O1161
4
2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS Y DISEÑO DE LOSAS SOBRE CIMENTACION ELASTICA

T R A B A J O
Que para obtener el Grado de
MAESTRO EN INGENIERIA
(ESTRUCTURAS)
p r e s e n t a

JUAN ROMAN COYOC MANZANILLA

Septiembre de 1995

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS Y DISEÑO DE LOSAS
SOBRE
CIMENTACIÓN ELÁSTICA

TRABAJO QUE PARA OBTENER
EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA
(ESTRUCTURAS)

P R E S E N T A:

JUAN ROMÁN COYOC MANZANILLA

SEPTIEMBRE DE 1995

DEDICO ESTE TRABAJO:

A mi hija Johana Gabriela, por ser un motivo de ternura que me impulsa a superarme y por robarle parte de mi presencia en sus primeros meses de vida.

A mi esposa Yolanda, por su apoyo tan valioso a lo largo de la maestría, porque en su admiración y confianza encontré la fuerza para salir adelante.

A mis padres, quienes me han visto crecer y han puesto su empeño en mi formación, quienes ven satisfactoriamente que alcanzo una más de mis metas.

I N D I C E

Página

Capítulo I
INTRODUCCIÓN 1

Capítulo II
ANÁLISIS EN FLEXIÓN 2

Capítulo III
REPRESENTACIÓN DE PROPIEDADES DEL SUELO 16

Capítulo IV
LOSAS CON INTERACCIÓN CON EL SUELO 22

Capítulo V
OBTENCIÓN DE ELEMENTOS MECÁNICOS 37

Capítulo VI
TAMAÑO RECOMENDABLE DE LOSAS DE PISO 56

Capítulo VII
ARMADOS DE REFUERZO RECOMENDABLES 61

Capítulo VIII
TIPOS DE JUNTAS COMUNES ENTRE LOSAS 64

Capítulo IX
RECOMENDACIONES PARA DISEÑO 67

Capítulo X
COMENTARIOS FINALES 68

Capítulo XI
REFERENCIAS 69

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Las losas de concreto reforzado apoyadas sobre el terreno son elementos estructurales muy comunes; sin embargo, la gran mayoría presenta agrietamientos excesivos bajo condiciones de servicio.
Por lo anterior, es evidente la necesidad de establecer un método de análisis racional que permita incorporar las características de deformación intrínsecas del suelo (asentamientos) y considerar la rigidez propia de la cimentación. Para tal efecto se empleará la teoría convencional de placas delgadas[1] en presencia de una base elástica.
La interacción suelo - estructura se establece con base en la igualdad de desplazamientos entre suelo y estructura. Esta condición se logra con la ayuda de la solución de Newmark para el cálculo de desplazamientos verticales en el suelo y de expresar la ecuación diferencial de equilibrio de placas en flexión, mediante el desarrollo en diferencias finitas. Así se obtienen los desplazamientos de la placa y la distribución de momentos flexionantes y fuerzas cortantes en toda la placa, lo cual resulta indispensable en el diseño de losas de concreto reforzado; al tomar como base estos resultados se efectúa la distribución del acero de refuerzo, mediante los siguientes procedimientos:

a).- Esfuerzos de trabajo
b).- Método plástico o de resistencia última.

Con los criterios ya mencionados, se analizan en este trabajo losas cuadradas con bordes libres de 3, 4.5 y 6m, con peraltes de 15, 22.5 y 30 cm respectivamente, apoyadas sobre diferentes suelos, se presentan los resultados obtenidos y las recomendaciones pertinentes.

Capítulo II

ANÁLISIS EN FLEXIÓN

Para el estudio analítico se recurrió a la teoría de placas en flexión, donde se establecen las siguientes limitaciones e hipótesis:

1.- La forma de la placa es un rectángulo.
2.- El espesor de la placa es constante y pequeño comparado con sus otras dimensiones.
3.- El material de la placa es homogéneo, isotrópico y continuo.
4.- El material de la placa es elástico y obedece a la Ley de Hooke.
5.- Los esfuerzos en la placa permanecen abajo del límite de proporcionalidad.
6.- Las deformaciones son pequeñas y no alteran la geometría de la placa (Teoría de deformaciones pequeñas).
7.- Se acepta la existencia de una superficie neutra a la mitad de la altura del peralte de la placa.
8.- Las normales a la superficie media antes de la deformación, permanecen normales a la superficie después de la deformación.
9.- La superficie neutra de la placa es horizontal y permanece sin esfuerzos durante la deformación.
10.- Las cargas son ortogonales a la superficie neutra.

Definición de placa.

Se considera que el cuerpo elástico mostrado en la Fig. 2.1 recibe el nombre de placa cuando se cumple lo siguiente:

$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \;, \frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ tal que $h << a$ y $h << b$.

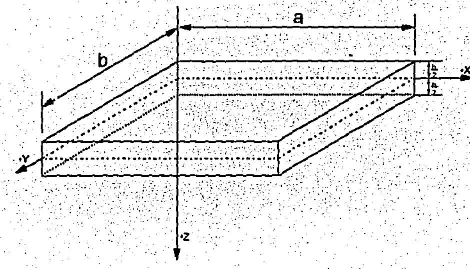


Fig. 2-1 Sistema de coordenadas y dimensiones de una placa rectangular.

Ecuación diferencial para placas en flexión.

Se considera una placa en flexión debida a una carga distribuida que actúa perpendicular a la superficie neutra de la placa. Bajo esta carga la superficie neutra se desplaza y adquiere la forma de una superficie curva (superficie de desplazamiento) definida por la ecuación:

$$w = f(x, y) \qquad (2.1)$$

Donde:

w = Desplazamiento vertical de la superficie media.
x,y = Coordenadas de un punto de la superficie neutra.

Se supone que la superficie neutra es horizontal y que contiene a los ejes coordenados X y Y, con el eje Z proyectado verticalmente hacia abajo (Fig. 2-1). Debido a la acción de la carga q, se tendrán en las caras de un elemento diferencial, momentos flexionantes, momentos torsionantes y fuerzas cortantes (Fig. 2-2).

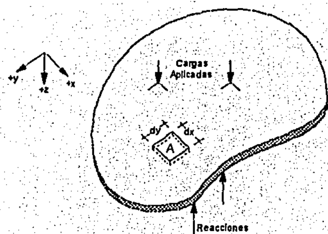


Fig. 2-2a

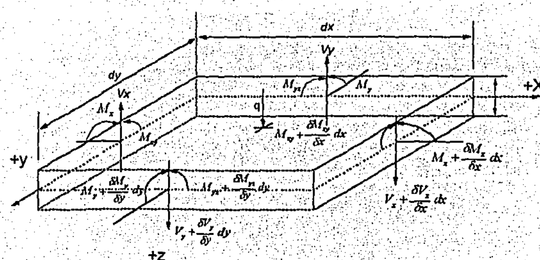


Fig. 2-2b

Fig. 2-2. a) Placa en flexión.

b) Fuerzas que actúan sobre un elemento diferencial de placa. Esta figura también indica las direcciones positivas de las resultantes de esfuerzos.

Para mayor claridad se han separado los elementos mecánicos en dos grupos: Fuerzas de cortante (Fig. 2-3a) y momentos de flexión y torsión (Fig. 2-3b).

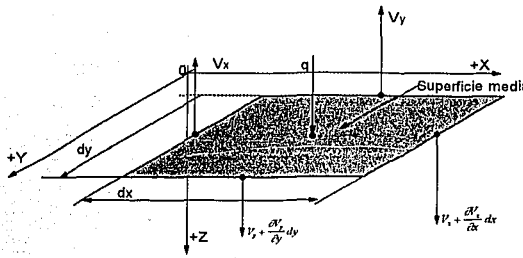


Fig. 2-3a

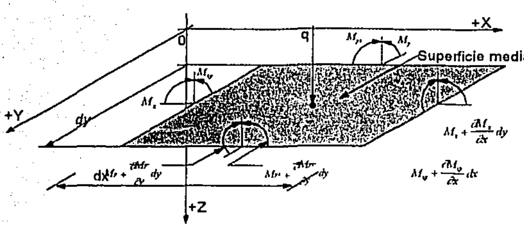


Fig. 2-3b

Fig. 2-3. Fuerzas que actúan sobre un elemento diferencial de placa.
a) Fuerzas de superficie y cortantes.
b) Momento de flexión y torsión.

La estática proporciona tres ecuaciones, para lograr el equilibrio del elemento diferencial:

1.- $\sum Fz = 0$
2.- $\sum Mx = 0$
3.- $\sum My = 0$

Si q es la intensidad de carga distribuida sobre la superficie de la losa; entonces $q\ dx\ dy$ será la carga que actúa sobre el diferencial de elemento.
De la primera condición y al considerar la carga distribuida, se tiene:

$\sum$ Fz = 0

$$-V_x d_y + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial_x} dx\right)dy - V_y dx + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy\right)dx + qdxdy = 0 \qquad (2.2)$$

al simplificar:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 \qquad (2.3)$$

De la segunda condición de equilibrio:

$\sum$ Mx = 0

$$\begin{aligned}&-\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right)dy + M_{xy}dy - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right)dx + M_y dx + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy\right)dxdy - \\ &-V_x dy \frac{dy}{2} + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx\right)dy \frac{dy}{2} = 0\end{aligned} \qquad (2.4)$$

al simplificar esta ecuación y despreciar los términos de orden superior, se llega a:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = V_y \qquad (2.5)$$

De manera análoga, al utilizar la tercera ecuación de equilibrio y por un procedimiento similar se obtiene:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}=V_x \qquad (2.6)$$

Al derivar las ecuaciones *(2.5)* y *(2.6)* con respecto a X y Y se obtienen:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial V_y}{\partial y}=\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2}$$

al sustituir estos resultados en la ecuación *(2.3)* y ya que $M_{xy}=M_{yx}$, para lograr la igualdad de esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx}, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-q \qquad (2.7)$$

al simplificar la ecuación *(2.7)* se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}=-q \qquad (2.8)$$

Esta igualdad es una ecuación de equilibrio y es independiente de la relación de Poisson o de que la placa sea isotrópica u ortotrópica.

Relación entre momentos y desplazamientos.

Para resolver el problema de *placas en flexión* se debe expresar la ecuación de equilibrio de fuerzas (Ecuación 2.8), en términos de los desplazamientos w. Las resultantes de esfuerzos (Fig. 2-4) se relacionan con los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} como sigue:

$$Mx=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x z\,dz \qquad (2.9.1)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \tag{2.9.2}$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \tag{2.9.3}$$

De las relaciones constitutivas de la teoría de la elasticidad, se establece la relación entre el esfuerzo y deformación para materiales linealmente elásticos,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \upsilon\sigma_y\right) \tag{2.10.1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \upsilon\sigma_x\right) \tag{2.10.2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\upsilon)}{E}\tau_{xy} \tag{2.10.3}$$

Los esfuerzos en función de las deformaciones resultan:

$$\sigma_x = \frac{\begin{Vmatrix} E\varepsilon_x & -\upsilon \\ E\varepsilon_y & 1 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 1 & -\upsilon \\ -\upsilon & 1 \end{Vmatrix}} = \frac{E}{\left(1-\upsilon^2\right)}\left(\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y\right) \tag{2.11.1}$$

$$\sigma_y = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & E\varepsilon_x \\ -\upsilon & E\varepsilon_y \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 1 & -\upsilon \\ -\upsilon & 1 \end{Vmatrix}} = \frac{E}{\left(1-\upsilon^2\right)}\left(\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_x\right) \tag{2.11.2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy} \tag{2.11.3}$$

A su vez, las deformaciones unitarias ε_x , ε_y y γ_{xy} se pueden escribir en función de los desplazamientos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.12.1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.12.2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.12.3}$$

Como la placa es delgada y las deformaciones por flexión pequeñas, se supone que las secciones transversales inicialmente planas permanecen planas y que la superficie media adopta una configuración deformada sin que cambien sus dimensiones. Aceptada esta última hipótesis y con la ayuda de la figura 2-5 se tiene:

$$u = -z\frac{\partial \omega}{\partial x} \tag{2.13.1}$$

$$v = -z\frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{2.13.2}$$

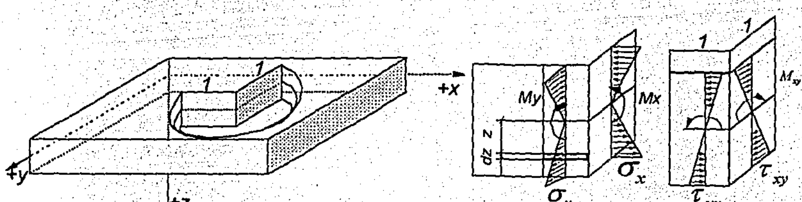


Fig. 2-4 Diagrama de esfuerzos y resultantes de esfuerzos por unidad de longitud en la sección de corte.

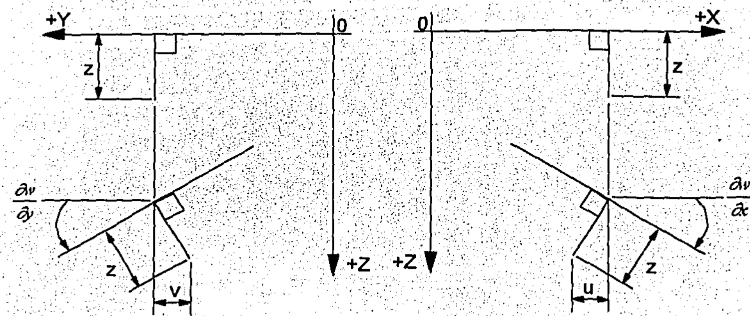


Fig. 2-5 Desplazamiento lineales u y v.

Las deformaciones lineales y angulares en función de los desplazamientos u y v se obtienen al sustituir las ecuaciones (2.13) en las ecuaciones (2.12):

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \qquad (2.14.1)$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \qquad (2.14.2)$$

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \qquad (2.14.3)$$

al sustituir en la ecuación 2.9.1 a σ_x por su valor dado por la ecuación 2.11.1 e introducir las ecuaciones 2.14.1 y 2.14.2, se llega a:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{\left(1-\upsilon^2\right)}\left(\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y\right) z dz$$

$$= \frac{E}{\left(1-\upsilon^2\right)}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y\right) z dz$$

$$= \frac{E}{(1-\upsilon^2)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-z\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \upsilon z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) z dz$$

$$= -\frac{E}{(1-\upsilon^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \upsilon \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \upsilon \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

por último,

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \upsilon \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \qquad (2.15.1)$$

Donde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$$

De manera análoga se obtiene:

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \upsilon \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \qquad (2.15.2)$$

La relación entre el momento de torsión y la torcedura se obtiene al sustituir en la ecuación 2.9.3 a τ_{xy} por su valor dado en la ecuación 2.11.3 y usar la ecuación 2.14.3, se tiene:

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1+\upsilon)} \gamma_{xy} z dz$$

$$= \frac{E}{2(1-\upsilon)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) z dz$$

$$= -\frac{E}{(1+\upsilon)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) z^2 dz$$

$$= -\frac{E}{1+\upsilon} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1+\upsilon)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1+\upsilon)}\frac{(1-\upsilon)}{(1-\upsilon)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}(1-\upsilon)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

Por último:

$$M_{xy} = -D(1-\upsilon)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \qquad (2.15.3)$$

El término $\partial^2\omega/\partial x\partial y$ representa la torcedura, es decir, el cambio de la pendiente en la dirección X según se avanza en la dirección Y.

Al diferenciar dos veces las ecuaciones *(2.15)* con respecto a X y Y se tiene:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -D\left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \upsilon\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2}\right) \qquad (2.16.1)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -D\left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \upsilon\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2}\right) \qquad (2.16.2)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -D(1-\upsilon)\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \qquad (2.16.3)$$

Al sustituir las ecuaciones *(2.16)* en la ecuación de equilibrio (*2.8*) se tiene:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \qquad (2.17)$$

Para simplificar la expresión se introduce el operador de Laplace en coordenadas rectangulares.

$$\nabla^2\nabla^2\omega = \nabla^4\omega = \frac{q}{D} \tag{2.18}$$

donde :

$$\nabla^2 ... = \frac{\partial^2 ...}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ...}{\partial y^2}$$, operador diferencial de Laplace.

La ecuación *2.17* permite el análisis general de placas delgadas, con cargas normales a su plano. El resultado de esta solución es la ecuación de la superficie curva definida por la ecuación *2.1*, además debe satisfacer las condiciones particulares de frontera establecidas en la placa.

Relación entre cortantes y desplazamiento.

al diferenciar la ecuación de momento de flexión y torsión de las ecuaciones 2.15 se tiene.

$$\frac{\partial Mx}{\partial x} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \upsilon\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right] \tag{2.19.1}$$

$$\frac{\partial My}{\partial y} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \upsilon\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right] \tag{2.19.2}$$

$$\frac{\partial Mxy}{\partial x} = -D(1-\upsilon)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \tag{2.19.3}$$

$$\frac{\partial Mxy}{\partial y} = -D(1-\upsilon)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \tag{2.19.4}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.19) en las ecuaciones (2.5) y (2.6), se obtienen las fuerzas cortantes:

$$Vx = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \tag{2.20.1}$$

$$Vy = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) \tag{2.20.2}$$

Condiciones de frontera.

Se establecen las condiciones de frontera para una placa rectangular, en la cual los ejes X y Y coinciden con los lados de la placa, como se indicó en la Fig. 2-1.

Borde empotrado.- El desplazamiento a lo largo de este borde es cero y el plano tangente a la superficie elástica a lo largo de este borde coincide con la posición del plano neutro de la placa. Al suponer que el borde empotrado coincide con el eje X, se obtiene que las condiciones de frontera a lo largo de este borde son:

$$(w)_{y=0} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \tag{2.21}$$

Borde libremente apoyado.- Sea el borde de la placa *y = 0* libremente apoyado, el desplazamiento *w* a lo largo del borde será nulo; este borde tiene libertad de giro alrededor del eje X y por consiguiente los momentos flexionantes M_y resultan nulos a lo largo del borde. Las condiciones de frontera resultan ser:

$$(w)_{y=0} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \upsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0 \tag{2.22}$$

Borde libre (sin apoyo).- Si el borde $x = a$ de la placa es libre, no podrán existir a lo largo de este borde momentos flexionante, torsionantes y tampoco fuerzas cortantes verticales; condiciones que resultan en:

$$(M_x)_{x=a} = 0 \quad ; \quad (M_{xy})_{x=a} = (V_x)_{x=a} = 0 \qquad (2.23.1)$$

Sin embargo Kirchhoff demostró que una de estas condiciones es redundante y que dos condiciones son suficiente para determinar los desplazamiento w de la placa. También demostró que la doble condición que se refiere al momento torsionante y a la fuerza cortante, es equivalente a una sola que considera una fuerza cortante estáticamente igual a los dos efectos suplidos, que resulta ser:

$$(V'_x)_{x=a} = \left(V_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a} = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\upsilon)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \qquad (2.23.2)$$

donde:

V'_x = Fuerza cortante efectiva sobre un borde libre

La condición de momento flexionante nulo a lo largo del borde libre se obtiene al igualar a cero la expresión 2.15.1.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \qquad (2.23.3)$$

Las expresiones 2.23.2 y 2.23.3 representan las condiciones de frontera para el borde libre de una placa.

REPRESENTACIÓN DE PROPIEDADES DEL SUELO

Módulo de reacción.
El módulo de reacción k_s es una relación conceptual entre la presión del suelo y el correspondiente asentamiento.
Matemáticamente se expresa como:

$$k_s = \frac{q}{\delta} \tag{3-1}$$

donde:

k_s= Módulo de reacción del terreno
q = Intensidad de la presión del suelo
δ = Asentamiento promedio ante un incremento de presión

La teoría del módulo de reacción vertical se basa en dos suposiciones fundamentales[8,14]:

a) La relación k entre la presión de contacto p y el correspondiente asentamiento δ es independiente de la presión.

b) El módulo de reacción vertical en la base de una placa rígida cargada concéntricamente apoyada sobre una superficie horizontal tiene el mismo valor en cualquier punto de la base; en otras palabras, el módulo de reacción tiene el mismo valor para cada punto de la superficie sobre la cual actúa la presión de contacto.

En la *Figura 3.1* se muestra el tipo de curva que se emplea para obtener k_s. Es evidente que el valor depende de si es un módulo tangente o secante y de las coordenadas de q y δ.

El tipo de prueba que se realiza para la obtención del k_s es la llamada *prueba de placa.* Este tipo de prueba se efectúa con placas muy pequeñas debido a que el suelo tiende a sufrir mayor asentamiento en la zona de mayor intensidad de esfuerzo, de aquí que los esfuerzos y asentamientos debajo de la placa no sean uniformes. Sin embargo, aún con placas de pequeño diámetro, ya sea de 450, 600 y 750 mm, se tiene el problema de determinar δ debido a que la placa tiende a ser menos rígida por lo cual es difícil obtener asentamientos constantes en toda el área de la placa (definición de k_s).

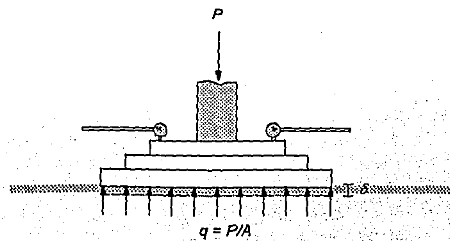


Fig. 3-1a

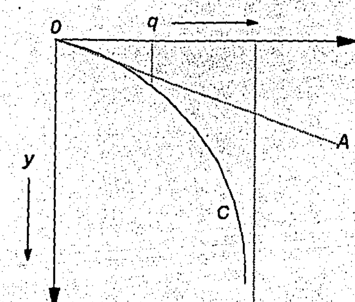


Fig. 3-1b

Fig. 3-1 *a).- Prueba de placa con tres placas concéntricas.*
b).- Módulo de reacción supuesto (línea OA).

Una forma de incrementar la rigidez de la placa consiste en colocar placas concéntricas más pequeñas; sin embargo, en cualquier caso la obtención de los datos necesarios para asignar un valor razonable al módulo de reacción k_s requiere de que se aplique una presión uniforme sobre la superficie del suelo, para después medir los asentamientos en los diferentes puntos y dividir la presión unitaria entre el asentamiento medio de los mismos puntos y así poder tomar un promedio de los valores obtenidos. (Fig. 3-1a).
En problemas relacionados a vigas sobre cimentación elástica, el valor de k_s usualmente se considera como una propiedad constante del suelo. Sin embargo, el módulo de reacción depende de las propiedades del suelo y de las características de la cimentación.

Los principales factores que influyen en la determinación de k_s son los siguientes[11]:

a.- Distribución de la carga.
b.- La geometría de la superficie de cimentación.
c.- Estratigrafía del suelo.
d.- Características de compresibilidad de los estratos de suelo.

Valores de k_s recomendados

Para la Ingeniería siempre ha sido de interés la evaluación precisa del valor de k_s. No obstante, solo se pueden determinar valores aproximados, por lo cual no se justifican refinamientos matemáticos.
Terzaghi ha establecido fórmulas empíricas para el uso de los valores de k_s. Las recomendaciones se basan en pruebas hechas en campo al utilizar placas de 1 ft x 1 ft. Este método debe ser empleado con cuidado, ya que solo es aplicable a condiciones en las cuales la profundidad del suelo afectado por el ancho de la cimentación pueda ser considerado cercano a la superficie y aproximadamente isotrópico; además, es posible extrapolar los resultados de la prueba de placa a áreas mas grandes.

Las siguientes expresiones son recomendadas por Terzaghi[8,11,15] en las cuales se considera el efecto del tamaño de la cimentación.

Para cimentaciones sobre arena (suelo no cohesivo):

$$k_s = k_1\left(\frac{B_f + 1}{2B_f}\right)^2 \tag{3.2}$$

Para cimentaciones sobre arcillas, cuando la presión de contacto es inferior a la mitad de la capacidad de carga ultima del suelo.

$$k_s = \frac{k_1}{b_f} \tag{3.3}$$

Para cimentaciones rectangulares sobre arcillas de dimensiones B y L = mB:

$$k_s = k_1\left(\frac{m + 0.5}{1.5m}\right) \tag{3.4}$$

donde:

- k_s = Módulo de reacción bajo la cimentación de ancho B ($F \times L^{-3}$).
- k_1 = Módulo de reacción obtenido de una prueba de placa de 1ft x 1ft.
- B_f = Ancho de la superficie de contacto en (ft).
- m = Relación de aspecto de la placa (m = B/L) adimensional.

Otras expresiones que toman en cuenta el efecto del tamaño y la profundidad en cimentaciones cuadradas son[15]:

Para suelos granulares:

$$k_s = k_1\left(\frac{B_f + 0.3}{B_f}\right)^2\left(1 + \frac{2D_f}{B_f}\right) \tag{3.5}$$

Pero:

$$k_s \le 2k_1\left(\frac{B_f + 0.3}{B_f}\right)^2$$

Para suelos cohesivos:

$$k_s = k_a\left(\frac{B_f+0.3}{B_f}\right)^2\left(1+\frac{2D_f}{B_f}\right)+\frac{k_b}{B_f} \tag{3.6}$$

Donde k_a y k_b deben ser evaluados al menos por dos pruebas con diferentes tamaños de placa, por ejemplo placas cuadradas de 300 y 600 mm.

Las siguientes expresiones[10] permiten obtener el módulo de reacción con empleo de datos obtenidos del suelo en pruebas de laboratorio:

a) $$k_{SB} = 0.65\sqrt[12]{\frac{E_s B_f^4}{E_b I}}\frac{E_s}{1-\upsilon^2} \tag{3.7}$$

donde:

k_{SB} = $k_s B$ ($F \times L^{-2}$)
B_f = Ancho de la cimentación.
E_b = Módulo de elasticidad de la cimentación.
I = Mómento de inercia de la cimentación.
E_s = Módulo de elasticidad del suelo.
υ = Relación de Poisson.

b) $$k_s = \left(\frac{1}{m_v}\right)H \tag{3.8}$$

donde:

m_v = Coeficiente de compresibilidad volumétrica del suelo, obtenido de una prueba de consolidación.
H = $0.5B_f$ a B_f.
B_f = Ancho de la cimentación.

Los valores de k_1 recomendados por Terzaghi[8,11] se dan en la Tabla 3-1, la cual puede servir como una guía para la estimación del k_s. Sin embargo, estos valores se deben obtener de pruebas de placa realizadas en el sitio de interés para considerar en forma específica las condiciones del subsuelo y áreas cargadas.

La tabla 3-2[9] se puede usar para estimar el valor de k_s para inferir en una forma aproximada el orden de magnitud del módulo de reacción k_s al emplear alguna de las expresiones 3.2 a 3.4

Tabla 3-1. Valores promedios d· k_1 para placas cuadradas de 1ft (305 mm)

Tipo de suelo		Valor promedio de k_1		Intervalo de valores de k_1	
		Tons/Ft³	Kg/Cm³	Tons/Ft3	Kg/Cm3
Arena	Suelta	40	1.29	20 - 60	0.64 - 1.92
	Media	130	4.17	60 - 300	1.92 - 9.62
	Densa	500	16.1	300 - 100	9.62 - 32.1
Arcilla	Rígida	75	2.41	50 - 100	1.60 - 3.21
	Muy Rígida	150	4.82	100 - 200	3.21 - 6.42
	Dura	300	9.64	300	9.60

1 Ton = 2,000 lb.

Tabla 3-2. Intervalo de valores para el módulo de reacción k_s*

Tipo de suelo		Módulo de reacción k_s	
		kcf	kg/cm³
Arena	Suelta	30 - 100	0.48 - 1.60
	Media	60 -500	0.96 - 8.01
	Densa	400 - 800	6.41 - 12.81
Arcilla	$q_u \leq 200$ kpa (2.04 kg/cm²)	75 - 150	1.20 - 2.40
	$200 \leq q_u \leq 400$ kpa (4.08 kg/cm²)	150 - 300	2.40 - 4.81
	$q_u > 800$ kpa (8.16 kg/cm²)	>300.00	>4.81

* Los valores indicados sirven como guía para la estimación de ks, cuando se utilicen las expresiones 3.2 a 3.4.

LOSAS CON INTERACCIÓN CON EL SUELO

Método de diferencias finitas
El método de diferencias finitas sustituye la ecuación diferencial de cuarto orden para placas en flexión (2.17) por ecuaciones en diferencias finitas.
Para usar el método se divide la superficie de la losa en forma de retícula, en la cual cada nudo representa un desplazamiento desconocido, después se escribe la ecuación 2.17 expresada en diferencias finitas en cada nudo de la retícula y finalmente se resuelve el grupo de ecuaciones para obtener los desplazamientos desconocidos.
Este método también se emplea en problemas de interacción suelo-estructura; para ilustrar la obtención de las ecuaciones en diferencias finitas se considera una placa rectangular con bordes libres apoyada sobre un medio elástico, bajo la acción de cargas uniformemente distribuidas.

Expresiones en diferencias finitas para las derivadas parciales de la función $w=w(x,y)$ mediante diferencias centrales.
Es necesario establecer una secuencia ordenada, al numerar los nudos en la retícula que rodean al punto para el cual se pretende establecer un valor de la función.
El orden de numeración adoptado es el que se indica en la figura 4-1 para un módulo de retícula previamente establecido. Esta convención será valida para cualquier derivada parcial de la función $w = w(x,y)$ indicada en la tabla 4-1 y en las expresiones 4.3.
Para el problema de flexión en placas se asume que la superficie de la placa se divide en una retícula con igual módulo en ambas direcciones de los ejes coordenados. Con ayuda de la figura 4-1b se establecen las relaciones para expresar las derivadas del desplazamiento de la placa en diferencias finitas, en un punto 0 de la superficie de la placa.
Las expresiones se resumen en la tabla 4-1 [1,2].

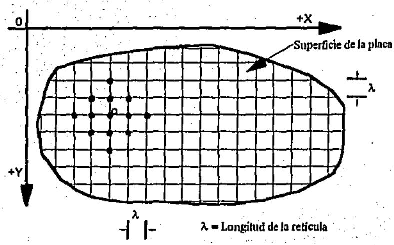


Fig. 4-1a

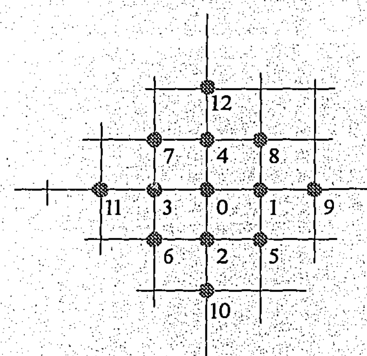


Fig. 4-1b

Fig. 4-1. a) Retícula cuadrada para establecer la ecuación diferencial de placas en flexión en diferencias finitas.
b) Secuencia de numeración para el nudo 0.

TABLA 4-1. Expresiones en diferencias finitas para las derivadas parciales de w = w (x,y), establecidas en diferencias centrales

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \cong \frac{-w_3 + w_1}{2\lambda}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \cong \frac{-w_4 + w_2}{2\lambda}$
$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_0 \cong \frac{-w_{11} + 2w_3 - 2w_1 + w_9}{2\lambda^3}$	
$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_0 \cong \frac{-w_{12} + 2w_4 - 2w_2 + w_{10}}{2\lambda^3}$	
$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \cong \frac{-w_7 + 2w_4 - w_8 + w_6 - 2w_2 + w_5}{2\lambda^3}$	
$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_0 \cong \frac{-w_7 + w_8 + 2w_3 - 2w_1 - w_6 + w_5}{2\lambda^3}$	
$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \cong \frac{w_3 - 2w_0 + w_1}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \cong \frac{w_3 - 2w_0 + w_1}{\lambda^2}$
$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \cong \frac{w_7 - w_8 - w_6 + w_5}{4\lambda^2}$	
$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_0 \cong \frac{w_{11} - 4w_3 + 6w_0 - 4w_1 + w_9}{\lambda^4}$	
$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_0 \cong \frac{w_{12} - 4w_4 + 6w_0 - 4w_2 + w_2 + w_{10}}{\lambda^4}$	
$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 \cong \frac{w_5 - 2w_1 + w_8 - 2w_2 + 4w_0 - 2w_4 + w_7 - 2w_3 + w_6}{\lambda^4}$	

De forma similar se pueden escribir los operadores diferenciales en diferencias finitas.

$$\left(\nabla^2 w\right)_0 = \frac{1}{\lambda^2}\left[w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + 4w_0\right] \tag{4.1.1}$$

$$\begin{aligned}\left(\nabla^4 w\right)_0 = \frac{1}{\lambda^4}\Big[&20w_0 - 8\left(w_1 + w_2 + w_3 + w_4\right) \\ &+ 2\left(w_5 + w_6 + w_7 + w_8\right) + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}\Big]\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Las expresiones en diferencias finitas para $\nabla^2 w$ y $\nabla^4 w$ dadas en las ecuaciones 4.1 se han establecido para un punto arbitrario el cual esta localizado lejos de los bordes de la placa, un ejemplo es el caso cuando los desplazamientos w_0, w_1, w_2, ... w_{12} caen dentro de la superficie de la placa (Fig. 4-2).

Placa apoyada sobre un medio elástico.

De la ecuación 2.17 se tiene que la ecuación diferencial de placas en flexión apoyadas sobre un medio elástico es:

$$D\nabla^4 w + kw = q \tag{4.2}$$

Las condiciones establecidas por Kirchhoff, para una placa rectangular con bordes libres (Fig.4-2), son :

$$M_x(0,y) = M_x(L,y) = 0 \tag{4.3.1}$$

$$\left[V_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right] = 0 \qquad para\ x = 0, L \tag{4.3.2}$$

$$M_y(x,0) = M_y(x,B) = 0 \tag{4.3.3}$$

$$\left[V_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right] = 0 \qquad para\ y = 0, B \tag{4.3.4}$$

Como condición adicional, se debe cumplir que la fuerza de esquina sea nula[1]; por ejemplo en la esquina $x=L$ y $y=B$ se tiene:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=L\\y=B}} = 0 \tag{4.3.5}$$

Al considerar la retícula mostrada en la figura 4-2 donde los bordes $x=0,L$ y $y=0,B$, cumplen con las condiciones de borde libres (Ec. 4.3) y al sustituir la ecuación 4.1.2 en 4.2, se obtiene la ecuación diferencial de placas en flexión apoyadas sobre un medio elástico, expresada en diferencias finitas.

$$\begin{aligned} &20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + \\ &\quad w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12} = q_0\frac{\lambda^4}{D} - \frac{kw_0\lambda^4}{D} \end{aligned} \tag{4.4}$$

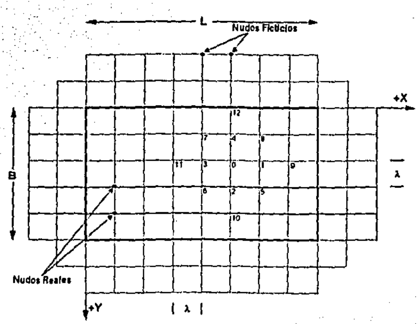


Fig. 4-2.- Retícula para establecer las ecuaciones en diferencias finitas en una placa rectangular sobre un medio elástico.

Se pueden establecer expresiones equivalentes para nudos en el borde o cerca de éste, empleando las condiciones de frontera (4.3.1 a 5) en combinación con la expresión 4.4.

En la figura 4-3 y 4-4 se resúmen expresiones equivalentes a 4.4.

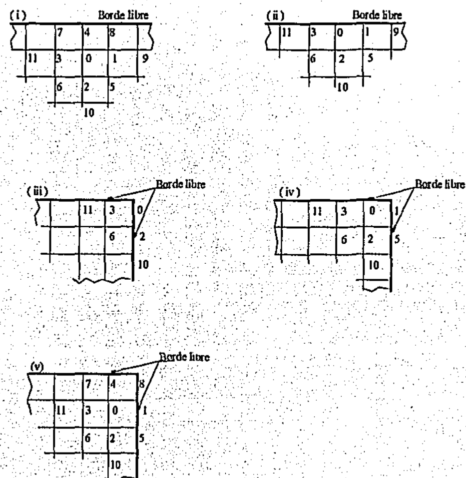


Fig. 4-3.- Ecuaciones para el análisis de una placa rectangular apoyada sobre un medio elástico expresada en diferencias finitas, para nudos sobre el borde o cerca de él.

Caso i

$$\left\{19w_0 - 8\left(w_1 + w_3 + w_4\right) - (6 - 2\upsilon)w_2 + (2 - \upsilon)\left(w_5 + w_6\right) + 2\left(w_7 + w_8\right)\right.$$

$$\left. + w_9 + w_{11} + w_{12}\right\} + \frac{kw_0\lambda^4}{D} - q_0\frac{\lambda^4}{D} = 0$$

$$w_{10} = -w_0 + 2w_2 - \upsilon\left(w_6 - 2w_2 + w_5\right)$$

Caso ii

$$\left\{\left(8-4\upsilon-3\upsilon^2\right)w_0-\left(4-2\upsilon-2\upsilon^2\right)\left(w_1+w_3\right)-(6-2\upsilon)w_4+(2-\upsilon)\left(w_7+w_8\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(1-\upsilon^2\right)\left(w_9+w_{11}\right)+w_{12}\right\}+\frac{kw_0\lambda^4}{2D}-q_0\frac{\lambda^4}{2D}=0$$

$$w_2=2(1+\upsilon)w_0-\upsilon(w_1+w_3)-w_4$$
$$w_5=2(1+\upsilon)w_1-\upsilon(w_0+w_9)-w_8$$
$$w_6=2(1+\upsilon)w_3-\upsilon(w_0+w_{11})-w_7$$
$$w_{10}=6(2+2\upsilon-\upsilon^2)w_0+(4\upsilon^2-8\upsilon-4)w_1-4(1+2\upsilon-\upsilon^2)w_3+4(\upsilon-3)w_4+2(2-\upsilon)w_7$$
$$+2(2-\upsilon)w_8+(2-\upsilon)\upsilon w_9+(2-\upsilon)\upsilon w_{11}+w_{12}$$

Caso iii

$$\left\{\left(3-2\upsilon-\upsilon^2\right)w_0-\left((3-2\upsilon-\upsilon^2\right)(w_3+w_4)+2(1-\upsilon)w_7+\frac{1}{2}\left(1-\upsilon^2\right)(w_{11}+w_{12})\right\}$$
$$+\frac{kw_0\lambda^4}{4D}-q_0\frac{\lambda^4}{4D}=0$$

$$w_1=2w_0-w_3$$
$$w_2=2w_0-w_4$$
$$w_5=-2\upsilon w_0+2(1+\upsilon)\left(w_3+w_4\right)-3w_7-\upsilon\left(w_{11}+w_{12}\right)$$
$$w_6=2(1+\upsilon)w_3-\upsilon\left(w_0+w_{11}\right)-w_7$$
$$w_8=2(1+\upsilon)w_4-\upsilon\left(w_0+w_{12}\right)-w_7$$
$$w_9=2\left(6-\upsilon^2\right)w_0+4(\upsilon-3)w_3-4\left(2+\upsilon-\upsilon^2\right)w_4+4(2-\upsilon)w_7+w_{11}+2(2-\upsilon)\upsilon w_{12}$$
$$w_{10}=2\left(6-\upsilon^2\right)w_0-4\left(2+\upsilon-\upsilon^2\right)w_3+4(\upsilon-3)w_4+4(2-\upsilon)w_7+2(2-\upsilon)\upsilon w_{11}+w_{12}$$

Caso iv

$$\left\{\left(\frac{15}{2}-4\upsilon-\frac{5}{2}\upsilon^2\right)w_0-\left(3-2\upsilon-\upsilon^2\right)w_1-\left(4-2\upsilon-2\upsilon^2\right)w_3-(6-2\upsilon)w_4\right.$$
$$\left.+(2-\upsilon)\left(w_7+w_8\right)+\frac{1}{2}\left(1-\upsilon^2\right)w_{11}+w_{12}\right\}+\frac{kw_0\lambda^4}{2D}-q_0\frac{\lambda^4}{2D}=0$$

$$w_2 = 2(1+\upsilon)w_0 - \upsilon(w_1 + w_3) - w_4$$
$$w_5 = 2w_1 - w_8$$
$$w_6 = 2(1+\upsilon)w_3 - \upsilon(w_0 + w_{11}) - w_7$$
$$w_9 = 2w_1 - w_0$$
$$w_{10} = (12 + 10\upsilon - 5\upsilon^2)w_0 - 2(2 + 2\upsilon - \upsilon^2)w_1 - 4(1 + 2\upsilon - \upsilon^2)w_3 + 4(\upsilon - 3)w_4 + 2(2-\upsilon)(w_7 + w_8) + (2-\upsilon)\upsilon w_{11} + w_{12}$$

Caso v

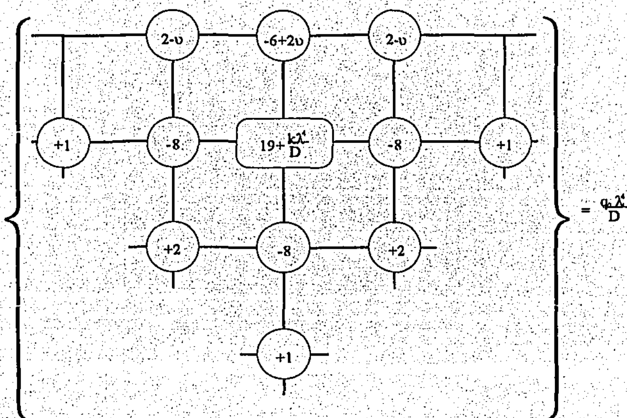
$$\{18w_0 - (6 - 2\upsilon)(w_1 + w_2) - 8(w_3 + w_4) + 2(1-\upsilon)w_5 + (2-\upsilon)(w_6 + w_8) + 2w_7 + w_{11} + w_{12}\} + \frac{kw_0\lambda^4}{D} - q_0\frac{\lambda^4}{D} = 0$$

$$w_9 = 2(1+\upsilon)w_1 - \upsilon(w_5 + w_8) - w_0$$
$$w_{10} = 2(1+\upsilon)w_2 - \upsilon(w_5 + w_6) - w_0$$

donde:

- q_0 = Intensidad de esfuerzo en el nudo 0
- λ = Módulo de la retícula.
- υ = Relación de Poisson para el material de la placa.
- k = Módulo de reacción del suelo.
- D = $\frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$; Rigidez de la placa.

Caso i



Caso ii

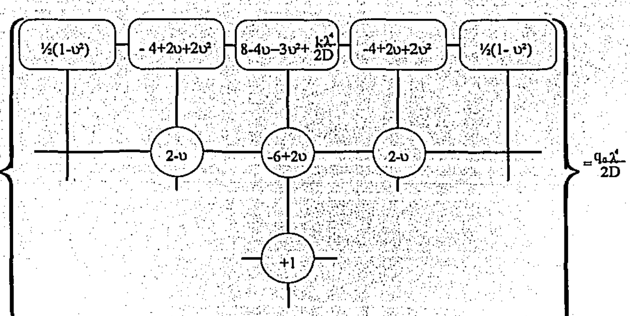
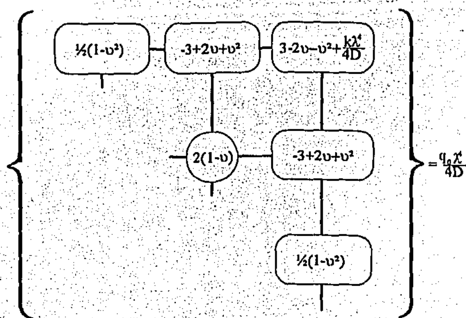


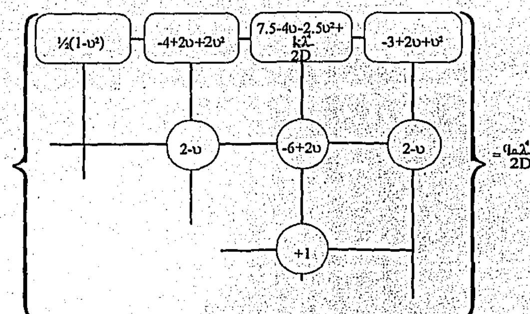
Fig. 4-4. *Operadores en diferencias finitas para puntos sobre el borde de la placa y cerca de éste.*

Continuación de la fig. 4-4.

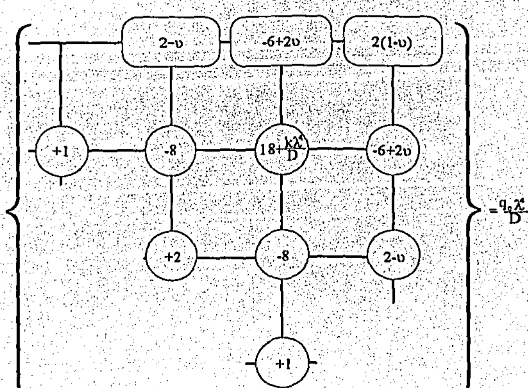
Caso iii



Caso iv



Caso v



En la obtención de las ecuaciones en diferencias finitas para la flexión en placas, hemos asumido que la carga externa q(x,y) es distribuida, de tal forma que se asigna a cada nudo en la retícula una intensidad de presión promedio, con unidades de esfuerzos. Además de este tipo de carga distribuida, también se debe considerar el tipo de carga concentrada externa que puede ser aplicada sobre un área localizada en un punto.

Cargas externas concentradas.

Cuando una carga externa concentrada actúa en un punto de la retícula (Fig. 4-5a), su intensidad puede ser representada en forma aproximada por la intensidad promedio tomada sobre un área de λ^2.

Cuando la carga concentrada Q_0 actúa en un punto arbitrario dentro de la retícula, similar al mostrado en la Fig. 4-5b, la intensidad de esfuerzo en los puntos de la retícula 1,2,3 y 4 se pueden aproximar por:

$$[q_1;q_2;q_3;q_4]=\frac{Q_0}{\lambda^4}[\xi_2\,\eta_2;\xi_1\,\eta_2;\xi_1\,\eta_1;\xi_2\,\eta_1] \qquad (4.4.1)$$

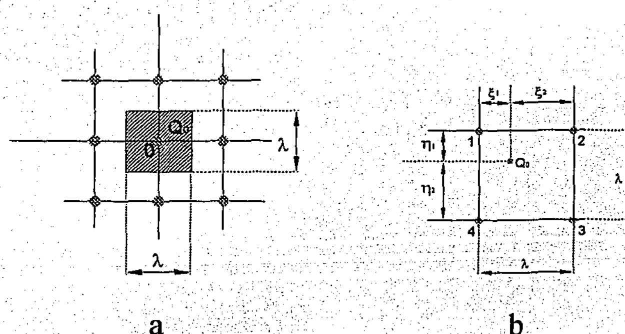


Fig. 4-5.- Efecto de cargas concentradas
a) Fuerza concentrada en el nudo "O"
b) Fuerza concentrada en un punto arbitrario

De lo expuesto anteriormente, es posible establecer la siguiente metodología para obtener la matriz de rigidez de una placa expresada en diferencias finitas.

Procedimiento:

1.- Se divide la superficie de la placa en un número apropiado de secciones cuadradas, como se ilustra en la figura 4-2.

2.- Se escribe una ecuación en diferencias finitas para cada nudo de la retícula, utilizando para ello la ecuación 4.4 para nudos interiores, y las expresiones indicadas en la figura 4-3 para los nudos sobre el borde de la placa o cerca de éste.

3.- Con el paso anterior, se establece una ecuación para cada nudo de desplazamiento desconocido. Por ejemplo, para el caso de la figura 4-2, se tienen 54 desplazamientos desconocidos dentro de la superficie de la placa. De aceptar la simetría de la placa y que la carga esta uniformemente distribuida, es posible reducir a 15 el número de incógnitas (desplazamientos).

4.- A partir del paso 3 se puede obtener la matriz de rigidez de la placa expresada en diferencias finitas.

Carta de influencia de Newmark para el cálculo de desplazamientos verticales en cimentaciones elásticas.

Se describe un procedimiento gráfico para el cálculo de desplazamientos[16] en la superficie de un medio semi-infinito, elástico, isotrópico y homogéneo, sujeto en la superficie a cargas uniformemente repartidas. El desplazamiento para cualquier forma de la superficie cargada, se calcula al contar en la carta el número de cuadros cubiertos por la planta del área cargada, dibujada a una escala apropiada.

La gráfica 4-1, se utiliza para el cálculo de asentamientos en la superficie, para cualquier valor de la relación de Poisson ν.

Procedimiento para la utilización de la carta de Newmark.

1.- Se dibuja una figura del área cargada a una escala tal que la longitud base *L* (Gráfica 4-1), sea igual a la longitud del segmento *L* de la gráfica.

2.- La figura se coloca sobre la gráfica, haciendo coincidir el punto en que se desea calcular el asentamiento con el origen de la gráfica, por ejemplo para cada nudo en la reticula de la figura 4-2.

3.- Se cuenta el número de cuadros cubiertos por la figura.

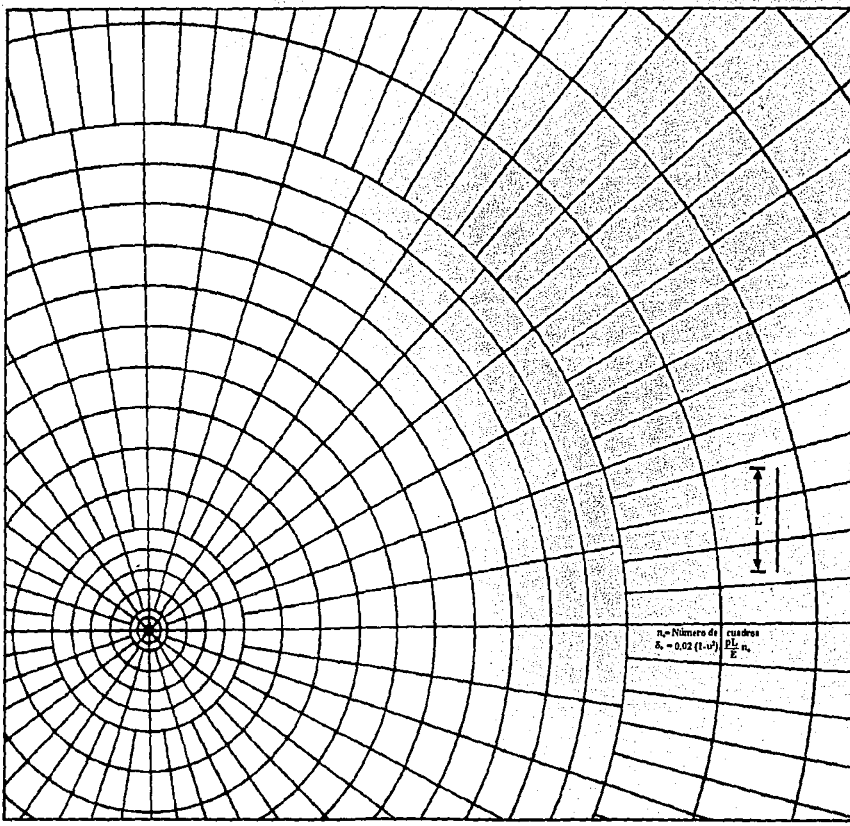
4.- El asentamiento se calcula aplicando la siguiente ecuación:

$$\delta_0 = 0.02\left(1-\upsilon^2\right)\frac{pL}{E}n_0 \qquad (4.5)$$

donde:

δ_0= Asentamiento.
p = Carga uniformemente distribuida.
L = Longitud base, el cual es igual a la longitud L del segmento de la gráfica.
E = Módulo de elásticidad del suelo.
n_0= Número de cuadros.

Carta de Newmark



Gráfica 4-1. Carta de influencia para desplazamientos verticales en la superficie.

Interacción suelo - estructura.

Para ilustrar el procedimiento a seguir en la interacción suelo - estructura, se considera a una placa rectangular con bordes libres, apoyada sobre un medio elástico, bajo la acción de una carga uniformemente distribuida.

El procedimiento se resume en los siguientes pasos:

1.- Se establece la matriz de rigidez de la placa expresada en diferencias finitas; para ello se escribe una ecuación en cada nudo de desplazamiento desconocido utilizando la ecuación 4.4 para el caso de nudos interiores y las expresiones resumidas en la figura 4-3, para nudos sobre el borde de la placa o cercanos a éste.

2.- Con la ayuda de la solución de Newmark se obtienen los desplazamientos verticales que experimenta el suelo inducido por las cargas externas que actúan en la superficie (Ec. 4.5).

3.- La interacción suelo - estructura se establece al considerar que el campo de desplazamientos presentes en la placa (paso 1) son iguales a los asentamientos que sufre el suelo (paso 2).

4.- Se resuelve el sistema de ecuaciones (pasos 1 a 3) para determinar los desplazamientos de la placa. A partir de estos desplazamientos se pueden obtener los elementos mecánicos en toda la superficie de la placa por medio de las expresiones 2.15 y 2.23; las derivadas parciales se expresan en diferencias finitas con la ayuda de la tabla 4-1 y con la numeración establecida en la figura 4-1b.

Capítulo V

OBTENCIÓN DE ELEMENTOS MECÁNICOS

Con la finalidad de mostrar el procedimiento de cálculo para obtener la distribución de elementos mecánicos en toda la superficie de la placa, se propone el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1
Se desea obtener la distribución elástica de momentos flexionantes y fuerzas cortantes en la superficie de una placa cuadrada con condiciones de bordes libres y dimensiones de 6.0m con peralte de 30cm. Considérese la interacción suelo - estructura.

Datos:

- Material de la placa:
  - Concreto
    f'c=250 k/cm^2, clase 1
  - Relación de Poisson = 0.20

- Suelo de cimentación:
  - Tipo de suelo: Arcilla rigida
  - Módulo de reacción = 1.2 kg/cm^3
  - Módulo de elasticidad = 20 kg/cm^2
  - Relación de Poisson = 0.45

- Cargas:
  - Peso propio = 0.072 kg/cm^2

Solución:
En la figura 5-1 se muestra una retícula de 4 x 4. Esta se emplea para establecer la ecuación diferencial que gobierna la flexión en placas apoyadas sobre un medio elástico en diferencias finitas (Ec. 4.4).

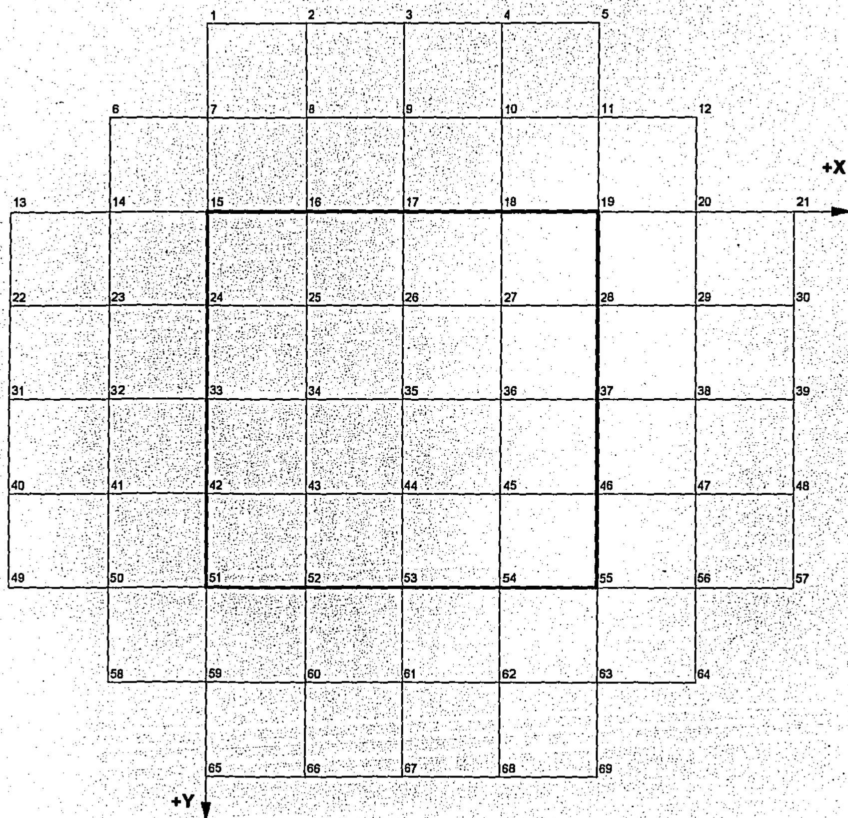


Fig. 5-1. Retícula de 4 x 4 para establecer las ecuaciones en diferencias finitas.

El análisis se resume en los siguientes pasos:

1.- Cálculo de asentamientos.

Los resultados obtenidos con la ecuación 4.5 se resumen en la tabla 5-1.

Tabla 5-1. Asentamientos en la masa de suelo obtenidos con la solución de Newmark

Nudo	No. de cuadros	Asentamiento ($m \times 10^{-4}$)
15	27,22	93,77834
16	35,49	122,27014
17	37,6	129,53952
25	48,14	165,86915
26	53,7	185,00724
35	55,84	192,37996

2.- Obtención de la matriz de rigidez de la placa expresada en diferencias finitas.

Se establece una ecuación en diferencias finitas para cada nudo de la retícula mostrado en la figura 5-1, utilizando para ello la ecuación 4.4 y las expresiones resumidas en la figura 4-4.

Para este ejemplo se tienen 25 nudos (desplazamientos desconocidos) en la superficie de la placa, debido a que la losa es simétrica en cargas y geometría; es posible reducir a 6 el número de desplazamientos desconocidos (nudos de la retícula).

Los resultados se indican en la tabla 5-2.

Tabla 5-2 Matriz de rigidez de la placa en diferencias finitas

Nudo	w_{17}	w_{25}	w_{26}	w_{27}	w_{33}	w_{34}	w_{35}	w_{36}	w_{37}	w_{42}	w_{43}
54								1.00			
45				1.00			2.00	-8.00	1.80		1
44			1.00			2.00	-8.00	2.00		1.00	-8
35	1.00	2.00	-8.00	2.00	1.00	-8.00	21.17	-8.00	1.00		2
53							1.00				1.8
55									0.48		

Continuación de la tabla 5-2...

Nudo	w_{44}	w_{45}	w_{46}	w_{51}	w_{52}	w_{53}	w_{54}	w_{55}	Término de Carga $X10^{-8}$
54	1.80	-5.60	1.80		0.48	-3.52	7.18	-2.56	351.28387
45	-8.00	19.17	-5.60			1.80	-5.60	1.60	702.56774
44	20.17	-8.00	1.00		1.80	-5.60	1.80		702.56774
35	-8.00	2.00				1.00			702.56774
53	-5.60	1.80		0.48	-3.52	7.66	-3.52	0.48	351.28387
55		1.60	-2.56			0.48	-2.56	2.85	175.64193

3.- Interacción suelo - estructura.

La interacción suelo - estructura se establece al considerar que los asentamientos (paso 1) que experimenta el suelo, son iguales a los desplazamientos que sufre la placa (paso 2).

Por simetria y con ayuda de la Fig. 5-1 se tiene:

$$w_{15} = w_{19} = w_{51} = w_{55} = W_1$$
$$w_{16} = w_{18} = w_{24} = w_{28} = w_{42} = w_{46} = w_{52} = w_{54} = W_2$$
$$w_{17} = w_{33} = w_{37} = w_{53} = W_3$$
$$w_{25} = w_{27} = w_{43} = w_{45} = W_4$$
$$w_{26} = w_{34} = w_{36} = w_{44} = W_5$$
$$w_{35} = W_6$$

Las ecuaciones obtenidas considerando la interacción suelo - estructura se indican en la tabla 5-3.

Tabla 5-3 Matriz de rigidez (placa) con interacción suelo estructura en diferencias finitas

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	Término de Carga $X10^{-4}$	Nudo
-2.56	2.28	-3.52	-5.60	2.80	0.00	-875.0559	54
1.60	-11.20	3.60	2.00	-16.00	2.00	-3172.8428	45
0.00	5.60	-5.60	-16.00	5.00	-8.00	-3724.7454	44
0.00	0.00	4.00	8.00	-32.00	0.00	-4065.8401	35
0.96	-7.04	0.00	3.60	-5.60	1.00	-989.4688	53
0.00	-5.12	0.96	1.60	0.00	0.00	-265.7684	55

4.- Obtención del campo de desplazamiento en la superficie de la placa.

De la solución del sistema de ecuaciones simultáneas (paso 3) se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 93.4075870287 \\ 132.934107718 \\ 105.618119692 \\ 195.913022884 \\ 189.238023807 \\ 211.162085731 \end{Bmatrix} x10^{-4} \text{ en metros.}$$

Los desplazamiento en los nudos restantes de la retícula se obtienen por simetría. La figura 5-2 muestra la configuración deformada de la placa, con interacción suelo - estructura; en la figura 5-3 se representa la configuración, en planta, de los desplazamientos verticales.

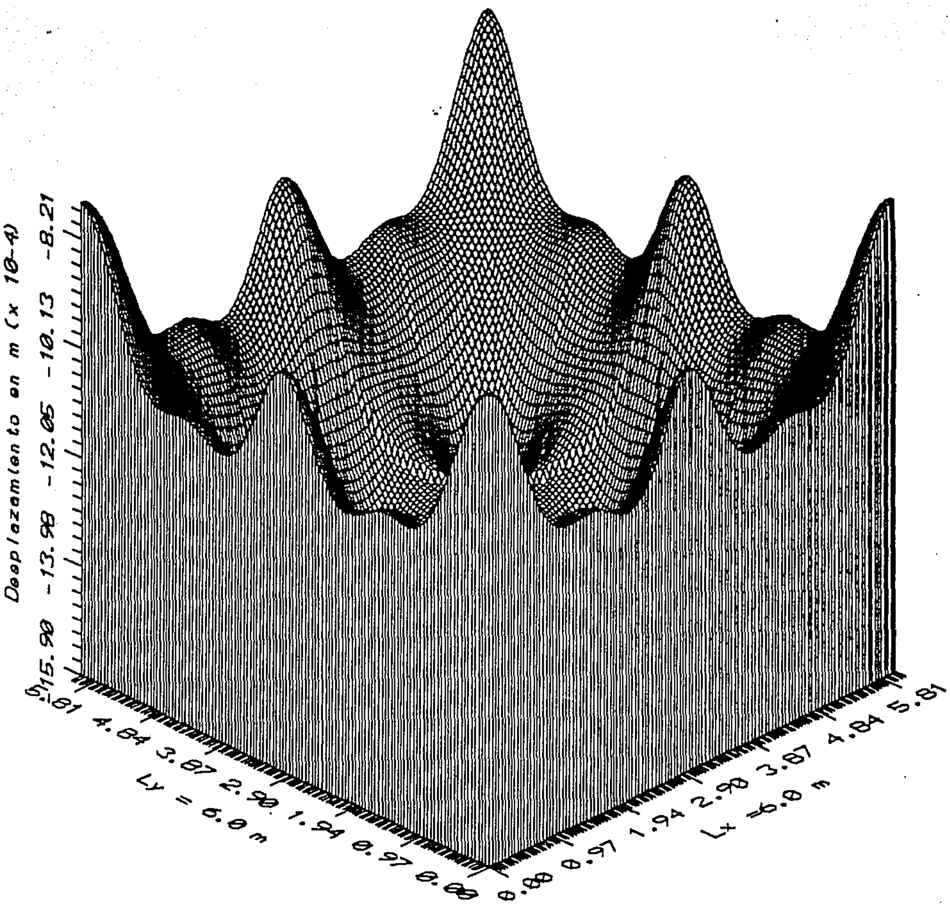


Fig. 5-2. Configuración deformada de la placa con interacción suelo estructura.

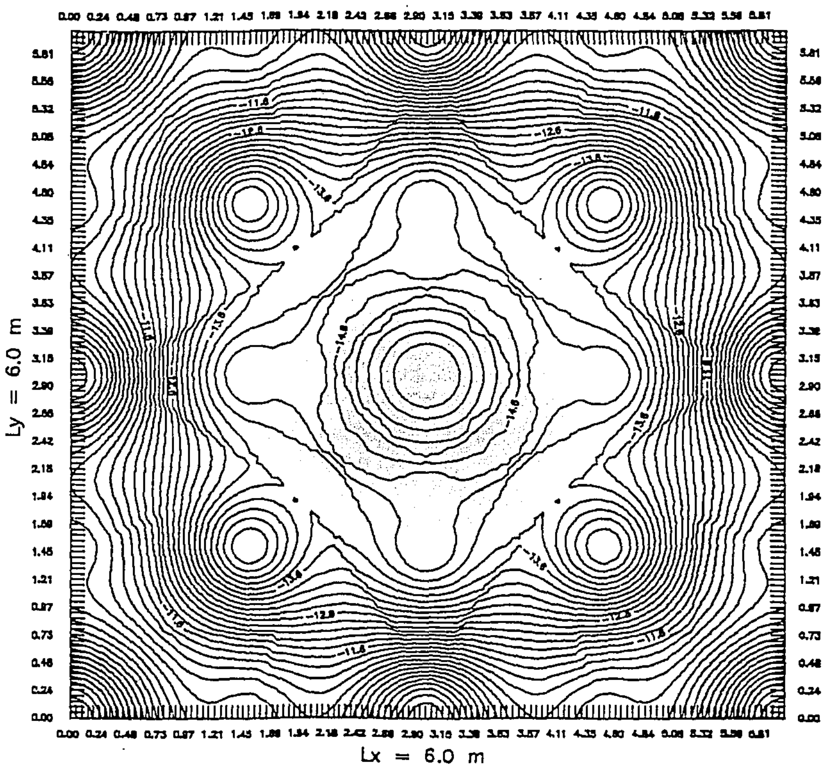


Fig. 5-3. Curvas de igual desplazamiento que experimenta una losa apoyada sobre un medio elástico con bordes libres.

5.- Cálculo de desplazamiento en puntos dentro y fuera de la superficie de la placa.

Para la obtención de estos desplazamientos se emplean las expresiones resumidas en las figuras 4-3.
En la tabla 5-4 se listan los resultados obtenidos.

Tabla 5-4. Desplazamientos dentro y fuera de la superficie para los casos indicados en la fig. 4-3.

Caso / Nudo	Desplazamientos (m x 10^{-2})					
	i	ii	iii	iv	v	Ecuación (4.4)
w_0	1.850072	1.295395	0.937783	1.222701	1.658691	1.923799
w_1	1.959130	1.329341	0.546225	0.934075	1.329341	1.892380
w_2	1.056181	0.684831	0.546225	0.577301	1.329341	1.892380
w_3	1.959130	1.329341	1.329341	1.056181	1.892380	1.892380
w_4	2.111620	1.892380	1.329341	1.959130	1.892380	1.892380
w_5	1.329341	0.785394	-0.294139	0.538810	0.934075	1.959130
w_6	1.329341	0.785394	0.832495	0.132046	1.056181	1.959130
w_7	1.892380	1.959130	1.959130	1.892380	2.111620	1.959130
w_8	1.892380	1.959130	0.832495	1.329341	1.056181	1.959130
w_9	1.329341	0.934075	0.726620	0.645450	1.133675	1.056181
w_{10}	0.153025	-0.425200	0.726620	-1.254303	1.133675	1.056181
w_{11}	1.329341	0.934075	1.056181	1.329341	1.959130	1.056181
w_{12}	1.892380	2.111620	1.056181	1.892380	1.959130	1.056181

6.- Cálculo de elementos mecánicos.

Para la obtención de los elementos mecanicos es necesario expresar las ecuaciones 2.15.1 y 2.23.2 en diferencias finitas; con la ayuda de la tabla 4-1 los momentos flexionantes y fuerzas cortantes correspondientes a los desplazamientos del paso anterior (tabla 5-4), se indican en la tabla 5-5.

Tabla 5-5 Elementos mecánicos en una losa cuadrada de 6m con interacción suelo - estructura.

Linea	Elementos mecanicos en dirección X*														
	NUDO	Momento (Ton-m)	Cortante (Ton)	NUDO	Momento (Ton-m)	Cortante (Ton)	NUDO	Momento (Ton-m)	Cortante (Ton)	NUDO	Momento (Ton-m)	Cortante (Ton)	NUDO	Momento (Ton-m)	Cortante (Ton)
15 - 19	15	0.00	0.00	16	10.08	-2.16	17	-1.50	0.00	18	10.08	2.16	19	0.00	0.00
24 - 28	24	0.00	0.00	25	2.65	1.60	26	-2.57	0.00	27	2.65	-1.60	28	0.00	0.00
33 - 37	33	0.00	0.00	34	11.27	16.48	35	1.74	0.00	36	11.27	-16.48	37	0.00	0.00
42 - 46	42	0.00	0.00	43	2.65	1.60	44	-2.57	0.00	45	2.65	-1.60	46	0.00	0.00
51 - 55	51	0.00	0.00	52	10.08	-2.16	53	-1.50	0.00	54	10.08	2.16	55	0.00	0.00

* Por simetria se obtiene los momentos y fuerzas cortantes que resultan en la dirección Y.

En la tabla 5-6 se indican los niveles de deformación unitaria obtenidos, expresión 2.14.1 expresada en diferencias finitas; en la fig. 5-4 se muestra la representación en planta del nivel de deformación unitaria que experimenta la superficie superior de la losa.

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z\left[\frac{1}{\lambda^2}\left(w_3 - 2w_0 + w_1\right)\right] \qquad (2.14.1)$$

Tabla 5-6 Deformaciones unitarias en la superficie superior de una losa rectangular apoyada sobre el terreno con interacción suelo-estructura.

Línea	Deformaciones unitarias en la dirección X (x 10^{-4})									
	NUDO		NUDO		NUDO		NUDO		NUDO	
15 - 19	15	0.00	16	3.44	17	-0.36	18	3.44	19	0.00
24 - 28	24	0.00	25	1.01	26	-0.43	27	1.01	28	0.00
33 - 37	33	0.00	34	3.73	35	0.66	36	3.73	37	0.00
42 - 46	42	0.00	43	1.01	44	-0.43	45	1.01	46	0.00
51 - 55	51	0.00	52	3.44	53	-0.36	54	3.44	55	0.00

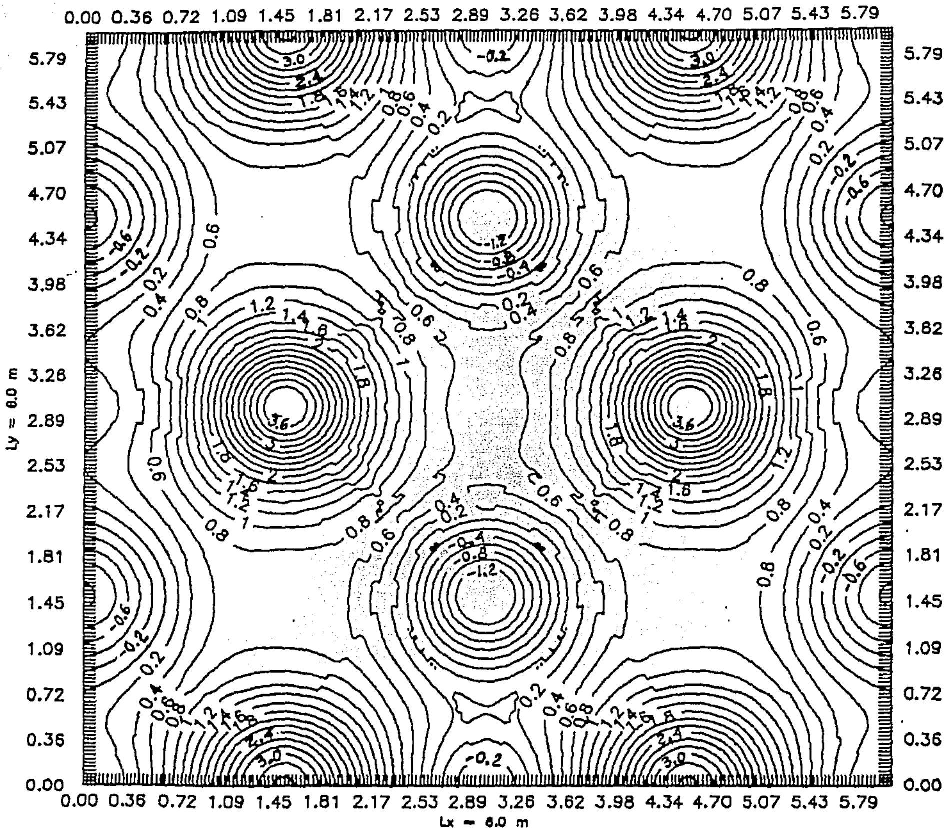


Fig. 5-4. *Curvas de igual valor de las deformaciones unitarias en X que se desarrollan en la superficie superior de la losa, con interacción suelo - estructura.*

En este ejemplo se ha mostrado una forma sencilla y racional de considerar la interacción suelo - estructura; permite obtener la distribución de elementos mecánicos en toda la losa, la cual es de utilidad en el diseño de losas de concreto reforzado.
Para estudiar la influencia que tiene el tipo de terreno sobre el que se apoyan las losas, se efectúo el análisis de tres losas cuadradas con dimensiones de 3.0, 4.5 y 6.0 m y con peraltes de 15, 22.5 y 30 cm respectivamente, en suelos con diferentes grados de compasidad y características de deformación.
Los resultados se resumen en las tabla 5-7 y 5-8 y en las figuras 5-5 y 5-6.

De estos resultados se concluye lo siguiente:

- Los elementos mecánicos de losas apoyadas sobre el terreno dependen del tipo y características de deformación del suelo sobre la cual se desplantan, siendo factible la obtención de diseños óptimos en la medida que el nivel de deformación del suelo no sea un parámetro importante a considerar en el diseño.

- Es evidente la gran importancia de mejorar las condiciones del terreno ya sea mediante procesos de compactación, estabilización de suelos por medios químicos, etc., antes de efectuar el colado de las losa in situ.

Losa cuadrada de 3 m.

Tipo de arena			Suelta		Media		Densa	
$ks^{(1)}$ (Ton/m^3)			480		960		6410	
$Es^{(2)}$ (Ton/m^2)			1000		5000		10000	
Módulo de Poisson = 0.2		Punto	Momentos flexionantes y fuerzas cortantes en dirección X					
			Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)
Zona[3]	$0 \le y \le 0.38$	15	0	0	0	0	0	0
		16	0.380	-0.135	0.102	-0.032	0.042	-0.013
		17	0.082	0	0.036	0	0.006	0
	$0.38 \le y \le 1.12$	24	0	0	0	0	0	0
		25	0.212	0.043	0.062	0.005	0.012	0.008
		26	0.075	0	0.028	0	-0.008	0
	$1.12 \le y \le 1.88$	33	0	0	0	0	0	0
		34	0.436	0.752	0.108	0.138	0.035	0.076
		35	0.186	0	0.051	0	0.004	0
Momento de Análisis (Ton-m)			0.436		0.108		0.042	
Peralte(4) (cm)	Teoría elástica		10.2		7.6		6.6	
	Teoría plástica		8.3		6..6		6.0	
Desplazamiento máximo (mm)			0.996		0.192		0.104	

(1) Módulo de reacción.
(2) Módulo de elasticidad del suelo.
(3) Solo se indican los valores correspondientes a la cuarta parte de la losa.
(4) Considera un recubrimiento de 5cm (RCDDF).

Losa cuadrada de 4.5 m.

Tipo de arena			Suelta		Media		Densa	
$ks^{(1)}$ (Ton/m^3)			480		960		6410	
$Es^{(2)}$ (Ton/m^2)			1000		5000		10000	
Módulo de Poisson = 0.2		Punto	Momentos flexionantes y fuerzas cortantes en dirección X					
			Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)
Zona[3]	$0 \le y \le 0.56$	15	0	0	0	0	0	0
		16	1.242	-0.299	0.327	-0.069	0.087	-0.022
		17	0.236	0	0.104	0	-0.033	0
	$0.56 \le y \le 1.69$	24	0	0	0	0	0	0
		25	0.665	0.106	0.187	0.015	0.027	0.031
		26	0.202	0	0.073	0	-0.097	0
	$1.69 \le y \le 2.81$	33	0	0	0	0	0	0
		34	1.418	1.708	0.342	0.318	0.045	0.192
		35	0.577	0	0.153	0	-0.057	0
Momento de Análisis (Ton-m)			1.418		0.342		-0.097	
Peralte[4] (cm)	Teoría elástica		14.3		9.6		7.4	
	Teoría plástica		11.0		7.9		6.6	
Desplazamiento máximo (mm)			2.255		0.438		0.253	

(1) Módulo de reacción.
(2) Módulo de elasticidad del suelo.
(3) Solo se indican los valores correspondientes a la cuarta parte de la losa.
(4) Considera un recubrimiento de 5cm (RCDDF).

Tabla 5-7 Resultado del análisis de losas cuadradas de 3, 4.5 y 6m apoyadas sobre arena con interacción suelo - estructura.

Continuación de la tabla 5-7...

Losa cuadrada de 6 m.

Tipo de arena			Suelta		Media		Densa	
ks[1] (Ton/m^3)			480		960		6410	
Es[2] (Ton/m^2)			1000		5000		10000	
Módulo de Poisson = 0.2		Punto	Momentos flexionantes y fuerzas cortantes en dirección X					
			Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)
Zona[3]	$0 \leq y \leq 0.75$	15	0	0	0	0	0	0
		16	2.847	-0.520	0.736	-0.118	0.076	-0.024
		17	0.463	0	0.209	0	-0.208	0
	$0.75 \leq y \leq 2.25$	24	0	0	0	0	0	0
		25	1.456	0.205	0.396	0.034	-0.225	0.076
		26	0.359	0	0.126	0	-0.390	0
	$2.25 \leq y \leq 3.75$	33	0	0	0	0	0	0
		34	3.234	3.066	0.761	0.576	-0.063	0.380
		35	1.246	0	0.313	0	-0.299	0
Momento de Análisis (Ton-m)			3.234		0.761		-0.390	
Peralte[4] (cm)	Teoría elástica		19.1		11.8		9.8	
	Teoría plástica		14.1		9.4		8.1	
Desplazamiento máximo (mm)			4.035		0.788		0.483	

(1) Módulo de reacción.
(2) Módulo de elasticidad del suelo.
(3) Solo se indican los valores correspondientes a la cuarta parte de la losa.
(4) Considera un recubrimiento de 5cm (RCDDF).

Losa cuadrada de 3 m.

Tipo de arcilla			Rígida		Muy rígida		Dura	
ks[1] (Ton/m^3)			1200		2400		4810	
Es[2] (Ton/m^2)			200		400		3000	
Módulo de Poisson = 0.2		Punto	Momentos flexionantes y fuerzas cortantes en dirección X					
			Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)
Zona[3]	0 ≤ y ≤ 0.38	15	0	0	0	0	0	0
		16	1.565	-0.608	0.649	-0.274	0.079	-0.034
		17	0.110	0	0.079	0	-0.024	0
	0.38 ≤ y ≤ 1.12	24	0	0	0	0	0	0
		25	0.708	0.300	0.181	0.197	0.001	0.034
		26	0.055	0	0.149	0	-0.050	0
	1.12 ≤ y ≤ 1.88	33	0	0	0	0	0	0
		34	1.807	3.942	0.721	2.050	0.072	0.281
		35	0.600	0	0.121	0	-0.013	0
Momento de análisis (Ton-m)			1.807		0.721		0.079	
Peralte[4] (cm)	Teoría elástica		15.4		11.6		7.2	
	Teoría plástica		11.8		9.3		6.4	
Desplazamiento máximo (mm)			5.123		2.633		0.361	

(1) Módulo de reacción.
(2) Módulo de elasticidad del suelo.
(3) Solo se indican los valores correspondientes a la cuarta parte de la losa.
(4) Considera un recubrimiento de 5cm (RCDDF).

Losa cuadrada de 4.5 m.

Tipo de arcilla			Rígida		Muy rígida		Dura	
ks[1] (Ton/m^3)			1200		2400		4810	
Es[2] (Ton/m^2)			200		400		3000	
Módulo de Poisson = 0.2		Punto	Momentos flexionantes y fuerzas cortantes en dirección X					
			Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)
Zona[3]	0 ≤ y ≤ 0.38	15	0	0	0	0	0	0
		16	4.766	-1.292	1.674	0.540	0.128	-0.056
		17	-0.132	0	-0.768	0	-0.216	0
	0.38 ≤ y ≤ 1.12	24	0	0	0	0	0	0
		25	1.753	0.788	-0.026	0.554	-0.167	0.106
		26	-0.450	0	-1.139	0	-0.338	0
	1.12 ≤ y ≤ 1.88	33	0	0	0	0	0	0
		34	5.426	9.070	1.762	4.814	0.064	0.685
		35	1.380	0	-0.237	0	-0.217	0
Momento de análisis (Ton-m)			5.426		1.762		-0.338	
Peralte[4] (cm)	Teoría elástica		23.1		15.3		9.5	
	Teoría plástica		16.7		11.7		7.9	
Desplazamiento máximo (mm)			11.703		6.100		0.860	

(1) Módulo de reacción.
(2) Módulo de elasticidad del suelo.
(3) Solo se indican los valores correspondientes a la cuarta parte de la losa.
(4) Considera un recubrimiento de 5cm (RCDDF).

Tabla 5-8 Resultado del análisis de losas cuadradas de 3, 4.5 y 6m apoyada sobre arcilla con interacción suelo - estructura.

Continuacion de la tabla 5-8...

Losa cuadrada de 6 m.

Tipo de arcilla			Rígida		Muy rígida		Dura	
ks[1] (Ton/m^3)			1200		2400		4810	
Es[2] (Ton/m^2)			200		400		3000	
Módulo de Poisson = 0.2		Punto	Momentos flexionantes y fuerzas cortantes en dirección X					
			Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)	Momento (Ton-m)	Reacción (Ton)
Zona[3]	$0 \leq y \leq 0.75$	15	0	0	0	0	0	0
		16	10.075	-2.162	2.744	-0.826	-0.024	-0.062
		17	-1.502	0	-3.011	0	-0.830	0
	$0.75 \leq y \leq 2.25$	24	0	0	0	0	0	0
		25	2.647	1.598	-1.571	1.183	-0.800	0.242
		26	-2.574	0	-4.206	0	-1.204	0
	$2.25 \leq y \leq 3.75$	33	0	0	0	0	0	0
		34	11.269	16.480	2.586	8.913	-0.274	1.314
		35	1.739	0	-2.095	0	-0.925	0
Momento de análisis (Ton-m)			11.269		-4.206		-1.204	
Peralte[4] (cm)	Teoría elástica		31.1		20.9		13.5	
	Teoría plástica		21.9		15.3		10.5	
Desplazamiento máximo (mm)			21.116		11.157		1.612	

(1) Módulo de reacción.
(2) Módulo de elasticidad del suelo.
(3) Solo se indican los valores correspondientes a la cuarta parte de la losa.
(4) Considera un recubrimiento de 5cm (RCDDF).

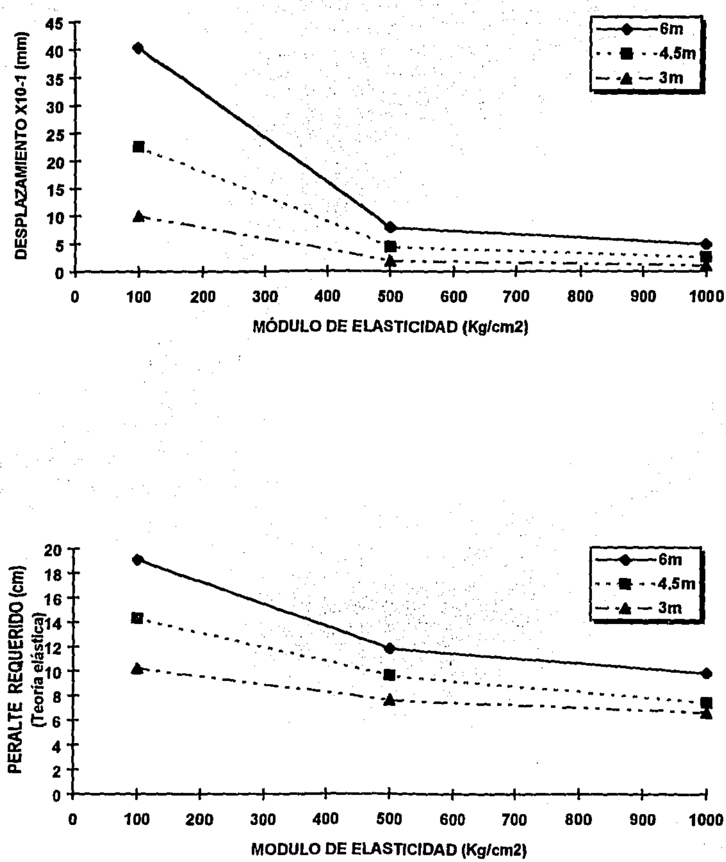
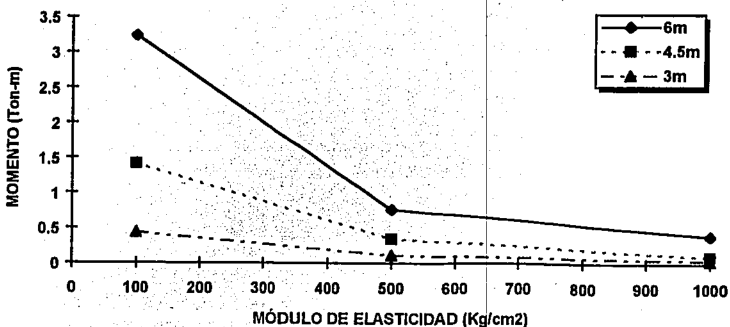
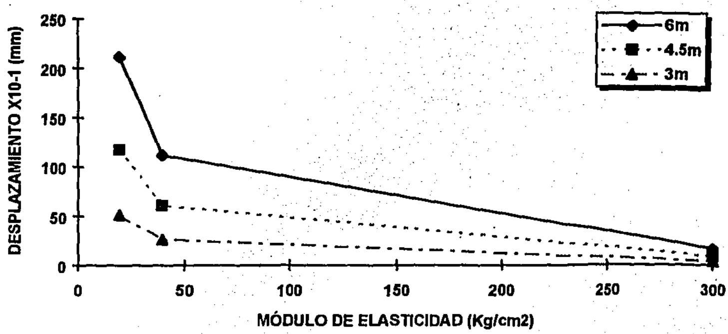


Fig. 5-5. Resultados del análisis de losas cuadradas de 3, 4.5 y 6m apoyadas sobre arenas, con interacción suelo - estructura.

Continuación de la fig. 5-5...





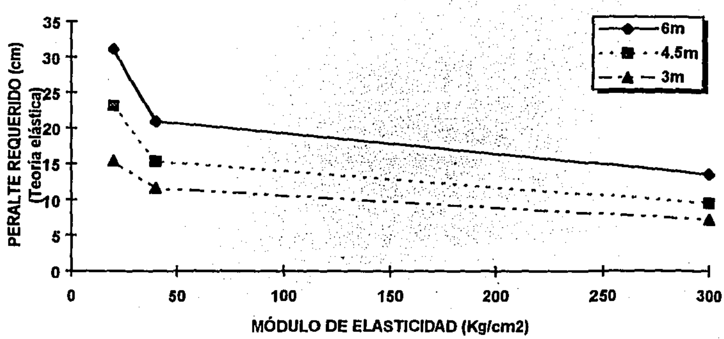
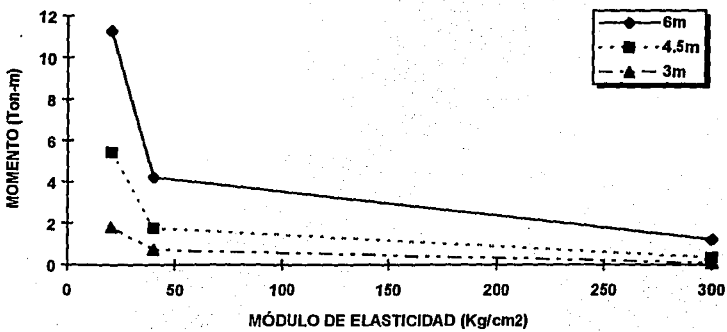


Fig. 5-6. Resultados del análisis de losas cuadradas de 3, 4.5 y 6m apoyadas sobre arcillas, con interacción suelo - estructura.

Continuación de la fig. 5-6...



TAMAÑO RECOMENDABLE DE LOSAS DE PISO

En el ejemplo 5.1 se obtuvo la distribución de momentos flexionantes con interacción suelo - estructura de una losa cuadrada apoyada sobre un medio elástico; ahora se procede al dimensionamiento, basado en los dos critérios: esfuerzos de trabajo y el procedimiento denominado método plástico o de resistencia última.

a) Fórmulas a usar (*Teoría Elástica*).

- Esfuerzos de Trabajo[18]:

$$fc = 0.45\, f'c \qquad (6.1)$$

$$fs = 0.50\, fy \qquad (6.2)$$

- Relación modular:

$$n = \frac{Es}{Ec} \qquad (6.3)$$

- Constantes para diseño:

$$k = \frac{1}{1 + \frac{fs}{nfc}} \qquad (6.4)$$

$$j = 1 - \frac{k}{3} \qquad (6.5)$$

$$R = \frac{1}{2} fc\ k\ j \qquad (6.6)$$

- Momento resistente de la sección:

$$M_R = R\ b\ d^2 \qquad (6.7.1)$$

- Peralte requerido por flexión.

$$d = \sqrt{\frac{M}{bR}} \qquad (6.7.2)$$

b) Formulas a usar (*Teoría Plástica*).

- Constantes para diseño[19]

$$f^{*}_{c} = 0.8\ f'_{c} \qquad (6.8)$$

$$f''_{c} = 0.85\ f^{*}_{c} \ \text{si}\ f^{*}_{c} \leq 250\ \text{kg/cm}^2 \qquad (6.9.1)$$

$$f''_{c} = \left(1.05 - \frac{f^{*}_{c}}{1250}\right) f^{*}_{c} \ \text{si}\ f^{*}_{c} > 250\ \text{kg/cm}^2 \qquad (6.9.2)$$

- Porcentaje de refuerzo balanceado

$$\rho(\%) = \left(\frac{f''_{c}}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000}\right) x100 \qquad (6.10)$$

- Momento resistente de la sección.

$$M_R = F_R\, b d^2 f''_{c}\, q(1 - 0.5q) \qquad (6.11)$$

donde:

FR = 0.9; Factor de resistencia
b = Ancho de la sección
d = Peralte efectivo
q = $\frac{\rho f_y}{f''_{c}}$
ρ = $\frac{A_s}{bd}$
A_s = Área del refuerzo en tensión

- Peralte requerido por flexión.

$$d = \sqrt{\frac{1.4\ M_{análisis}}{F_R\ f''_{c}\ q(1 - 0.5q) b}} \qquad (6.11.2)$$

Datos:

Materiales:

- Concreto.
  $f'_c = 250$ kg/cm^2, clase 1

- Acero.
  $f_y = 4200$ kg/cm^2

Momento máximo = 11.267 ton - m (del ejemplo 5-1)

En la tabla 6-1 se resumen los resultados obtenidos al utilizar el procedimiento de esfuerzos de trabajo, expresiones 6.1 a 6.7.

Tabla 6-1. Peralte total requerido, teoría elástica, en una losa cuadrada de 6.0 m con interacción suelo - estructura, apoyada sobre una arcilla rígida.

Material	Esfuerzos de trabajo		n	k	j	M_{max}	R	b	d (cm)	h*
	f_c (kg/cm^2)	f_s (kg/cm^2)	(Ec. 6.3)	(Ec. 6.4)	(Ec. 6.5)	(Ton-m)	(Ec. 6.6)	(cm)	(Ec. 6.7.2	(cm)
Concreto	112.5		9.0	0.3253	0.8916	11.267	16.31	100	26.1	31.1
Acero		2100								

* Considera un recubrimiento de 5cm (RCDDF).

En la tabla 6.2 se resúmen los resultados obtenidos al aplicar el método plástico, expresiones 6.8 a 6.11.

Tabla 6-2 Peralte total requerido, teoría plástica, en una losa cuadrada de 6.0 m con interacción suelo - estructura, apoyada sobre una arcilla rígida.

Material	f'c (kg/cm^2)	fy (kg/cm^2)	f^*c kg/cm^2 (Ec. 6.8)	$f''c$ kg/cm^2 (Ec. 6.9.1)	τ(%) (6.10)	Q	Mánalisis (Tun-m)	b (cm)	d (cm) (Ec. 6.11.2)	h* (cm)
Concreto	250		200	170	1.905	0.4705	11.267	100	16.9	21.9
Acero		4200								

* Considera un recubrimiento de 5cm (RCDDF).

Con los procedimientos anteriormente descritos se determinaron los peraltes requeridos en losas cuadradas de 3.0, 4.5 y 6.0m apoyadas sobre diferentes tipos de suelo, los resultados obtenidos se resumen en las tablas 5-7 y 5-8.
La figura 5.5 y 5.6 muestran la influencia que tiene el tipo de suelo sobre los desplazamientos, peraltes y momentos flexionantes en losas apoyadas sobre el terreno, con condiciones de borde libre.

Cabe hacer mención que el problema de diseño puede considerarse como un proceso cíclico de aproximaciones sucesivas.

Revisión por Esfuerzo Cortante.

Datos:

Material

- Concreto
  $f'c=250\ kg/cm^2$, clase 1

Fuerza cortante = 16.480 ton. (del ejemplo 5-1)

Fórmulas a utilizar:

a) Esfuerzos de trabajo (Teoría Elástica)

- Esfuerzo cortante máximo permisible

$$\upsilon_{max} = 0.8\sqrt{f'c} \qquad (6.12.1)$$

- Esfuerzo cortante actuante en la sección

$$\upsilon_{act} = \frac{V_{análisis}}{bd} \qquad (6.12.2)$$

b) Método plástico

- Esfuerzo cortante máximo permisible

$$\upsilon_{max} = 0.8\sqrt{f^{*}c} \qquad (6.13.1)$$

- Esfuerzo cortante en la sección

$$\upsilon_{u} = \frac{1.4V_{análisis}}{F_R bd} \qquad (6.13.2)$$

En la tabla 6.3 se resumen los resultados obtenidos al utilizar ambos procedimientos de diseño, teoría elástica y plástica. Es importante observar que el peralte requerido por flexión, teoría plástica, no satisface la revisión por esfuerzo cortante, por lo cual es necesario incrementar el peralte efectivo de la sección a 25.5 cm.

Tabla 6-3. Revisión por esfuerzo cortante, en una losa cuadrada de 6.0 m con interacción suelo estructura, apoyada sobre una arcilla rígida.

Material	f'c (kg/cm²)	f*c (kg/cm²)	b (cm)	Teoría	d[1] (cm)	d[2] (cm)	Esfuerzo Actuante (kg/cm²)	Esfuerzo Permisible (kg/cm²)	h[3]
Concreto	250	200	100	Elástica	26.1	19.7	6.31	8.38	31.1
				Plástica	16.9	25.5	17.07	11.31	30.5

(1) Peralte requerido por flexión.
(2) Peralte requerido por esfuerzo cortante.
(3) Considera un recubrimiento 5 cm. (RCDDF)

Capítulo VII

ARMADOS DE REFUERZO RECOMENDABLES

Con los momentos flexionantes obtenidos para la losa cuadrada del ejemplo 5.1 y con el procedimiento de esfuerzos de trabajo, se diseñó el refuerzo principal, para cada sección en que se dividió la losa, en su etapa de análisis (Fig. 5-1).

Fórmulas a utilizar:

- Acero principal por flexión[13]:

$$A_s = \frac{M}{f_s\, j\, d} \tag{7.1}$$

- Refuerzo por cambios volumétricos[12]:

$$a_s = \frac{660 x_1}{fy(x_1 + 100)} \tag{7.2}$$

donde:

a_s = Área transversal del refuerzo colocado en la dirección que se considera por unidad de ancho de la pieza, (cm^2/cm).

x_1 = Dimensión minima del miembro medida perpendicularmente al refuerzo (cm).

Si x_1 no excede de 15 cm, el refuerzo puede colocarse en una sola capa. Si x_1 es mayor que 15 cm, el refuerzo se colocará en dos capas próximas a las cartas del elemento.
En elementos estructurales expuestos directamente a la intemperie o en contacto con el terreno, el refuerzo no será menor de 1.5 a_s.

De la aplicación de las fórmulas 7.1 y 7.2, junto con los momentos flexionantes dados en la tabla 5-8 para una losa cuadrada de 6m, se obtienen los datos que se resumen en la tabla 7-1.

Tabla 7-1 Acero de refuerzo (lecho inferior) para una losa cuadrada con interacción suelo - estructura.

Acero de refuerzo en dirección X					
Sección	**Nudo**	**Momento (Ton-m)**	**Área de acero (cm²) (Ecua. 7.1)**	**(Ecua. 7.2)**	**Distribución del acero de refuerzo**
	15	0.000	--		
Y=0.0 m	16	10.075	20.620	2.72	# 6 @ 12 cm
	17	-1.502	3.070		
	24	0.000	--		
Y=1.15 m	25	2.747	5.420	2.72	# 4 @ 20 cm
	26	-2.574	5.270		
	33	0.000	--		
Y=3.0 m	34	11.269	23.060	2.72	# 6 @ 12 cm
	35	1.739	3.560		

Notas:

1.- Solo se indican los valores correspondientes a la cuarta parte de la losa.
2.- La distribución del refuerzo indicada en la tabla 7-1 aplica en ambos sentidos.
3.- Se emplea refuerzo en el lecho superior de la losa del # 4 @ 20 cm en ambos sentidos.

En la figura 7-1 se indica la distribución en planta del acero de refuerzo, para el caso de una losa rectangular apoyada sobre el terreno con interacción suelo - estructura.

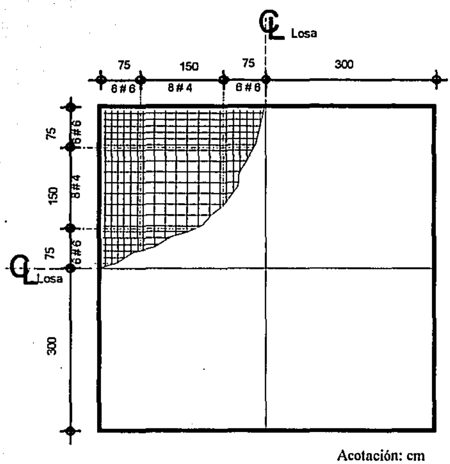


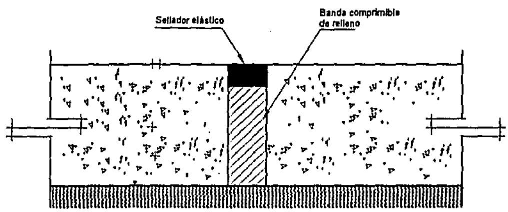
Figura 7-1 Distribución del refuerzo longitudinal en planta (lecho inferior) para una losa cuadrada de 6 m con interacción suelo - estructura.

TIPOS DE JUNTAS COMUNES ENTRE LOSAS.

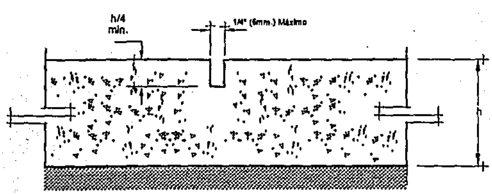
Los tipos de juntas que se emplean en pisos de concreto son las siguientes:

1.- Juntas de expansión.
2.- Juntas de contracción.
3.- Juntas de construcción.

En la figura 7-1 se muestran los tipos de juntas mencionados.



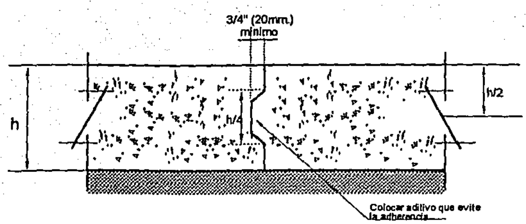
Junta de expansión



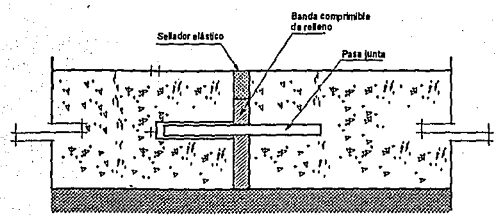
Junta de contracción

Fig. 7-1. Tipos comunes de juntas en pisos de concreto.

continuación de Fig. 7-1...



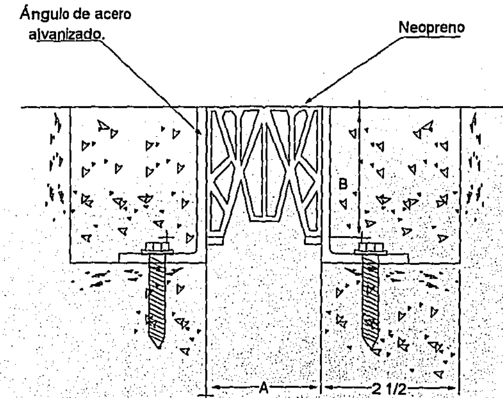
Junta de construcción



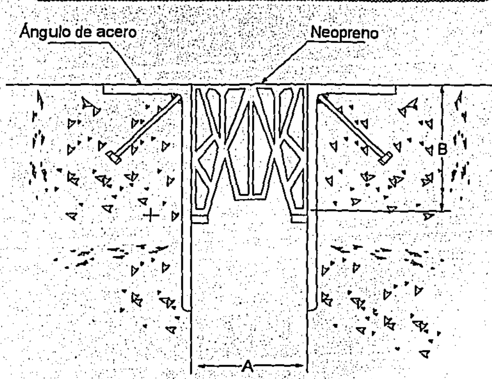
Peralte de la losa Pulg.	Diámetro del pasa junta Pulg.	Longitud Pulg.	Espaciamiento C.A.C. Pulg.
5-6	3/4	16	12
7-8	1	18	12
9-11	1-1/4	18	12
mm	mm	mm	mm
120 - 150	20	400	300
180 - 200	25	460	300
130 - 280	35	460	300

Juntas de expansión con barras pasajuntas

Cuando se esperan asentamientos altos se recomiendan las siguientes juntas con la finalidad de proteger los bordes de la losa.



A	B	Ancho	Altura	Movimiento Horizontal
1" (25.4)	1 7/8" (47.63)	2" (50.8)	1 3/4" (44.5)	3/8" (9.5)
1 1/2"	2 3/8" (60.3)	2 1/2" (63.5)	2 1/4" (57.2)	1/2"
2" (50.8)	2 3/8" (60.3)	3" (80.3)	2 1/4" (57.2)	9/16" (14.3)



A	B	Ancho	Altura	Movimiento Horizontal
1" (25.4)	2 1/2" (63.5)	2" (50.8)	2 1/8" (54.0)	3/8" (9.5)
1 1/2" (38.1)	3 1/8" (79.4)	2 1/2" (63.5)	2 3/4" (69.9)	1/2" (12.7)
2" (50.8)	4" (101.6)	3 1/2" (88.9)	3 1/2" (88.9)	9/16" (14.3)

Capítulo IX

RECOMENDACIONES PARA DISEÑO

Se ha presentado en este trabajo la aplicación del método de diferencias finitas al problema de interacción suelo - estructura, para losas apoyadas sobre el terreno, con bordes libres.

Para el diseño es conveniente tener en cuenta los siguientes aspectos:

1.-La exactitud del método de diferencias finitas depende del módulo λ de la retícula establecida, por lo cual es conveniente emplear retículas finas

2.-Las expresiones resumidas en la figura 4-3 solo son válidas para losas rectangulares apoyadas sobre el suelo con condiciones de bordes libres

3.-La interacción suelo estructura se establece al considerar que el campo de desplazamientos presentes en la placa son iguales a los asentamientos que sufre el suelo.

COMENTARIOS FINALES.

El principal propósito de este trabajo fué la de revisar un método de analisis que permitirá incorporar en forma racional las características de deformación del suelo y la rigidez propia de la cimentación. Por tal motivo, se propuso utilizar el método de diferencias finitas para estudiar el problema de interacción suelo - estructura y se aplicó al problema de losas rectangulares apoyadas sobre un medio elástico, con condiciones de bordes libres.
El procedimiento propuesto se explicó detalladamente en el capítulo V y se utilizó para analizar tres losas, con dimensiones de 3, 4.5 y 6m, y peraltes de 15, 22.5 y 30cm respectivamente, apoyadas sobre diferentes tipos de suelos, con características de deformación diferentes (módulo de reacción).

De los resultados obtenidos se concluye lo siguiente:

1.- Los elementos mecánicos obtenidos aumentan a medida que las características de deformación del suelo se incrementan. En otras palabras se tiene, que para una losa apoyada sobre un suelo altamente compresible se requieren peraltes mayores debido a que los elementos mecánicos aumentan.

2.- El módulo de reacción del suelo es un factor importante en el diseño de losas apoyadas sobre el terreno, por lo cual es conveniente lograr una compactación adecuada en el terreno sobre el cual se piensa desplantar la losa.

REFERENCIAS

1.- S. Timoshenko y S. Woinowsky - Krieger, "Theory of Plates and Shells", 2a. ed. Mc. Graw Hill, Nueva York, 1959.

2.- R.H. Wood, "Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates", Ronald Press, Nueva York, 1961.

3.- Neftalí Rodriguez Cuevas, "Apuntes de clase de la materia *Mecanica Avanzada I*" impartido en la DEP-FI, UNAM.

4.- R. Park, W.L. Gamble, "Reinforced concrete slabs", John Wiley & Sons, Inc.

5.- J.J. Tuma, S.E. French, K.S. Havner, "Analysis of Flat Plates by the Algebraic Carry - over Method". Volume 1, a Publication from the office of Engineering Research of Oklahoma State University, Stillwater, Oklahoma, 1958.

6.- Jack R. Vinson, "Structural Mechanics: The Behavior of Plates and Shells", John Wiley & Sons, New York, 1974.

7.- Oscar de Buen, "Estructuras de acero", ed. Limusa, 1980.

8.- Terzaghi, K , "Evaluation of Coefficient of Subgrade Reaction", Geotechnique 5, N° 4, December 1955, pp 297-326.

9.- Josep E. Bowles, "Foundation Analysis and Design", Third Ed., Mc. Graw Hill.

10.- H. F. Winterkorn y H. Y. Fang, "Foundation Engineering Handbook", Van Nostrand Reinhold Company.

11.- Zeevaert Leonardo, "Foundation Engineering for difficult subsoil conditions", Van Nostrand Reinhold Company.

12.- Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto, DDF.

13.- Bowles, J. E., "Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering", Mc Graw Hill, New York, 1974.

14.- Edward J. Ulrich, "Subgrade Reaction in Mat Foundation Design", Concrete International: Desing & Construction, April 1991, pp 41-50.

15.- C. Venkatramaiah, "Geotechnical Engineering", John Wiley & Sons.

16.- Poulos, H. G., and Davis, E. H., "Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics", John Wiley & Sons, New York, 1974.

17.- Fh-hua-chen, "Foundations on expansive soils", Elsevier Scientific Publishing Company.

18.- Publicación 401, "Diseño y Construcción de estructuras de concreto", Instituto de Ingenieria UNAM, 1977.

19.- Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto, 1987.