

01162

3
2ej



EL PRINCIPIO DE MAXIMA ENTROPIA EN LAS
DISTRIBUCIONES BIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS

JOSE Y. DOMINGUEZ ESQUIVEL

FALLA DE ORIGEN

DIRECTOR DEL TEMA DE TESIS: DR. CARLOS A. ESCALANTE SANDOVAL

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE

POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

(HIDRAULICA)

CIUDAD UNIVERSITARIA, D. F., 1995.



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

INTRODUCCION	1
1 METODOS DE ESTIMACION DE PARAMETROS	
1.1 Método de momentos para sistemas continuos	9
1.2 Método de momentos para sistemas discretos	37
1.3 Método de cumulantes	43
1.4 Método de medias incompletas	50
1.5 Método de momentos de probabilidad pesada (MPP)	56
1.6 Método de momentos mezclados (MMIX)	59
1.7 Método de estimación de la máxima verosimilitud (ML)	61
1.8 Método de mínimos cuadrados (MMC)	63
1.9 Método de mínimos cuadrados no lineales	67
1.10 Métodos de optimización	74
2 METODO DEL PRINCIPIO DE MAXIMA ENTROPIA (POME)	
2.1 Origen del método	81
2.2 El método de Máxima Entropía en forma de diagrama de flujo	87
2.3 Aplicación del método a modelos univariados	89
2.4 Un algoritmo para la determinación de los parámetros μ y α de la Función de Distribución de Probabilidad de Valores Extremos Tipo I (Gumbel) a partir de la Entropía [método de Phien]	102
2.5 Resumen del algoritmo del Método POME aplicado a la función de probabilidad EVI	104
3 APLICACION DEL METODO DE MAXIMA ENTROPIA A LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION BIVARIADAS	
3.1 Enfoques en el análisis de frecuencias de avenidas ..	107
3.2 Sobre el desarrollo de las distribuciones de valores extremos	110
3.3 Origen, características y propiedades de las distribuciones univariadas de valores extremos	111
3.4 Origen, características y propiedades de las distribuciones bivariadas de valores extremos	120
3.5 Método de máxima entropía aplicado a modelos bivariados	125
3.6 Aplicación del método de máxima entropía a la función de distribución Bigumbel (BEV11)	128
3.7 Un algoritmo para la estimación de los parámetros u_1 , α_1 , u_2 y m de la función BEV11, a partir del Método de Máxima Entropía	151
4 EFICIENCIA EN LA ESTIMACION DE PARAMETROS	
4.1 Aspectos generales	157
4.2 Generación sintética de muestras bivariadas	158
4.3 Indices de comportamiento	160

5 APLICACIONES	
5.1 Aspectos generales	165
5.2 Proceso de análisis	165
5.3 Selección del tipo de distribución de valores extre- mos	178
5.4 Límites de confianza de eventos de diseño	178
5.5 Análisis de resultados	182
6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	185
Referencias	189
Apéndice A	199
Apéndice B	211
Apéndice C (Programa "BEV11-ME.BAS")	243
Apéndice D	253

D E D I C A D O A:

Mi esposa:

Hermelinda Jiménez

Por su amor, paciencia y comprensión.

Mis padres:

Cipriana Esquivel

Manuel Domínguez

Por darme lo mejor de ellos.

AGRADECIMIENTOS

Con toda sinceridad deseo manifestar mi más profundo agradecimiento a los profesores de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de ingeniería por compartir sus valiosos conocimientos.

Debo especial gratitud al Dr. Carlos A. Escalante Sandoval, por el apoyo y dirección brindados a lo largo de mis estudios de posgrado.

Estoy muy reconocido con el Dr. Ramón Domínguez Mora, por sus valiosos comentarios y consejos que motivaron e hicieron posible la anhelada culminación de ésta investigación.

Aprecio en lo que vale la minuciosa atención prestada a este trabajo por los Drs. Rolando Springall Galindo y Jesús Gracia Sánchez, y al M. en I. Oscar Fuentes Mariles.

Estoy en deuda con el M. en C. Arturo B. Juárez León, por su ayuda desinteresada y gran amistad.

Parte de mi trabajo ha sido posible al apoyo que me ha concedido el Instituto Mexicano de la Tecnología del Agua y a la Comisión Nacional del Agua.

INTRODUCCIÓN

El análisis de frecuencias es un grupo de técnicas matemáticas y estadísticas empleadas para describir la probabilidad de ocurrencia de un evento. Este grupo de técnicas constituye uno de los métodos aplicados por los hidrólogos para estimar las probabilidades asociadas con los eventos de diseño. Muchas críticas pueden realizarse al método y a las consideraciones para su uso; sin embargo, prevalece que éste es uno de los pocos métodos disponibles y mejor que otros no probabilísticos.

El análisis de frecuencias se emplea no únicamente como una herramienta en la advertencia de desastres, sino también, como un medio de introducir diseños eficientes. Cuando una estructura hidráulica, es subdiseñada ya sea con datos o métodos inadecuados, los resultados son obviamente lamentables. Es deseable que lo anterior no ocurra frecuentemente y así el hidrólogo igualando la no-falla con el éxito, la satisface con su técnica de diseño. La no-falla significa no necesariamente un diseño eficiente. Frecuentemente las estructuras son sobrediseñadas y por lo tanto muy seguras, pero también muy costosas. Un diseño verdaderamente eficiente sólo será alcanzado como un resultado de estudios que relacionen costos contra riesgo y análisis de frecuencias.

Es posible argumentar dos razones en donde un análisis de frecuencias de avenidas para una región puede ser preferible en lugar de aquel desarrollado para un sitio en específico:

a) Debido a la posible variación muestral en una sola estación de registro, cualquier análisis para dicha estación está sujeta a un cierto error. El cual puede reducirse tomando en cuenta la información de varios sitios.

b) Existen mucho más sitios donde los datos hidrológicos son requeridos, que sitios en los cuales la información esta disponible. Esto significa que es necesaria alguna forma de

análisis, por la cual se transfiera información a partir de aquellos sitios en que se disponga a sitios donde no se cuente con ella.

Existen dos fuentes principales de error en el empleo de una distribución de frecuencias para estimar las magnitudes de los eventos asociados con su probabilidad de ocurrencia. La primera, es aquella en la que se desconoce cual de las muchas distribuciones disponibles es la "verdadera" distribución; Cual es la distribución? si en cualquier sitio los eventos ocurren de manera natural. Esto es importante debido a que el periodo de registro de la muestra disponible es usualmente pequeño, mientras que los eventos a estimar son requeridos generalmente para un periodo de retorno grande. La mayoría de las distribuciones tienen una forma similar en la parte central pero difieren ampliamente en sus extremos. Por lo que, es posible ajustar varias distribuciones a los datos muestrales y obtener con diferentes estimadores los eventos relacionados con sus periodos de retorno. La prueba de bondad de ajuste Chi-Cuadrada y otras similares pueden emplearse para seleccionar la distribución que mejor describe el comportamiento de los datos; sin embargo, esto no supera el problema básico.

Por otra parte, una vez que la distribución ha sido seleccionada, la segunda fuente de error se hace presente. Los parámetros estadísticos de la distribución de probabilidad deben estimarse a partir de datos de la muestra. Por lo cual, la muestra de datos esta sujeta al error del método de ajuste que minimiza estos errores y debe, por lo tanto, ser lo más eficientemente posible.

En virtud de lo anterior, se desprende la importancia de continuar investigando y perfeccionando los métodos y técnicas de los análisis hidrológicos.

Dentro de éstos métodos y técnicas se encuentra el ya mencionado análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos. El cual requiere de la estimación de cierto gasto de diseño Q_T , asociado

Dentro de los diferentes métodos de estimación de parámetros con que se cuenta en el análisis hidrológico de eventos extremos se tiene el Método de Máxima Entropía (POME), el cual ofrece una alternativa con buen comportamiento en la estimación de parámetros (Singh, V. P. and Singh, K., 1987; Jowitt, P. W. 1979, 1980; Phien, H. N., 1980, 1986, 1987)

La aplicación del Principio de Máxima Entropía no sólo se ha llevado a cabo en el campo del análisis hidrológico, sino también en el de hidráulica de tuberías y canales. Ha sido empleado en la modelación de la distribución vertical de la velocidad, esfuerzo cortante y concentración de sedimento suspendido en canales abiertos (Chiu Chao-Liu, 1987); en la descripción de la distribución bidimensional de la velocidad para una sección transversal de un canal (Chiu Chao-Liu, 1988, 1989, 1991, 1992; Barbé, D. E., Cruise, J. F., and Singh, V. P. 1991); en estudios de confiabilidad y flexibilidad bajo condiciones de falla en redes de distribución de agua potable (Awumah, Kofi., et al., 1991; Xu, Chengchao., and Jowitt, Paul W., 1991); en la derivación de una nueva ecuación de la distribución de la velocidad en tuberías (Chiu Chao-Liu, et al., 1993).

En este trabajo se desarrolla una alternativa para el análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos, mediante el uso de la distribución logística bivariada de valores extremos con marginales tipo Gumbel (BEV11):

Los objetivos específicos de esta investigación son:

1. Desarrollar el esquema de estimación de parámetros por el Método del Principio de Máxima Entropía de la Distribución Logística Bivariada con marginales de Valores Extremos tipo I (Gumbel).
2. Determinar la reducción en la variabilidad de los parámetros para la estimación conjunta bivariada en

con un periodo de retorno T (años), en una estación para la cual el periodo de registro n es mucho menor que T . La variabilidad de los estimados de Q_T , basada en el registro de una sola estación, ha provocado la búsqueda de métodos de estimación regional para mejorar su estimación. Estos métodos consideran la información proveniente de otra u otras estaciones vecinas que presenten una buena correlación con la muestra en estudio y que posean una mayor longitud de periodo de registro.

Existen muchos métodos de análisis de frecuencias regionales (Cunnane, 1988), uno de ellos es mediante el empleo de distribuciones multivariadas.

Muchas contribuciones han sido publicadas en la literatura relacionadas al problema de mejorar la estimación de parámetros usando distribuciones multivariadas. Sin embargo, la mayoría de ellas se han concentrado en la distribución normal (Anderson, 1957).

Recientemente, la aproximación multivariada de valores extremos ha sido aplicada a la solución de problemas hidrológicos. Los fundamentos teóricos de tal aproximación fueron dados hace más de 30 años (Gumbel, 1958, 1959, 1960a, 1960b, 1967; Tiago de Oliveira, 1958, 1975a, 1975b; Galambos, 1975, 1978), pero ellos han tenido muy poco impacto en el campo de la hidrología. Posteriormente, muchos modelos bivariados de valores extremos comenzaron a aparecer en la literatura (Tiago de Oliveira, 1982). Un grupo particular entre ellos son los modelos diferenciables, los cuales fueron estudiados por Rueda (1981), Raynal (1985, 1987a, 1987b), sus resultados demuestran que se obtienen mejoras significativas en la fase de estimación de parámetros, en la reducción de la variabilidad de los gastos de diseño y el cálculo de los límites de confianza para valores de diseño, por lo que el análisis de frecuencias a través de distribuciones multivariadas de valores extremos representa un campo prometedor de investigación, además de que está en gran parte inexplorado en el sentido de aplicaciones hidrológicas.

comparación con la univariada para cada estación individual.

3. Aplicar la metodología propuesta al análisis de frecuencias de gastos máximos anuales en dos regiones hidrológicas de la República Mexicana.

Se anota que el desarrollo de la aproximación bivariada, en éste estudio, se lleva a cabo para el caso de periodos de registro comunes.

La contribución general de la investigación propuesta es la de presentar una alternativa y demostrar que la aplicación de las distribuciones bivariadas de valores extremos, al análisis de frecuencias de eventos extremos, mejora las fases de estimación de parámetros y el cálculo de eventos de diseño.

Se espera que el reducir la incertidumbre en la estimación de la probabilidad de ocurrencia de los eventos hidrológicos analizados, traerá consigo sensibles ahorros en los costos de construcción de las estructuras, incremento en la seguridad de las obras de control de avenidas y una mejor delimitación y uso de las planicies de inundación.

Por último, debe mencionarse que el trabajo de investigación se ha estructurado de la siguiente manera:

En el Primer Capítulo son presentados los Métodos más empleados en la Estimación de Parámetros, para las funciones de distribución de probabilidad.

En el Segundo Capítulo se muestra el origen del Método del Principio de Máxima Entropía y su aplicación a modelos univariados.

En el Tercer Capítulo se describe el desarrollo de la teoría de los valores extremos y las características de las distribuciones

univariadas y bivariadas de valores extremos. Así también, en éste mismo capítulo, se desarrolla un algoritmo para determinar los estimadores de máxima entropía de los parámetros de la Distribución de Valores Extremos Tipo II (BEV11).

En el Cuarto Capítulo se analiza la eficiencia de los estimadores por máxima entropía para el modelo BEV11, comparada con el modelo univariado.

En el Quinto Capítulo es aplicado el algoritmo propuesto al análisis de frecuencias de gastos máximos anuales de 25 estaciones hidrométricas.

Por último, en el Sexto Capítulo, se presentan las conclusiones y se ofrecen las recomendaciones derivadas de la investigación.

CAPÍTULO UNO MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE PARAMETROS

En general, los problemas hidrológicos son analizados a través del uso de un modelo. El modelo puede ser una conceptualización, una relación empírica, un dispositivo físico; o un conjunto de expresiones matemáticas, estadísticas y/o empíricas. La mayoría de los modelos hidrológicos pueden clasificarse como determinísticos, paramétricos, estocásticos, o una combinación de ellos. La división entre estos tres tipos básicos de modelos no está del todo bien delimitada. Se puede pensar que los modelos están formados de alguna combinación de cada componente de los cuales representan un espectro continuo de modelos "tipo" variando desde completamente determinístico por un lado hasta completamente estocástico por el otro.

Un modelo completamente determinístico sería aquel que es obtenido a través de relaciones físicas y no requiere de datos experimentales para su aplicación. Un modelo paramétrico puede ser considerado como un determinístico en el sentido de que una vez que los parámetros del modelo son determinados, el modelo siempre genera la misma salida a partir de la información de entrada. Por otro lado, un modelo paramétrico es estocástico en el sentido de que los parámetros estimados dependen de los datos observados y aquellos cambiarán cuando los datos observados cambien. Un modelo estocástico es aquel en el cual las salidas son predecibles solo en un sentido estadístico. En un modelo estocástico, el empleo repetido de un grupo dado de entradas del modelo genera salidas que no son las mismas pero siguen cierto modelo estadístico.

Uno de los problemas más comunes en hidrología es la estimación de una avenida o sequía de diseño a partir de un registro de escurrimientos bastante corto. Dibujando la magnitud de los eventos medidos, digamos gastos máximos anuales, algún tipo de modelo es generalmente aparente. La pregunta es cómo emplear este modelo para extender los datos disponibles y estimar el evento de

diseño.

Si se dispone de un gran número de eventos observados o medidos a partir de un período de registro al menos tan largo como el período de retorno del evento de diseño a estimarse, entonces el problema se simplifica. En el caso extremo, si se contara con una muestra bastante grande, digamos un millón de eventos, entonces el evento de diseño y su intervalo de confianza podría derivarse directamente de los datos de la muestra. Dado que tal cantidad de datos hidrológicos no son posibles de obtener, la muestra de datos disponible deberá utilizarse para ajustarles una distribución de frecuencias, la cual a su vez será empleada para extrapolar los eventos de diseño, ya sea gráficamente o por medio de la estimación de sus parámetros.

Como ya se ha mencionado, los parámetros son estimados para una función de distribución a partir de los datos de una muestra. Existen, por supuesto, muchas técnicas por las cuales obtener la estimación de parámetros. Por lo que es posible preguntarse ¿Cuál es el camino más adecuado para su estimación?, ¿Qué significa el mejor estimador? y ¿Estos son los únicos estimadores?

Cada estimador de un parámetro es una función de los valores de la muestra, los cuales son observaciones de una variable aleatoria. Así, el propio parámetro estimado es una variable aleatoria que tiene su propia distribución muestral. Un estimador obtenido a partir de un grupo de valores puede ser considerado como un valor observado de una variable aleatoria. Por lo cual, la bondad de un estimador puede ser juzgado a partir de su distribución. Se han realizado excelentes discusiones sobre algunos de estos resultados que han sido reportados por Kuczera (1983a, 1983b), Sorooshian (1980), Sorooshian y Gupta (1983), entre otros.

Existen diferentes técnicas de estimación de los parámetros de los modelos hidrológicos. Los Métodos de Momentos (Nash, 1959; Dooge, 1973) y Cumulantes (Dooge, 1973; Harley, 1967; O'Meara, 1968; Van de Nes y Hendriks, 1971). Algunos otros métodos populares lo son:

el Gráfico (Yevjevich, 1972); el Método de Medias Incompletas (Houghton, 1978); el Método de Momentos de Probabilidad Pesada (Greenwood et al., 1979); el Método de Momentos Mezclados (Rao, 1980, 1983; Shrader et al., 1981); el de Estimación de la Máxima Verosimilitud (Douglas, Clarke, y Newton, 1976; Sorooshian, Gupta, y Fulton, 1983; Phien y Jivajirajah, 1984); el Método de Mínimos Cuadrados (Jones, 1971; Snyder, 1972; Bree, 1978a, 1978b); el de Estimación de Parámetros Restringidos (Natale y Todini, 1974; Todini y Wallis, 1977); el de Estimación Bayesiana (Natale y Todini, 1974; Kuczera, 1983a, 1983b); los Métodos de Optimización (Himmelblau, 1972; Rosenbrock, 1960; Palmer, 1969; DeCoursey y Snyder, 1969; Sorooshian, 1980; Sorooshian y Gupta, 1983; Sehitoglu, 1983); el de Regresión y Correlación (Yevjevich, 1972; Clarke, 1973); y el Método del Principio de Máxima Entropía (Tribus, 1969).

1.1 METODO DE MOMENTOS PARA SISTEMAS CONTINUOS

Este método es utilizado frecuentemente para estimar los parámetros de modelos hidrológicos lineales (Nash, 1959; Diskin, 1967; Diskin y Boneh, 1968; Dooge, 1973) y consiste, básicamente, en igualar los momentos poblacionales con los momentos muestrales.

Definición y notación

Sea x una variable continua y $f(x)$ su función de densidad que satisface alguna condición necesaria. Entonces el r -ésimo momento M_r^a de $f(x)$ con respecto a un punto arbitrario "a" puede definirse como:

$$M_r^a(f) = M_r^a = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^r f(x) dx \quad (1.1a)$$

Esta es la definición empleada en Ingeniería. Sin embargo, en estadística la definición es:

$$M_r^a(f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^r f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} \quad (1.1b)$$

Las dos definiciones anteriores son numéricamente equivalentes.

Análogamente a la ecuación (1.1), el momento absoluto W_r^a de orden r con respecto al punto "a" puede ser definido como:

$$W_r^a = \int_{-\infty}^{\infty} |x - a|^r f(x) dx \quad (1.1c)$$

donde:

M denota el momento

W momento absoluto

r orden del momento, y debe ser ≥ 0

a punto con respecto del cual se toma el momento

$f(x)$ función de densidad de la variable x

Existen algunas funciones que poseen momentos de orden inferior, y otras que no poseen alguno, excepto el momento de orden cero. Sin embargo, si un momento de orden superior existe, los momentos de todos los ordenes inferiores deben existir.

Si $r = 0$, entonces:

$$M_0^a = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Así, el momento de orden cero es el área bajo la curva, definida por $f(x)$ y sujeta a $-\infty < x < \infty$.

Si $r = 1$, entonces:

$$M_1^a = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) f(x) dx = \mu - a$$

donde μ es el centroide del área o media. Así, el primer momento es la media pesada con respecto al punto "a". Si "a" = 0, el primer momento proporciona la media. Cuando $a = \mu$, entonces el r -ésimo momento con relación a la media es:

$$M_r^\mu = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x) dx \quad (1.2)$$

En particular, si $r = 1$; y $a = \mu$, entonces:

$$M_1^\mu = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x) dx = \mu - \mu = 0$$

A partir de aquí, se omitirá el superíndice (a) si el momento es tomado con respecto a 0 . Las propiedades que describen los momentos con respecto a una función específica pueden ser resumidas como:

M_0 = área (bajo la curva),

M_1 = retraso o media,

M_2^μ = varianza, una medida de dispersión de la función con relación a la media,

M_3^μ = medida de asimetría (sesgo) de la función,

M_4^μ = curtosis, una medida de picudez de la función.

Ejemplo 1.1

A manera de aplicación de los anteriores conceptos, consideremos una función $f(x) = a e^{-ax}$, donde $x > 0$ y $a > 0$. Para la cual se determinarán los r -ésimos momentos con respecto a la media y el origen M_r^μ y M_r , respectivamente.

se tiene:

$$M_r^\mu = a \int_0^{\infty} (x-\mu)^r \exp(-ax) dx$$

Por lo que

$$M_0^\mu = -e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$M_1^\mu = a \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx - a\mu \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \mu - \mu = 0$$

y así sucesivamente.

Así mismo

$$M_r = a \int_0^{\infty} x^r e^{-ax} dx$$

por lo tanto

$$M_0 = -e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$M_1 = a \left[-\frac{x}{a} e^{-ax} - \frac{1}{a^2} e^{-ax} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}$$

y así sucesivamente.

Función Generadora de Momentos (FGM)

Los momentos de una función pueden determinarse tanto empleando directamente su definición en la ecuación (1.1) o usando la función generadora de momentos (FGM), denotada por $G(\theta)$. La FGM de $f(x)$ puede ser definida como:

$$G(\theta) = E [e^{\theta x}] \quad (1.3)$$

donde $E [\dots]$ es el operador esperanza y θ es la variable transformada de FGM.

La ecuación (1.3) puede escribirse también como:

$$G(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \quad (1.4)$$

Si $G(\theta)$ existe, entonces esta es continuamente diferenciable en la vecindad del origen. Si $G(\theta)$ en la ecuación (1.4) es derivada r veces con respecto a θ , se tiene:

$$\frac{d^r}{d\theta^r} G(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{\theta x} f(x) dx$$

Si $\theta = 0$, entonces

$$\frac{d^r}{d\theta^r} G(\theta) \Big|_{\theta=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx = E [x^r] = M_r \quad (1.5)$$

El primer término del lado izquierdo es interpretado como la r -ésima derivada de $G(\theta)$ evaluada para $\theta = 0$. Así, los momentos de una función pueden obtenerse por diferenciación de su FGM.

Ejemplo 1.2

A continuación se determina la FGM de la función del ejemplo 1.1,

y los momentos.

$$G(\theta) = a \int_0^{\infty} e^{\theta x} e^{-ax} dx = a \int_0^{\infty} e^{-(a-\theta)x} dx = \frac{a}{a-\theta}$$

$$M_r = \left. \frac{d^r G(\theta)}{d\theta^r} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{d^r}{d\theta^r} \left(\frac{a}{a-\theta} \right) \right|_{\theta=0} = r! \frac{a}{(a-\theta)^{r+1}} \Big|_{\theta=0} = r! \frac{1}{a^r}$$

$$M_0 = 1$$

$$M_1 = \frac{1}{a}$$

$$M_2 = \frac{2}{a^2}$$

y así sucesivamente.

Función Característica (FC)

Desafortunadamente, La FGM no siempre existe. Por lo que, en ocasiones es mejor trabajar con la función característica (FC), la cual existe siempre. Una función característica puede ser definida como:

$$C(\theta) = E [e^{i\theta x}]$$

o

$$C(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f(x) dx \quad (1.6)$$

donde $C(\theta)$ puede ser considerada como una integral transformada de $f(x)$.

La integral $C(\theta)$ converge absoluta y uniformemente para las funciones de nuestro interés en la teoría lineal de sistemas hidrológicos.

Si $C(\theta)$ es diferenciada r veces con respecto a θ ,

$$\frac{d^r}{d\theta^r} C(\theta) = (i)^r \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} x^r f(x) dx$$

$$\left. \frac{d^r}{d\theta^r} C(\theta) \right|_{\theta=0} = (i)^r \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx = (i)^r E [x^r] = (i)^r M_r$$

despejando M_r :

$$M_r = (i)^{-r} \left. \frac{d^r}{d\theta^r} C(\theta) \right|_{\theta=0} \quad (1.7)$$

En esta forma, los momentos de una función pueden obtenerse diferenciando la función característica correspondiente. Por consiguiente, si $C(\theta)$ es conocida en forma explícita, entonces, pueden conocerse los momentos con respecto al origen.

Ejemplo 1.3

Considerando la función dada en el ejemplo 1.1, se determinará su FC y los momentos.

$$\begin{aligned} C(\theta) &= a \int_0^{\infty} \exp(i\theta x) \exp(-ax) dx \\ &= a \int_0^{\infty} \exp[-(a - i\theta)x] dx \end{aligned}$$

$$C(\theta) = \frac{a}{a - i\theta}$$

$$\left. \frac{d^r}{d\theta^r} C(\theta) \right|_{\theta=0} = r! (i)^r \frac{a}{(a - i\theta)^{r+1}} \Big|_{\theta=0} = (i)^r M_r$$

Por lo que

$$C(\theta) \Big|_{\theta=0} = M_0 = 1$$

$$\left. \frac{d^r C(\theta)}{d\theta^r} \right|_{\theta=0} = r! \left(\frac{i}{a}\right)^r$$

$$M_1 = \frac{1}{a}$$

$$M_2 = \frac{2}{a^2}$$

y así sucesivamente.

Transformada de Fourier

Los momentos de una función $f(x)$ también pueden obtenerse

empleando la transformada de Fourier;

$$F(\omega) = T[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

En la que T denota la transformada de Fourier. Diferenciando la función $F(\omega)$ r veces con respecto a ω y evaluando la derivada para $\omega = 0$, se tiene:

$$\left. \frac{d^r}{d\omega^r} F(\omega) \right|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^r f(x) dx = (-i)^r M_r \quad (1.8)$$

Por lo que, si la transformada de Fourier de una función es conocida, sus momentos con respecto al origen pueden obtenerse por diferenciación.

Ejemplo 1.4

Empleando la transformada de Fourier se determinarán los momentos de la función dada en el ejemplo 1.1.

$$F(\omega) = a \int_0^{\infty} e^{-(a + i\omega)x} dx$$

$$F(\omega) = \frac{a}{a + i\omega}$$

Por lo que

$$\frac{d^r}{d\omega^r} F(\omega) = (-i)^r \frac{r! a}{(a + i\omega)^{r+1}}$$

$$M_r = \frac{r!}{a^r}$$

por lo cual:

$$M_0 = 1$$

$$M_1 = \frac{1}{a}$$

$$M_2 = \frac{2}{a^2}$$

y así sucesivamente.

Transformada de Laplace

Para ciertas funciones la integral representada por $G(s)$ o $F(\omega)$

puede no existir. Es entonces necesario emplear la transformada de Laplace. En funciones que son cero para $x < 0$, puede emplearse la transformada de Laplace ordinaria, en la cual se tiene:

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

En funciones que tienen valores para $x < 0$, se debe emplear la transformada de Laplace bilateral, dada por:

$$F(s) = L[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

Diferenciando r veces la función $F(s)$ con respecto a s y evaluando la derivada para $s = 0$, se tiene:

$$\left. \frac{d^r}{ds^r} F(s) \right|_{s=0} = \int_0^{\infty} (-1)^r x^r f(x) dx = (-1)^r M_r \quad (1.9)$$

Así, una vez que la transformada de Laplace de una función es conocida, sus momentos pueden obtenerse por diferenciación.

Ejemplo 1.5

Por medio de la transformada de Laplace se determinarán los momentos de la función del ejemplo 1.1.

$$F(s) = a \int_0^{\infty} \exp[-(a+s)x] dx$$

$$F(s) = \frac{a}{a+s}$$

$$\frac{d^r}{ds^r} F(s) = (-1)^r \frac{r! a}{(a+s)^{r+1}}$$

$$M_r = (-1)^{-r} \left. \frac{d^r}{ds^r} F(s) \right|_{s=0} = \frac{r!}{a^r}$$

por lo cual:

$$M_0 = 1$$

$$M_1 = \frac{1}{a}$$

$$M_2 = \frac{2}{a^2}$$

y así sucesivamente.

Cambio de Puntos de Referencia para los Momentos

Digamos que a y b son dos constantes y $c = b - a$. Denotemos los r -ésimos momentos de una función con respecto a a y b , respectivamente, por M_r^a y M_r^b . Desarrollando binomialmente, se tiene:

$$(x - a)^r = (x - b + b - a)^r = (x - b + c)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (x - b)^{r-j} c^j \quad (1.10)$$

entonces,

$$M_r^a = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^r f(x) dx$$

sustituyendo la ecuación (1.10), se tiene:

$$\begin{aligned} M_r^a &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (x - b)^{r-j} c^j f(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} c^j \int_{-\infty}^{\infty} (x - b)^{r-j} f(x) dx \end{aligned}$$

$$M_r^a = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} c^j M_{r-j}^b \quad (1.11a)$$

La ec. (1.11a) proporciona el r -ésimo momento de una función con respecto a a en términos de su r -ésimo momento y momentos inferiores con respecto a b . Escribiendo los sufijos como índices de potencia (sin interpretación de ellos como tales excepto para los propósitos del desarrollo) o la forma simbólica mnemónica de la ec. (1.11a), se tiene:

$$M_r^a = [M^b + c]^r ; \quad \text{para toda } r \quad (1.11b)$$

en la cual $[M^b]^r$ es interpretada como M_r^b para toda r . Si particularizamos tomando " a " como el origen y " b " como el centroide o el primer momento ($c = b = \mu$), se tiene:

$$M_r^a = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (\mu)^j M_{r-j}^{\mu} \quad (1.12a)$$

La forma simbólica mnemónica de esta relación es:

$$M_r = [M_r^\mu + \mu]^r, \text{ para toda } r \quad (1.12b)$$

En particular esto conduce a:

$$\begin{aligned} M_0^\mu &= M_0^\mu = 1 \\ M_1^\mu &= M_1^\mu + \mu M_0^\mu = \mu \\ M_2^\mu &= M_2^\mu + \mu^2 \\ M_3^\mu &= M_3^\mu + 3 \mu M_2^\mu + \mu^3 \\ M_4^\mu &= M_4^\mu + 4 \mu M_3^\mu + 6 M_2^\mu \mu^2 + \mu^4 \end{aligned} \quad (1.12c)$$

Y así sucesivamente. La ecuación (1.12b) puede manipularse para expresar los momentos con respecto al centroide en términos de los momentos con respecto al origen. En particular, esto produce

$$\begin{aligned} M_0^\mu &= 1 \\ M_1^\mu &= 0 \\ M_2^\mu &= M_2 - \mu^2 \\ M_3^\mu &= M_3 - 3 M_2 \mu + 2 \mu^3 \\ M_4^\mu &= M_4 - 4 M_3 \mu + 6 \mu^2 M_2 - 3 \mu^4 \end{aligned} \quad (1.12d)$$

La ecuación (1.12d) puede derivarse directamente. Escribiendo el r -ésimo momento con respecto al punto b

$$M_r^b = \int_{-\infty}^{\infty} (x - b)^r f(x) dx$$

Desarrollando binomialmente:

$$(x - b)^r = (x - a - b + a)^r = (x - a - c)^r$$

$$(x - b)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (x - a)^{r-j} (-c)^j$$

Sustituyendo en la expresión general para M_r^b :

$$M_r^b = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (x - a)^{r-j} (-c)^j f(x) dx$$

$$M_r^b = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-c)^j M_{r-j}^a \quad (1.12e)$$

La forma simbólica mnemónica de esta relación es:

$$M_r^b = [M^a - c]^r, \quad \text{para toda } r \quad (1.12f)$$

En particular, si $a = 0$ y $c = b = \mu$, entonces:

$$M_r^\mu = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \mu^j M_{r-j} \quad (1.12g)$$

así mismo:

$$M_r^\mu = [M - \mu]^r \quad ; \quad \text{para toda } r \quad (1.12h)$$

Así también, los coeficientes en la ecuación (1.12h) son aquellos del desarrollo binomial. Las potencias de los términos conteniendo μ son potencias reales; las potencias de los términos conteniendo M no son potencias reales sino sólo índices de los momentos concernientes.

Propiedad de Invarianza

Los momentos tienen una propiedad de invarianza, la cual establece que cuando los valores variables son multiplicados por una constante, el r -ésimo momento M_r es multiplicado por a^r . Esto es evidente debido a su definición.

Teorema de Momentos

Los momentos representan parámetros que son utilizados en el análisis y síntesis de sistemas hidrológicos. Nash (1959) derivó un teorema relacionando los momentos de entrada, salida, e impulso respuesta de sistemas lineales con respecto a sus centroides correspondientes. Diskin y Boneh (1968) extendieron este teorema a los momentos de estas funciones tomados con respecto a puntos arbitrarios. A continuación se deriva el teorema de momentos de Nash y posteriormente se considera su extensión. Las derivaciones pueden realizarse empleando el desarrollo binomial o por medio de

la transformada de Laplace.

Uso del Desarrollo Binomial

La operación convolución, que puede interpretarse como la superposición de integrales, para un sistema lineal tiempo-invariante es mostrado en la Fig. 1.1. Por conveniencia se asume que las integrales de las funciones de entrada, salida, e impulso respuesta son todas normalizadas a la unidad; sin embargo, esta consideración no es esencial para la validez de las conclusiones. Digamos que a , b y c sean los centros de las áreas de las funciones de salida, entrada e impulso respuesta, respectivamente. El centro del área de salida se localizará siempre después que el centroide del área de entrada por c . Esto implica la relación entre el primer momento con respecto al origen, esto es:

$a = b + c$; o también,

$$M_1^0(y) = M_1^0(x) + M_1^0(h) \quad (1.13)$$

Escribiendo la integral de la convolución para la salida en γ ,

$$y(\gamma) = \int_0^{\infty} x(\tau) h(\epsilon) d\tau \quad (1.14)$$

donde $\gamma = \epsilon + \tau$

El r -ésimo momento de "y" con respecto al centroide "a" puede expresarse como:

$$\begin{aligned} M_r^a(y) &= \int_0^{\infty} y(\gamma) \gamma^r d\gamma \\ &= \int_0^{\infty} y(\gamma) (\epsilon + \tau)^r d\epsilon \end{aligned}$$

$$M_r^a(y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x(\tau) h(\epsilon) (\epsilon + \tau)^r d\tau d\epsilon$$

Puede desarrollarse $(\epsilon + \tau)^r$ por una serie binomial, por lo que:

$$(\epsilon + \tau)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \epsilon^{r-j} \tau^j$$

de tal forma

$$M_r^a(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau) h(\epsilon) \left[\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \tau^j \epsilon^{r-j} \right] d\epsilon d\tau$$

Recordando que:

$$M_r^b(x) = \int_0^\infty x(\tau) \tau^r d\tau$$

$$M_r^c(h) = \int_0^\infty h(\epsilon) \epsilon^r d\epsilon$$

Entonces:

$$M_r^a(y) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \int_0^\infty x(\tau) \tau^j d\tau \int_0^\infty h(\epsilon) \epsilon^{r-j} d\epsilon$$

$$M_r^a(y) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} M_j^b(x) M_{r-j}^c(h) \quad (1.15)$$

Escribiendo la forma simbólica mnemónica:

$$M_r^a(y) = [M^b(x) + M^c(h)]^r \quad (1.16)$$

Este es el teorema de momentos de Nash.

Así, el teorema de momentos proporciona el r -ésimo momento de "y" en términos de todos los momentos de r -ésimo orden e inferiores de "x" y aquellos de "h". Se observa que si los momentos son evaluados sucesivamente para $r = 1, 2, 3, \dots$, habrá solo una incógnita en cada ecuación, la cual es el momento mayor de "h" en la ecuación respectiva. Así, es posible obtener de los momentos conocidos $x(t)$ e $y(t)$ los momentos desconocidos de $h(t)$. Se pueden escribir los primeros cuatro momentos como:

$$M_1^H(y) = M_1^H(x) = M_1^H(h) = 0$$

$$M_2^H(y) = M_2^H(x) + M_2^H(h)$$

$$M_3^H(y) = M_3^H(x) + M_3^H(h)$$

$$M_4^H(y) = M_4^H(x) + M_4^H(h) + 6M_2^H(x) M_2^H(h)$$

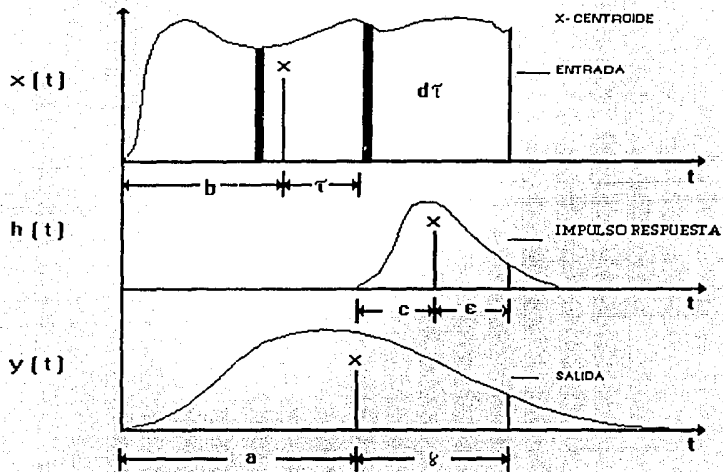


Figura 1:1 Operación convolución de un sistema tiempo-invariante lineal.

Por lo que es posible evaluar los momentos de "h" a partir de los de "x" y "y".

Uso de la transformada de Laplace

La integral de la convolución puede escribirse de forma alterna como:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Si se toma la transformada de Laplace de esta ecuación, se obtiene:

$$Y(s) = X(s) H(s) \quad (1.17)$$

donde s ; es la variable Laplaciana,

Y, X, H ; son las transformadas de Laplace de $y, x, y h$, respectivamente.

Adoptando la notación $D = d/ds$, $X(s) = D^0 X(s)$, y $Y(s) = D^0 Y(s)$ y diferenciando la ecuación (1.17) r veces usando la regla de Leibnitz para la r -ésima derivada de un producto, se tiene:

$$D^r(Y) = D^r(XH) = (D^r X)H + \binom{r}{1} (D^{r-1} X)(DH) + \dots + X(D^r H)$$

$$D^r(Y) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (D^{r-j} X)(D^j H) \quad (1.18a)$$

o en forma simbólica,

$$D^r Y(s) = [DX(s) + DH(s)]^r ; \quad r \geq 1 \quad (1.18b)$$

Se hace notar que los términos en el desarrollo son derivadas, no potencias de los términos, y el primero y el último término, los cuales incluyen las derivadas de orden cero, son:

$$H(s) \frac{d^r}{ds^r} X(s) \quad \text{y} \quad X(s) \frac{d^r}{ds^r} H(s)$$

De la ecuación (1.9) es claro que

$$\frac{d^r}{ds^r} Y(s) \Big|_{s=0} = (-1)^r M_r(y) \quad (1.19)$$

$$\frac{d^r}{ds^r} X(s) \Big|_{s=0} = (-1)^r M_r(x) \quad (1.20)$$

$$\frac{d^r}{ds^r} H(s) \Big|_{s=0} = (-1)^r M_r(h) \quad (1.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.19) a (1.21) en (1.18),

$$M_r(y) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} M_{r-j}(x) M_j(h)$$

Escribiendo algunos términos explícitamente, se tiene:

$$M_1(y) = M_0(x) M_1(h) + M_1(x) M_0(h)$$

$$M_2(y) = M_0(x) M_2(h) + 2M_1(x) M_1(h) + M_2(x) M_0(h)$$

$$M_3(y) = M_0(x) M_3(h) + 3M_1(x) M_2(h) + 3M_2(x) M_1(h) + M_3(x) M_0(h)$$

y así sucesivamente.

La expresión general puede escribirse en forma de un desarrollo binomial como:

$$M_r(y) = [M(x) + M(h)]^r \quad (1.22)$$

Los términos en la ecuación (1.22) son momentos, no potencias, donde el primero y último términos incluyen momentos de orden cero. Estos son los momentos con respecto al origen, o mejor dicho, el centroide de las áreas. La restricción es puesta en las unidades de entrada y salida. Si se desean los momentos con respecto al centroide, es fácil obtenerlos empleando la relación desarrollada en las ecuaciones (1.11) y (1.12).

Uso de la Transformada de Fourier

Si se toma la transformada de Fourier de la integral de la convolución, se tiene:

$$F[y(t)] = F \left[\int_0^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right]$$

entonces se puede mostrar que:

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) \quad (1.23)$$

en la que Y, X, y H son las transformadas de Fourier de y, x y h, respectivamente, y ω es la variable de Fourier. Diferenciando la ecuación (1.23) r veces empleando la regla de Leibnitz, se tiene:

$$D^r(Y) = D^r(XH) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (D^{r-j} X)(D^j H)$$

o siguiendo la convención de la ecuación (1.18),

$$D^r(Y) = [DX(\omega) + DH(\omega)]^r ; \quad r \geq 1 \quad (1.24)$$

con $D = d/d\omega$, $X(\omega) = D^0 X(\omega)$ y $H(\omega) = D^0 H(\omega)$.

De la ecuación (1.8) se observa que:

$$\frac{d^r}{d\omega^r} Y(\omega) \Big|_{\omega=0} = (-i)^r M_r(y)$$

$$\frac{d^r}{d\omega^r} X(\omega) \Big|_{\omega=0} = (-i)^r M_r(x)$$

$$\frac{d^r}{d\omega^r} H(\omega) \Big|_{\omega=0} = (-i)^r M_r(h)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1.24), se tiene:

$$M_r(y) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} M_{r-j}(x) M_j(h)$$

o en forma simbólica,

$$M_r(y) = [M(x) + M(h)]^r$$

la cual es la misma que la ecuación (1.22).

Ejemplo 1.6

Consideremos un sistema lineal de tiempo-invariante cuya unidad impulso respuesta (UIR) esta dada por:

$$h(t) = \exp(-t)$$

Cuando está sujeta a la entrada:

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq D \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

la salida generada es:

$$y(t) = \begin{cases} x_0 [1 - \exp(-t)], & 0 \leq t \leq D \\ y_0 \exp[-(t - D)], & t \geq D \end{cases}$$

en la cual,

$$y_0 = x_0 [1 - \exp(-D)]$$

Determinemos los momentos de $y(t)$ por el teorema de momentos así como calculándolos en forma independiente.

Consideremos la función $h(t)$ normalizada. Su r -ésimo momento con respecto al origen es obtenido como:

$$M_r(h) = r!$$

La función $x(t)$ se normaliza dividiéndola entre $x_0 D$. Su r -ésimo momento con respecto al origen es:

$$M_r(x) = \frac{D^r}{r+1}$$

Por consiguiente, el r -ésimo momento de $y(t)$ es obtenido por el teorema de momentos como:

$$M_r(y) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{D^{r-j}}{r-j+1} j$$

$$M_1(y) = 1 + \frac{D}{2}$$

$$M_2(y) = \frac{D^2}{3} + D + 2$$

$$M_3(y) = \frac{D^3}{4} + D^2 + 3D + 6$$

y así sucesivamente.

Ahora, calculando los momentos de $y(t)$ independientemente y verificando si ellos conciben con los calculados previamente.

Primero se calcula el área bajo la curva, A_y ,

$$A_y = \int_0^D X_0 [1 - \exp(-t)] dt + \int_D^{\infty} y_0 \exp[-(t - D)] dt$$

$$= X_0 D$$

La función normalizada $y(t)$ es:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{D} [1 - \exp(-t)], & 0 \leq t \leq D \\ y_1 \exp[-(t - D)], & t \geq D \end{cases}$$

donde:

$$y_1 = \frac{1}{D} [1 - \exp(-D)]$$

Por lo cual,

$$M_1(y) = \int_0^D t \frac{1}{D} [1 - \exp(-t)] dt + \int_D^{\infty} t y_1 \exp[-(t - D)] dt$$

$$M_1(y) = \frac{1}{D} \left[\frac{t^2}{2} - t e^{-t} + e^{-t} \right] \Big|_0^D + y_1 [-t e^{-(t-D)} + e^{-(t-D)}] \Big|_D^{\infty}$$

$$M_1(y) = \frac{D}{2} + 1$$

$$M_2(y) = \int_0^D \frac{t^2}{D} [1 - \exp(-t)] dt + y_1 \int_D^{\infty} t^2 \exp[-(t - D)] dt$$

$$M_2(y) = \frac{1}{D} \left[\frac{t^3}{3} - t^2 e^{-t} + 2t e^{-t} + 2e^{-t} \right] \Big|_0^D + y_1 [-t^2 e^{-(t-D)} - 2t e^{-(t-D)} - 2e^{-(t-D)}] \Big|_D^{\infty}$$

$$M_2(y) = \frac{D^2}{3} + D + 2$$

$$M_3(y) = \int_0^D \frac{t^3}{D} [1 - \exp(-t)] dt + y_1 \int_D^{\infty} t^3 \exp[-(t - D)] dt$$

$$= \frac{1}{D} \left[\frac{t^4}{4} + t^3 e^{-t} - 3t^2 e^{-t} + 6(t e^{-t} - e^{-t}) \right] \Big|_0^D + y_1 [-t^3 e^{-(t-D)} + 3t^2 e^{-(t-D)} - 6t e^{-(t-D)} + 6e^{-(t-D)}] \Big|_D^{\infty}$$

$$M_3(y) = \frac{D^3}{4} + D^2 + 3D + 6$$

y así sucesivamente. Por lo que puede comprobarse que estos momentos son los mismos que los obtenidos por el teorema de momentos.

Momentos con relación a un punto arbitrario

El teorema de momentos también se aplica si los momentos son tomados con respecto a un punto fijo arbitrario. Digamos que este punto sea "a". Entonces:

$$M_r^a(y) = \int_0^{\infty} (t - a)^r y(t) dt \quad (1.25)$$

Sustituyendo la ecuación (1.14), se tiene:

$$M_r^a(y) = \int_0^{\infty} \int_0^t (t - a)^r x(\tau) h(t - \tau) d\tau dt$$

Cambiando el orden de integración,

$$M_r^a(y) = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} x(\tau) (t - a)^r h(t - \tau) dt d\tau$$

$$\text{o} \quad M_r^a(y) = \int_0^{\infty} x(\tau) \int_{\tau}^{\infty} (t - a)^r h(t - \tau) dt d\tau$$

La integral doble es evaluada en el plano (t, τ) , como se muestra en la Figura 1.2. Se evalúa la integral interior haciendo $u = t - \tau$,

$$\int_{\tau}^{\infty} (t - a)^r h(t - \tau) dt = \int_0^{\infty} [\tau + (u - a)]^r h(u) du$$

Desarrollando el término en corchetes con la serie binomial,

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} (t - a)^r h(t - \tau) dt &= \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \tau^{r-j} h(u) (u - a)^j du \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \tau^{r-j} \int_0^{\infty} (u - a)^j h(u) du \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \tau^{r-j} M_j^a(h) \end{aligned}$$

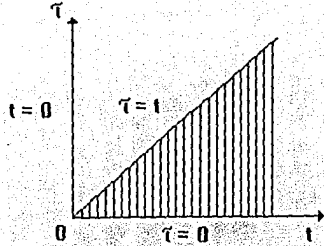


Figura 1.2 (a) Región en el plano (t, τ) cubierta por la integral de la convolución.

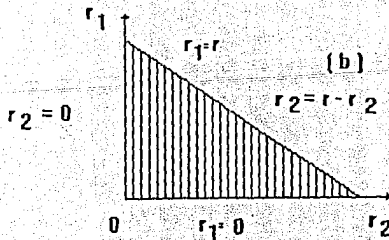
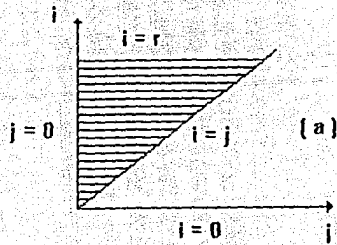


Figura 1.2 (b) Regiones en los planos (j, i) y (r_1, r_2) cubiertas por la doble sumatoria

Por lo cual,

$$\begin{aligned}
 M_r^a(y) &= \int_0^{\infty} x(\tau) \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \tau^{r-j} M_j^a(h) d\tau \\
 &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} M_j^a(h) \int_0^{\infty} \tau^{r-j} x(\tau) d\tau \\
 &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} M_j^a(h) M_{r-j}(x)
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

La ecuación anterior puede escribirse en forma simbólica compacta como:

$$M_r^a(y) = [M^a(h) + M(x)]^r \tag{1.27a}$$

En la ecuación (1.26) el desarrollo es realizado de acuerdo al teorema binomial. Se dice que si los momentos de "y" y "h" son conocidos con respecto a un punto "a", entonces los momentos de "x" son obtenidos con respecto al origen. Además, si la ecuación (1.14) es expresada en otra forma equivalente (ecuación (1.4)), la ecuación (1.26) toma la forma:

$$M_r^a(y) = [M(h) + M^a(x)]^r \tag{1.27b}$$

Esto quiere decir que si los momentos de "x" y "y" son conocidos con respecto a "a", entonces los momentos de "h" son obtenidos con respecto al origen. Si $a = 0$, se puede ver que las ecuaciones (1.26) y (1.27) son idénticas a la ecuación (1.22).

Teorema General de Momentos

Para la generalización del teorema de momentos (Nash, 1959), siguiendo atentamente el trabajo de Diskin y Boneh (1968). Digamos que se tienen tres puntos arbitrarios a, b y c con respecto a los cuales los momentos de y(t), x(t) y h(t), son tomados respectivamente. Se tiene también que, para $t \leq 0$, $x(t)=0$, y $h(t)=0$. Definamos lo siguiente:

$$M_r^a(y) = \int_0^{\infty} (t - a)^r y(t) dt$$

$$M_r^b(x) = \int_0^{\infty} (t - b)^r x(t) dt$$

$$M_r^c(h) = \int_0^{\infty} (t - c)^r h(t) dt$$

Derivando la relación entre $M_r^a(y)$, $M_r^b(x)$ y $M_r^c(h)$, empleando, el desarrollo binomial así como la transformada de Laplace.

Uso del Desarrollo Binomial

Primero se deriva la relación entre $M_r^a(h)$ y $M_r^c(h)$ así como también entre $M_r^a(x)$ y $M_r^b(x)$. Escribiendo

$$M_r^a(h) = \int_0^{\infty} (t - a)^r h(t) dt$$

$$M_r^a(h) = \int_0^{\infty} [(t - c) + (c - a)]^r h(t) dt$$

La anterior ecuación también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} M_r^a(h) &= \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (c - a)^{r-j} (t - c)^j h(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (c - a)^{r-j} \int_0^{\infty} (t - c)^j h(t) dt \end{aligned}$$

$$M_r^a(h) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (c - a)^{r-j} M_j^c(h)$$

Simbólicamente, se tiene:

$$M_r^a(h) = [(c - a) + M^c(h)]^r \quad (1.28)$$

Por analogía:

$$M_r^a(x) = [(b - a) + M^b(x)]^r \quad (1.29)$$

En las ecuaciones (1.28) y (1.29) los desarrollos son llevados a cabo binomialmente donde la potencias de $(c - a)$ y $(b - a)$ son reales pero representan el orden de los momentos. Las ecuaciones (1.28) ó (1.29) son una expresión general que relaciona los

momentos de todos los órdenes de cualquier función con respecto a dos puntos arbitrarios.

Puede particularizarse en la ecuación (1.29) haciendo $a = 0$,

$$M_r(x) = [b + M^b(x)]^r \quad (1.30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.28) y (1.30) en la ecuación (1.26):

$$M_r^a(y) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \left\{ \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (c-a)^{j-i} M_i^c(h) \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{r-j} \binom{r-j}{k} b^{r-j-k} M_k^b(x) \right\} \quad (1.31)$$

escribiendo los coeficientes binomiales de la ecuación (1.31), tenemos:

$$\binom{r}{j} \binom{j}{i} \binom{r-j}{k} = \frac{r!}{j!(r-j)!} \frac{j!}{i!(j-i)!} \frac{(r-j)!}{k!(r-j-k)!} \\ = \frac{r!}{i!(j-i)! k!(r-j-k)!}$$

Por lo tanto,

$$M_r^a(y) = \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{r-j} \frac{r!}{i!(j-i)! k!(r-j-k)!} (c-a)^{j-i} b^{r-j-k} M_i^c(h) M_k^b(x) \quad (1.32)$$

La ecuación (1.32) es similar al desarrollo binomial de la suma de cuatro variables. Digamos que A_1, A_2, A_3 y A_4 sean esas variables. Entonces:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)^r = \sum_{r_1=0}^r \sum_{r_2=0}^{r-r_1} \sum_{r_3=0}^{r-r_1-r_2} \frac{r!}{r_1! r_2! r_3! r_4!} A_1^{r_1} A_2^{r_2} A_3^{r_3} A_4^{r_4} \quad (1.33)$$

Donde $r_4 = r - r_1 - r_2 - r_3$

Ayudándose de la ecuación (1.33) para simplificación de la ecuación (1.32), haciendo:

$$r_1 = j - i; \quad r_2 = i; \quad r_3 = k; \quad r_4 = r - j - k$$

Esto produce $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = r$. En la ecuación (1.32) los límites de la sumatoria de k pueden cambiarse en términos de r_1 : de $[k, r-j]$ a $[r_3, r - r_1 - r_2]$. Los límites de i pueden convertirse de $[i, j]$ a $[r_2, r - r_1]$. Así también, los límites de j se pasan de $[j, r]$ a $[r_1, r]$. Los últimos dos límites pueden obtenerse considerando el mapeo del plano (j, i) hacia el plano (r_1, r_2) y señalando que la línea $i = j$ es transformada en la línea $r_1 = 0$, y la línea $i = 0$ en la línea $r_2 = 0$ y la línea $i = r$ en la línea $r_1 = r - r_2$ ó $r_2 = r - r_1$, como es mostrado en la Figura 1.2.

Así, la ecuación (1.32) puede escribirse como:

$$M_r^a = \sum_{r_1=0}^r \sum_{r_2=0}^{r-r_1} \frac{r!}{r_1! r_2! r_3! r_4!} (c-a)^{r_1} b^{r_2} M_{r_2}^c(h) M_{r_1}^b(x) \quad (1.34)$$

La ecuación (1.34) puede escribirse simbólicamente como:

$$M_r^a(y) = [M^b(x) + M^c(h) + (c-a) + b]^r \quad (1.35a)$$

$$M_r^a(y) = [M^b(x) + M^c(h) + S]^r \quad (1.35b)$$

donde $S = c - a + b$, es una combinación lineal de las veces con respecto a los cuales los momentos son tomados. Diskin y Boneh (196B) denominaron a S como tiempo característico. La ecuación (1.35) puede obtenerse en forma más directa como se explica a continuación. Escribiendo el desarrollo binomial de la suma de cuatro variables como:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)^r = \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{r-j} \frac{r!}{i!(j-i)!k!(r-j-k)!} A_3^{i-1} A_1^{r-j-k} A_4^i A_2^k$$

Una comparación con la ecuación (1.32), conduce inmediatamente a la ecuación (1.35).

Las ecuaciones (1.33) a (1.35) son expresiones alternativas para el teorema general de momentos; del cual, el teorema de momentos de Nash es un caso especial.

Uso de la Transformada de Laplace

Digamos que las Transformadas de Laplace de las funciones $y(t)$, $x(t)$, y $h(t)$ son denotadas, respectivamente, por $Y(s)$, $X(s)$, y $H(s)$, donde éstas funciones tienen sus orígenes en $t = 0$. Considérese también, que éstas funciones son desplazadas hacia la derecha por a , b y c , respectivamente:

$$y_1(t) = y(t-a) u_1(t-a) \quad (1.36a)$$

$$x_1(t) = x(t-b) u_1(t-b) \quad (1.36b)$$

$$h_1(t) = h(t-c) u_1(t-c) \quad (1.36c)$$

donde $u_1(t - a)$ es el intervalo unitario de la función para $t = a$. Las Transformadas de Laplace de $y_1(t)$, $x_1(t)$ y $h_1(t)$ pueden escribirse, usando el teorema para el desplazamiento, como:

$$Y_1(s) = Y(s) \exp(-as) \quad (1.37a)$$

$$X_1(s) = X(s) \exp(-bs) \quad (1.37b)$$

$$H_1(s) = H(s) \exp(-cs) \quad (1.37c)$$

Los momentos de $y_1(t)$ con respecto a su origen son igual a los momentos de $y(t)$ con respecto al punto $t = -a$, de tal manera que:

$$M_r(y_1) = M_r^{-a}(y)$$

Los momentos de $y_1(t)$ pueden obtenerse diferenciando su Transformada de Laplace y evaluándola para $s = 0$. Tomando la r -ésima derivada de la ecuación (1.37a) empleando la regla de Leibnitz, se tiene:

$$D^r[Y_1(s)] = D^r[Y(s) \exp(-as)] = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} [D^{r-j} Y(s)] D^j(\exp(-as))$$

Evaluando para $s = 0$,

$$M_r(y_1) = [M(y) + a]^r \quad (1.38)$$

o también,

$$M_r^{-a}(y) = [M(y) + a]^r \quad (1.39)$$

Si se convolucionan $x_1(t)$ y $h_1(t)$, entonces

$$y_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) h_1(t-\tau) d\tau \quad (1.40)$$

Tomando su Transformada de Laplace,

$$Y_2(s) = X_1(s) H_1(s) = X(s) H(s) \exp[-(b+c)s] \quad (1.41)$$

Eliminando $Y_2(s)$, $X(s)$, $H(s)$, y $Y(s)$ empleando las ecuaciones (1.36), (1.37), y (1.41),

$$Y_1(s) = X_1(s) H_1(s) \exp[(b+c-a)s]$$

o también,

$$Y_1(s) = X_1(s) H_1(s) \exp(sS) \quad (1.42)$$

en la cual, $S = b + c - a$.

La relación entre los momentos de $y_1(t)$, $x_1(t)$, y $h_1(t)$ pueden obtenerse, como lo explicado anteriormente, diferenciando la ecuación (1.42) con respecto a "s" y evaluando la derivada para $s=0$. Esto genera

$$M_r(y_1) = [M(x_1) + M(h_1) - S]^r \quad (1.43)$$

Por lo que

$$M_r^{-a}(y) = [M^{-b}(x) + M^{-c}(h) - S]^r \quad (1.44)$$

Si se asume que a, b, y c sean negativas, $a = -a_1$, $b = -b_1$, $c = -c_1$, entonces $S = -S_1$ y la ecuación (1.44) es idéntica a la ecuación (1.35).

Inversión de Momentos

En el análisis y síntesis de sistemas lineales hidrológicos los momentos pueden emplearse como parámetros para representar la función de respuesta. Sin embargo, es posible preguntarse si la

función de respuesta puede derivarse a partir de los valores conocidos de los momentos. Recordemos que:

$$M_r = (-1)^r \left[\frac{d^r}{ds^r} F(s) \right] \Big|_{s=0}$$

Si los momentos con respecto al origen son conocidos para una función de buen ajuste, la transformada de Laplace puede expresarse en términos de éstos momentos por medio de la serie de Taylor,

$$F(s) = \sum_{r=0}^{\infty} (-s)^r \frac{M_r}{r!}$$

Por consiguiente, el conocimiento de la transformada de Laplace proporciona cierta información acerca del comportamiento de la función original. No obstante, si se desea conocer explícitamente en forma exacta la función completa, es necesario invertir numéricamente la transformada de Laplace. Esto tal vez pueda realizarse más eficientemente al utilizar funciones ortogonales.

Momentos Adimensionales

A menudo, es conveniente emplear momentos adimensionales, los cuales son independientes uno de otro, en la calibración del modelo. Nash (1959) empleó momentos adimensionales con respecto a la media definidos como:

$$m_2 = \frac{M_2^{\mu}}{(M_1)^2 (M_0)} \quad (1.45)$$

$$m_3 = \frac{M_3^{\mu}}{(M_1)^3 (M_0)} \quad (1.46)$$

$$m_4 = \frac{M_4^{\mu}}{(M_1)^4 (M_0)} \quad (1.47)$$

Donde m_2 , m_3 y m_4 son denominados generalmente parámetros de forma. El objeto de dividir por el primer momento es para remover el efecto escala-tiempo de momentos superiores y así hacerlos

adimensionales. Estos parámetros de forma pueden emplearse para comparar modelos hidrológicos construyendo un diagrama de m_1 contra m_2 , como es sugerido por Nash (1959) y lo hecho por Harley (1967), O'Meara (1968), y Dooge (1980).

1.2 METODO DE MOMENTOS PARA SISTEMAS DISCRETOS

Definición

Si la función es discreta, representada como f_j , $j = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$, entonces su r -ésimo momento con respecto al origen o cualquier otro punto arbitrario puede definirse. Por conveniencia digamos que el punto arbitrario es el origen. Entonces el r -ésimo momento es definido como:

$$M_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^r f_m \quad (1.48)$$

Se considera aquí que f_m es normalizada, esto es,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m = 1 \quad (1.49)$$

Por otro lado,

$$M_r = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^r f_m}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m} \quad (1.50)$$

Función Generadora de Momentos (FGM)

Nuevamente, los momentos de una función discreta pueden determinarse directamente de su definición o empleando funciones generadoras. Si x es discreta y toma los j valores con probabilidad p_j , entonces la FGM es:

$$G(\theta) = \sum_j e^{\theta j} p_j = E[e^{\theta j}] = P[e^{\theta}] \quad (1.51)$$

en la cual $P[\dots]$ es la función generadora de probabilidad. El r -ésimo momento puede determinarse diferenciando $G(\theta)$ r veces con

respecto a θ y después igualando a cero.

$$\left. \frac{d^r G(\theta)}{d\theta^r} \right|_{\theta=0} = M_r \quad (1.52)$$

Para funciones discretas la Z-transformada puede emplearse como una FGM, de la misma forma como la transformada de Laplace es empleada para funciones continuas. La Z-transformada de la función f_j es definida para el caso bilateral como:

$$Z(f_j) = F(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j z^{-j} \quad (1.53)$$

y para el caso unilateral como:

$$Z(f_j) = F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j} \quad (1.54)$$

en la cual $F(z)$ significa la Z-transformada de la función f_j . En la mayoría de los casos hidrológicos, $f_j = 0$, $j < 0$ así la transformada bilateral se reduce al caso unilateral. Los momentos de f_j con respecto al origen pueden obtenerse de la Z-transformada de la siguiente manera:

$$M_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j = F(z) \Big|_{z=1} \quad (1.55a)$$

$$M_1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j f_j = -z \frac{d}{dz} F(z) \Big|_{z=1} \quad (1.55b)$$

$$M_2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j^2 f_j = -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} F(z) \right] \Big|_{z=1} \quad (1.55c)$$

$$M_3 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j^3 f_j = \left[-z \frac{d}{dz} \left\{ -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} F(z) \right] \right\} \right] \Big|_{z=1} \quad (1.55d)$$

y así sucesivamente.

En la misma forma, el teorema de momentos derivado para funciones continuas, es válido también para funciones discretas. Esto puede comprobarse, notando que la Z-transformada de la sumatoria de convolución,

$$y_j = \sum_{i=0}^j x_i h_{j-i} = \sum_{i=0}^j h_i x_{j-i} \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

genera:

$$Z\{y_j\} = Z\left[\sum_{i=0}^j x_j h_{j-i}\right] = Z\left[\sum_{i=0}^j h_i x_{j-i}\right]$$

$$Y(z) = X(z) H(z) = H(z) X(z) \quad (1.57a)$$

la cual es idéntica a la ecuación (1.17). Tomando logaritmos de base e, se tiene:

$$\ln Y(z) = \ln X(z) + \ln H(z) \quad (1.57b)$$

Ejemplo 1.7

Calculemos los momentos con respecto al origen y con respecto al centroide de la siguiente función

$$f_j = \left(\frac{1}{1+a}\right) \left(\frac{a}{1+a}\right)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Esta función es el impulso unitario de un almacenamiento lineal discreto (de un tiempo de retraso $a > 0$).

Primero se obtiene la Z-transformada de f_j y a continuación los momentos, por lo que

$$F(z) = \frac{z}{(1+az) - a}$$

$$M_0 = \sum_{j=0}^{\infty} f_j = f(z) \Big|_{z=1} = 1$$

$$M_1 = \left[-z \frac{d}{dz} F(z) \right] \Big|_{z=1} = a = \mu$$

$$M_2 = \left\{ -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} F(z) \right] \right\} \Big|_{z=1} = a(2a+1)$$

Similarmente,

$$M_3 = a(1+6a+6a^2)$$

$$M_4 = a(1+2a)(1+12a+12a^2)$$

y así sucesivamente.

Por otra parte, los momentos de f_j con respecto a la media son:

$$M_s^{\mu} = a(1+a)$$

$$M_3^{\mu} = a(1 + a)(1 + 2a)$$

$$M_4^{\mu} = a(1 + a)(1 + 9a + 9a^2)$$

y así sucesivamente.

Momentos Factoriales

Bree (1977) señala que los momentos factoriales en lugar de los momentos ordinarios conducen, en general, a un mejor método de estimación de parámetros para sistemas discretos. El r -ésimo momento factorial $M_{[r]}$ de f_j con respecto al origen puede definirse (Kendall y Stuart, 1958) como:

$$M_{[r]}(f_j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j^{[r]} f_j \quad ; \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.58)$$

donde el término $j^{[r]}$ es definido como:

$$j^{[r]} = j(j-1)(j-2)\dots(j-r+1) = \frac{j!}{(j-r)!} \quad (1.59)$$

Los momentos factoriales también pueden definirse con respecto a cualquier punto "a" arbitrario,

$$M_{[r]}^a(f_j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (j-a)^{[r]} f_j \quad ; \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.60)$$

Por desarrollo directo,

$$\begin{aligned} M_{[1]}^a &= M_1 \\ M_{[2]}^a &= M_2 - wM_1^a \\ M_{[3]}^a &= M_3 - 3wM_2^a + 2w^2M_1^a \\ M_{[4]}^a &= M_4 - 6wM_3^a + 11w^2M_2^a - 6w^3M_1^a \end{aligned}$$

y contrariamente,

$$\begin{aligned} M_2^a &= M_{[2]}^a + wM_{[1]}^a \\ M_3^a &= M_{[3]}^a + 3wM_{[2]}^a + 2w^2M_{[1]}^a \\ M_4^a &= M_{[4]}^a + 6wM_{[3]}^a + 7w^2M_{[2]}^a - w^3M_{[1]}^a \end{aligned}$$

en donde w es el intervalo de datos (para discretización), el cual

se asume como unitario en la ecuación (1.60). Los momentos factoriales cumplen también las ecuaciones (1.11) y (1.12) de tal forma que,

$$M_{(r)}^a(f_j) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} M_{(r-j)}^b c^{(j)} \quad (1.61)$$

la que puede escribirse simbólicamente como:

$$M_{(r)}^a = [M_{(r)}^b + c]^{(r)}$$

Función Generadora de Momentos Factorial (FGMF)

Si la función generadora de frecuencia $P(x)$ es:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j p_j$$

entonces al reemplazar x por $(1+x)$, se tiene:

$$\begin{aligned} P(1+x) &= \sum_{j=0}^{\infty} (1+x)^j p_j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} M_{(i)} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Por lo tanto, $P(1+x)$ es una función generadora de momentos factorial (FGMF), en la que el momento factorial de orden i es el coeficiente de $x^i/i!$.

Los momentos factoriales también pueden derivarse de la Z-transformada. Digamos que B sea el anterior cambio de orden. Entonces:

$$\begin{aligned} g\left[\frac{1}{(1-B)}\right] &= F(z) \Big|_{z=(1-B)^{-1}} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j (1-B)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-B)^i \\ g\left[\frac{1}{(1-B)}\right] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-B)^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \binom{j}{i} = \sum_{i=0}^{\infty} M_{(i)} \frac{(-B)^i}{i!} \end{aligned} \quad (1.63)$$

lo que también puede anotarse, como:

$$\left. \frac{d^r}{dB^r} g(B) \right|_{B=1} = M_{(r)} \quad (1.64)$$

donde $g(B) = F(z) \Big|_{z=B^{-1}}$

Teorema Factorial de Momentos

A partir de la Z-transformada de la sumatoria de la convolución en la ecuación (1.57a), puede obtenerse:

$$Y\left(\frac{1}{1-B}\right) = X\left(\frac{1}{1-B}\right) H\left(\frac{1}{1-B}\right) \quad (1.65)$$

y de la aplicación de la ecuación (1.63), se tiene

$$Y\left(\frac{1}{1-B}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} M_{(r)}(y) \left[\frac{(-B)^r}{r!} \right] \quad (1.66a)$$

$$X\left(\frac{1}{1-B}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} M_{(r)}(x) \left[\frac{(-B)^r}{r!} \right] \quad (1.66b)$$

$$H\left(\frac{1}{1-B}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} M_{(r)}(h) \left[\frac{(-B)^r}{r!} \right] \quad (1.66c)$$

Sustituyendo la ecuación (1.66) en la ecuación (1.65) resulta

$$M_{(r)}(y) = [M_{(r)}(x) + M_{(r)}(h)]^r ; \text{ para } r = 1, 2, \dots \quad (1.67)$$

El teorema factorial de momentos es válido para momentos con respecto al origen, así como para momentos con respecto al centroide.

Ejemplo 1.8

Aplicando la definición de la función generadora, para calcular los momentos factoriales de la función del ejemplo 1.7, se tiene:

$$M_{(r)} = r! a^r$$

1.3 METODO DE CUMULANTES

Los Cumulantes (Dooge, 1973; Harley, 1967; O'Meara, 1968; Van de Nes and Hendriks, 1971) son otro grupo de métodos para estimación de parámetros de modelos hidrológicos. Ellos son, desde un punto de vista teórico, más útiles que los momentos.

Definición y Notación

Es posible definir los cumulantes empleando tanto la FGM ó la FC. La función generadora de cumulantes FGC, denotada por $K(\theta)$, es el logaritmo de FGM ó FC,

$$K(\theta) = \text{Ln } G(\theta) \quad (1.68)$$

o

$$K(\theta) = \text{Ln } C(\theta) \quad (1.69)$$

Así, los cumulantes se definen como:

$$K(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} K_r \frac{\theta^r}{r!} \quad (1.70)$$

o

$$K(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} K_r \frac{(i\theta)^r}{r!} \quad (1.71)$$

donde K_r es el r -ésimo cumulante. Se hace notar que mientras M_r es el coeficiente de $(i\theta)^r/r!$ en $C(\theta)$, K_r es el coeficiente de $(i\theta)^r/r!$ en $\text{Ln } C(\theta)$, si existe una expresión en series de potencia. Así, es posible determinar los cumulantes por diferenciación tanto del $\text{Ln } G(\theta)$ o $\text{Ln } C(\theta)$,

$$K_r = \left[\frac{d^r}{d\theta^r} \text{Ln } G(\theta) \right] \Big|_{\theta=0} \quad (1.72a)$$

$$K_r = \left[\frac{d^r}{d\theta^r} \text{Ln } C(\theta) \right] \Big|_{\theta=0} \quad (1.72b)$$

En forma similar, si la transformada de Fourier o la transformada

de Laplace de la función es conocida, K_r puede determinarse con:

$$K_r = (-1)^r \left[\frac{d^r}{dw^r} \text{Ln } F(w) \right] \Big|_{w=0} \quad (1.72c)$$

o

$$K_r = (-1)^r \left[\frac{d^r}{ds^r} \text{Ln } F(s) \right] \Big|_{s=0} \quad (1.72d)$$

Ejemplo 1.9

A continuación se determinan los cumulantes de la función del ejemplo 1.1. Su función $G(\theta)$ como se indica en el ejemplo 1.2 es:

$$G(\theta) = \frac{a}{a - \theta}$$

Por lo tanto,

$$K(\theta) = \text{Ln } G(\theta)$$

$$K_r = \frac{(r-1)!}{(a-\theta)^r} \Big|_{\theta=0} = \frac{(r-1)!}{a^r}$$

Específicamente,

$$K_0 = 0$$

$$K_1 = \frac{1}{a}$$

$$K_2 = \frac{1}{a^2}$$

$$K_3 = \frac{1}{a^3}$$

y así sucesivamente.

Relación entre Cumulantes y Momentos

Empleando la función generadora, se puede generar la relación entre cumulantes y momentos. Cuando $\theta = 0$,

$$G(\theta) = 1$$

$$\text{Ln } [G(\theta)] = 0$$

por lo tanto:

$$K_0 = 0$$

Para $r = 1$,

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{d}{d\theta} \text{Ln } G(\theta) \Big|_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{G(\theta)} \frac{d}{d\theta} G(\theta) \Big|_{\theta=0} \\ &= \frac{d}{d\theta} G(\theta) \Big|_{\theta=0} = M_1 = \mu \end{aligned} \quad (1.73a)$$

Para $r = 2$,

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{d^2}{d\theta^2} \text{Ln } G(\theta) \Big|_{\theta=0} \\ &= \left[\frac{1}{G(\theta)} \frac{d^2 G(\theta)}{d\theta^2} - \frac{1}{G(\theta)^2} \frac{dG(\theta)}{d\theta} \right] \Big|_{\theta=0} \\ &= M_2 - (M_1)^2 \end{aligned} \quad (1.73b)$$

en la cual, al relacionar los momentos con respecto al origen con los momentos con respecto al centroide, se tiene:

$$K_2 = M_2^\mu \quad (1.73c)$$

Por diferenciación adicional, puede demostrarse que:

$$K_3 = M_3 - 3M_1 M_2 + 2M_1^3 \quad (1.73d)$$

la cual es por definición M_3 . Así:

$$K_3 = M_3^\mu \quad (1.73e)$$

Similarmente, diferenciando sucesivamente se puede demostrar que:

$$K_4 = M_4 - 4M_1 M_3 - 3(M_2)^2 + 12M_1^2 (M_2)^2 - 6(M_1)^4 \quad (1.73f)$$

En términos de momentos con respecto al centroide, se tiene:

$$K_4 = M_4^\mu - 3(M_2^\mu)^2 \quad (1.73g)$$

Similarmente,

$$K_5 = M_5^\mu - 10M_1^\mu M_2^\mu \quad (1.73h)$$

y así sucesivamente.

En forma inversa,

$$M_1 = K_1 \quad (1.74a)$$

$$M_2 = K_2 + K_1^2 \quad (1.74b)$$

$$M_3 = K_3 + (2K_2 + K_1^2)K_1 \quad (1.74c)$$

$$M_4 = K_4 + 4K_3K_1 + 3K_2^2 + 6K_2K_1^2 + K_1^4 \quad (1.74d)$$

Propiedad de Invarianza

Si una función de frecuencia es multiplicada por una constante, entonces el r-ésimo cumulante será multiplicado por ésta constante a una potencia r. Esto es evidente debido a su definición. Los cumulantes tienen otra propiedad de mayor importancia práctica. Si el origen es recorrido, el primer cumulante es modificado por la cantidad que es recorrida, pero todos los demás cumulantes permanecen sin cambio. Los cumulantes son así invariantes bajo un cambio de origen. Por lo que una transformación lineal:

$$\xi = ax + b$$

deja a los cumulantes inalterados hasta que la constante b sea incluida y multiplicada K_r por a^r . La excepción de esta propiedad es el primer cumulante, el cual es igual a la media.

Ejemplo 1.10

Se demuestra a continuación, que los cumulantes de todos los órdenes, excepto el de primer orden permanece constante con respecto a la posición del punto de referencia.

Si el origen es modificado de "a" a "b" en la ecuación (1.6), donde $c = b - a$ como lo anterior, entonces el efecto sobre $C(\theta)$ es uno de sus multiplicandos por $\exp(-i\theta c)$; para $\int \exp(i\theta x) f(x) dx$ llega a ser $\int \exp(i\theta(x - c)) f(x) dx$. Por lo cual, el efecto sobre $\ln C(\theta)$ es propiamente agregar el término $-i\theta c$, y consecuentemente los coeficientes en $\ln C(\theta)$ son invariables, excepto el primero, el cual es reducido por C.

Teorema de los Cumulantes

Un teorema relativamente sencillo puede derivarse de la relación entre los cumulantes de entrada, la función de respuesta, y la salida (O'Connor y Nash, 1968). Tomando el logaritmo de la ecuación (1.17), se tiene:

$$\text{Ln}[Y(s)] = \text{Ln}[H(s)] + \text{Ln}[X(s)] \quad (1.75)$$

diferenciando r veces ambos lados de la ecuación anterior y evaluando la derivada para $s = 0$, se obtiene:

$$K_r(y) = K_r(h) + K_r(x) \quad ; \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.76)$$

Así, para un sistema lineal de tiempo-invariante, el r -ésimo cumulante de salida es igual a la suma de los r -ésimo cumulantes de entrada y la función de respuesta. Excepto para el primer cumulante, todos los demás son independientes del punto de referencia. La forma simple del teorema de momentos de Nash para el segundo y tercer momentos con respecto al centroide, se ha visto que son igual al segundo y tercer cumulantes, respectivamente.

Una muy significativa consecuencia de este teorema para sistemas lineales de tiempo-invariante es como se explica a continuación. Si un sistema es representado por una cascada de elementos lineales, entonces el r -ésimo cumulante del hidrograma instantáneo unitario (HIU) de la cascada es igual a la suma de los r -ésimos cumulantes de los HIU de los elementos individuales. Esto puede demostrarse con la aplicación sucesiva del teorema de cumulantes de cada elemento de la cascada. De tal forma que:

$$K_r(h) = \sum_{i=1}^N K_r(h_i) \quad (1.77)$$

en la cual h_i es el HIU del r -ésimo elemento y N es el número de elementos en la cascada.

Ejemplo 1.11

Considerando el ejemplo 1.6. Determinemos los cumulantes de $y(t)$ independientes así como por el teorema de cumulantes.

La función $h(t)$ es normalizada. Su $G(\theta)$ es:

$$G(\theta) = \int_0^{\infty} e^{\theta t} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(1-\theta)} dt = \frac{1}{1-\theta}$$

$$\text{Ln } G(\theta) = -\text{Ln}(1 - \theta)$$

Por lo tanto,

$$K_r(h) = \left[\frac{d^r}{d\theta^r} \text{Ln } G(\theta) \right]_{\theta=0}$$

$$K_1(h) = 1$$

$$K_2(h) = 1$$

y así sucesivamente.

La función $x(t)$ es normalizada dividiendo entre $x_0 D$. El logaritmo natural de la FGM es:

$$\text{Ln } G(\theta) = \text{Ln} \left[\int_0^D \frac{e^{\theta t}}{D} dt \right]$$

Por lo tanto,

$$K_1(x) = \frac{D}{2}$$

$$K_{2r}(x) = \frac{D^2}{12}$$

y así sucesivamente.

La función $y(t)$ es normalizada dividiendo entre $x_0 D$. Esto es:

$$\text{Ln } G(\theta) = \text{Ln} \left[\int_0^D \frac{e^{\theta t}}{D} (1 - e^{-t}) dt + \int_0^{\infty} \frac{y_0}{x_0 D} e^{\theta t} e^{-(t-D)} dt \right]$$

Por lo tanto:

$$K_1(y) = 1 + \frac{D}{2}$$

$$K_2(y) = 1 + \frac{D^2}{12}$$

y así sucesivamente.

Aplicando el teorema de momentos se encuentran los cumulantes de "y" como fueron obtenidos en forma directa.

Cumulantes Adimensionales

En la misma forma que los momentos adimensionales, los cumulantes adimensionales han sido encontrados útiles en la calibración de modelos. Estos pueden definirse como:

$$s_2 = \frac{K_2}{(K_1)^2} = m_2 \quad (1.78a)$$

$$s_3 = \frac{K_3}{(K_1)^3} = m_3 \quad (1.78b)$$

$$s_4 = \frac{K_4}{(K_1)^4} = m_4 - 3m_2^2 \quad (1.78c)$$

Estos cumulantes adimensionales también pueden denominarse como parámetros de forma y emplearse para comparar modelos hidrológicos.

Cumulantes Factoriales

Un cumulante factorial $K_{(r)}$ puede definirse como el coeficiente de $e^r/r!$ en el desarrollo del logaritmo de la FGMF. La función generadora de cumulante factorial (FGCF) es por lo cual definida tanto de $\ln P(x)$ como de $\ln y(B)$.

$$\ln g(B) = \ln F\left(\frac{1}{1-B}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} K_{(r)} \left[\frac{(-B)^r}{r!} \right] \quad (1.79a)$$

En la cual $K_{(r)}$ es el r -ésimo cumulante factorial. Esto puede denotarse como:

$$K_{(r)} = \left. \frac{d^r}{dz^r} \ln F\left(\frac{1}{z}\right) \right|_{z=1} \quad (1.79b)$$

La relación entre cumulantes y cumulantes factoriales son formalmente similares a aquellos entre momentos y momentos factoriales. Análogamente a la ecuación (1.61), con intervalo

unitario,

$$\begin{aligned}K_{[1]} &= K_1 \\K_{[2]} &= K_2 - K_1 \\K_{[3]} &= K_3 - 3K_2 + 2K_1 \\K_{[4]} &= K_4 - 6K_3 + 11K_2 - 6K_1\end{aligned}\quad (1.80a)$$

y así sucesivamente.

Contrariamente:

$$\begin{aligned}K_2 &= K_{[2]} + K_{[1]} \\K_3 &= K_{[3]} + 3K_{[2]} + K_{[1]} \\K_4 &= K_{[4]} + 6K_{[3]} + 7K_{[2]} + K_{[1]}\end{aligned}\quad (1.80b)$$

y así sucesivamente.

El teorema de cumulantes factorial también puede derivarse de la misma forma como el teorema de cumulantes ordinarios. Formalmente, estos teoremas son similares en apariencia. De tal manera,

$$K_{[r]}(y) = K_{[r]}(x) + K_{[r]}(h) \quad ; \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (1.81)$$

Ejemplo 1.12

A partir de la función del ejemplo 1.7 son calculados los cumulantes factoriales.

Aplicando la ecuación (1.80a), se tiene que:

$$K_{[r]} = (r - 1) ! K^r \quad ; \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

1.4 METODO DE MEDIAS INCOMPLETAS

Houghton (1978) desarrolló este método para estimar los parámetros de la distribución Wakeby. El método no emplea momentos superiores al de primer orden y genera estimadores estables con poco sesgo. Se emplea una combinación de medias calculadas sobre sólo una parte del rango. Para explicar éste método, de acuerdo a Houghton, se considera una muestra de N observaciones ordenadas $x_1, x_2,$

x_1, \dots, x_N , que tienen una función de densidad de probabilidad $f(x)$. Si se calcula la media \bar{x} , entonces se tiene:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (1.82)$$

Digamos que $y = F(x)$, donde $F(x)$ es la función de densidad acumulada. Entonces, $x = F^{-1}(y)$, y $dy = f(x) dx$.

Por lo tanto:
$$\bar{x} = \int_0^1 F^{-1}(y) dy \quad (1.83)$$

Como ilustración, considérese un caso especial de la distribución Wakeby, definida como:

$$x = c (1 - F)^{-d} + e \quad (1.84)$$

donde c , d , y e son parámetros y

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds \quad (1.85)$$

Sustituyendo la ecuación (1.84) en la (1.83), se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_0^1 [c(1 - F)^{-d} + e] dF \\ &= e + \frac{1}{1-d} \end{aligned} \quad (1.86)$$

\bar{x} quedará entre dos observaciones adyacentes en la muestra y la dividirá efectivamente en dos grupos disjuntos. A continuación se procede a calcular la media del grupo superior, digamos que sea \bar{x}_1 , como se muestra en la Figura 1.3. Posteriormente, se calcula la media de todas las observaciones superiores a \bar{x}_1 , denominando a ésta como media incompleta \bar{x}_2 , y así sucesivamente. Para calcular estas medias, defínase como $\bar{x}(a,b)$ la media del intervalo (x_a, x_b) en el espacio x o del intervalo (a, b) en el espacio F . Por lo que

$$\bar{x}_{(a,b)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b F^{-1}(y) dy \quad (1.87)$$

Los puntos extremos son determinados por funciones de N_i . Por

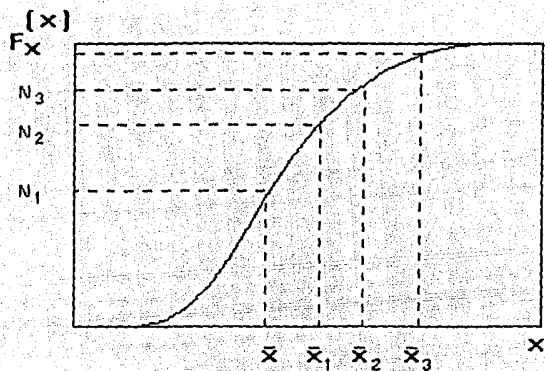


Figura 1.3 Cálculo de medias incompletas

ejemplo,

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \frac{1}{1 - (N_2/N)} \int_{(N_2/N)}^1 [c(1 - F)^{-d} + e] dF \\ &= \frac{c}{1 - d} \left[1 - \frac{N_2}{N} \right]^{-d+1} + e \left(1 - \frac{N_2}{N} \right) \end{aligned} \quad (1.88)$$

Así mismo,

$$\bar{x}_i = e \left(1 - \frac{N_i}{N} \right) + \frac{c}{1 - d} \left[1 - \frac{N_i}{N} \right]^{-d+1}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.89)$$

Las medias incompletas \bar{x}_i y la correspondiente N_i pueden relacionarse con los parámetros de la distribución Wakeby en una manera de ajuste inverso. Esto es debido a su definición inversa. Las primeras dos medias incompletas son empleadas para calcular c y e . Si d es especificada, entonces la relación es lineal en c y e . Houghton aplicó este procedimiento a muestras pequeñas ($N=20$). Consideró un valor de d y estimó c y b por análisis de regresión lineal. Para 48 registros de avenidas (Houghton, 1978) se obtuvo que d estaba en la vecindad de 0.2. Él observó que la avenida estimada de T -años ($T \leq 100$) no fué muy sensitiva para d , al menos para un pequeño margen alrededor de su vecindad.

El método de medias incompletas puede aplicarse a cualquier función que sea expresada en forma inversa. Como ejemplos de estas se tienen las funciones exponenciales y de Valores Extremos tipo I. Sin embargo, si la función no puede expresarse fácilmente en forma inversa, entonces esta relación podría no ser tan sencilla. Como un caso particular se tiene la distribución lognormal o la log-Pearson tipo III.

Ejemplo 1.13

Consideremos la distribución de probabilidad de valores extremos tipo I (Gumbel),

$$f(x) = a \exp \left[-a(x - b) - \exp[-a(x - b)] \right], \quad a > 0, \quad -\infty < b < x$$

Determinemos los parámetros a y b por el método de medias incompletas,

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds = \int_0^x a \exp \left[-a(s - b) - \exp[-a(s - b)] \right] ds$$

$$= \exp \left[-\exp[-a(x - b)] \right]$$

Tomando dos veces logaritmos de $F(x)$ y despejando x se tiene:

$$x = b - \frac{1}{a} \text{Ln} [-\text{Ln} F(x)]$$

Esta es la forma inversa de la distribución de Valores Extremos tipo I (Gumbel).

Para una muestra de N datos ordenados $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, los puntos extremos son determinados por la funciones N_i . Por ejemplo,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{(1 - (N_i/N))} \int_{N_i/N}^1 \left[b - \frac{1}{a} \text{Ln}(-\text{Ln} F) \right] dF$$

El primer término dentro del integrando puede escribirse como:

$$\int_{N_i/N}^1 b dF = bF \Big|_{N_i/N}^1 = b \left[1 - \frac{N_i}{N} \right]$$

El segundo término dentro del integrando puede expresarse como:

$$\int_{N_i/N}^1 \text{Ln}(-\text{Ln} F) dF = \int_{N_i/N}^1 \text{Ln}(\text{Ln} F^{-1}) dF$$

Digamos que $u = \text{Ln} F^{-1}$. Entonces $F = \exp(-u)$ y $dF = -\exp(-u)du$, por lo cual,

$$\int_{\text{Ln}N/N}^1 \text{Ln} u [-\exp(-u)] du = \int_0^{\text{Ln}N/N} \text{Ln} u \exp(-u) du$$

Expresando el término exponencial como una serie,

$$= \int_0^{\text{Ln}N/N} \left[1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \dots \right] \text{Ln} u du$$

$$= \int_0^{\text{Ln}N/N} \left[\text{Ln} u - u \text{Ln} u + \frac{u^2}{2!} \text{Ln} u - \frac{u^3}{3!} \text{Ln} u + \dots \right] du$$

Realizando la integración término a término, se tiene:

$$\int \ln u \, du = u \ln u - \int \frac{1}{u} u \, du = u \ln u - u$$

$$\int u \ln u \, du = \ln u \frac{u^2}{2} - \int \frac{1}{u} \frac{u^2}{2} \, du = \frac{u^2}{2} \ln u - \frac{u^2}{4}$$

$$\int u^2 \ln u \, du = \ln u \frac{u^3}{3} - \int \frac{1}{u} \frac{u^3}{3} \, du = \frac{u^3}{3} \ln u - \frac{u^3}{9}$$

$$\int u^3 \ln u \, du = \ln u \frac{u^4}{4} - \int \frac{1}{u} \frac{u^4}{4} \, du = \frac{u^4}{4} \ln u - \frac{u^4}{6}$$

Y así sucesivamente. Sustituyendo éstas en el integrando principal, se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln N/N_i} \left[\ln u - u \ln u + \frac{u^2}{2!} \ln u - \frac{u^3}{3!} \ln u + \dots \right] du \\ &= \left[u \ln u - u - \frac{u^2}{2} \ln u + \frac{u^3}{4} + \frac{u^3}{2!3} \ln u \right. \\ & \quad \left. - \frac{u^3}{2!9} - \frac{u^4}{3!4} \ln u + \frac{u^4}{3!6} \dots \right] \Big|_0^{\ln N/N_i} \\ &= \left[u \ln u - \frac{u^2}{2} \ln u + \frac{u^3}{2!3} + \frac{u^3}{3!4} + \dots \right. \\ & \quad \left. - u \frac{u^3}{4} - \frac{u^4}{2!9} + \frac{u^4}{3!16} \dots \right] \Big|_0^{\ln N/N_i} \\ &= \left[-\ln u \left\{ -u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} - \dots \right\} \right. \\ & \quad \left. - u + \frac{u^2}{2!2} - \frac{u^3}{3!3} + \frac{u^4}{4!4} - \dots \right] \Big|_0^{\ln N/N_i} \\ &= \left[-\ln u \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-u)^j}{j!} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-u)^j}{j!j} \right] \Big|_0^{\ln N/N_i} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \frac{1}{(1 - (N_i/N))} \left[b \left(1 - \frac{N_i}{N} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{a} \left\{ \ln \left(\ln \frac{N}{N_i} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \ln \left(\frac{N}{N_i} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!j} \ln \left(\frac{N}{N_i} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\bar{x}_i = b + \frac{1}{a} \left[\text{Ln} \left(\text{Ln} \frac{N}{N_i} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \text{Ln} \left(\frac{N}{N_i} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! j} \text{Ln} \left(\frac{N}{N_i} \right) \right]; \quad i = 1, 2, \dots$$

Los parámetros a y b pueden estimarse calculando \bar{x}_1 y \bar{x}_2 para N/N_1 y N/N_2

1.5 METODO DE MOMENTOS DE PROBABILIDAD PESADA (MPP)

Greenwood et al. (1979) introdujo este método y demostró su utilidad para determinar los parámetros de las distribuciones en las cuales las formas inversas de las expresiones $x = x(F)$ pueden definirse explícitamente. Ellos derivaron relaciones entre los parámetros y los MPP para las distribuciones Lambda generalizada, Wakeby, Weibull, Gumbel, Logístico y Kappa. Digamos que una función de distribución de probabilidad sea denotada por $F = F(x) = P\{X \leq x\}$. Entonces, los MPP pueden definirse como:

$$M_{i,j,k} = E[x^i F^j (1-F)^k] = \int_0^1 [x(F)]^i F^j (1-F)^k dF \quad (1.90)$$

donde $M_{i,j,k}$ es el momento de probabilidad pesada de orden (i,j,k) , $E[\cdot]$ es el operador esperanza, e i, j y k son números reales. Si $j = k = 0$ e " i " es un entero no negativo, entonces $M_{i,0,0}$ representa el momento convencional de orden i con respecto al origen. Si $M_{i,0,0}$ existe y x es una función continua de F , entonces $M_{i,j,k}$ existe para todos los números reales no negativos j y k .

Para un entero no negativo j, k ,

$$M_{i,0,k} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j M_{i,j,0} \quad (1.91)$$

$$M_{i,j,0} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k M_{i,0,k} \quad (1.92)$$

Si $M_{i,0,k}$ existe y x es una función continua de F , entonces $M_{i,j,0}$ existe. Cuando la inversa $x = x(F)$ de la distribución $F = F(x)$ no puede ser definida analíticamente, en general puede ser difícil derivar analíticamente $M_{i,j,k}$.

Cuando i, j y k son enteros no negativos, el momento de probabilidad pesada de orden (i, j, k) , $M_{i,j,k}$, es proporcional a $E[x_{j+1, j+k+1}^i]$, el i -ésimo momento con respecto al origen del estadístico de orden $(j+1)$ para una muestra de tamaño $n = k+j+1$.

Simbólicamente,

$$M_{i,j,k} \propto E[x_{j+1, j+k+1}^i] \quad (1.93)$$

Específicamente,

$$E[x_{j+1, j+k+1}^i] = \frac{M_{i,j,k}}{B[j+1, k+1]} \quad (1.94)$$

donde: $B[. , .]$ denota la función beta. Si $j = 0$, se tiene:

$$E[x_{i, k+1}^i] = (k+1) M_{i,0,k} \quad (1.95)$$

Aquí $(k+1) M_{i,0,k}$ representan el i -ésimo momento con respecto al origen del estadístico de primer orden para una muestra de tamaño $k+1$. Por otro lado, si $k = 0$, se tiene:

$$E[x_{j+1, j+1}^i] = (j+1) M_{i,j,0} \quad (1.96)$$

donde $(j+1) M_{i,j,0}$ representa el i -ésimo momento con respecto al origen del estadístico de orden $(j+1)$ para una muestra de tamaño $j+1$.

El valor esperado del rango de x en una muestra de tamaño

$n = k + 1 = j + 1$ puede escribirse como:

$$E[x_{n,n} - x_{1,n}] = n(M_{1,n-1,0} - M_{1,0,n-1}) \quad (1.97)$$

Ejemplo 1.14

Considerando la distribución del ejemplo 1.13. Determinemos sus parámetros por el método de momentos de probabilidad pesada.

Como en el ejemplo anterior,

$$F = \exp[-\exp(-a(x - b))]$$

y

$$x = b - \frac{1}{a} \text{Ln} [-\text{Ln} F]$$

Debido a que tiene dos parámetros, es necesario determinar dos MPP. Cuando $i = 1, j, k = 0$, entonces por definición

$$\begin{aligned} M_{1,j,0} &= \int_0^1 [x(F)] F^j (1-F)^0 dF \\ &= \int_0^1 \left[b - \frac{1}{a} \text{Ln}(-\text{Ln}F) \right] F^j dF \\ &= b \frac{F^{j+1}}{j+1} \Big|_0^1 - \frac{1}{a} \int_0^1 \text{Ln}(-\text{Ln}F) F^j dF \end{aligned}$$

$$M_{1,j,0} = b \frac{b}{1+j} + \frac{1}{a} \left[\frac{\text{Ln}(1+j) + \epsilon}{1+j} \right]$$

donde ϵ es el número de Euler $+ 0.5772$. Puesto que:

$$M_{1,j,0} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k M_{1,0,k}$$

se tiene

$$\begin{aligned} M_{1,1,0} &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} (-1)^k M_{1,0,k} \\ &= M_{1,0,0} - M_{1,0,1} \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$M_{1,0,0} = b + \frac{\epsilon}{a}$$

$$M_{1,1,0} = \frac{b}{2} + \frac{1}{a} \left[\frac{\text{Ln} 2 + \epsilon}{2} \right]$$

donde $M_{1,0,0}$ es el momento ordinario de primer orden con respecto

al origen.

$$\begin{aligned}
 M_{1,0,1} &= \int_0^1 \left[b - \frac{1}{a} \text{Ln}(-\text{Ln } F) \right] (1 - F) dF \\
 &= \int_0^1 b dF = \int_0^1 \frac{1}{a} \text{Ln}(-\text{Ln } F) dF \\
 &\quad - \int_0^1 bF dF + \int_0^1 \frac{1}{a} F \text{Ln}(-\text{Ln } F) dF \\
 &= b - \frac{b}{2} - \int_0^1 \frac{1}{a} \text{Ln}(-\text{Ln } F) dF + \int_0^1 \frac{1}{a} F \text{Ln}(-\text{Ln } F) dF \\
 &= \frac{b}{2} + \frac{\epsilon}{a} - \frac{1}{a} \left[\frac{\text{Ln } 2 + \epsilon}{2} \right] \\
 &= \frac{b}{2} + \frac{\epsilon}{a} - \frac{\epsilon}{2a} - \frac{\text{Ln } 2}{2a} \\
 M_{1,0,1} &= \frac{b}{2} + \frac{\epsilon}{2a} - \frac{\text{Ln } 2}{2a}
 \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$M_{1,0,0} - 2M_{1,0,1} = \frac{\text{Ln } 2}{a}$$

$$\text{o} \quad \frac{M_{1,0,0} - 2M_{1,0,1}}{\text{Ln } 2} = \frac{1}{a}$$

$$\text{y} \quad b = M_{1,0,0} - \frac{\epsilon}{a}$$

1.6 METODO DE MOMENTOS MEZCLADOS (MMIX)

Rao (1980, 1983) propusó un método de momentos mezclados para el ajuste de la distribución Log-Pearson Tipo (LPT) III. El método MMIX es aplicable a cualquier distribución de probabilidad logarítmica. Como lo sugiere su nombre, el método MMIX esta basado en los momentos mezclados de los datos originales y transformados logarítmicamente. Así, solo se utilizan los primeros dos momentos (media y varianza) de los datos. Por ejemplo, si se desea ajustar la distribución LPT III, sus parámetros pueden estimarse por dos caminos: 1) El primer método emplea la media (\bar{x}) y la varianza (S_x^2) de los datos originales y la media de los

valores logarítmicamente transformados (\bar{y}); y 2) El segundo método emplea la media de los datos originales \bar{x} ; la media \bar{y} y la varianza S_y^2 de los datos logarítmicamente transformados. Rao (1980) demostró por experimentación de Monte Carlo que el primer método posee superiores propiedades estadísticas cuando es comparado con el segundo.

Ejemplo 1.15

Digamos que la distribución Log-Pearson Tipo III tiene los parámetros a , b , y c , y sea $y = \text{Ln } x$. La función de densidad (distribución Pearson Tipo III) de "y" es:

$$f(y) = \frac{|a|}{\Gamma(b)} [a(y - c)]^{b-1} \exp[-a(y - c)]$$

La función de densidad de la distribución Log-Pearson (LPT) Tipo III es:

$$f(x) = \frac{|a|}{\Gamma(b)} \frac{\exp(ax)}{x^{1+a}} [a(\text{Ln } x - c)]^{b-1}$$

Para que la distribución LPT III sea sesgada positivamente, $a > 0$, $c \leq y < \infty$, y $\exp(c) \leq x < \infty$. Procediendo a determinar los parámetros a , b , y c por el método MMIX, se tiene

Sean \bar{y} , S_y^2 y C_{sy} la media, varianza y el coeficiente de asimetría de la distribución Pearson Tipo (PT) III. Sean \bar{x} y S_x^2 la media y varianza de la distribución PT III, de acuerdo a Rao (1983),

$$\bar{y} = c + ba^{-1}$$

$$S_y^2 = ba^{-2}$$

$$C_{sx} = \frac{a}{|a|} 2b^{-0.5}$$

$$b = \frac{\text{Ln} \left(\frac{S_x^2 + \bar{x}^{-2}}{\bar{x}^{-2}} \right)}{\text{Ln} \left(\frac{(1 - 1/a)^2}{(1 - 2/a)} \right)}$$

$$c = \text{Ln } \bar{x} + b \text{Ln} \left(1 - \frac{1}{a} \right)$$

Reordenando la expresión para b y resolviendo explícitamente para el parámetro "a", a partir de un valor conocido de b,

$$a = 1 \pm \left(1 + \frac{1}{Z}\right)^{0.5}$$

donde

$$Z = \left[\frac{x^{-2} + S^2}{x^{-2}} \right]^{b-1} - 1$$

El parámetro "a" tiene el mismo signo de C_{ay} , el cual depende de b. Por lo que, un estimador inicial de C_{ay} proporcionará un estimador inicial de b y el signo algebraico de a. Los estimadores finales de los parámetros pueden obtenerse como sigue. Calcule Z y a, después c. Calcule \bar{y} a partir de los valores de a, b, y c obtenidos anteriormente. Repítanse los cálculos hasta que \bar{y} calculado sea igual al valor \bar{y} observado ajustando b.

1.7 METODO DE ESTIMACION DE MAXIMA VEROSIMILITUD (ML)

Sea $f(x; a_1, a_2, \dots, a_m)$ una función de densidad de probabilidad (fdp) de x con parámetros $a_i, i = 1, 2, \dots, m$, para estimarse. Digamos que existe una muestra aleatoria x_1, x_2, \dots, x_n de esta función de densidad. Entonces su fdp conjunta es $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m)$. Debido a que la muestra es aleatoria, la fdp conjunta puede escribirse como:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m)$$

Interpretando en forma conceptual, la probabilidad de obtener un valor dado de x, digamos x_1 , es proporcional a $f(x; a_1, a_2, \dots, a_m)$. Por otro lado, la probabilidad de obtener la muestra aleatoria x_1, x_2, \dots, x_n a partir de la población de x es proporcional al producto de sus densidades de probabilidad individuales o su fdp conjunta. Esta fdp conjunta es denominada también como la función de verosimilitud o función ML, denotada por L,

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (1.98)$$

Los parámetros a_i , $i = 1, 2, \dots, m$, son desconocidos.

El método de máxima verosimilitud estima los parámetros desconocidos al maximizar L , esto es, maximizando la verosimilitud de que la muestra bajo consideración es la única que podría ser obtenida si n observaciones aleatorias fueran seleccionadas a partir de $f(x; a_1, a_2, \dots, a_m)$. Los valores de los parámetros así obtenidos son conocidos como los estimadores por máxima verosimilitud. Debido a que con $\ln L$ se alcanza también su máximo para valores especificados de a_i , $i = 1, 2, \dots, m$, como lo hace L , la función ML también puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \ln L = L^* &= \ln \prod_{i=1}^n f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) \\ &= \prod_{i=1}^n \ln f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) \end{aligned} \quad (1.99)$$

El procedimiento para estimar los parámetros o la determinación del punto donde la función alcanza su máximo, implica la diferenciación de L o de $\ln L$ parcialmente con respecto a cada parámetro e igualándolo a cero. Por lo que, esto genera m ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(a_1, a_2, \dots, a_m)}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial L(a_1, a_2, \dots, a_m)}{\partial a_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L(a_1, a_2, \dots, a_m)}{\partial a_m} &= 0 \end{aligned} \quad (1.100)$$

Estas m ecuaciones con m incógnitas pueden resolverse para los m parámetros desconocidos. Varios investigadores han empleado este método en hidrología (Douglas, Clarke, y Newton, 1976; Sorooshian, Gupta, y Fulton, 1983; Phien y Jivajirajah, 1984).

Ejemplo 1.16

Obtenemos los parámetros por el método ML de la función:

$$f(x) = a \exp(-ax), \quad x > 0, \quad a > 0.$$

sea:

$$L = a^n \exp[-a \sum x_i]$$

Tomando su logaritmo,

$$\ln L = L^* = n \ln a - a \sum x_i$$

Diferenciando con respecto a "a" e igualando a cero, se tiene

$$a = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}$$

1.8 METODO DE MINIMOS CUADRADOS (MMC)

Sea una función $y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_m)$, donde $a_i, i = 1, 2, \dots, m$, son parámetros a estimarse. El método de mínimos cuadrados (MMC) implica la estimación de los parámetros por minimización de la suma de los cuadrados de todas las desviaciones entre los valores observados y los calculados de "y". Matemáticamente, esta suma S puede expresarse como:

$$S = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_o(i) - y_c(i)]^2$$

$$S = \sum_{i=1}^n [y_o(i) - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m)]^2 \quad (1.101)$$

donde $y_o(i)$ es el i-ésimo valor observado de "y", $y_c(i)$ es el i-ésimo valor calculado de "y", y $n > m$ es el número de observaciones. El mínimo de S en la ecuación (1.101) puede obtenerse diferenciando S parcialmente con respecto a cada parámetro e igualando a cero:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n [y_o(i) - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m)]^2}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n [y_o(i) - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m)]^2}{\partial a_2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n [y_o(i) - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m)]^2}{\partial a_m} = 0 \quad (1.102)$$

Estas m ecuaciones, comunmente llamadas ecuaciones normales, son obtenidas para la estimación de los m parámetros.

Ejemplo 1.17

Sea una línea recta expresada como $y = a + bx$. Determinemos los parámetros a y b por MMC para una muestra de n valores de "x" y "y",

$$S = \sum_{i=1}^n [y_o(i) - a - bx_i]^2$$

Diferenciando S parcialmente con respecto a "a" y "b" e igualando cada vez con cero, se tiene:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = - \sum y_o + na + 2b \sum x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = - \sum y_o x_i + a \sum x_i + 2b \sum x_i^2 = 0$$

Las ecuaciones normales son entonces:

$$na + b \sum x_i = \sum y_o$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i y_o$$

En todas estas ecuaciones los términos de las sumatorias son conocidas a partir de la muestra. Por lo que, los parámetros a y b pueden determinarse resolviendo estas ecuaciones.

Ejemplo 1.18

Sea la expresión $y = a + bx + cx^2$. Determinemos los parámetros a , b , y c por MMC para una muestra de m valores de x e y .

Siguiendo el mismo procedimiento. Determinando S como:

$$S = \sum_{i=1}^n [Y_o(i) - a - bx_i - cx_i^2]^2$$

Diferenciando S parcialmente con respecto a "a", "b" y "c" e igualando cada vez con cero resultan tres ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} an + b \sum x_i + c \sum x_i^2 &= \sum y_o \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 &= \sum x_i y_o \\ a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 &= \sum x_i^2 y_o \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para a, b, y c, debido a que todos los términos de la sumatoria son conocidos a partir de la muestra.

Ejemplo 1.19

Sea un modelo lineal general expresado como $y = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x_i$. Procedamos a estimar los parámetros a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$, a partir de una muestra de n valores de: y, x_1, x_2, \dots, x_m , $n > m$.

Esta expresión es similar en la forma a la ecuación lineal del ejemplo 1.17. Por lo cual, las ecuaciones de aquel ejemplo pueden ser extendidas al caso general. Siguiendo el mismo procedimiento, las ecuaciones normales pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i^3 + \dots + a_m \sum x_i^m &= \sum y_o \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i x_i^2 + a_3 \sum x_i^3 + \dots + a_m \sum x_i x_i^m &= \sum x_i y_o \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i x_i^2 + a_2 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i^3 + \dots + a_m \sum x_i^2 x_i^m &= \sum x_i^2 y_o \\ &\vdots \\ a_0 \sum x_i^m + a_1 \sum x_i x_i^m + a_2 \sum x_i^2 x_i^m + a_3 \sum x_i^3 x_i^m + \dots + a_m \sum x_i^m &= \sum x_i^m y_o \end{aligned}$$

Estas, son tantas ecuaciones como incógnitas se tengan. Las cuales pueden resolverse para obtener los parámetros.

Representación Matricial del MMC

La mayoría de las ejecuciones de cálculo en el ajuste de modelos de variables múltiples de datos observados pueden expresarse más eficientemente empleando notación matricial. Las ecuaciones normales en el método de mínimos cuadrados a menudo pueden reducirse a la forma:

$$X A = Y \quad (1.103)$$

donde X es la matriz de dimensiones $(n + 1, m + 1)$, A es un vector de parámetros de dimensión $(m + 1, 1)$, y Y es un vector de dimensión $(n + 1, 1)$. Se denotará en esta sección a las matrices o vectores con letras mayúsculas. El superíndice r significará la transpuesta. La desviación entre datos observados y datos calculados de "y" pueden escribirse como:

$$D = Y - X A$$

donde D es un vector de desviaciones d_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

La suma de los cuadrados de las desviaciones puede obtenerse empleando el producto interno, el cual es encontrado multiplicando D por su transpuesta D^T ,

$$\begin{aligned} \sum d_i^2 &= D^T D \\ &= [Y^T - A^T X^T][Y - XA] \\ &= Y^T Y - Y^T X A - A^T X^T Y + A^T X^T X A \end{aligned} \quad (1.104)$$

Debido a que A y Y son vectores columna, sus transpuestas son vectores renglón. Así, el segundo y tercer términos del lado derecho de la ecuación (1.104) están en forma escalar. Debido a que en un escalar su transpuesta es el mismo, se tiene:

$$d_i^2 = Y^T Y - 2A^T X^T Y + A^T X^T X A$$

Diferenciando con respecto a A e igualando con cero,

$$X^T X A = X^T Y$$

La matriz $[X^T X]$ y el vector $[X^T Y]$ son generados a partir de valores observados de las variables. Los parámetros entonces pueden determinarse como:

$$A = [X^T X]^{-1} X^T Y \quad (1.105)$$

La ecuación (1.105) expresa una solución de mínimos cuadrados en forma compacta.

1.9 METODO DE MINIMOS CUADRADOS NO LINEALES

La mayoría de los procesos hidrológicos no pueden representarse adecuadamente por modelos lineales. Por lo que se recurre a modelos no lineales. El método de mínimos cuadrados, discutido anteriormente en el contexto de modelos lineales, puede extenderse a modelos no lineales. El método de mínimos cuadrados no lineales es un proceso numérico que incorpora satisfactoriamente el objetivo del método de mínimos cuadrados. Snyder (1972, 1980) lo ha empleado extensivamente y da una excelente discusión sobre éste. Para motivar la discusión del método de mínimos cuadrados no lineales, considérese la estimación de los parámetros a, b, y c en:

$$z = a x^b y^c \quad (1.106)$$

Aquí b y c son los parámetro de forma, los cuales no pueden estimarse por el método lineal de mínimos cuadrados. Haciendo una transformación logarítmica, la ecuación (1.106) puede escribirse en forma lineal como:

$$\ln z = \ln a + b \ln x + c \ln y \quad (1.107)$$

Para aplicar el método de mínimos cuadrados a la ecuación (1.107), el objetivo debe establecerse en términos de $\ln z$. Lo cual es diferente que el objetivo inicial, en términos de z. Este cambio

en el objetivo puede generar una pronunciada distorsión dando mayor peso a valores pequeños de z y menor peso a valores grandes de z .

Al modificar la ecuación (1.106), esta queda como:

$$z = a (x - d)^b (y - e)^c \quad (1.108)$$

donde d y e son los límites de x e y , los cuales también pueden llamarse parámetros de forma. Es claro que no es fácil linealizar la ecuación (1.108) a través de transformación logarítmica. Aún cuando $b = c = 1$, esta no puede llevarse a la forma lineal, como su forma evidente:

$$z = a x y - a d y - a e x + a d e \quad (1.109)$$

La ecuación anterior contiene una combinación lineal de cuatro términos, sin embargo, los productos de sus parámetros son del tipo no lineal. Por lo que los parámetros no pueden obtenerse por el método de mínimos cuadrados. Se puede argumentar que el proceso de prueba y error podría emplearse al proponer valores de los parámetros hasta que se encuentren los valores que hagan mínimo el residuo de la suma de los cuadrados. Sin embargo, esto no es recomendable para cierto número significativo de parámetros de modelos. Si un modelo contiene m parámetros y se intenta k niveles para cada parámetro, entonces el número de combinaciones de parámetros es k^m . Como puede observarse en la Tabla 1.1, el número de intentos requeridos para evaluar todas las combinaciones para encontrar el mejor grupo de parámetros, llega a ser demasiado grande, para que este método tenga un valor práctico se necesita otro método para generar valores óptimos de parámetros con iteraciones relativamente menores.

El método no lineal de mínimos cuadrados está basado en el desarrollo de la serie de Taylor de la función cuyos parámetros van a determinarse. Conviene antes de presentar el método para una función que tenga m parámetros, primero se considere una función

Tabla 1.1
Número de combinación de parámetros, k^m

Número de parámetros	Número de niveles		
	3	4	5
5	2.4×10^2	1.0×10^2	3.1×10^2
10	5.9×10^4	1.0×10^5	9.8×10^5
15	1.4×10^6	1.1×10^6	3.1×10^{10}
20	3.5×10^6	1.1×10^{12}	9.6×10^{13}

no lineal de un parámetro:

$$y = f(x; a) \quad (1.110)$$

donde se requiere un valor óptimo de "a" para un grupo de valores de x e y. Para un valor diferente de "a", digamos a + h, donde h es un pequeño incremento, el valor de la función puede expresarse por:

$$y_1 = f(x; a + h) \quad (1.111)$$

El desarrollo de la serie de Taylor de $f(x; a + h)$ genera:

$$f(x; a + h) = f(x; a) + hf'(x; a) + \frac{h^2}{2!} f''(x; a) + \frac{h^3}{3!} f'''(x; a) + R_k \quad (1.112)$$

ó

$$y_1 = y + hf'(x; a) + \frac{h^2}{2!} f''(x; a) + \frac{h^3}{3!} f'''(x; a) + R_k$$

donde el término residual, R_k es:

$$R_k = \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x; a_1), \quad a \leq a_1 \leq a + h \quad (1.113)$$

Es necesario relizar dos etapas: primero, para encontrar un valor óptimo de "a", se cambia "a" por a + h y se calcula $f(x; a + h)$ y después se consigue el incremento del parámetro y se calcula la función hasta que el valor de "a" requerido sea obtenido. Segundo, en la práctica no se requiere un desarrollo muy exacto de la

función por la serie de Taylor en la ecuación (1.112). De esta manera se encuentra "a" ajustando al menor residuo de la suma de los cuadrados.

Si ahora se extiende lo anterior para el caso donde la función toma una forma general,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m; a_1, a_2, \dots, a_k) \quad (1.114)$$

Nótese que x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, son fijos y a_i , $i = 1, 2, \dots, k$, son considerados variables. Digamos que h_i , $i = 1, 2, \dots, k$, denota incrementos de los parámetros a_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces desarrollando la función en la ecuación (1.114) por la serie de Taylor, se tiene:

$$y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_m; a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_k + h_k) \\ = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + h_k \frac{\partial}{\partial a_k} \right)^j f(x_1, x_2, \dots, x_m; \\ a_1, a_2, \dots, a_k) + R_N \quad (1.115)$$

donde $(h_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + h_k \frac{\partial}{\partial a_k})^j$ es un repetido operador diferencial de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_m; a_1, a_2, \dots, a_k)$ y

$$R_N = \frac{1}{N!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + h_k \frac{\partial}{\partial a_k} \right)^N f(x_1, x_2, \dots, x_m; a_1 \\ + ch_1, a_2 + ch_2, \dots, a_k + ch_k), \quad 0 \leq c \leq 1 \quad (1.116)$$

Si se limita el desarrollo de la serie de Taylor a la primera diferencial, se tiene:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m; a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_k + h_k) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_m; a_1, a_2, \dots, a_k) + \sum_{j=1}^k h_j \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (1.117)$$

Como un ejemplo considérese una función que tenga cuatro parámetros. Entonces:

$$y_1 = y + \sum_{j=1}^4 h_j \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (1.118)$$

Esto genera:

$$d = y_1 - y = \sum_{j=1}^4 h_j \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (1.119)$$

La ecuación (1.119) proporciona la diferencia entre los valores observados de f y los estimados con el valor específico de los parámetros. Así, modificando cada parámetro con un apropiado incremento h , se cambia el valor funcional de y hacia y_1 . Interpretando diferencialmente, se pueden ajustar los parámetros eliminando el error $y_1 - y$, o d .

El método no lineal de mínimos cuadrados es esencialmente un proceso de ajuste lineal por el cual, empleando las soluciones de mínimos cuadrados repetidamente, los parámetros de la ecuación no lineal son estimados para una precisión deseada. Si se compara la ecuación (1.119) con un caso general, puede notarse que son similares en su estructura lineal reemplazando "y" por d , reemplazando x 's por las derivadas parciales, y reemplazando a 's por h 's. Por lo que esto permite calcular h 's como coeficientes de regresión. Las ecuaciones normales son formadas de $\partial f / \partial a_i$ y d . Continuando la evaluación de h 's, se llegan a tener nuevos valores de los parámetros:

$$a_{i,j+1} = a_{i,j} + h_{i,j} \quad , \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.120)$$

donde j significa la iteración. Este proceso es repetido con estos nuevos valores de los parámetros. En otras palabras, se calculan las diferencias y las derivadas parciales y después las h 's. Esto genera mejores valores de los parámetros. Se repite el proceso hasta que los cambios en los h 's llegan a ser muy pequeños. Lo que implica que los a 's no pueden mejorarse y $\sum d_i^2$ es un mínimo. Por lo cual, se concluye el proceso.

Sin embargo, para implementar este método, se requiere calcular las derivadas parciales de la función. Esto implica que la función tenga una forma relativamente sencilla, la cual pueda ser diferenciable. La mayoría de los modelos hidrológicos no son ecuaciones sencillas. Por ejemplo, un modelo empleando precipitación podría requerir una función explícita para la representación del hietograma de lluvia. Tal función de la precipitación, sin embargo, no existe. La que se realiza comunmente es tomar incrementos discretos de tiempo. Por lo que es necesario un procedimiento para conformar tales funciones. Un procedimiento adecuado (Snyder, 1980) es el método de diferencias finitas parcialmente divididas, donde la diferencias divididas reemplazan a la derivada parcial en la ecuación (1.119).

Digamos que y_c denota el valor calculado de "y". La relación entre y_c y el parámetro "a" puede expresarse como $y_c = f(a)$ (ver Figura 1.4). La derivada parcial $\partial f / \partial a$ evaluada para a_0 es la tangente de ésta relación en (a_0, y_c) . Para obtener la derivada por diferencias divididas, se cambia "a" incrementándola ligeramente en Δa_0 . Un nuevo valor puede calcularse de y_{c1} correspondiente a $a_0 + \Delta a_0$. La pendiente de la línea entre los dos puntos $(a_0 + \Delta a_0, y_{c1})$ y (a_0, y_c) es dada simplemente como $(y_{c1} - y_c) / \Delta a_0$. Por un pequeño valor de Δa_0 , $\partial f / \partial a$ y $(y_{c1} - y_c) / \Delta a_0$ no cambiará significativamente y puede por lo tanto reemplazarse por la última. Por otro lado, Las derivadas parciales correspondientes a otro parámetro pueden ser evaluadas. Así, la ecuación (1.119) puede expresarse como:

$$d = y - y_c = h_1 \frac{y_{c1} - y_c}{\Delta a_1} + h_2 \frac{y_{c2} - y_c}{\Delta a_2} + h_3 \frac{y_{c3} - y_c}{\Delta a_3} + \dots \quad (1.121)$$

donde y_{ci} , $i = 1, 2, 3, \dots$ son los valores calculados de "y" correspondientes a los parámetros apropiados.

Sin embargo, puede ser difícil obtener una solución de mínimos cuadrados no lineales. Al iniciar con un valor específico del parámetro, el método puede convergir a un mínimo local, el cual no es el mínimo global buscado. Lo anterior puede verificarse inicializando el método para diferentes valores iniciales de los

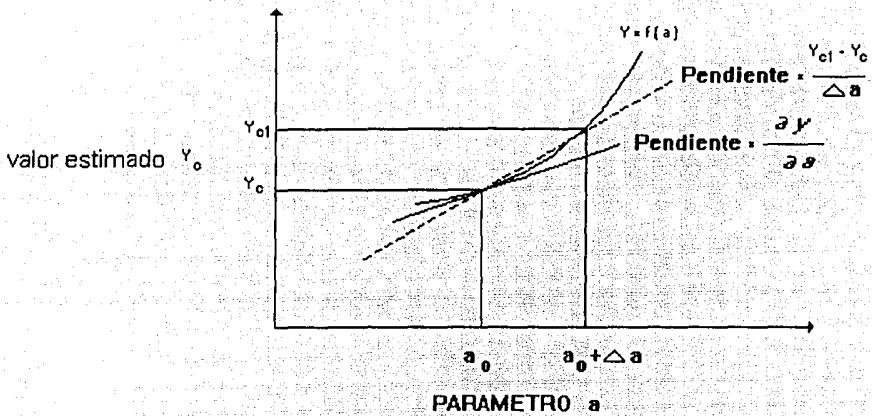


Figura 1.4 Definición de la pendiente por diferencia finita dividida

parámetros para observar si se obtiene el mismo valor mínimo. El proceso de convergencia puede no ser monolítico; esto es, la i -ésima iteración puede algunas veces ser inferior a la $(i-1)$ -ésima iteración. Esto puede ser corregido minimizando el error de redondeo. Algunas veces, dos diferentes grupos de valores de parámetros proporcionan el mismo valor mínimo de la suma de los cuadrados de la desviaciones. La solución que sea seleccionada deberá estar basada en consideraciones hidrológicas.

1.10 METODOS DE OPTIMACION

Existe una gran variedad de métodos de optimación (Rosenbrock, 1960; Palmer, 1969; DeCoursey y Snyder, 1969; Himmelblau, 1972; Sorooshian, 1980; Sorooshian y Gupta, 1983; Sehitoglu, 1983), los cuales pueden emplearse para estimar los parámetros de los modelos. Todos los métodos de optimación requieren la especificación de una función objetivo o un criterio de error.

Funciones Objetivo

El concepto de la determinación óptima de los parámetros del modelo automáticamente requiere que la función objetivo sea compatible con el uso propuesto. Sin embargo, es difícil definir un criterio de error, el cual, al llegar a la minimización, producirá valores óptimos de los parámetros sin desviarse inadecuadamente. Una comparación de modelos también requiere que la misma función objetivo sea empleada en la determinación de parámetros de cada uno de los modelos. Un número de funciones objetivo han sido empleadas o sugeridas en hidrología (Diskin y Simon, 1977). Algunos de ellos son indicados a continuación.

Suma de los Cuadrados de las Desviaciones

La función objetivo basada en la suma de los cuadrados de las desviaciones puede ser definida como:

$$F = \sum_{i=0}^N [y_o(i) - y_p(i)]^2 \quad (1.122)$$

donde F es el índice de desagregación o error, $y_o(i)$ es el i -ésimo valor observado de la variable, " y ", $y_e(i)$ es el i -ésimo valor estimado de " y ", y N es el número de observaciones. Cuando es dividida por N , esta F es análoga a la varianza residual de un análisis de regresión. La minimización de F es diseñada para igualar la curva completa de " y " aunque el mayor peso es asignado a sus valores mayores. En el proceso de igualación de la curva completa, se puede esperar que un excesivo peso sea asignado a pequeños valores debido a sus grandes números. Esto puede generar un mal ajuste de la curva pico. Otro defecto de esta función objetivo, es el de que es afectada fuertemente por la deficiente sincronización de tiempo entre las variables dependientes e independientes.

Los valores de F pueden calcularse para cada evento si se requiere el ajuste para un evento individual. Si los parámetros del modelo van a ser optimados sobre un grupo de eventos, entonces F necesita evaluarse para el grupo completo. En este caso F será un índice muy deficiente de la medida de desagregación, debido a que el evento que tiene el mínimo peso puede ser el más importante de todos. Esta es una muy severa limitación para el estudio de avenidas.

Suma de los cuadrados de las desviaciones pico

Esta puede expresarse como:

$$F = \sum_{j=1}^N [y_{po}(j) - y_{pe}(j)]^2 \quad (1.123)$$

donde $y_{po}(j)$ es el j -ésimo valor pico observado de la variable " y ", $y_{pe}(j)$ es el j -ésimo valor pico estimado de " y ", y N es el número de valores pico en el grupo de optimación. Esto es particularmente recomendable en estudios de avenidas y parece tener algunas características atractivas. Obviamente, las cantidades picos de mayor peso son asignadas a los picos mayores. Implícitamente, se asume desde un punto de vista de riesgo, que las pérdidas se incrementan parabólicamente con el pico.

Si F es dividida entre el número de eventos, resulta el promedio del cuadrado del error. Esto demuestra, en promedio, cuanto error ocurre cuando se realiza la optimización sobre un grupo de eventos. Debido a que se requieren solamente los valores pico de cada evento, es computacionalmente eficiente. Sin embargo, su uso no es recomendado donde los picos no son una importante consideración, como en el caso de estudio de gasto mínimos.

Suma de los cuadrados de las desviaciones logarítmicas del gasto pico y volumen

La función objetivo comprende dos componentes:

$$F_1 = \sum_{j=1}^M [\ln y_{p_o}(j) - \ln y_{p_e}(j)]^2 \quad (1.124)$$

$$F_2 = \sum_{j=1}^M [\ln V_o(j) - \ln V_e(j)]^2 \quad (1.125)$$

$$\text{entonces:} \quad F = aF_1 + (1 - a) F_2 \quad (1.126)$$

donde $V_o(j)$ es el j -ésimo volumen observado de la variable "y", $V_e(j)$ es el j -ésimo volumen estimado de "y", y "a" es un factor pesado seleccionado arbitrariamente ($0 \leq a \leq 1$).

Es evidente que esta función objetivo da peso tanto al volumen como a la característica de forma de "y". El error entre los valores observados y estimados se calcula en términos de las desviaciones logarítmicas, en lugar de unidades naturales, para evitar que los parámetros vayan a ser sesgados para ajustar sólo eventos de gran magnitud. Para hacer la función objetivo más flexible, se introduce una constante arbitraria, como se muestra en la ecuación (1.126). La constante puede seleccionarse de acuerdo con el énfasis que sea propuesto para asignar en un componente error particular.

Suma de los cuadrados de las desviaciones logarítmicas de tiempo normalizado

Esta se define como:

$$F = \sum_{j=1}^N [\ln T_o(j) - \ln T_e(j)]^2 \quad (1.127)$$

donde $T_o(j)$ es el tiempo normalizado observado para el j -ésimo evento y $T_e(j)$ es el tiempo normalizado estimado para el j -ésimo evento. El tiempo normalizado puede ser definido de muchas maneras. Lo cual, sin embargo, no es recomendable en todos los problemas de modelos de optimación. Puede ser un criterio recomendable donde se obtengan soluciones adimensionales. Si la curva de ajuste es buena empleando esta función objetivo, entonces la estructura del modelo será la adecuada.

Suma de diferencias relativas elevadas a la potencia "a"

La suma de las diferencias relativas elevadas a la potencia "a" puede ser escritas como:

$$F = \sum_{i=0}^N \left(\frac{y_o(i) - y_e(i)}{y_o(i)} \right)^a, \quad a \geq 1 \quad (1.128)$$

Para $a = 1$, esta función objetivo asigna igual énfasis en los valores de "y". Esto es, de hecho, una verdadera normalización de la ecuación (1.123). Para $a > 1$, el efecto será ajustar el mejor valor menor. Esto puede ser más apropiado para el ajuste de modelos de sequias.

Todas la funciones objetivo anteriores comparten algunas propiedades comunes, dentro de las cuales pueden mencionarse las siguientes:

1) Para una cierta clase de problemas (modelos lineales), el contorno de F llega a formar superficies cuadráticas, las cuales

son ajustables a muchas técnicas de optimación potencial.

2) Para modelos lineales, F tiene significancia estadística, debido a que $F/(N-1)$ (donde $N =$ número de puntos de datos) es la varianza y puede ser empleada para conocer los límites de confianza sobre los parámetros optimados (asumiendo que no existe dependencia entre los puntos de datos).

3) Para predicción de avenidas, el mayor énfasis es asignado sobre el ajuste del pico máximo de la avenida de un hidrograma. Las ordenadas pico tienen a menudo un orden de magnitud mayor que la ordenada promedio "y", por lo cual, acercarse a iguales errores absolutos significa proporcional error en las ordenadas superiores.

Suma de diferencias absolutas

La suma de las diferencias absolutas puede expresarse como:

$$F = \sum_{i=0}^N |y_o(i) - y_{\bullet}(i)| \quad (1.129)$$

Esta función objetivo es estable en el sentido de que la reducción de F garantiza una reducción en el área entre dos curvas. Esto asigna menor énfasis en ordenadas superiores de "y".

Suma de los cuadrados de las desviaciones elevadas a la potencia "a"

La suma de los cuadrados de las desviaciones elevadas a la potencia "a" puede expresarse como:

$$F = \sum_{i=0}^N [y_o(i) - y_{\bullet}(i)]^a ; a = 1, 2, \dots \quad (1.130)$$

Incrementando "a" el énfasis en el ajuste es incrementalmente asignado sobre valores superiores.

Diferencias absolutas de gastos pico y sus tiempos

Las diferencias absolutas de los gastos pico y sus tiempos son expresados como:

$$F_1 = \left| \frac{y_{po}(j) - y_{pe}(j)}{y_{po}(j)} \right| \quad (1.131)$$

$$F_2 = \left| \frac{t_{po}(j) - t_{pe}(j)}{t_{po}(j)} \right| \quad (1.132)$$

$$F = a F_1 + (1 - a) F_2 \quad (1.133)$$

donde $t_{po}(j)$ es el tiempo pico observado para el j -ésimo evento y $t_{pe}(j)$ es el tiempo pico estimado para el j -ésimo evento.

Si se asigna igual énfasis tanto a F_1 como en F_2 , entonces "a" deberá ser 0.5. Esta función puede ser empleada en el ajuste de un sólo punto en la curva para cada evento, por ejemplo, el gasto pico del hidrograma y su tiempo.

Diferencia absoluta del gasto pico

La diferencia absoluta del gasto pico es:

$$F = \left| \frac{y_{po}(i) - y_{pe}(i)}{y_{po}(i)} \right| \quad (1.134)$$

Esta es utilizada frecuentemente sólo en el ajuste del gasto pico.

En el siguiente capítulo se expone el método del Principio de Máxima Entropía, su origen y aplicación a modelos univariados.

CAPÍTULO DOS MÉTODO DEL PRINCIPIO DE MÁXIMA ENTROPÍA (POME)

2.1 ORIGEN DEL MÉTODO

El concepto de entropía fué primero introducido en termodinámica, donde se empleó para proporcionar un planteamiento de la segunda ley de la termodinámica. Posteriormente, la mecánica estadística proporcionó una conexión entre la propiedad macroscópica de la entropía y el estado microscópico del sistema. La entropía fue, matemáticamente representada por Shannon (1948) y desde entonces ha sido llamada la función de entropía de Shannon (SEF). Shannon y Weaver (1949) fueron los primeros en introducir el concepto de entropía en la teoría de la información, la que se describe como una "medida de incertidumbre de una variable aleatoria" (Jaynes, 1958).

Existe siempre incertidumbre en las variables y en los parámetros de los modelos implicados en los estudios hidráulicos e hidrológicos, tales como la velocidad del flujo, concentración del sedimento, esfuerzo cortante, escurrimiento, precipitación, etc. Esta incertidumbre es debido a la aleatoriedad y a la incapacidad para comprender y hacer frente a aquella.

El concepto de entropía está ya bien establecido y ha sido empleado en la mecánica estadística y la teoría de la información (Shannon, 1948; Goldman, 1953), en la cual la entropía es cuantitativamente definida en términos de probabilidad para una variable discreta como:

$$I[x] = -K \sum_j p(x_j) \ln p(x_j) \quad (2.1)$$

donde:

K es la constante de Boltzmann, es un factor de escala, depende de la selección de las unidades de medición.

$p(x_j)$ es la (a priori) probabilidad (función masa) de un sistema

iniciando en el estado x_j , el cual es un miembro de $(x_j, j= 1, 2, \dots)$.

La constante K puede absorberse en la base del logaritmo, de tal manera que la ec. (2.1) puede expresarse simplemente por

$$I[x] = - \sum_j p(x_j) \text{Ln } p(x_j) \quad (2.2)$$

Ha sido demostrado que en un sistema idealizado, $I[x]$ definido por la ecuación (2.1) es proporcional a la entropía (Leopold, L. B., y Langbein, W. B., 1962). De acuerdo al concepto de entropía, en una condición de estado de equilibrio un sistema tiende a maximizar la entropía bajo restricciones prevaletientes. La derivación y justificación del principio de la máxima entropía fué emprendida por Jaynes (1957) y Shore y Johnson (1980).

Para proporcionar un significado físico a la entropía definida por la ecuación (2.2), digamos que $p(x_j|\hat{x}_j)$ sea la probabilidad condicional (a posteriori) de un sistema iniciando en el estado x_j después de que se ha tomado un dato de la muestra, lo que indica que el sistema se encuentra en el estado x_j . \hat{x}_j denota el dato medido señalado como x_j , el cual puede incluir un error tal que el verdadero estado sea $(x_j + v_j)$ en el que v_j es el error en \hat{x}_j . La probabilidad a priori $p(x_j)$ del sistema iniciando en el estado x_j es la probabilidad sin el dato muestral. De acuerdo con la teoría de la información (Goldman, 1953), el contenido de información de los datos es definido como:

$$\text{Ln } \frac{p(x_j | \hat{x}_j)}{p(x_j)} \quad (2.3)$$

Si los datos de la muestra tienen alguna confiabilidad, $p(x_j|\hat{x}_j)$ sería mayor que $p(x_j)$. Entre mayor sea la razón $p(x_j|\hat{x}_j)$ a $p(x_j)$, se tiene mayor contenido de información de los datos. Si la medición es perfecta, de tal manera que el error medido (ruido) es cero, entonces $p(x_j|\hat{x}_j) = 1$ y la información de los datos como es definido por la ecuación (2.3) llega a ser $-\text{Ln } p(x_j)$. Dado que $0 \leq$

$p(x_j) \leq 1$, a menor probabilidad $p(x_j)$, le corresponde mayor contenido de información de los datos. Por lo tanto, la entropía $I(x)$ como es definida por la ecuación (2.2) es el contenido de información promedio por dato muestral. Si el estado de la variable x es continua, la entropía se expresa, en lugar de la ecuación (2.2), como:

$$I(x) = - \int f(x) \ln f(x) dx \quad (2.4)$$

en la que, $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad, de tal manera que $f(x)dx$ es la probabilidad de que la variable declarada inicie entre x y $(x + dx)$. $f(x)$ por si misma no es una probabilidad; así, su magnitud puede ser más grande que la unidad y, de aquí que, $\ln f(x)$ puede ser positivo. Por lo tanto, la entropía para distribuciones continuas como es definida por la ecuación (2.4) puede llegar a ser negativa, aunque para el caso discreto la entropía como es definida por la ecuación (2.2) debe ser positiva, puesto que $p(x_j)$ es una probabilidad, de tal manera que $\ln p(x_j)$ es siempre negativa.

La máxima entropía significa la máxima información obtenida (mensajes) de los datos con respecto a la variable establecida x , la cual, de acuerdo con las ecuaciones (2.2) o (2.4), es, respectivamente, equivalente a la máxima incertidumbre en x antes de ser medida. Por lo cual, una distribución de probabilidad uniforme (a priori) sobre los límites de x daría una máxima entropía. En realidad, debido a varias restricciones, la distribución de probabilidad a menudo no puede ser uniforme. La entropía, como es definida por la ecuación (2.2) o (2.4), es una medida de incertidumbre, aleatoriedad o como se aproxima una distribución a priori de probabilidad semejante a la distribución uniforme. Esta es cero en un caso puramente determinístico en el cual la función masa de probabilidad $p(x_j) = 1$ y $p(x_i) = 0$ para toda i diferente de j . Al maximizar la entropía de un sistema, esta hará la distribución de probabilidad tan uniforme como sea posible, mientras satisfaga las restricciones. Las leyes de la probabilidad que gobiernan un sistema y la correspondiente

magnitud de entropía dependerá, por lo tanto, de las restricciones prevaletientes.

Para mayor claridad del concepto de entropía, considere un sistema hidráulico y suponga que una persona desea estimar el estado en el que se encuentra tal sistema. De acuerdo con el concepto de entropía, el sistema tiende a maximizar la entropía (i.e., maximizar la incertidumbre, la aleatoriedad o el desorden). La persona emplearía el principio de máxima entropía en la modelación de una distribución *a priori* de probabilidad del posible estado del sistema. Los datos pueden entonces recolectarse para estimar la distribución *a posteriori* de probabilidad por el aprovechamiento del *a priori*.

Varios métodos son disponibles para estimar la incertidumbre mínima tal como el método de mínimos cuadrados. De acuerdo con la definición de entropía, esta es equivalente a la minimización de la entropía de la distribución de la probabilidad de los residuales. Por lo tanto, el principio de mínima entropía sería también una alternativa, como método de estimación de parámetros. De hecho, se ha encontrado que este tiene ventajas sobre los otros (Christensen, 1985).

Como se ha expuesto anteriormente, la entropía denotada como $I[x]$ o $I[f]$, es una medida numérica de incertidumbre asociada con $f(x)$ en la descripción de la variable aleatoria "x" y es definida como:

$$I[f] = I[x] = -K \int_0^{\infty} f(x) \ln [f(x)] dx, \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) puede simplificarse como:

$$I[f] = I[x] = - \int_0^{\infty} f(x) \ln[f(x)] dx \quad (2.6)$$

Se puede considerar a $I[f]$ como el valor medio de $-\ln [f(x)]$. En realidad, $-I$ mide la intensidad y $+I$ mide la debilidad de $f(x)$. La SEF permite la selección de $f(x)$ que minimice la incertidumbre. Se hace notar que $f(x)$ satisface los axiomas de la probabilidad, por

lo que:

$$\int_0^{\infty} f(s) ds = 1 \quad (2.7)$$

Para un sistema discreto,

$$I[f] = - \sum_j f_j \ln[f_j] \quad ; \quad \sum_{j=0}^{\infty} f_j = 1 \quad (2.8)$$

Jaynes (1961, 1982) formuló El Principio de Máxima Entropía (POME); de acuerdo con el cual, el mínimo sesgo $f(x)$ es obtenido maximizando la entropía sujeta a la información dada. Matemáticamente, esto puede establecerse como sigue; dadas n restricciones C_i linealmente independientes en la forma

$$C_i = \int_0^{\infty} g_i(x) f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.9)$$

Donde $g_i(x)$ son algunas funciones cuyo promedio superior de $f(x)$ son especificados, entonces el máximo de I sujeta a la ecuación (2.9) esta dado por:

$$f(x) = \exp \left[-a_0 - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x) \right] \quad (2.10)$$

Donde a_i , $i = 1, 2, \dots, m$, son los multiplicadores de Lagrange y pueden determinarse de las ecuaciones (2.9) y (2.10) con la ecuación (2.7). Esto puede realizarse como se expresa a continuación.

Según POME, se maximiza la ecuación (2.6) o (2.8) sujeta a la ecuación (2.9). $I[f]$ puede maximizarse por el método de multiplicadores de Lagrange. El cual introduce parámetros $(a_0 - 1)$, a_1, a_2, \dots, a_m , que se seleccionan de tal forma que las variaciones en una función de $f(x)$ desaparezcan. Por lo tanto,

$$I[f] = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i C_i \quad (2.11)$$

Para estimar los parámetros de una determinada función implica

tres pasos básicos:

1. Especificar las restricciones basadas en datos experimentales requeridos para derivar la función;
2. Construir el multiplicador de Lagrange cero;
3. Derivar la relación entre las restricciones y los multiplicadores de Lagrange.

Consecuentemente, este método puede no ser conveniente para cualquier función arbitraria pero es, sin embargo, aplicable a la mayoría de las funciones de distribución comunmente empleadas en hidrología.

Digamos que se tiene una función de la forma:

$$f(x) = \alpha x^k \exp \left[-\sum_{i=1}^m a_i g_i(x) \right] \quad (2.12)$$

donde $g_i(x)$ son funciones conocidas y α y k son constantes.

Aplicando PDME a la ecuación (2.12), explícitamente se construye:

$$I[f] = -\ln \alpha - k E[\ln x] + \sum_{i=1}^m a_i E[g_i(x)] \quad (2.13)$$

Es posible entonces, intentar maximizar $I[f]$ sujeta a las restricciones $E[\ln x]$ y $E[g_i(x)]$, la cual puede evaluarse numéricamente por medio de datos empíricos, para obtener la función de la ecuación (2.12).

Para maximizar $I[f]$ sustitúyase la ecuación (2.10) en (2.7), por lo que

$$\int_0^{\infty} \exp \left[-a_0 - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x) \right] dx = 1 \quad (2.14)$$

obteniéndose:

$$a_0 = \text{Ln} \int_0^{\infty} \exp \left[- \sum_{i=1}^m a_i g_i(x) \right] dx \quad (2.15)$$

Los multiplicadores de Lagrange son relacionados con las restricciones por

$$- \frac{\partial a_0}{\partial a_i} = C_i \quad (2.16)$$

También puede demostrarse que:

$$- \frac{\partial^2 a_0}{\partial a_i^2} = \text{var}[g_i(x)] \quad ; \quad \frac{\partial^2 a_0}{\partial a_i \partial a_j} = \text{cov}[g_i(x), g_j(x)] \quad (2.17)$$

Con los multiplicadores de Lagrange estimados de la ecuación (2.16) y (2.17), la función dada por (2.10) es únicamente definida. Esto implica que los parámetros en la función sean únicamente relacionados con los multiplicadores de Lagrange. El procedimiento es ilustrado con un ejemplo (ver 2.3).

2.2 EL METODO DE MAXIMA ENTROPIA EN FORMA DE DIAGRAMA DE FUJO

A continuación se presenta el método de Máxima Entropía en forma de diagrama de flujo.

**APLICACION
DEL METODO
POME**

INICIO

Defina fdp : $f(x)$ (1)

obtenga: $I[f]$ (Entropía)
 $I[f] = - \int f(x) \text{Ln} [f(x)] dx$ (2)

Se establecen las restricciones:
 $\int f(x) dx = 1$ (3)
 $\int g_i(x) f(x) = C_i$ (4)

Se genera la función a maximizar:
 $f(x) = \exp[-a_0 - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x)]$ (5)
 a_i : son los multiplicadores de Lagrange
 $i = 1, \dots, m$

Dado que se debe cumplir (3), sustitúyase (5) en (3), por lo que:
 $\int \exp[-a_0 - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x)] dx = 1$ (6)

De (6), obténgase:
 $\exp(a_0) = \int \exp[-\sum_{i=1}^m a_i g_i(x)] dx ; (7)$

De (6) obténgase a_0 :
 $a_0 = \text{Ln} \int \exp[-\sum_{i=1}^m a_i g_i(x)] dx ; (10)$

Resuélvase la ecuación integral en (7), y despeje a_0 , la cual da:
 $a_0 = \text{Ln} [h(x)]$ (8)

Encuentre $\partial a_0 / \partial a_i$ de (10) y relaciónelas con:
 $-C_i = \frac{\partial a_0}{\partial a_i} ; i=1, \dots, m$ (11)

Encuentre de (8):
 $\frac{\partial a_0}{\partial a_i} ; i=1, \dots, m$ (9)

De los dos procesos anteriores, iguale las ecuaciones (9) y (11), y especifíquese los estimadores en términos de restricciones.

FIN

2.3 APLICACION DEL METODO POME A MODELOS UNIVARIADOS

Como ejemplo, se aplicará el Método del Principio de Máxima Entropía a la Función de Distribución Gamma de dos Parámetros y a la Función de Distribución de Valores Extremos Tipo I (Gumbel).

Ejemplo 2.1

Se determinarán los parámetros $a > 0$ y $b > 0$ de la función:

$$f(x) = \frac{1}{a\Gamma b} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\frac{x}{a}\right] ; \quad x > 0 \quad (2.18)$$

Esta función es una distribución gamma de dos parámetros y es empleada frecuentemente en hidrología. Primero, se necesita deducir las restricciones requeridas para derivación de $f(x)$.

Para este fin, aplicando la definición de Entropía, se tiene que:

$$\begin{aligned} I[f] &= - \int_0^{\infty} f(x) \ln[f(x)] dx \\ I[f] &= - \int_0^{\infty} f(x) \ln\left[\frac{1}{a\Gamma b} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right)\right] dx \\ &= - \int_0^{\infty} f(x) \left[\ln 1 - \ln(a\Gamma b) + (b-1)(\ln x - \ln a) - \frac{x}{a} \right] dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x) \left[\left[\ln a\Gamma b + (b-1) \ln a \right] - (b-1) \ln x + \frac{x}{a} \right] dx \\ I[f] &= \left[\ln a\Gamma b + (b-1) \ln a \right] \int_0^{\infty} f(x) dx - (b-1) \int_0^{\infty} \ln x f(x) dx + \\ &\quad + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x f(x) dx \quad (2.19) \end{aligned}$$

Dado que cumple los axiomas de la probabilidad, se tiene la siguiente restricción:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.20)$$

Por lo que hacen falta dos restricciones, las cuales se obtienen de la siguiente ecuación general,

$$C_i = \int_0^{\infty} g_i(x) f(x) dx \quad (2.21)$$

Cuya aplicación a la ecuación (2.19), genera las siguientes restricciones específicas:

$$\int_0^{\infty} x f(x) dx = E[x] \quad (2.22)$$

$$\int_0^{\infty} \ln x f(x) dx = E[\ln x] \quad (2.23)$$

Por lo que la función a maximizar; es decir, el mínimo sesgo de $f(x)$ consistente con las restricciones anteriores es determinado por PDME, y de la ecuación general:

$$f(x) = \exp \left[-a_0 - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x) \right] \quad (2.24)$$

toma la forma siguiente:

$$f(x) = \exp \left[-a_0 - a_1 x - a_2 \ln x \right] \quad (2.25)$$

donde: a_0 , a_1 y a_2 son los multiplicadores de Lagrange. Debido a que satisface los axiomas de la probabilidad, sustitúyase la ec. (2.25) en (2.20), teniendo:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \exp \left[-a_0 - a_1 x - a_2 \ln x \right] dx = 1 \quad (2.26)$$

Si de la ecuación anterior se despeja a_0 , se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-a_0 - a_1 x - a_2 \ln x} dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a_0} e^{-a_1 x - a_2 \ln x} dx = 1$$

$$\exp(a_0) = \int_0^{\infty} \exp[-a_1 x - a_2 \ln x] dx \quad (2.27)$$

$$\exp(a_0) = \int_0^{\infty} e^{-a_1 x} e^{-a_2 \ln x} dx$$

$$\exp(a_0) = \int_0^{\infty} x^{-a_2} \exp[-a_1 x] dx$$

Al resolver la integral, haciendo:

$$y = a_1 x ; \quad dy = a_1 dx$$

por lo que:

$$\exp(a_0) = \int_0^{\infty} \left[\frac{y}{a_1} \right]^{-a_2} \exp(-y) \frac{1}{a_1} dy = \frac{1}{a_1^{a_2}} \int_0^{\infty} y^{-a_2} \exp(-y) dy$$

$$\exp(a_0) = \frac{1}{a_1^{1-a_2}} \int_0^{\infty} y^{-a_2} \exp(-y) dy$$

Empleando la definición de la función gamma, Abramowitz y Stegun (1965), se tiene que:

$$\int_0^{\infty} y^{-a_2} \exp(-y) dy = \Gamma(1-a_2)$$

por lo que:

$$\exp(a_0) = \frac{1}{a_1^{1-a_2}} \Gamma(1-a_2)$$

Aplicando logaritmos a la ec. anterior, se tiene:

$$a_0 = \ln \left[\frac{1}{a_1^{1-a_2}} \Gamma(1-a_2) \right] = \ln \Gamma(1-a_2) - \ln \left[a_1^{1-a_2} \right]$$

$$a_0 = \ln \Gamma(1-a_2) - (1-a_2) \ln a_1$$

$$a_0 = \ln \Gamma(1-a_2) + (a_2-1) \ln a_1 \quad (2.28)$$

Si de la ec. (2.27) se despeja a_0 ,

$$a_0 = \text{Ln} \int_0^{\infty} \exp[-a_1 x - a_2 \text{Ln } x] dx \quad (2.29)$$

Por lo que para maximizar (2.29), los multiplicadores de Lagrange son relacionados con las restricciones dadas por:

$$-\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = C_1$$

por lo que, diferenciando la ecuación integral (2.29) para a_0 con respecto a a_1 y a_2 , se tiene:

para $\partial a_0 / \partial a_1$,

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = \frac{\partial (\text{Ln } u)}{\partial a_1} = \frac{u'}{u}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } u &= \int_0^{\infty} e^{-a_1 x} e^{-a_2 \text{Ln } x} dx; \quad u' = \int_0^{\infty} -x e^{-a_1 x} e^{-a_2 \text{Ln } x} dx \\ u' &= \int_0^{\infty} -x \exp[-a_1 x - a_2 \text{Ln } x] dx \end{aligned}$$

por lo que:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = \frac{\int_0^{\infty} -x \exp[-a_1 x - a_2 \text{Ln } x] dx}{\int_0^{\infty} \exp[-a_1 x - a_2 \text{Ln } x] dx}$$

$$\text{sabiendo que: } \exp(a_0) = \int_0^{\infty} \exp[-a_1 x - a_2 \text{Ln } x] dx$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = \frac{\int_0^{\infty} -x \exp[-a_1 x - a_2 \text{Ln } x] dx}{\exp[a_0]} = - \int_0^{\infty} \underbrace{x \exp[-a_0 - a_1 x - a_2 \text{Ln } x]}_{f(x)} dx$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - \int_0^{\infty} x f(x) = -E[x] \quad (2.30)$$

Ahora, obteniendo $\frac{\partial a_0}{\partial a_2}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial a_2} &= \frac{\int_0^{\infty} -\ln x \exp[-a_1 x - a_2 \ln x] dx}{\int_0^{\infty} \exp[-a_1 x - a_2 \ln x] dx} \\ &= \frac{-\int_0^{\infty} \ln x \exp[-a_1 x - a_2 \ln x] dx}{\exp[a_0]} \\ \frac{\partial a_0}{\partial a_2} &= -\int_0^{\infty} \ln x \exp[-a_0 - a_1 x - a_2 \ln x] dx \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{f(x)} \\ \frac{\partial a_0}{\partial a_2} &= -\int_0^{\infty} \ln x \cdot f(x) dx = -E[\ln x] \end{aligned} \quad (2.31)$$

También, de la ec. (2.2B) puede obtenerse $\frac{\partial a_0}{\partial a_1}$ y $\frac{\partial a_0}{\partial a_2}$, por lo que para $\partial a_0 / \partial a_1$:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = \frac{a_2 - 1}{a_1} \quad (2.32)$$

para $\partial a_0 / \partial a_2$:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_2} \ln \Gamma(1 - a_2) + \ln a_1 \quad (2.33)$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \ln \Gamma(1 - a_2) = -\psi(1 - a_2)$$

en la cual, $\psi[\]$ es la función digamma.
por lo que:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = \ln a_1 - \psi(1 - a_2) \quad (2.34)$$

Igualando las expresiones para $\partial a_0 / \partial a_1$, ecuaciones (2.30) y (2.32), se tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = -E[x] \quad ; \quad \frac{\partial a_0}{\partial a_1} = \frac{a_2 - 1}{a_1}$$

$$\frac{a_2 - 1}{a_1} = -E[x]$$

si $K = 1 - a_2$

se tiene, $\frac{K}{a_1} = E[x]$ (2.35)

haciendo lo mismo para $\partial a_0 / \partial a_2$, ecuaciones (2.31) y (2.34), se tiene:

$$\ln a_1 - \psi(K) = -E[\ln x] ; \ln a_1 = \psi(K) - E[\ln x] \quad (2.36)$$

de la ecuación (2.35), se tiene:

$$a_1 = \frac{K}{E[x]} \quad (2.37)$$

Sustituyendo la ecuación (2.37) en la (2.36), se tiene:

$$\ln \left[\frac{K}{E[x]} \right] = \psi(K) - E[\ln x]$$

$$\ln K - \ln E[x] = \psi(K) - E[\ln x]$$

$$E[\ln x] - \ln E[x] = \psi(K) - \ln K \quad (2.38)$$

La ec. (2.38) puede utilizarse para determinar K, que al ser sustituida en la ec. (2.37) genera el valor de a_1 .

Sustituyendo a_0 , ec.(2.28), en $f(x)$, ec. (2.25), se tiene:

$$f(x) = \exp \left[-\ln \Gamma(1 - a_2) - (a_2 - 1) \ln a_1 - a_1 x - a_2 \ln x \right]$$

$$= \exp \left[-\ln \Gamma(1 - a_2) + (1 - a_2) \ln a_1 - a_1 x - a_2 \ln x \right]$$

$$= \exp \left[-\ln \Gamma(1 - a_2) + \ln a_1^{(1-a_2)} - a_1 x - a_2 \ln x \right]$$

$$= \exp \left[\ln \left[\frac{a_1^{(1-a_2)}}{\Gamma(1-a_2)} \right] - a_1 x + \ln x^{-a_2} \right]$$

$$f(x) = \frac{a_1^{(1-a_2)}}{\Gamma(1-a_2)} x^{-a_2} \exp(-a_1 x) \quad (2.39)$$

$$\text{haciendo: } b = 1 - a_2 \quad (2.40); \quad a_2 = 1 - b \quad (2.41)$$

$$a_1 = \frac{1}{a} \quad (2.42); \quad a = \frac{1}{a_1} \quad (2.43)$$

se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} \left(\frac{1}{a}\right)^b \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \quad (2.44)$$

desarrollando lo siguiente,

$$\frac{1}{a^b} = \frac{1}{a^b} = \frac{x^{b-1}}{a^b} = \frac{x^{b-1}}{a \cdot a^{b-1}} = \frac{x^{b-1}}{a \cdot a^{b-1}} = \frac{1}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \quad (2.45)$$

Sustituyendo la ecuación (2.45) en (2.44), se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{a \Gamma(b)} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \quad (2.18)$$

la que es precisamente la distribución Gamma de dos parámetros. Como conclusión se ha obtenido que:

$$b = 1 - a_2 \quad (2.40)$$

$$a = \frac{1}{a_1} \quad (2.42)$$

Sustituyendo las ecs. (2.40), (2.42) y $K = 1 - a_2$ en (2.37), se tiene:

$$E[x] = \frac{K}{a_1} = \frac{1 - a_2}{a_1} = \frac{b}{\frac{1}{a}} = ab$$

$$E[x] = ab \quad (2.46)$$

dado que $K = 1 - a_2 = b$, sustituyendo en ec. (2.38), se tiene:

$$E[\ln x] - \ln E[x] = \psi(b) - \ln b \quad (2.47)$$

┌──────────────────┐
constante

Por lo que, los parámetros a y b , de la Función de Distribución de

Probabilidad Gamma, son especificados en términos de restricciones, dadas por las ecs. (2.46) y (2.47) o por las ecuaciones (2.48) y (2.49).

$$\exp [(\psi(b) - \text{constante})] - b = 0 \quad (2.48)$$

$$a = \frac{E[x]}{b} \quad (2.49)$$

Ejemplo 2.2

Sea la Función de Distribución de Probabilidad de Valores Extremos Tipo I (Gumbel):

$$F(x) = e^{-e^{-[x-u]/\alpha}} = e^{-e^{-y}} \quad (2.50)$$

donde:

- $-\infty \leq x \leq \infty$
- α parámetro de forma,
- u parámetro de ubicación,
- y variable reducida
- $y = [x-u]/\alpha$

La función de densidad es obtenida por diferenciación de la ec. (2.50) con respecto a x , dando:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dy} \left[e^{-e^{-y}} \right] \frac{dy}{dx} = e^{-e^{-y}} (-e^{-y}) \left(-\frac{1}{\alpha} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-y} - e^{-y} = \frac{1}{\alpha} e^{-[x-u]/\alpha} - e^{-[x-u]/\alpha} \quad (2.51)$$

Aplicando la definición de entropía, se tiene:

$$I [f(x)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln [f(x)] dx \quad (2.52)$$

desarrollando $\text{Ln} [f(x)]$,

$$\text{Ln} [f(x)] = - \text{Ln } \alpha - \left[e^{-[x-u]/\alpha} \right] - [x-u]/\alpha \quad (2.53)$$

sustituyendo la ec. (2.53) en (2.52),

$$I[f(x)] = \text{Ln } \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[x-u]/\alpha} f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] f(x) dx \quad (2.54)$$

dado que la función $f(x)$ satisface los axiomas de la probabilidad, debe satisfacer la siguiente restricción:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (4.55)$$

por lo que hacen falta dos restricciones más, que se obtienen de la ecuación general:

$$C_i = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x) f(x) dx \quad (2.56)$$

que al aplicar a la ecuación (2.54), genera restricciones específicas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[x-u]/\alpha} f(x) dx = E \left[e^{-[x-u]/\alpha} \right] \quad (2.57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] f(x) dx = E \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] \quad (2.58)$$

donde u y α son los parámetros,

$$-\infty < u < \infty ; \quad \alpha < \infty$$

Por lo que la función a maximizar; es decir, el mínimo sesgo de $f(x)$ consistente con las restricciones anteriores es determinado por POME, y de la ecuación general:

$$f(x) = \exp \left[-a_0 - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x) \right] \quad (2.59)$$

toma la forma:

$$f(x) = \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] - a_2 \exp \left[- \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] \right] \right\} \quad (2.60)$$

donde a_0 , a_1 y a_2 son los multiplicadores de Lagrange.

Debido a que cumple los axiomas de la probabilidad, sustitúyase la ec. (2.60) en la (2.55), por lo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] - a_2 \exp \left[- \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] \right] \right\} dx = 1 \quad (2.61)$$

si se despeja $\exp(a_0)$, se tiene:

$$\exp(a_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] - a_2 \exp \left[- \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] \right] \right\} dx \quad (2.62)$$

integrando la ecuación (2.62), (Gradshteyn and Ryzhik, 1980),

haciendo:

$$w = e^{-[x-u]/\alpha} \quad ; \quad \text{para } x = -\infty, w = \infty$$

$$; \quad \text{para } x = \infty, w = 0$$

$$dw = e^{-[x-u]/\alpha} (-1/\alpha) dx$$

$$dw = - (w/\alpha) dx$$

$$dx = - (\alpha/w) dw$$

por lo que:

$$\exp(a_0) = -\alpha \int_{\infty}^0 \frac{w^{a_1}}{w} e^{-a_2 w} dw \quad (2.63)$$

$$\exp(a_0) = \alpha \int_0^{\infty} w^{a_1-1} e^{-a_2 w} dw \quad (2.64)$$

ahora, sea:

$$\begin{aligned} t &= a_2 w, & w &= t/a_2 \\ dt &= a_2 dw \\ dw &= dt/a_2 \end{aligned}$$

por lo que:

$$\exp(a_0) = \alpha \int_0^{\infty} \left[\frac{t}{a_2} \right]^{a_1-1} e^{-t} \frac{dt}{a_2} = \alpha \frac{a_2^{1-a_1}}{a_2} \int_0^{\infty} t^{a_1-1} e^{-t} dt$$

$$\exp(a_0) = \alpha a_2^{-a_1} \Gamma(a_1) \quad (2.65)$$

o también,

$$\exp(-a_0) = \alpha^{-1} a_2^{a_1} \frac{1}{\Gamma(a_1)} \quad (2.66)$$

Si de la ecuación (2.65) se despeja a_0 ,

$$a_0 = \ln \alpha - a_1 \ln a_2 + \ln \Gamma(a_1) \quad (2.67)$$

Si de la ecuación (2.67), se deriva parcialmente con respecto a a_1 y a_2 , se tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = -\ln a_2 + \psi(a_1) \quad (2.68)$$

donde: $\psi(\cdot)$ es la función digamma.

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = -a_1 \frac{1}{a_2} \quad (2.69)$$

Por otro lado, despejando de la ecuación (2.62) a_0 , y derivando parcialmente con respecto a a_1 y a_2 , se tiene:

$$a_0 = \ln \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] - a_2 \exp \left[- \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] \right] \right\} dx \quad (2.70)$$

obteniendo $\frac{\partial a_0}{\partial a_1}$,

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) - a_2 \exp \left[- \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right] \right\} \right] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) - a_2 \exp \left[- \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right] \right\} dx}$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) - a_2 \exp \left[- \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right] \right\} dx$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - E \left[\frac{x-u}{\alpha} \right] \quad (2.71)$$

Ahora, para $\frac{\partial a_0}{\partial a_2}$, se tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-[x-u]/\alpha} \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) - a_2 \exp \left[- \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right] \right\} \right] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) - a_2 \exp \left[- \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right] \right\} dx}$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[x-u]/\alpha} f(x) dx$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = - E \left[e^{-[x-u]/\alpha} \right] \quad (2.72)$$

igualando la ecuación (2.68) con la (2.71),

$$- \ln a_2 + \psi(a_1) = - E \left[\frac{x-u}{\alpha} \right]$$

Haciendo, $y = (x-u)/\alpha$, (variable reducida)

$$E[y] = \ln a_2 - \psi(a_1) \quad (2.73)$$

igualando la ecuación (2.69) con (2.72), se tiene:

$$E[e^{-y}] = \frac{a_1}{a_2} \tag{2.74}$$

Dado que:

$$E \left[\frac{x - u}{\alpha} \right] = E[y] = 0.5772 \tag{2.75}$$

0.5772 : constante de Euler.

y

$$E[e^{-y}] = 1 \tag{2.76}$$

Sustituyendo la ecuación (2.76) en la (2.74),

$$1 = \frac{a_1}{a_2}, \text{ por lo que } a_1 = a_2 \tag{2.77}$$

por lo cual a_1 y a_2 pueden tener los valores:

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_2 = 1 \tag{2.78} \quad \text{y} \quad (2.79)$$

Sustituyendo las ecs. (2.75), (2.78) y (2.79) en (2.73),

$$0.5772 = \ln a_2 - \psi(a_1)$$

$$0.5772 = \ln a_2 - \psi(a_2) = \ln a_1 - \psi(a_1) \tag{2.80}$$

Sustituyendo a_0 (ec. 2.67) en $f(x)$ (ec. 2.60) se tiene:

$$f(x) = \exp \left\{ -\ln \alpha + a_1 \ln a_2 - \ln \Gamma(a_1) - a_1 \left[\frac{x - u}{\alpha} \right] - a_2 \exp \left[-\left(\frac{x - u}{\alpha} \right) \right] \right\}$$

$$f(x) = \frac{a_2^{a_1}}{\alpha \Gamma(a_1)} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x - u}{\alpha} \right] - a_2 \exp \left[-\left(\frac{x - u}{\alpha} \right) \right] \right\} \tag{2.81}$$

sustituyendo las ecuaciones (2.78) y (2.79) en la ec. (2.81),

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ -\left[\frac{x-u}{\alpha} \right] - \exp \left[-\left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right] \right\}$$

la cual es precisamente la distribución EV1.

Los estimadores u y α por el Método de Máxima Entropía se obtienen seleccionando valores de u y α de tal manera que se cumplan las ecuaciones (2.75) y (2.76).

2.4 UN ALGORITMO PARA LA ESTIMACION DE LOS PARAMETROS α Y u DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE VALORES EXTREMOS TIPO I (GUMBEL) A PARTIR DEL PRINCIPIO DE MAXIMA ENTROPIA [Método de Phien (1987)].

Las restricciones del modelo (EV1) obtenidas a partir del Método de Máxima Entropía, ecuaciones (2.75 y 2.76), pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} P &= \sum y - N \gamma = 0 \\ Q &= \sum v - N = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

donde:

\sum : se debe interpretar como $\sum_{i=1}^N$.

y : es la variable reducida.

$v = e^{-y}$

$\gamma = 0.5772$, es la constante de Euler.

El método de Newton (Rice, 1985) puede emplearse para resolver este sistema. En tal caso, el sistema de ecuaciones formado por (2.82) puede resolverse iterativamente como:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ u \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ u \end{bmatrix}_i - R^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_i \quad (2.83)$$

donde todos los términos de la derecha son evaluados con los

valores conocidos (i) de los estimadores α y u ; y la matriz [R] está dada por:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \alpha} & \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial \alpha} & \frac{\partial Q}{\partial u} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} -N \bar{y} & -N \\ \Sigma y V & \Sigma V \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Aproximando los elementos de la matriz [R] por sus esperanzas se obtiene (Phien, 1987):

$$R = \begin{bmatrix} E \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha} \right] & E \left[\frac{\partial P}{\partial u} \right] \\ E \left[\frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right] & E \left[\frac{\partial Q}{\partial u} \right] \end{bmatrix} = - \frac{N}{\alpha} \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ (1 - \gamma) & -1 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

donde:

$$R^{-1} = - \frac{\alpha}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (1 - \gamma) & -\gamma \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Por lo tanto, las correcciones para los estimadores, α y u , por Máxima Entropía están dadas por:

$$d\alpha = \frac{\alpha}{N} (P + Q) \quad ; \quad du = \frac{\alpha}{N} [(1 - \gamma) P - \gamma Q] \quad (2.87)$$

2.5 RESUMEN DEL ALGORITMO DEL METODO POME APLICADO A LA DISTRIBUCION DE VALORES EXTREMOS TIPO I

A continuación se presenta en forma resumida el algoritmo y su respectivo diagrama de flujo del método de Máxima Entropía aplicado a la Distribución de Valores Extremos Tipo I. Adicionalmente, se ejemplifica su aplicación a dos estaciones de registro.

ALGORITMO :

METODO DE MAXIMA ENTROPIA

PASO

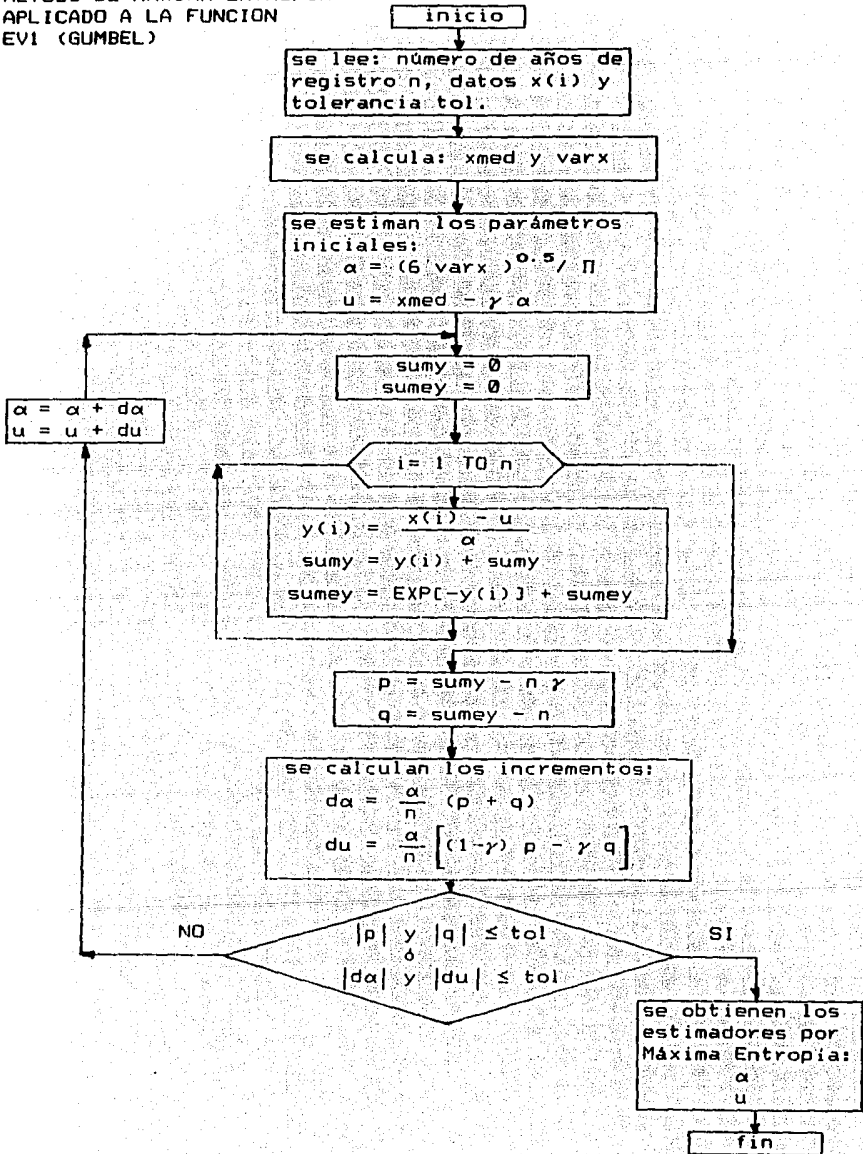
PROCEDIMIENTO

1. Estime los valores iniciales de los estimadores α y u denotados como α_0 y u_0 .
2. Calcule P y Q de acuerdo a la ecuación (2.82). Si tanto P y Q se aproximan a cero, entonces se termina el proceso; de lo contrario continúe con el paso 3.
3. Calcule las correcciones $d\alpha$ y du de acuerdo con la ecuación (2.87). Si ambos están próximos a cero, entonces se termina el proceso; de lo contrario continúe con el paso 4.
4. Calcule los nuevos estimadores con:
$$\alpha_1 = \alpha_0 + d\alpha ; u_1 = u_0 + du$$
 y regrese al paso 2.

Cuando se concluye el proceso, los valores de los estimadores son denominados como los estimadores por Máxima Entropía.

En el capítulo que se expone a continuación se describe el desarrollo de la teoría de los valores extremos y las características de las distribuciones univariadas y bivariadas. Así también, se desarrolla un algoritmo para determinar los estimadores por Máxima Entropía de los parámetros de la Distribución de Valores Extremos Tipo II (BEV11).

DIAGRAMA DE FLUJO DEL
 METODO DE MAXIMA ENTROPIA
 APLICADO A LA FUNCION
 EVI (GUMBEL)



APLICACION DEL METODO DE MAXIMA ENTROPIA A DOS ESTACIONES DE REGISTRO.

TABLA 2.1 GASTOS MAXIMOS ANUALES: EN MILES DE \$/s
TENNESSEE RIVER AT CHATTANOOGA, 1875-1931, 57 AÑOS DE REGISTRO.

AÑO	GASTO	AÑO	GASTO	AÑO	GASTO	AÑO	GASTO	AÑO	GASTO	AÑO	GASTO
1875	361	1885	266	1895	229	1905	195	1915	178	1925	142
1876	349	1886	259	1896	221	1906	195	1916	167	1926	134
1877	310	1887	254	1897	220	1907	190	1917	166	1927	133
1878	285	1888	254	1898	212	1908	189	1918	164	1928	125
1879	283	1889	252	1899	210	1909	189	1919	163	1929	123
1880	275	1890	252	1900	210	1910	188	1920	162	1930	108
1881	271	1891	252	1901	205	1911	183	1921	157	1931	85.9
1882	269	1892	248	1902	202	1912	183	1922	146		
1883	267	1893	248	1903	201	1913	181	1923	146		
1884	266	1894	246	1904	195	1914	180	1924	143		

TABLA 2. ESTIMACION DE PARAMETROS
MODELO: FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD
DE VALORES EXTREMOS TIPO I (GUMBEL)

METODO:	PARAMETROS:		ERROR ESTANDAR
	μ	α	
MOMENTOS:	182.3513	45.4048	10.8706
MAXIMA VEROSIMILITUD:	180.5741	51.9509	10.9262
MAXIMA ENTROPIA:	179.6692	50.0514	10.3700

TABLA 2.3 GASTOS MAXIMOS ANUALES: EN m³/s
ESTACION MEZCALA, RIO BALSAS, GRO., 1962-1976, 15 AÑOS DE REGISTRO.

AÑO	GASTO	AÑO	GASTO	AÑO	GASTO
1962	1453.0	1967	2336.0	1972	1416.0
1963	914.0	1968	968.0	1973	2432.0
1964	870.0	1969	2568.0	1974	1461.0
1965	1460.0	1970	1338.0	1975	1330.0
1966	861.0	1971	1691.0	1976	2439.0

TABLA 2. ESTIMACION DE PARAMETROS
MODELO: FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD
DE VALORES EXTREMOS TIPO I (GUMBEL)

METODO:	PARAMETROS:		ERROR ESTANDAR
	μ	α	
MOMENTOS:	1298.7312	468.4593	201.2467
MAXIMA VEROSIMILITUD:	1269.9120	455.6639	209.0581
MAXIMA ENTROPIA:	1300.6610	465.1160	202.7717

CAPÍTULO TRES

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MÁXIMA ENTROPIA A LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN BIVARIADAS

3.1 ENFOQUES EN EL ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DE AVENIDAS

Por un largo tiempo el hombre ha buscado, por algún medio, predecir y controlar las avenidas; sin embargo, debido a que estos eventos son esencialmente aleatorios, es necesario que apropiados procesos estadísticos sean desarrollados, con el fin de diseñar de una manera más satisfactoria las estructuras hidráulicas. La larga espera de la técnica del análisis de frecuencias de avenidas llegó a la realidad a principios del siglo XX, y desde entonces, se han tenido significativos avances. Varios enfoques han sido propuestos para estudiar este problema: Series anuales y parciales de gastos máximos, Análisis local y regional, Enfoques univariados y multivariados, y Enfoques paramétricos y no-paramétricos de análisis de frecuencias de avenidas.

La mayor parte de los estudios en el pasado han sido realizados a través del uso de distribuciones univariadas. Cuatro importantes resultados relativos con el análisis de frecuencias de avenidas han sido derivados, los cuales se indican a continuación:

1. La identificación del tipo de función de distribución de probabilidad que mejor se ajusta a la distribución de frecuencias de los datos reales, ha sido una pregunta clave en el análisis de frecuencias de avenidas (Wood and Rodríguez-Iturbe, 1975). Se han realizado varios esfuerzos para proveer bases físicas y estadísticas para seleccionar una función de distribución de probabilidad, pero ello ha causado mayor controversia entre los hidrólogos.

2. Cualquier nuevo enfoque para el análisis de frecuencias de avenidas debe mostrar, en todo caso, que los parámetros estimados son más confiables que aquellos calculados a través de enfoques

existentes. Una comparación puede realizarse entre las varianzas de los parámetros estimados basada en los diferentes métodos. La proporción de información relativa es un camino conveniente para llevar a cabo tal comparación.

3. La necesidad del perfeccionamiento de una metodología para transferencia de información de avenidas, a partir de estaciones de medición con registros más amplios a aquellos con registros más cortos es una finalidad. Esto mejoraría la estimación de los parámetros requeridos para llevar a cabo el análisis de frecuencias de avenidas. Los enfoques comunes, para transferencia de información, requieren la normalización de los datos con el fin de aplicar las metodologías desarrolladas bajo la condición de normalidad. Sin embargo, algún mejoramiento puede ser obtenido empleando procedimientos aplicables para variables no-normales.

4. A menudo, los datos de gastos máximos anuales no están disponibles donde se requieren; por ejemplo, aguas abajo de la confluencia de dos ríos. Si los datos son disponibles en dos estaciones hidrométricas aguas arriba de la confluencia; entonces, la distribución local de avenidas de los dos sitios pueden ser empleadas para determinar las probabilidades de los gastos aguas abajo de la confluencia. El uso de distribuciones bivariadas y multivariadas, en general, parece ser un enfoque prometedor para atacar este problema.

Las distribuciones univariadas han sido ampliamente desarrolladas y aplicadas para el análisis de frecuencias de avenidas. Una menor atención han tenido las distribuciones multivariadas.

Los proyectos de control de agua son diseñados para reducir los efectos indeseables de las avenidas, las cuales ocurren aleatoriamente.

Un proyecto que eliminase todos los efectos negativos en un año, puede no ser suficiente para proveer completa protección al año siguiente, por lo que los proyectos son diseñados con base en el

análisis de un amplio rango de avenidas.

En el análisis de gastos máximos anuales, se han manejado diversas funciones de distribución de probabilidad como opciones para modelar a las muestras que se estén analizando. Dentro de ese grupo de distribuciones de probabilidad, destaca la muy conocida distribución de valores extremos Gumbel (Tipo I). Las otras dos distribuciones extremas son menos conocidas: Fréchet (Tipo II) y Weibull (Tipo III).

Todas ellas son soluciones particulares de la ecuación funcional que deben satisfacer los extremos. La solución general de esta ecuación ha sido encontrada por Jenkinson (1955), y se le ha llamado distribución General de Valores Extremos.

El nombre de Valores Extremos es asignado a estas distribuciones debido a que pueden obtenerse como distribuciones límite ($n \rightarrow \infty$) de los valores más grandes entre n variables aleatorias independientes, cada una teniendo la misma distribución continua.

Las condiciones básicas que definen a las distribuciones asintóticas extremas son:

- a) Las observaciones de la cual los valores extremos son tomados deben ser independientes,
- b) Las observaciones deben ser confiables y estar hechas bajo idénticas condiciones,
- c) El número de observaciones extremas, n , debe ser grande. El qué tan grande debe ser n depende de la distribución inicial y del grado de precisión buscado, y
- d) La distribución inicial, de la cual son tomados los valores extremos, deben pertenecer a uno de los tres tipos mencionados anteriormente.

3.2 SOBRE EL DESARROLLO DE LAS DISTRIBUCIONES DE VALORES EXTREMOS

La teoría de los valores extremos describe el comportamiento aleatorio de los n -ésimos valores más grande o más pequeños de una muestra de datos.

La historia de los estadísticos de valores extremos comenzó en 1922, en Alemania, con un artículo de L. Von Bortkiewicz, donde se pone de manifiesto que, los valores más grandes de muestras tomadas de poblaciones normales son variables con una nueva distribución.

En 1923, R. Von Mises, también en Alemania, introduce el fundamental concepto matemático del valor esperado del elemento más grande de una muestra de datos; dando con esto, el inicio al estudio de la distribución asintótica de valores extremos en muestras de distribuciones normales. Los valores más grandes en muestras diferentes a la normal fueron estudiadas por E. L. Dodd en 1923.

En 1925, L. H. C. Tippett obtuvo las probabilidades de los valores más grandes para diferentes tamaños de muestras de una distribución normal.

En 1927, M. Fréchet publicó el primer artículo donde describe la obtención de la distribución asintótica del valor más grande de una clase de distribución individual.

En 1928, R. A. Fisher y L. H. C. Tippett publicaron el artículo que es considerado el cimiento de la teoría asintótica de las distribuciones de valores extremos. Ellos encontraron, en forma independiente, la distribución asintótica de Fréchet, y construyeron otras dos.

R. Von Mises (1936) y B. Gnedenko (1943) contribuyeron al dar las condiciones necesarias y suficientes para validar las distribuciones asintóticas para los valores más grandes.

Los desarrollos teóricos de los años veinte fueron seguidos en los años treinta por aplicaciones prácticas usando los estadísticos de valores extremos de distribuciones del tiempo de duración de la vida humana (Gumbel, 1937), y resistencia de materiales (Weibull, 1939).

Desde entonces, estos procedimientos han sido aplicados extensivamente a otros campos que incluyen eventos como sismos, datos meteorológicos, efectos de corrosión, tiempos de sobrevivencia de microorganismos, etc.

Con respecto a su aplicación en el análisis de frecuencias de gastos máximos y mínimos, se cuenta con los artículos hechos por Gumbel (1941, 1944, 1945, 1947, 1954).

En artículos pioneros, Gumbel (1959, 1960a) propone algunos tipos de distribuciones exponenciales bivariadas. Posteriormente, él mismo (Gumbel, 1960b, 1962, 1967) extendió su teoría a las distribuciones multivariadas de valores extremos.

Los trabajos de Clarke (1980), Rueda (1981) y Raynal (1985) reportan reducciones significativas en la variabilidad de los parámetros estimados mediante las distribuciones bivariadas.

Después de estos trabajos, Takahashi (1987, 1988) reportó algunas propiedades de las distribuciones multivariadas de valores extremos; Escalante (1991) realizó un estudio sobre las funciones de distribución de probabilidad trivariadas de valores extremos aplicadas en hidrología.

3.3 ORIGEN, CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES DE LAS DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS

Las distribuciones de valores extremos fueron obtenidas como distribuciones límite de los valores más grandes o más pequeños de una muestra.

Si $x(1), x(2), \dots, x(n)$ es una muestra aleatoria de una población continua $F(x)$, el r -ésimo valor más grande es llamado el estadístico de r -ésimo orden, su valor será denotado como $x[r]$. Por lo que, el más pequeño valor muestral es $x[1]$ y el más grande es $x[n]$. Puesto que la distribución de las x 's, $F(x)$, puede ser interpretado como la probabilidad de que X tenga un valor menor o igual a algún valor específico, x , la probabilidad de que exactamente j de las x 's caiga dentro del intervalo cerrado $(-\infty, x]$ y $(n-j)$ caiga en el intervalo abierto (x, ∞) es obtenida sustituyendo $F(x)$ por la probabilidad en la serie binomial:

$$\binom{n}{j} F^j(x) [1 - F(x)]^{n-j} \quad (3.1)$$

El evento $x[r] \leq Z$ ocurre si y solamente si, r o más de las $x(i)$'s caen en el intervalo $(-\infty, Z]$. Por lo que:

$$F(x[r]) = P(x[r] \leq Z) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} F^j(Z) [1 - F(Z)]^{n-j} \quad (3.2)$$

En particular, la función de distribución de los miembros más grandes de la muestra de una población con distribución $F(x)$ es:

$$F(x[n]) = [F(x)]^n \quad (3.3)$$

Si existe una forma límite para los valores más grandes de x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x[n]) = L(x) \quad (3.4)$$

esta es llamada la distribución asintótica de los valores más grandes.

Se dice que $F(x[n])$ es una distribución estable para los más grandes valores, si existen coeficientes de atracción a_n y $b_n > 0$ tal que:

$$[F(x)]^n = F\left(\frac{x}{a_n} + b_n\right) \quad (3.5)$$

Esta ecuación fué obtenida por Fréchet (1927) y es llamada el

postulado de estabilidad.

Las distribuciones límites fueron obtenidas al resolver la ecuación (3.5) considerando el valor de $a_n = 1$ para la distribución Tipo I (Gumbel) y $a_n \neq 1$ para las distribuciones Tipo II (Fréchet) y Tipo III (Weibull), su forma final es:

Distribución Gumbel

$$F(x) = \exp[-\exp(-x)] \quad ; \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.6)$$

Distribución Fréchet

$$F(x) = 0 \quad ; \quad \text{si } x < 0 \quad (3.7)$$

$$F(x) = \exp(-x^{-\beta}) \quad ; \quad \text{si } x \geq 0, \beta > 0 \quad (3.8)$$

Distribución Weibull

$$F(x) = 1 \quad ; \quad \text{si } x \geq 0 \quad (3.9)$$

$$F(x) = \exp[-(-x)^\beta] \quad ; \quad \text{si } x < 0 \quad (3.10)$$

En 1955, Jenkinson obtuvo la solución general de la ecuación funcional que debe satisfacer los valores extremos (ecuación 3.5). La solución resultante ha sido llamada "La Distribución General de Valores Extremos" (GVE), la cual representa directamente a las distribuciones II y III. La distribución Tipo I resulta como una condición límite de la distribución general de valores extremos.

Cada distribución esta caracterizada por el valor que toma el parámetro de forma, β , específicamente:

- a) Distribución Tipo I (Gumbel); para $\beta = 0$
- b) Distribución Tipo II (Fréchet); para $\beta < 0$
- c) Distribución Tipo III (Weibull); para $\beta > 0$

Origen de la Distribución GVE

Considérese N muestras, cada una de tamaño n , que han sido tomadas de la misma población. En cada muestra existe un valor máximo y el

valor máximo en las $N \times n$ observaciones es el máximo de los N máximos valores tomados de muestras de tamaño n . La distribución del valor máximo en las $N \times n$ observaciones tenderá hacia la misma expresión asintótica tal y como la distribución del valor máximo en las muestras de tamaño n , siempre y cuando tal asintota exista.

Dado que una transformación lineal no cambia la forma de la distribución, la probabilidad de que el valor máximo sea menor que X , debe ser igual a la probabilidad de una función lineal de X , (Gumbel, 1958), la cual es representada por la ecuación (3.5). Suponiendo que $F = \exp[-e^{-y(x)}]$ y tomando dos veces el logaritmo natural en (3.5), se tiene que:

$$\ln(n) - y(x) = -y(a_n X + b_n) \quad (3.11)$$

Si se desarrolla (3.11) en potencias de $(X - X_0)$, donde $y(X_0) = 0$, se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ln(n) = & -y(b_n + a_n X_0) + (X - X_0) \left\{ y'(X_0) - a_n y'(b_n + a_n X_0) \right\} + \\ & + \frac{(X - X_0)^2}{2!} \left\{ y''(X_0) - a_n^2 y''(b_n + a_n X_0) \right\} + \dots \quad (3.12) \end{aligned}$$

y dado que la ecuación (3.12) es válida para el rango de valores de X , pueden obtenerse las siguientes ecuaciones:

$$-y(b_n + a_n X_0) = \ln(n) \quad (3.13)$$

$$y'(X_0) - a_n y'(b_n + a_n X_0) = 0 \quad (3.14)$$

$$y^{(t)}(X_0) - a_n^t y^{(t)}(b_n + a_n X_0) = 0 \quad (3.15)$$

donde (t) esta asociado al orden de la derivada y para $t \geq 1$, usando (3.13), (3.14) y (3.15), se tiene:

$$\frac{y^{(t)}(b_n + a_n X_0)}{\left\{ y'(b_n + a_n X_0) \right\}^t} = \frac{y^{(t)}(X_0)}{\left\{ y'(X_0) \right\}^t} \quad (3.16)$$

El miembro de la derecha de la ecuación (3.16) depende sólo de t , y puede escribirse como C_t . Dado que para valores que varían de n , $(b_n + a_n X_0)$ toma todos los valores en el rango de X , se tiene que para $t \geq 1$, generalmente, (3.16) se transforma en:

$$y^{(t)}(X) = C_t [y'(X)]^t \quad (3.17)$$

que al diferenciarla con respecto a X queda:

$$y^{(t+1)}(X) = t C_2 C_t [y'(X)]^{t+1} \quad (3.18)$$

y la relación recursiva para C_t es:

$$C_{t+1} = t C_2 C_t \quad ; \quad \text{para } t \geq 1 \quad (3.19)$$

de donde se obtiene:

$$C_t = (t-1)! C_2^{t-2} \quad (3.20)$$

de las ecuaciones (3.17) y (3.20):

$$y^{(t)}(X_0) = (t-1)! C_2^{t-2} [y'(X_0)]^t \quad (3.21)$$

la expansión de $y(x)$ en potencias de $(X - X_0)$ es:

$$y(X) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(X - X_0)^t}{t!} y^{(t)}(X_0) \quad (3.22)$$

y sustituyendo $y^{(t)}(X_0)$ como aparece en (3.21) y haciendo los cambios de variables de $y'(X_0)$ por W , C_2 por k y $1/kW$ por a , se tiene que:

$$y(X) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(X - X_0)^t}{t a^t} \quad (3.23)$$

esto es:

$$y(X) = -\frac{1}{k} \text{Ln} \left[1 - \frac{(X - X_0)}{a} \right] \quad (3.24)$$

$$(X - X_0) = a (1 - e^{-k y}) \quad (3.25)$$

$$y'(X) = \frac{1}{k} [a - (X - X_0)] \quad (3.26)$$

y de (3.13) y (3.14) finalmente se tiene:

$$a_n = n^k \quad (3.27)$$

$$b_n = (X_0 + a) (1 - n)^k \quad (3.28)$$

La ecuación (3.5) puede escribirse como:

$$F^k (X_0 + (X - X_0)) = P (X_0 + a(1 - n^k) + n^k(X - X_0)) \quad (3.29)$$

la cual, situando arbitrariamente el origen de X donde $y = 0$, produce finalmente la solución general a partir de (3.25):

$$X = a (1 - e^{-ky}) \quad (3.30)$$

o bien, su inversa:

$$y(X) = -\frac{1}{k} \text{Ln} \left(1 - \frac{X}{a}\right) \quad (3.31)$$

Si en esta solución se considera la existencia de un parámetro de ubicación u , y si la constante a representa el cociente del parámetro de forma β sobre el parámetro de escala α , se tiene la forma final de la función de distribución de probabilidad de la distribución general de valores extremos (GVE), la cual es:

$$F(X) = \exp \left\{ - \left[1 - \left[\frac{X - u}{\alpha} \right] \beta \right]^{1/\beta} \right\} \quad (3.32)$$

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(X) = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left[\frac{X - u}{\alpha} \right] \beta \right]^{(1/\beta) - 1} \exp \left\{ - \left[1 - \left[\frac{X - u}{\alpha} \right] \beta \right]^{1/\beta} \right\} \quad (3.33)$$

donde:

u es el parámetro de ubicación

α es el parámetro de escala, $\alpha > 0$

β es el parámetro de forma

Las características y propiedades de las distribuciones Gumbel y GVE son de acuerdo con NERC (1975):

a) Distribución de Valores Extremos Tipo I (Gumbel)

La función de distribución acumulada es:

$$F(X) = e^{-e^{-(x-u)/\alpha}} \quad (3.34)$$

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(X) = \frac{1}{\alpha} e^{-(x-u)/\alpha} e^{-e^{-(x-u)/\alpha}} \quad (3.35)$$

donde:

u es el parámetro de ubicación

α es el parámetro de escala, $\alpha > 0$

la moda está en $x = u$, la media, varianza y el sesgo son:

$$\text{Media} = \mu = E(x) = u + C \alpha = u + 0.5772 \alpha \quad (3.36)$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = E \left[x - E(x) \right]^2 = \frac{\pi^2 \alpha^2}{6} \quad (3.37)$$

$$\text{sesgo} = g_s = 1.14 \quad (3.38)$$

la variable reducida o estandarizada y esta relacionada con x por:

$$y = \frac{x - u}{\alpha} \quad (3.39)$$

La función de distribución acumulada de la variable reducida es:

$$F(X) = e^{-e^{-y}} \quad (3.40)$$

y su función de densidad de probabilidad es:

$$f(X) = \frac{1}{\alpha} e^{-y} e^{-e^{-y}} \quad (3.41)$$

la media y la varianza de la variable reducida son:

$$\mu = 0.5772 \quad (3.42)$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad (3.43)$$

b) Distribución general de valores extremos GVE

Las características y propiedades para esta distribución deben ser establecidas para cada una de sus ramas.

La relación entre la GVE y la variable reducida de valores extremos Tipo I es:

$$x = u + \alpha W \quad (3.44)$$

y

$$W = \left(\frac{1 - e^{-\beta y}}{\beta} \right) \quad (3.45)$$

donde W es la variable reducida general de valores extremos.

La distribución general de valores extremos es del Tipo II cuando:

$$\alpha > 0; \quad \beta < 0; \quad u + \alpha/\beta < x \leq \omega \quad (3.46)$$

si la variable reducida y para la distribución de valores extremos Tipo II es escrita como:

$$y = 1 - \left(\frac{x - u}{\alpha} \right) \beta; \quad 0 \leq y \leq \omega \quad (3.47)$$

sus correspondientes funciones de distribución y densidad son:

$$G(y) = e^{-y^{1/\beta}} \quad (3.48)$$

y

$$g(y) = - \frac{y^{1/\beta} - 1}{\beta} e^{-y^{1/\beta}} \quad (3.49)$$

la media y varianza de las variables reducidas son:

$$\mu = \Gamma(1 + \beta) \quad (3.50)$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \quad (3.51)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ representa la función gamma completa.

El sesgo correspondiente es:

$$g = \frac{\Gamma(1 + 3\beta) - 3\Gamma(1 + 2\beta)\Gamma(1 + \beta) + 2\Gamma^3(1 + \beta)}{\left[\Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta)\right]^{3/2}} \quad (3.52)$$

la mediana y la moda de la variable reducida son:

$$\text{mediana} = y_* = (0.69315)^\beta \quad (3.53)$$

$$\text{moda} = y\# = (1 - \beta)^\beta \quad (3.54)$$

La función de momentos en su forma general es:

$$E(y^r) = \Gamma(1 + r\beta); \quad \beta < 0 \quad (3.55)$$

La distribución general de valores extremos es del Tipo III cuando:

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad -\infty \leq x \leq u + \alpha/\beta \quad (3.56)$$

si la variable reducida y para la distribución de valores extremos tipo III se escribe como:

$$-y = 1 - \left[\frac{x - u}{\alpha} \right]^\beta; \quad -\infty \leq y \leq 0 \quad (3.57)$$

sus correspondientes funciones de distribución y densidad son:

$$G(y) = e^{-(-y)^{1/\beta}} \quad (3.58)$$

y

$$g(y) = -\frac{(-y)^{1/\beta - 1}}{\beta} e^{-(-y)^{1/\beta}} \quad (3.59)$$

la media y varianza de las variables reducidas son:

$$\mu = -\Gamma(1 + \beta) \quad (3.60)$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \quad (3.61)$$

El sesgo correspondiente es:

$$g = \frac{3\Gamma(1 + 2\beta) \Gamma(1 + \beta) - \Gamma(1 + 3\beta) - 2\Gamma^3(1 + \beta)}{\left[\Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \right]^{3/2}} \quad (3.62)$$

la mediana y la moda de la variable reducida son:

$$\text{mediana} = y_* = -(0.69315)^\beta \quad (3.63)$$

$$\text{moda} = y^\# = -(1 - \beta)^\beta \quad (3.64)$$

La función de momentos en su forma general es:

$$E[y^r] = (-1)^r \Gamma(1 + r\beta) \quad ; \quad \beta > 0 \quad (3.65)$$

3.4 ORIGEN, CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES DE LAS DISTRIBUCIONES BIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS

Las distribuciones univariadas han sido desarrolladas y aplicadas ampliamente en el análisis de frecuencias en hidrología, sin embargo, poca atención se le ha dado al estudio de la aproximación multivariada.

Los artículos pioneros de Finkelstein (1953), Gumbel (1958) y Tiago de Oliveira (1958) dieron los fundamentos teóricos para el análisis de las distribuciones bivariadas de valores extremos.

Una distribución asintótica bivariada se caracteriza por las siguientes propiedades:

- a) Las distribuciones marginales son asintóticas extremas,
- b) Es estable (cumple el postulado de estabilidad),
- c) Posee una función de densidad, y
- d) Se elimina el caso trivial donde la distribución multivariada es el producto de las distribuciones marginales extremas.

Origen

Sean (X_i, Y_i) pares de variables aleatorias independientes, cada una teniendo la misma distribución conjunta $F(x, y)$. Puesto que X_1, \dots, X_n son variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas, es posible encontrar transformaciones lineales:

$$X_n = a_n X_{\max} + b_n \quad (3.66)$$

tal que X_n tenga una distribución límite (para $n \rightarrow \infty$) que sea uno de los tres tipos de distribuciones de valores extremos. Habrá también una transformación:

$$Y_n = c_n Y_{\max} + d_n \quad (3.67)$$

con propiedades similares.

La función de distribución conjunta de $(\max X_i, \max Y_i)$ es:

$$\Pr \left\{ \max X_i \leq x, \max Y_i \leq y \right\} = F^n(x, y) \quad (3.68)$$

Denotando la función de distribución acumulada bivariada por $F(x, y)$, se tiene:

$$F(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n x + b_n, c_n y + d_n] \quad (3.69)$$

Esta ecuación es una extensión de las ecuaciones (3.4) y (3.5).

La distribución conjunta límite de X_n y Y_n (para $n \rightarrow \infty$) es una distribución bivariada de valores extremos.

Entre las distribuciones bivariadas se encuentran los llamados **modelos diferenciables** (aquellos que cuentan con una función de densidad) y los **no diferenciables**. Entre los de la última clase se encuentran (Tiago de Oliveira, 1982): el **modelo Biextremo**, el

modelo Gumbel y el modelo Natural. Estos modelos no cuentan con una función de densidad de probabilidad explícita, lo cual hace que la estimación de parámetros sea muy complicada.

Entre los modelos diferenciables se tienen: el modelo logístico y el modelo mezclado. Tales nombres les fueron asignados debido a que en el primer caso, la diferencia de las variables reducidas, cuando ambas marginales son distribuciones Gumbel, tiene una distribución logística estándar. En el segundo caso, el modelo tiene una función de dependencia que parte de una mezcla de las funciones marginales para los casos de independencia y dependencia, cuando éstas son distribuciones Gumbel.

(i) EL MODELO LOGISTICO

Este modelo tiene la forma:

$$F(x, y, m) = \exp \left\{ - \left[(-\ln F(x))^m + (-\ln F(y))^m \right]^{1/m} \right\} \quad (3.70)$$

donde:

m es el parámetro de asociación,

$F(u)$ es la función de distribución marginal de u .

$m \geq 1$; $0 \leq \rho \leq 1$

Para $m = 1$, la función de distribución bivariada se reduce al producto de sus marginales:

$$F(x, y, m) = F(x) F(y) \quad (3.71)$$

el cual representa el caso de independencia.

(ii) EL MODELO MEZCLADO

Este modelo es de la forma:

$$F(x, y, a) = F(x) F(y) \exp \left\{ a \left[\frac{1}{-\ln F(x)} + \frac{1}{-\ln F(y)} \right]^{-1} \right\} \quad (3.72)$$

donde:

a es el parámetro de asociación
 $0 \leq a \leq 1$

para $a = 0$, se tiene el caso de independencia, similar a la ecuación (3.71).

Dado que el modelo logístico bivariado tiene mayor versatilidad que el modelo mezclado (amplios rangos del coeficiente de correlación y del índice de dependencia, los cuales permiten alternativas más allá del caso de independencia), es aconsejable (Raynal, 1985) su aplicación a la solución de problemas de análisis de frecuencias en Hidrología.

Gumbel (1962) mostró seis posibles funciones de distribución bivariada, mediante el empleo de las tres asíntotas como funciones marginales dentro del modelo logístico. Raynal (1985) redujo las posibles combinaciones a tres, al utilizar a la distribución general de valores extremos como función marginal. A estas combinaciones Raynal (1985) les ha asignado los nombres siguientes:

- a) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 11 (BEV11) o Distribución Bigumbel.
- b) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 12 (BEV12) o Distribución Gumbel-GVE.
- c) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 22 (BEV22) o Distribución Bigeneral de Valores Extremos.

Además, propone el empleo de las siguientes funciones de distribución acumulada y funciones de densidad, para las tres combinaciones de funciones marginales del modelo logístico bivariado.

a) DISTRIBUCION BEV11

$$F(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, m) = \exp \left\{ - \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{1/m} \right\} \quad (3.73)$$

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \exp \left\{ - \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{1/m} \right\} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{(1/m) - 2} \left\{ (m - 1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{1/m} \right\} \quad (3.74)$$

b) DISTRIBUCION BEV12

$$F(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \exp \left\{ - \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left(1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \quad (3.75)$$

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left(1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{(m/\beta_2) - 1} \exp \left\{ - \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left(1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{(m/\beta_2)} \right]^{1/m} \right\}.$$

$$\cdot \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left[1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{(m/\beta_2)} \right]^{(1/m)-2}$$

$$\left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left[1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{(m/\beta_2)} \right]^{1/m} \right\}$$

(3.76)

c) DISTRIBUCION BEV22

$$F(x, y, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \exp \left\{ - \left[\left[1 - \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \left[1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}$$

(3.77)

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left[1 - \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{(m/\beta_1)-1}$$

$$\left[1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{(m/\beta_2)-1}$$

$$\exp \left\{ - \left[\left[1 - \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \left[1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}$$

$$\left[\left[1 - \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \left[1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]^{(1/m)-2}$$

$$\left\{ (m-1) + \left[\left[1 - \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \left[1 - \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}$$

(3.78)

3.5 METODO DE MAXIMA ENTROPIA APLICADO A MODELOS BIVARIADOS

Se puede extender la definición de la entropía de una variable aleatoria a varias variables aleatorias. La entropía de un grupo de variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_n con función de densidad $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es definida como (Cover, T. M., y Thomas, J. A.,

1991):

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3.79)$$

En el caso particular de dos variables aleatorias x y y , con función de densidad conjunta $f(x, y)$, la entropía está definida por:

$$I[x, y] = I[f] = - \int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=0}^{x=\infty} f(x, y) \ln [f(x, y)] dx dy \quad (3.80)$$

$$0 \leq x \leq \infty$$

$$0 \leq y \leq \infty$$

Se hace notar que $f(x, y)$ satisface los axiomas de la probabilidad, por lo que:

$$\int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=0}^{x=\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (3.81)$$

El mínimo sesgo $f(x, y)$ es obtenido maximizando la entropía sujeta a la información dada. Matemáticamente, esto puede establecerse como sigue: dadas n restricciones C_i linealmente independientes en la forma:

$$C_i = \int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=0}^{x=\infty} g_i(x, y) f(x, y) dx dy \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.82)$$

Donde $g_i(x, y)$ son algunas funciones cuyo promedio superior de $f(x, y)$ son especificados, entonces el máximo de I sujeta a la ecuación (3.82) está dado por:

$$f(x, y) = \exp \left[-a_0 - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x, y) \right] \quad (3.83)$$

Donde a_i , $i = 1, 2, \dots, m$, son los multiplicadores de Lagrange y pueden determinarse de las ecuaciones (3.82) y (3.83) con la

ecuación (3.81). Esto puede realizarse como se expresa a continuación.

Según POME, se maximiza la ecuación (3.80) sujeta a la ecuación (3.82). $I[f]$ puede ser maximizada por el método de multiplicadores de Lagrange. Lo cual, introduce parámetros $(a_0 - 1)$, a_1 , a_2, \dots, a_m , que se seleccionan de tal forma que las variaciones en una función de $f(x, y)$ desaparezcan. Por lo tanto,

$$I[f] = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i C_i \quad (3.84)$$

Para derivar un método con el fin de estimar los parámetros de una determinada función de distribución de probabilidad, implica tres pasos:

- 1) Especificar las restricciones adecuadas del modelo;
- 2) Construir la función de partición o de multiplicadores de Lagrange; y
- 3) Definir la relación entre los multiplicadores de Lagrange y las restricciones.

Consecuentemente, este método puede no ser conveniente para cualquier función arbitraria pero es, sin embargo, aplicable a la mayoría de las funciones de distribución comunmente empleadas en hidrología.

Digamos que se tiene una función de la forma:

$$f(x, y) = \alpha x^k y^q \exp \left[- \sum_{i=1}^m a_i g_i(x, y) \right] \quad (3.85)$$

Donde : $g_i(x, y)$ son funciones conocidas y
 α , k y q son constantes.

Aplicando POME a la ecuación (3.85), explícitamente se construye:

$$I[f] = -\ln \alpha - q E[\ln y] - k E[\ln x] + \sum_{i=1}^m a_i E[g_i(x, y)] \quad (3.86)$$

Es posible entonces, intentar maximizar $I[f]$ sujeta a las restricciones $E[\ln x]$, $E[\ln y]$ y $E[g_i(x,y)]$, la cual puede evaluarse numéricamente por medio de datos empíricos, para obtener la función de la ecuación (3.85).

Para maximizar $I[f]$ se sustituye la ecuación (3.83) en la ecuación (3.81), por lo que

$$\int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=0}^{x=\infty} \exp \left[-a_0 - \sum_{i=1}^m a_i g_i(x,y) \right] dx dy = 1 \quad (3.87)$$

obteniéndose:

$$a_0 = \ln \int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=0}^{x=\infty} \exp \left[- \sum_{i=1}^m a_i g_i(x,y) \right] dx dy \quad (3.88)$$

Los multiplicadores de Lagrange son relacionados con las restricciones por:

$$-\frac{\partial a_0}{\partial a_i} = C_i \quad (3.89)$$

También se puede mostrar que:

$$-\frac{\partial^2 a_0}{\partial a_i^2} = \text{var}[g_i(x,y)] ; \quad \frac{\partial^2 a_0}{\partial a_i \partial a_j} = \text{cov}[g_i(x,y), g_j(x,y)] \quad (3.90)$$

Con los multiplicadores de Lagrange estimados de la ecuación (3.89) y (3.90), la función dada por (3.83) es únicamente definida. Esto implica que los parámetros en la función sean únicamente relacionados con los multiplicadores de Lagrange.

3.6 APLICACION DEL METODO DE MAXIMA ENTROPIA A LA FUNCION DE DISTRIBUCION BIGUMBEL (BEV11)

Primero se desarrollará la aplicación del Método de Máxima Entropía a la Función de Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo II (BEV11) o Distribución Bigumbel, para el caso de independencia y posteriormente para el caso de dependencia.

APLICACION A LA DISTRIBUCION BEV11: CASO DE INDEPENDENCIA

Para el caso de independencia, la función conjunta de distribución de probabilidad $F(x,y)$ para la BEV11, es igual al producto de sus marginales, por lo que:

$$F(x,y) = F(x) F(y)$$

$$\text{donde: } F(x) = e^{-e^{-\left[\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right]}} \quad (3.91)$$

$$\text{y } F(y) = e^{-e^{-\left[\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right]}} \quad (3.92)$$

Considerando las variables reducidas:

$$v = \frac{x - u_1}{\alpha_1}$$

$$\text{y } \omega = \frac{y - u_2}{\alpha_2}$$

se tiene:

$$F(x, y) = e^{-e^{-v}} e^{-e^{-\omega}} \quad (3.93)$$

Para encontrar la función de densidad conjunta, se tendrá que derivar parcialmente con respecto a cada variable:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = e^{-e^{-\omega}} e^{-e^{-v}} (-e^{-v}) \left(-\frac{1}{\alpha_1}\right) = e^{-e^{-\omega}} e^{-e^{-v}} e^{-v} \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\alpha_1} e^{-v} e^{-e^{-v}} e^{-e^{-\omega}} (-e^{-\omega}) \left(-\frac{1}{\alpha_2}\right)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-v} e^{-e^{-v}} e^{-\omega} e^{-e^{-\omega}} \quad (3.95)$$

A continuación, después de haber encontrado la función de densidad conjunta, se procede a la determinación de los parámetros α_1 , α_2 ,

u_1 y u_2 de la Función de Densidad Bivariada Logística con marginales de valores extremos Tipo I. Caso de independencia.

Sea:

$$f(x, y) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-v} e^{-e^{-v}} e^{-\omega} e^{-e^{-\omega}} \quad (3.95)$$

la función BEV11, para el caso de independencia.

$$\text{donde } v = \frac{x - u_1}{\alpha_1}; \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

$$\omega = \frac{y - u_2}{\alpha_2}; \quad -\infty \leq y \leq \infty$$

Aplicando la definición de entropía se tiene que:

$$I[f] = - \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f(x, y) \ln [f(x, y)] dy dx \quad (3.96)$$

desarrollando $\ln [f(x, y)]$,

$$\ln [f(x, y)] = \ln \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-v} e^{-e^{-v}} e^{-\omega} e^{-e^{-\omega}} \right\}$$

$$\ln [f(x, y)] = - \ln (\alpha_1 \alpha_2) - v - e^{-v} - \omega - e^{-\omega} \quad (3.97)$$

la ecuación anterior también puede escribirse como:

$$\ln [f(x, y)] = - \ln (\alpha_1 \alpha_2) - \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] - e^{-\left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right]} - \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] - e^{-\left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right]} \quad (3.98)$$

Sustituyendo la ec. (3.98) en la (3.96), se tiene:

$$I[f] = \ln (\alpha_1 \alpha_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right]} f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right]} f(x, y) dy dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} f(x, y) dy dx \quad (3.99)$$

dado que cumple los axiomas de la probabilidad, se tiene la siguiente restricción:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x, y) dy dx = 1 \quad (3.100)$$

y las restantes restricciones de la Ec. (3.99) se obtienen de la ecuación general:

$$C_i = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} g_i(x, y) f(x, y) dy dx \quad (3.101)$$

que al aplicar a la ecuación (3.99), se tienen las restricciones específicas:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right) f(x, y) dy dx = E \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] \quad (3.102)$$

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{-\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} f(x, y) dy dx = E \left[e^{-\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} \right] \quad (3.103)$$

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right) f(x, y) dy dx = E \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] \quad (3.104)$$

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{-\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} f(x, y) dy dx = E \left[e^{-\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right] \quad (3.105)$$

por lo que la función a maximizar; es decir, el mínimo sesgo de $f(x, y)$ consistente con las restricciones anteriores, es determinado por PDME, y de la ecuación general

$$f(x, y) = \exp \left\{ -a_0 - \sum_{i=1}^n a_i g_i(x, y) \right\} \quad (3.106)$$

toma la forma:

$$f(x, y) = \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 e^{-\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} - a_3 \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) - a_4 e^{-\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right\} \quad (3.107)$$

donde a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4 son los multiplicadores de Lagrange.

Debido a que cumple los axiomas de la probabilidad, puede sustituirse la ec. (3.107) en (3.100), por lo que,

$$\int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f(x, y) dy dx = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 e^{-\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} - a_3 \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) - a_4 e^{-\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right\} dy dx \quad (3.108)$$

si de la ecuación anterior se despeja $\exp(a_0)$,

$$\exp(a_0) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 e^{-\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} - a_3 \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) - a_4 e^{-\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right\} dy dx \quad (3.109)$$

a continuación se procede a resolver la ecuación (3.109).

haciendo un cambio de variable,

$$\text{sea: } x = -\alpha_1 \ln[t/a_1] + u_1 \quad ; \quad y = -\alpha_2 \ln[z/a_4] + u_2$$

evaluando el Jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \omega)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha_1 t & 0 \\ 0 & -\alpha_2 z \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 t z$$

evaluación de términos:

$$- a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] = \text{Ln} \left[\frac{t}{a_2} \right]^{a_1}$$

$$- a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} = -t$$

$$- a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] = \text{Ln} \left[\frac{z}{a_4} \right]^{a_3}$$

$$- a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} = -z$$

realizando el cambio de variable, se tiene:

$$\exp(a_0) = \alpha_1 \alpha_2 \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{t=0}^{t=\infty} \exp \left\{ \text{Ln} \left[\frac{t}{a_2} \right]^{a_1} - t + \text{Ln} \left[\frac{z}{a_4} \right]^{a_3} - z \right\} t z dt dz \quad (3.110)$$

la ecuación anterior también puede expresarse como:

$$\exp(a_0) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_2^{a_1} a_4^{a_3}} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-t} t^{a_1-1} e^{-z} z^{a_3-1} dt dz \quad (3.111)$$

empleando la definición de la función gamma, ecuación (6.1.1) pag. 255, (Abramowitz and Stegun, 1965), la ecuación (3.111) queda como:

$$\exp(a_0) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_2^{a_1} a_4^{a_3}} \Gamma(a_1) \Gamma(a_3) \quad (3.112)$$

Aplicando logaritmos a la ecuación (3.112),

$$a_0 = \text{Ln} \alpha_1 + \text{Ln} \alpha_2 - a_1 \text{Ln} a_2 - a_3 \text{Ln} a_4 + \text{Ln} \Gamma(a_1) + \text{Ln} \Gamma(a_3) \quad (3.113)$$

También, de la ecuación (3.109) se puede obtener a_0 , de tal forma que:

$$a_0 = \text{Ln} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\} dy dx \quad (3.114)$$

Por lo que, para maximizar la ec. (3.114) se tiene que derivar parcialmente a_0 con respecto a: a_1, a_2, a_3, a_4 ; de tal manera que:

para $\frac{\partial a_0}{\partial a_1}$, se tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = \frac{- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\} dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\} dx dy}$$

teniendo en cuenta que:

$$\exp(a_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\} dx dy$$

se tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\} dx dy$$

por lo que la ecuación anterior también puede expresarse como:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) f(x,y) dy dx = - E \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] \quad (3.115)$$

Ahora para $\frac{\partial a_0}{\partial a_2}$, se tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = \frac{- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\} dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\} dx dy}$$

de forma similar al caso anterior, se tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} \right\} dx dy$$

la ecuación anterior también puede expresarse como:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = - \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} f(x,y) dy dx = - E \left[e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} \right] \quad (3.116)$$

siguiendo el mismo procedimiento que el indicado para obtener las ecuaciones (3.115 y 3.116) se tiene,

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_3} = - \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] f(x,y) dy dx = - E \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_4} = - \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} f(x,y) dy dx = - E \left[e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} \right] \quad (3.118)$$

Así también, de la ecuación (3.113), se puede obtener $\frac{\partial a_0}{\partial a_i}$, para $i=1, \dots, 4$; por lo que:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - \ln a_2 + \psi(a_1) \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = - \frac{a_1}{a_2} \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_3} = - \ln a_4 + \psi(a_3) \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_4} = - \frac{a_3}{a_4} \quad (3.122)$$

Igualando las ecuaciones (3.115) a (3.118) con las ecuaciones (3.119) a (3.122), respectivamente,

$$E \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] = \ln a_2 - \psi(a_1) \quad (3.123)$$

$$E \left[e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} \right] = \frac{a_1}{a_2} \quad (3.124)$$

$$E \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] = \text{Ln} \cdot a_4 - \psi(a_3) \quad (3.125)$$

$$E \left[e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right] = \frac{a_3}{a_4} \quad (3.126)$$

Se puede comprobar que:

$$E \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] = \gamma \quad (3.127)$$

$$E \left[e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} \right] = 1 \quad (3.128)$$

$$E \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] = \gamma \quad (3.129)$$

$$E \left[e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right] = 1 \quad (3.130)$$

donde: $\gamma = 0.5772$, (Es la constante de Euler)

igualando las ecuaciones (3.124) y (3.126) con (3.128) y (3.130), respectivamente,

$$\frac{a_1}{a_2} = 1$$

$$\frac{a_3}{a_4} = 1$$

por lo que a_1, a_2, a_3, a_4 pueden tomar los valores siguientes:

$$a_1 = 1 ; a_2 = 1 ; a_3 = 1 ; a_4 = 1 \quad (3.131)$$

que cumplen las restricciones indicadas por las ecuaciones (3.123) a (3.126).

Sustituyendo a_0 , ecuación (3.113), en $f(x,y)$, ecuación (3.107), se

tiene,

$$f(x,y) = \exp \left\{ - \ln \alpha_1 - \ln \alpha_2 + a_1 \ln a_2 + a_3 \ln a_4 - \ln \Gamma(a_1) - \right. \\ \left. a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\} \quad (3.132)$$

la ecuación anterior también puede expresarse como:

$$f(x,y) = \frac{a_2^{a_1} a_4^{a_3} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} - a_3 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_4 e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right\}}{\alpha_1 \alpha_2 \Gamma(a_1) \Gamma(a_3)}$$

considerando (3.131), la ecuación anterior toma la forma:

$$f(x,y) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} e^{-e^{-\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]}} e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} e^{-e^{-\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]}} \quad (3.133)$$

la cual es precisamente la distribución BEV11 para el caso de independencia. En virtud de lo expuesto anteriormente, se puede concluir que, los estimadores α_1 , u_1 , α_2 , y u_2 por el método de máxima entropía son obtenidos seleccionando valores de α_1 , u_1 , α_2 , y u_2 que cumplan las restricciones indicadas por las ecuaciones (3.127) a (3.130); lo cual comprueba que, para éste caso, el proceso es equivalente si se obtienen los estimadores de los parámetros de manera univariada; para lo cual, se puede aplicar el algoritmo expuesto en la sección 2.4.

APLICACION A LA DISTRIBUCION BEV11: CASO DE DEPENDENCIA

Para el caso de dependencia, la función de densidad bivariada logística con marginales de Valores Extremos Tipo I, BEV11, es:

$$f(x,y) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-m\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} e^{-m\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} F(x,y) \left[e^{-m\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} + e^{-m\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} \right]^{\frac{1}{m}-2} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} + e^{-m\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (3.134)$$

donde:

$$F(x,y) = \exp \left\{ - \left[e^{-m\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} + e^{-m\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty & ; & -\infty < y < \infty \\ \alpha_1 > 0 & ; & \alpha_2 > 0 \\ m > 1 \end{aligned}$$

Aplicando la definición de entropía a la función de densidad (3.134), se tiene:

$$I[f] = - \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y) \ln [f(x,y)] dx dy \quad (3.136)$$

por lo que;

$$\begin{aligned} I[f] = & \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \left\{ \ln(\alpha_1 \alpha_2) + m\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right] + m\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right] + \left[e^{-m\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} + e^{-m\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{m} - 2 \right) \ln \left[e^{-m\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} + e^{-m\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} \right] - \right. \\ & \left. \ln \left\{ (m-1) + \left[e^{-m\left[\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right]} + e^{-m\left[\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} f(x,y) dx dy \quad (3.137) \end{aligned}$$

dado que $f(x,y)$ cumple los axiomas de la probabilidad, se tiene

la siguiente restricción:

$$y = \infty \quad x = \infty$$

$$\int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1 \quad (3.138)$$

y las restantes restricciones requeridas para la derivación de la ecuación $f(x,y)$ se deducen de la ecuación (3.137), aplicando la ecuación general:

$$C_i = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} g_i(x,y) f(x,y) dx dy \quad (3.139)$$

por lo cual,

$$y = \infty \quad x = \infty$$

$$\int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] f(x,y) dx dy = E \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] \quad (3.140)$$

$$y = \infty \quad x = \infty$$

$$\int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] f(x,y) dx dy = E \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] \quad (3.141)$$

$$y = \infty \quad x = \infty$$

$$\int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \left[e^{-m \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} f(x,y) dx dy =$$

$$= E \left\{ \left[e^{-m \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (3.142)$$

$$y = \infty \quad x = \infty$$

$$\int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \ln \left[e^{-m \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right]} \right] f(x,y) dx dy =$$

$$= E \left\{ \ln \left[e^{-m \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right]} \right] \right\} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned}
 & y = \infty \quad x = \infty \\
 & \int \int \left\{ \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} f(x,y) dx dy = \right. \\
 & y = -\infty \quad x = -\infty \\
 & = E \left\{ \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} \quad (3.144)
 \end{aligned}$$

De acuerdo con el principio de Máxima Entropía (Jaynes, 1961, 1982), el mínimo sesgo de $f(x,y)$ es obtenido maximizando la entropía sujeta a la información proporcionada. Así, la ecuación general;

$$f(x,y) = \exp \left[-a_0 - \sum_{i=1}^n a_i g_i(x,y) \right] \quad (3.145)$$

toma la forma:

$$\begin{aligned}
 f(x,y) = \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) - \right. \\
 a_3 \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} - a_4 \text{Ln} \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right] \\
 \left. - a_5 \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} \quad (3.146)
 \end{aligned}$$

donde: a_0, \dots, a_5 son los multiplicadores de Lagrange.

Sustituyendo la ec. (3.146) en (3.138),

$$\begin{aligned}
 & y = \infty \quad x = \infty \\
 & \int \int \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) - \right. \\
 & y = -\infty \quad x = -\infty \\
 & a_3 \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} - a_4 \text{Ln} \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right] \\
 & \left. - a_5 \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]} + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} dx dy = 1 \quad (3.147)
 \end{aligned}$$

Despejando $\exp(a_0)$ de la ec. anterior,

$$\exp(a_0) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_3 \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} - a_4 \ln \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right] - a_5 \ln \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} dx dy \quad (3.148)$$

por lo que, la ecuación integral (3.148) tiene que ser resuelta, la que también puede expresarse como:

$$\exp(a_0) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \exp \left\{ -a_1 \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] - a_2 \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] - a_3 \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{-a_4} \cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] + e^{-m \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right]} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-a_5} dx dy \quad (3.149)$$

haciendo un cambio de variable:

$$\text{Sea: } x = -\frac{\alpha_1}{m} \ln \left[\left(\frac{r}{a_3} \right)^m - s \right] + u_1; \quad y = -\frac{\alpha_2}{m} \ln s + u_2$$

Evaluando el Jacobiano,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{a_3} \left(\frac{r}{a_3} \right)^{m-1} & \frac{\alpha_1}{m} \\ \left[\left(\frac{r}{a_3} \right)^m - s \right] & \left[\left(\frac{r}{a_3} \right)^m - s \right] \\ 0 & -\frac{\alpha_2}{m} \end{vmatrix} =$$

$$J = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{m a_3^m} r^{m-1} \left[\left(\frac{r}{a_3} \right)^m - s \right]^{-1} (s)^{-1}$$

Evaluación de términos:

$$-a_1 \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) = \text{Ln} \left[\left(\frac{r}{a_3} \right)^m - s \right]^{\frac{a_1}{m}}$$

$$-a_2 \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) = \text{Ln} (s)^{\frac{a_2}{m}}$$

$$-a_3 \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} = -r$$

$$\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-a_4} = a_3^{(a_4)m} r^{-(a_4)m}$$

$$\left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-a_5} = \left\{ (m-1) + \frac{r}{a_3} \right\}^{-a_5}$$

La nueva región de integración R_{rs} , será:

para $x = -\infty$

$$e^{-\infty \left(-\frac{m}{\alpha_1} \right)} = \left[\frac{r}{a_3} \right]^m - s \quad ; \quad \infty = \left[\frac{r}{a_3} \right]^m - s$$

despejando r: $r = \infty$

para $x = +\infty$

$$e^{\infty \left(-\frac{m}{\alpha_1} \right)} = \left[\frac{r}{a_3} \right]^m - s \quad ; \quad 0 = \left[\frac{r}{a_3} \right]^m - s$$

por lo que: $s = \left[\frac{r}{a_3} \right]^m$

para $y = -\infty$

$$e^{-\infty \left(-\frac{m}{\alpha_2} \right)} = s \quad ; \quad \text{por lo que: } s = \infty$$

para $y = +\infty$

$$e^{\infty \left(-\frac{m}{\alpha_2} \right)} = s \quad ; \quad \text{por lo que: } s = 0$$

Efectuando el cambio de variable en la ec. (3.149) se tiene:

$$\exp(a_0) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{m a_3^m} a_3^{a_4 m} \int_{r=0}^{r=\infty} \int_{s=0}^{s=\left[\frac{r}{a_3} \right]^m} \left[\left(\frac{r}{a_3} \right)^m - s \right]^{\frac{a_1}{m} - 1} (s)^{\frac{a_2}{m} - 1} ds dr$$

$$\cdot \left\{ (m-1) + \frac{r}{a_3} \right\}^{-a_5} r^{m-m a_4-1} e^{-r} ds dr \quad (3.150)$$

Evaluando la integral en ds, haciendo:

$$I_s = \int_{s=0}^{s=\left[\frac{r}{a_3}\right]^m} \left[\left(\frac{r}{a_3}\right)^m - s \right]^{\left(\frac{a_1}{m}-1\right)} (s)^{\left(\frac{a_2}{m}-1\right)} ds \quad (3.151)$$

Empleando la definición de la función Beta (Dwight, H. B., 1961) en la forma:

$$\int_{s=0}^{s=a} s^{b-1} (a-s)^{c-1} ds = a^{b+c-1} \frac{\Gamma(b) \Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}$$

se tiene que:

$$I_s = \frac{r^{(a_1+a_2-m)}}{a_3^{(a_1+a_2-m)}} \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{a_2}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2}{m}\right)} \quad (3.152)$$

Sustituyendo la ec. (3.152) en la ec. (3.150) se tiene:

$$\exp(a_0) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 a_3^{a_4 m}}{m a_3^{(a_1+a_2)}} \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{a_2}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2}{m}\right)} \int_{r=0}^{r=\infty} \left\{ (m-1) + \frac{r}{a_3} \right\}^{-a_5} r^{a_1+a_2-a_4 m-1} e^{-r} dr \quad (3.153)$$

Sea:

$$A = \frac{\alpha_1 \alpha_2 a_3^{a_4 m}}{m a_3^{(a_1+a_2)}}; \quad B = \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{a_2}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2}{m}\right)}; \quad z = a_1 + a_2 - a_4 m$$

por lo que la ec. (3.153) queda como:

$$\exp(a_0) = A \cdot B \cdot \int_{r=0}^{r=\infty} \left\{ (m-1) + \frac{r}{a_3} \right\}^{-a_5} r^{z-1} e^{-r} dr \quad (3.154)$$

$$\text{Sea:} \quad I_r = \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r^{z-1} e^{-r}}{\left\{ (m-1) + \frac{r}{a_3} \right\}^{a_5}} dr \quad (3.155)$$

Haciendo algunas operaciones con el denominador de la ec. integral

(3.155), tenemos que:

$$\left\{ (m-1) + \frac{r}{as} \right\}^{as} = (m-1)^{as} \left[1 + \frac{1}{as(m-1)} r \right]^{as} \quad (3.156)$$

Sustituyendo la ec. (3.156) en la ec. (3.155), se tiene:

$$I_r = (m-1)^{-as} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r^{z-1} e^{-r}}{\left\{ 1 + \frac{1}{as(m-1)} r \right\}^{as}} dr \quad (3.157)$$

Aplicando la ecuación No. 3 Tabla No.92, pag. 135 (Bierens De Haan, D., 1957):

$$\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-kr} \frac{r^{z-1}}{[1 + t r]^{as}} dr = \frac{1}{k^z} \Gamma(z) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(z+n)}{\Gamma(n+1) k^n} t^n \quad (3.158)$$

donde: $k = 1$; $t = 1/[as(m-1)]$

Aplicando la ec. (3.158) en (3.157), se tiene:

$$I_r = (m-1)^{-as} \Gamma(z) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(z+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{as(m-1)} \right]^n \quad (3.160)$$

Sustituyendo la ec. (3.160) en la ec. (3.154) y recordando las equivalencias para: A, B y z,

$$\begin{aligned} \exp(a_0) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{m} a_3^{m a_4 - (a_1 + a_2)} (m-1)^{-as} \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{a_2}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1 + a_2}{m}\right)} \Gamma(a_1 + a_2 - m a_4) . \\ &\cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1 + a_2 - m a_4 + n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{as(m-1)} \right]^n \end{aligned} \quad (3.161)$$

Aplicando logaritmos a la ec. (3.161),

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{Ln} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{m} \right) + (m a_4 - a_1 - a_2) \text{Ln} a_3 - as \text{Ln} (m-1) + \text{Ln} \Gamma \left(\frac{a_1}{m} \right) + \\ &+ \text{Ln} \Gamma \left(\frac{a_2}{m} \right) - \text{Ln} \Gamma \left(\frac{a_1 + a_2}{m} \right) + \text{Ln} \Gamma (a_1 + a_2 - m a_4) + \\ &+ \text{Ln} \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1 + a_2 - m a_4 + n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{as(m-1)} \right]^n \right\} \end{aligned} \quad (3.162)$$

Obteniendo las derivadas parciales $\partial a_0 / \partial a_i$; donde $i = 1, \dots, 5$ se

tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = -\text{Ln } a_0 + \frac{1}{m} \psi\left(\frac{a_1}{m}\right) - \frac{1}{m} \psi\left(\frac{a_1+a_2}{m}\right) + \psi(a_1+a_2-ma_4) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial a_0} \left\{ \text{Ln} \left[\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(a_5+n)\Gamma(a_1+a_2-ma_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_0(m-1)} \right]^n \right] \right\} \quad (3.163)$$

donde $\psi(\cdot)$, es la función digamma.

Si se desarrolla la derivada parcial del último término de la ec. (3.163),

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left\{ \text{Ln} \left[\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(a_5+n)\Gamma(a_1+a_2-ma_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_0(m-1)} \right]^n \right] \right\} =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(a_5+n)}{\Gamma(n+1)} \frac{\partial}{\partial a_1} \Gamma(a_1+a_2-ma_4+n)}{\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(a_5+n)\Gamma(a_1+a_2-ma_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_0(m-1)} \right]^n} \left[\frac{1}{a_0(m-1)} \right]^n$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(a_5+n)\Gamma(a_1+a_2-ma_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_0(m-1)} \right]^n}{\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(a_5+n)\Gamma(a_1+a_2-ma_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_0(m-1)} \right]^n} \quad (3.164)$$

desarrollando el siguiente término;

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \Gamma(a_1+a_2-ma_4+n) = \frac{\partial}{\partial a_1} \int_{x=0}^{x=\infty} x^{a_1+a_2-ma_4+n-1} e^{-x} dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_1} \int_{x=0}^{x=\infty} e^{(a_1+a_2-ma_4+n-1)\text{Ln } x} e^{-x} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=\infty} x^{a_1+a_2-ma_4+n-1} e^{-x} \cdot \text{Ln } x dx \quad (3.165)$$

Aplicando la ec. No 1 Tabla 353, pag. 496 (Bierens De Haan, D., 1957):

$$\int_{x=0}^{x=\infty} x^{p-1} e^{-qx} \cdot \text{Ln } x dx = \frac{1}{q^p} \Gamma(p) \cdot \{Z'(p) - \text{Ln } q\}$$

donde: $p = a_1 + a_2 - ma_4 + n$

$$q = 1$$

$$Z'(p) = \frac{d}{dp} \cdot \text{Ln } \Gamma(p)$$

$$Z'(a_1+a_2-ma_4+n) = \frac{\partial}{\partial a_1} \text{Ln } \Gamma(a_1+a_2-ma_4+n) = \psi(a_1+a_2-ma_4+n)$$

Aplicando lo anterior en la ecuación (3.165) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n) = \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n) \cdot \psi(a_1+a_2-m a_4+n) \quad (3.166)$$

sustituyendo la ecuación (3.166) en (3.164) y ésta en la ec. (3.163),

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial a_1} = & -\ln a_3 + \frac{1}{m} \psi\left(\frac{a_1}{m}\right) - \frac{1}{m} \psi\left(\frac{a_1+a_2}{m}\right) + \psi(a_1+a_2-m a_4) + \\ & + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n) \psi(a_1+a_2-m a_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)}\right]^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)}\right]^n} \end{aligned} \quad (3.167)$$

haciendo lo mismo para $\partial a_0 / \partial a_2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial a_2} = & -\ln a_3 + \frac{1}{m} \psi\left(\frac{a_2}{m}\right) - \frac{1}{m} \psi\left(\frac{a_1+a_2}{m}\right) + \psi(a_1+a_2-m a_4) + \\ & + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n) \psi(a_1+a_2-m a_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)}\right]^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)}\right]^n} \end{aligned} \quad (3.168)$$

Ahora para $\partial a_0 / \partial a_3$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial a_3} = & \frac{m a_4 - a_1 - a_2}{a_3} + \\ & + \frac{\partial}{\partial a_3} \ln \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)}\right]^n \right\} \end{aligned} \quad (3.169)$$

$$\text{obteniendo: } \frac{d}{da_3} \left[\frac{1}{a_3(m-1)} \right]^n = -\frac{n}{a_3} \left[\frac{1}{a_3(m-1)} \right]^n$$

por lo que la ecuación (3.169) queda como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial a_3} = & \frac{m a_4 - a_1 - a_2}{a_3} + \\ & - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)}\right]^n \frac{n}{a_3}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1+a_2-m a_4+n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)}\right]^n} \end{aligned} \quad (3.170)$$

Ahora para $\partial a_0 / \partial a_4$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial a_4} &= m \ln a_3 - m \psi(a_1 + a_2 - ma_4) + \\ &+ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \frac{\partial}{\partial a_4} \Gamma(a_1 + a_2 - ma_4 + n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)} \right]^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1 + a_2 - ma_4 + n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)} \right]^n} \end{aligned} \quad (3.171)$$

desarrollando el siguiente término,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_4} \Gamma(a_1 + a_2 - ma_4) &= \frac{\partial}{\partial a_4} \int_{x=0}^{x=\infty} e^{(a_1 + a_2 - ma_4 + n - 1) \ln x} e^{-x} dx = \\ &= -m \int_{x=0}^{x=\infty} x^{(a_1 + a_2 - ma_4 + n - 1)} e^{-x} \cdot \ln x dx \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación No 1 Tabla 353, pag. 496 (Bierens De Haan, D., 1957),

donde: $p = a_1 + a_2 - ma_4 + n$; $q = 1$

$$Z' = -m \psi(a_1 + a_2 - ma_4 + n)$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial a_4} &= m \ln a_3 - m \psi(a_1 + a_2 - ma_4) + \\ &+ m^2 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1 + a_2 - ma_4 + n) \psi(a_1 + a_2 - ma_4 + n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)} \right]^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1 + a_2 - ma_4 + n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)} \right]^n} \end{aligned} \quad (3.172)$$

Ahora para $\partial a_0 / \partial a_5$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial a_5} &= -\ln(m-1) + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \psi(as+n) \Gamma(a_1 + a_2 - ma_4 + n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)} \right]^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(as+n) \Gamma(a_1 + a_2 - ma_4 + n)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{1}{a_3(m-1)} \right]^n} \end{aligned} \quad (3.173)$$

Por otra parte, si de la ecuación (3.149) se despeja a_0 , se tiene:

$$a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) - a_3 \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-a_4} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-a_5} dx dy \quad (3.174)$$

Así también, pueden obtenerse las derivadas parciales $\partial a_0 / \partial a_i$, donde: $i = 1, \dots, 5$, de la ecuación (3.174), por lo que, procediendo a obtener $\partial a_0 / \partial a_1$, se tiene:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) - a_3 \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-a_4} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-a_5} dx dy \Bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -a_1 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) - a_3 \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-a_4} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-a_5} dx dy \quad (3.175)$$

donde puede observarse que el denominador de la ecuación anterior es exactamente la expresión $\exp(a_0)$, ecuación (3.149), por lo que, la ecuación (3.175) puede expresarse como:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \exp \left\{ -a_0 - a_1 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) - a_2 \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) - a_3 \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-a_4} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-a_5} dx dy$$

la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] f(x,y) dx dy$$

por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - E \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] \quad (3.176)$$

donde: $E[\cdot]$, es el operador esperanza.

Ahora, para $\partial a_0 / \partial a_2$, siguiendo el mismo procedimiento efectuado para obtener la ecuación (3.176), se tiene;

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right] f(x,y) dx dy$$

por lo tanto, se tiene,

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_2} = - E \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] \quad (3.177)$$

Ahora, para $\partial a_0 / \partial a_3$, siguiendo el mismo procedimiento efectuado para obtener la ecuación (3.176),

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_3} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} f(x,y) dx dy$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_3} = - E \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (3.178)$$

Ahora, para $\partial a_0 / \partial a_4$, siguiendo el mismo procedimiento efectuado para obtener la ecuación (3.176),

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_4} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] f(x,y) dx dy$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_1} = - E \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} \quad (3.179)$$

Ahora, para $\partial a_0 / \partial a_3$, siguiendo el mismo procedimiento efectuado para obtener la ecuación (3.176),

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_3} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} f(x,y) dx dy$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_3} = - E \left\{ \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} \quad (3.180)$$

A continuación se procedió a obtener las esperanzas expresadas por las ecuaciones (3.176) a (3.180), las cuales representan las restricciones del modelo. Para tal efecto se recomienda ver el Apéndice A.

Considerando el procedimiento seguido en el Apéndice A, las restricciones del modelo BEVII, se expresan como:

$$E \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] = \gamma \quad (3.181)$$

$$E \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} = 1 + \frac{1}{m} \quad (3.182)$$

$$E \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] = \gamma \quad (3.183)$$

$$E \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} = 1 - m \gamma \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} E \left[\text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right] &= \\ = \text{Ln}(m-1) + \frac{1 - e^{m-1} [\text{Ln}(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \end{aligned} \quad (3.185)$$

donde: $\gamma = 0.5772$, es la constante de Euler.

3.7 UN ALGORITMO PARA LA ESTIMACION DE LOS PARAMETROS α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m DE LA FUNCION BEV11, A PARTIR DEL METODO DE MAXIMA ENTROPIA

En este método los parámetros α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m deben seleccionarse para cumplir las restricciones señaladas por las ecuaciones (3.181) a (3.185). Las cuales también pueden escribirse como:

$$P = \sum \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] - N \gamma = 0 \quad (3.186)$$

$$Q = \sum \left\{ \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} - N \left(1 + \frac{1}{m} \right) = 0 \quad (3.187)$$

$$R = \sum \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] - N \gamma = 0 \quad (3.188)$$

$$S = \sum \left\{ \ln \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right] \right\} - N (1 - m \gamma) = 0 \quad (3.189)$$

$$T = \sum \left[\ln \left\{ (m - 1) + \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right] -$$

$$N \left\{ \ln(m-1) + \frac{1 - e^{m-1} [\ln(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \right\} = 0 \quad (3.190)$$

donde N es el tamaño común de la muestra.

Se hace la aclaración de que, en todos los casos donde se indique el símbolo de sumatoria (Σ), éste deberá interpretarse como:

$$\sum_{i=1}^N, \text{ a menos que se indique lo contrario.}$$

El método de Newton (Rice, 1985) puede emplearse para resolver este sistema de ecuaciones. Por lo cual, el sistema formado por

(3.186 a 3.190) puede resolverse iterativamente como:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ u_1 \\ \alpha_2 \\ u_2 \\ m \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ u_1 \\ \alpha_2 \\ u_2 \\ m \end{bmatrix}_i - M^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \\ S \\ T \end{bmatrix} \quad (3.191)$$

donde todos los términos de la derecha son evaluados con los valores conocidos (en el estado i) de los estimadores α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m ; y la matriz [M] esta dada por:

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial P}{\partial u_1} & \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial P}{\partial u_2} & \frac{\partial P}{\partial m} \\ \frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial Q}{\partial u_1} & \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial Q}{\partial u_2} & \frac{\partial Q}{\partial m} \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial R}{\partial u_1} & \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial R}{\partial u_2} & \frac{\partial R}{\partial m} \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial S}{\partial u_1} & \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial S}{\partial u_2} & \frac{\partial S}{\partial m} \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial T}{\partial u_1} & \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial T}{\partial u_2} & \frac{\partial T}{\partial m} \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

Aproximando los elementos de la matriz [M] por sus correspondientes esperanzas, se obtiene:

$$[M] = \begin{bmatrix} E \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha_1} \right] & E \left[\frac{\partial P}{\partial u_1} \right] & E \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha_2} \right] & E \left[\frac{\partial P}{\partial u_2} \right] & E \left[\frac{\partial P}{\partial m} \right] \\ E \left[\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} \right] & E \left[\frac{\partial Q}{\partial u_1} \right] & E \left[\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} \right] & E \left[\frac{\partial Q}{\partial u_2} \right] & E \left[\frac{\partial Q}{\partial m} \right] \\ E \left[\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \right] & E \left[\frac{\partial R}{\partial u_1} \right] & E \left[\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \right] & E \left[\frac{\partial R}{\partial u_2} \right] & E \left[\frac{\partial R}{\partial m} \right] \\ E \left[\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \right] & E \left[\frac{\partial S}{\partial u_1} \right] & E \left[\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} \right] & E \left[\frac{\partial S}{\partial u_2} \right] & E \left[\frac{\partial S}{\partial m} \right] \\ E \left[\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \right] & E \left[\frac{\partial T}{\partial u_1} \right] & E \left[\frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \right] & E \left[\frac{\partial T}{\partial u_2} \right] & E \left[\frac{\partial T}{\partial m} \right] \end{bmatrix} \quad (3.193)$$

donde cada uno de los elementos de la matriz [M] se expresan más adelante (También ver Apéndice B).

En forma general, el algoritmo propuesto se puede explicar con el diagrama de flujo mostrado en la Fig. 3.1.

MATRIZ [M]

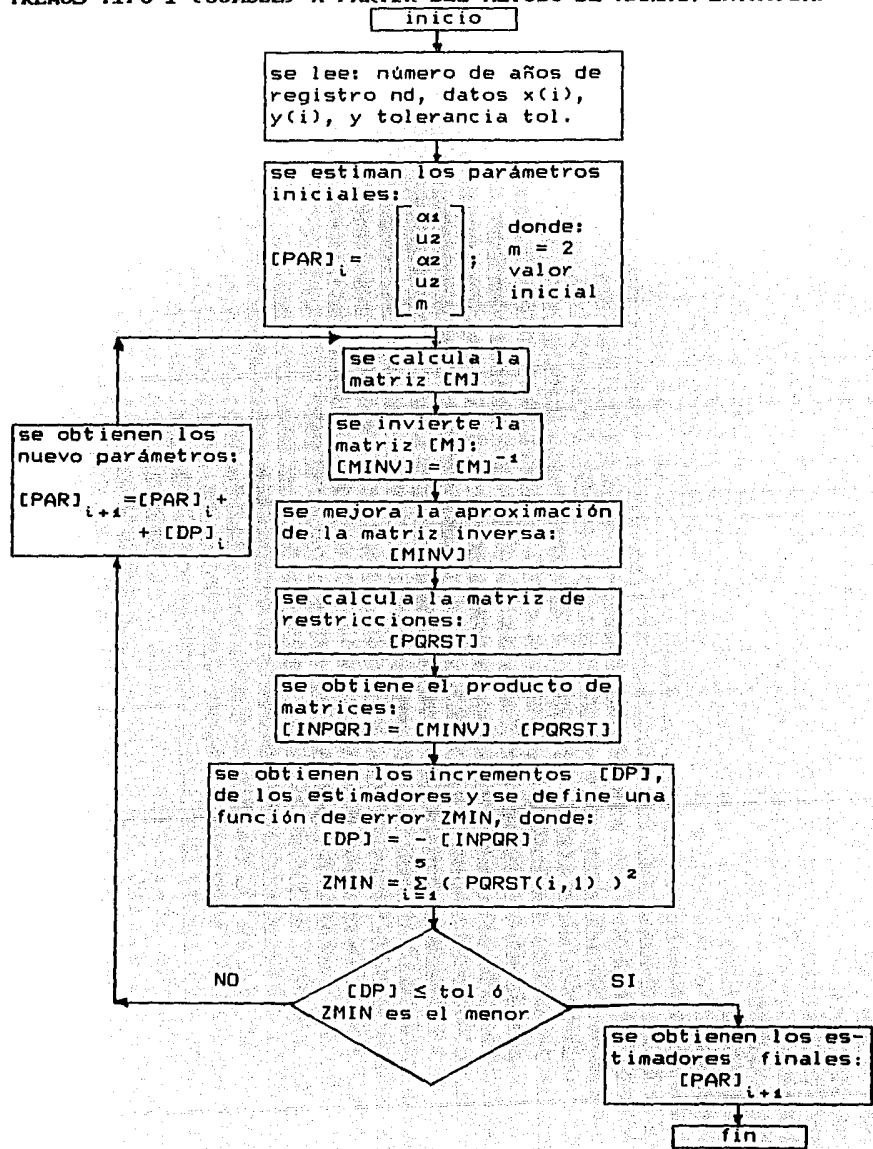
	$\frac{\gamma}{\alpha_1}$	$\frac{1}{\alpha_1}$	0	0	0
	$-\frac{1}{\alpha_1} \cdot \left\{ \frac{3-2\gamma-4\psi(3)}{4m} + \frac{1}{4m^2} + \frac{\gamma-1}{2} \right\}$	$-\frac{1}{\alpha_1} \left\{ \frac{1}{2m} + 0.5 \right\}$	$-\frac{1}{\alpha_2} \cdot \left\{ \frac{3-2\gamma-4\psi(3)}{4m} + \frac{1}{4m^2} + \frac{\gamma-1}{2} \right\}$	$-\frac{1}{\alpha_2} \left\{ \frac{1}{2m} + 0.5 \right\}$	$-\frac{1}{2m^2} \left\{ 1 - \frac{1}{m} \right\}$
M=-N	0	0	$\frac{\gamma}{\alpha_2}$	$\frac{1}{\alpha_2}$	0
	$-\frac{1}{\alpha_1} \left\{ \frac{\gamma m}{2} - \frac{1}{4} \right\}$	$-\frac{m}{2\alpha_1}$	$-\frac{1}{\alpha_2} \left\{ \frac{\gamma m}{2} - \frac{1}{4} \right\}$	$-\frac{m}{2\alpha_2}$	$-\frac{1}{2m}$
	$-\frac{1}{\alpha_1} \left\{ \frac{\gamma-1}{2m} + \frac{1}{4m^2} \right\}$	$-\frac{1}{2\alpha_1 m}$	$-\frac{1}{\alpha_2} \left\{ \frac{\gamma-1}{2m} + \frac{1}{4m^2} \right\}$	$-\frac{1}{2\alpha_2 m}$	-f(m)

donde:

$$f(m) = \frac{1 + \gamma e^{m-1} + \text{Ln}(m-1) \cdot e^{m-1}}{m} + \frac{1 - \gamma e^{m-1} - \text{Ln}(m-1) \cdot e^{m-1}}{m^2} - \frac{1}{2m^3} + \frac{e^{m-1} - m}{m(m-1)} + \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^{k-1}}{k!} + \left[\frac{e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m^2} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k \cdot k!} \right] \quad (3.194)$$

$$(15)$$

Fig. 3.1 UN ALGORITMO PARA ESTIMAR LOS PARAMETROS α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m PARA EL MODELO LOGISTICO BIVARIADO CON MARGINALES DE VALORES EXTREMOS TIPO I (GUMBEL) A PARTIR DEL METODO DE MAXIMA ENTROPIA.



En el Apéndice C se presentan las subrutinas generadas para éste algoritmo, las cuales estan en el Lenguaje de programación Quick-Basic.

En el programa principal (Ver Apéndice C), denominado BEV11-ME.BAS, se asignan valores a algunas constantes que son requeridas para el funcionamiento del programa; así también, se hace la lectura del número de años de registro y los datos de la estaciones No. 1 y No. 2, los cuales se asignan a las variables nd, x(i) y y(i).

En éste mismo cuerpo del programa se hace el llamado a las subrutinas:

PARINI
MATRIZM
APROXINVER
INVERSA
GENPQRST
PRODUCTO
DIFPAR

En la subrutina PARINI, se estiman los parámetros iniciales en forma univariada para cada estación por el método de Máxima Entropía.

En la subrutina MATRIZM, se calculan los elementos de la matriz [M], de acuerdo a lo indicado por la ecuación (3.194), afectándola por un signo negativo.

En la subrutina APROXINVER, se procede a invertir la matriz [M].

En la subrutina INVERSA, se mejora la aproximación, a cuatro cifras significativas, de la matriz inversa [MINV], con el método de la matriz de residuos [R], (Luthe et al., 1981).

En la subrutina GENPQRST, se evalua la matriz que denominaremos como matriz de restricciones [PQRST], de acuerdo a lo indicado por las ecuaciones (3.186 a 3.190).

En la subrutina PRODUCTO, se realiza la mutiplicación de matrices [MINV] por [PQRST], asignando el producto a la matriz [INPQR].

En la subrutina DIFPAR, se asigna a la matriz [DP] los

también en esta subrutina una función de error (ZMIN); la cual se interpretará como la sumatoria de los cuadrados de cada elemento de la matriz de restricciones [PQRST], es decir:

$$ZMIN = \sum_{i=1}^5 (PQRST(i,1))^2$$

donde cada elementos de PQRST(i,1) esta definido por las ecuaciones (3.186 a 3.190).

La intención de proporcionar no el incremento total que genera el método, sino subincrementos parciales, es con la finalidad de que para cada nuevo vector de parámetros estimados [PAR]_i se evalúe la función de error ZMIN_{i+1}, seleccionando el incremento de los estimadores para el caso donde se encuentre un valor mínimo de la función de error que para el estado anterior (i).

El programa finaliza proporcionando los valores de los nuevos estimadores de los parámetros, si los incrementos de estos son menores que la tolerancia especificada ó los nuevos incrementos de los estimadores no generan una reducción del valor de la función ZMIN.

CAPÍTULO CUATRO

EFICIENCIA EN LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

4.1 ASPECTOS GENERALES

Los parámetros de las distribuciones de probabilidad de gastos máximos anuales, en una estación cualquiera, pueden estimarse de varias formas, ya sea empleando los registros históricos en esa estación, de estaciones vecinas o utilizando uno u otro método de estimación. La pregunta que surge es: ¿Cuáles estimados son más confiables?

La confiabilidad del estimador de un parámetro, si el parámetro poblacional es desconocido, es el grado de confianza de que tal estimador sea una representación cercana del parámetro poblacional. La confiabilidad puede cuantificarse a través de varias medidas, como: el sesgo, el error medio cuadrático y la varianza, es decir, utilizando las propiedades estadísticas de los estimadores.

Para propósitos de éste estudio, los índices denominados: sesgo promedio relativo y error medio cuadrático, dados en Wallis y Wood (1985) fueron adoptados aquí; así también, los índices denominados como sesgo, definido en Haan (1982) y eficiencia son considerados.

Con el fin de comparar la eficiencia de los estimadores obtenidos por el Método de Máxima Entropía para el modelo BEV11, se ha tomado como referencia el estudio realizado por Phien (1987), donde se revisan algunos métodos de estimación de parámetros para la distribución de valores extremos tipo I (Gumbel). En ése estudio fueron analizados cuatro métodos de estimación conocidos como: Método de Momentos (MOM), Método de Máxima Verosimilitud (MML), Método de Máxima Entropía (POME), y Método de Momentos de Probabilidad Pesada (PWM).

Phien (1987) realizó un estudio de simulación para evaluar el comportamiento de los anteriores métodos en términos de criterios

comunmente empleados. Utilizó muestras de tamaño n de 30, 40 y 50, donde para cada muestra de tamaño n , una muestra de n variables EVI fué generada, cada una de las cuales se obtuvo con:

$$x = u - \alpha \text{Ln} [- \text{Ln} (U)] \quad (4.1)$$

donde U es un número aleatorio con distribución uniforme en el rango $(0,1)$. Para cada muestra, los diferentes métodos de estimación de parámetros se aplicaron para obtener los diferentes estimadores. Para las N muestras generadas se calcularon el sesgo promedio relativo, el error medio cuadrático (RMSE) y la eficiencia de los estimadores. Phien seleccionó el número de muestras N igual a 3000 debido a que los valores calculados de los índices de comportamiento eran ligeramente cambiantes para cualquier incremento de tamaño N . Los valores poblacionales de los parámetros u y α , empleados en los experimentos de Monte Carlo se estimaron de un registro real de gastos máximos anuales obtenidos por Jowitt (1979, p. 37), los cuales son $u = 179.688$ y $\alpha = 50.088$.

4.2 GENERACION SINTETICA DE MUESTRAS BIVARIADAS

Con el fin de evaluar la eficiencia de los estimadores bivariados de los parámetros por Máxima Entropía del modelo BEV11, se han generado sintéticamente varios grupos de muestras. Para este propósito, la pareja aleatoria bivariada (x_i, y_i) ha sido obtenida siguiendo la metodología sugerida por Buslenko et al., (1966); el cual se explica a continuación:

- 1.- Transforme el número aleatorio R_1 con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ en y_i ; el cual tiene la distribución marginal $F(y)$.
- 2.- Sustituya y_i y un nuevo número aleatorio R_2 , el cual tiene la misma distribución de R_1 , en la relación de la función de distribución condicional, la función de distribución bivariada, y la función de densidad

marginal "y":

$$F(x | y_i) = \frac{1}{f(y_i)} \left. \frac{\partial F(x, y_i)}{\partial y_i} \right|_{x=w} \quad (4.2)$$

donde w es el dominio de la variable de diferenciación.

Ahora, se necesita resolver la ecuación (4.2) para x_i . La ecuación (4.2) para el caso de la distribución BEV11 toma la forma:

$$F(x | y, \alpha_1, \alpha_2, u_1, u_2, m) = \exp \left\{ - \left[e^{-\left(\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right)} + (m-1) \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[e^{-m\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m\left(\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right] \right\} \left[e^{-m\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-\left(\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} \quad (4.3)$$

La inversa de la función de distribución de y , requerida para transformar el número aleatorio uniformemente distribuido tiene la forma:

$$y = u_2 - \alpha_2 \ln(-\ln F(y)) \quad (4.4)$$

Como puede observarse, la ecuación (4.3) no tiene solución explícita. Por lo que, el esquema numérico llamado Método de Regula Falsi ha sido empleado para resolver la ecuación (4.3). El método es descrito en Carnahan et al. (1969).

Así, la secuencia de parejas de números (x_i, y_i) , tiene la función de distribución de probabilidad bivariada, BEV11. Una vez que la secuencia de parejas de números (x_i, y_i) ha sido obtenida, se estiman los parámetros univariados por máxima entropía para emplearlos como valores iniciales en el proceso de estimación bivariada de máxima entropía. El valor inicial del parámetro de asociación ha sido considerado como $m = 2$, de acuerdo a lo expuesto por Raynal (1985). Posteriormente, una vez que los estimadores bivariados por máxima entropía fueron obtenidos, estos son comparados con los estimados por Phien (1987).

Como se ha mencionado anteriormente, con el fin de comparar la eficiencia de los estimadores de la distribución BEV11, por Máxima Entropía, se han considerado como valores poblacionales de los parámetros u_1 y α los mismos que los analizados de manera univariada por Phien (1987), y los valores de u_2 , α_2 y m han sido propuestos como 150.283, 539.064 y 2.0 respectivamente.

Se utilizó el arreglo muestral presentado en la Tabla 4.1, analizando tres opciones que dependen del tamaño de la muestra y su longitud.

TABLA 4.1 COMBINACIONES PROPUESTAS PARA LAS MUESTRAS EN LA FASE DE SIMULACION

CASO :	A	B	C
MUESTRAS GENERADAS (NM)	3000	3000	3000
TAMAÑO DE MUESTRAS (TM)	30	40	50

4.3 INDICES DE COMPORTAMIENTO

Los índices de comportamiento dados en Wallis y Wood (1985) fueron adoptados en éste estudio. Estos son definidos típicamente para el parámetro θ y puede calcularse por experimentos de simulación:

sesgo promedio (relativo):

$$\text{sesgopr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{rel}(\theta) \quad (4.5)$$

error medio cuadrático

$$\text{RMSE} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\text{rel}(\theta)]^2 \right\}^{1/2} \quad (4.6)$$

donde:

N : es el número de réplicas.

$\text{rel}(\theta)$: es el error relativo en la estimación.

$$\text{rel}(\theta) = (\theta - \hat{\theta}) / \theta$$

θ : es el parámetro.

$\hat{\theta}$: es el estimador.

Otro índice propuesto en el análisis es el denominado como sesgo, el cual es definido en Haan (1982) como:

sesgo

$$\text{sesgo} = E[\theta] - \hat{\theta} \quad (4.7)$$

donde $E[\cdot]$ es el operador esperanza.

Estos índices son empleados para los parámetros α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m .

Para que un método de estimación sea más aproximado, éstos índices deberán tener valores mínimos y cuando varios métodos son comparados, el que tenga los valores menores deberá considerarse como el mejor o más eficiente.

Comparación de eficiencias

La eficiencia relativa del Método I comparada con el Método II en la estimación del parámetro θ de la misma muestra, puede definirse como:

$$\text{eff} = \text{Var}(\hat{\theta} | \text{Método II}) / \text{Var}(\hat{\theta} | \text{Método I}) \quad (4.8)$$

Obviamente, cuando la eficiencia es menor que uno, el Método I es menos eficiente que el Método II en la estimación del parámetro θ . En éste estudio, se realiza la comparación con el Método MML, debido a que éste produce estimadores con varianza asintótica mínima. Consecuentemente, la eficiencia puede evaluarse convenientemente empleando la fórmula aproximada de las varianzas de los estimadores.

De acuerdo a Landwehr et al (1979), Fiorentino y Gabriele (1984),

la eficiencia relativa entre dos métodos de estimación para el parámetro θ puede expresarse en términos del error medio cuadrático (MSE) como:

$$\text{eff}' = \text{MSE}(\hat{\theta} | \text{Método II}) / \text{MSE}(\hat{\theta} | \text{Método I}) \quad (4.9)$$

donde $\text{MSE} = \text{RMSE}^2$. Por lo que puede ser fácilmente calculado en experimentos de Monte Carlo para dos métodos cualesquiera.

En la Tabla 4.2 se muestran los resultados del proceso de simulación realizado por Phien (1987) y en la Tabla 4.3 se presentan los obtenidos en éste estudio.

Análisis de Resultados

A partir de los resultados presentados en la Tabla 4.3, puede expresarse lo siguiente:

Como puede observarse, conforme se incrementa el tamaño de la muestra existe un decremento del valor de los índices de comportamiento de los estimadores. Con relación al sesgo promedio relativo, los estimadores bivariados por Máxima Entropía presentan un mejor comportamiento que los obtenidos de manera univariada por los Métodos de Momentos, Máxima Verosimilitud y Máxima Entropía. Si se interesa en estimadores no sesgados el Método PWM sigue siendo la mejor elección, siguiendo en segundo término los estimados bivariados por POME. Sin embargo, si se interesa en tener valores mínimos de RMSE, entonces el Método MML es el más apropiado, pudiéndose seleccionar también los estimadores bivariados por POME. Con respecto al sesgo promedio relativo y al RMSE, el método POME univariado tiene al menos el mismo comportamiento que el MML; como una alternativa, podría ser seleccionado también el método POME univariado y bivariado en lugar del método MML. Adicionalmente, como puede observarse, la eficiencia del método POME bivariado presenta un adecuado comportamiento con relación a los demás métodos en competencia. Por lo anterior, es posible aseverar que el método POME bivariado

ofrece una alternativa en la estimación conjunta de los parámetros de cada distribución marginal del tipo EVI.

TABLA 4.2 RESULTADOS DEL PROCESO DE SIMULACION DE LOS ESTIMADORES OBTENIDOS EN FORMA UNIVARIADA

índice (%)	α				u			
	MOM	MML	POME	PWM	MOM	MML	POME	PWM
n=30								
sesgopr	2.6	2.4	2.0	-0.3	-0.6	-0.4	-0.4	0.0
RMSE	17.2	14.2	14.7	16.3	5.5	5.4	5.4	5.4
eff'	68.2	100.0	93.3	76.8	96.3	100.0	99.9	99.8
n=40								
sesgopr	2.2	2.0	1.7	-0.1	-0.3	-0.3	-0.3	0.0
RMSE	15.6	12.4	12.8	14.4	4.8	4.7	4.7	4.7
eff'	63.1	100.0	93.8	74.2	95.9	100.0	99.8	99.8
n=50								
sesgopr	1.8	1.6	1.3	0.0	-0.3	-0.2	-0.2	0.0
RMSE	14.1	11.1	11.4	12.6	4.3	4.2	4.2	4.2
eff'	61.9	100.0	94.7	75.1	95.5	100.0	99.9	99.9

Fuente: Tabla 4, pag. 202, Phien (1987).

TABLA 4.3 RESULTADOS DEL PROCESO DE SIMULACION DE LOS ESTIMADORES POR MAXIMA ENTROPIA OBTENIDOS EN FORMA BIVARIADA

índice	α_1	u_1	α_2	u_2	m
	P O M E				
n=30					
sesgo	-0.94	0.62	1.66	-0.33	0.03
sesgopr (%)	1.9	-0.3	-1.1	0.1	-1.3
RMSE (%)	15.7	5.5	22.5	6.0	11.3
eff' (%)	81.8	96.4	---	---	---
n=40					
sesgo	-0.80	0.73	1.51	-0.33	0.01
sesgopr (%)	1.6	-0.4	-1.0	0.1	-0.7
RMSE (%)	14.4	4.8	19.9	5.3	9.3
eff' (%)	74.2	95.2	---	---	---
n=50					
sesgo	-0.72	0.43	1.38	-0.24	0.22
sesgopr (%)	1.4	-0.2	-0.9	0.0	-1.1
RMSE (%)	12.3	4.3	16.6	4.6	8.5
eff' (%)	81.4	95.4	---	---	---

CAPÍTULO CINCO APLICACIONES

5.1 ASPECTOS GENERALES

El objetivo principal en éste capítulo es la aplicación de la Distribución de Valores Extremos Bivariada Tipo II o Distribución Bigumbel, BEVII, al análisis de frecuencias de gastos máximos anuales en dos regiones de la República Mexicana.

La región A, Figura 5.1, está formada por 21 estaciones, las cuales están localizadas en las cuencas de los ríos El Fuerte, Sinaloa, Culiacán, San Lorenzo, Elota y Piaxtla, que se ubican en los estados de Chihuahua y Sinaloa.

La región B, Figura 5.2, está formada por 28 estaciones que se ubican en la llamada cuenca del Papaloapan. Estas estaciones se encuentran localizadas en los estados de Oaxaca, Puebla y Veracruz.

Las Tablas 5.1 y 5.2 indican los nombres, localización, áreas y periodos de registro de las estaciones ubicadas en las regiones A y B.

Cabe señalar que, de las dos regiones en estudio, sólo se han seleccionado aquellas estaciones que presentan mejor ajuste a la distribución univariada Gumbel, como aproximación inicial, y a la aproximación trivariada con marginal Gumbel, de acuerdo al análisis realizado por Escalante (1991), para lo que se recomienda ver las Tablas 5.3 y 5.4.

5.2 PROCESO DE ANALISIS

Con el fin de establecer un criterio de comparación, para las estaciones seleccionadas, se estiman los parámetros de la distribución de valores extremos Tipo I (Gumbel) para el caso univariado por los métodos de Momentos, Máxima Verosimilitud y

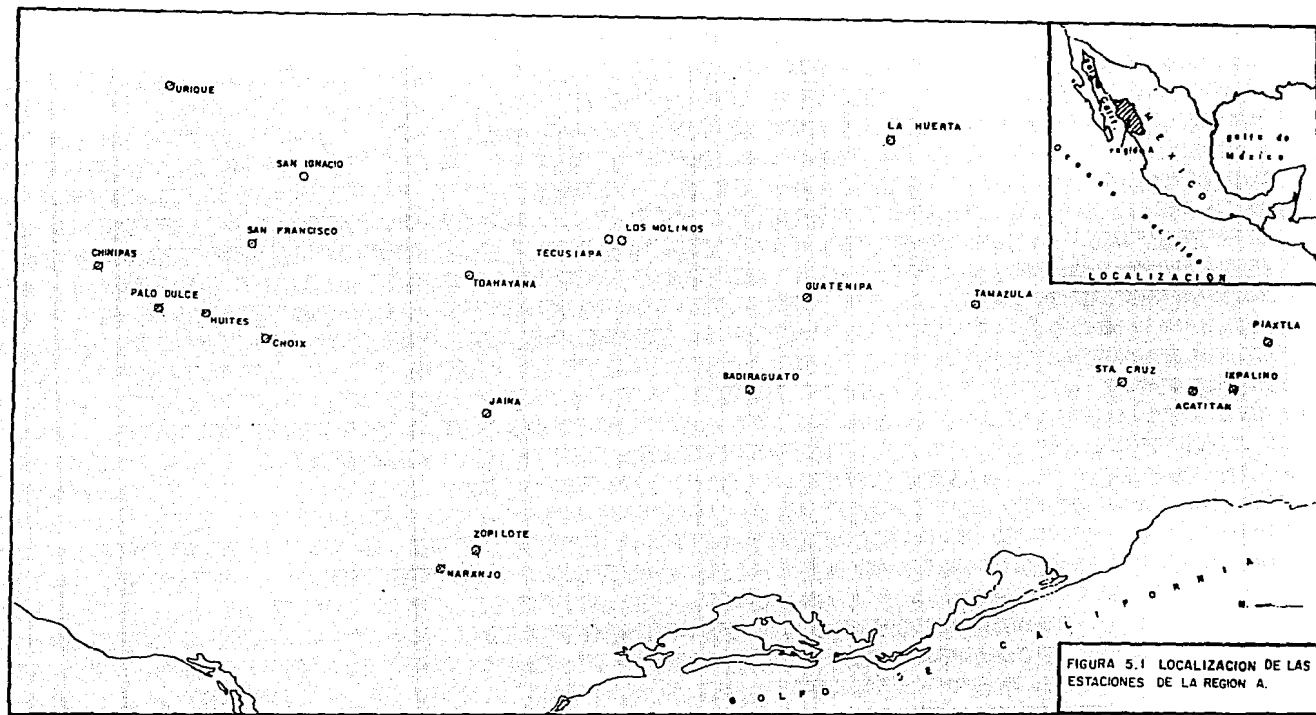


FIGURA 5.1 LOCALIZACION DE LAS ESTACIONES DE LA REGION A.

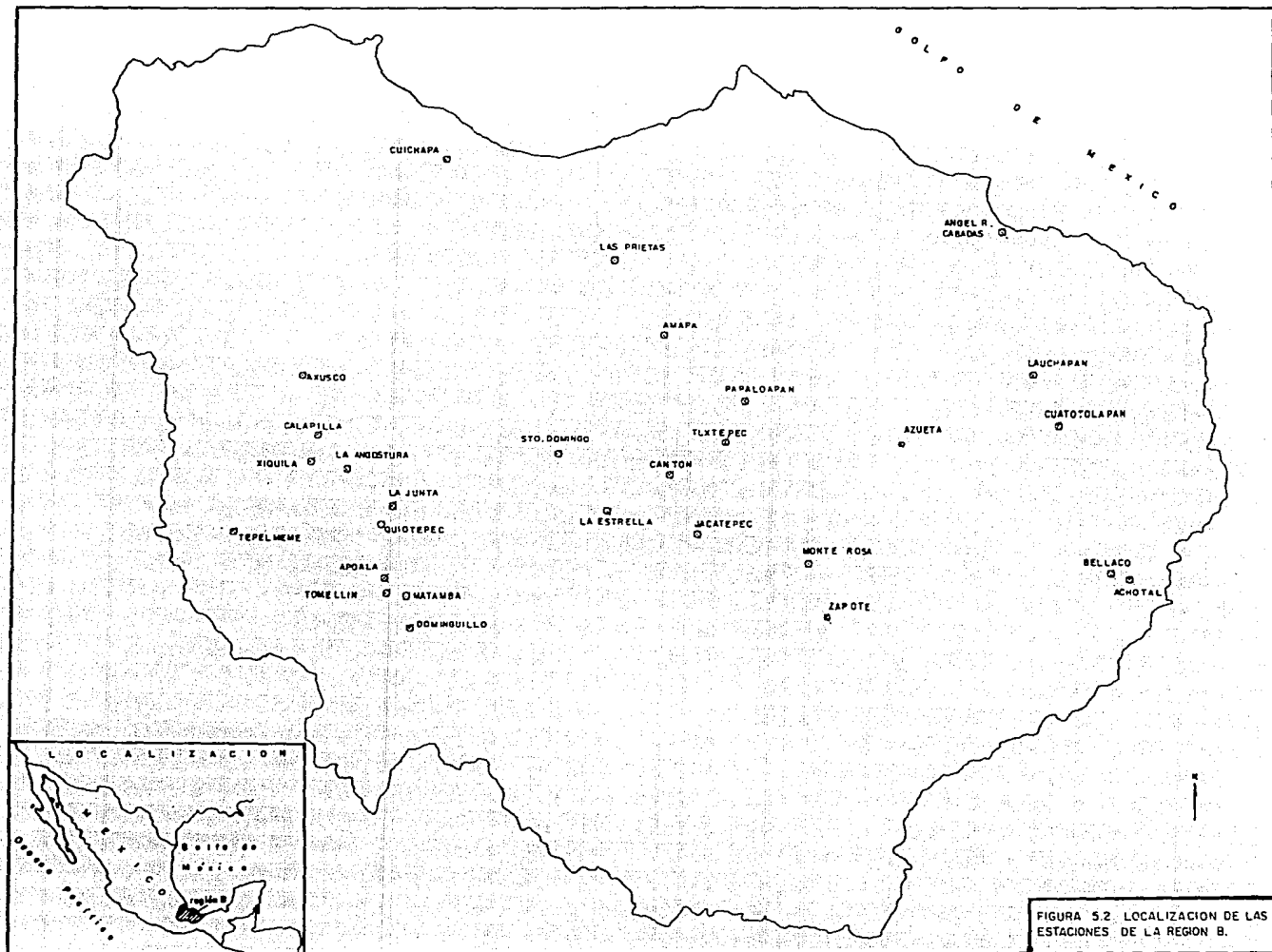


FIGURA 5.2. LOCALIZACION DE LAS ESTACIONES DE LA REGION B.

TABLA 5.1 DESCRIPCION Y CARACTERISTICAS DE LAS ESTACIONES
EN LA REGION A

No	NOMBRE DE LA ESTACION	UBICACION ESTADO	AREA (Km2)	ANOS DE REGISTRO	PERIODO DE REGISTRO
1	ACATITAN	SINALOA	1884	26	1955 - 1980
2	BADIRAGUATO	SINALOA	1018	29	1959 - 1980
3	CHINIPAS	CHIHUAHUA	5098	15	1966 - 1980
4	CHOIX	SINALOA	1403	25	1956 - 1980
5	GUATENIPA	SINALOA	8252	16	1965 - 1980
6	HUITES	SINALOA	26020	39	1942 - 1980
7	IXPALINO	SINALOA	6166	28	1953 - 1980
8	JAINA	SINALOA	8179	39	1942 - 1980
9	LA HUERTA	SINALOA	6149	12	1969 - 1980
10	LOS MOLINOS	SINALOA	3763	10	1961 - 1970
11	NARANJO	SINALOA	2064	42	1939 - 1980
12	PALO DULCE	CHIHUAHUA	6323	23	1958 - 1973
13	PIAXTLA	SINALOA	5307	16	1958 - 1973
14	SAN FRANCISCO	SINALOA	17531	32	1942 - 1980
15	SAN IGNACIO	CHIHUAHUA	12166	14	1967 - 1980
16	SANTA CRUZ	SINALOA	8919	37	1944 - 1980
17	TAMAZULA	SINALOA	2241	18	1963 - 1980
18	TECUSIAPA	SINALOA	3763	15	1959 - 1973
19	TOHAYANA	SINALOA	5281	23	1958 - 1980
20	URIQUE II	CHIHUAHUA	4000	13	1968 - 1980
21	ZOPILOTE	SINALOA	666	42	1939 - 1980

Fuente: C. Escalante S., Tesis Doctoral, "FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD TRIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS Y SUS APLICACIONES EN HIDROLOGIA", 1991.

TABLA 5.2 DESCRIPCION Y CARACTERISTICAS DE LAS ESTACIONES
EN LA REGION B

No	NOMBRE DE LA ESTACION	UBICACION ESTADO	AREA (Km2)	AÑOS DE REGISTRO	PERIODO DE REGISTRO
1	ACHOTAL	VERACRUZ	2333	22	1949 - 1970
2	AMAPA	VERACRUZ	468	12	1959 - 1970
3	ANGEL R. CABADAS	VERACRUZ	125	14	1957 - 1970
4	APAOLA	OAXACA	341	14	1957 - 1970
5	AXUSCO	PUEBLA	788	12	1959 - 1970
6	AZUETA	OAXACA	4656	22	1949 - 1970
7	BELLACO	VERACRUZ	2917	22	1949 - 1970
8	CALAPILLA	OAXACA	987	16	1955 - 1970
9	CANTON	OAXACA	14038	22	1949 - 1970
10	CUATOTOLAPAN	VERACRUZ	7090	22	1949 - 1970
11	CUICHAPA	VERACRUZ	1732	22	1949 - 1970
12	DOMINGUILLO	OAXACA	695	15	1956 - 1970
13	JACATEPEC	OAXACA	1117	18	1953 - 1970
14	LA ANGOSTURA	OAXACA	6574	16	1955 - 1970
15	LA ESTRELLA	OAXACA	774	17	1954 - 1970
16	LA JUNTA	OAXACA	11878	17	1954 - 1970
17	LAS PRIETAS	VERACRUZ	216	22	1949 - 1970
18	LAUCHAPAN	VERACRUZ	1478	22	1949 - 1970
19	MATANBA	OAXACA	2143	14	1957 - 1970
20	MONTE ROSA	OAXACA	2870	14	1957 - 1970
21	PAPALOAPAN	VERACRUZ	21236	22	1949 - 1970
22	QUIOTEPEC	OAXACA	4832	22	1949 - 1970
23	SANTO DOMINGO	OAXACA	12681	17	1954 - 1970
24	TEPELMEME	OAXACA	167	15	1956 - 1970
25	TOMELLIN	OAXACA	780	12	1959 - 1970
26	TUXTEPEC	OAXACA	15719	10	1961 - 1970
27	XIQUILA	OAXACA	1078	16	1955 - 1970
28	ZAPOTE	OAXACA	633	15	1956 - 1970

Fuente: C. Escalante S., Tesis Doctoral, "FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD TRIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS Y SUS APLICACIONES EN HIDROLOGIA", 1991.

TABLA 5.3 ERROR ESTANDAR DE LA MEJOR DISTRIBUCION DE CADA APROXIMACION UNIVARIADA, BIVARIADA Y TRIVARIADA, PARA ELEGIR LA DISTRIBUCION FINAL DE VALORES EXTREMOS EN LAS ESTACIONES DE LA REGION A.

No	NOMBRE DE LA ESTACION	DISTRIBUCION UNIVARIADA	DISTRIBUCION BIVARIADA		DISTRIBUCION TRIVARIADA		DISTRIBUCION SELECCIONADA	
			E. E.	E. E.	E. E.	E. E.		
1	ACATITAN	GVE	244.4	GVE (B)	295.5	VET222	253.9	Univariada GVE
2	BADIRAGUATO	G	660.9	G (B)	736.3	VET112 (GVE)	550.8	VET112 (GVE)
3	CHIMPAS	G	180.1	VEB11	142.5	VET112 (G)	134.8	VET112 (G)
4	CHOIX	GVE	87.7	VEB22(GVE)	79.4	VET222	58.8	VET222
5	GUATENIPA	G	468.2	GVE (B)	1383.2	VET112 (G)	378.9	VET112 (G)
6	HUITES	GVE	1020.4	GVE (B)	1127.9	VET122 (GVE)	831.9	VET122 (GVE)
7	XPALINO	GVE	537.9	VEB11	705.9	VET222	393	VET222
8	JAINA	GVE	420.3	VEB12(GVE)	633.4	VET222	531.3	Univariada GVE
9	LA HUERTA	GVE	192.3	VEB22	277.6	VET112 (GVE)	192.9	Univariada GVE
10	LOS MOLINOS	GVE	17.3	GVE (B)	12.4	VET222	12.1	VET222
11	NARANJO	GVE	114.4	GVE (B)	164.6	VET222	104.7	VET222
12	PALO DULCE	GVE	635.9	VEB22	310.9	VET222	267.2	VET222
13	PIAXTLA	GVB	693.3	VEB22	1072.2	VET222	871.9	Univariada GVE
14	SAN FRANCISCO	GVE	350.8	VEB11	746.9	VET222	401.5	Univariada GVE
15	SAN IGNACIO	G	452.7	GVE (B)	834.7	VET122 (G)	328.8	VET122 (G)
16	SANTA CRUZ	GVE	497.2	GVE (B)	359.6	VET222	259.6	VET222
17	TAMAZULA	GVE	69.2	G (B)	82.4	VET222	40.5	VET222
18	TECUSIAPA	GVE	231.8	VEB12 (GVE)	222.0	VET122 (GVE)	212.1	VET122 (GVE)
19	TOHAYANA	G	128.6	VEB12 (G)	104.4	VET122 (G)	120.9	VEB12 (G)
20	URIQUE II	G	73.9	VEB22	85.9	VET222	70.3	VET222
21	ZOPILETE	G	49.7	GVE (B)	72.2	VET112 (G)	37.2	VET112 (G)

G= GUMBEL GVE= GENERAL DE VALORES EXTREMOS E. E.= ERROR ESTANDAR

(G) y (GVE) INDICAN QUE LAS ESTACION TIENE DISTRIBUCION MARGINAL GUMBEL o GVE EN LA FUNCION BIVARIADA o TRIVARIADA.

(B) DEL ANALISIS BIVARIADO (RAYNAL, 1985).

Fuente: C. Escalante S., Tesis Doctoral, "FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD TRIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS Y SUS APLICACIONES EN HIDROLOGIA", 1991.

TABLA 5.4 ERROR ESTANDAR DE LA MEJOR DISTRIBUCION UNIVARIADA Y TRIVARIADA PARA
ELEGIR LA DISTRIBUCION FINAL DE VALORES EXTREMOS EN LAS ESTACIONES DE LA REGION B

No	NOMBRE DE LA ESTACION	DISTRIBUCION UNIVARIADA	E. E.	DISTRIBUCION TRIVARIADA	E. E.	DISTRIBUCION SRLECCIONADA
1	ACHIOTAL	G	34.83	VET112 (G)	43.63	Univariada GVE
2	AMAPA	GVE	30.25	VET222 (GVE)	20.35	VET222
3	ANGEL R. CABADAS	GVE	42.39	VET112 (G)	34.02	VET112 (G)
4	APAOLA	GVE	85.81	VET222 (GVE)	88.03	Univariada GVE
5	AXUSCO	GVE	12.65	VET112 (G)	10.55	VET112 (G)
6	AZUETA	G	75.79	VET112 (G)	60.32	VET112 (G)
7	BELLACO	GVE	189.28	VET112 (G)	181.68	VET112 (G)
8	CALAPILLA	GVE	56.57	VET122 (GVE)	62.03	Univariada GVE
9	CANTON	G	265.63	VET112 (GVE)	233.53	VET112 (GVE)
10	CUATOTOLAPAN	GVE	328.16	VET222	227.58	VET222
11	CUICHAPA	GVE	32.27	VET122 (GVE)	11.97	VET122 (GVE)
12	DOMINGUILLO	GVE	10.99	VET122 (GVE)	7.49	VET122 (GVE)
13	JACATEPEC	GVE	104.25	VET122 (GVE)	73.54	VET122 (GVE)
14	LA ANGOSTURA	G	26.23	VET122 (GVE)	23.47	VET122 (GVE)
15	LA ESTRELLA	G	93.43	VET112 (G)	95.42	VET112 (G)
16	LA JUNTA	GVE	94.11	VET122 (GVE)	80.54	VET122 (GVE)
17	LAS PRIETAS	GVE	27.47	VET122 (GVE)	26.17	VET122 (GVE)
18	LAUCHAPAN	G	70.63	VET222	54.82	VET222
19	MATAMBA	GVE	78.51	VET222	105.93	Univariada GVE
20	MONTE ROSA	GVE	174.05	VET222	185.07	Univariada GVE
21	PAPALOAPAN	GVE	305.62	VET122 (GVE)	258.14	VET122 (GVE)
22	QUIOTEPEC	GVE	86.90	VET222	78.05	VET222
23	SANTO DOMINGO	GVE	117.05	VET122 (GVE)	127.41	Univariada GVE
24	TEPELMEHE	GVE	20.71	VET122 (GVE)	14.18	VET122 (GVE)
25	TOMELLIN	G	24.36	VET112 (G)	16.00	VET112 (G)
26	TUXTEPEC	GVE	295.19	VET112 (G)	230.77	VET112 (G)
27	XIQUILA	G	31.49	VET111	28.45	VET111
28	ZAPOTE	GVE	63.88	VET222	68.27	Univariada GVE

G= GUMBEL GVE= GENERAL DE VALORES EXTREMOS E. E.= ERROR ESTANDAR
(G) y (GVE) INDICAN QUE LAS ESTACION TIENE DISTRIBUCION MARGINAL GUMBEL o GVE
EN LA FUNCION BIVARIADA o TRIVARIADA.

Fuente: C. Escalante S., Tesis Doctoral, "FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD TRIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS Y SUS APLICACIONES EN HIDROLOGIA", 1991.

Máxima Entropía; y para la distribución de valores extremos bivariada BEVII, por el método de Máxima Entropía, de acuerdo al algoritmo desarrollado en el capítulo tres.

El proceso de análisis ha sido el siguiente:

1. A partir de las Tablas 5.3 y 5.4 se seleccionaron las estaciones básicas y se constituyeron los grupos (Tablas 5.5 y 5.6) para análisis bivariado.

2. Se procedió a estimar los parámetros para la distribución Gumbel (univariada) por los Métodos de Momentos, Máxima Verosimilitud, y Máxima Entropía de acuerdo a Phien (1987); así como sus correspondientes errores estándar.

3. Para los grupos formados, fueron estimados los parámetros del modelo BEVII, por el Método de Máxima Entropía con el algoritmo desarrollado en el capítulo tres; así como sus respectivos errores estándar.

4. A continuación se procedió a comparar los resultados obtenidos mediante la distribución bivariada BEVII resuelta por POME con aquellos proporcionados por la distribución univariada con los diferentes métodos de estimación en estudio.

En las Tablas 5.5 y 5.6 se presentan las estaciones seleccionadas y los grupos de estaciones formados para el análisis bivariado de ambas regiones bajo estudio.

TABLA 5.5 ESTACIONES SELECCIONADAS Y GRUPOS FORMADOS PARA ANALISIS BIVARIADO DE LA REGION A

ESTACION	GRUPO FORMADO	C. DE CORRELACION
1. BADIRAGUATO	BADIRAGUATO-GUATENIPA	0.48
2. CHINIPAS	CHINIPAS-URIQUE II	0.58
3. GUATENIPA	SAN IGNACIO-URIQUE	0.60
4. SAN IGNACIO	TOAHAYANA-ZOPILOTE	0.11
5. TOAHAYANA		
6. URIQUE II		
7. ZOPILOTE		

TABLA 5.6 ESTACIONES SELECCIONADAS Y GRUPOS FORMADOS PARA ANALISIS BIVARIADO DE LA REGION B

ESTACION	GRUPO FORMADO	C. DE CORRELACION
1. ACHOTAL	ACHOTAL-BELLACO	0.26
2. ANGEL R. CABADAS	APAOLA-DOMINGUILLO	0.52
3. APAOLA	APAOLA-MATAMBA	0.65
4. AXUSCO	ANGEL R. CABADAS-LAUCHAPAN	0.72
5. AZUETA	AXUSCO-LA ANGOSTURA	-0.04
6. BELLACO	AZUETA-PAPALOAPAN	0.64
7. CANTON	AZUETA-TUXTEPEC	0.66
8. LA ANGOSTURA	LA ESTRELLA-TUXTEPEC	0.30
9. LA ESTRELLA	TOMELLIN-APAOLA	0.19
10. LAUCHAPAN	XIQUILA-LA ANGOSTURA	0.74
11. TOMELLIN	CANTON-LA ESTRELLA	0.60
12. TUXTEPEC	CANTON-SANTO DOMINGO	0.80
13. XIQUILA	PAPALOAPAN-JACATEPEC	0.51
	TUXTEPEC-JACATEPEC	0.50
	JACATEPEC-LA ESTRELLA	0.81
	LA ESTRELLA-SANTO DOMINGO	0.69

Se hace notar que los grupos así formados constituyen parte de las triadas establecidas para el análisis trivariado, de acuerdo a Escalante (1991). Así también, se señala que, fueron consideradas otras estaciones para complementar los grupos de análisis. El análisis realizado en éste estudio fue hecho con periodos de registro comunes de los grupos de estaciones formados; de la misma forma para el análisis univariado, con el fin de tener las mismas condiciones en el proceso de comparación.

En las Tablas 5.7 y 5.8 se muestran los parámetros estimados por los métodos POME bivariado; Momentos, Máxima Verosimilitud y POME univariado de las estaciones seleccionadas de la región A y B. Los errores estándar (E.E.) de las aproximaciones bivariada y univariadas de los modelos ajustados son indicados en la Tablas 5.9 y 5.10.

La selección por grupo del mejor método de estimación de la aproximación bivariada y univariadas se puede observar en las Tablas 5.11 y 5.12.

Y por último, los parámetros finales y la elección de la mejor aproximación de las estaciones analizadas de las regiones A y B son presentadas en las Tablas 5.13 y 5.14.

TABLA 5.7 PARAMETROS ESTIMADOS POR LOS METODOS POME BIVARIADO, MOM, MML Y POME UNIVARIADOS, DE LAS ESTACIONES SELECCIONADAS DE LA REGION A.

GPO.	ESTACION	N (AÑOS)	POME BIVARIADO			A.L.F.A (UNIVARIADO)			M.U (UNIVARIADO)		
			ALFA	MU	m	MOM	MML	POME	MOM	MML	POME
			1	BADRAGUATO GUATENIPA	17	163.5409 1269.3951	340.7460 1137.5304	1.5127	177.5261 1127.1345	181.4025 1020.6790	179.2428 1166.4987
2	CHINIPAS URIQUE	13	479.1153 115.2022	743.2997 218.7365	1.7784	459.9454 125.4925	445.4385 121.3807	456.5000 120.4298	754.2815 212.7945	751.9234 216.1903	756.2703 215.7168
3	SAN IGNACIO URIQUE	13	641.3261 123.1046	1264.4586 214.1888	1.3357	766.3859 125.4925	598.3701 121.3807	659.6957 120.3697	1191.8608 212.7945	1234.0593 216.1903	1253.4441 215.2515
4	TOAHAYANA ZOPHOTE	23	454.3491 213.0180	712.8725 277.3060	1.1054	452.3831 207.8228	450.7801 211.6164	457.9154 211.3410	713.9644 280.3023	707.8937 278.3882	710.7711 278.2715

TABLA 5.8 PARAMETROS ESTIMADOS POR LOS METODOS POME BIVARIADO, MOM, MML Y POME UNIVARIADOS, DE LAS ESTACIONES SELECCIONADAS DE LA REGION B.

GPO	ESTACION	N (AÑOS)	POME BIVARIADO			A.L.F.A (UNIVARIADO)			M.U (UNIVARIADO)		
			ALFA	MU	m	MOM	MML	POME	MOM	MML	POME
			1	ACTIOTAL BELLACO	22	183.9615 168.4420	424.3450 554.6381	1.3591	145.0648 245.9130	211.3769 143.8802	189.4180 164.3837
2	APAOLA DIMINGUILLO	14	74.5257 24.2807	52.8496 35.9183	1.1297	104.9477 37.4972	57.2019 23.4258	68.7802 27.3523	35.0654 28.2846	53.2538 33.1156	55.9419 34.1404
3	APAOLA MATAMBIA	14	73.7532 162.1281	53.0721 254.3748	1.8869	104.9477 196.7147	57.2019 161.3627	68.7802 174.3570	35.0654 234.3818	53.2538 242.9342	55.9419 247.2870
4	ANGEL R. C. LAUCHAPAN	14	91.1964 131.0041	148.1658 284.0309	2.0985	99.0133 124.2525	92.5167 127.1806	94.0081 127.4739	143.6337 287.9223	145.9227 285.9398	146.5280 286.0630
5	AXUSCO LA ANGOSTURA	12	24.9548 91.8484	52.5126 208.4112	1.0453	28.0444 85.1993	24.9683 89.0980	26.0531 88.3480	50.7290 212.2383	51.4753 210.7463	51.8784 210.4208
6	AZUETA PAPALOAPAN	22	162.2772 1044.0835	835.6943 3448.9795	1.5678	172.2686 1033.4763	153.2757 966.1116	162.1673 1051.8385	829.9275 3455.1885	832.5811 3464.8733	835.7581 3444.5896
7	AZUETA TUXTEPEC	10	159.1274 468.2652	823.7691 2995.3413	1.7930	194.4076 525.9728	144.4737 422.8769	163.7646 457.1774	803.3849 2961.8003	815.4435 2990.0542	821.0725 3001.5100
8	LA ESTRELLA TUXTEPEC	10	222.1165 486.2466	1145.8156 2985.3220	1.3653	218.9855 525.9728	244.4134 422.8776	235.2581 457.1776	1147.8982 2961.8003	1142.8712 2990.0542	1138.5054 3001.5100
9	TOMELLIN APAOLA	12	72.9818 31.8717	108.2025 41.7712	1.2168	68.8973 33.1012	68.7052 33.0715	69.5343 33.5490	110.5647 41.0602	109.8589 40.6091	110.1970 40.8016
10	XIQUILA LA ANGOSTURA	16	103.0648 89.1816	229.0686 213.9565	2.0411	100.8450 86.9731	102.2431 92.0722	100.7646 91.2024	230.5532 215.2353	231.0542 213.1726	230.3996 212.7940
11	CANTON LA ESTRELLA	17	595.5617 287.9904	2019.7968 1174.5410	1.9759	697.5685 291.8152	562.3197 284.5258	598.7242 286.4496	1960.8818 1172.3243	2005.2697 1174.6250	2017.9364 1175.4215
12	CANTON STO. DOMINGO	17	609.3602 289.5342	2011.5800 724.1695	2.0687	697.5685 312.2084	562.3197 291.3015	598.7242 294.8475	1960.8818 711.0237	2005.2697 716.0735	2017.9364 721.0447
13	PAPALOAPAN JACATEPEC	18	841.9725 390.3620	3482.1899 1250.4912	1.4652	988.4019 385.1989	852.1235 351.9526	898.4136 366.6475	3396.8679 1253.4349	3432.1528 1258.6500	3448.8103 1264.1431
14	TUXTEPEC JACATEPEC	10	448.3244 279.5088	3006.7415 1159.3315	1.9490	525.9728 287.8798	422.8769 254.7010	457.1775 274.3294	2961.8003 1154.5313	2990.0542 1158.6945	3001.5100 1162.3528
15	JACATEPEC LA ESTRELLA	17	315.9537 297.5382	1239.3207 1169.0020	2.2716	351.5457 291.8152	316.3579 284.5258	329.5102 286.4495	1218.7294 1172.3243	1226.5311 1174.6250	1231.4486 1175.4216
16	LA ESTRELLA STO. DOMINGO	17	282.4017 298.7785	1177.7345 718.7322	1.9836	291.8152 312.2084	284.5258 281.3033	286.4495 294.8475	1172.3243 711.0237	1174.6250 716.0737	1175.4215 721.0447

NOTA: N, Es el periodo común de registro.

TABLA 5.9 ERRORES ESTANDAR (E.E.) DE LOS MODELOS BIVARIADO Y UNIVARIADOS AJUSTADOS, DE LAS ESTACIONES SELECCIONADAS DE LA REGION A.

GPO	ESTACION	N (AÑOS)	BIVARIADO	UNIVARIADOS		
			POME	MOM	MML	POME
1	BADRAGUATO	17	70.3484	60.7697	58.1570	59.7676
	GUATENIPA		323.6880	382.2672	468.2389	360.3122
2	CHINIPAS	13	159.3915	170.8000	183.0990	173.0332
	URIQUE		76.1149	72.8811	73.8568	74.2797
3	SAN IGNACIO	13	427.7003	355.3909	468.9879	415.1301
	URIQUE		73.4906	72.8811	73.8568	74.2986
4	TOAHAYANA	23	124.7604	126.0356	128.6210	122.5408
	ZOPILOTE		44.3849	48.4992	45.3891	45.6711

TABLA 5.10 ERRORES ESTANDAR (E.E.) DE LOS MODELOS BIVARIADO Y UNIVARIADOS AJUSTADOS, DE LAS ESTACIONES SELECCIONADAS DE LA REGION B.

GPO	ESTACION	N (AÑOS)	BIVARIADO	UNIVARIADOS		
			POME	MOM	MML	POME
1	ACHIOTAL	22	71.3949	67.1438	89.2810	74.0698
	BELLACO		203.1245	191.0224	215.8314	204.7715
2	APAOLA	14	89.9527	84.8266	98.8754	92.2452
	DIMINGUILLO		30.0460	24.9429	30.9842	28.2904
3	APAOLA	14	90.2402	84.8266	98.8754	92.2452
	MATAMBA		103.2589	79.6983	106.0875	93.8737
4	ANGEL R. C.	14	43.4538	38.4341	42.8074	41.5182
	LAUCHAPAN		39.8716	43.8639	42.0912	41.8451
5	AXUSCO	12	13.2336	11.0323	13.4412	12.3930
	LA ANGOSTURA		27.8730	31.7919	29.1539	29.7863
6	AZUETA	22	68.5955	63.5128	75.7994	68.6596
	PAPALOAPAN		282.2855	289.1871	345.6969	277.4272
7	AZUETA	10	126.2786	108.4671	139.1498	123.4338
	TUXTEPEC		288.9451	255.3070	327.3730	296.4785
8	LA ESTRELLA	10	83.8783	86.0013	68.1271	75.4917
	TUXTEPEC		277.3630	255.3070	327.3724	296.4784
9	TOMELLIN	12	21.1854	24.0004	24.3657	23.5289
	APAOLA		14.7227	14.0046	14.1276	13.7655
10	XIQUILA	16	31.2500	32.6926	31.4656	32.7471
	LA ANGOSTURA		27.9520	29.2927	26.2323	26.8590
11	CANTON	17	367.3133	315.0569	394.8555	365.2835
	LA ESTRELLA		98.5461	96.0637	101.2817	99.5821
12	CANTON	17	358.6360	315.0569	394.8555	365.2835
	STO. DOMINGO		125.2928	110.6256	133.9456	121.5557
13	PAPALOAPAN	18	464.5689	368.6562	464.2648	422.8216
	JACATEPEC		105.3345	109.1571	140.0753	124.0969
14	TUXTEPEC	10	302.6426	255.3070	327.3730	296.4785
	JACATEPEC		111.5435	104.6725	126.7320	115.9220
15	JACATEPEC	17	137.4109	109.3798	139.6391	126.0194
	LA ESTRELLA		92.5894	96.0637	101.2817	99.5822
16	LA ESTRELLA	17	102.3897	96.0637	101.2817	99.5822
	STO. DOMINGO		118.9034	110.6256	133.9440	121.5557

NOTA: N, Es el período común de registro.

TABLA 5.11 SELECCION POR GRUPO DEL MEJOR METODO DE ESTIMACION DE LA APROXIMACION UNIVARIADA Y BIVARIADA, DE LAS ESTACIONES DE LA REGION A.

GPO.	ESTACION	N (AÑOS)	APROXIMACION UNIVARIADA			APROXIMACION POME BIVARIADA			APROXIMACION SELECCIONADA	
			E.E.	METODO	ALFA	MU	E.E.	ALFA		MU
1	BADIRAGUATO GUATENIPA	17	58.1570	MML	181.4025	332.7217	70.3484	163.5409	340.7460	MML-U
			360.3112	POME	1166.4987	1194.3845	323.6880	1269.3951	1137.5304	POME-B
2	CHINIPAS URIQUE	13	170.8000	MOM	459.9454	754.2815	159.3915	479.1153	743.2997	POME-B
			72.8811	MOM	125.4925	212.7945	76.1149	115.2022	218.7365	MOM-U
3	SAN IGNACIO URIQUE	13	355.3909	MOM	766.3859	1191.8608	427.7003	641.3261	1264.4586	MOM-U
			72.8811	MOM	125.4925	212.7945	73.4906	123.1046	214.1888	MOM-U
4	TOAHAYANA ZOPILOTE	23	122.5408	POME	457.9154	710.7711	124.7604	454.3491	712.8725	POME-U
			45.3891	MML	211.6164	278.3882	44.3849	213.0180	277.3060	POME-B

TABLA 5.12 SELECCION POR GRUPO DEL MEJOR METODO DE ESTIMACION DE LA APROXIMACION UNIVARIADA Y BIVARIADA, DE LAS ESTACIONES DE LA REGION B.

GPO	ESTACION	N (AÑOS)	APROXIMACION UNIVARIADA			APROXIMACION POME BIVARIADA			APROXIMACION SELECCIONADA	
			E.E.	METODO	ALFA	MU	E.E.	ALFA		MU
1	ACHIOTAL BELLACO	22	67.1438	MOM	145.0640	446.8572	71.3949	183.9615	424.3450	MOM-U
			191.0224	MOM	245.9130	509.9188	203.1243	168.4420	554.6381	MOM-U
2	APAOLA DIMINGUILLO	14	84.8266	MOM	104.9477	35.0654	89.9527	74.5257	52.6496	MOM-U
			24.9429	MOM	37.4972	28.2846	30.0460	24.2807	35.9183	MOM-U
3	APAOLA MATAMBA	14	84.8266	MOM	104.9477	35.0654	90.2402	73.7532	53.0721	MOM-U
			79.6983	MOM	196.7147	234.3818	103.2589	162.1281	254.3748	MOM-U
4	ANGEL R. C. LAUCHIAPAN	14	38.4341	MOM	99.0133	143.6337	43.4538	91.1964	148.1658	MOM-U
			41.8451	POME	127.4739	286.0630	39.8716	131.0041	284.0309	POME-B
5	AXUSCO LA ANGOSTURA	12	11.0323	MOM	28.0444	50.7290	13.2336	24.9548	52.5126	MOM-U
			29.1539	MML	89.0080	210.7463	27.8730	91.8484	208.4112	POME-B
6	AZUETA PAPALOAPAN	22	63.5128	MOM	172.2686	829.9275	68.5955	162.2772	835.6943	MOM-U
			277.4272	POME	1051.8385	3444.5896	282.2855	1044.0835	3448.9795	POME-U
7	AZUETA TUXTEPEC	10	108.4671	MOM	194.4076	803.3849	126.2786	159.1274	823.7691	MOM-U
			255.3070	MOM	525.9728	2961.8003	288.9451	468.2652	2995.3413	MOM-U
8	LA ESTRELLA TUXTEPEC	10	68.1271	MML	244.4134	1142.8712	83.8783	232.1165	1145.8156	MML-U
			255.3070	MOM	525.9728	2961.8003	277.3630	486.2466	2985.3220	MOM-U
9	TOMELLIN APAOLA	12	23.5289	POME	69.5343	110.1970	21.1854	72.9818	108.2025	POME-B
			13.7655	POME	33.1012	41.0602	14.7227	31.8717	41.7712	POME-U
10	XIQUILA LA ANGOSTURA	16	31.4656	MML	102.2431	231.0542	31.2500	103.0648	229.0686	POME-B
			26.2323	MML	92.0722	213.1726	27.9520	89.1816	213.9565	MML-U
11	CANTON LA ESTRELLA	17	315.0569	MOM	697.5685	1960.8818	367.3133	595.5617	2019.7968	MOM-U
			96.0637	MOM	291.8152	1172.3243	98.5461	287.9904	1174.5410	MOM-U
12	CANTON STO. DOMINGO	17	315.0569	MOM	697.5685	1960.8818	358.6360	609.3602	2011.5800	MOM-U
			110.6256	MOM	312.2084	711.0237	125.2928	289.5342	724.1695	MOM-U
13	PAPALOAPAN JACATEPEC	18	368.6562	MOM	988.4019	3396.8679	464.5689	841.9725	3482.1899	MOM-U
			106.1571	MOM	385.1989	1253.4349	105.3345	390.3620	1250.4912	POME-B
14	TUXTEPEC JACATEPEC	10	255.3070	MOM	525.9728	2961.8003	302.6426	448.3244	3006.7415	MOM-U
			104.6725	MOM	287.8798	1154.5313	111.5435	279.5088	1159.3315	MOM-U
15	JACATEPEC LA ESTRELLA	17	109.3798	MOM	351.5457	1218.7294	137.4109	315.9537	1239.3207	MOM-U
			96.0637	MOM	291.8152	1172.3243	92.5894	297.5382	1169.0020	POME-B
16	LA ESTRELLA STO. DOMINGO	17	96.0637	MOM	291.8152	1172.3243	102.3897	282.4017	1177.7345	MOM-U
			110.6256	MOM	312.2084	711.0237	118.9034	298.7785	718.7322	MOM-U

NOTA N. Es el periodo común de registro.

U, Univariado
B, Bivariado

TABLA 5.13 ERRORES ESTANDAR DE LA APROXIMACION BIVARIADA Y DE LA MEJOR UNIVARIADA PARA SELECCIONAR EL MEJOR METODO DE ESTIMACION DE PARAMETROS DE LAS ESTACIONES ANALIZADAS DE LA REGION A.

ESTACION	APROXIMACION UNIVARIADA					APROXIMACION POME BIVARIADA				APROXIMACION SELECCIONADA
	GRUPO	E.E.	METODO	ALFA	MU	GRUPO	E.E.	ALFA	MU	
BADIRAGUATO	1	58.1570	MML	181.4025	332.7217	1	70.3484	163.5409	340.7460	MML-U
CHIHNIPAS	2	170.8000	MOM	459.9454	754.2815	2	159.3915	479.1153	743.2997	POME-B
GUATENIPA	1	360.3112	POME	1166.4987	1194.3845	1	323.6880	1269.3951	1137.5304	POME-B
SAN IGNACIO	3	355.3909	MOM	766.3859	1191.8608	3	427.7003	641.3261	1264.4586	MOM-U
TOAHAYANA	4	122.5408	POME	457.9154	710.7711	4	124.7604	454.3491	712.8725	POME-U
URIQUE	2	72.8811	MOM	125.4925	212.7945	2	73.4906	123.1046	214.1888	MOM-U
ZOPILOTE	4	45.3891	MML	211.6164	278.3882	4	44.3849	213.0180	277.3060	POME-B

TABLA 5.14 ERRORES ESTANDAR DE LA APROXIMACION BIVARIADA Y DE LA MEJOR UNIVARIADA PARA SELECCIONAR EL MEJOR METODO DE ESTIMACION DE PARAMETROS DE LAS ESTACIONES ANALIZADAS DE LA REGION B.

ESTACION	APROXIMACION UNIVARIADA					APROXIMACION POME BIVARIADA				APROXIMACION SELECCIONADA
	GRUPO	E.E.	METODO	ALFA	MU	GRUPO	E.E.	ALFA	MU	
ACHOTAL	1	67.1438	MOM	145.0640	446.8572	1	71.3949	183.9615	424.3450	MOM-U
ANGEL R. C.	4	38.4341	MOM	99.0133	143.6337	4	43.4538	91.1964	148.1658	MOM-U
APAOLA	9	13.7655	POME	33.1012	41.0602	9	14.7227	31.8717	41.7712	POME-U
AXUSCO	5	11.0323	MOM	28.0444	50.7290	5	13.2336	24.9548	52.5126	MOM-U
AZUETA	6	63.5128	MOM	172.2686	829.9275	6	68.5955	162.2772	835.6943	MOM-U
BELLACO	1	191.0224	MOM	245.9130	509.9188	1	203.1245	168.4420	554.6381	MOM-U
CANTON	12	315.0569	MOM	697.5685	1960.8818	12	358.6360	609.3602	2011.5800	MOM-U
DIMINGUILLO	2	24.9429	MOM	37.4972	28.2846	2	30.0460	24.2807	35.9183	MOM-U
JACATEPEC	14	104.6725	MOM	287.8798	1154.5313	13	105.3345	390.3620	1250.4912	MOM-U
LA ANGOSTURA	10	26.2323	MML	92.0722	213.1726	10	27.9520	89.1816	213.9565	MML-U
LA ESTRELLA	8	68.1271	MML	244.4134	1142.8712	8	83.8783	222.1165	1145.8156	MML-U
LAUCHAPAN	4	41.8451	POME	127.4739	286.0630	4	39.8716	131.0041	284.0309	POME-B
MATAMBA	3	79.6983	MOM	196.7147	234.3818	3	103.2589	162.1281	254.3748	MOM-U
PAPALOAPAN	6	277.4272	POME	1051.8185	3444.5896	6	282.2855	1044.0835	3448.9795	POME-U
STO. DOMINGO	16	110.6256	MOM	312.2084	711.0237	16	118.9034	298.7785	718.7322	MOM-U
TOMELLIN	9	23.5289	POME	69.5343	110.1970	9	21.1854	72.9818	108.2025	POME-B
TUXTEPEC	14	255.3070	MOM	525.9728	2961.8003	8	277.3630	486.2466	2985.3220	MOM-U
XIQUILA	10	31.4656	MML	102.2431	231.0542	10	31.2500	103.0648	229.0686	POME-B

NOTA: U, Univariado.
B, Bivariado.

La comparación gráfica entre las distribuciones teóricas e históricas por los diferentes métodos de estimación de parámetros, de algunas estaciones seleccionadas son presentadas en el apéndice D.

5.3 SELECCION DEL TIPO DE DISTRIBUCION DE VALORES EXTREMOS

El criterio de selección elegido para el tipo de distribución de valores extremos, que mejor se ajusta a la muestra de datos, es el del error estándar (Kite, 1988):

$$EE_j = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N [x_i - y_i]^2}{N - m_j} \right\}^{1/2} \quad (5.1)$$

donde:

x_i : son los datos históricos, para $i = 1, \dots, N$.

y_i : son los eventos calculados a través del modelo matemático y para niveles de probabilidad iguales a los de los datos históricos, ordenados en forma decreciente de magnitud para $i = 1, \dots, N$.

N : es el tamaño de la muestra.

m_j : es el número de parámetros que describen el modelo matemático: $m_1 = 2$, para las Distribución de Valores Extremos Tipo I (Gumbel).

La distribución elegida será aquella que proporcione el mínimo valor del error estándar de ajuste.

5.4 LIMITES DE CONFIANZA DE EVENTOS DE DISEÑO

El análisis de frecuencias de gastos máximos anuales es usado para proveer la magnitud y frecuencia de eventos de diseño con el fin de definir las llanuras de inundación, el tamaño de las estructuras hidráulicas, y sirve como ayuda en la planeación y manejo de las cuencas hidrológicas. Los eventos de diseño pueden

ser definidos analíticamente usando funciones de distribución de probabilidad, pero sus correspondientes límites de confianza no se obtienen tan fácilmente.

Los límites de confianza son empleados para estimar las incertidumbres asociadas con la determinación de los eventos de diseño para periodos de retorno específicos.

En virtud de que una distribución de frecuencias únicamente es un estimado de la muestra de cierta población, es probable que otra muestra de igual longitud de la misma corriente, pero tomada en diferente tiempo, produjera una diferente curva de frecuencias. Los límites de confianza o más propiamente, los intervalos de confianza, definen el rango dentro del cual estas curvas de frecuencias son esperadas a ubicarse con cierto nivel de confianza.

Posteriormente, después de haber obtenido los estimadores de α y u , es posible calcular los eventos de diseño. Para el caso que nos ocupa, de las estaciones seleccionadas que tienen una distribución Gumbel, los eventos de diseño son determinados por la siguiente fórmula (Viessman et al, 1977):

$$\hat{Q}_T = \hat{u} - \hat{\alpha} Y_T \quad (5.2)$$

y

$$Y_T = - \text{Ln} \left\{ - \text{Ln} \left[\frac{T-1}{T} \right] \right\} \quad (5.3)$$

donde:

Y_T : es el valor de la variable reducida correspondiente a T.

\hat{Q}_T : es el gasto asociado (m^3/s) con T años de periodo de retorno.

\hat{u} , $\hat{\alpha}$: son los estimadores de momentos, máxima verosimilitud, o máxima entropía de los parámetros de ubicación y escala de la distribución Gumbel, respectivamente.

Asumiendo que los parámetros estimados están normalmente

distribuidos, los límites de confianza pueden ser escritos como (Tiago de Oliveira, 1972; Mood et al, 1974):

$$LC(\hat{Q}_T) = \hat{Q}_T \pm Z_\alpha \text{Var}_a(\hat{Q}_T) \quad (5.4)$$

donde:

$LC(\hat{Q}_T)$: es el límite de confianza superior o inferior para el valor del gasto \hat{Q}_T (m³/s).

Z_α : es la variable normal estándar para un nivel de confianza α .

$\text{Var}_a(\hat{Q}_T)$: es la varianza asintótica del gasto \hat{Q}_T .

La varianza asintótica univariada de los eventos de diseño son calculados como (NERC, 1975):

Para el caso de la distribución de valores extremos Tipo I (Gumbel):

$$\text{Var}_a(\hat{Q}_T) = \left[\text{Var}_a(\hat{u}) + 2 Y_T \text{Cov}_a(\hat{u}, \hat{\alpha}) + Y_T^2 \text{Var}_a(\hat{\alpha}) \right] \quad (5.5)$$

donde:

$\text{Var}_a(\cdot)$ y $\text{Cov}_a(\cdot)$ son las varianzas y covarianzas asintóticas de los parámetros de la distribución Gumbel.

Para el caso del Método de Momentos, de acuerdo a Chow (1953) y los resultados dados en Lowery y Nash (1970, p. 272), se tiene que:

$$\text{Var}_a(\hat{\alpha}) = 1.10 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.6)$$

$$\text{Var}_a(\hat{u}) = 1.168 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.7)$$

$$\text{Cov}_a(\hat{\alpha}^2, \hat{u}) = \text{Cov}(\hat{u}, \hat{\alpha}) = 0.095 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.8)$$

Por lo que la ecuación (5.5), para éste caso, se puede expresar como:

$$\text{Var}_a(\hat{Q}_T) = \frac{\alpha^2}{N} \left[1.168 + 0.192 Y_T + 1.100 Y_T^2 \right] \quad (5.9)$$

donde Y_T esta definido por la ecuación (5.3).

Para el caso del Método de Máxima Verosimilitud, la varianza y covarianza asintóticas de los parámetros se expresan (Kimball, 1949) como :

$$V = \begin{bmatrix} \text{Var}_a(\hat{u}) & \text{Cov}_a(\hat{u}, \hat{\alpha}) \\ \text{Cov}_a(\hat{u}, \hat{\alpha}) & \text{Var}_a(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} = \frac{\alpha^2}{N} \begin{bmatrix} 1.1087 & 0.2570 \\ 0.2570 & 0.6079 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

donde:

\hat{u} : es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de ubicación.

$\hat{\alpha}$: es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de escala.

N : es el tamaño de muestra usado para estimar los parámetros.

a : es un subíndice que indica asintótico.

por lo que:

$$\text{Var}_a(\hat{u}) = 1.1087 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.11)$$

$$\text{Var}_a(\hat{\alpha}) = 0.6079 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.12)$$

$$\text{Cov}_a(\hat{u}, \hat{\alpha}) = 0.2570 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.13)$$

considerando las ecuaciones (5.11, 5.12, 5.13) la ecuación (5.5) puede expresarse como:

$$\text{Var}_a(\hat{Q}_T) = \frac{\alpha^2}{N} \left[1.1087 + 0.5140 Y_T + 0.6079 Y_T^2 \right] \quad (5.14)$$

donde Y_T esta definida por la ecuación (5.3).

En el caso del Método de Máxima Entropía, Phien (1986) ha derivado las expresiones para las varianzas-covarianzas de los estimadores, las cuales se expresan a continuación:

$$\text{Var}_a(\hat{\alpha}) = 0.6450 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.15)$$

$$\text{Var}_a(\hat{u}) = 1.1150 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.16)$$

$$\text{Cov}_a(\alpha^2, \hat{u}) = \text{Cov}(\hat{u}, \hat{\alpha}) = 0.2730 \frac{\alpha^2}{N} \quad (5.17)$$

Por lo cual, la ecuación (5.5), para éste caso puede expresarse como:

$$\text{Var}_a(\hat{Q}_T) = \frac{\alpha^2}{N} \left[1.1150 + 0.5460 Y_T + 0.6450 Y_T^2 \right] \quad (5.18)$$

donde Y_T esta definida por la ecuación (5.3).

5.5 ANALISIS DE RESULTADOS

En base a los resultados mostrados en las Tablas 5.7 a 5.14, puede expresarse lo siguiente:

a) En general, los errores estándar que presenta el ajuste de los parámetros por el Método Bivariado de Máxima Entropía, son comparables con aquellos obtenidos de manera Univariada por los Métodos de Momentos, Máxima Verosimilitud y Máxima Entropía.

Considerando los grupos analizados independientes unos de otros, se comenta que:

b) Para el caso de las estaciones seleccionadas de la región A (Tabla 5.11), el 37.5 % de ellas presentan un mejor ajuste por la aproximación bivariada de Máxima Entropía, el 37.5 % por la aproximación univariada de Momentos, el 12.5 % por el método de Máxima Verosimilitud, y el 12.5 % por la aproximación univariada de Máxima Entropía.

c) Con respecto a las estaciones seleccionadas de la región B (Tabla 5.12), el 18.75 % presentan un mejor ajuste por la aproximación bivariada de Máxima Entropía, el 68.75 % por el método de Momentos, el 6.25 % por el de Máxima Verosimilitud, y el 6.25 % por la aproximación univariada POME.

Por otra parte, considerando el total de estaciones seleccionadas de cada región en estudio, se observa:

d) Tomando como base los resultados indicados en la Tabla 5.13, de las estaciones analizadas de la región A, el 42.86 % presentan un mejor ajuste por la aproximación bivariada de Máxima Entropía, el 28.58 % de las estaciones se ajustaron mejor por el método de Momentos, el 14.29 % por el método de Máxima Verosimilitud y el 14.29 % por el método POME univariado.

e) En la misma forma, tomando como base los resultados indicados en la Tabla 5.14, de las estaciones analizadas de la región B, el 16.67 % presentan un mejor ajuste por la aproximación bivariada de Máxima Entropía, el 61.11 % de las estaciones se ajustaron mejor por el método de Momentos, el 11.11 % por el método de Máxima Verosimilitud y el 11.11 % por el método POME univariado.

Ahora bien, considerando en forma global las estaciones analizadas de las dos regiones, se puede observar que:

f) El 24 % de las estaciones presentan un mejor ajuste por la aproximación bivariada de Máxima Entropía, el 52 % se ajustaron mejor por el método de Momentos, el 12 % por el método de Máxima Verosimilitud y el 12 % por el método POME univariado.

Un comentario adicional que es importante resaltar es el de que, aún en los casos donde el coeficiente de correlación de algunos grupos de estaciones ha sido muy bajo, los estimadores de los parámetros proporcionaron un buen ajuste del modelo; por lo que se desprende como recomendación, cuando se realice el análisis de frecuencias de avenidas bajo esta metodología no sean descartados los grupos de estaciones asociadas por su bajo coeficiente de correlación.

Por otra parte, tomando en cuenta los anteriores resultados puede concluirse que:

La aplicación de la distribución de eventos extremos bivariada, BEVII, por el Método de Máxima Entropía mejora la calidad de los estimadores de los parámetros y por lo tanto el ajuste proporcionado por otros métodos univariados disponibles en la práctica hidrológica; por lo que presenta una ganancia significativa en la precisión de tales estimadores y ofrece una buena alternativa en el análisis de frecuencias de gastos máximos.

CAPITULO SEIS

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El objetivo general de este estudio ha sido el de aplicar el Principio de Máxima Entropía (POME) para estimar los parámetros de la Distribución Logística Bivariada de Valores Extremos, utilizada en el análisis de frecuencias. Los objetivos específicos pueden expresarse como:

- a) Desarrollar la aplicación del Principio de Máxima Entropía al Modelo Logístico Bivariado BEV11.
- b) Investigar el grado de mejoramiento en la estimación de los parámetros de las distribuciones, cuando es aplicado el enfoque bivariado resuelto por POME.
- c) Aplicar el Modelo Logístico Bivariado BEV11, a algunos problemas del análisis de frecuencias.

Los estimadores de los parámetros por POME del modelo BEV11 han sido obtenidos numéricamente, empleando el algoritmo desarrollado en el capítulo tres.

CONCLUSIONES

Varias conclusiones pueden extraerse del presente estudio:

- a) Los parámetros de la Distribución de Valores Extremos Tipo I, Gumbel, pueden estimarse con mejor aproximación cuando se emplea la distribución bivariada BEV11 por medio del Principio de Máxima Entropía.
- b) Aunque el modelo es una aproximación del fenómeno físico real, éste proporciona resultados razonables para los grupos de parejas de datos con tamaños de muestras cortos.

c) El desarrollo de la aproximación bivariada por POME, amplía el conocimiento de la funciones de distribución de probabilidad de valores extremos.

d) Se ha demostrado, a través de procesos de simulación de Monte Carlo, que los estimadores bivariados por POME del modelo en estudio, en cuanto al sesgo promedio relativo, presentan un mejor comportamiento que los obtenidos de manera univariada por los métodos de Momentos, Máxima Verosimilitud y POME. Con respecto al RMSE y a la eficiencia del método POME bivariado, éste se comporta adecuadamente con relación a los demás métodos en competencia, por lo que ofrece una alternativa en la estimación conjunta de los parámetros de cada distribución Marginal del Tipo EVI.

e) En base al criterio de selección propuesto, el ajuste proporcionado por el método POME al modelo BEV11 ha resultado ser la mejor opción para un no despreciable número de casos, entre los métodos en competencia:

El 24 % del total de las estaciones analizadas se ajustaron mejor a la aproximación bivariada POME; el 52 % al método MOM, el 12 % al de MML y el otro 12 % a la aproximación POME univariada.

RECOMENDACIONES

Es posible recomendar el empleo de las distribuciones bivariadas de valores extremos para el análisis de lluvias. El proceso que se sigue para éste análisis es similar al descrito para el caso de gastos, sólo que en éste caso se trabaja con dos variables, las alturas de precipitación para los dos sitios de análisis, h_{p_a} y h_{p_b} ; las que se toman para una duración común d que deberá considerarse constante para definir una cierta distribución de probabilidades de las variables de ambos sitios.

En virtud de que existe una buena proporción de casos en el que la aproximación POME bivariada aplicada al modelo BEV11 ofrece la mejor opción de ajuste, se podría esperar que su desarrollo a las

restantes combinaciones del modelo logístico bivariado, cubra un mayor campo de mejores alternativas, que ayuden en la estimación con menor incertidumbre de los eventos de diseño. En cuyo desarrollo ya se está trabajando actualmente.

El Principio de Máxima Entropía puede ser empleado en el desarrollo de modelos de distribución de probabilidad, sencillos pero significativos de valor práctico, en el análisis de frecuencias en hidrología, particularmente en el área de escasos datos hidrológicos. El valor medio y la desviación estándar, o el coeficiente de variación, son la única información *a priori* requerida como parámetros de la distribución. Esta distribución se puede considerar como un modelo consistente de sesgo mínimo con la cantidad de información disponible (Sonuga, 1972).

Por otra parte, también puede ser aplicado el Principio de Máxima Entropía para derivar modelos bivariados que impliquen otras parejas de variables, específicamente del proceso Lluvia-Escurrimiento y producción de Sedimento-Escurrimiento.

En el primer caso, es maximizada la expresión de la entropía condicional, sujeta a ciertas restricciones para obtener la distribución condicional de una variable y , representando el escurrimiento, dada la ocurrencia de una variable x , representando la lluvia. La distribución resultante a partir del proceso de maximización es el "mínimo prejuicio en la asignación de probabilidades en base a la información dada". Los parámetros de la distribución están basados en la información *a priori* de la serie de la lluvia y el escurrimiento como la covarianza y la media (Sonuga, 1976).

En el segundo caso, el Principio de Máxima Entropía puede ser aplicado para derivar un modelo estocástico para la generación de sedimento que proviene de aguas arriba de la cuenca. Por medio de la maximización de la entropía condicional, sujeta a ciertas restricciones, es posible obtener una distribución de probabilidad de la generación de sedimento condicionada en la distribución de

probabilidad del volumen de escurrimiento directo. Esta distribución resulta con mínimo prejuicio en la asignación de las probabilidades en base a la información dada. Los parámetros de esta distribución son determinados con tal información *a priori* del volumen de escurrimiento directo y el sedimento generado, como la media y covarianza (Singh and Krstanovic, 1987).

No se puede dejar de mencionar que, en varias áreas donde el método POME ha sido aplicado, se han obtenidos resultados satisfactorios en la descripción de procesos donde existen datos insuficientes.

Por último, cabe mencionar que la contribución del presente trabajo ha sido el de extender el conocimiento del Principio de Máxima Entropía en la estimación de los parámetros del Modelo Logístico Bivariado con Marginales EVI.

REFERENCIAS

- Abramowitz, M., and I. A. Stegun. 1965. "Handbook of Mathematical Functions". U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C.
- Anderson, T. W., 1957. "Maximum Likelihood Estimates for a Multivariate Normal Distribution when some Observations are Missing", Journal of the American Statistical Association, Vol. 52, pp. 220-223.
- Awumah, K., et al., 1991. "Entropy-Based Redundancy Measures in Water-Distribution Networks", Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 117, No. 5, pp. 595-613.
- Barbé, D. E., et al., 1991. "Solution of Three-Constraint Entropy-Based Velocity Distribution", Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 117, No. 10, pp. 1389-1396.
- Bierens De Haan, D. 1957. "Nouvelles Tables: D'intégrales Définies". Hafner Publishing Co. New York.
- Bortkiewicz, L., Von. 1922. "Variationsbreite and Mittlerer Fehler", Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 21, 3-11.
- Bree, T. 1977. A comment on "A Discrete Linear Cascade Model for Hydrology by K. M. O'Connor". Journal of Hydrology 33: 403-6.
- Bree, T. 1978a. "The Stability of Parameter Estimation in the General Linear Model". Journal of Hydrology 37: 47-66.
- Bree, T. 1978b. "The General Linear Model with Prior Information" Journal of Hydrology 39: 113-27.
- Buslenko, N. P., et al., 1966. "The Monte Carlo Method. The Method of Statistical Trials". Pergamon Press. 381 p.
- Carnahan, B. et al., 1969. "Applied Numerical Methods". John Wiley & Sons. 604 p.
- Chiu, Chao-Lin, 1987. "Entropy and Probability Concepts in Hydraulics". J. Hydraulic Engineering, 133: 583-600.
- Chiu, Chao-Lin, 1988. "Entropy and 2-D Velocity Distribution in Open Channels", J. Hydraulic Engineering, 114: No. 7, 738-755.
- Chiu, Chao-Lin, 1989. "Velocity Distribution in Open Channel Flow". J. Hydraulic Engineering., 115: 576-594.
- Chiu, Chao-Lin, 1991. "Application of Entropy Concept in Open-Channel Flow Study". J. Hydraulic Engineering, Vol. 117, No. 5, pp. 615-628.

- Chiu, Chao-Lin, and Murray, D. W., 1992. "Variation of Velocity Distribution Along Nonuniform Open-Channel Flow", J. Hydraulic Engineering, Vol. 118, No. 7, pp. 989-1001.
- Chiu, Chao-Lin, et al., 1993. "Application of Probability and Entropy Concepts in Pipe-Flow Study", J. Hydraulic Engineering, Vol. 119, No. 6, pp. 742-756.
- Chow, V. T., 1953. "Frequency Analysis of Hydrologic Data". Univ. Illinois, Eng. Exp. Stn., Bull. 414.
- Christensen, R. 1985. "Entropy Minimax Multivariate Statistical Modeling-I: Theory", International Journal of General Systems, Vol. II, Gordon and Breach Science Publishers, Inc., OPA Ltd., pp. 23-227.
- Clarke, R. T. 1973. "A Review of Some Mathematical Models Used in Hydrology, with Observations on their Calibration and Use". Journal of Hydrology 19: 1-19.
- Clarke, R. T. 1980. "Bivariate Gamma Distributions for extending Annual Streamflow Records from Precipitation: Some Large Sample Results". Water Resources Research. Vol. 16, No. 5, pp. 863-870.
- Cover, T. M., and Thomas, J. A., 1991. "Elements of Information Theory". (Wiley Series in Telecommunications). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc. 542 p.
- Cunnane, C., 1988. "Methods and Merits of Regional Flood Frequency Analysis", Journal of Hydrology. Vol. 100, No. 1-4, pp. 256-290.
- Dalezios, N. R. and Tyraskis, P. A. 1989. "Maximum Entropy Spectra for Regional Precipitation Analysis and Forecasting". J. Hydrol., 109: 25-42.
- DeCoursey D. G. and Snyder W. M. 1969. "Computer-Oriented Method of Optimizing Hydrologic Model Parameter". J. Hydrol., 9: 34-56.
- Diskin, M. H. 1967. "A Laplace Transform Proof of the Theorem of Moments for the Instantaneous Unit Hydrograph". Water Resources Research. 3(3): 385-88.
- Diskin, M. H. and A. Boneh. 1968. "Moments of the input, output and impulse response functions of linear systems about arbitrary points". Water Resources Research. 4(4): 727-36.
- Diskin, M. H., and E. Simon. 1977. "A Procedure for the Selection of Objective Functions for Hydrologic Simulation Models". Journal of Hydrology 34(1/2): 129-49.
- Dood, E. L., 1923. "The Greatest and the Least Variate Under General Laws of Error". Transactions of the American

Mathematical Society, 25: p 525.

- Dooge, J. C. 1973. "Linear Theory of Hydrologic System". Technical Bulletin No. 1468, U.S. Department of Agricultural, Agricultural Research Service, Washington, D.C.
- Dooge, J. C. 1980. "Flood Routing in Channels". Unpublished lectures notes, Department of Civil Engineering, University of College, Dublin, Ireland.
- Domínguez E. J.; Trabajo de Investigación I: "Métodos de Estimación de Parámetros"; DEEFI-UNAM, Julio-1994.
- Domínguez E. J.; Trabajo de Investigación II: "El Principio de Máxima Entropía en las Distribuciones Bivariadas de Valores Extremos"; DEEFI-UNAM, Enero-1995.
- Douglas, J. R., R. T. Clarke, and S. G. Newton. 1976. "The Use of Likelihood Functions to Fit Conceptual Models with more than one Dependent Variable". Journal of Hydrology 29: 181-98.
- Durrans, S. R. 1992. "Parameter estimation for the Pearson type 3 distribution using order statistics". J. Hydrol., 133: 215-232.
- Dwight, H. B. 1961. "Tables of Integrals and other Mathematical Data". Fourth Edition, MacMillan Publishing Co., Inc. New York.
- Escalante, C. 1991. "Funciones de Distribución de Probabilidad Trivariadas de Valores Extremos y sus Aplicaciones en Hidrología". DEEFI-UNAM, México, D. F.
- Finkelstein, B. V., 1953. "On the Limiting Distributions of the Extreme Terms of a Variational Series of a two-dimensional random quantity". Doklady Akad, S.S.S.R. 91, No. 2, p. 209.
- Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C., 1928. "Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample". Procc. of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XXIV. Part. II, pp. 180-190.
- Fréchet, M., 1927. "Sur la Loi de Probabilité de l'ecart Maximum". Annales de la Societe Plonaise de Mathematique. Cracovie. Vol. 6, pp. 93-116.
- Galambos, J., 1975. "Order Statistics of Sample from Multivariate Distributions", Journal of the American Statistical Association. Vol. 70, pp. 674-680.
- Galambos, J., 1978. "The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistical", John Wiley and Sons. 352 p.
- Gnedenko, B. U. 1943. "Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une Serie Aleatoire". Ann. Math., Vol. 44, pp. 423-453.

- Goldman, S. 1953. "Information Theory", Prentice-Hall, Inc., New York, N. Y.
- Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. 1980. "Table of Integrals Series and Products". Academic Press, London, p. 1086
- Greenwood, J. A., J. M. Landwehr, N. C. Matalas, and J. R. Wallis. 1979. "Probability Weighted Moments: Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressible in Inverse Form". Water Resources Research 15(5): 1049-54.
- Gumbel, E. J. 1937. "La Durée Extreme de la Vie Humaine". Actualites Scientifiques et Industrielles. Paris: Herman et Cie.
- Gumbel, E. J. 1941. "Le Return Period of Flood Flows ". Annals of Mathematical Statistics. Vol. 12, pp. 163-190.
- Gumbel, E. J. 1944. "On the Plotting of Flood Discharges". transactions of the American Geophysical Union. Vol. 25, pp. 669-719.
- Gumbel, E. J. 1945. "Floods Estimated by Probability Methods". Engineering News Record. Vol. 134, pp. 97-101
- Gumbel, E. J. 1947. "The Distribution of the Range". Annals of Mathematical Statistics. Vol. 18, pp. 384-412.
- Gumbel, E. J. 1954. "Statistical Theory of Droughts ". Proceedings American Society of Civil Engineers. Vol. 80, No. 439.
- Gumbel, E. J. 1958. "Statistics of Extremes". Columbia University Press. 375 p.
- Gumbel, E. J. 1959. "Multivariate Distributions with Given Margins". Revista da Faculdade de Ciencias. 2 Serie A. Vol. II, No. 2. pp. 178-218.
- Gumbel, E. J. 1960a. "Multivariate Distributions with Given Margins and Analytical Examples". Bulletin of the International Statistical Institute. Vol. 37, No. 3. pp. 363-373.
- Gumbel, E. J. 1960b. "Distributions des Valeurs Extremes en Plusieurs Dimensions". Publications de L'Institut de Statistique. Vol. 9, pp. 171-173.
- Gumbel, E. J. 1962. "Statistical Theory of Extreme Values (Main Results)". Chapter 6, Contribution to Order Statistics, Sarhan, A. S. and Greenberg, B. G., editors. pp. 59-93. John Wiley and Sons.
- Gumbel, E. J. and Mustafi, C. K. 1967. "Some Analytical Properties of Bivariate Extremal Distributions". Journal of the American Statistical Association. Vol. 62, pp. 569-589.

- Hann Ch. T. 1982; *Statistical Method in Hydrology*, The Iowa State University Press.
- Harley, B.M. 1967. "Linear routing in uniform open channels". M. Eng. Sc. thesis, National University of Ireland, University College, Cork, Ireland.
- Himmelblau D. M. 1972. "Applied Non Linear Programming". New York: McGraw-Hill.
- Houghton, J. C. 1978. "The Incomplete Means Estimation Procedure applied to Flood Frequency Analysis". *Water Resources Reserach* 14(6): 1111-15.
- Jaynes, E. T. 1957. "Information Theory and Statistical Mechanics I". *Physics Review*, Vol. 106, pp. 620-630.
- Jaynes, E. T. 1958. "Probability Theory in Science and Engineering". Socony Motor Oil Co., Field Research Laboratory, Dallas, Texas, Colloquim Lectures in Pure and Applied Science, No.2.
- Jaynes, E. T. 1961. "Probability Theory in Science and Engineering". New York: McGraw-Hill.
- Jaynes, E. T. 1982. "On the Rationale of Entropy Methods". *Proceedings fo the IEEE* 70(9): 939-52.
- Jenkinson, A. F. 1955. "The Frequency Distribution of the Annual Maximum (o Minimum) Values of Meteorological Elements", *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 87, pp. 158-171.
- Jones, L. E. 1971. "Linearizing Weight Factors for Least Squares Fitting". *Journals of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers* 97(HY5): 665-75.
- Jowitt, P. W. 1979. "The Extreme-Value Type-1 Distribution and the Principle of Maximun Entropy". *J. Hydrol.*, 42: 23-38.
- Jowitt, P. W. 1980. Reply: "The Extreme-Value Type-1 Distribution and the Principle of Maximun Entropy". *J. Hydrol.*, 47: 389-390.
- Kendall, M. G., and A. Stuart. 1958. "Distribution Theory". Vol. 1 of *The Advanced Theory of Statistic*. London: Charles Griffiin Co.
- Kimbal, B. F., 1949. "An Approximation to the Sampling Variances of an Estimated Maximum Value of Given Frequency Based on the Fit of Doubly Exponential Distribution of Maximum Values", *Annals of Mathematical Statistics*. Vol. 20, pp. 110-113.
- Kite G. W., 1988; "Frecuency and Risk Analyses in Hydrology", Water Resources Publications, Fort Collins Colorado.

- Kuczera, G. 1983a. "Improved Parameter Inference in Catchment Models: 1. Evaluating Parameter Uncertainty". *Water Resources Research* 19(5): 1151-62.
- Kuczera, G. 1983b. "Improved Parameter Inference in Catchment Models: 2. Combining Different Kinds of Hydrologic data and Testing Their Compatibility". *Water Resources Research* 19(5): 1163-72.
- Leopold, L. B. and Langbein, W. B. 1962. "The Concept of Entropy in Landscape Evolution". Geological Survey Professional Paper 500-A, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C.
- Lowry, M. D., and Nash, J. E., 1970. "A Comparison of Methods of Fitting the Double Exponential Distribution". *J. Hydrol.*, 10: 259-275.
- Luthe, R., Olivera A., y Schutz, F., 1981. "Métodos Numéricos". Ed. Limusa, México. 443 p.
- Mood, A. M., Graybill, F. and Boes, D. C., 1974. "Introduction to Theory of Statistics". McGraw-Hill Inc. Third Ed. 564 p.
- Nash, J. E. 1959. "Systematic Determination of Unit Hydrograph Parameters". *Journal of Geophysical Research* 64(1): 111-15.
- Natale, L., and Todini, E. 1974. "A Constrained Parameter Estimation Technique for Linear Models in Hydrology". Proceedings of the Workshop on Mathematical Models in Hydrology, Pisa Italy.
- Natale, L., and Todini, E. 1974. "A Constrained Parameter Estimation Technique for Linear Models in Hydrology". Publication No. 13, Institute of Hydraulics, University of Pavia, Italy.
- Natural Environment Research Council. 1975. "Flood Studies Report". Vol. 1, pp. 41-52. and 81-97.
- O'Connor, K. M., and J. E. Nash. 1968. Comment on "A Laplace Transform Proof of the Theorem of Moments by M. H. Diskin". *Water Resources Research* 4(3): 675-77.
- O'Meara, W.R. 1968. "Linear routing of Lateral Inflow in Uniform Channels". M. Eng. Sc. thesis, The National University of Ireland, University College, Cork.
- Palmer J. R. 1969. An Improved Procedure for Orthogonalizing the Search Vectors in Rosenbrock's and Swann's Direct Search Optimization Methods". *Computer Journal* 12: 69-71.
- Phien, H. N. 1980. Comments: "The Extreme-Value Type I Distribution and The Principle of Maximum Entropy". *J. Hydrol.*, 47: 385-388.
- Phien, H. N. 1986. Short Communication: "Sampling Properties of

the Maximum Entropy Estimators for the Extreme Value Type-I Distribution". J. Hydrol., 86: 391-398.

- Phien, H. N. 1987. "A Review of Methods of Parameters Estimation for The Extreme Value Type-I Distribution". J. Hydrol., 90: 251-268.
- Phien, H. N., and T. Jivajirajah. 1984. "Fitting the S₀ Curve by the Method of Maximum Likelihood". Journal of Hydrology, 67: 67-75.
- Rao, D. V. 1980. "Log Pearson type 3 Distribution: Method of Mixed Moments". Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers 106(HY6): 999-1019.
- Rao, D. V. 1983. "Estimating log Pearson Parameters by Mixed Moments". ASCE Journal of Hydraulic Engineering: 109(8): 1118-1032.
- Raudkivi A. J., 1979; Hydrology: An Advanced Introduction To Hydrological Processes and Modeling. Pergamon, Oxford.
- Raynal, J. A. 1985. "Bivariate Extreme Value Distributions Applied to Flood Frequency Analysis", PhD dissertation, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, U.S.A..
- Raynal, J. A. y Sala J. D., 1987a. "Multivariate Extreme Value Distributions in Hydrological Analyses", Proceedings of the Rome Symposium, April 1987. IAHS Publications. No. 164, pp. 111-119.
- Raynal, J. A. y Salas, J. D., 1987b. "A Probabilistic Model for Flooding Downstream of the Junction of two rivers", Hydrological Frequency Modeling. Reidel Publishing Company, pp. 596-602.
- Rice, J. R., 1985. "Numerical Methods, Software, and Analysis". McGraw-Hill, New York, N. Y.
- Richard H. McCuen, 1993; Microcomputer Applications in Statistical Hydrology, Prentice Hall.
- Rueda, E. 1981. "Transfer of Information for Flood Related Variables". M. Sc. Thesis. Civil Engineering Department, Colorado State University, 112 p.
- Rosenbrock, H. H. 1960. "An Automatic Method of Finding the Greatest or Least Value of a Function". Computer Journal 3: 175-84.
- Sehitoglu, H. 1983. "Some algorithms for Parameter Estimation in Water Resources Systems". Water Resources Research 19(5): 1193-1202.
- Shannon, C. E. 1948. "The Mathematical Theory of Communication, I and II". Bell System Technical Journal 27: 379-427.

- Shannon, C. E. and Weaver, W. W. 1949. "The Mathematical Theory of Communication". University of Illinois Press, Urbana, IL.
- Shore, J. E. and Johnson, R. W. 1980. "Axiomatic Derivation of the Principle of Maximum Entropy and the Principle of Minimum Cross-Entropy". Transactions on Information Theory, IEEE, Vol. II-26, No. 1, Jan., 1980.
- Shrader, M. L., W. J. Rawls, W. M. Snyder, and R. H. McCuen. 1981. "Flood Peak Regionalization using Mixed-Mode Estimation of the Parameters of the Lognormal Distribution". Journal of Hydrology 52: 229-37.
- Singh, V. P., 1988; Hydrologic Systems Rainfall-Runoff Modeling, Vol. 1. Prentice Hall.
- Singh, V. P. and Singh, K. 1985. Derivation of The Pearson Type (PT) III Distribution By Using The Principle of Maximum Entropy (POME). J. Hydrol., 80: 197-214.
- Singh, V. P. and Singh, K. 1986. "Parameter Estimation for Log-Pearson Type III Distribution By POME". J. Hydr., 114: 112-122.
- Singh, V. P. and Singh, K. 1987. "Parameter Estimation for TPLN Distribution for Flood Frequency Analysis". Water Resources Bulletin, Vol. 23, No. 6: 1185-1191.
- Singh, V. P. and Krstanovic, P. F., 1987. "A Stochastic Model for Sediment Yield Using The Principle of Maximum Entropy", Water Resources Research, Vol. 23, No. 5, pp. 781-793.
- Snyder, W. M. 1972. "Fitting of Distribution Function by Nonlinear Least Squares". Water Resources Research 8(6): 1423-32.
- Snyder, W. M. 1980. "Statistical Hydrologic Modeling Methods and Case Studies". Unpublished manuscript, Athens, Ga.
- Sonuga, J. O., 1972. "Principle of Maximum Entropy in Hydrologic Frequency Analysis", Journal of Hydrology., 17: 177-191.
- Sonuga, J. O., 1976. "Entropy Principle Applied to the Rainfall-Runoff Process", Journal of Hydrology., 30: 81-94.
- Sorooshian, S. 1980. "Comparison of two Direct Search Algorithms Used in Calibration of Rainfall-Runoff Models". In Water Related Land Resources Systems, edited by Y. Y. Haimes and J. Kindler, 477-85, New York: Pergamon.
- Sorooshian, S., and V. K. Gupta. 1983. "Automatic Calibration of Conceptual Rainfall-Runoff Models: The Question of Parameter Observability and Uniqueness". Water Resource Research 19(1): 260-68.
- Sorooshian, S., V. K. Gupta, and J. L. Fulton. 1983. "Evaluation

- of Maximum Likelihood Parameters Estimation Techniques for Conceptual Rainfall-Runoff Models: Influence of Calibration data variability and length on Model Credibility". *Water Resources Research* 19(1): 251-59.
- Takahashi, R. 1987. "Some Properties of Multivariate Extreme Value Distributions and Multivariate Equivalence". *Ann. Inst. Statist. Math.* Vol. 39, Part. A., pp. 637-647.
- Takahashi, R. 1988. "Characterizations of a Multivariate Extreme Value Distribution" *Adv. Appl. Prob.* Vol. 20. pp. 235-236.
- Tiago de Oliveira, J. 1958. "Extremal Distributions". *Revista Faculdade de Ciencias. 2 Serie A, Vol. 7.* Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. pp. 219-228.
- Tiago de Oliveira, J., 1972. "Statistics for Gumbel and Frechet Distributions". *Structural Safety and Reliability.* A. Freudenthal, Editor. Pergamon Press. pp. 91-105.
- Tiago de Oliveira, J., 1975a. "Bivariate Extremes; Extensions", *Proc. of the 40th. Sesion. Bulletin of the International Statistical Institute.* Vol. 46, Book 2. pp. 241-251.
- Tiago de Oliveira, J., 1975b. "Bivariate and Multivariate Extreme Distribution", *Statistical Distribution in Scientific Work,* Vol. 1, G. P. Patil et al, editors. D. Reidel Publishing, Company, pp. 355-361.
- Tiago de Oliveira, J. June 1982. "Bivariate Extremes: Models and Statistical Decision". Technical Report No. 14. Center for Stochastic Processes, Department of Statistics, University of North Carolina, at Chapel Hill.
- Tippet, L. H. C. 1925. "On the Extreme Individuals and the Range of Sample taken from a Normal Distribution". *Biometrika.* Vol. 17, Parts 3 and 4, pp. 364-387.
- Todini, E. and J. R. Wallis. 1977. "Using CLS for Daily or Longer Period of Rainfall-Runoff Modeling". In *Mathematical Models for Surface Water Hydrology,* edited by T. A. Ciriani, U. Miaone, and J. R. Wallis, 149-68. New York: John Wiley.
- Tribus, M. 1969. "Rational Descriptors, Decisions and Designs". New York: Pergamon.
- Van de Nes, Th. J., and M. H. Hendriks. 1971. *Analysis of a Linear Distributed Model of Surface Runoff.* Rapport 1, Laboratory of Hydraulics and Catchment Hydrologic, Agricultural University, Wageningen, The Netherlands.
- Viessman, W., et al., 1977. "Introduction to Hydrology". Harper & Row Publishers. 704 p.
- Von Mises R. 1923. "Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe". *Berliner Math gesellschaft, t.22, p. 3.*

- Von Mises R. 1936. "La distribution de la plus grande de n valeurs". Rev. Math. de L'Union Interbalkanique. Athens. No. 1, pp. 1-20.
- Wallis, J. R., and Wood, E. F., 1985. "Relative accuracy of log Pearson III procedures". J. Hydraul. Eng., ASCE, 111(7): 1043-1057.
- Weibull, W., 1939. "The Phenomenon of Rupture in Solids". Ingenior Vetenskaps Akademiens Handlingar, Vol. 153, p. 2
- Wood E. F. and Rodriguez - Iturbe, I. 1975. "Bayesian Inference and Decision Making for Extreme Hydrologic Events", Water Resources Research, Vol. 11, No. 4. pp. 533-542.
- Xu, Chengchao, and Jowitt, P. W., 1991. Discussion: "Entropy-Based Redundancy Measures in Water-Distribution Networks", J. Hydraulic Engineering, Vol. 117, No. 5, pp. 164-166.
- Yevjevich, V. M. 1972. "Probability and Statistics in Hydrology". Fort Collins, Colo: Water Resources Publications.

APÉNDICE A
EVALUACIÓN DE ESPERANZAS
[RESTRICCIONES DEL MODELO]

APÉNDICE A
EVALUACIÓN DE ESPERANZAS
[RESTRICCIONES DEL MODELO]

Sea: $E1 = E\left[\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right]$ (A.1)

su esperanza esta definida como:

$$E1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right] f(x, y) dx dy$$

sustituyendo $f(x, y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior, se tiene:

$$E1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right] e^{-m \left[\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right) + \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right) \right]} dx dy$$

$$= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \left[e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right] e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} dx \right] dy$$

$$= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \left[e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \left\{ (-m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx \right] dy$$

(A.2)

haciendo un cambio de variable,

sea: $x = -\frac{\alpha_1}{m} \ln(u^m - v) + u_1$; $y = -\frac{\alpha_2}{m} \ln v + u_2$

evaluando el jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1 u^{m-1}}{u^m - v} & \frac{\alpha_1}{m(u^m - v)} \\ 0 & -\frac{\alpha_2}{m v} \end{vmatrix}$$

$$J = \frac{\alpha_1 \alpha_2 u^{m-1}}{m(u^m - v) v}$$

Evaluación de términos:

$$\left[\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right] = -\frac{1}{m} \ln(u^m - v)$$

$$\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right) = -\frac{1}{m} \ln v$$

$$e^{-m \left[\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right) + \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right) \right]} = [u^m - v] v$$

$$e^{-\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right] \frac{1}{m}} = e^{-u}$$

$$\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right] \frac{1}{m} - 2 = u^{1-2m}$$

$$\left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right] \frac{1}{m} \right\} = \left\{ (m-1) + u \right\}$$

Región de integración Ruv:

para: $x = -\infty$

$$-\infty = -\frac{\alpha_1}{m} \ln(u^m - v) + u_1$$

$$-\infty = -\ln(u^m - v)$$

$$\infty = u^m - v$$

$$u = \infty$$

para: $y = -\infty$

$$v = \infty$$

para: $x = +\infty$

$$e^{-\infty} = u^m - v = 0$$

$$v = u^m$$

para: $y = +\infty$

$$v = 0$$

Realizando el cambio de variable,

$$E1 = -\frac{1}{m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} \left\{ (m-1) + u \right\} u^{-m} e^{-u} \left[\ln(u^m - v) \right] dv du \quad (A.3)$$

resolviendo la integral en dv,

$$Iv = \int_{v=0}^{v=u^m} \ln(u^m - v) dv$$

Aplicando la ecuación No. 620, pag. 144, (Dwight, 1961),

$$Iv = \int_{v=0}^{v=u^m} \ln(u^m - v) dv = -(u^m - v) \ln(u^m - v) - v \Big|_{v=0}^{v=u^m}$$

$$I_v = -u^m + u^m (\ln u^m) \quad (\text{A.4})$$

sustituyendo la ec. (A.4) en (A.3), se tiene:

$$E_1 = -\frac{1}{m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} [(m-1) + u] u^{-m} e^{-u} [-u^m + u^m (\ln u^m)] du \quad (\text{A.5})$$

La ecuación (A.5) también puede escribirse como:

$$E_1 = \frac{1}{m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ (m-1) e^{-u} + u e^{-u} - (m-1) e^{-u} \cdot \ln u^m - u e^{-u} \cdot \ln u^m \right\} du \quad (\text{A.6})$$

resolviendo las cuatro integrales de la ecuación (A.6), se tiene:

$$I_1 = (m-1) \int_0^{\infty} e^{-u} du = m-1$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-u} u du = \Gamma(2) = 1$$

$$I_3 = -(m-1) \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot \ln u^m du = m(m-1) \int_0^{\infty} e^{-u} \ln (1/u) du$$

aplicando la ecuación No. 865.901, pag. 248, (Dwight, 1961), la ecuación anterior queda como:

$$I_3 = m(m-1) \gamma$$

donde: $\gamma = 0.5772$, (Constante de Euler)

$$I_4 = -\int_0^{\infty} u e^{-u} \cdot \ln u^m du = m \int_0^{\infty} u e^{-u} \cdot \ln (1/u) du$$

aplicando la ecuación 865.902, pag. 248, (Dwight, 1961), la ecuación anterior queda como:

$$I_4 = m(\gamma - 1)$$

sustituyendo las expresiones para I_1, \dots, I_4 , en la ecuación (A.6), se tiene:

$$E_1 = \frac{1}{m^2} \left[(m-1) + 1 + m(m-1) \gamma + m(\gamma - 1) \right]$$

$$E1 = \gamma$$

por lo que se concluye que:

$$E1 = E \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] = \gamma \quad (\text{A.7})$$

Sea:

$$E2 = \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (\text{A.8})$$

su esperanza está definida como:

$$E2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} f(x, y) dx dy$$

sustituyendo $f(x, y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior,

$$E2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-m \left[\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m} - 2} \cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (\text{A.9})$$

considerando el mismo cambio de variable que en el caso anterior, y evaluando un término nuevo,

$$\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m} - 2} = u^{2-2m}$$

Realizando el cambio de variable y efectuando algunas simplificaciones, se tiene:

$$E2 = \frac{1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u} e^{-u} u^{1-m} [(m-1) + u] dv du \quad (\text{A.10})$$

resolviendo la integral interior,

$$E2 = \frac{1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u} u [(m-1) + u] du = \int_{u=0}^{u=\infty} \left[\frac{(m-1) e^{-u} u^{2-1}}{m} + \frac{e^{-u} u^{3-1}}{m} \right] du$$

resolviendo la integral en du,

$$E2 = \frac{m-1}{m} + \frac{\Gamma(3)}{m} = 1 + \frac{1}{m}$$

por lo que se concluye que:

$$E2 = E \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} = 1 + \frac{1}{m} \quad (\text{A.11})$$

Sea:

$$E3 = E \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] \quad (\text{A.12})$$

su esperanza esta definida como:

$$E3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] f(x, y) dx dy$$

y dado que $E \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right]$ tiene la misma estructura que $E \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right]$

también se puede concluir que:

$$E3 = E \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] = \gamma \quad (\text{A.13})$$

Sea:

$$E4 = E \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} \quad (\text{A.14})$$

su esperanza está definida como:

$$E4 = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} f(x, y) dx dy$$

sustituyendo $f(x, y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior,

$$E4 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} e^{-m \left[\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot e^{-m \left[\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \frac{1}{m} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 2} \cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (A.15)$$

considerando el mismo cambio de variable que en el caso anterior, y evaluando el nuevo término,

$$\left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} = \text{Ln } u^m$$

Realizando el cambio de variable y efectuando algunas simplificaciones,

$$E4 = \frac{1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} \left[\text{Ln } u^m \right] e^{-u} \left[(m-1) + u \right] u^{-m} dv du \quad (A.16)$$

resolviendo la integral interior,

$$E4 = \int_{u=0}^{u=\infty} \left[\text{Ln } u \right] e^{-u} \left[(m-1) + u \right] du$$

$$E4 = \int_{u=0}^{u=\infty} \left[- (m-1) e^{-u} \left[\text{Ln} (1/m) \right] - e^{-u} u \left[\text{Ln} (1/m) \right] \right] du$$

resolviendo la integral en du , aplicando las ecuaciones 865.901 y

$$E4 = -(m-1)\gamma - (-1 + \gamma) = 1 - m\gamma$$

por lo que se concluye que:

$$E4 = E \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} = 1 - m\gamma \quad (\text{A.17})$$

Sea:

$$E5 = E \left\{ \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} \quad (\text{A.18})$$

su esperanza está definida como:

$$E5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} f(x,y) dx dy$$

sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} E5 &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left\{ \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \right\} \\ &\cdot e^{-m \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot e^{-m \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}}} \\ &\cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}-2} \\ &\cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

considerando el mismo cambio de variable que en el caso anterior, y haciendo algunas simplificaciones,

$$E5 = \frac{1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=\infty} \left\{ \text{Ln} \left[(m-1) + u \right] \right\} e^{-u} u^{-m} \left[(m-1) + u \right] dv du \quad (\text{A.20})$$

resolviendo la integral en dv , la ecuación anterior toma la forma:

$$ES = \frac{1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ \text{Ln}[(m-1) + u] \right\} e^{-u} [(m-1) + u] du$$

la ecuación anterior también puede escribirse como:

$$ES = \frac{m-1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} \text{Ln}[(m-1) + u] \cdot e^{-u} du + \frac{1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} \text{Ln}[(m-1) + u] \cdot e^{-u} u du \quad (\text{A.21})$$

realizando otro cambio de variable:

$$\begin{aligned} \text{sea: } w &= (m-1) + u & ; & \quad \text{para: } u = 0, \text{ se tiene: } w = m-1 \\ u &= w - (m-1) & ; & \quad \text{para: } u = \infty, \text{ se tiene: } w = \infty \\ dw &= du \end{aligned}$$

efectuando el cambio de variable y realizando los productos, la ecuación (A.21) toma la forma:

$$\begin{aligned} ES &= \frac{m-1}{m} \int_{v=m-1}^{v=\infty} e^{-v+(m-1)} (\text{Ln } w) dw + \frac{e^{m-1}}{m} \int_{v=m-1}^{v=\infty} e^{-v} w (\text{Ln } w) dw - \\ &\frac{m-1}{m} \int_{v=m-1}^{v=\infty} e^{-v+(m-1)} (\text{Ln } w) dw \end{aligned}$$

de tal manera que la ecuación anterior queda como:

$$ES = \frac{e^{m-1}}{m} \int_{v=m-1}^{v=\infty} e^{-v} w (\text{Ln } w) dw \quad (\text{A.22})$$

resolviendo la ecuación (A.22) por partes, haciendo:

$$\begin{aligned} p &= w (\text{Ln } w) & ; & \quad dp = (1 + \text{Ln } w) dw \\ dq &= e^{-v} dw & ; & \quad q = -e^{-v} \end{aligned}$$

la ecuación (A.22) toma la forma:

$$ES = \frac{e^{m-1}}{m} \left\{ \left[-w (\text{Ln } w) e^{-v} \right]_{v=m-1}^{v=\infty} + \int_{v=m-1}^{v=\infty} e^{-v} (1 + \text{Ln } w) dw \right\}$$

realizando operaciones, la ecuación anterior queda como:

$$E5 = \frac{e^{m-1}}{m} \left\{ (m-1) \text{Ln}(m-1) \cdot e^{-(m-1)} + \int_{v=m-1}^{v=0} e^{-v} dw + \int_{v=m-1}^{v=0} e^{-v} \text{Ln } w dw \right\} \quad (\text{A.23})$$

la ecuación anterior puede expresarse como:

$$E5 = \frac{e^{m-1}}{m} \left\{ Q1 + Q2 + Q3 \right\} \quad (\text{A.24})$$

donde:

$$Q1 = (m-1) \text{Ln}(m-1) \cdot e^{-(m-1)} \quad (\text{A.25})$$

$$Q2 = \int_{v=m-1}^{v=0} e^{-v} dw = e^{-(m-1)} \quad (\text{A.26})$$

$$Q3 = \int_{v=m-1}^{v=0} e^{-v} \text{Ln } w dw \quad (\text{A.27})$$

resolviendo la integral (A.27) por partes, haciendo:

$$\begin{aligned} f &= \text{Ln } w & ; & \quad df = \frac{1}{w} dw \\ dw &= e^{-v} & ; & \quad g = -e^{-v} \end{aligned}$$

por lo que la ecuación (A.27) queda como:

$$Q3 = e^{-(m-1)} [\text{Ln}(m-1)] + \int_{v=m-1}^{v=0} \frac{e^{-v}}{w} dw \quad (\text{A.28})$$

aplicando las ecuaciones 5.1.1 y 5.1.10 (Abramowitz and Stegun, 1965), la ecuación (A.28) queda como:

$$Q3 = e^{-(m-1)} [\text{Ln}(m-1)] - \gamma - \text{Ln}(m-1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k \cdot k!} \quad (\text{A.29})$$

sustituyendo las ecuaciones (A.25, 26 y 29) en la ecuación (A.24),

la expresión para ES queda como:

$$ES = \frac{e^{m-1}}{m} \left[(m-1) \text{Ln}(m-1) \cdot e^{-(m-1)} + e^{-(m-1)} + e^{-(m-1)} [\text{Ln}(m-1)] - \right. \\ \left. \gamma - \text{Ln}(m-1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \right] \quad (\text{A.30})$$

realizando algunas simplificaciones, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$ES = \text{Ln}(m-1) + \frac{1 - e^{m-1} [\text{Ln}(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \quad (\text{A.31})$$

por lo que puede concluirse que:

$$ES = E \left[\text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} \right\} \right] = \\ = \text{Ln}(m-1) + \frac{1 - e^{m-1} [\text{Ln}(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \quad (\text{A.32})$$

Resumiendo, se tiene lo siguiente:

$$E1 = E \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] = \gamma \quad (\text{A.7})$$

$$E2 = E \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} \right\} = 1 + \frac{1}{m} \quad (\text{A.11})$$

$$E3 = E \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] = \gamma \quad (\text{A.13})$$

$$E4 = E \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} = 1 - m \gamma \quad (\text{A.17})$$

$$ES = E \left[\text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} \right\} \right] = \\ = \text{Ln}(m-1) + \frac{1 - e^{m-1} [\text{Ln}(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \quad (\text{A.32})$$

APÉNDICE B
ESPERANZAS
(MATRIZ M)

APÉNDICE B
ESPERANZAS
[MATRIZ M]

Sea:

$$P = \sum \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] - N \gamma = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde: $\gamma = 0.5772$, es la constante de Euler.

Se hace la aclaración que en todos los casos donde se indique el símbolo de la sumatoria (Σ), éste deberá interpretarse como:

$$\sum_{i=1}^N, \text{ a menos que se indique lo contrario.}$$

Las derivadas parciales de la ecuación (B.1) con respecto a cada uno de los parámetros α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m , de la función de distribución de probabilidad BEVII esta dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_1} = - \frac{N}{\alpha_1} \frac{\sum \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right]}{N} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial P}{\partial u_1} = - \frac{N}{\alpha_1} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial P}{\partial u_2} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Sea:

$$Q = \sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} - N \left(1 + \frac{1}{m} \right) = 0 \quad (\text{B.7})$$

Las derivadas parciales de la ecuación (B.7) con respecto a cada uno de los parámetros α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m , de la función de distribución de probabilidad BEVII esta dada por:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = \frac{N}{\alpha_1} \frac{\sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} \cdot \frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} \right\}}{N} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1} = \frac{N}{\alpha_1} \frac{\sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \right\}}{N} \quad (\text{B. 9})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = \frac{N}{\alpha_2} \frac{\sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right\}}{N} \quad (\text{B. 10})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_2} = \frac{N}{\alpha_2} \frac{\sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right\}}{N} \quad (\text{B. 11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial m} &= N \sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} \cdot \right. \\ &\cdot \left[-\frac{1}{m} \right] \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right] - \\ &\left. \frac{1}{m^2} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \cdot \ln \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} \frac{1}{N} + \\ &+ \frac{N}{m^2} \quad (\text{B. 12}) \end{aligned}$$

Sea:

$$R = \sum \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] - N \gamma = 0 \quad (\text{B. 13})$$

Las derivadas parciales de la ecuación (B.13) con respecto a cada uno de los parámetros α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m , de la función de distribución de probabilidad BEV11 esta dada por:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (\text{B. 14})$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_1} = 0 \quad (\text{B. 15})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = -\frac{N}{\alpha_2} \frac{\sum \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right]}{N} \quad (\text{B. 16})$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_2} = -\frac{N}{\alpha_2} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial R}{\partial m} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Sea:

$$S = \sum \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} - N(1 - m\gamma) = 0 \quad (\text{B.19})$$

Las derivadas parciales de la ecuación (B.19) con respecto a cada uno de los parámetros α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m , de la función de distribución de probabilidad BEVII esta dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{N m}{\alpha_1} \sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-1} e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \right\} \frac{1}{N} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial S}{\partial u_1} = \frac{N m}{\alpha_1} \sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-1} e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \right\} \frac{1}{N} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{N m}{\alpha_2} \sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-1} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right\} \frac{1}{N} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial S}{\partial u_2} = \frac{N m}{\alpha_2} \sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-1} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right\} \frac{1}{N} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial m} = & -N \sum \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-1} \right. \\ & \left. \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right] \right\} \frac{1}{N} + N\gamma \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Sea:

$$T = \sum \left\{ \text{Ln} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} \right\} \right\} -$$

$$N \left\{ \text{Ln}(m-1) + \frac{1 - e^{m-1} [\text{Ln}(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \right\} = 0 \quad (\text{B.25})$$

Las derivadas parciales de la ecuación (B.25) con respecto a cada uno de los parámetros α_1 , u_1 , α_2 , u_2 y m , de la función de distribución de probabilidad BEVII esta dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = \frac{N}{\alpha_1} \Sigma \left\{ \frac{\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{(m - 1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}}} \right\} \frac{1}{N} \quad (B.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{N}{\alpha_1} \Sigma \left\{ \frac{\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \right\} \frac{1}{N} \quad (B.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = \frac{N}{\alpha_2} \Sigma \left\{ \frac{\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{(m - 1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}}} \right\} \frac{1}{N} \quad (B.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_2} = \frac{N}{\alpha_2} \Sigma \left\{ \frac{\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right\} \frac{1}{N} \quad (B.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial m} = & N \Sigma \left\{ \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-1} \cdot \right. \\ & \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{m} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right] \cdot \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{m^2} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \ln \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} \right\} \frac{1}{N} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + N \left\{ \frac{1 - e^{-m-1} [\text{Ln}(m-1)] - \gamma e^{-m-1}}{m^2} + \frac{e^{-m-1} [\text{Ln}(m-1)] + \gamma e^{-m-1}}{m} + \frac{e^{-m-1} - m}{m(m-1)} \right\} \\
 & + \frac{e^{-m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^{k-1}}{k!} + \left[\frac{e^{-m-1}}{m} - \frac{e^{-m-1}}{m^2} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \right] \quad (B.30)
 \end{aligned}$$

A continuación se procede a evaluar las esperanzas de las anteriores derivadas parciales.

Sea:

$$EP1 = \frac{\partial P}{\partial \alpha_1} = E \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha_1} \right] \quad (B.31)$$

su esperanza esta definida como:

$$EP1 = - \frac{N}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] f(x, y) dx dy$$

sustituyendo $f(x, y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}
 EP1 = & - \frac{N}{\alpha_1^2 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left[\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right] e^{-m \left[\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \\
 & \cdot e^{- \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m}} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} \\
 & \cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} \right\} dx dy \quad (B.32)
 \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable,

$$\text{sea: } x = - \frac{\alpha_1}{m} \text{Ln}(u^m - v) + u_1 ; \quad y = - \frac{\alpha_2}{m} \text{Ln } v + u_2$$

evaluando el jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - \frac{\alpha_1 u^{m-1}}{u^m - v} & \frac{\alpha_1}{m(u^m - v)} \\ 0 & - \frac{\alpha_2}{m v} \end{vmatrix}$$

$$J = \frac{\alpha_1 \alpha_2 u^{m-1}}{m(u^m - v) v}$$

Evaluación de términos:

$$\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right) = -\frac{1}{m} \ln(u^m - v)$$

$$\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right) = -\frac{1}{m} \ln v$$

$$e^{-m \left[\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right) + \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right) \right]} = [u^m - v] v$$

$$e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \frac{1}{m} = e^{-u}$$

$$\left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right] \frac{1}{m} = u^{1-2m}$$

$$\left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right] \frac{1}{m} \right\} = \left\{ (m-1) + u \right\}$$

Región de integración Ruv:

para: $x = -\infty$

$$-\infty = -\frac{\alpha_1}{m} \ln(u^m - v) + u_1$$

$$-\infty = -\ln(u^m - v)$$

$$\infty = u^m - v$$

$$\therefore u = \infty$$

para: $x = +\infty$

$$e^{-\infty} = u^m - v = 0$$

$$v = u^m$$

para: $y = -\infty$

$$v = \infty$$

para: $y = +\infty$

$$v = 0$$

Realizando el cambio de variable,

$$EP1 = \frac{N}{\alpha_1 m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} \left[(m-1) + u \right] u^{-m} e^{-u} \cdot \ln(u^m - v) dv du \quad (B.33)$$

resolviendo la integral en dv , se tiene:

$$Iv = \int_{v=0}^{v=u^m} \text{Ln}(u^m - v) dv$$

Aplicando la ecuación (620), pag. 144, (Dwight, 1961),

$$Iv = \int_{v=0}^{v=u^m} \text{Ln}(u^m - v) dv = -(u^m - v) \text{Ln}(u^m - v) - v \Big|_{v=0}^{v=u^m}$$

$$Iv = -u^m + u^m \text{Ln } u^m \quad (\text{B.34})$$

sustituyendo la ec. (B.34) en (B.33), se tiene:

$$EP1 = \frac{N}{\alpha \cdot m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} [(m-1) + u] u^{-m} e^{-u} [-u^m + u^m \text{Ln } u^m] du \quad (\text{B.35})$$

La ecuación (B.35) también puede escribirse como:

$$EP1 = -\frac{1}{\alpha \cdot m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ (m-1) e^{-u} + u e^{-u} - (m-1) e^{-u} \cdot \text{Ln } u^m - u e^{-u} \cdot \text{Ln } u^m \right\} du \quad (\text{B.36})$$

resolviendo las cuatro integrales de la ecuación (B.36),

$$I_1 = (m-1) \int_0^{\infty} e^{-u} du = m-1$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-u} u du = \Gamma(2) = 1$$

$$I_3 = -(m-1) \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot \text{Ln } u^m du = m(m-1) \int_0^{\infty} e^{-u} \text{Ln}(1/u) du$$

aplicando la ecuación 865.901, pag. 248 (Dwight, 1961), la ecuación anterior queda como:

$$I_3 = m(m-1) \gamma$$

donde: $\gamma = 0.5772$ (constante de Euler)

$$I_4 = - \int_0^{\infty} u e^{-u} \cdot \ln u^m du = m \int_0^{\infty} u e^{-u} \cdot \ln (1/u) du$$

aplicando la ecuación B65.902, pag. 248 (Dwight, 1961), la ecuación anterior queda como:

$$I_4 = m(\gamma - 1)$$

sustituyendo las expresiones para I_1, \dots, I_4 , en la ecuación (B.36),

$$EP1 = - \frac{N}{\alpha_1 m^2} \left[(m-1) + 1 + m(m-1) \gamma + m(\gamma - 1) \right]$$

realizando algunas operaciones, la ecuación anterior queda como:

$$EP1 = - \frac{N}{\alpha_1} \gamma \quad (B.37)$$

Sea:

$$EP2 = \frac{\partial P}{\partial \alpha_1} = E \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha_1} \right] \quad (B.38)$$

se puede comprobar que:

$$EP2 = - \frac{N}{\alpha_1} \quad (B.39)$$

también se tiene que:

$$EP3 = \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} = E \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha_2} \right] = 0 \quad (B.40)$$

$$EP4 = \frac{\partial P}{\partial \alpha_3} = E \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha_3} \right] = 0 \quad (B.41)$$

$$EP5 = \frac{\partial P}{\partial m} = E \left[\frac{\partial P}{\partial m} \right] = 0 \quad (B.42)$$

Sea:

$$EQ1 = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = E \left[\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} \right] \quad (B.43)$$

su esperanza esta definida como:

$$EQ1 = \frac{N}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{m-1} e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) f(x,y) dx dy$$

sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la expresi3n anterior,

$$EQ1 = \frac{N}{\alpha_1^2 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) e^{-m \left[2 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot e^{-m \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m}-1} \cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (B.44)$$

Considerando el mismo cambio de variable que en el caso anterior, y evaluando los t3rminos faltantes,

$$e^{-m \left[2 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} = [u^m - v]^2 v$$

$$\left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m}-1} = u^{2-2m}$$

Realizando el cambio de variable y efectuando algunas simplificaciones,

$$EQ1 = \frac{N}{\alpha_1 m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} \left[\ln(u^m - v) \right] (u^m - v) e^{-u} u^{1-2m} \left[(m-1) + u \right] dv du \quad (B.45)$$

resolviendo la integral en dv , haciendo:

$$Iv = \int_{v=0}^{v=u^m} \left[\ln(u^m - v) \right] (u^m - v) dv = \int_{v=0}^{v=u^m} \left\{ u^m \left[\ln(u^m - v) \right] - v \left[\ln(u^m - v) \right] \right\} dv$$

Aplicando las ecuaciones (620) y (620.1) pag. 144 (Dwight, 1961), se tiene:

$$Iv = \frac{u^{2m}}{2} [\text{Ln } u^m] - \frac{u^{2m}}{4} \quad (\text{B.46})$$

sustituyendo la ecuación (B.46) en (B.45),

$$EQ1 = - \frac{N}{\alpha_1 m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \left[\frac{u^{2m}}{2} [\text{Ln } u^m] - \frac{u^{2m}}{4} \right] e^{-u} u^{1-2m} [(m-1) + u] du \quad (\text{B.47})$$

desarrollando la ecuación anterior,

$$EQ1 = - \frac{N}{\alpha_1 m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ \frac{m(m-1)}{2} e^{-u} u (\text{Ln } u) + \frac{m}{2} e^{-u} u^2 (\text{Ln } u) - \frac{(m-1)}{4} e^{-u} u - \frac{e^{-u}}{4} u^2 \right\} du \quad (\text{B.48})$$

aplicando la ecuación (4.352,4) pag. 572 (Gradhteyn and Ryzhik, 1980), se tiene:

$$EQ1 = - \frac{N}{\alpha_1 m^2} \left\{ \frac{m(m-1)}{2} \Gamma'(2) + \frac{m}{2} \Gamma'(3) - \frac{(m-1)}{4} \Gamma(2) - \frac{\Gamma(3)}{4} \right\}$$

realizando operaciones y agrupando términos,

$$EQ1 = \frac{N}{\alpha_1} \left\{ \frac{3 - 2\gamma - 4\psi(3)}{4m} + \frac{1}{4m^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \right\} \quad (\text{B.49})$$

donde:

$\Gamma(\cdot)$: es la función gamma.

$\psi(\cdot)$: es la función digamma.

Sea:

$$EQ2 = \frac{\partial Q}{\partial u_1} = E \left[\frac{\partial Q}{\partial u_1} \right] \quad (\text{B.50})$$

su esperanza está definida como:

$$EQ2 = \frac{N}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}-1} e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} f(x,y) dx dy$$

sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior,

$$EQ2 = \frac{N}{\alpha_1^2 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-m \left[2 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot e^{-m \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{m}}} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m}-1} \cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (B.51)$$

considerando el mismo cambio de variable que en el caso anterior, esta expresión queda como:

$$EQ2 = \frac{N}{\alpha_1^m} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} (u^m - v) e^{-u} u^{1-2m} \left[(m-1) + u \right] dv du \quad (B.52)$$

resolviendo la integral interior, la ecuación (B.52) queda como:

$$EQ2 = \frac{N}{2 \alpha_1^m} \int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u} u \left[(m-1) + u \right] du \quad (B.53)$$

desarrollando la ecuación anterior,

$$EQ2 = \frac{N}{2 \alpha_1^m} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ (m-1) e^{-u} u + e^{-u} u^2 \right\} du \quad (B.54)$$

resolviendo la ecuación anterior,

$$EQ2 = \frac{N}{2 \alpha_1^m} \left\{ (m-1) \Gamma(2) + \Gamma(3) \right\}$$

la ecuación anterior también puede expresarse como:

$$EQ2 = \frac{N}{\alpha_1} \left\{ \frac{1}{2m} + 0.5 \right\} \quad (B.55)$$

Sea:

$$EQ3 = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = E \left[\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} \right] \quad (B.56)$$

su esperanza esta definida como:

$$EQ3 = \frac{N}{\alpha_2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_2} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) f(x, y) dx dy$$

siguiendo el mismo procedimiento indicado para la obtención de EQ1, ecuación (B.49), se tiene que:

$$EQ3 = \frac{N}{\alpha_2} \left\{ \frac{3 - 2\gamma - 4\psi(3)}{4m} + \frac{1}{4m^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \right\} \quad (B.57)$$

Sea:

$$EQ4 = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = E \left[\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} \right] \quad (B.58)$$

su esperanza está definida como:

$$EQ4 = \frac{N}{\alpha_2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_2} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} f(x, y) dx dy$$

siguiendo el mismo procedimiento indicado para la obtención de EQ2, ecuación (B.55), se tiene que:

$$EQ4 = \frac{N}{\alpha_2} \left\{ \frac{1}{2m} + 0.5 \right\} \quad (B.59)$$

Sea:

$$EQ5 = \frac{\partial Q}{\partial m} = E \left[\frac{\partial Q}{\partial m} \right] \quad (B.60)$$

su esperanza esta definida como:

$$\begin{aligned} EQ5 = & N \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right]^{\frac{1}{m} - 1} \right. \\ & \cdot \left(-\frac{1}{m} \right) \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right] - \\ & \left. \frac{1}{m^2} \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \ln \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{m^2} \left. \right\} f(x, y) \, dx \, dy \quad (B.61) \end{aligned}$$

expresando la ecuación anterior en la forma:

$$EQ5 = EQ5_1 + EQ5_2 + EQ5_3 \quad (B.62)$$

donde:

$$\begin{aligned} EQ5_1 = & -\frac{N}{m} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right]^{\frac{1}{m} - 1} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right] f(x, y) \, dx \, dy \quad (B.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EQ5_2 = & -\frac{N}{m^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \\ & \cdot \ln \left[\frac{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)}{e} + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e} \right] f(x, y) \, dx \, dy \quad (B.64) \end{aligned}$$

$$EQ5_3 = N \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2} f(x, y) \, dx \, dy = \frac{N}{m^2} \quad (B.65)$$

Procediendo a resolver la ecuación (B.63), sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en aquella misma,

$$EQS_1 = -\frac{N}{m} \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m}-s} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] e^{-m \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (B.66)$$

considerando el mismo cambio de variable que en los casos anteriores, y evaluando el término siguiente:

$$\left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] = -\frac{1}{m} \left\{ (u^m - v) [\text{Ln}(u^m - v)] + v (\text{Ln } v) \right\}$$

por lo que realizando el cambio de variable y efectuando algunas operaciones, la ecuación (B.66) queda como:

$$EQS_1 = \frac{N}{m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} \left\{ (u^m - v) \cdot \text{Ln}(u^m - v) + v \cdot \text{Ln } v \right\} \left[(m-1) + u \right] e^{-u} u^{1-2m} dv du \quad (B.67)$$

la ecuación (B.67) también puede escribirse como:

$$EQS_1 = \frac{N}{m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ \left[u^m \cdot \text{Ln}(u^m - v) \cdot [(m-1) + u] e^{-u} u^{1-2m} - v \cdot \text{Ln}(u^m - v) \cdot [(m-1) + u] e^{-u} u^{1-2m} + v \cdot \text{Ln } v \cdot [(m-1) + u] e^{-u} u^{1-2m} \right] dv du \quad (B.68)$$

resolviendo la integral en dv , haciendo:

$$v = u^m \\ IV_1 = \int_{v=0}^{v=u^m} \text{Ln}(u^m - v) dv$$

aplicando la ecuación (620) pag. 144 (Dwight, 1961), se tiene que:

$$Iv_1 = -u^m + u^m \cdot \text{Ln } u^m \quad (\text{B.69})$$

sea:

$$v = u^m$$

$$Iv_2 = \int_{v=0} v \cdot \text{Ln}(u^m - v) dv$$

aplicando la ecuación (620.1) pag. 144 (Dwight, 1961), se tiene que:

$$Iv_2 = -\frac{3}{4} u^{2m} + \frac{u^{2m}}{2} \cdot \text{Ln } u^m \quad (\text{B.70})$$

sea:

$$v = u^m$$

$$Iv_3 = \int_{v=0} v \cdot \text{Ln } v dv$$

aplicando la ecuación (610.1) pag. 141 (Dwight, 1961), se tiene que:

$$Iv_3 = \frac{u^{2m}}{2} \cdot \text{Ln } u^m - \frac{u^{2m}}{4} \quad (\text{B.71})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.69, 70 y 71) en (B.68) y realizando algunas operaciones,

$$EQS_1 = \frac{N}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ m(m-1) e^{-u} u(\text{Ln } u) - \frac{2(m-1)}{4} e^{-u} u + m e^{-u} u^2(\text{Ln } u) - \frac{2}{4} e^{-u} u^2 \right\} du \quad (\text{B.72})$$

Aplicando la definición de la función Gamma, ecuación (6.1.1) pag. 255, (Abramowitz and Stegun, 1965), y la ecuación (4.352,4) pag. 576 (Gradshteyn and Ryzhik, 1980),

$$EQS_1 = \frac{N}{m} \left\{ m(m-1) \Gamma'(2) - \frac{2}{4} (m-1) \Gamma(2) + m \Gamma'(3) - \frac{2}{4} \Gamma(3) \right\}$$

realizando algunas operaciones se tiene:

$$EQ5_1 = \frac{N}{m^3} \left\{ m^2(1 - \gamma) + m[\gamma - 1.5 + 2\psi(3)] - 0.5 \right\} \quad (B.73)$$

A continuación se procederá a evaluar la ecuación (B.64), sustituyendo $f(x, y)$, ec. (3.134), en aquella misma,

$$EQ5_2 = -\frac{N}{m^2 \alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left\{ \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \right\} \cdot e^{-m \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m}-2} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (B.74)$$

considerando el mismo cambio de variable que en los casos anteriores, y evaluando el nuevo término,

$$\text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] = \text{Ln } u^m$$

realizando el cambio de variable, y simplificando se tiene:

$$EQ5_2 = -\frac{N}{m^3} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} (\text{Ln } u^m) e^{-u} u^{1-m} [(m-1) + u] dv du \quad (B.75)$$

resolviendo la integral en dv ,

$$EQ5_2 = -\frac{N}{m^3} \int_{u=0}^{u=\infty} (\text{Ln } u^m) e^{-u} u [(m-1) + u] du$$

la ecuación anterior también puede escribirse como:

$$EQ5_2 = -\frac{N}{m^3} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ m(m-1) (\text{Ln } u) e^{-u} u + m(\text{Ln } u) e^{-u} u^2 \right\} du \quad (B.76)$$

aplicando la ecuación (4.352,4) pag. 576 (Gradshteyn and Ryzhik,

1980), la ecuación anterior toma la forma:

$$EQ5z = -\frac{N}{m^3} \left\{ m(m-1) \Gamma'(2) + m \Gamma'(3) \right\}$$

realizando algunas operaciones, la ecuación anterior queda como:

$$EQ5z = \frac{N}{m^3} \left\{ \gamma m^2 - m^2 + m - \gamma m - 2 m \psi(3) \right\} \quad (B.77)$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.65, 73 y 77) en (B.62),

$$EQ5 = \frac{N}{m^3} \left\{ m^2(1 - \gamma) + m[\gamma - 1.5 + 2 \psi(3)] - 0.5 \right\} + \\ + \frac{N}{m} \left\{ \gamma m^2 - m^2 + m - \gamma m - 2 m \psi(3) \right\} + \frac{N}{m^2}$$

haciendo operaciones, la ecuación anterior queda como:

$$EQ5 = \frac{N}{2m^2} \left[1 - \frac{1}{m} \right] \quad (B.78)$$

Sea:

$$ER1 = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = E \left[\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \right] \quad (B.79)$$

$$\text{dado que } \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$\text{por lo tanto: } ER1 = 0 \quad (B.80)$$

Sea:

$$ER2 = \frac{\partial R}{\partial u_1} = E \left[\frac{\partial R}{\partial u_1} \right] \quad (B.81)$$

$$\text{dado que } \frac{\partial R}{\partial u_1} = 0$$

$$\text{por lo tanto: } ER2 = 0 \quad (B.82)$$

Sea:

$$ER3 = \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = E \left[\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \right] \quad (B.83)$$

su esperanza esta definida como:

$$ER3 = - \frac{N}{\alpha_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left[\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right] f(x, y) dx dy$$

procediendo en forma semejante a lo indicado para la obtención de la ecuación (B.37), se tiene,

$$ER3 = - \frac{N}{\alpha_2} \gamma \quad (B.84)$$

Sea:

$$ER4 = \frac{\partial R}{\partial u_2} = E \left[\frac{\partial R}{\partial u_2} \right] \quad (B.85)$$

dado que: $\frac{\partial R}{\partial u_2} = - \frac{N}{\alpha_2}$

por lo tanto: $ER4 = - \frac{N}{\alpha_2}$ (B.86)

Sea:

$$ER5 = \frac{\partial R}{\partial m} = E \left[\frac{\partial R}{\partial m} \right] \quad (B.87)$$

dado que $\frac{\partial R}{\partial u_1} = 0$

por lo tanto: $ER5 = 0$ (B.88)

Sea:

$$ES1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = E \left[\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \right] \quad (B.89)$$

su esperanza está definida como:

$$ES1 = \frac{N m}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left[-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + \frac{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)}{e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \right] f(x, y) dx dy$$

sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior,

$$\begin{aligned}
 \text{ESI} &= \frac{N m}{\alpha_1^2 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right] e^{-m \left[2 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \\
 &\cdot e^{-\left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}}} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}-1} \\
 &\cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (\text{B.90})
 \end{aligned}$$

aplicando el mismo cambio de variable que en los casos anteriores y realizando algunas operaciones,

$$\text{ESI} = - \frac{N}{m \alpha_1} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} [\text{Ln}(u^m-v)] (u^m-v) e^{-u} u^{-2m} [(m-1)+u] dv du \quad (\text{B.91})$$

de acuerdo a la ecuación (B.46) la integral en dv queda definida como:

$$\text{IV} = \int_{v=0}^{v=u^m} [\text{Ln}(u^m-v)] (u^m-v) dv = \frac{u^{2m}}{2} [\text{Ln } u^m] - \frac{u^{2m}}{4} \quad (\text{B.92})$$

por lo que la ecuación (B.91) queda como:

$$\text{ESI} = - \frac{N}{m \alpha_1} \int_{u=0}^{u=\infty} \left[\frac{u^{2m}}{2} [\text{Ln } u^m] - \frac{u^{2m}}{4} \right] e^{-u} u^{-2m} [(m-1)+u] du$$

la ecuación anterior también puede expresarse como:

$$\text{ESI} = - \frac{N}{m \alpha_1} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ \frac{m(m-1)}{2} e^{-u} (\text{Ln } u) + \frac{m}{2} e^{-u} u (\text{Ln } u) - \frac{(m-1)}{4} e^{-u} - \frac{e^{-u}}{4} u \right\} du \quad (\text{B.93})$$

Aplicando la definición de la función Gamma, ecuación (6.1.1) pag. 255, (Abramowitz and Stegun, 1965), y la ecuación (4.352,4) pag. 576 (Gradshteyn and Ryzhik, 1980),

$$ES1 = - \frac{N}{m \alpha_1} \left\{ \frac{m(m-1)}{2} \Gamma'(1) + \frac{m}{2} \Gamma'(2) - \frac{(m-1)}{4} \Gamma(1) - \frac{\Gamma(2)}{4} \right\}$$

efectuando operaciones la ecuación anterior queda como:

$$ES1 = \frac{N}{\alpha_1} \left[\frac{\gamma}{2} - 0.25 \right] \quad (B.94)$$

Sea:

$$ES2 = \frac{\partial S}{\partial u_1} = E \left[\frac{\partial S}{\partial u_1} \right] \quad (B.95)$$

su esperanza está definida como:

$$ES2 = \frac{N m}{\alpha_1} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-1} e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} f(x,y) dx dy$$

sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior,

$$ES2 = \frac{N m}{\alpha_1^2 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-m \left[2 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (B.96)$$

aplicando el mismo cambio de variable que en los casos anteriores y efectuando algunas operaciones, la ecuación anterior queda como:

$$ES2 = \frac{N}{\alpha_1} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} [u^m - v] e^{-u} u^{-2m} \left[(m-1) + u \right] dv du \quad (B.97)$$

resolviendo la integral en dv ,

$$Iv = \int_{v=0}^{v=u^m} [u^m - v] dv = \frac{u^{2m}}{2} \quad (\text{B.98})$$

sustituyendo la ecuación (B.98) en (B.97),

$$ES2 = \frac{N}{2\alpha_1} \int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u} [(m-1) + u] du$$

resolviendo la ecuación anterior,

$$ES2 = \frac{N}{2\alpha_1} [(m-1) \Gamma(1) + \Gamma(2)]$$

realizando operaciones, la ecuación anterior queda como:

$$ES2 = \frac{N m}{2 \alpha_1} \quad (\text{B.99})$$

Si siguiendo el mismo procedimiento que el expuesto para la obtención de $ES1$ y $ES2$, se tiene que:

$$ES3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = E \left[\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} \right] = \frac{N}{\alpha_2} \left[\frac{\gamma m}{2} - 0.25 \right] \quad (\text{B.100})$$

$$ES4 = \frac{\partial S}{\partial u_2} = E \left[\frac{\partial S}{\partial u_2} \right] = \frac{N m}{2 \alpha_2} \quad (\text{B.101})$$

Sea:

$$ES5 = \frac{\partial S}{\partial m} = E \left[\frac{\partial S}{\partial m} \right] \quad (\text{B.102})$$

su esperanza está definida como:

$$ES5 = -N \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-1} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \right] - \gamma \right\} f(x, y) dx dy \quad (\text{B.103})$$

haciendo:

$$ESS = ESS_1 + ESS_2 \quad (B.103)$$

donde:

$$ESS_1 = N \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma f(x,y) dx dy = N \gamma \quad (B.105)$$

y

$$ESS_2 = -N \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{-1} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] \right\} f(x,y) dx dy \quad (B.106)$$

procediendo a resolver la ecuación anterior, sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134),

$$ESS_2 = -\frac{N}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-m \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] \cdot e^{-\left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}}} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m} - 1} \cdot \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} dx dy \quad (B.107)$$

aplicando el mismo cambio de variable que en los casos anteriores y realizando algunas operaciones,

$$ESS_2 = \frac{N}{m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} \left[(u^m - v) [\ln(u^m - v)] + v (\ln v) \right] e^{-u} u^{-2m} [(m-1) + u] dv du \quad (B.108)$$

de acuerdo a las ecuaciones (B.71) y (B.92) la integral en dv queda como:

$$Iv = \int_{v=0}^{v=u^m} [(u^m-v)[\text{Ln}(u^m-v)] + v(\text{Ln } v)] dv = 2 \left[\frac{u^{2m}}{2} \text{Ln } u^m - \frac{u^{2m}}{4} \right] \quad (\text{B.109})$$

sustituyendo la ecuación anterior en (B.108),

$$ESS_2 = \frac{2N}{m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \left[\frac{u^{2m}}{2} \text{Ln } u^m - \frac{u^{2m}}{4} \right] [(m-1) + u] e^{-u} u^{-2m} du \quad (\text{B.110})$$

haciendo operaciones, la ecuación anterior también puede expresarse como:

$$ESS_2 = \frac{2N}{m^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ \frac{m(m-1)e^{-u}(\text{Ln } u)}{2} + \frac{m e^{-u} u(\text{Ln } u)}{2} - \frac{(m-1)e^{-u}}{4} - \frac{e^{-u} u}{4} \right\} du$$

Aplicando la definición de la función Gamma, ecuación (6.1.1) pag. 255, (Abramowitz and Stegun, 1965), y la ecuación (4.352,4) pag. 576 (Gradshteyn and Ryzhik, 1980),

$$ESS_2 = \frac{2N}{m^2} \left\{ \frac{m(m-1)}{2} \frac{\Gamma'(1)}{2} + \frac{m}{2} \frac{\Gamma'(2)}{2} - \frac{(m-1)}{4} \frac{\Gamma(1)}{4} - \frac{\Gamma(2)}{4} \right\}$$

realizando operaciones la ecuación anterior queda como:

$$ESS_2 = N \left[\frac{1}{2} \frac{1}{m} - \gamma \right] \quad (\text{B.111})$$

sustituyendo las ecuaciones (B.105 y B.111) en (B.104),

$$ESS = \frac{N}{2} \frac{1}{m} \quad (\text{B.112})$$

Sea:

$$ET1 = \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = E \left[\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \right] \quad (\text{B.113})$$

su esperanza está definida como:

$$ET1 = \frac{N}{\alpha_1} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left[\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right]^{\frac{1}{m}} - 1 - m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)}{(m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}}} f(x,y) dx dy$$

sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior,

$$ET1 = \frac{N}{\alpha_1^2 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) e^{-m \left[2 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} - \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m}-1} dx dy \right. \\ \left. \right] \quad (B.114)$$

aplicando el mismo cambio de variables que en los casos anteriores y realizando algunas operaciones,

$$ET1 = - \frac{N}{m^2 \alpha_1} \int_{u=0}^{u=+\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} \left[\text{Ln}(u^m-v) \right] (u^m-v) e^{-u} u^{1-2m} dv du \quad (B.115)$$

de acuerdo a la ecuación (B.92) la ecuación anterior queda como:

$$ET1 = - \frac{N}{m^2 \alpha_1} \int_{u=0}^{u=+\infty} \left[\frac{m u^{2m} (\text{Ln } u)}{2} - \frac{u^{2m}}{4} \right] e^{-u} u^{1-2m} du \quad (B.116)$$

la ecuación anterior también puede escribirse como:

$$ET1 = - \frac{N}{m^2 \alpha_1} \int_{u=0}^{u=+\infty} \left\{ \frac{m e^{-u} u (\text{Ln } u)}{2} - \frac{e^{-u} u}{4} \right\} du$$

Aplicando la definición de la función Gamma, ecuación (6.1.1) pag. 255, (Abramowitz and Stegun, 1965), y la ecuación (4.352,4) pag. 576 (Gradshteyn and Ryzhik, 1980),

$$ET1 = - \frac{N}{m^2 \alpha_1} \left\{ \frac{m \Gamma'(2)}{2} - \frac{\Gamma(2)}{4} \right\}$$

realizando algunas operaciones la ecuación anterior queda como:

$$ET1 = \frac{N}{\alpha_1} \left[\frac{\gamma - 1}{2m} + \frac{1}{4m^2} \right] \quad (B.117)$$

Sea:

$$ET2 = \frac{\partial T}{\partial u_1} = E \left[\frac{\partial T}{\partial u_1} \right] \quad (B.118)$$

su esperanza está definida como:

$$ET2 = \frac{N}{\alpha_1} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m} e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \right]}{(m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m}} f(x,y) dx dy$$

sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la expresión anterior,

$$ET2 = \frac{N}{\alpha_1^2 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-m \left[2 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{2}{m} dx dy \quad (B.119)$$

aplicando el mismo cambio de variables que en los casos anteriores y realizando algunas operaciones,

$$ET2 = \frac{N}{m \alpha_1} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=\infty} (u^m - v) e^{-u} u^{1-2m} dv du \quad (B.120)$$

resolviendo la integral interior, la ecuación (B.120) queda como:

$$ET2 = \frac{N}{2m \alpha_1} \int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u} u \, du \quad (B.121)$$

resolviendo esta última integral,

$$ET2 = \frac{N \Gamma(2)}{2m \alpha_1}$$

por lo que la ecuación anterior queda como:

$$ET2 = \frac{N}{2m \alpha_1} \quad (B.122)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que el indicado para obtener ET1 y ET2, ecuaciones (B.117 y B.122),

$$ET3 = \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = E \left[\frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \right] = \frac{N}{\alpha_2} \left[\frac{\gamma - 1}{2m} + \frac{1}{4m^2} \right] \quad (B.123)$$

$$ET4 = \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = E \left[\frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \right] = \frac{N}{2m \alpha_2} \quad (B.124)$$

$$\text{Sea:} \quad ETS = \frac{\partial T}{\partial m} = E \left[\frac{\partial T}{\partial m} \right] \quad (B.125)$$

su esperanza está definida como:

$$\begin{aligned} ETS = N \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} & \left\{ \left\{ (m-1) + \left[e^{-\frac{x-u_1}{\alpha_1}} + e^{-\frac{y-u_2}{\alpha_2}} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-1} \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left\{ 1 - \frac{1}{m} \left[e^{-\frac{x-u_1}{\alpha_1}} + e^{-\frac{y-u_2}{\alpha_2}} \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left[e^{-\frac{x-u_1}{\alpha_1}} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-\frac{y-u_2}{\alpha_2}} \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] \cdot \right. \\ & \left. \frac{1}{m^2} \left[e^{-\frac{x-u_1}{\alpha_1}} + e^{-\frac{y-u_2}{\alpha_2}} \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \ln \left[e^{-\frac{x-u_1}{\alpha_1}} + e^{-\frac{y-u_2}{\alpha_2}} \right] \right\} + \\ & + \left\{ \frac{1 - e^{m-1} [\ln(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m^2} + \frac{e^{m-1} [\ln(m-1)] + \gamma e^{m-1}}{m} + \frac{e^{m-1} - m}{m(m-1)} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^{k-1}}{k!} + \left[\frac{e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m^2} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \right] \right\} f(x, y) \, dx dy \end{aligned} \quad (B.126)$$

la ecuación (B.126) puede expresarse como:

$$ETS = N [ETS_1 + ETS_2 + ETS_3 + ETS_4] \quad (B.127)$$

donde:

$$ETS_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-1} f(x,y) dx dy \quad (B.128)$$

$$ETS_2 = - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-1} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}-1} f(x,y) dx dy \quad (B.129)$$

$$ETS_3 = - \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (m-1) + \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}^{-1} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \ln \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] f(x,y) dx dy \quad (B.130)$$

$$ETS_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1 - e^{m-1} [\ln(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m^2} + \frac{e^{m-1} [\ln(m-1)] + \gamma e^{m-1}}{m} + \frac{e^{m-1} - m}{m(m-1)} + \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^{k-1}}{k!} + \left[\frac{e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m^2} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \right] \right\} f(x,y) dx dy \quad (B.131)$$

donde la ecuación (B.131) queda como:

$$ETS_4 = \left\{ \frac{1 - e^{m-1} [\text{Ln}(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m^2} + \frac{e^{m-1} [\text{Ln}(m-1)] + \gamma e^{m-1}}{m} + \frac{e^{m-1} - m}{m(m-1)} + \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^{k-1}}{k!} + \left[\frac{e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m^2} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k!} \right] \right\} \quad (\text{B.132})$$

Procediendo a resolver las restantes ecuaciones, se tiene: sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la ecuación (B.128),

$$ETS_1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-m} \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{1}{m} dx dy \quad (\text{B.133})$$

considerando el mismo cambio de variable que en los casos anteriores y efectuando algunas operaciones,

$$ETS_1 = \frac{1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=m} e^{-u} u^{-m} dv du = \frac{1}{m} \int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u} du = \frac{\Gamma(1)}{m}$$

por lo que la ecuación anterior queda como:

$$ETS_1 = \frac{1}{m} \quad (\text{B.134})$$

Ahora, sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la ecuación (B.129),

$$ETS_2 = - \frac{1}{m \alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-m} \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)}} \frac{1}{m} \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \frac{2}{m} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right] dx dy \quad (\text{B.135})$$

considerando el mismo cambio de variable que en los casos anteriores y efectuando algunas operaciones,

$$ETS_2 = \frac{1}{m^3} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} \left[(u^m - v) [\text{Ln}(u^m - v)] + v(\text{Ln } v) \right] e^{-u} u^{1-2m} dv du \quad (B.136)$$

de acuerdo a la ecuación (B.109) la ecuación anterior queda como:

$$ETS_2 = \frac{1}{m^3} \int_{u=0}^{u=\infty} \left[u^{2m}(\text{Ln } u^m) - \frac{2}{4} u^{2m} \right] e^{-u} u^{1-2m} du \quad (B.137)$$

la ecuación anterior también puede escribirse como:

$$ETS_2 = \frac{1}{m^3} \int_{u=0}^{u=\infty} \left\{ m(\text{Ln } u) e^{-u} u - \frac{2}{4} e^{-u} u \right\} du$$

Aplicando la definición de la función Gamma, ecuación (6.1.1) pag. 255, (Abramowitz and Stegun, 1965), y la ecuación (4.352,4) pag. 576 (Gradshteyn and Ryzhik, 1980),

$$ETS_2 = \frac{1}{m^3} \left\{ m \Gamma'(2) - \frac{2}{4} \Gamma(2) \right\} = \frac{1}{m^3} \{ m(1 - \gamma) - 0.5 \}$$

realizando operaciones, la ecuación anterior queda como:

$$ETS_2 = \frac{1}{m^3} \{ m - \gamma m - 0.5 \} \quad (B.138)$$

Ahora, sustituyendo $f(x,y)$, ec. (3.134), en la ecuación (B.130),

$$ETS_3 = - \frac{1}{m^2 \alpha_1 \alpha_2} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-m \left[\left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \right]} \cdot \text{Ln} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right] \cdot \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \left[e^{-m \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \right]^{\frac{2}{m}-2} dx dy \quad (B.139)$$

aplicando el mismo cambio de variable que en los casos anteriores, y afectuando algunas operaciones,

$$ET5_a = -\frac{1}{m^a} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_{v=0}^{v=u^m} m(\ln u) e^{-u} u^{i-m} dv du \quad (B.140)$$

resolviendo la integral en dv ,

$$ET5_a = -\frac{1}{m^a} \int_{u=0}^{u=\infty} m(\ln u) e^{-u} u du = -\frac{1}{m^a} [m \Gamma'(2)]$$

por lo que la ecuación anterior queda como:

$$ET5_a = \frac{1}{m^a} [\gamma m - m] \quad (B.141)$$

sustituyendo las ecuaciones (B.132, 134, 138 y 141) en la ecuación (B.127),

$$ET5 = N \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{m^a} [m - \gamma m - 0.5] + \frac{1}{m^a} [\gamma m - m] + \frac{1 - e^{m-1} [\ln(m-1)] - \gamma e^{m-1}}{m^2} + \frac{e^{m-1} [\ln(m-1)] + \gamma e^{m-1}}{m} + \frac{e^{m-1} - m}{m(m-1)} + \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^{k-1}}{k!} + \left[\frac{e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m^2} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \right] \right\}$$

realizando algunas simplificaciones, la ecuación anterior queda como:

$$ET5 = N \left\{ \frac{1 + \gamma e^{m-1} + [\ln(m-1)] e^{m-1}}{m} + \frac{1 - \gamma e^{m-1} - [\ln(m-1)] e^{m-1}}{m^2} - \frac{1}{2 m^a} + \frac{e^{m-1} - m}{m(m-1)} + \frac{e^{m-1}}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^{k-1}}{k!} + \left[\frac{e^{m-1}}{m} - \frac{e^{m-1}}{m^2} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k k!} \right] \right\} \quad (B.142)$$

APÉNDICE C
PROGRAMA BEV11-ME.BAS

APENDICE C

'NOMBRE DEL PROGRAMA: BEV11-ME.BAS
'ELABORADO POR: JOSE Y. DOMINGUEZ ESQUIVEL
'DIRECTOR DEL TEMA DE TESIS : DR. CARLOS ESCALANTE SANDOVAL

'POR MEDIO DE ESTE PROGRAMA SE ESTIMAN LOS PARAMETROS DEL MODELO: LOGISTICO BIVARIADO CON MARGINALES DE VALORES
EXTREMOS TIPO I, GUMBEL, (HEV11)

WIDTH 'LPT1:', 255
LPRINT CHR\$(27); "0"; CHR\$(15)

CONST np% = 5, IDEL% = 5, CICLO% = 2; nd = 25
DIM X(i = 1 TO nd) AS DOUBLE, y(i = 1 TO nd) AS DOUBLE, ZX(i = 0 TO nd) AS DOUBLE, ZY(nd) AS DOUBLE
DIM PAR0(np) AS DOUBLE, DIFPAR(np) AS DOUBLE, M(np, np) AS DOUBLE, MINV(np, np) AS DOUBLE, NOINV(np, np) AS DOUBLE
DIM IDEL(np, np) AS DOUBLE, MIDEN(np, np) AS DOUBLE, R(np, np) AS DOUBLE, R1(np, np) AS DOUBLE
DIM RNOINV(np, np) AS DOUBLE, PQRST(np, 1) AS DOUBLE, PQRST1(np, 1) AS DOUBLE, INIQR(np, 1) AS DOUBLE
DIM Z(IDEL + 1) AS DOUBLE, QQPAR(np) AS DOUBLE, A(np, 2 * np + 1) AS DOUBLE, B(np, np + 1) AS DOUBLE, C(np, np) AS DOUBLE
DIM alfa1(3), alfa2(3), mu1(3), mu2(3)
DEFINT I-K
DEFDBL A-F, L-M, P-T, V, X-Z

PARAMETRO INICIAL m = PAR0(5) = 2
PAR0(5) = 2: ' MI

***** INICIA PROGRAMA PRINCIPAL *****

CLS :

'LECTURA DE DATOS PRINCIPALES (CONSTANTES)
CONST tol# = .00001, PI# = 3.141592654#, GAMA# = .5772156649#
CONST DIGAMA# = .9227843351#, DIGAMA# = 1.2561176684#
FOR registros = 1 TO 20
PAR0(5) = 2
READ nd

' LECTURA DE DATOS DE LA estacion No 1 y No 2

READ estacion1\$

FOR i = 1 TO nd

READ X(i)

NEXT i

READ estacion2\$

FOR i = 1 TO nd

READ y(i)

NEXT i

GOSUB PARINI: 'SE ESTIMAN PARAMETROS INICIALES, DIRECCIONES +100

10 GOSUB MATRIZM: 'CALCULA MATRIZ [M], DIRECCIONES +500

GOSUB APROXINVER: 'VA A INVERTIR LA MATRIZ [M]; PRIMERA APROXIMACION

{NOINV} = [M]⁻¹, DIRECCIONES +600

GOSUB INVERSA: 'SUBROUTINA PARA MEJORAR LA APROXIMACION (A CUATRO

CIFRAS DECIMALES) DE LA MATRIZ INVERSA [MINVER],

DIRECCIONES +700

GOSUB GENPQRST: 'SE GENERA LA MATRIZ DE RESTRICCIONES: {PQRST},

DIRECCIONES +800

GOSUB PRODUCTO: 'PRODUCTO DE MATRICES [INPQR]-[MINV]*[PQRST]

GOSUB DIFPAR: 'SE OBTIENEN LOS NUEVOS PARAMETROS, DIRECCIONES +1000

FOR i = 1 TO np

IF (dp(i) * imin) = 0 THEN 20 ELSE 15

NEXT i

15 max = 0

FOR i = 1 TO np

IF dp(i) * imin * 5 > tol THEN max = dp(i) * imin * 5

NEXT i

IF max = 0 THEN 20 ELSE 10

20 IF registros = 1 THEN 25 ELSE 26

25 LPRINT "TABLA 5.5 ESTIMACION DE PARAMETROS DEL MODELO BEV11 DE LAS ESTACIONES SELECCIONADAS "

LPRINT "DE LAS REGIONES A Y B "

LPRINT "ANALISIS BIVARIADO "

26 LPRINT estacion1\$, estacion2\$

LPRINT "[PQRST] [PQRST] i+ ESTIM I INCREM ESTIM i+1 ZMIN i ZMIN i+1 I(i) I(i) i+ "

LPRINT "

FOR i = 1 TO np

LPRINT USING "#####", PQRST(i, 1), PQRST(i, 1), QQPAR(i), dp(i) * imin, PAR0(i), ZMINA, ZMIN, ENTROPIA1, ENTROPIA2

NEXT i

NEXT registros

END

***** FINALIZA PROGRAMA PRINCIPAL *****

PARINI: SUBROUTINA DE ESTIMACION DE PARAMETROS INICIALES, DIRECCIONES +100

CALCULO DE LA MEDIA

```
sumx = 0: sumy = 0
FOR i = 1 TO nd
  sumx = sumx + X(i): sumy = sumy + y(i)
NEXT i: xmed = sumx / nd: ymed = sumy / nd
```

CALCULO DE VARIANZA

```
varx = 0: vary = 0
FOR i = 1 TO nd
  varx = varx + (X(i) - xmed) ^ 2
  vary = vary + (y(i) - ymed) ^ 2
NEXT i
varx = varx / (nd - 1)
vary = vary / (nd - 1)
```

PROCESO: PARAMETROS ESTIMADOS POR MOMENTOS

```
alfa1(1) = (6 * varx) ^ .5 / PI: PARO(1) = alfa1(1)
mu1(1) = xmed - GAMA * alfa1(1): PARO(2) = mu1(1)
alfa2(1) = (6 * vary) ^ .5 / PI: PARO(3) = alfa2(1)
mu2(1) = ymed - GAMA * alfa2(1): PARO(4) = mu2(1)
```

EN ESTA SUBROUTINA SON ESTIMADOS LOS PARAMETROS INICIALES POR POME-UNIVARIADO PROPORCIONANDO COMO SALIDA:

```
* PARO(1)
* PARO(2)
* PARO(3)
* PARO(4)
```

RETURN

MATRIZM: SUBROUTINA PARA EVALUAR LA MATRIZ [M]; No DIRECCIONES +500

```
M(1, 1) = -GAMA / PARO(1): M(1, 2) = -1 / PARO(1): M(1, 3) = 0: M(1, 4) = 0: M(1, 5) = 0
A = (3 - 2 * GAMA - 4 * DIGAMA3) / (4 * PARO(5)) + 1 / (4 * (PARO(5)) ^ 2) + (GAMA - 1) / 2
B = 1 / (2 * PARO(5)) + 5
M(2, 1) = A / PARO(1): M(2, 2) = B / PARO(1): M(2, 3) = A / PARO(3): M(2, 4) = B / PARO(3)
M(2, 5) = (1 - 1 / PARO(5)) / (2 * (PARO(5)) ^ 2)
M(3, 1) = 0: M(3, 2) = 0: M(3, 3) = -GAMA / PARO(3): M(3, 4) = -1 / PARO(3): M(3, 5) = 0
C = GAMA * PARO(5) / 2 - 25
M(4, 1) = C / PARO(1): M(4, 2) = PARO(5) / (2 * PARO(1)): M(4, 3) = C / PARO(3)
M(4, 4) = PARO(5) / (2 * PARO(3)): M(4, 5) = 1 / (2 * PARO(5))
D = (GAMA - 1) / (2 * PARO(5)) + 1 / (4 * (PARO(5)) ^ 2)
M(5, 1) = D / PARO(1): M(5, 2) = 1 / (2 * PARO(1) * PARO(5)): M(5, 3) = D / PARO(3)
M(5, 4) = 1 / (2 * PARO(3) * PARO(5))
```

```
K = 0: LFACTK = 1: D1 = 0: D2 = 0
500 K = K + 1
LFACTK = LFACTK * K
SUMK1 = (-1) ^ K * (PARO(5) - 1) ^ (K - 1) / LFACTK
SUMK2 = (-1) ^ K * (PARO(5) - 1) ^ K / (K * LFACTK)
D1 = SUMK1 + D1
D2 = SUMK2 + D2
IF ABS(SUMK1) <= .0000001# AND ABS(SUMK2) <= .0000001# THEN 510 ELSE 500
510 p1 = EXP(PARO(5) - 1)
p2 = (LOG(PARO(5) - 1)) * p1
p3 = p1 / PARO(5)
p4 = p3 / PARO(5)
p5 = GAMA * p1
M(5, 5) = (1 + p5 + p2) / PARO(5) + (1 - p5 - p2) / (PARO(5)) ^ 2 - 1 / (2 * (PARO(5)) ^ 3)
+ (p1 - PARO(5)) / (PARO(5) * (PARO(5) - 1)) + p3 * D1 + (p3 - p4) * D2
```

```
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  M(i, j) = (-1) * M(i, j)
NEXT j, i
RETURN
```

APROXINVER: 'SUBROUTINA PARA INVERSION DE LA MATRIZ M; No DIRECCIONES +600

```

FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  B(i, j) = M(i, j)
NEXT j, i

EPS = .00000001#
FOR K = 1 TO np
FOR j = 1 TO np + 1
  A(K, j) = B(K, j)
NEXT j
FOR j = np + 2 TO 2 * np + 1
  A(K, j) = 0
NEXT j
  A(K, K - 1 + np + 2) = 1
NEXT K

GOSUB IMPREM: 'SE IMPRIME LA MATRIZ [M]
'COMIENZA EL PROCESO DE DE REDUCCION DE GAUSS-JORDAN

FOR K = 1 TO np
'SE APLICA LA ESTRATEGIA DE PIVOTEO PARCIAL
  MAXPIVOT = ABS(A(K, K)): NPIVOT = K
FOR i = K TO np
  IF MAXPIVOT >= ABS(A(i, K)) GOTO 600
  MAXPIVOT = ABS(A(i, K)): NPIVOT = i
600 . NEXT i
  IF MAXPIVOT >= EPS GOTO 610
  IF NPIVOT = K GOTO 620
FOR j = K TO 2 * np + 1
  SWAP A(NPIVOT, j), A(K, j)
NEXT j
620 . D = A(K, K)
FOR j = 2 * np + 1 TO K STEP -1
  A(K, j) = A(K, j) / D
NEXT j
FOR i = 1 TO np
  IF i = K GOTO 630
  MULT = A(i, K)
FOR j = 2 * np + 1 TO K STEP -1
  A(i, j) = A(i, j) - MULT * A(K, j)
NEXT j
630 . NEXT i, K
'LOS VALORES CALCULADOS DE [M](-1) SE LE ASIGNAN A LA MATRIZ [NOINV]
FOR KA = 1 TO np
  JJ = 0
FOR j = np + 2 TO 2 * np + 1
  JJ = JJ + 1
  NOINV(KA, JJ) = A(KA, j)
  MINV(KA, JJ) = NOINV(KA, JJ) / (nd)
NEXT j, KA
GOSUB IMPREMINV
GOSUB IMPREIDEN: 'INPUT JY
'EL PRODUCTO DE MATRICES [NOINV] * [M] SE LE ASIGNA A LA MATRIZ [NOIDEN]
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  NOIDEN(i, j) = C(i, j)
NEXT j, i
RETURN

IMPREM: '***** IMPRESION DE LA MATRIZ [M] *****
PRINT "MATRIZ AUMENTADA [M], ya esta multiplicada por -1 ."
FOR KA = 1 TO np
FOR j = 1 TO np + 1
  PRINT USING "###.###": A(KA, j) * nd;
NEXT j; PRINT: NEXT KA
RETURN

IMPREMINV: '***** IMPRIME LA MATRIZ INVERSA [MINV] *****
PRINT "MATRIZ INVERSA [MINV], ya esta multiplicada por -1 ."
FOR KA = 1 TO np
FOR j = np + 2 TO 2 * np + 1
  PRINT USING "#####.##": A(KA, j) / nd;
NEXT j; PRINT: NEXT KA
RETURN

```


IMPREDEN: ***** VERIFICA EL PRODUCTO DE [M] POR [MINV] *****

```
PRINT "EL PRODUCTO DE LA MATRIZ POR SU INVERSA DEBERA SER LA MATRIZ IDENTIDAD."
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  C(i, j) = 0
FOR K = 1 TO np
  C(i, j) = C(i, j) + B(i, K) * A(K, j + np + 1)
NEXT K, j, i

FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  PRINT USING "###.###": C(i, j);
NEXT j: PRINT: NEXT i
PRINT "ATENCIÓN :LA MATRIZ INVERSA PUEDE NO SER LA CORRECTA.": INPUT JY
```

RETURN

INVERSA: SUBROUTINA PARA MEJORAR LA APROXIMACION A LA INVERSA DE LA MATRIZ [M]
[MINV], DIRECCIONES + 700

```
APROX = .0001
'SE GENERA LA MATRIZ IDENTIDAD [IDEM]
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  IF i = j THEN IDEN(i, j) = 1 ELSE IDEN(i, j) = 0
NEXT j, i
'SE GENERA LA MATRIZ DE RESIDUOS [R]
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  R(i, j) = IDEN(i, j) - NOIDEN(i, j)
NEXT j, i
'INICIA PROCESO PARA MEJORAR LA APROXIMACION DE LA MATRIZ INVERSA [MINV]
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  MINV(i, j) = NOINV(i, j)
  A(i, j) = R(i, j)
  B(i, j) = NOINV(i, j)
NEXT j, i
GOSUB MMULT
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  RNOINV(i, j) = C(i, j)
NEXT j, i
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  IF ABS(RNOINV(i, j)) <= APROX THEN 710
NEXT j, i
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  MINV(i, j) = MINV(i, j) + RNOINV(i, j)
NEXT j, i
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  A(i, j) = R(i, j)
  B(i, j) = R(i, j)
NEXT j, i
GOSUB MMULT
700 FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  R1(i, j) = C(i, j)
  A(i, j) = R(i, j)
  B(i, j) = NOINV(i, j)
NEXT j, i
GOSUB MMULT
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  RNOINV(i, j) = C(i, j)
NEXT j, i
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  IF ABS(RNOINV(i, j)) <= APROX THEN 710
NEXT j, i
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
  MINV(i, j) = MINV(i, j) + RNOINV(i, j)
NEXT j, i
```

```

FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
A(i, j) = R(i, j)
B(i, j) = RI(i, j)
NEXT j, i
CICLO = CICLO + 1
PRINT "MATRIZ INVERSA [MINV], CICLO="; CICLO
FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
PRINT USING "#####.###": MINV(i, j) / nd;
NEXT j: PRINT : NEXT i
GOSUB MMULT
GOTO 700
710 FOR i = 1 TO np
FOR j = 1 TO np
MINV(i, j) = MINV(i, j) / nd
PRINT USING "#####.###": MINV(i, j);
NEXT j: PRINT : NEXT i
RETURN
MMULT: 'SUBROUTINA PARA MULTIPLICACION DE MATRICES
FOR II = 1 TO np
FOR JI = 1 TO np
C(II, JI) = 0
FOR KI = 1 TO np
C(II, JI) = C(II, JI) + A(II, KI) * B(KI, JI)
NEXT KI, JI, II
RETURN
GENPQRST: 'SE GENERA LA MATRIZ DE RESTRICCIONES [PQRST], DIRECCIONES +800
'EN ESTA SUBROUTINA SE GENERA Y EVALUA LA MATRIZ DE
'RESTRICCIONES: MATRIZ [PQRST]
RETURN
PRODUCTO: 'MULTIPLICACION DE MATRICES [INPQR]=[MINV]*[PQRST]
FOR II = 1 TO np
FOR JI = 1 TO J
INPQR(II, JI) = 0
FOR KI = 1 TO np
INPQR(II, JI) = INPQR(II, JI) + MINV(II, KI) * PQRST(KI, JI)
NEXT KI, JI, II
RETURN
DIFPAR: 'SE OBTIENE EL INCREMENTO DE LOS NUEVOS PARAMETROS, DIRECCIONES +1000
FOR i = 1 TO np
dp(i) = INPQR(i, 1) / IDEL: QQPAR(i) = PAR0(i): PQRST(i, 1) = PQRST(i, 1)
NEXT i
Z(0) = (PQRST(1, 1)) ^ 2 + (PQRST(2, 1)) ^ 2 + (PQRST(3, 1)) ^ 2 + (PQRST(4, 1)) ^ 2 + (PQRST(5, 1)) ^ 2
ZMINA = Z(0)
FM = EXP(E) / PAR0(5) * (EXP(-E) * (E * LOG(E) + 1 + LOG(E)) - GAMA - LOG(E) - E)
ENTROPIA1 = LOG(PAR0(1) * PAR0(3)) + 2 * PAR0(5) * GAMA + (PAR0(5) + 1) / PAR0(5) - (1 / PAR0(5) - 2) * FM
FOR IDELTA = 1 TO IDEL
FOR i = 1 TO np
PAR0(i) = PAR0(i) + dp(i)
NEXT i
GOSUB GENPQRST
Z(IDELTA) = (PQRST(1, 1)) ^ 2 + (PQRST(2, 1)) ^ 2 + (PQRST(3, 1)) ^ 2 + (PQRST(4, 1)) ^ 2
+ (PQRST(5, 1)) ^ 2
NEXT IDELTA
imin = 0
ZMIN = Z(imin)
FOR i = 1 TO IDEL
IF ZMIN <= Z(i) THEN 1010 ELSE 1000
1000 ZMIN = Z(i)
imin = i
1010 NEXT i
FOR i = 1 TO np
PAR0(i) = QQPAR(i) + dp(i) * imin
NEXT i
GOSUB GENPQRST
FM = EXP(E) / PAR0(5) * (EXP(-E) * (E * LOG(E) + 1 + LOG(E)) - GAMA - LOG(E) - E)
ENTROPIA2 = LOG(PAR0(1) * PAR0(3)) + 2 * PAR0(5) * GAMA + (PAR0(5) + 1) / PAR0(5) - (1 / PAR0(5) - 2) * FM
RETURN

```

'DATOS:

'* REGION A *

DATA 17

'ESTACION: BADIRAGUATO, UBICACION: SINALOA, AVOS DE REGISTRO: 23, PERIODO: 1959-1981

DATA "BADIRAGUATO"

DATA 361, 435, 276, 4220, 420, 236

DATA 213, 922, 480, 435, 64, 250, 435, 470, 585, 600

DATA 290, 320, 250, 245, 890, 434, 516

'ESTACION: GUATENIPA, UBICACION: SINALOA, AVOS DE REGISTRO: 17, PERIODO: 1965-1981

DATA "GUATENIPA"

DATA 675, 565, 2037, 5000, 435, 798, 1670, 4230, 2431, 1717

DATA 488, 3127, 451, 860, 3050, 825, 3392

DATA 13

'ESTACION: CHIHNIPAS, UBICACION: CHIHUAHUA, AVOS DE REGISTRO: 15, PERIODO: 1966-1980

DATA "CHIHNIPAS"

DATA 406, 843

DATA 363, 721, 417, 1420, 1152, 1516, 1742, 430, 420, 752

DATA 1446, 2158, 720

'ESTACION: URIQUE, UBICACION: CHIHUAHUA, AVOS DE REGISTRO: 13, PERIODO: 1968-1980

DATA "URIQUE"

DATA 216, 115, 88, 308, 274, 319, 354, 308, 293, 79

DATA 300, 716, 338

DATA 13

'ESTACION: SAN IGNACIO, UBICACION: CHIHUAHUA, AVOS DE REGISTRO: 14, PERIODO: 1967-1980

DATA "S. IGNACIO"

DATA 1341

DATA 1164, 960, 860, 884, 1740, 3075, 1897, 1002, 4020, 861

DATA 1696, 2210, 876

'ESTACION: URIQUE, UBICACION: CHIHUAHUA, AVOS DE REGISTRO: 13, PERIODO: 1968-1980

DATA "URIQUE"

DATA 216, 115, 88, 308, 274, 319, 354, 308, 293, 79

DATA 300, 716, 338

DATA 23

'ESTACION: TOAHAYANA, UBICACION: SINALOA, AVOS DE REGISTRO: 23, PERIODO: 1958-1980

DATA "TOAHAYANA"

DATA 1560, 343, 2239, 793, 888, 1814, 392, 329, 812, 1251

DATA 1298, 295, 311, 1060, 878, 1570, 963, 368, 830, 672

DATA 1500, 1930, 331

'ESTACION: ZOPILOTE, UBICACION: SINALOA, AVOS DE REGISTRO: 42, PERIODO: 1939-1980

DATA "ZOPILOTE"

DATA 162, 35, 10, 400, 819, 110, 116, 194, 23, 690

DATA 776, 182, 75, 386, 487, 54, 206, 377, 70

DATA 1030, 334, 177, 230, 331, 806, 82, 293, 611, 710

DATA 452, 10, 838, 318, 275, 518, 296, 561, 508, 370

DATA 93, 43, 320

'* REGION B *

DATA 22

'ESTACION: ACHOTAL, UBICACION: VERACRUZ, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970

DATA "ACHOTAL"

DATA 352, 451, 506, 541, 327, 524, 654, 464, 532, 618

DATA 339, 913, 685, 432, 659, 449, 546, 803, 594, 704

DATA 14, 546

'ESTACION: BELLACO, UBICACION: VERACRUZ, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970

DATA "BELLACO"

DATA 499, 486, 596, 740, 408, 499, 781, 534, 510, 733

DATA 538, 830, 674, 400, 500, 542, 533, 745, 485, 734

DATA 1950, 624

DATA 14

'ESTACION: APAOLA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 14, PERIODO DE REGISTRO: 1957-1970

DATA "APAOLA"

DATA 74, 543, 32, 41, 90, 22, 118, 6, 18, 64

DATA 74, 22, 121, 114

'ESTACION: DOMINGUILLO, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 15, PERIODO DE REGISTRO: 1956-1970

DATA "DOMINGUILLO"

DATA 43

DATA 43, 60, 30, 89, 31, 19, 29, 26, 17, 58

DATA 59, 18, 290, 20

DATA 14

'ESTACION: APAOLA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 14, PERIODO DE REGISTRO: 1957-1970

DATA "APAOLA"

DATA 74, 543, 32, 41, 90, 22, 118, 6, 18, 64

DATA 74, 22, 121, 114

'ESTACION: MATAMBA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 14, PERIODO DE REGISTRO: 1957-1970

DATA "MATAMBA "

DATA 86, 939, 192, 668, 385, 168, 393, 142, 121, 271

DATA 299, 240, 703, 264

DATA 14

'ESTACION: ANGEL R. CABADAS, UBICACION: VERACRUZ, AVOS DE REGISTRO: 14, PERIODO DE REGISTRO: 1957-1970

DATA "ANGEL R. C."

DATA 126, 190, 28, 404, 128, 94, 72, 129, 227, 236

DATA 500, 243, 234, 200

'ESTACION: LAUCHAPAN, UBICACION: VERACRUZ, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970

DATA "LAUCHAPAN "

DATA 452, 390, 501, 764, 491, 343, 1192, 654,

DATA 183, 492, 168, 656, 213, 203, 429, 330, 364, 384

DATA 610, 394, 436, 173

DATA 12

'ESTACION: AXUSCO, UBICACION: PUEBLA, AVOS DE REGISTRO: 12, PERIODO DE REGISTRO: 1959-1970

DATA "AXUSCO "

DATA 52, 38, 23, 44, 129, 136, 62, 96, 61, 35

DATA 55, 72

'ESTACION: LA ANGOSTURA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 16, PERIODO DE REGISTRO: 1955-1970

DATA "LA ANGOSTURA "

DATA 452, 123, 267, 268

DATA 355, 381, 175, 409, 220, 212, 103, 269, 197, 132

DATA 431, 253

DATA 22

'ESTACION: AZUETA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970

DATA "AZUETA "

DATA 702, 750, 974, 1320, 942, 1017, 915, 947, 705, 1023

DATA 725, 1270, 975, 735, 750, 741, 770, 822, 733, 1320

DATA 1404, 906

'ESTACION: PAPALOAPAN, UBICACION: VERACRUZ, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970

DATA "PAPALOAPAN "

DATA 2336, 6228, 3803, 5358, 3632, 4645, 4265, 5166, 2660, 6825

DATA 3700, 4390, 4290, 3231, 3060, 3747, 2920, 3120, 2450, 3414

DATA 6850, 3048

DATA 10

'ESTACION: AZUETA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970

DATA "AZUETA "

DATA 702, 750, 974, 1320, 942, 1017, 915, 947, 705, 1023

DATA 725, 1270

DATA 975, 735, 750, 741, 770, 822, 733, 1320, 1404, 906

'ESTACION: TUXTEPEC, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 10, PERIODO: 1961-1970

DATA "TUXTEPEC "

DATA 4235, 2750, 2562, 3340, 3015, 3263, 2780, 3002, 4669, 3038

DATA 10

'ESTACION: LA ESTRELLA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 17: 1954-70

DATA "L ESTRELLA "

DATA 1042, 1679, 1113, 889, 2305, 1370, 1652

DATA 1418, 1366, 1075, 999, 1673, 815, 1234, 1194, 1707, 1262

'ESTACION: TUXTEPEC, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 10, PERIODO: 1961-1970

DATA "TUXTEPEC "

DATA 4235, 2750, 2562, 3340, 3015, 3263, 2780, 3002, 4669, 3038

DATA 12

'ESTACION: TOMELLIN, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 12, PERIODO DE REGISTRO: 1959-1970

DATA "TOMELLIN "

DATA 46, 250, 153, 54, 203, 102, 306, 72, 57, 167

DATA 256, 138

'ESTACION: APAOLA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 14, PERIODO DE REGISTRO: 1957-1970

DATA "APAOLA "

DATA 74, 543

DATA 32, 41, 90, 22, 118, 6, 18, 64, 74, 22

DATA 121, 114

DATA 16

'ESTACION: XIQUILA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 16, PERIODO DE REGISTRO: 1955-1970

DATA "XIQUILA "

DATA 618, 306, 236, 251, 410, 281, 81, 361, 281, 169

DATA 149, 361, 232, 208, 440, 233

'ESTACION: LA ANGOSTURA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 16, PERIODO DE REGISTRO: 1955-1970

DATA "LA ANGOSTURA "

DATA 452, 123, 267, 268, 355, 381, 175, 409, 220, 212

DATA 103, 269, 197, 132, 431, 253

DATA 17
'ESTACION: CANTON, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970
DATA "CANTON "
'DATA 937, 2950, 2308, 2572, 1565
DATA 2176, 1835, 2175, 1287, 4880, 1958, 3060, 2505, 1609, 1725
DATA 1845, 2470, 2443, 1685, 2355, 3960, 2212
'ESTACION: LA ESTRELLA, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 17: 1954-70
DATA "L ESTRELLA "
DATA 1042, 1679, 1113, 889, 2305, 1370, 1652, 1418, 1366, 1075
DATA 999, 1673, 815, 1234, 1194, 1707, 1262

DATA 17
'ESTACION: CANTON, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970
DATA "CANTON "
'DATA 937, 2950, 2308, 2572, 1565
DATA 2176, 1835, 2175, 1287, 4880, 1958, 3060, 2505, 1609, 1725
DATA 1845, 2470, 2443, 1685, 2355, 3960, 2212
'ESTACION: STO. DOMINGO, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 17 : 1954-70
DATA "STO. DMNGO."
DATA 1260, 1242, 650, 392, 1670, 825, 1300, 968, 545, 734
DATA 495, 772, 678, 543, 724, 1697, 656

DATA 18
'ESTACION: PAPALOAPAN, UBICACION: VERACRUZ, AVOS DE REGISTRO: 22, PERIODO DE REGISTRO: 1949-1970
DATA "PAPALOAPAN "
'DATA 2336, 6228, 3803, 5358
DATA 3632, 4645, 4265, 5166, 2660, 6825, 3700, 4390, 4290, 3231
DATA 3060, 3747, 2920, 3120, 2450, 3414, 6850, 3048
'ESTACION: JACATEPEC, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 18: 1953-70
DATA "JACATEPEC "
DATA 2396, 1257, 1518, 1134, 975, 2593, 1860, 1624, 1804, 1252
DATA 920, 1033, 1233, 943, 1580, 1388, 1995, 1059

DATA 10
'ESTACION: TUXTEPEC, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 10, PERIODO: 1961-1970
DATA "TUXTEPEC "
DATA 4235, 2750, 2562, 3340, 3015, 3263, 2780, 3002, 4669, 3038
'ESTACION: JACATEPEC, UBICACION : OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 18: 1953-70
DATA "JACATEPEC "
'DATA 2396, 1257, 1518, 1134, 975, 2593, 1860, 1624
DATA 1804, 1252, 920, 1033, 1233, 943, 1580, 1388, 1995, 1059

DATA 17
'ESTACION: JACATEPEC, UBICACION : OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 18: 1953-70
DATA "JACATEPEC "
'DATA 2396
DATA 1257, 1518, 1134, 975, 2593, 1860, 1624, 1804, 1252, 920
DATA 1033, 1233, 943, 1580, 1388, 1995, 1059
'ESTACION: LA ESTRELLA, UBICACION : OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 17: 1954-70
DATA "L ESTRELLA "
DATA 1042, 1679, 1113, 889, 2305, 1370, 1652, 1418, 1366, 1075
DATA 999, 1673, 815, 1234, 1194, 1707, 1262

DATA 17
'ESTACION: LA ESTRELLA, UBICACION : OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 17: 1954-70
DATA "L ESTRELLA "
DATA 1042, 1679, 1113, 889, 2305, 1370, 1652, 1418, 1366, 1075
DATA 999, 1673, 815, 1234, 1194, 1707, 1262
'ESTACION: STO. DOMINGO, UBICACION: OAXACA, AVOS DE REGISTRO: 17 : 1954-70
DATA "STO. DMNGO "
DATA 1260, 1242, 650, 392, 1670, 825, 1300, 968, 545, 734
DATA 495, 772, 678, 543, 724, 1697, 656

APÉNDICE D
CURVAS DE FRECUENCIAS EMPIRICA Y AJUSTADA MEDIANTE
LAS APROXIMACIONES UNIVARIADA Y BIVARIADA PARA LOS
GASTOS MAXIMOS ANUALES

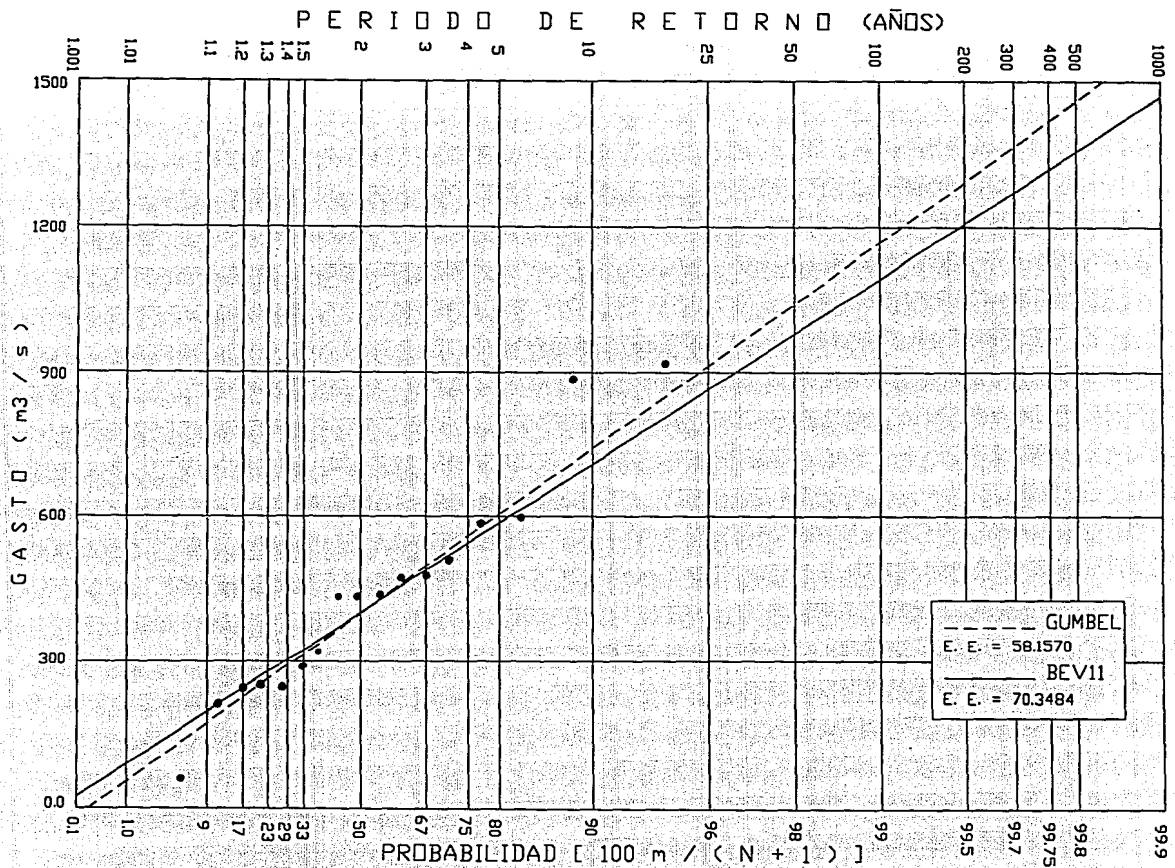


FIGURA D.1. Curvas de frecuencias empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos maximos anuales de la estacion: BADIRAGUATO.

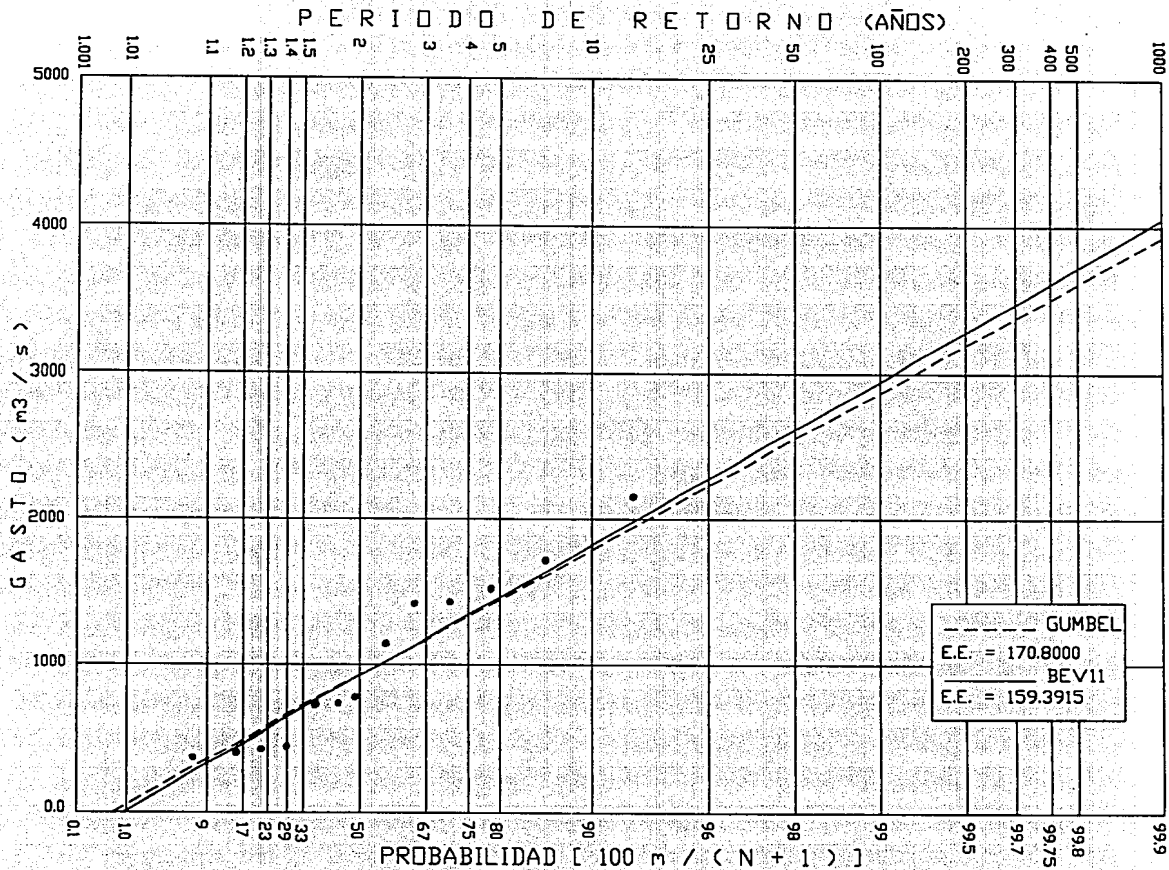


FIGURA D.2. Curvas de frecuencias empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos maximos anuales de la estacion: CHINIPAS.

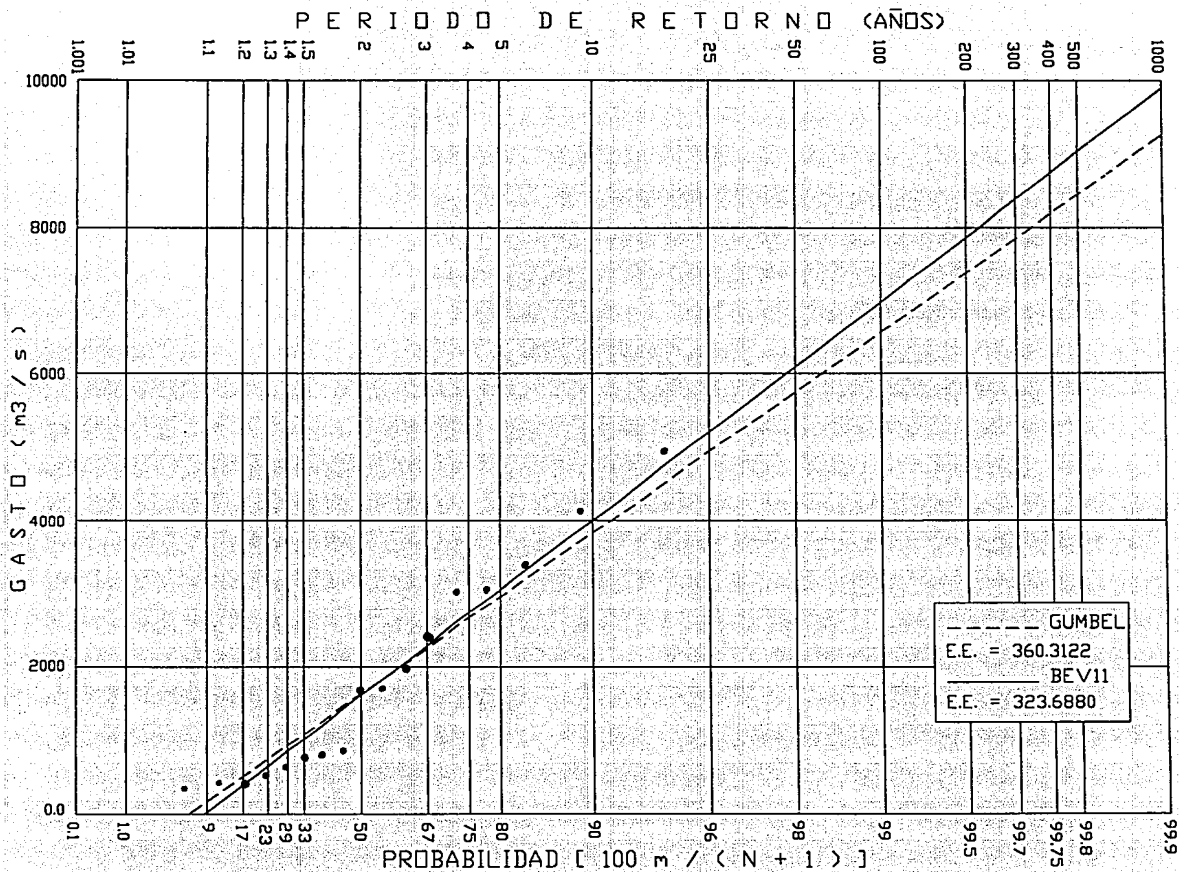


FIGURA D.3. Curvas de frecuencias empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos maximos anuales de la estacion: GUATENIPA.

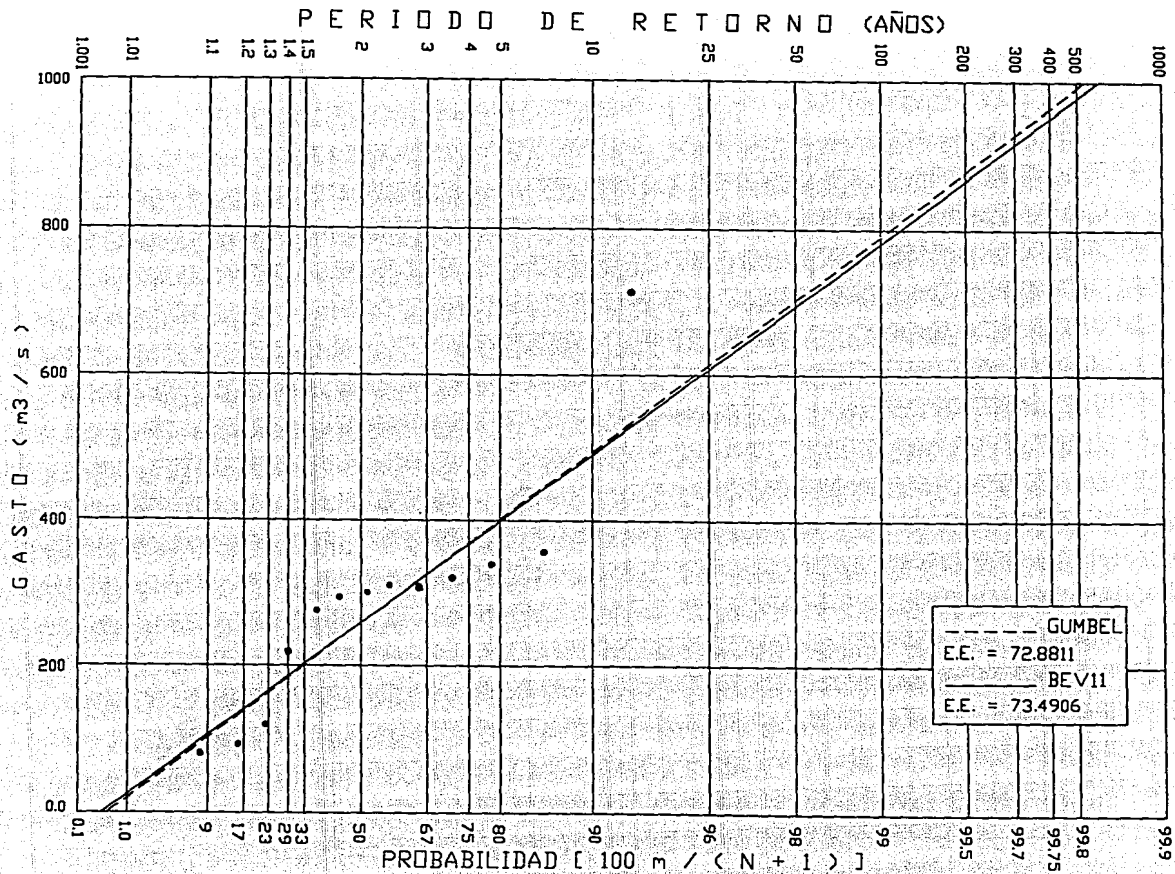


FIGURA D.4. Curvas de frecuencias empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos maximos anuales de la estacion: URIQUE.

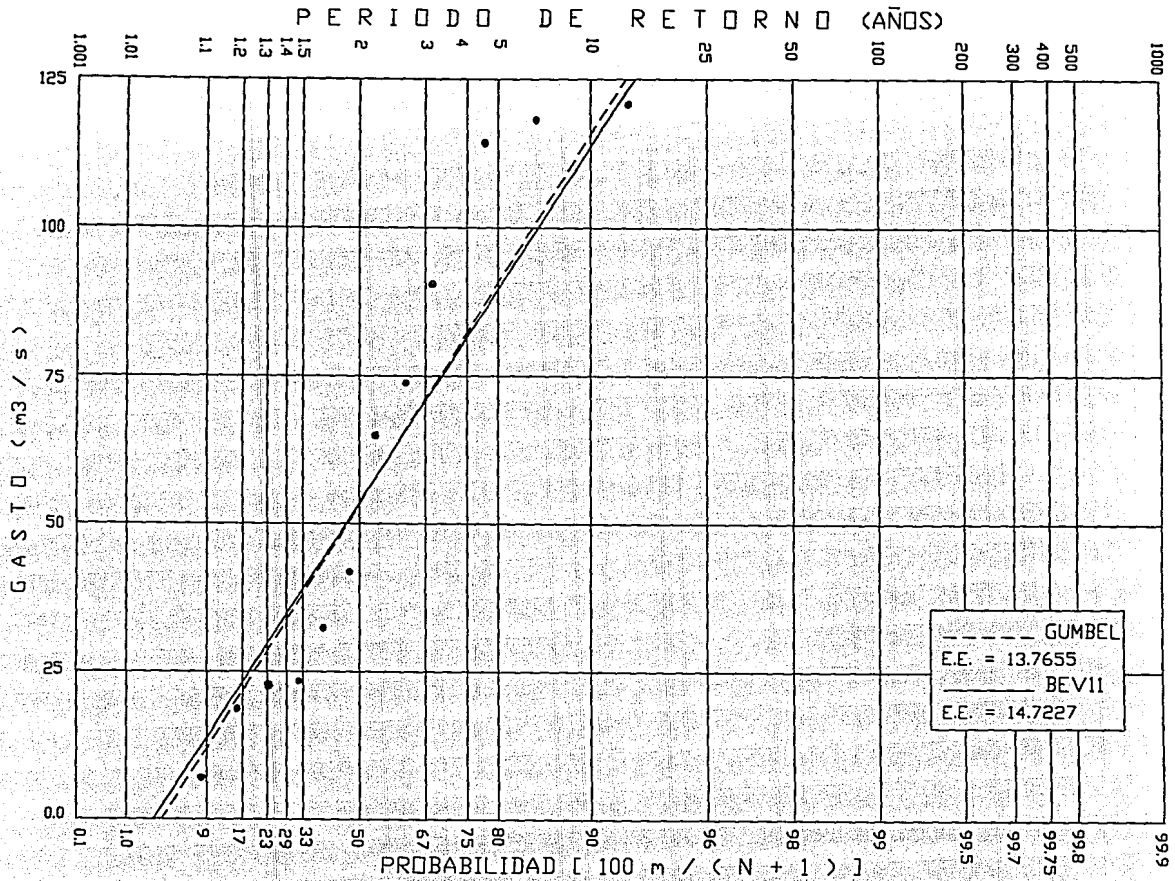


FIGURA D.5. Curvas de frecuencias empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos maximos anuales de la estacion: APAQLA

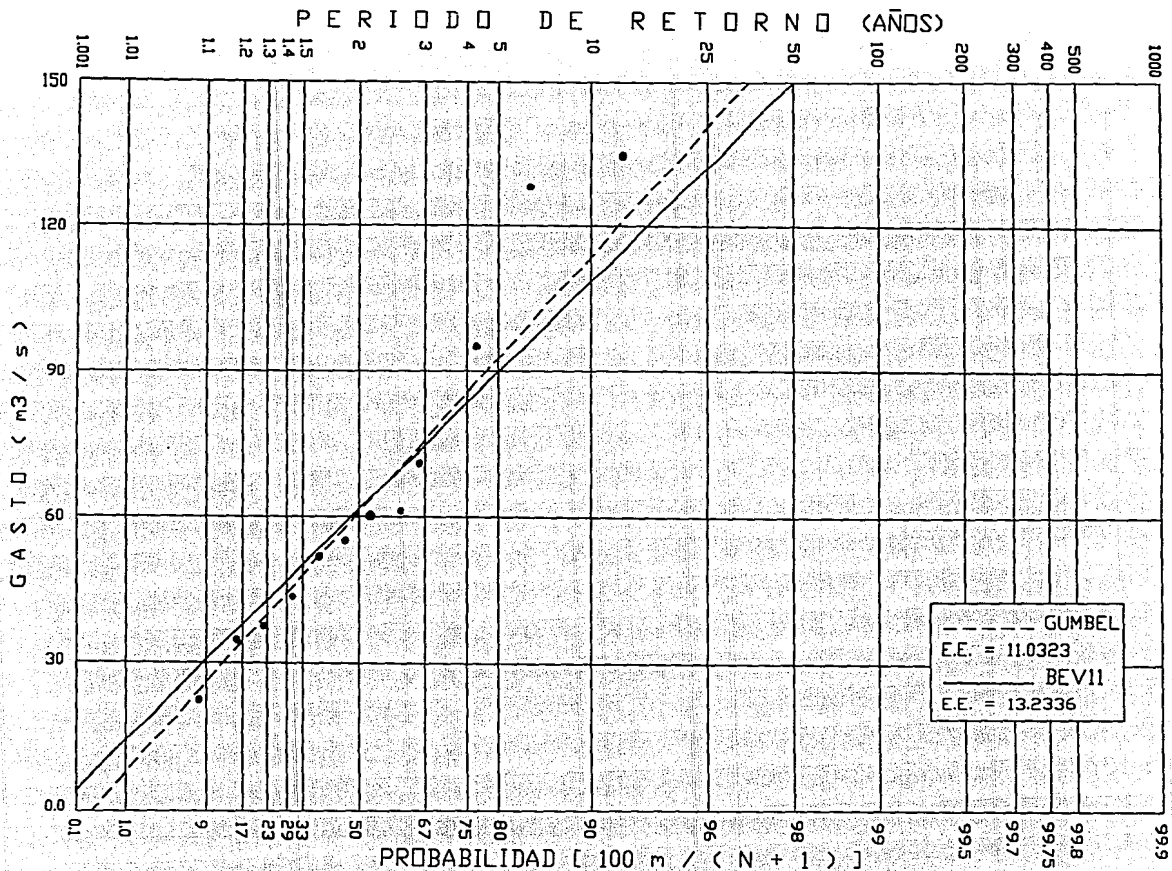


FIGURA D.6. Curvas de frecuencias empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos máximos anuales de la estación: AXUSCO.

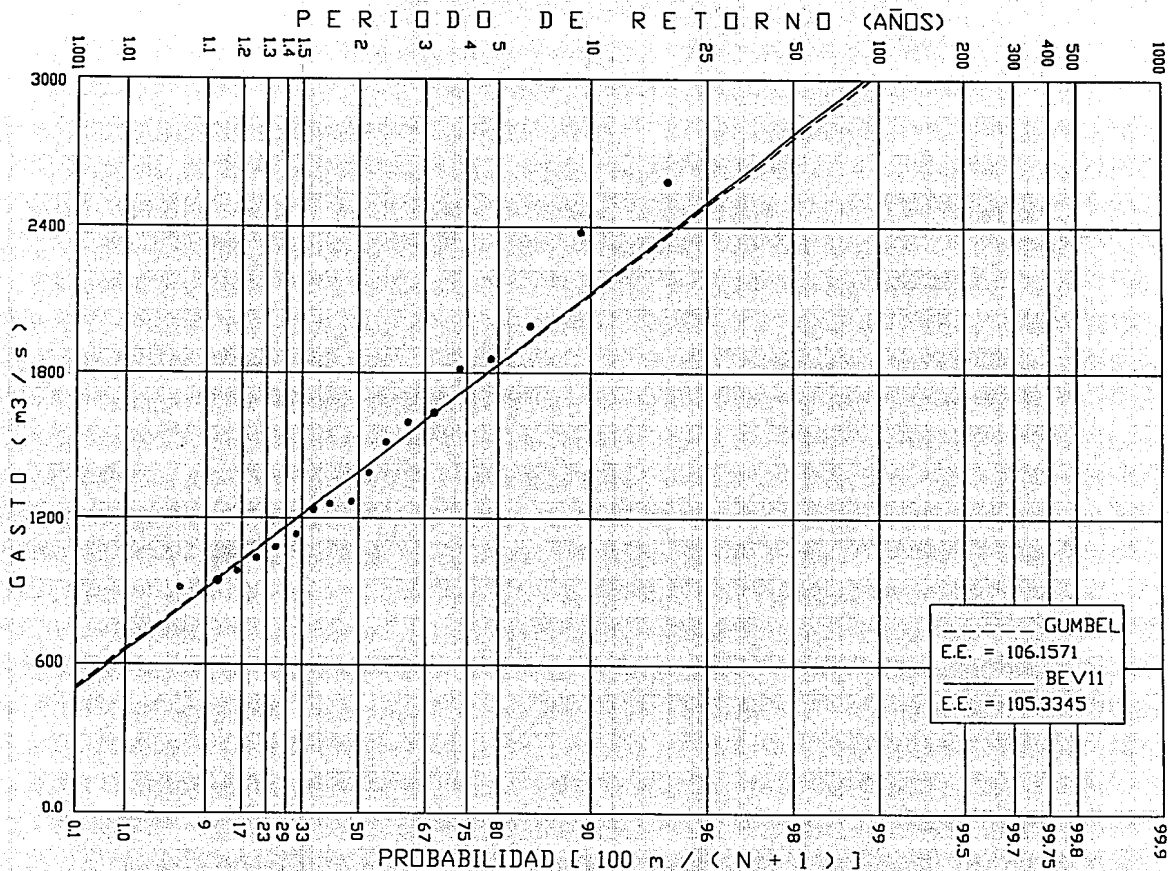


FIGURA D.7. Curvas de frecuencias empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos máximos anuales de la estación: JACATEPEC.

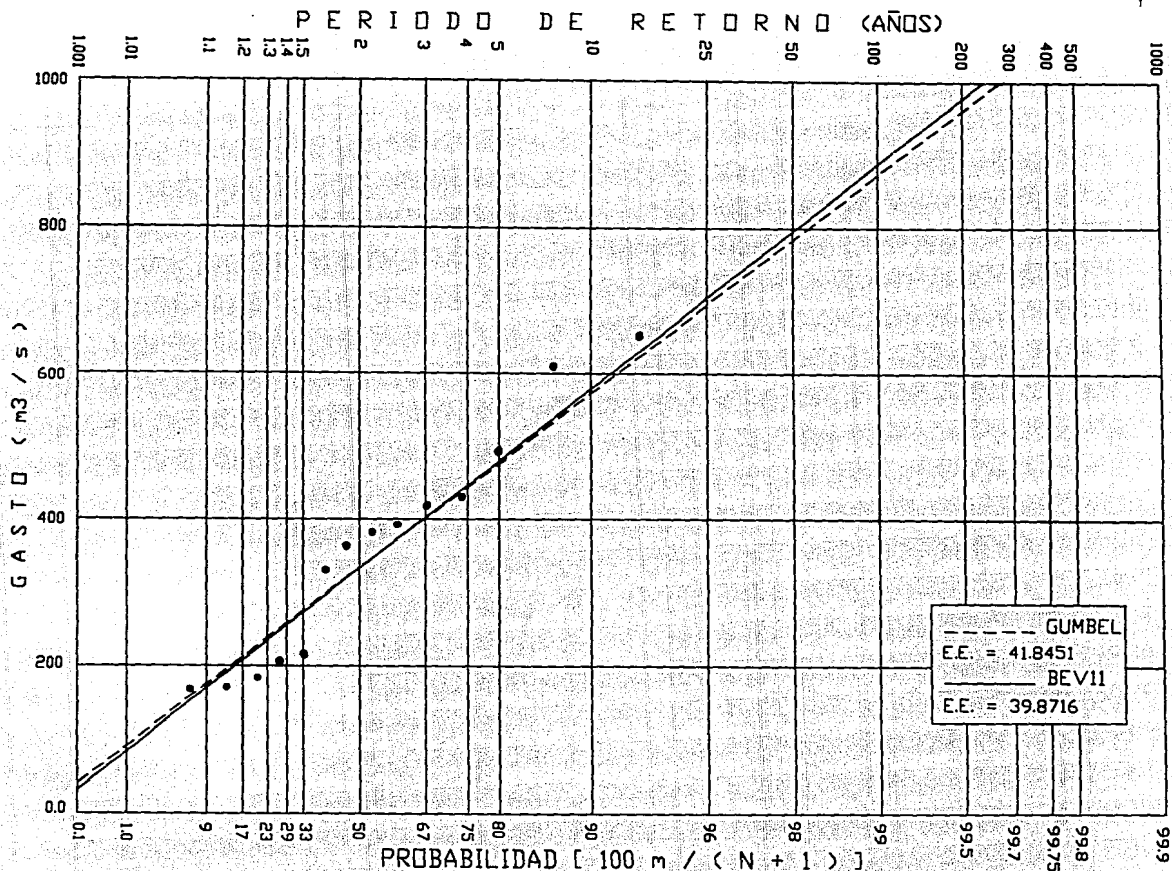


FIGURA D.8. Curvas de frecuencias empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos maximos anuales de la estacion LAUCHAPAN.

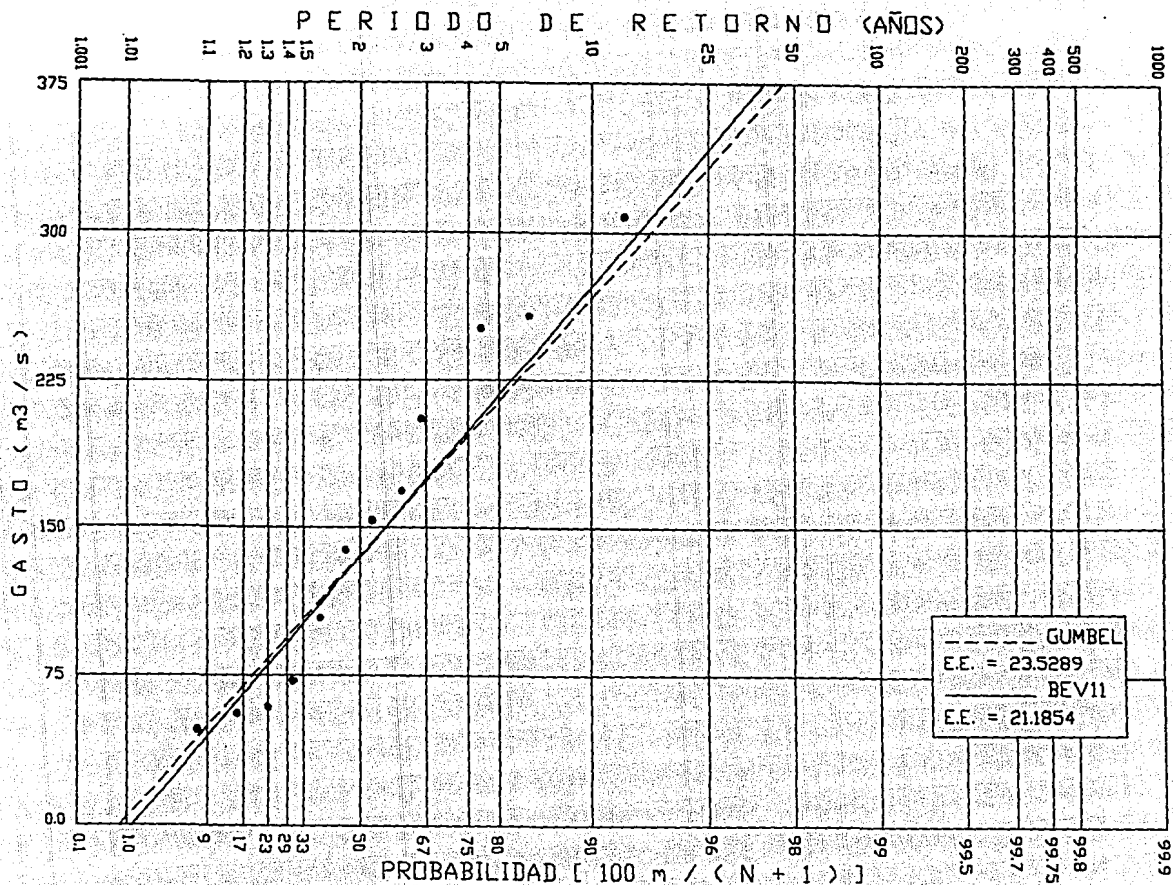


FIGURA D.9. Curvas de frecuencias empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos maximos anuales de la estacion: TOMELLIN.