con respecto a los ejes  $V_p$  y  $\Delta p_f$  cuando haya un desfase distinto de  $n\pi/2$  ( $n$  impar), o paralelas a

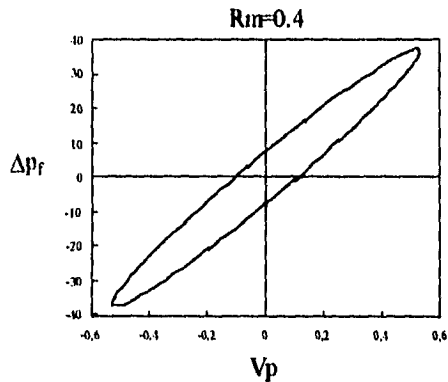


Figura 11a

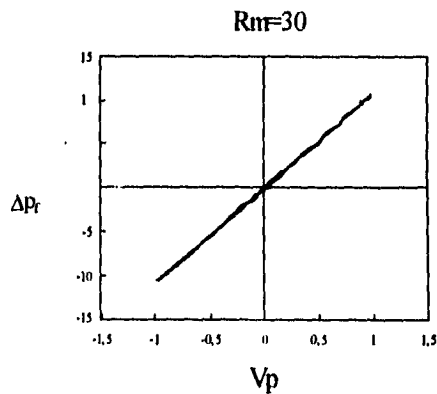


Figura 11b

estos cuando el desfase es  $n\pi/2$ , ( $n$  impar)) o rectas (si las dos señales están en fase) [8]. Dado que el desfase de la pérdida de presión con la velocidad promedio varía mucho para  $Rm < 1000$ , tenemos que hay algunos casos en que la relación es lineal (fig. 11b), otros casos en que tenemos una elipse con ejes paralelos a los ejes formados por  $V_p$  y  $\Delta p_f$  (fig. 11c), y, en general, una elipse rotada (fig. 11a, 11d). Además, como la fase de la velocidad está siempre adelantada a la fase de la pérdida de presión, el sentido como se recorre la trayectoria es contrario al de las manecillas del reloj.

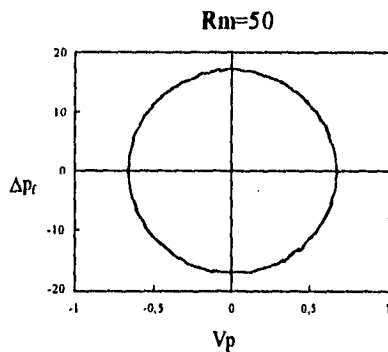


Figura 11c

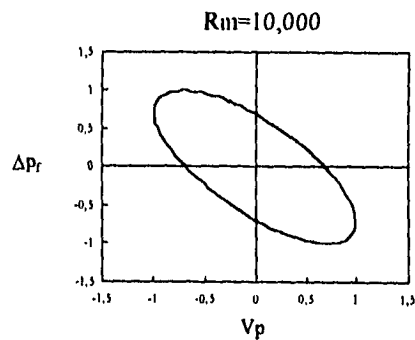


Figura 11d

Para  $Rm > 1000$ , la gráfica que se obtiene es una elipse cuyo eje principal forma un ángulo  $\theta$  (con  $\theta$  entre  $0$  y  $\pi/2$ ) entre el eje principal de la elipse y el eje de  $\Delta p_f$  (fig 12), pues el desfase entre ambas funciones es siempre de  $3\pi/4$ . A nosotros nos interesan los Reynolds mayores a 1000, y para ellos se tiene que ambas funciones obedecen la relación:

$$AVp^2 + 2BVp\Delta p_f + C\Delta p_f^2 + F = 0 \quad (2.16)$$

con A, B, C y F constantes.

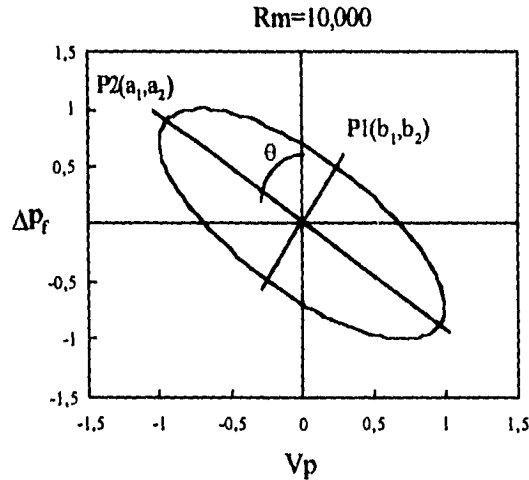


Figura 12

Para un número de Reynolds dado, el vértice y el extremo del semieje menor mostrados en la figura 12 se pueden encontrar a partir de la gráfica, encontrando los tiempos correspondientes a esos puntos, teniendo que  $a_1 = Vp(Rm, T_2)$ ,  $a_2 = \Delta p_f(Rm, T_2)$ , y  $b_1 = Vp(Rm, T_1)$ ,  $b_2 = \Delta p_f(Rm, T_1)$ , con  $T_1 < T_2$ . Así se tiene que la longitud de ambos semiejes se puede calcular usando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad \text{y} \quad b^2 = b_1^2 + b_2^2$$

y a partir de ellas, el ángulo  $\theta$  puede determinarse, por ejemplo con el seno:

$$\text{sen}(\theta) = a_1/a.$$

En términos de estas cantidades, las constantes de la ecuación (2.16) quedan dadas por:

$$A = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \text{sen}^2 \theta,$$

$$B = (b-a) \text{sen} \theta \cos \theta,$$

$$C = a^2 \text{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta,$$

$$\text{y} \quad F = -a^2 b^2.$$

Resolviendo la ecuación (2.16) para  $\Delta p_f$  se obtiene:

$$\Delta p_f(Vp) = \frac{-2BVp \pm \sqrt{4(B^2 - CA)Vp^2 - 4CF}}{2C} \quad (2.17)$$

De la figura 12 se deduce que, mientras  $V_p$  disminuya, el signo de la raíz debe tomarse positivo, mientras que cuando  $V_p$  aumenta, se debe tomar el signo negativo.

La ecuación (2.17) nos da la relación funcional entre la pérdida de presión y la velocidad promedio para  $R_m > 1000$  en el caso de flujo laminar. Este resultado nos da algo muy distinto a lo que se obtiene para el flujo laminar permanente (ecuación 1.14), en donde el comportamiento es lineal.

Como comentario, las gráficas de las funciones mostradas en este capítulo se obtuvieron a partir de programas en Turbo Pascal 7.0, que calculan el valor de las funciones de Kelvin para cualquier número de Reynolds y grafican a las funciones (o guardan los datos de las gráficas en archivos de texto) para distintos tiempos, distancias radiales y números de Reynolds.

## **Capítulo 3**

### **PARTE EXPERIMENTAL**

#### **1. Planteamiento**

En la parte teórica se resolvió el problema del flujo laminar debido a un gradiente de presión oscilante dentro de un cilindro circular recto y se encontró la energía disipada y la pérdida de presión asociada para ese caso. Para la aplicación que se le quiere dar a los resultados obtenidos, hay que explorar si los flujos con los que nos enfrentaremos en la realidad tendrán un régimen laminar, por lo que es necesario recurrir a la experimentación para obtener resultados aproximados de lo que ocurre en el flujo y así saber si lo obtenido en el capítulo anterior se aplica al caso deseado, además de obtener resultados experimentales para otros regímenes, como vimos que se hace en hidráulica. Dado que el objetivo principal de esta tesis es encontrar la pérdida de presión en dispositivos reales en los que se encuentren flujos oscilantes dentro de ductos, propusimos unos experimentos para lograr dicho fin.

Para lograr un flujo oscilante decidimos utilizar a la fuerza gravitacional actuando sobre una columna de fluido contenida en un tubo en forma de U, a la cual se le coloca en un principio a una distancia  $H$  por encima de su posición de equilibrio y luego se le deja oscilar libremente, midiendo las alturas que ésta alcanza en distintos tiempos. Bajo la suposición de que la columna se moverá como cuerpo sólido, aplicando la ecuación de Bernoulli con un término adicional de pérdida de presión que modele los efectos viscosos, se puede obtener una ecuación que simule el movimiento de la columna (ver sección 2.2, ecuación 1.10d en el capítulo 1) y el término de fricción podrá determinarse a partir de las mediciones experimentales. De esta manera, podremos obtener la velocidad promedio del fluido y la magnitud de las pérdidas de presión por fricción para todo tiempo.

Para planear nuestros experimentos, hicimos primero un análisis dimensional del problema para encontrar los parámetros que juegan un papel importante en el comportamiento del flujo.

#### **2. Análisis dimensional**

Siguiendo los pasos para el análisis dimensional según Streeter [11], enunciados en la sección 2.5 del capítulo 1, empecemos por identificar a las cantidades involucradas en el problema.

Tenemos un tubo en U cuyo radio de curvatura es  $R$  y radio interno  $a$ , el tamaño de las rugosidades en sus paredes es  $R_g$ , dentro hay una columna de fluido de longitud  $L$ , densidad  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\mu$ . Sólo nos restringiremos a experimentar con agua, dado que se quieren aplicar los resultados para agua de mar, cuya densidad y viscosidad es aproximadamente la misma que la del agua de la llave. Para iniciar el movimiento de la columna, ésta se eleva hasta una altura inicial  $H$  desde la cual se deja caer, obteniéndose (por acción de la gravedad) un movimiento oscilante de frecuencia angular  $\omega$ . Este es un

movimiento acelerado, por lo que la velocidad de la columna es una función del tiempo y dado que suponemos que la fricción en el movimiento va a estar relacionada de manera importante con la velocidad del flujo, tenemos que la pérdida de presión va a ser también una función del tiempo, i.e., instantánea.

Consideramos que la cantidad  $V_m = Hw$  puede servirnos en el análisis dimensional, pues dado que es la velocidad máxima que pudiera obtener el flujo (si la fricción es despreciable se tiene un movimiento armónico simple y la velocidad máxima queda dada precisamente por  $Hw$ ) esa cantidad puede resultar útil para identificar a un flujo laminar de uno turbulento.

Entonces las variables que consideramos participan de manera importante en el problema son:  $R, L, a, Rg, H, w, V$  (velocidad instantánea de la columna),  $V_m, g$  (aceleración de la gravedad),  $\rho, \mu$  y  $\Delta p_f$  (pérdida de presión debida a fricción); y es justo la relación entre la última variable y las demás lo que queremos encontrar.

Ahora bien, al hacer el análisis dimensional es importante escoger de manera conveniente a las variables repetidas, de manera que se faciliten los experimentos y sea fácil y viable realizarlos para obtener la información necesaria. Después de haber considerado distintos conjuntos de variables repetidas pensamos que lo más adecuado es usar como conjunto a  $a, \rho$  y  $V_m$  y excluir de las variables importantes del problema a  $H$  (dado que se encuentra incluida en la  $V_m = Hw$ ). Lo que queda entonces es

$$F(L, R, a, Rg, V_m, w, V, g, \rho, \mu, \Delta p_f) = 0$$

y  $(a, \rho, V_m)$  como conjunto de variables repetidas. Los parámetros adimensionales que se encuentran son:

$$a_1 = L/a, a_2 = R/a, a_3 = Rg/a, a_4 = V_m/V, a_5 = wa/V_m, a_6 = V_m^2/ga, \\ a_7 = aV_m\rho/\mu \text{ y } a_8 = \Delta p_f/\rho V_m^2.$$

multiplicando a  $a_8$  por el cuadrado de  $a_4$  y a  $a_5$  por  $a_7$  nos queda

$$a_8' = \Delta p_f/\rho V^2 \text{ y } a_4' = wa^2\rho/\mu.$$

entonces

$$F'(a_1, a_2, a_3, a_4', a_5, a_6, a_7, a_8') = 0$$

implica

$$\Delta p_f/\rho V^2 = f'(a_1, a_2, a_3, a_4', a_5, a_6, a_7). \quad (3.1)$$



Se espera una dependencia lineal con la longitud de la columna, por lo que nuestro análisis dimensional nos lleva a la conclusión de que la pérdida de presión es de la forma

$$\Delta p_f = \frac{\rho LV^2}{a} f(R/a, Rg/a, Vm/V, wa^2/v, Vm^2/ga, aVm/v), \quad (3.1b)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática del fluido.

Las razones por las cuales el haber escogido así a los parámetros nos parece lo más adecuado son las siguientes:

- \* Sólo se tiene un parámetro que depende del tiempo, lo cual facilita el diseño de experimentos para encontrar la relación  $f$  buscada.
- \* Se tiene que la  $\Delta p_f$  va, en principio, con una dependencia en  $V^2$  (hasta no encontrar influencia importante en el término  $Vm/V$ ), que es lo que nos esperamos, dado que experimentos con flujos oscilantes parecen mostrar que es una buena aproximación [13] y que los modelos más comunes usan esa dependencia. Carsten [15] usa este modelo con un factor de fricción igual a 10 veces el factor correspondiente para flujo unidireccional (ver sección 2.3 para los valores de dicho factor en el caso de flujos permanentes).
- \* Reconocemos a dos números de Reynolds ( $Rm = wa^2/\nu$  y  $Re = aVm/\nu$ ) y a un número de Froude ( $F = Vm^2/ga$ ).

### **3. Diseño Experimental**

El diseño que se propone es un tubo en U dentro del cual hay una columna de agua de longitud  $L$ . Los valores de los números de Reynolds para el dispositivo de dimensiones oceánicas del que se habló en la introducción son aproximadamente  $Re \approx 1 \times 10^6$  y  $Rm \approx 1.5 \times 10^5$ , esto corresponde a  $H \approx 1.5m$ ,  $w \approx 0.63$  rad/s (que corresponde a un periodo en las olas promedio de 10s),  $Vm \approx 0.9$  m/s y  $a \approx 0.5m$ . Si la columna de fluido dentro del tubo en U se pone a oscilar únicamente por gravedad, la frecuencia de oscilación correspondiente está dada por

$$w = \sqrt{\frac{2g}{L}}. \quad (3.2)$$

Si el tubo en U se quiere construir de dimensiones tales que quepa en el laboratorio, entonces la longitud de la columna de fluido debe estar entre 1 y 3 m. Con esa longitud se obtienen frecuencias entre 2.5 y 4.4 rad/s. Si el radio del tubo en U está entre los 3 y 10 cm y si se logra obtener una amplitud de movimiento máxima de unos 40 cm, entonces los números de Reynolds que se pueden obtener de esta manera están entre  $Re \in (1 \times 10^3, 2 \times 10^5)$  y  $Rm \in (2 \times 10^3, 4 \times 10^4)$ . Es decir, nos falta un orden de magnitud para alcanzar los Reynolds de dimensiones oceánicas. Con el fin de obtener frecuencias más altas y cubrir un rango un poco más amplio en los valores de los números de Reynolds del experimento, se decidió colocar una cámara de compresión en los dos extremos de la U (figura 3.1).

La cámara de compresión funciona de la siguiente manera: cuando la columna de agua se encuentra en la posición de equilibrio, tenemos un volumen  $V_0$  de aire dentro de la cámara y una presión  $P_0$  igual a la presión atmosférica. Cuando la columna de fluido se mueve y alcanza una altura  $x$  desde su posición de equilibrio, va a tener lugar una compresión, pues el volumen de aire dentro de la cámara cambia de  $V_0$  a  $V$ , con  $V = V_0 \mp Ax$  (donde  $A$  es el área de la sección transversal del tubo en U y el signo depende de si el volumen dentro de la cámara disminuye (-) o aumenta (+) conforme  $x$  aumenta), y la presión cambiará a un valor  $P$ . Si suponemos que dicha compresión es adiabática, entonces tenemos que:  $PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$  ( $\gamma$ - factor de compresibilidad del aire) y así obtenemos al valor de la presión como función de la posición de la columna de agua, i.e.,

$$P(x) = P_0 \left( \frac{V(x)}{V_0} \right)^{-\gamma} = P_0 \left( 1 \mp \frac{Ax}{V_0} \right)^{-\gamma}. \quad (3.3)$$

Así pues, si,  $V_{01}$  y  $V_{02}$  son los volúmenes de aire correspondientes a la cámara 1 y 2 cuando la columna de agua está en equilibrio, tenemos que la diferencia de presión entre las dos superficies libres de la columna de agua es

$$P_B - P_A = P_0 \left[ \left( 1 - \frac{Ax}{V_{a1}} \right)^{-\gamma} - \left( 1 + \frac{Ax}{V_{a2}} \right)^{-\gamma} \right]. \quad (3.3b)$$

Con este diseño, podemos obtener a la ecuación que modela el movimiento de la columna de fluido, aplicando la ecuación de Bernoulli y agregando el término de fricción (ver ecuación 1.10d y sección 2.2 del capítulo 1):

$$\begin{aligned} L \frac{\partial u}{\partial t} + \left[ \frac{P}{\rho} \right]_{P(A)}^{P(B)} + \int_{-x}^x g ds &= \frac{\Delta p_f}{\rho}; \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{P_0}{\rho L} \left[ \left( 1 - \frac{Ax}{V_{a1}} \right)^{-\gamma} - \left( 1 + \frac{Ax}{V_{a2}} \right)^{-\gamma} \right] + \frac{2g}{L} x &= f \frac{V^2}{D}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La frecuencia con la que va a oscilar la columna de agua se puede obtener de manera aproximada para desplazamientos pequeños sin fricción. Para ese caso:

$$1 - \left( \frac{Ax}{V_{a1}} \right)^{-\gamma} - \left( 1 + \left( \frac{Ax}{V_{a2}} \right)^{-\gamma} \right) \cong \gamma Ax \left( \frac{1}{V_{a1}} + \frac{1}{V_{a2}} \right)$$

y la ecuación (3.4) queda:

$$\ddot{x} + w^2 x = 0,$$

$$\text{donde } w^2 = \left( \frac{2g}{L} \left( 1 + \frac{P_0 \gamma A}{2g\rho} \left[ \frac{1}{V_{a1}} + \frac{1}{V_{a2}} \right] \right) \right), \quad (3.5)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia  $w$ .

La fórmula anterior permite calcular a la frecuencia para un experimento dado y el rango de frecuencias se puede ampliar si se construyen las cámaras de compresión de

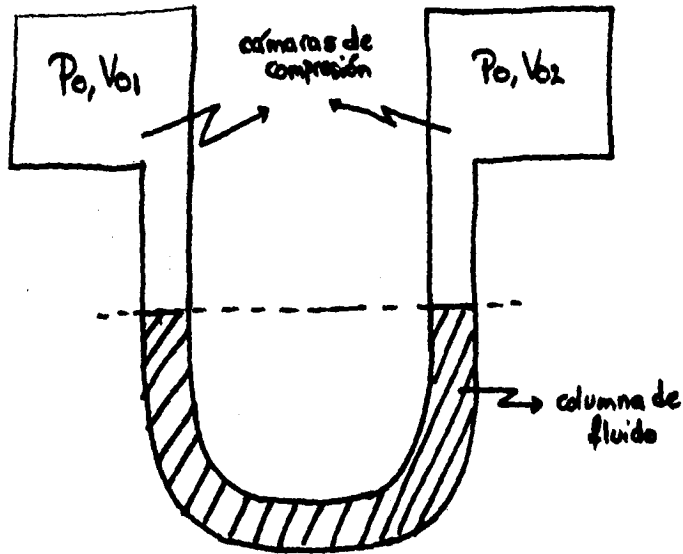


Figura 3.1. Tubo de U con dos cámaras de compresión

manera que se pueda variar fácilmente al volumen de aire contenido dentro de ellas, obteniéndose así un número de Reynolds  $R_m$  mayor al que se obtiene por acción única de la gravedad. Dado que las amplitudes de movimiento de la columna de fluido serán cada vez menores conforme se tengan frecuencias cada vez más altas, el valor de  $Re$  no se podrá aumentar de esta manera.

Considerando todo lo anterior, se decidió construir un tubo en U de unos 4m de longitud, cuyo diámetro se variaría en cada experimento entre 3cm y 10cm y cuya curvatura también se variaría de experimento en experimento, teniendo como radio máximo 60 cm. Las cámaras de compresión se pensaron hacer con tubos cilíndricos de acrílico de 95 cm de longitud, 14.5 cm de diámetro interior y 0.5 mm de espesor (pues se contaba ya con tubos de acrílico de ese tamaño).

Para obtener las medidas de la posición de la superficie libre de la columna de agua, se utiliza un sensor electrónico de alturas, el cual consiste de un capacitor hecho con un cable forrado doblado y otro cable sin aislante que hace el papel de tierra, colocados en la pared interior del tubo. Con un circuito electrónico se mide el voltaje del condensador (cuya capacitancia variará con el nivel del agua que hace el papel de dieléctrico) y se amplifica dicha señal para mayor precisión en las medidas. Mediante una calibración se puede obtener la relación entre el voltaje del capacitor y la altura de la superficie libre de la columna de agua.

## 4. Construcción

### 4.1. Primeros dispositivos

#### 4.1.1. Tubos de acrílico

El primer dispositivo se pensó construir con tubos de acrílico, usando 2 tubos para las partes rectas y uno doblado a manera de un semicírculo con el radio de curvatura deseado. Cada cámara de compresión consistiría de un tubo de acrílico de 14.5 cm de diámetro (mayor al del tubo en U), sellado en ambos extremos, dentro del cual se colocaría la parte recta de la U. Todo el dispositivo se montaría sobre una tabla de triplay, colgada sobre un eje en la pared del laboratorio. Pensamos hacer experimentos con tres tubos en U, de 5.1, 6.4 y 8.9 cm de diámetro interior. La longitud de los tubos de acrílico que se consiguieron fue de 1.80 m, así que se pensó usar un tubo partido a la mitad para las partes rectas, y uno entero para la parte curva.

Para variar el volumen de aire dentro de las cámaras de compresión, se pensó introducir agua en el espacio entre el tubo de la cámara y el tubo en U, a través de una manguera colocada en la parte inferior de la cámara, de manera que el nivel del agua se pudiera variar a placer (figura 3.2).

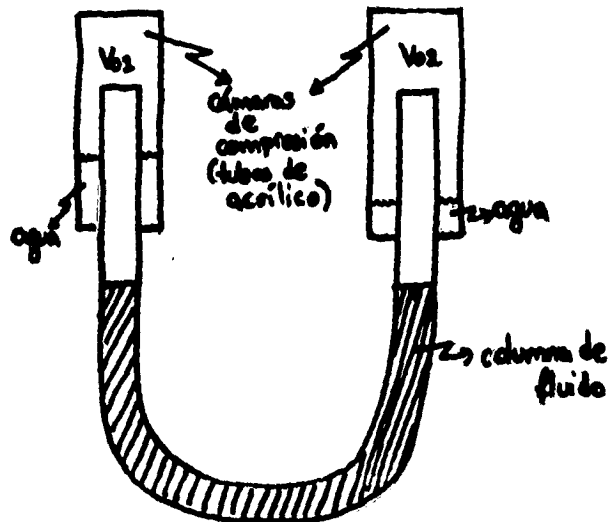


Figura 3.2. Cámaras de compresión hechas con tubos de acrílico

Con estas ideas, se prosiguió a construir el dispositivo.

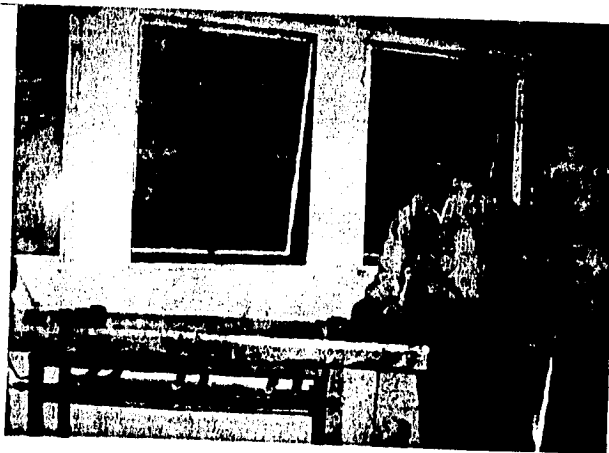
**Cámaras de compresión.** Las cámaras de compresión se taparon con láminas de acrílico del mismo espesor, sellandolas con silicón. A una de las tapas se le hizo un orificio del tamaño del diámetro exterior del tubo en U con el cual íbamos a experimentar primero.

**Doblado de los tubos.** Este fue el principal problema al que nos enfrentamos. Experiencias pasadas [13] mostraban que es posible obtener cierta curvatura en un tubo de acrílico si éste se llena de arena fina y se calienta lo suficiente, pues una vez caliente, resulta posible doblarlo con las propias manos. Para esos experimentos se dobló un tubo de 5.6 cm de diámetro y 50 cm de largo, llenándolo de arena fina para construcción y calentándolo a baño maría con vapor de agua dentro de un horno fabricado con lámina de hojalata.

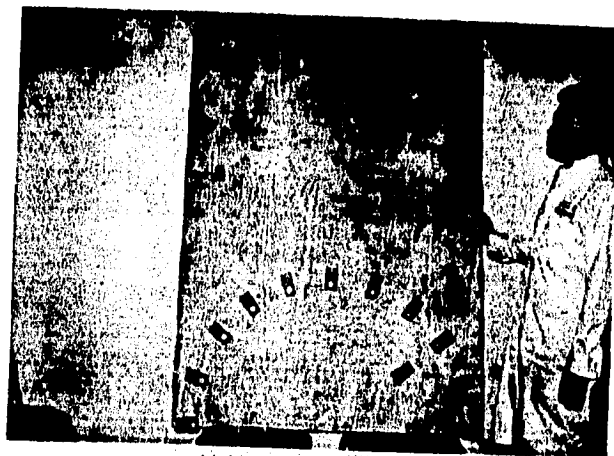
Con esta misma idea, se hizo un horno más largo, para que cupieran los tubos que se querían doblar. Además se construyó un molde donde colocar al tubo una vez caliente y darle la forma de semicírculo deseada. El molde consistía de veinte piezas de madera como la que se muestra en la figura (figura 3.3). Se hicieron tres juegos, cada uno con el orificio del tamaño de uno de los diámetros de tubo que se usarían. Estas piezas se colocaban en una tabla de triplay, de manera que formaran el semicírculo con el radio deseado (figura 3.4). La forma de las piezas junto con la arena dentro del tubo tienen como función el mantener la forma de la sección transversal de éste durante el doblado. La arena que se usó para mantener la forma del tubo fue arena sílica malla 30/40, esto porque la forma y tamaño de esta arena permite que quede bien compactada.

Una vez que se tuvo esto, se prosiguió a calentar al tubo de 5.1 cm de diámetro interior para doblarlo con el radio de curvatura más grande que se iba a usar: 60 cm. Se dejó al tubo calentarse unos 15-20 min. dentro del horno y luego se intentó doblarlo dentro del molde. Esto se logró sólo en un pequeño pedazo, pero en la mayor parte del tubo el acrílico se arrugó y deformó, perdiéndose la forma de la sección transversal (figura 3.5). La causa que primero se nos ocurrió fue que faltaba calentar al tubo mucho más de lo que se había calentado. Consultando a las personas que trabajan en el taller de plásticos en la facultad de Diseño Industrial, se nos informó que el método usado por nosotros era prácticamente el mismo que el que ellos manejan y nos mostraron una tabla en la que se indica que el acrílico se tiene que calentar entre 140 y 160°C para ser moldeado, por lo que decidimos calentar al tubo a esa temperatura y hacer un intento más. También decidimos calentar al tubo por partes, e irlo doblando por pedazos. Para ello construimos otro horno con una lata de hojalata de sección cuadrada de 30 cm de lado y 40 cm de longitud. A ambos extremos de la lata hicimos un orificio del tamaño del diámetro del tubo a doblar y además colocamos una base (también de hojalata) para que el tubo descansara sobre ella y no se deformase por el peso de la arena cuando estuviera caliente. Luego hicimos varios experimentos con una mezcla de glicerina y agua, para ver qué proporción de glicerina se debía tener para que ésta hirviera más o menos a unos 140 grados centígrados. Usando esa proporción, decidimos desdoblar el tubo que doblamos sin éxito la primera vez. Así pues, fuimos introduciendo y calentando al tubo empezando por uno de sus extremos, con la idea de enderezarlo lo mejor que pudieramos con las manos y el molde que habíamos usado para doblarlo. Nos sorprendimos al notar que no era necesario hacer ningún esfuerzo mecánico sobre el tubo para enderezarlo, pues lo que observamos es que bastaba con calentar cierta parte del tubo y ésta solita recuperaba su forma inicial, aún en las partes más arrugadas y deformes. Esto es, el acrílico de los tubos tiene memoria y tiende a regresar a la forma original que tenía salido de fábrica. Una vez que el tubo recuperó su forma inicial,

proseguimos a doblarlo de nuevo, con la esperanza de que al calentarlo a la temperatura con la que se moldea el acrílico obtuviéramos el resultado deseado. Empezamos por calentar una parte alrededor de la mitad del tubo. Lo dejamos unos 10 minutos a 140 grados centígrados y proseguimos a doblar dicha parte, la cual salió bastante bien, aunque



Horno para el doblado de los tubos de acrílico



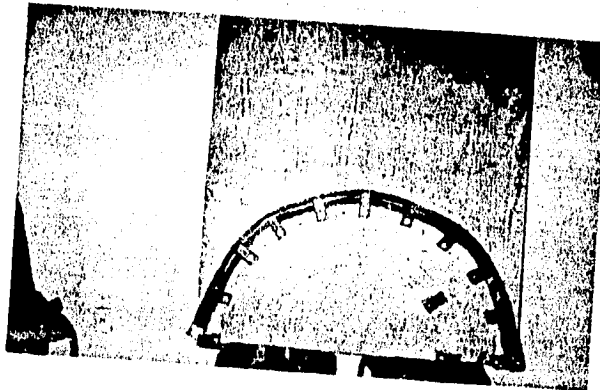
Molde para doblar los tubos

Figura 3.4

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA



Figura 3.5 Se muestra el proceso de  
doblado del tubo de acrílico, y el  
resultado obtenido



observamos cierta deformación en la sección transversal del tubo. Al calentar e intentar doblar la siguiente parte (adyacente a la que ya estaba doblada), nos topamos con el mismo problema que cuando intentamos doblar al tubo entero; el acrílico se arrugó en la parte interior del semicírculo y, al estirarse en la parte exterior, dió lugar a un apachurramiento de la sección transversal. Esto sucedió a pesar de que el acrílico se encontraba bastante moldeable a la temperatura que lo sacamos del horno. En pocas palabras, no logramos mejorar el doblado del tubo como habíamos pensado.

Con esta experiencia nos convencimos de lo siguiente:

- Es posible doblar tubos de acrílico con éxito (i.e., sin deformar su sección transversal) siempre y cuando se quiera un arco que no exceda cierto ángulo máximo y cuya curvatura sea bastante grande (como el caso del tubo doblado por Czitrom, et.al.[13]).
- Para obtener un tubo de acrílico doblado más que el ángulo máximo mencionado arriba parece necesario que se fabrique así desde un principio, y no intentar doblar un tubo que se hizo recto en la fábrica, pues al exceder dicho ángulo, el acrílico en la parte exterior se va a estirar demasiado mientras que el de la parte interior se va a contraer de más, dando como consecuencia que la forma de la sección transversal se pierda y que el acrílico se arrugue. Viene siendo equivalente a tratar de curvar un tubo hecho con una hoja de papel...

Czitrom, et al. [13] ya habían buscado una fábrica que doblara o hiciera unos tubos con la curvatura deseada para esos experimentos y no se había encontrado una que lo hiciera por menudeo y en corto tiempo, era indispensable buscar otra manera de resolver el problema.

#### 4.1.2. Tubo de manguera

Encontramos unas mangueras hechas de hule con una espiral de PVC, que se utilizan para aire acondicionado principalmente y que tienen la ventaja de que las hay en varios diámetros, y que su forma de oruga las hace muy flexibles, de manera que es posible doblarlas sin perder la forma de la sección transversal. La desventajas que ofrecen son:

1. no son completamente lisas en su interior y esta rugosidad se hace mayor cuando se doblan, pero consideramos que el tamaño de dichas rugosidades no va a influir demasiado en el comportamiento del flujo.
2. no son transparentes, lo cual no permite la visualización directa del flujo.

El nuevo dispositivo tendría una única diferencia con el anterior: la U se haría con manguera. Las cámaras de compresión serían las mismas que las del dispositivo anterior.

Así pues, se compró una manguera de 5cm de diámetro interior y 4 m de longitud. Para darle la forma de U se utilizaron a las piezas de madera que se fabricaron para doblar a los tubos de acrílico como sostén, colocándolas sobre una tabla de triplay (187cmx122cm) con la forma deseada. Luego se colocaron las cámaras de compresión como se pensaba hacer con los tubos de acrílico. Para poder hacer la calibración del sensor de alturas, se colocó un tubo de acrílico (0.9 cm de diámetro y 1m de longitud), paralelo al brazo de la U en el cual se tenía al sensor de alturas y conectado a ésta por medio de una manguera (figura 3.6).



El problema que se nos presentó en este dispositivo fue que no logramos sellar la cámara de compresión al tubo en U. Se intentó con silicón, y después con varias capas de pegamento para PVC y silicón, y en ambos casos se encontraron fugas al llenar las cámaras de compresión con agua, las cuales no eran nada pequeñas, por cierto. Fue entonces cuando surgió la última idea.

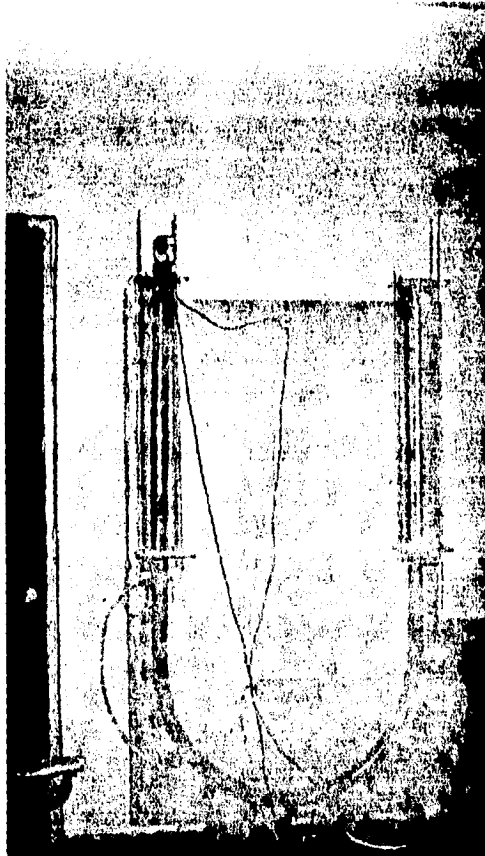


Figura 3.6. Tubo de manguera con cámaras de compresión de acrílico.

#### 4.2. *Dispositivo final*

Para resolver el problema anterior, se decidió utilizar a la misma manguera como cámara de compresión. Esto es, se prolongó la manguera en ambos extremos de la U, de manera que se tuviera el mismo volumen de aire que el máximo que se podía obtener con las cámaras de compresión anteriores y se tapó a ambos extremos con tapones de hule bien

ajustados y amarrados a la manguera. Para variar el volúmen de aire dentro de las cámaras al realizarse los experimentos, se corta (o se pega con duct tape, según sea el caso) el pedazo de manguera con el volúmen de aire que se desea quitar (o aumentar) (figura 3.7).

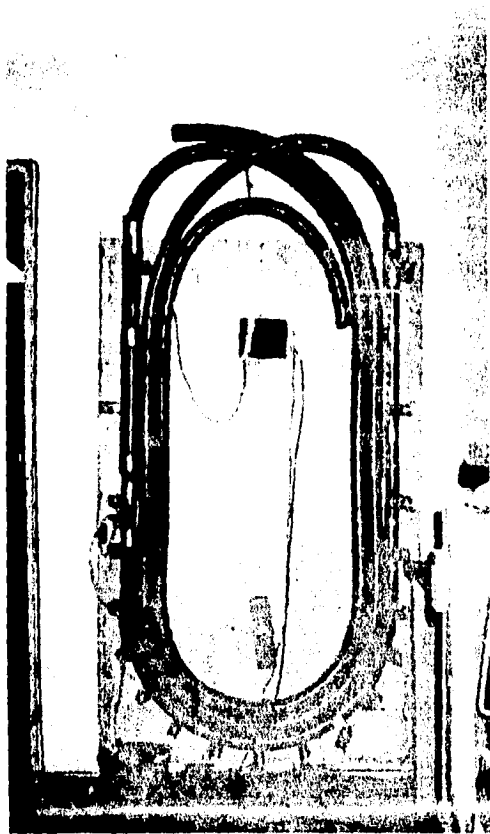


Figura 3.7a. Dispositivo final.

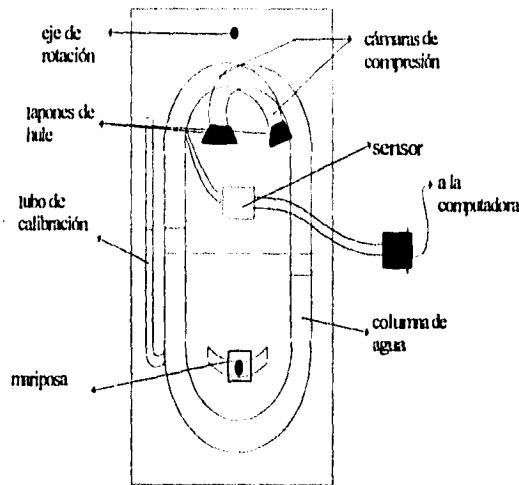


Figura 3.7b. Esquema del dispositivo final.

Para variar las rugosidades de las paredes del tubo, se piensa utilizar arena sílica de distintas granulometrías (mallas 8/14, 20/30 y 120/130) pegada a la pared interna de éste. Para ello se corta la manguera a lo largo en dos mitades, a cada una se le ponen varias capas de película separadora y se le esparce la arena sílica. Encima se ponen varias capas de barniz y cuando está seco todo, se vuelve a unir la manguera con duct-tape. La película separadora sirve para poder quitar la capa de arena de manera relativamente fácil, para así poder poner una capa de una granulometría distinta una vez que se haya terminado de experimentar con la granulometría anterior. Esta idea surgió para el primer dispositivo y en los tubos de acrílico funciona muy bien. No se han hecho pruebas todavía para la manguera de hule.

Se decidió dejar la realización de los experimentos y el análisis de los resultados experimentales para otro trabajo. A continuación se da una explicación de cómo se planean realizar los experimentos, del software que se utilizará y de cómo se van a analizar los resultados.

## **5. Realización de los experimentos y análisis de los resultados**

Una vez montado el tubo de radio, curvatura, compresión y longitud de la columna de agua deseada, se inicia el movimiento de ésta última moviendo a la tabla sobre su eje con un movimiento oscilante con la frecuencia natural de oscilación del sistema. Una vez que se obtiene la altura inicial deseada, se fija la tabla con ayuda de la mariposa y se empiezan a recopilar datos en la computadora.

Para automatizar el proceso de obtener la frecuencia natural de oscilación y el valor de los parámetros adimensionales para un experimento dado, se realizó un programa en Turbo Pascal 7.0 para calcular dichos valores en términos de la geometría del dispositivo experimental.

La tarjeta digitalizadora que se piensa utilizar es una interfase de medidas (16 canales) y control con una resolución de 13 bits, y el software para la recopilación y análisis de datos es el Datacan V de Sable Systems. La computadora que servirá para hacer este trabajo es una PC AT286, con 2Mb de memoria RAM. Con el Datacan V se van a recopilar los datos, quitar el ruido de éstos y realizar todos los cálculos estadísticos.

El valor del factor de fricción se piensa obtener comparando los datos con un modelo numérico de la ecuación que gobierna el movimiento de la columna de fluido (3.4), el cual se programó en Turbo Pascal 7.0. La manera como trabaja este programa es la siguiente; el programa recupera los datos desde un archivo de texto (obtenido por medio de Datacan V) y los grafica junto con la solución numérica para el modelo, en la cual se dan varios valores para el factor de fricción, hasta obtener el que dé la mejor aproximación. De esta manera, se obtiene un valor del factor de fricción para cada experimento. Estos valores se grafican posteriormente contra los distintos parámetros adimensionales para obtener una relación entre éstos y la pérdida de presión.

Los valores de las cantidades físicas involucradas que se piensan utilizar son:  $a \in [2.5\text{cm}, 7\text{cm}]$ ,  $L \in [1\text{m}, 2.6\text{m}]$ ,  $H \in (0\text{cm}, 45\text{cm}]$ ,  $w \in [2.7\text{rad/s}, 24\text{rad/s}]$ ,  $R_g \in [0.125\text{mm}, 1\text{mm}]$  y, como solamente pensamos utilizar agua,  $v = 1\text{mm}^2/\text{s}$ , por lo que los valores que se piensan cubrir de los principales parámetros adimensionales son:  $F \in [0.2, 18]$ ,  $Re \in [7 \times 10^3, 1.7 \times 10^5]$  y  $Rm \in (1 \times 10^3, 1.2 \times 10^5]$ .

Los valores correspondientes al sistema de bombeo por resonancia mencionado en la introducción [14] son:

$F \approx 0.2$ ,  $Re \approx 7.5 \times 10^4$  y  $Rm \approx 1.5 \times 10^5$ , por lo que los experimentos pretenden incluir esos valores, o por lo menos valores cercanos a ellos.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se llegó a los siguientes resultados de interés:

Para el caso laminar:

- Se obtuvo la solución analítica para el flujo laminar oscilante dentro de un cilindro recto e infinito, producido por un gradiente de presión que varía armónicamente con el tiempo (ecuación 2.6).
- El comportamiento de la solución anterior depende de manera importante del número de Reynolds:  $Rm = \omega a^2 / \nu$ , donde  $a$  es el radio del cilindro,  $\omega$  la frecuencia angular de oscilación y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido (figuras 2 a 7).
- Para  $Rm > 1000$  se tiene que:
  - La velocidad del fluido es la misma en todas partes excepto en una región muy cercana a la pared, i.e., el fluido se mueve prácticamente como cuerpo rígido.
  - El flujo está desfasado del gradiente de presión en  $\pi/2$ .
- Se calculó la velocidad promedio, la pérdida de presión y la energía disipada por unidad de tiempo, en función de  $Rm$ , promediando a ésta última en un periodo de oscilación. (ecuaciones 2.10, 2.13 y 2.15 respectivamente).
- Para  $Rm > 1000$  se obtuvo una relación entre la pérdida de presión y la velocidad promedio (ecuación 2.16), cuyas constantes se pueden determinar a través de las funciones (2.10) y (2.13) y graficando a la pérdida de presión contra la velocidad promedio. Esta relación en general no es lineal, lo cual da un resultado distinto al obtenido para flujos laminares permanentes dentro de ductos (ver sección 2.3 del capítulo 1).

Para el caso experimental:

- Se presenta una manera de obtener la pérdida de presión en un flujo oscilante real, mediante experimentos con tubos en U, en los que una columna de fluido se pone a oscilar con ayuda de la gravedad y de unas cámaras de compresión de aire.
- Por análisis dimensional, se obtienen los parámetros adimensionales que juegan un papel importante en el experimento (ecuación 3.1b).
- Se construyó un dispositivo experimental en el cual se medirán los desplazamientos de la superficie libre de la columna de fluido contenida en el tubo en U mediante un sensor de alturas.

- Se obtuvo la ecuación que modela al movimiento de la columna de fluido (ecuación 3.4).
- Se explica cómo se recopilarán y analizarán los datos obtenidos por el sensor y se muestra el programa con el cual se obtendrá el valor del factor de fricción para cada experimento.

Se deja para un trabajo posterior la realización de los experimentos y el análisis de datos correspondiente.

## APENDICE

### Funciones de Kelvin

Series Ascendentes ( $v, x$  reales,  $x \geq 0$ ,  $n$  natural) [1.9]:

$$ber_v(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{\left(\frac{3}{4}v + \frac{1}{2}k\right)\pi\right\}}{k! \Gamma(v+k+1)} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k,$$

$$bei_v(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left\{\left(\frac{3}{4}v + \frac{1}{2}k\right)\pi\right\}}{k! \Gamma(v+k+1)} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k,$$

$$ker(x) = -\left\{\log\left(\frac{1}{2}x\right) + \gamma\right\} ber(x) + \frac{\pi}{4} bei(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x\right)^{4k}}{(2k)!^2} \phi(2k),$$

$$kei(x) = -\left\{\log\left(\frac{1}{2}x\right) + \gamma\right\} bei(x) - \frac{\pi}{4} ber(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x\right)^{4k+2}}{(2k+1)!^2} \phi(2k+1),$$

donde  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right\} = 0.5772\dots$  es la constante de Euler,

$$y \quad \phi(k) = \sum_{s=1}^k \frac{1}{s}.$$

Expansiones Asintóticas de  $bei(x)$  y  $ber(x)$  para  $v$  fijo y  $x$  grande [1]:

$$ber_v x \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} \left\{ e^{x/\sqrt{2}} \cos \alpha - e^{-x/\sqrt{2}} \sin \beta \right\},$$

$$bei_v x \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} \left\{ e^{x/\sqrt{2}} \sin \alpha + e^{-x/\sqrt{2}} \cos \beta \right\},$$

donde

$$= (x/\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{8}\right)\pi \quad y \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{4}.$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1]. Abramowitz, M. & Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions*, Cover Public., EUA, 1972.
- [2]. Bachelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [3]. Currie, I.G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, Mc Graw Hill, EUA, 1993.
- [4]. Domínguez S., F.J., *Hidráulica*, Ed. Universitaria, Chile, 1959.
- [5]. Landau, L.D. & Lifschitz, E.M., *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Londres, 1991.
- [6]. Massey, B., *Mecánica de Fluidos*, CECSA, México, 1983.
- [7]. Russel, G., *Hidráulica*, CECSA, México, 1968.
- [8]. Resnick, R. y Halliday, D., *Física Vol. I*. Cía. Editorial Continental, México, 1989.
- [9]. Sheddon, I.N., *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Interscience Publishers Inc., Edinburgo, 1966.
- [10]. Sotelo Avila, G., *Hidráulica General*. Vol. I. Fundamentos. Limusa, México, 1974.
- [11]. Streeter, L., *Fluid Mechanics*, Mc Graw Hill, EUA, 1958.
- [12]. Zemansky, M. & *Heat and Thermodynamics*, McGraw-Hill, EUA, 1981.
- [13]. Czitrom, S.P.R., Peralta y Fabi, R., Prado, E., Ramírez, R. y Godoy, R., *Sea-water Pumping by Resonance II*, Proceedings of the Second European Wave Power Conference, Lisboa, 1996.
- [14]. Czitrom, S.P.R., *Sea-water Pumping by Resonance II*, Proceedings of the Second European Wave Power Conference, Lisboa, 1996.
- [15]. Carsten, K. 1993. Comunicación personal.
- [16]. Irving, J. & Mullineux, N. *Mathematics in Physics and Engineering*, Academic Press Inc., EUA, 1959.