14

2E

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El hiperespacio de los subconjuntos finitos de un continuo.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

ROSA MARTHA GARCIA DE LA ROSA

MEXICO, D. F. 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

El hiperespacio de los subconjuntos finitos de un continuo.

realizado por Rosa Martha García de la Rosa

con número de cuenta 8508975-4 **, pasante de la carrera de** Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía
Propietario	Dra. Isabel Puga Espinoza
Propietario	Dr. Sergio Macías Alvarez
Suplente	Dr. Angel Tamariz Mascarúa
Suplente	Dr. Salvador García Ferreira

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

A la memoria de la mujer que más admiro y quien me dejó un sublime recuerdo; a la memoria de mi mamá.

A mi papá

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco al Dr. Alejandro Illanes (mi patrón), por su altruismo para enseñarme tantas cosas y por su guía y paciencia no sólo en la elaboración de esta tesis. Gracias a él estoy aprendiendo muchas cosas.

A Beti Puga por la invaluable ayuda que me brinda, sobre todo al darme asilo en su cubículo, gracias por soportarme. Por su confianza y amistad. Al Dr. Sergio Macías por su ayuda y amistad. A Gerardo Acosta y Guilmer por la paciencia y ayuda en la edición de éste.

A mis padres, por la formación que nos dieron, gracias a la cual somos la familia que somos. Por su amor, su apoyo y su ejemplo. Por ser siempre nuestros principales maestros.

A mi papá, de quien admiro su tenacidad y creatividad, le agradezco todo. En particular su apoyo en todas mis decisiones, independientemente de su opinión.

A Ofe (amiga y confidente), Martín, Paquito (mi compañero en la niñez y amigo de siempre), Ara, Andre (también amiga de verdad) y Toño por tanto amor y por su apoyo permanente e incondicional. También a la familia Morales de la Rosa, porque juntos somos una familiota muy bonita. A esta familia le debo algo que aprecio mucho: mi infacia y adolecencia feliz. También agradezco a Tona por la alegría que me brinda. A todos ustedes gracias por ser y estar.

A Marlen por ser como una hermana para mí, por todo su apoyo incondicional y por Elías.

A Luis R. quien me regaló, desde que lo conocí, muchos momentos felices y la mayoría de mis rachas difíciles. Por el amor que me brindó y el que me hizo sentir. Por ser, aún hoy, alguien importante en mi.

A Sara y Gerardo con quienes viví todo tipo de cosas en los primeros años de la carrera.

A Norma (mi negativo), Rick, Mario y Pablo, por brindarme su amistad sincera y desinteresadamente, por tantas locuras, por darme momentos muy alegres y estar conmigo en las malas.

A Faustino por su amistad y a José Luis Cisneros por estar conmigo a pesar de la distancia.

Gracias a todos.

INTRODUCCIÓN.

Un continuo es un espacio métrico compacto y conexo con más de un punto. Dado un continuo X, los hiperespacios de X son colecciones de subconjuntos de X con ciertas propiedades. Los más comunes son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$
$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\},$$
$$F_n(X) = \left\{A \in 2^X : \ A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos} \right\} \text{ y}$$
$$F(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es finito}\right\}.$$

A estos hiperespacios se les dota de una métrica, la de Hausdorff. Los tres primeros han sido ampliamente estudiados. Sin embargo, el cuarto ha recibido poca atención. Quizá esto se deba a que los tres primeros son continuos, mientras que $F(X)$ está muy lejos de ser compacto. De hecho las propiedades más elementales de $F(X)$ no han sido publicadas en ningún lugar.

En este trabajo estudiamos la estructura topológica de $F(X)$. Lo hemos dividido en tres capítulos. Estamos suponiendo que el lector tiene los conocimientos de un primer curso de topología y que conoce los aspectos fundamentales de la teoría de hiperespacios. Es decir, consideramos que el lector está familiarizado con la métrica de Hausdorff, suponemos que sabe que los hiperespacios son compactos y conexos por trayectorias. No incluimos la discusión de estos temas por dos razones: primero para centrar nuestros esfuerzos en discutir al hiperespacio $F(X)$ y segundo porque estos temas se pueden consultar fácilmente en el libro de Nadler Hyperspaces of Sets"[11]. Dos referencias en español que tratan de hiperespacios son [9] y [1].

Además de los conocimientos de hiperespacios mencionados en el párrafo anterior, para este trabajo, necesitamos desarrollar y adaptar algunas otras herramientas de este tema. Esto es lo que hacemos en el primer capítulo.

En el segundo capítulo, estudiamos las propiedades topológicas que cumplen todos los espacios de la forma $F(X)$ (sin importar de qué continuo X se trate).

En el tercer capítulo, estudiamos cómo las propiedades de X inducen propiedades en $F(X)$ y viceversa.

Contenido

1 RESULTADOS AUXILIARES. 9

2 PROPIEDADES GENERALES DE F(X). 17

3 RELACIONES ENTRE X Y F(X). 31

Capítulo 1

RESULTADOS AUXILIARES.

Como su nombre lo sugiere, en este capítulo incluimos las definiciones y los resultados propios de hiperespacios que necesitaremos para el análisis de $F(X)$. Como advertimos en la introducción, estamos suponiendo que el lector tiene alguna familiaridad con la teoría de hiperespacios. Por esta razón incluimos aquí sólo resultados que, siendo de hiperespacios, son más especializados y que nos servirán como herramienta.

Definición 1.1 *Un* **continuo** *es un espacio topológico métrico, compacto y conexo con más de un punto.*

De ahora en adelante todos nuestros espacios serán continuos.

Definición 1.2 *Los* **hiperespacios** *son espacios constituidos por una clase específica de subconjuntos de un espacio dado. Veamos algunos de ellos: dado un continuo X, se define*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}$$
$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\}$$
$$F_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\right\}$$

El objeto de estudio de este trabajo es el hiperespacio de todos los subconjuntos finitos del continuo X, el cual introducimos a continuación.

Definición 1.3 *Denotamos por $F(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que son finitos; es decir,*

$$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$$

Para los hiperespacios se define una métrica de la siguiente manera:

Definición 1.4 *Sean (X, d) un continuo, $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos*

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\},$$

La métrica de Hausdorff *para 2^X inducida por d, $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ se define como*

$$H_d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Una demostración de que H_d es una métrica se puede ver en [11]. Si $a \in X$, la bola de radio ε alrededor de a es el conjunto $B_\varepsilon^d(a) = \{x \in X : d(a, x) < \varepsilon\}$. Así, $B_\varepsilon^H(A) = \left\{B \in 2^X : H(A, B) < \varepsilon\right\}$ es la bola de radio ε de $A \in 2^X$. Nótese que $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon^d(a)$, por lo tanto $N(\varepsilon, A)$ es un abierto en X

Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos $B_\varepsilon()$ en lugar de $B_\varepsilon^d()$, H y no H_d, $N(\,,\,)$ por $N_d(\,,\,)$ y también $B_\varepsilon()$ en vez de $B_\varepsilon^H()$. A H la llamaremos simplemente la métrica de Hausdorff.

Lema 1.1 *$H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$, supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$, entonces existe $\varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que $A \subset N(\varepsilon_1, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_1, A)$ pero claramente. $N(\varepsilon_1, B) \subset N(\varepsilon, B)$ y $N(\varepsilon_1, A) \subset N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Consideremos la familia $\mathcal{U} = \{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$, tenemos que $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos. Dada $b \in B$, $b \in N(\varepsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Sea δ en el intervalo abierto $(d(a, b), \varepsilon)$. Entonces $d(a, b) < \delta$ y por tanto, $b \in N(\delta, A)$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de B. Como B es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n$ con $\delta_i \in (0, \varepsilon)$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, A) = N(\delta_n, A)$. Luego, existe $\delta_n \in (0, \varepsilon)$ tal que $B \subset N(\delta_n, A)$. De modo análogo concluimos que existe $\eta \in (0, \varepsilon)$ tal que $A \subset N(\eta, B)$. Sea $\varepsilon_1 = \max\{\eta, \delta_n\}$ entonces $A \subset N(\varepsilon_1, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_1, A)$. Por lo tanto $H(A, B) \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$. ∎

Definición 1.5 *Sean X un continuo y $U_1, \ldots, U_n$ una familia finita de abiertos de X. Definimos*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left\{ F \in F(X) : F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \ y \ F \cap U_i \neq \emptyset \quad para\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

Lema 1.2 *Sean X un continuo y U un abierto en X, entonces*

a) $\mathcal{A} = \{F \in F(X) : F \subset U\}$ *es un abierto en* 2^X.

b) $\mathcal{B} = \{F \in F(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$ *es un abierto en* 2^X.

Demostración. *a)* Sea $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{A}$. Como $F \subset U$, entonces $x_i \in U$ para toda $i = 1, \ldots, n$, así que existen n números positivos $\delta_1, \ldots, \delta_n$, tales que $B_{\delta_i}(x_i) \subset U$ para $i = 1, \ldots, n$. Sea $\varepsilon = mín\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Afirmamos que $B_\varepsilon(F) \subset \mathcal{A}$; sea $J \in B_\varepsilon(F)$, entonces por el lema 1.1,

$$J \subset N(\varepsilon, F) = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i) \subset U$$

entonces $J \subset U$ de modo que $J \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $B_\varepsilon(F) \subset \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es abierto.

b) Sea $F \in \mathcal{B}$. Como $F \cap U \neq \emptyset$, existe $x_o \in F$ tal que $x_o \in U$. Dado que U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_o) \subset U$. Veremos que $B_\varepsilon(F) \subset \mathcal{B}$. Sea $J \in B_\varepsilon(F)$ entonces $J \subset N(\varepsilon, F)$, es decir que para toda $y \in J$, existe $x \in F$ tal que $y \in B_\varepsilon(x)$. Entonces $J \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in F$, en particular $J \cap B_\varepsilon(x_o) \neq \emptyset$. En consecuencia $J \cap U \neq \emptyset$ pues $B_\varepsilon(x_o) \subset U$, de ahí que $J \in \mathcal{B}$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es abierto. Con esto concluimos la prueba del lema. ∎

Teorema 1.1 *Sean X un continuo y $U_1, ..., U_n$ abiertos de X. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_n \rangle$, entonces*

a) $\mathcal{U}$ es abierto en 2^X.

b) $\beta = \{\langle U_1, ..., U_n \rangle : U_1, ... U_n$ son abiertos de X y $n \in \mathbb{N}\}$ es base de la topología de $F(X)$.

Demostración. *a)* Sea $V = \bigcup_{i=1}^n U_i$, entonces, V es un abierto fijo en X, y según el lema 1.2 $\mathcal{A} = \{F \in F(X) : F \subset V\}$ es un abierto de 2^X. Consideremos ahora $\mathcal{B}_i = \{F \in F(X) : F \cap U_i \neq \emptyset\}$ para $i = 1, ..., n$. Entonces, por el mismo lema 1.2, $\mathcal{B}_i$ es abierto. Por lo tanto $\mathcal{B} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ es abierto. Observemos que

$$\mathcal{B} = \{F \in F(X) : F \cap U_i \neq \emptyset \text{ para toda } i = 1, ..., n\}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es abierto, pues $\mathcal{U} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

b) Ahora demostremos que β es base de la topología de $F(X)$. Sean $\mathcal{A}$ abierto de $F(X)$ y $F \in \mathcal{A}$, supongamos $F = \{x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{A}$. Debemos demostrar que existe $\mathcal{U}$ de la forma $\langle U_1, ..., U_n \rangle$ con los U_i abiertos en X, tal que $F \in \mathcal{U} \subset \mathcal{A}$. Como $F \in \mathcal{A}$, y $\mathcal{A}$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(F) \subset \mathcal{A}$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ elegimos un abierto U_i tal que $x_i \in U_i \subset B_\varepsilon(x_i)$. (Podríamos escoger $U_i = B_\varepsilon(x_i)$). Entonces definimos $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_n \rangle$. Es obvio que $F \in \mathcal{U}$ y que $\mathcal{U} \in \beta$.

Veamos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$. Sea J en $\mathcal{U}$, entonces $J \subset \bigcup U_i$, sea $y \in J$ entonces $y \in U_i \subset B_\varepsilon(x_i)$, lo que implica que $J \subset N(\varepsilon, F)$. Como $J \cap U_i \neq \emptyset$ para toda i, entonces existe $y_k \in J$ tal que $y_k \in U_i \subset B_\varepsilon(x_i)$, de manera que $d(y_k, x_i) < \varepsilon$ y por consiguiente, $F \subset N(\varepsilon, J)$. Por lo tanto, $J \in B_\varepsilon(F) \subset \mathcal{A}$, es decir que $J \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $F \in \mathcal{U} \subset \mathcal{A}$, lo que significa que β es base de la topología de $F(X)$. ∎

Definición 1.6 *La topología para $F(X)$ generada por β se llama la topología de Vietoris.*

Corolario 1.1 *La topología de Vietoris y la generada por la métrica de Hausdorff coinciden.*

Lema 1.3 *Sean $\{A_n\}_n$, $\{B_n\}_n$ sucesiones en 2^X con $A_n \subset B_n$. Si A_n converge a A y B_n converge a B entonces $A \subset B$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. $A_n \to A$ y $B_n \to B$ implican que existe $N \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq N$, $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, si $a \in A$, existe $x \in A_n$ tal que $d(a, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pero x también está en B_n pues $A_n \subset B_n$, y por tanto existe $b \in B$ tal que $d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto $d(a, b) < \varepsilon$, esto lo podemos hacer para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $d(a, B) = 0$, (recordemos que B es compacto). Tenemos pues que dada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) = 0$. Esto significa que $A \subset B$. ∎

Lema 1.4 *Si η es un subconjunto cerrado de 2^X y $A = \bigcup_{B \in \eta} B$ entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_n$ sucesión de elementos de A tal que $a_n \to a$.

Dada n, como $a_n \in A$, tenemos que $a_n \in B$ para algún $B \in \eta$, llamémosle B_n. Consideremos la sucesión de B_n formada así. Entonces $\{B_n\}_n$ es una sucesión de elementos de η, que es un cerrado de 2^X. Como 2^X es compacto (ver [11]), existe una subsucesión $\{B_{n_k}\}_k$ de $\{B_n\}_n$ la cual converge a un elemento $B \in \eta$. Ya que $\{a_{n_k}\} \subset B_{n_k}$, por el lema 1.3, $\{a\} \subset B \in \eta$. Por lo tanto $a \in A$. ∎

Lema 1.5 *Sea $G : X \to Y$ una función continua, entonces la función $G^* : 2^X \to 2^Y$ dada por $G^*(A) = G(A)$ (la imagen bajo G del conjunto A) es una función continua..*

Demostración. Notemos que G^* está bien definida pues la imagen continua de cerrados es cerrada al ser X y Y compactos. Como G es continua en un compacto, es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x,y) < \delta$ entonces $d_Y(G(x), G(y)) < \varepsilon$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $H(A,B) < \delta$, así que $A \subset N(\delta, B)$. Es decir, que para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d_X(a,b) < \delta$, y entonces $d_Y(G(a), G(b)) < \varepsilon$. Por lo tanto $G(A) \subset N(\varepsilon, G(B))$. Análogamente se concluye que $G(B) \subset N(\varepsilon, G(A))$. Por lo tanto, $H(G(A), G(B)) = H(G^*(A), G^*(B)) < \varepsilon$. Así que G^* es continua. ∎

Para facilitarnos la notación vamos a definir un conjunto especial de números positivos que estarán en función de cada conjunto finito $F \in F(X)$.

Definición 1.7 *Sean X un continuo y d la métrica de X. Sea $F = \{x_1, ..., x_n\} \in F(X)$ un conjunto finito, definimos*

$$\mathcal{E}(F) = \left\{ \varepsilon > 0 : \varepsilon \le \frac{1}{2} mín \{ d(x_i, x_j) : i \neq j \} \right\}$$

A cualquier ε en $\mathcal{E}(F)$ le llamamos **epsilon buena de** F.

Observemos que si $\varepsilon \in \mathcal{E}(F)$, las bolas alrededor de cada uno de los puntos de F son ajenas entre si, esto es, $B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

El lema 1.6 y el Teorema 1.3 pertenecen a la teoría de continuos. Son una herramienta muy útil en la teoría de hiperespacios. Entre otras cosas, la base para probar que los hiperespacios son conexos por trayectorias. Su demostración es técnica y está bien explicada en el libro de Nadler [10]

Los siguientes resultados nos serán muy útiles en lo posterior, pero los enunciamos desde ahora.

Lema 1.6 [*5.5 de [10]*] *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X contiene un subcontinuo propio no degenerado. Más aún: si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subset B \neq A$ y $B \subset U$.*

Teorema 1.2 [*5.6 de [10]*] **Teorema de los Golpes en la Frontera.** *Sea X un continuo y sea E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $\overline{K} \bigcap Fr(E) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supóngase que $\overline{K} \cap \left(\overline{X - E}\right) = \emptyset$. Entonces, puesto que $\overline{K} \neq \emptyset$ y $\overline{X - E} \neq \emptyset$, $\overline{K}$ es un subcontinuo propio de X. Además, haciendo $U = X - \left(\overline{X - E}\right)$, tenemos que $\overline{K} \subset U \subset E$ y U es abierto en X. Por lo tanto, por el lema 1.6, hay un continuo B tal que $\overline{K} \subset B \neq \overline{K}$ y $B \subset U$. De manera que B es un conjunto conexo que contiene propiamente a K y $B \subset E$. Esto contradice el hecho de que K es una componente de E. ∎

Teorema 1.3 [*5.2 de [10]*] **Teorema del Cable Cortado.** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto (no necesariamente continuo) y sean A y B subconjuntos cerrados de X. Si ningún subconjunto conexo de X intersecta tanto a A como a B (equivalentemente, ninguna componente de X lo hace), entonces $X = X_1 \bigcup X_2$ donde X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados y ajenos de X con $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Capítulo 2

PROPIEDADES GENERALES DE F(X).

En este capítulo mostramos las propiedades que tiene $F(X)$ para cualquier continuo X. Muchos de los resultados de este capítulo y del siguiente son elementales, la mayoría no aparece en la bibliografía sobre el tema, y en este sentido, son originales de este trabajo.

Si tenemos dos continuos X y Y con d y r métricas para X y para Y, respectivamente y si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ con x_1, $x_2 \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$, entonces $D(z_1, z_2) = máx\{d(x_1, x_2), r(y_1, y_2)\}$ es una métrica para $X \times Y$. Además, la topología generada por D es equivalente a la topología producto para $X \times Y$. Este resultado sigue siendo válido cuando tenemos un producto finito de espacios métricos (4.5.7 de [7]).

Proposición 2.1 *Sea X un continuo y d la métrica de X. Sean $a, b \in X^n$ y sea $D(a,b) = máx\{d(a_1,b_1), ..., d(a_n,b_n)\}$ la métrica para X^n. Entonces la función $f : X^n \to F_n(X)$ tal que $f(a_1, ..., a_n) = \{a_1, ..., a_n\}$ es continua y suprayectiva.*

Demostración. Veamos primero que f es suprayectiva.
Sea $\{a_1, ..., a_k\} = A \in F_n(X)$ con $k \leq n$
Caso 1. $k = n$.

En este caso $(a_1, ..., a_n) \in X^n$ y $f((a_1, ..., a_n)) = A$.

Caso 2. $k < n$.
En este caso hagamos $a_{k+1} = ... = a_n = a_k$. Entonces

$$(a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n) \in X^n y f((a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n)) = A.$$

Por lo tanto f es suprayectiva.

Probemos ahora la continuidad de f.
Sean $A = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ y $\varepsilon > 0$. Aseguramos que si $B = (y_1, ..., y_n) \in X^n$ es tal que $D(A, B) < \varepsilon$, entonces $H(f(A), f(B)) < \varepsilon$. Esto demostrará que f es continua. Supongamos entonces que $D(A, B) < \varepsilon$. Entonces $d(x_i, y_i) < \varepsilon$ para toda i (D es la distancia del máximo). De aquí que para cada $x_i \in f(A)$, existe un punto $y_i \in f(B)$ tal que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$. Esto muestra que $f(A) \subset N(\varepsilon, f(B))$. Similarmente, $f(B) \subset N(\varepsilon, f(A))$. De manera que $H(f(A), f(B)) < \varepsilon$. Por lo tanto, f es continua. ∎

Corolario 2.2 *Para toda $n \in \mathbf{N}$, $F_n(X)$ es compacto y conexo.*

Demostración. Como X es un continuo, entonces X^n también es un continuo, de modo que X^n es compacto y conexo. Sabemos que la imagen continua de un compacto es compacta y la imagen continua de un conexo también es un conexo. Por lo tanto $F_n(X)$ es compacto y conexo. ∎

De este resultado se desprende inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.3 *$F_n(X)$ es cerrado en 2^X.*

Corolario 2.4 *$F(X)$ es unión numerable de compactos.*

Teorema 2.4 $F(X)$ *es denso en* 2^X.

Demostración. Queremos demostrar que para todo $A \in 2^X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \in F(X)$ tal que $F \in B_\varepsilon(A)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Notemos que

$$\bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$$

es una cubierta abierta de A. Como A es cerrado, A es compacto, y entonces existen $x_1, ..., x_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i).$$

Afirmamos que $F = \{x_1, ..., x_n\}$ está en $B_\varepsilon(A)$. Probemos para ello que $H(A, B) < \varepsilon$. Se tiene que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i) = N(\varepsilon, F).$$

Por otro lado, $F = \{x_1, ..., x_n\}$ con x_i en A, entonces, $F \subset N(\varepsilon, A)$. Así,

$$H(A, B) < \varepsilon$$

Entonces $F \in B_\varepsilon(A)$. Por lo tanto $F(X)$ es denso en 2^X. ∎

Teorema 2.5 $F(X)$ *es conexo.*

Demostración. Tenemos

$$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$$

Donde $F_n(X)$ es conexo para todo $n \in \mathbf{N}$. Es claro que $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ y por consiguiente, $F_1(X) \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n(X)$. Entonces, $F(X)$ es unión de conexos con intersección diferente del vacío, por lo tanto, es conexo. ∎

De este corolario y del hecho que $F(X)$ es denso en 2^X (Teorema 2.4), obtenemos el siguiente colorario.

Corolario 2.8 *2^X es conexo.*

Este es un camino muy elemental para probar que 2^X es conexo. El procedimiento clásico consiste en probar que 2^X es conexo por trayectorias. Esto se hace usando arcos ordenados lo cual es un proceso largo. (Ver [11]).

Lema 2.7 . *Sea X un continuo y sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la métrica de X. Sean $F = \{x_1, ..., x_n\} \in F(X)$ y $p \notin F$ fijo en X, y sea $\varepsilon \in \mathcal{E}(F)$ tal que $d(p, x_i) > \varepsilon$ para toda $i = 1, ..., n$. Entonces $F(X) - \langle B_\varepsilon(x_1), ..., B_\varepsilon(x_n)\rangle$ es conexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \langle B_\varepsilon(x_1), ..., B_\varepsilon(x_n)\rangle$. Tomemos $B \in F(X) - \mathcal{A}$, digamos $B = \{b_1, ..., b_m\}$. Si logramos conectar en $F(X)$ $-\mathcal{A}$ a B con $\{p\}$, habremos terminado. Recordemos que $\mathcal{A}$ es el conjunto

$$\left\{K \in F(X) : K \bigcap B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset \text{ para toda } i \text{ y } K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)\right\}.$$

De esta manera ya que $B \notin \mathcal{A}$, tenemos dos casos:

$$B \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i) \quad \text{o} \quad B \cap B_\varepsilon(x_i) = \emptyset \text{ para alguna } i$$

Caso 1. $B \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$.

a) Supongamos primero $m = 1$, que es decir que $B = \{b\}$. Entonces $b \notin B_\varepsilon(x_i)$ para ninguna $i = 1, ..., n$.

   Sea $B_1 = \{p, b\}$ y sean $f_B, f_{B_1} : X \to F(X)$ definidas por $f_B(x) = \{x\} \cup B$ y $f_{B_1}(x) = \{x\} \cup (B_1 - \{b\})$. Es fácil verificar que estas funciones son continuas. Por lo tanto $\mathcal{U}_1 = f_B(X)$ y $\mathcal{U}_2 = f_{B_1}(X)$ son conexos. Además $f_B(b) = B \in \mathcal{U}_1$y $B_1 = \{p, b\} = f_B(p)$ también esta en $\mathcal{U}_1$. Se obtiene también que $B_1 \in \mathcal{U}_2$ ya que $B_1 = f_{B_1}(b)$. Como $f_{B_1}(p) = \{p\}$, $\{p\}$ está en $\mathcal{U}_2$. Hagamos $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \bigcup \mathcal{U}_2$, como B_1 pertenece a $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2$. entonces $\mathcal{U}$ es conexo. Dado que todos los elementos de $\mathcal{U}$ tienen a b o a p, tenemos que $\mathcal{U} \subset F(X) - \mathcal{A}$. Por tanto $\mathcal{U}$ es un conexo que contiene a B y a $\{p\}$ en $F(X) - \mathcal{A}$.

b) Supongamos ahora que $m > 1$ y $B \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$, entonces existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que b_j es elemento de B y $b_j \notin B_\epsilon(x_i)$ para ninguna $i = 1, ..., n$. Podemos suponer sin perder generalidad que b_m es ese b_j. Sea $f_{b_1} : X \to F(X)$ tal que $f_{b_1}(x) = \{x\} \cup (B - \{b_1\})$. La función f_{b_1} es continua, por lo tanto $\mathcal{U}_1 = f_{b_1}(X)$ es conexo en $F(X)$.

Observemos que $B = f_{b_1}(b)$ y que $B_1 = \{p, b_2, ..., b_m\} = f_{b_1}(p)$ pertenecen a $\mathcal{U}_1$. Por otro lado, $b_m \in B - \{b_1\}$, esto implica que para todo $C \in f_{b_1}(X)$, $b_m \in C$ y como $b_m \notin B_\epsilon(x_i)$ para ninguna $i = 1, ..., n$, entonces $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$.

Hasta aquí hemos construido un conexo $\mathcal{U}_1$ que conecta a B con B_1 y no intersecta a $\mathcal{A}$. Consideremos ahora $f_{b_2} : X \to F(X)$ definida como $f_{b_2}(x) = \{x\} \cup (B_1 - \{b_2\})$. Claramente f_{b_2} también es continua, así que $\mathcal{U}_2 = f_{b_2}(X)$ es un conexo que contiene a B_1 (haciendo $x = b_2$), y a $B_2 = \{p, b_3, ..., b_m\}$ (cuando $x = p$). Dado que $p \in B_1$ y $p \notin B_\epsilon(x_i)$ para ninguna $i = 1, ..., n$, entonces para todo $C \in \mathcal{U}_2$, se tiene que C no está contenido en $\bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$, de tal forma que $\mathcal{U}_2 \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$.

Seguimos con este procedimento hasta encontrar un conexo $\mathcal{U}_{m-1}$ que conecte a $B_{m-1} = \{p, b_m\}$ con $B_m = \{p\}$. Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{U}_i$, entonces $\mathcal{U}$ es conexo. En efecto; $\mathcal{U}_i \bigcap \mathcal{U}_{i+1} \neq \emptyset$ con $i = 1, ..., m-2$ ya que por la forma en que fuimos construyendo nuestros conexos $\mathcal{U}_i$, $B_i \in \mathcal{U}_i \bigcap \mathcal{U}_{i+1}$ para toda $i = 1, ..., m-2$, de modo que los $\mathcal{U}_i$ son conexos que se intersectan dos a dos, por lo tanto $\mathcal{U}$ es conexo.

Construimos un conexo $\mathcal{U}$ que conecta a cualquier $B \in F(X) - \mathcal{A}$ tal que $B \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$ con el punto $\{p\}$ en $F(X)$.

Caso 2. Analicemos ahora el caso cuando $B \in F(X) - \mathcal{A}$, $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$ y $B \cap B_\varepsilon(x_i) = \emptyset$ para alguna $i \in \{1, ..., n\}$. B tiene la forma $B = \{b_1, ..., b_m\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad, que $B \cap B_\varepsilon(x_n) = \emptyset$. Supongamos también que $b_1 \in B_\varepsilon(x_1)$. Sea A la componente de $B_\varepsilon(x_1)$ que contiene a b_1.

Por el Teorema de los Golpes en la Frontera 1.2. $\overline{A} \cap Fr(B_\varepsilon(x_1)) \neq \emptyset$. Elijamos $c \in \overline{A} \cap Fr(B_\varepsilon(x_1))$. Sea $f : \overline{A} \to F(X)$ tal que $f(x) = \{x\} \cup (B - \{b_1\})$. Entonces $f\left(\overline{A}\right)$ es conexo en $F(X)$ dado que f es continua y $\overline{A}$ es conexo. Además, B está en $f\left(\overline{A}\right)$ (cuando $x = b_1$) y haciendo $x = c$, entonces $B^* = \{c, b_2, ..., b_m\}$ también está en $f\left(\overline{A}\right)$. Pero $B^* \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$ pues $c \in \overline{A} \cap Fr(B_\varepsilon(x_1))$ implica que $c \notin B_\varepsilon(x_i)$ para ninguna $i = 1, ..., n$.

Por el Caso 1, podemos conectar a B^* con $\{p\}$ mediante un conexo $\mathcal{U}_1$ contenido en $F(X) - \mathcal{A}$. Por otro lado, se tiene que $f\left(\overline{A}\right) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. En efecto ya que A es componente de $B_\varepsilon(x_1)$ y por la elección de ε, $\overline{A} \cap B_\varepsilon(x_j) = \emptyset$ para todo $j \in \{2, ..., n\}$; más precisamente, si $a \in \overline{A}$, $a \notin B_\varepsilon(x_j)$ para ningún $j \in \{2, ..., n\}$. En particular $\overline{A} \cap B_\varepsilon(x_n) = \emptyset$. De aquí que, para todo C en $f\left(\overline{A}\right)$, $C \cap B_\varepsilon(x_n) = \emptyset$. Por lo tanto $f\left(\overline{A}\right) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ y entonces $\mathcal{U} = f\left(\overline{A}\right) \bigcup \mathcal{U}_1$ es un conjunto conexo que une a B con $\{p\}$ y $\mathcal{U} \subset F(X) - \mathcal{A}$. Esto completa el análisis del Caso 2. Por lo tanto $F(X) - \mathcal{A}$ es conexo. ∎

Definición 2.8 *Sea X un espacio topológico y $p \in X$, se dice que p* **separa a** *X si $X - \{p\}$ no es conexo.*

Teorema 2.6 *Ningún punto de $F(X)$ lo separa.*

Demostración. Debemos probar que para cualquier punto $A \in F(X)$, $F(X) - \{A\}$ es conexo. Sea $A \in F(X)$, supongamos que

$A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Tenemos que

$$\{A\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle$$

En particular existe $\varepsilon_o > 0$ tal que $\langle B_{\varepsilon_o}(x_1), \ldots, B_{\varepsilon_o}(x_n)\rangle \neq F(X)$. Entonces

$$\{A\} = \bigcap_{0<\varepsilon<\varepsilon_o} \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle$$

De manera que

$$\begin{aligned} F(X) - \{A\} &= F(X) - \left(\textstyle\bigcap_{0<\varepsilon<\varepsilon_o} \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle\right) \\ &= \textstyle\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_o} \left(F(X) - \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle\right). \end{aligned}$$

Consideremos ahora δ y ε dos números positivos tales que $\delta \neq \varepsilon$ y $0 < \delta, \varepsilon < \varepsilon_o$ Supongamos, sin perder generalidad por ello, que $\delta < \varepsilon$. Entonces $\langle B_\delta(x_1), \ldots, B_\delta(x_n)\rangle \subset \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle$, de modo que

$$F(X) - \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle \subset F(X) - \langle B_\delta(x_1), \ldots, B_\delta(x_n)\rangle.$$

Por lo tanto,

$$F(X) - \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle \bigcap F(X) - \langle B_\delta(x_1), \ldots, B_\delta(x_n)\rangle \neq \emptyset.$$

Pero por el lema 2.7, sabemos que $F(X) - \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle$ es conexo, entonces

$$\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_o} \left(F(X) - \langle B_\varepsilon(x_1), \ldots, B_\varepsilon(x_n)\rangle\right)$$

es conexo. Por lo tanto A no separa a $F(X)$. ∎

Definición 2.9 *Sea X un espacio métrico,*

1. *X es* **aposindético** *si para cualesquiera dos puntos $p \neq q$ en X existe un subcontinuo A de X tal que $p \in IntA$ y $q \notin A$.*
2. *Si en la definición anterior pedimos que A sea un subconjunto cerrado y conexo en lugar de un continuo, entonces X se llama* **aposindético con cerrados.**

Teorema 2.7 *$F(X)$ es aposindético con cerrados.*

Demostración. Tenemos que demostrar que para cualesquiera $A, B \in F(X)$ con $A \neq B$, existe un subconjunto cerrado y conexo $\mathcal{A}$ de $F(X) - \{B\}$ tal que $A \in Int\mathcal{A}$. Sean $A = \{a_1, ..., a_n\}$ y $B = \{b_1, ..., b_m\}$ en $F(X)$ con $A \neq B$. Sea $p \in X$ fijo tal que $p \notin B$. Elegimos $\varepsilon \in \mathcal{E}(B)$ una epsilon buena para B tal que

i) $d(p, b_j) > \varepsilon$ para todo $j \in \{1, ..., m\}$.

Y además:

a) Si $A \subset B$, entonces existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $b_j \notin A$; en este caso tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(b_j) \cap A = \emptyset$.

b) Si $B \subset A$, tomamos $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $a_i \notin B$, en este caso, le pedimos a ε que cumpla $B_\varepsilon(a_i) \cap B = \emptyset$.

De este modo $A \notin \langle B_\varepsilon(b_1), ..., B_\varepsilon(b_m)\rangle$; más aún $A \in (IntF(X) - \langle B_\varepsilon(b_1), ..., B_\varepsilon(b_m)\rangle)$. Ya sabemos por el Teorema 1.1 que

$$\langle B_\varepsilon(b_1), ..., B_\varepsilon(b_m)\rangle$$

es un abierto, de manera que $F(X) - \langle B_\varepsilon(b_1), ..., B_\varepsilon(b_m)\rangle$ es un cerrado. Elejimos ε de tal modo que se satisficiera el lema 2.7, así que $F(X) - \langle B_\varepsilon(b_1), ..., B_\varepsilon(b_m)\rangle$ es conexo. Por lo tanto, $F(X) - \langle B_\varepsilon(b_1), ..., B_\varepsilon(b_m)\rangle$ es un subconjunto cerrado y conexo de $F(X) - \{B\}$ que contiene a A en su interior. Por lo tanto $F(X)$ es aposindético con cerrados. ∎

Definición 2.10 *Sea X un espacio topológico*

1. *Definimos la dimensión de un espacio X como sigue:*
   $\dim \emptyset = -1$. *E inductivamente, $\dim X \leq n$ si y sólo si X tiene una base β de abiertos tal que $dim(frU) \leq n-1$ para todo $U \in \beta$. Finalmente decimos que* $\dim X = n$ *si* $\dim X \leq n$ *pero no se cumple que* $\dim X \leq n-1$. *En el caso en que, para ninguna* $n \in \mathbf{N}$, $\dim X \leq n$, *decimos que* $\dim X = \infty$.

2. *Dada $p \in X$, se dice que* $\dim_X(p)$ *(dimensión de X en p) es mayor o igual que n si , para todo abierto U de X tal que $p \in U$, se tiene que* $\dim U \geq n$. *Decimos que* $\dim_X(p) = \infty$ *si* $\dim_X(p) \geq n$ *para toda n.*

Teorema 2.8 . *Si X es un continuo no degenerado, entonces dim $X \geq 1$.*

Demostración. Supongamos que, por el contrario, $\dim(X) < 1$. Como X es no degenerado, $X \neq \emptyset$, así que dim $X = 0$. Esto significa que X tiene una base de abiertos β tal que dim $(frU) \leq -1$ para todo $U \in \beta$. O sea que $frU = \emptyset$ para todo $U \in \beta$. Pero esto no es posible en un conexo no degenerado. Por lo tanto, dim $X \geq 1$. ∎

Vamos a usar el siguiente resultado conocido de la teoría de dimesión.

Teorema 2.9 . *Si $X_1, ..., X_n$ son continuos no degenerados, entonces* $\dim(X_1 \times ... \times X_n) \geq n$.

Lema 2.8 *Sean $N \in \mathbf{N}$ y X un continuo, entonces todo abierto no vacío U de X contiene N subcontinuos no degenerados de X ajenos dos a dos.*

Demostración. Sean $N \in \mathbf{N}$, X un continuo y U abierto de X. Sean $x_1, ..., x_N \in U$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Tomamos

$$\rho = \frac{1}{2} min \{d(x_i, x_j) : i = 1, ..., N, j = 1, ..., N\}.$$

Definimos $W_i = B\rho(x_i) \cap U$ para $i = 1, ..., N$. W_i es un abierto de X y $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Sea V_i abierto tal que $x_i \in V_i$ y $\overline{V_i} \subset W_i$ con $\overline{V_i} \neq X$. Tomamos A_i la componente de $\overline{V_i}$ que contiene a $\{x_i\}$. (A_i existe pues $\{x_i\}$ es un subconjunto conexo de $\overline{V_i}$). Como $\overline{V_i} \subset W_i$, por el teorema 1.2, de los Golpes en la Frontera, $A_i \cap (X - V_i) \neq \emptyset$. Así, dado que $\{x_i\} \subset V_i$, se tiene que $\{x_i\} \neq A_i \subset \overline{V_i} \subset W_i$. Hemos construido N subcontinuos propios de X tales que $A_i \subset W_i$, de modo que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si $i \neq j$. Además todos están contenidos en U. ∎

Teorema 2.10 *$F(X)$ tiene dimensión infinita en cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sean $A = \{x_1, ..., x_m\} \in F(X)$ y $N \in \mathbf{N}$. Sea ε una epsilon buena de A. Por el lema 2.8 en $B_\varepsilon(x_1) - \{x_1\}$ hay N subcontinuos ajenos y no degenerados $A_1, ..., A_N$ de X. Sea $f : A_1 \times A_2 \times ... \times A_N \to B_\varepsilon(A)$ definida como $f(a_1, ..., a_N) = \{a_1, ..., a_N\} \cup A$. Razonando como en la Proposición 2.1, se sigue que f es continua.

Veamos ahora que f es inyectiva.
Supongamos que $\{a_1, ..., a_N\} \cup A = \{b_1, .., b_N\} \cup A$, ya que ε es buena para A, $\{a_1, ..., a_N\} \cap A = \emptyset = \{b_1, ..., b_N\} \cap A$, de manera que $\{a_1, ..., a_N\} = \{b_1, .., b_N\}$. Dado que $\{a_1, ..., a_N\} \cap A_i = \{a_i\}$ y $\{b_1, ..., b_N\} \cap A_i = \{b_i\}$ para toda i, entonces $a_i = b_i$ para toda i. Por lo tanto f es inyectiva.

Sólo falta probar que $Imf \subset B_\varepsilon(A)$.
Sea $B \in f(A_1 \times ... \times A_N)$, con $B = \{a_1, .., a_N\} \cup A$ y con $(a_1, ..., a_N) \in A_1 \times ... \times A_N$. Como $A_1, ..., A_N \subset B_\varepsilon(x_1)$, entonces $d(a_i, x_i) < \varepsilon$ para todo $i = 1, ..., N$. Entonces $\{a_1, ..., a_N\} \subset B_\varepsilon(x_1)$. Por tanto $\{a_1, .., a_N\} \cup A \subset N(\varepsilon, A)$, y como $A \subset N(\varepsilon, \{a_1, ..., a_N\} \cup A)$, tenemos que $H(A, \{a_1, .., a_N\} \cup A) < \varepsilon$. Por lo tanto $Imf \subset B_\varepsilon(A)$. Dado que $A_1 \times A_2 \times ... \times A_N$ es compacto, entonces este producto es homeomorfo a Imf. Por el teorema 2.9, tenemos que $\dim(Imf) \geq N$. De aquí que $\dim B_\varepsilon(A) \geq N$. Esto concluye la prueba del Teorema. ∎

Teorema 2.11 *Sea X un continuo, entonces $F(X)$ no es localmente compacto en ninguno de sus puntos.*

Demostración. Sea $A = \{a_1, ..., a_n\} \in F(X)$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una vecindad compacta en $F(X)$ de A. Sea ε buena para A tal que $B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{A}$. Entonces por el lema 2.8, existe P un subcontinuo de X en $B_\varepsilon(a_1)$. Según la proposición 2.4, $F(P)$ es denso en $2^P \subset 2^X$, por lo tanto existe una sucesión $(P_n)_n \subset F(P)$ tal que $P_n \to P$. Entonces $A \cup P_n \to A \cup P$. Pero $A \cup P$ no es finito, contradiciendo el hecho de que la vecindad compacta $\mathcal{A}$ está contenida en $F(X)$. ∎

Definición 2.11 *Un subconjunto A de un espacio métrico X es* **denso en ninguna parte** *en X si $\overline{A}$ tiene interior vacío.*

Definición 2.12 *Sea X es un espacio métrico*

1. *Si X es la unión de una familia numerable de conjuntos densos en ninguna parte se dice que X es* **de la primera categoría.**

2. *Si X no es de la primera categoría, se dice que es de la* **segunda categoría.**

El siguiente resultado es una consecuencia simple de la definición de densidad en ninguna parte y de la regularidad de los espacios métricos.

Lema 2.9 *Un subconjunto A de un espacio métrico X es denso en ninguna parte en X si y sólo si cada conjunto abierto no vacío en X contiene una bola abierta cuya cerradura es ajena de A.*

Teorema 2.12 **[Teorema de la Categoría de Baire]**. *Todo espacio métrico completo es de la Segunda Categoría.*

Demostración. Supongamos que el Teorema es falso, sea X un espacio métrico completo que no es de la segunda categoría. Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos densos en ninguna parte cuya unión es X. Por el lema 2.9, el conjunto abierto X debe contener una bola abierta B_1 tal que $\overline{B_1} \bigcap A_1 = \emptyset$. Podemos elegir la bola B_1 de tal forma que su radio sea menor que 1.

Como B_1 es un conjunto abierto no vacío, debe contener una bola abierta B_2 de radio menor que $\frac{1}{2}$ tal que $\overline{B_2}$ es ajena de A_2. Siguiendo con este procedimiento, construimos una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de bolas abiertas de tal manera que el radio de B_n es menor que $\frac{1}{n}$ y $\overline{B_n} \bigcap A_n = \emptyset$.

La sucesión $\{x_n\}_n$ de centros de estas bolas abiertas, es una sucesión de Cauchy, y como X es completo, converge a un punto x en X. Como $x \in \overline{B_n}$ para toda n, entonces $x \notin A_n$ para toda n. Así, la unión de los conjuntos A_n's no puede ser igual a X, contrario a la suposición de que X era de la primera categoría. Por lo tanto, los espacios métricos completos deben ser de la segunda categoría. ∎

Proposición 2.2 *Sea X un continuo, entonces $F(X)$ no es una intersección numerable de abiertos de 2^X, es decir, no es un conjunto G_δ en 2^X.*

Demostración. Sea X un continuo. Supongamos que $F(X)$ es un conjunto G_δ en 2^X. Entonces

$$F(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$$

Donde $\mathcal{U}_n$ es abierto en 2^X. Entonces

$$2^X - F(X) = 2^X - \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(2^X - \mathcal{U}_n\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2^X &= F(X) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(2^X - \mathcal{U}_n\right)\right) \\ &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(2^X - \mathcal{U}_n\right)\right). \end{aligned}$$

Observemos que $F_n(X)$ son conjuntos cerrados con interior vacío para cada $n \in \mathbf{N}$. En efecto, supongamos por el contrario que $Int(F_n(X)) \neq \emptyset$. Sea $A = \{x_1, ..., x_k\}$ con $k \leq n$ en $Int(F_n(X))$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A) \subset Int(F_n(X))$. Supongamos que $k + m = n$, $m \geq 0$.

Como en $B_\varepsilon(x_1)$ existe un número infinito de puntos de X, podemos tomar $m+1$ puntos $y_1, ..., y_{m+1}$ de X contenidos en $B_\varepsilon(x_1)$. Entonces $B = A \cup \{y_1, ..., y_{m+1}\}$ es un finito que está en $B_\varepsilon(A)$. pero B no está en $F_n(X)$. Por lo tanto $B_\varepsilon(A) \not\subset Int(F_n(X))$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $F_n(X)$ es un conjunto denso en ninguna parte.

Como $\left(2^X - \mathcal{U}_n\right) \cap F(X) = \emptyset$ y $F(X)$ es denso en 2^X, tenemos que el conjunto $2^X - \mathcal{U}_n$ también es cerrado en 2^X con interior vacío, para cada n, y por lo tanto, denso en ninguna parte.

Así, hemos escrito a 2^X como una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte y por el Teorema 2.12, esto no es posible ya que 2^X es métrico compacto. ∎

Una meta usual en la teoría de hiperespacios es la construcción de modelos, es decir, la construcción de espacios topológicos descritos de manera simple, que son homeomorfos al hiperespacio. Por ejemplo, se sabe (ver [5]) que si X es localmente conexo entonces 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert "$[0,1] \times [0,1] \times \ldots$". Pensando en la posibilidad de encontrar modelos para $F(X)$ observando las propiedades topológicas de algunos espacios $F(X)$, pensamos en la posibilidad de que $F(X)$ fuera homeormorfo a un producto numerable de rectas. El siguiente corolario nos muestra que esto no es posible, los productos numerables de rectas son completamente metrizables mientras que $F(X)$ nunca lo es.

Corolario 2.6 *$F(X)$ nunca es completamente metrizable.*

Demostración. Como $F(X)$ no es un conjunto G_δ, entonces según 24.12 de [12], $F(X)$ no es completamente metrizable. ∎

Capítulo 3

RELACIONES ENTRE X Y F(X).

En el estudio de los hiperespacios, las siguientes preguntas surgen de manera natural:

¿Si X tiene una propiedad topológica $\mathcal{P}$ entonces $F(X)$ también la tiene?

¿Si $F(X)$ tiene una propiedad topológica $\mathcal{P}$ entonces X también la tiene?

En este capítulo abordamos estas preguntas cuando $\mathcal{P}$ es conexidad local, conexidad por trayectorias y contractibilidad.

Teorema 3.13 *Sean X un continuo y $F = \{x_1, ..., x_n\}$ en $F(X)$, X es localmente conexo en $x_1, ..., x_n$ si y sólo si $F(X)$ es localmente conexo en F.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{A}$ un abierto de $F(X)$ tal que $F \in \mathcal{A}$, entonces existe ε_1 tal que $B_{\varepsilon_1}(F) \subset \mathcal{A}$. Sea ε_2 una epsilon buena para F, y tomemos $\varepsilon = mín\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Entonces $B_\varepsilon(x_i)$ es un abierto que contiene a x_i. Como X es localmente conexo en x_i, para toda $i \in \{1, ..., n\}$ existe un abierto conexo U_i tal que $U_i \subset B_\varepsilon(x_i)$, para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Procediendo como en el Teorema 1.1 tenemos que $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_n \rangle \subset \mathcal{A}$.

Sólo falta demostrar que $\mathcal{U}$ es conexo.
Sea $K \in \mathcal{U}$ con m elementos. Entonces $K \subset U_1 \cup ... \cup U_n$ e intersecta a todos los U_i. Hacemos $Z = U_1^m \times ... \times U_n^m \subset X^{mn}$ (X^{mn} significa el producto de mn copias de X y U_i^m el de m copias de U_i). Sabemos que $f : X^{mn} \to F_{mn}(X)$ dada por $f(x_1, ..., x_{mn}) = \{x_1, ..., x_{mn}\}$ es continua (proposición 2.1). De modo que $B_K = f(U_1^m \times ... \times U_n^m)$ es un subconjunto conexo de $F_{mn}(X)$. Claramente $B_K \subset \mathcal{U}$. Dada $i \in \{1, ..., n\}$, $K \cap U_i$ es un conjunto no vacío con a lo más m puntos, así que, repitiendo algunos si hace falta, podemos poner $K \cap U_i$ en la forma $K \cap U_i = \{y_{(i-1)m+1}, ..., y_{(i-1)m+m}\}$. Entonces el punto $y = (y_1, ..., y_{mn}) \in Z$ y $K = f(y) \in B_K$. Notemos que $F = \{x_1, ..., x_n\} \in B_K$. De manera que $\mathcal{U} = \bigcup_{K \in \mathcal{U}} B_K$ y $F \in \bigcap_{K \in \mathcal{U}} B_K$. Entonces $\mathcal{U}$ es unión de conexos con intersección diferente del vacío, Por lo tanto $\mathcal{U}$ es conexo, y por lo tanto, $F(X)$ es localmente conexo en F.

($\Leftarrow$) Sea $F(X)$ localmente conexo en $F = \{x_1, ..., x_n\}$. Sea $x_i \in F$ hay que probar que para todo abierto W_i de X tal que $x_i \in W_i$, existe un abierto conexo A_i tal que $x_i \in A_i \subset W_i$. Sea W_i un abierto de X tal que $x_i \in W_i$. Sean δ una delta buena para F y $\sigma_i \in \{\sigma > 0 : B_\sigma(x_i) \subset W_i\}$, ahora tomemos $\varepsilon = mín\{\delta/2, \sigma_i\}$; de este modo, $B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_j) = \emptyset$ si $i \neq j$ y $B_\varepsilon(x_i) \subset W_i$.

Sea $U_i = B_\varepsilon(x_i)$, consideremos $\langle U_1, ..., U_n \rangle$, que es un abierto de $F(X)$ que contiene a F. Entonces existe un abierto conexo $\mathcal{U}$ de $F(X)$ tal que $\mathcal{U} \subset \langle U_1, ..., U_n \rangle$. Sea $A_i = \{x \in U_i$:existe $K \in \mathcal{U}$ tal que $x \in K\}$. A_i no es vacío pues $x_i \in A_i$.

Demostremos que A_i es abierto. Sea $x \in A_i$, entonces existe $K \in \mathcal{U}$ tal que $x \in K$ y como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $\varepsilon_1 > 0$ fatisfaciendo que $B_{\varepsilon_1}(K) \subset \mathcal{U}$. Tomemos $y \in B_{\varepsilon_1}(x)$. Queremos encontrar un J en $\mathcal{U}$ tal que $y \in J$. Sea $J = K \cup \{y\}$. Como $d(y, x) < \varepsilon_1$, entonces $J \subset N(\varepsilon_1, K)$; es claro que $K \subset N(\varepsilon_1, J)$. Tenemos así que $H(J, K) < \varepsilon_1$, es decir, $J \subset B_{\varepsilon_1}(K) \subset \mathcal{U}$, y entonces, $y \in A_i$ lo que significa que A_i es abierto.

Falta mostrar que A_i es conexo.

Supongamos por el contrario que A_i no es conexo; es decir que existen abiertos no vacíos B y C de X tales que $B \cap C = \emptyset$ y $A_i = B \cup C$. Sean

$$\mathcal{L} = \{K \in \mathcal{U} : F \cap B = \emptyset\} \quad \text{y} \quad \mathcal{J} = \{K \in \mathcal{U} : F \cap B \neq \emptyset\}$$

$\mathcal{L}$ y $\mathcal{J}$ son no vacíos pues B y C no lo son.

Basta demostrar que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{J}$ son abiertos, y ellos formarán una disconexión de $\mathcal{U}$ lo cual será una contradicción. Dada $K \in \mathcal{L}$, $K \cap U_i \subset A_i$, así que $K \cap U_i \subset C$. Esto muestra que $\mathcal{L} = \{K \in \mathcal{U} : K \subset C \cup (\cup_{j \neq i} U_j)\}$, entonces gracias al lema 1.2, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{J}$ son abiertos.

Así, para cualquier abierto W_i de x_i, existe un abierto y conexo A_i tal que $x_i \in A_i \subset W_i$, para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto X es localmente conexo en x_i para toda $i \in \{1, ..., n\}$. ∎

Teorema 3.14 *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $F(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $F \in F(X)$ cualquiera, F es de la forma $F = \{x_1, ..., x_n\}$. Como X es localmente conexo en x para todo $x \in X$, en particular X es localmente conexo en $x_1, ..., x_n$. Por el Teorema 3.13, $F(X)$ es localmente conexo en F. Por lo tanto, $F(X)$ es localmente conexo.

($\Leftarrow$) Dado que $F(X)$ es localmente conexo en F para todo $F \in F(X)$, en particular $F(X)$ es localmente conexo en F para todo $F \in F_1(X)$; es decir, $F(X)$ es localmente conexo en $F = \{x\}$ para todo $x \in X$. Entonces, por el Teorema 3.13, X es localmente conexo en x para todo $x \in X$. ∎

Teorema 3.15 *Si X es conexo por trayectorias entonces $F(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $A = \{a_1, ..., a_n\}$ y $B = \{b_1, ..., b_m\}$ en $F(X)$, queremos encontrar una función continua $\alpha : [0,1] \rightarrow F(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

Como Xes conexo por trayectorias, dados $a_i \in A$ y $b_j \in B$, existe $\gamma_{ij} : [0,1] \rightarrow X$ una función continua tal que $\gamma_{ij}(0) = a_i$ y $\gamma_{ij}(1) = b_j$. Sea $\alpha(t) = \{\gamma_{ij}(t) : 1 \leq i \leq n \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq m\}$, entonces tenemos que $\alpha : [0,1] \rightarrow F(X)$ y

$$\alpha(0) = A \text{ pues } \alpha(0) = \{\gamma_{ij}(0) : 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m\} = \{a_1, ..., a_n\}$$
$$\alpha(1) = B \text{ pues } \alpha(1) = \{\gamma_{ij}(1) : 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m\} = \{b_1, ..., b_m\}.$$

Falta demostrar que α es continua.

Sea $\varepsilon > 0$, como γ_{ij} es uniformemente continua para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y para toda $j \in \{1, ..., m\}$, entonces existe $\delta_{ij} > 0$ de tal manera que $|s - t| < \delta_{ij}$ implica que $d(\gamma_{ij}(s), \gamma_{ij}(t)) < \varepsilon$ para toda i, y para toda j. Sea $\delta = mín\{\delta_{ij} : 1 \leq i \leq n \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq m\}$. Entonces si $|s - t| < \delta$, se tiene que $d(\gamma_{ij}(s), \gamma_{ij}(t)) < \varepsilon$ para toda i, y para toda j, de modo que $\gamma_{ij}(s) \in B_\varepsilon(\gamma_{ij}(t))$ y $\gamma_{ij}(s) \in B_\varepsilon(\gamma_{ij}(t))$, equivalentemente,

$$\{\gamma_{ij}(s) : 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m\} \subset \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} B_\varepsilon(\gamma_{ij}(t))$$
$$\{\gamma_{ij}(t) : 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m\} \subset \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} B_\varepsilon(\gamma_{ij}(s))$$

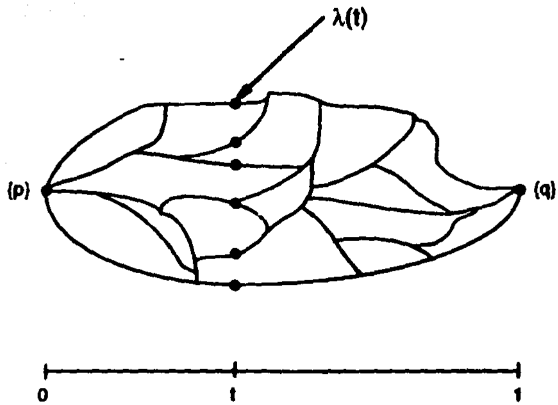
De manera que $\alpha(s) \subset N(\varepsilon, \alpha(t))$ y $\alpha(t) \subset N(\varepsilon, \alpha(s))$, de modo que $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \varepsilon$.

Así que α es una función continua.

Por lo tanto, $F(X)$ es conexo por trayectorias. ∎

Con respecto a la pregunta ¿si $F(X)$ es conexo por trayectorias, entonces X es conexo por trayectorias?, como veremos a continuación la respuesta es afirmativa.

La manera en que nos imaginamos esta situación es la siguiente: Supongamos que $F(X)$ es conexo por trayectoria, dados dos puntos p y q en X, los puntos $\{p\}$ y $\{q\}$ de $F(X)$ se pueden conectar por una trayectoria λ en $F(X)$ la cual podemos representar como en el siguiente dibujo:



Aquí $\lambda(t)$ es el conjunto finito de puntos de X que se encuentra en la línea vertical que pasa por el número t.

Una manera de probar el teorema, debida a D. Curtis y N. To Nhu [6] es mostrando que la unión $\mathcal{A}$ de los elementos de la imagen de λ (lo que se ve en el dibujo) es un subcontinuo localmente conexo de X. Se sabe del teorema de Hahn-Mazurkiewicz que los continuos localmente conexos son conexos por trayectorias, de manera que en $\mathcal{A}$ (y entonces en X) tiene que haber una trayectoria que una a p con q.

Nosotros ofrecemos otra manera de probarlo; consiste en escoger adecuadamente puntos de $\mathcal{A}$ que constituyen una trayectoria en X que une a p con q. Nuestra prueba es larga pero elemental y cons tructiva, la hemos incluido aquí porque no hace uso del teorema de Hahn-Mazurkiewicz, este teorema clásico de la teoría de continuos no es sencillo y no siempre es estudiado en los primeros cursos de topología.

Veamos primero la prueba del Teorema de D. Curtis y N. To Nhu:

Teorema 3.16 *Sea $\mathcal{M} \subset F(X)$ compacto y localmente conexo. Entonces $\bigcup \mathcal{M} \subset X$ es compacto y localmente conexo.*

Demostración. La compacidad se desprende fácilmente del lema 1.4.

Demostremos que $\bigcup \mathcal{M}$ es localmente conexo. Supongamos por el contrario, que $M = \bigcup \mathcal{M}$ no es localmente conexo. Entonces existe U abierto de M y existe C componente de U tal que C no es abierta. Es decir, existe $x \in Fr_M(C) \cap C$. Sea $\varepsilon_o > 0$ tal que $B_{\varepsilon_o}(x) \cap M \subset U$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $B_{\varepsilon_o/m}(x) \cap M \not\subset C$. Así que existe un punto $y_m \in B_{\varepsilon_o/m}(x) \cap M$ que no está en C. Como cada y_m está en M, está en un $F_m \in \mathcal{M}$. Dado que $\mathcal{M}$ es compacto, podemos suponer que $F_m \to F$ para algún $F \in \mathcal{M}$. Por el lema 1.3, tenemos que $x \in F$. Sea $F = \{x_1, ..., x_n\}$. Sea $\varepsilon \in \mathcal{E}(F)$ con $\varepsilon < \varepsilon_o$ y $2\varepsilon \in \mathcal{E}(F)$. Entonces F está en $\langle B_\varepsilon(x_1), ..., B_\varepsilon(x_n)\rangle \cap \mathcal{M}$, que es abierto en $\mathcal{M}$; entonces existe un abierto y conexo $\mathcal{V}$ en $\mathcal{M}$ tal que $F \in \mathcal{V} \subset \langle B_\varepsilon(x_1), ..., B_\varepsilon(x_n)\rangle \cap \mathcal{M}$. Sea $W = \cup \{E \cap B_\varepsilon(x) : E \in \mathcal{V}\}$.

Demostremos que W es conexo.
Supongamos que $W = H \cup K$ con H y K abiertos en W y tales que $H \cap K = \emptyset$. Como $F \in \mathcal{V}$, entonces $F \cap B_\varepsilon(x) \subset W$ así que $x \in W$, pues $x \in F$. Podemos suponer que $x \in H$. Sean

$$\mathcal{H} = \{E \in \mathcal{V} : E \cap B_\varepsilon(x) \subset H\} \quad \text{y} \quad \mathcal{K} = \{E \in \mathcal{V} : E \cap B_\varepsilon(x) \not\subset H\}$$

Entonces $\mathcal{V} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ con $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Dado que $F \in \mathcal{V}$ y $\{x\} = F \cap B_\varepsilon(x) \subset H$ tenemos que $F \in \mathcal{H}$. Dada $p \in K$, $p \in W$ y entonces existe $E \in \mathcal{V}$ tal que $p \in E \cap B_\varepsilon(x) \cap K$. De modo que $E \in \mathcal{K}$; es decir $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

Ahora demostraremos que $\mathcal{H}$ es cerrado en $\mathcal{V}$.
Tomamos $\{E_k\}_k \subset \mathcal{H}$ tal que $E_k \to E$ con $E \in \mathcal{V}$. Sea $q \in E \cap B_\varepsilon(x)$. Supongamos que $q \notin H$. Ya que H es cerrado en W y $q \in W$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(q) \cap H = \emptyset$ y $B_\delta(q) \subset B_\varepsilon(x)$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(E_k, E) < \delta$ por tanto existe $p \in E_k$ tal que $d(p, q) < \delta$, de manera que $p \in E_k \cap B_\varepsilon(x)$ y $p \notin H$ lo cual es una contradicción, por lo tanto, $E \cap B_\varepsilon(x) \subset H$.

Vamos a demostrar ahora que $\mathcal{K}$ es cerrado en $\mathcal{V}$. Sea $\{E_k\}_k \subset \mathcal{K}$ tal que $E_k \to E$ con $E \in \mathcal{V}$. Como $E \in \mathcal{V}$, $E \cap B_\varepsilon(x)$ es finito, no vacío y está contenido en W. Supongamos que $E \cap B_\varepsilon(x) \cap K = \emptyset$. K cerrado en W implica que existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, E \cap B_\varepsilon(x)) \cap K = \emptyset$ con $\delta < \varepsilon$. Sea k tal que $H(E_k, E) < \delta$. Como $E_k \in \mathcal{K}$, existe $p \in (E_k \cap B_\varepsilon(x)) - H$. Entonces $p \in K$; para p existe $q \in E$ de tal forma que $d(p,q) < \delta$, $q \in B_\varepsilon(x_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(x_n)$ pues $E \in \mathcal{V}$. Pero $d(x,q) < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon$ y, como $2\varepsilon \in \mathcal{E}(F)$, tenemos que $q \in B_\varepsilon(x)$; lo que implica que $p \in N(\delta, E \cap B_\varepsilon(x))$ y entonces $p \notin K$. Esto es una contradicción, por lo tanto, $E \cap B_\varepsilon(x) \cap K \neq \emptyset$ así que $E \in \mathcal{K}$, entonces $\mathcal{K}$ es cerrado en $\mathcal{V}$.

Esto demuestra que $\mathcal{V}$ no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto W es conexo. Observemos que $W \subset U$ y $x \in W$, entonces $W \subset C$. Ya que $F_m \to F \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$ es abierto en $\mathcal{M}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_m \in \mathcal{V}$ y $d(x, x_m) < \varepsilon$, entonces $x_m \in F_m \cap B_\varepsilon(x) \subset W$, esto implica que $x_m \in C$. Esto contradice la elección de x_m y prueba que M es localmente conexo. ∎

Teorema 3.17 *Si $F(X)$ es conexo por trayectorias, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $p, q \in X$, como $\{p\}, \{q\} \in F(X)$, entonces existe una trayectoria $\gamma : [0,1] \to F(X)$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Sea $\mathcal{M} = Im\gamma$. Entonces $\mathcal{M}$ es un subcontinuo localmente conexo de $F(X)$ (Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, 31.5 de [12]). De manera que $M = \cup\mathcal{M}$ es un subcontinuo localmente conexo de X. De aquí que (31.2 de [12]) M es conexo por trayectorias. Y como $p, q \in M$, entonces p y q se pueden conectar por una trayectoria en M (y entonces en X). Por lo tanto X es conexo por trayectorias. ∎

Ahora presentamos nuestra demostración.

Lema 3.10 *Sean $\lambda : [0,1] \to F(X)$ una función continua, $0 \leq s < t \leq 1$ y $C(s,t) = \bigcup \{\lambda(r) : s \leq r \leq t\}$. Sea A componente de $C(s,t)$. Entonces $A \bigcap \lambda(t) \neq \emptyset \neq A \bigcap \lambda(s)$.*

Demostración. Observemos que $C(s,t)$ es cerrado. En efecto, como λ es continua, tenemos que $\{\lambda(r) : s \leq r \leq t\}$ es un cerrado de 2^X, pues es la imagen continua del compacto $[s,t]$.De modo que por el lema 1.4, $C(s,t)$ es un cerrado de X.

Supongamos ahora que $A \cap \lambda(t) = \emptyset$.
Dado que A es cerrado (por ser la componente de un cerrado), podemos aplicar el Teorema del Cable Cortado (teorema 1.3). Esto es, podemos encontrar H, K cerrados ajenos tales que

$$C(s,t) = H \cup K \quad \text{y} \quad A \subset H, \lambda(t) \subset K.$$

Consideremos ahora los conjuntos
$E = \{r \in [s,t] : \lambda(r) \cap H = \emptyset\}$, $F = \{r \in [s,t] : \lambda(r) \cap H \neq \emptyset\}$, aseguramos que E y F son conjuntos abiertos y cerrados de $[s,t]$, demostrémoslo: Sea

$$\mathcal{G} = \{D \in F(X) : D \cap H = \emptyset\} = \{D \in F(X) : D \subset X - H\}$$

Por el lema 1.2 sabemos que $\mathcal{G}$ es abierto. De modo que
$E = [s,t] \cap \lambda^{-1}(\mathcal{G})$ es un subconjunto abierto de $[s,t]$. Ahora sea $\mathcal{G}_1 = \{D \in F(X) : D \cap X - K \neq \emptyset\}$, por el lema 1.2, $\mathcal{G}_1$ es un abierto de $F(X)$.

Observemos que $[s,t] \cap \lambda^{-1}(\mathcal{G}_1) = \{r \in [s,t] : \lambda(r) \not\subset K\} = \{r \in [s,t] : \lambda(r) \cap H \neq \emptyset\} = F$. Entonces F también es un subconjunto abierto de $[s,t]$. De manera que tanto E como F son abiertos y cerrados en $[s,t]$. Notemos que $E \cup F = [0,1]$. Esto significa que alguno de E o F tiene que ser vacío. Pero $E = \{r : \lambda(r) \cap H = \emptyset\} \neq \emptyset$ pues t está ahí.

Ahora, como H no es vacío, podemos tomar $x \in H$, entonces, x está en $\lambda(r)$ para alguna r. Luego, existe r tal que $\lambda(r) \cap H \neq \emptyset$. Lo cual contradice el hecho de que F tiene que ser vacío. Por lo tanto, $A \cap \lambda(t) \neq \emptyset$. De manera totalmente análoga, se concluye que $A \cap \lambda(s) \neq \emptyset$. ∎

Lema 3.11 *Sean $C(s,t) = \cup\{\lambda(r) : s \leq r \leq t\}$ y $A(s,t)$ una componente de $C(s,t)$. Entonces $A(s,t) \cap \lambda(r) \neq \emptyset$, para todo r tal que $s < r < t$.*

Demostración. Sea r tal que $s < r < t$. Consideremos $C(s,r) = \bigcup\{\lambda(q) : s < q < r\}$.

Entonces $C(s,r) \subset C(s,t)$. Por el lema anterior podemos elegir un punto $p \in \lambda(s) \cap A(s,t)$. Sea $A(s,r)$ la componente de $C(s,r)$ que tiene a p. Entonces $A(s,r) \subset A(s,t)$, por el lema anterior $A(s,r) \cap \lambda(r) \neq \emptyset$. Por lo que $A(s,t) \cap \lambda(r) \neq \emptyset$. ∎

Lema 3.12 *Sea $\lambda : [0,1] \to F(X)$ continua y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $s \leq t$, $t - s < \delta$, $C(s,t) = \cup\{\lambda(r) : s \leq r \leq t\}$ y $A(s,t)$ es una componente de $C(s,t)$, entonces $diám(A(s,t)) < \varepsilon$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $t \in [0,1]$, $\lambda(t) \in F(X)$ es decir $\lambda(t) = \{x_1, ..., x_n\}$ Sean $\varepsilon_t \in \mathcal{E}(\lambda(t))$ con $\varepsilon_t < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\rho_t = mín\{\varepsilon/2, \varepsilon_t\}$. Como λ es continua en $[0,1]$, para toda $t \in [0,1]$ existe δ_t tal que si $|s - t| < \delta_t$ entonces $H(\lambda(t), \lambda(s)) < \rho_t/2$. Sea

$$B_t = B_{\frac{\delta t}{2}}(t) = \left\{q \in [0,1] : |q - t| < \frac{\delta t}{2}\right\}.$$

Como $t \in B_t$, entonces $C = \bigcup_{t \in [0,1]} B_t$ es una cubierta abierta de I. Pero $[0,1]$ es compacto, entonces existen $t_1, ... t_n \in [0,1]$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n} B_{t_i}$ es una cubierta finita de I. Sea $\delta = \frac{1}{2} mín\{\delta_{t_1}, ..., \delta_{t_n}\}$. Claramente $\delta > 0$. Sean $t, s \in [0,1]$ tales que $s \leq t$ y $t - s < \delta$. Existe un número natural m tal que $1 \leq m \leq n$ y $t \in B_{t_m}$ entonces $|t - t_m| < \frac{\delta_{tm}}{2}$ y

$$\begin{aligned} |s - t_m| &\leq |s - t| + |t - t_m| \\ &< \delta + \tfrac{\delta_{tm}}{2} \leq \delta_{t_m} \end{aligned}$$

Dada $r \in [s,t]$, tenemos que $|r - t_m| < \delta_{t_m}$, así que $H(\lambda(r), \lambda(t_m)) < \frac{\varepsilon_{t_m}}{2}$. Esto muestra que

$$C(s,t) = \cup\{\lambda(r) : s \leq r \leq t\} \subset N(\varepsilon_{t_m}, \lambda(t_m)).$$

Como $\varepsilon_{t_m} \in \mathcal{E}(\lambda(t_m))$, $N(\varepsilon_{t_m}, \lambda(t_m))$ es una unión ajena de vecindades de radio ε_{t_m} (una por cada elemento de $\lambda(t_m)$). Entonces la componente $A(s,t)$ debe estar contenida en una de ellas y, por tanto $A(s,t)$ está contenida en una bola de radio $\frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto *diám* $A(s,t) < \varepsilon$. ∎

Teorema 3.18 *Si $F(X)$ es conexo por trayectorias, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Queremos probar que dados $p, q \in X$, existe una función continua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Sean $p, q \in X$, con $p \neq q$. Como $F(X)$ es conexo por trayectorias, existe una función continua $\lambda : I \to F(X)$ tal que $\lambda(0) = \{p\}$ y $\lambda(1) = \{q\}$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea $\delta_n > 0$ un número que satisfaga el lema 3.12 para $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Tomamos una partición P_n, $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{e(n)}^n = 1$ de $[0,1]$ tal que $t_i^n - t_{i-1}^n < mín\left\{\delta_n, \frac{1}{n}\right\}$.

Sea A_1^n una componente de $C(t_0^n, t_1^n)$. Como por el lema 3.10 $A_1^n \cap \lambda(t_1^n) \neq \emptyset$ y como $\lambda(t_1^n) \subset C(t_1^n, t_2^n)$, podemos elegir una componente A_2^n de $C(t_1^n, t_2^n)$ que intersecte a $A_1^n \cap \lambda(t_1^n)$. Como $A_2^n \cap \lambda(t_2^n) \neq \emptyset$ y $\lambda(t_2^n) \subset C(t_2^n, t_3^n)$, es posible elegir una componente A_3^n de $C(t_2^n, t_3^n)$ que intersecte a $A_2^n \cap \lambda(t_2^n)$.

Siguiendo con este procedimiento, se construyen conjuntos $A_1^n, A_2^n, \ldots, A_{e(n)}^n$ donde A_i^n es una componente de $C(t_{i-1}^n, t_i^n)$ y $A_i^n \cap A_{i+1}^n \cap \lambda(t_i^n) \neq \emptyset$. Sea

$$\mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{e(n)} \left(\left[t_{i-1}^n, t_i^n\right] \times \{A_i^n\} \right) \subset [0,1] \times C(X),$$

entonces $\mathcal{A}_n \in 2^{[0,1] \times C(X)}$ y como $2^{[0,1] \times C(X)}$ es compacto, existe una subsucesión de $(\mathcal{A}_n)_n$ convergente ahí; esto es, existe una subsucesión $(\mathcal{A}_{n_k})_k$ de $(\mathcal{A}_n)_n$ tal que $(\mathcal{A}_{n_k})_k \to \mathcal{A}$ con $\mathcal{A} \in 2^{[0,1] \times C(X)}$.

Sea $t \in [0,1]$, para definir $\alpha(t)$ hacemos el siguiente proceso:
Sea $\varepsilon_t \in \mathcal{E}(\lambda(t))$ y sea $\delta_t > 0$ como en la definición de la continuidad de λ para $\frac{\varepsilon_t}{4}$. Sea $N \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{N} < min\left\{\frac{\varepsilon_t}{4}, \frac{\delta_t}{2}\right\}$ y $\mathcal{H}(\mathcal{A}_{n_N}, \mathcal{A}_{n_m}) < min\left\{\frac{\varepsilon_t}{4}, \frac{\varepsilon_t}{2}\right\}$ para todo $m \geq N$. Donde $\mathcal{H}$ denota la métrica de Hausdorff para $2^{[0,1]\times C(X)}$.

Si $m \geq N$, sea $i \in \{1, 2, ..., e(n_m)\}$ tal que $t \in [t_{i-1}^{n_m}, t_i^{n_m}]$, entonces (lema 3.11) $\lambda(t) \cap A_i^{n_m} \neq \emptyset$. Sea $p_t^m \in \lambda(t) \cap A_i^{n_m}$. Por la elección de δ_n, diám $A_i^{n_m} < \frac{1}{n_m} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon_t}{4}$, entonces $A_i^{n_m} \subset B_{\frac{\varepsilon_t}{4}}(p_t^m)$ por lo tanto, $A_i^{n_m}$ tiene exactamente un punto de $\lambda(t)$ (pues $\varepsilon_t \in \mathcal{E}(\lambda(t))$) Definimos $\alpha(t)$ como ese punto, es decir $\alpha(t) = p_t^m$.

Veamos que p_t^m no depende de i. Queremos ver que si $t \in \left[t_{i-1}^n, t_i^n\right]$ y $t \in \left[t_{j-1}^n, t_j^n\right]$ con $i \neq j$, entonces $p_{t_i}^n = p_{t_j}^n$ (por este momento le ponemos dependencia de i y de j a p_t^n). Este caso sólo ocurre cuanto t es un punto de la partición, o sea cuando $i = j+1$ o $i = j-1$. En cualquiera de los dos casos, por la construcción de los A_i^n tenemos que $\lambda(t) \cap A_i^n \cap A_j^n \neq \emptyset$, pero $p_{t_i}^n$ es el único punto de $\lambda(t) \cap A_i^n$ y $p_{t_j}^n$ es el único punto de $\lambda(t) \cap A_j^n$, así que $p_{t_i}^n = p_{t_j}^n$.

Mostremos ahora que p_t^m tampoco depende de m. Esto es que $p_t^m = p_t^N$ para todo $m \geq N$. Sea $m \geq N$ y sea i tal que $t \in [t_{i-1}^{n_m}, t_i^{n_m}]$ como $\mathcal{H}(\mathcal{A}_{n_m}, \mathcal{A}_{n_N}) < min\left\{\frac{\varepsilon_t}{4}, \frac{\delta_t}{2}\right\}$, entonces si D es la métrica de $[0,1] \times C(X)$, tenemos que $D\left((t, A_i^{n_m}), (s, A_j^{n_N})\right) < min\left\{\frac{\varepsilon_t}{4}, \frac{\delta_t}{2}\right\}$ para algún $(s, A_j^{n_N}) \in \mathcal{A}_{n_N}$. En particular, $|s-t| < \frac{\delta_t}{2}$ y $H\left(A_i^{n_m}, A_j^{n_N}\right) < \frac{\varepsilon_t}{4}$ entonces $A_j^{n_N} \subset N\left(\frac{\varepsilon_t}{4}, A_i^{n_m}\right)$, y como *diám* $A_i^{n_N} < \frac{1}{n_m} < \frac{\varepsilon_t}{4}$, tenemos que $A_j^{n_m} \subset B_{\frac{\varepsilon_t}{2}}(p_t^m)$. Sea $l \in \{1, 2, ..., e(n_N)\}$ tal que $t \in \left[t_{l-1}^{n_N}, t_l^{n_N}\right]$. Supongamos por ejemplo que $l \leq j$, entonces dada $r \in \left[t_{l-1}^{n_N}, t_j^{n_N}\right]$, se tiene que $|t-r| < \delta_t$. En efecto pues

a) Si $r \in \left[t_{l-1}^{n_N}, t_l^{n_N}\right]$ entonces por construcción de la partición, $|t-r| < \frac{1}{N} < \frac{\delta t}{2}$

b) Si $r \in [t, s]$ entonces $|r-t| \leq |s-t| < \frac{\delta t}{2}$ y

c) Si $r \in \left[t_{j-1}^{nN}, t_j^{nN}\right]$ entonces $|r-t| \leq |r-s| + |s-t| < \frac{1}{N} + \frac{\delta_t}{2} < \frac{\delta_t}{2} + \frac{\delta_t}{2} = \delta_t$

Por lo tanto, dada $r \in [t_{l-1}, t_j]$, $|t-r| < \delta_t$ y entonces $H(\lambda(r), \lambda(t)) < \frac{\varepsilon_t}{4}$. Por lo tanto $\bigcup\left\{\lambda(r) : t_{l-1}^{nN} \leq r \leq t_j^{nN}\right\} \subset N\left(\frac{\varepsilon_t}{4}, \lambda(t)\right)$. Consideremos ahora el continuo $A = A_l^{nN} \cup A_{l+1}^{nN} \cup \ldots \cup A_j^{nN} \subset C\left(t_{l-1}^{nN}, t_j^{nN}\right)$ pero sabemos que $C\left(t_{l-1}^{nN}, t_j^{nN}\right) \subset N\left(\frac{\varepsilon_t}{4}, \lambda(t)\right)$, entonces existe $p \in \lambda(t)$ tal que $A \subset B_{\frac{\varepsilon_t}{4}}(p)$. Pero teníamos que $A_j^{nN} \subset B_{\frac{\varepsilon_t}{2}}(p_t^m)$, luego $B_{\frac{\varepsilon_t}{2}}(p_t^m) \cap B_{\frac{\varepsilon_t}{4}}(p) \neq \emptyset$ y por la elección de ε_t, $p_t^m = p$. Por lo tanto $A_l^{nN} \subset B_{\frac{\varepsilon_t}{4}}(p_t^m)$. Por definición $p_t^N \in A_l^{nN} \cap \lambda(t)$ entonces $p_t^N \in B_{\frac{\varepsilon_t}{4}}(p_t^m) \cap \lambda(t)$. Por lo tanto $p_t^N = p_t^m$.

Nos gustaría por último, para que $\alpha(t)$ esté bien definida, que $\alpha(t) = p_t^m$ no dependa ni de m ni de ε_t. Sean $\varepsilon_t^1, \varepsilon_t^2 > 0$ y $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ de modo que $p_t^{N_1} = \alpha(t)$ tomando ε_t^1 y $q_t^{N_2} = \alpha(t)$ tomando ε_t^2. Queremos demostrar que $p_t^{N_1} = q_t^{N_2}$. Si $m > \max\{N_1, N_2\}$, por lo que acabamos de ver, $p_t^m = p_t^{N_1}$ y $q_t^m = q_t^{N_1}$. Como p_t^m es el único punto de $\lambda(t) \cap A_i^n$ y q_t^m es el único punto de $\lambda(t) \cap A_i^n$ (donde $t \in \left[t_{i-1}^n, t_i^n\right]$), tenemos que $p_t^n = q_t^n$, por lo tanto $p_t^{N_1} = q_t^{N_2}$. Esto termina la prueba de que $\alpha(t)$ está bien definida.

Probemos que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Tenemos que $\alpha(0) \in \lambda(0) \cap A_1^{n_m} = \{p\}$ pues $\lambda(0) \cap A_1^{n_m} \neq \emptyset$ y $\lambda(0) = \{p\}$. Ahora, $\alpha(1) \in \lambda(1) \cap A_{e(n_m)}^{n_m} = \{q\}$ pues $\lambda(1) \cap A_{e(n_m)}^{n_m} \neq \emptyset$ y $\lambda(1) = \{q\}$.

Sólo falta mostrar la continuidad de α en t. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ como en el lema 3.12 para esta ε. Aseguramos que si $|s-t| < \frac{\delta}{3}$ entonces $d(\alpha(t), \alpha(s)) < \varepsilon$. Supongamos pues que $|s-t| < \frac{\delta}{3}$ y que $s < t$. Para definir $\alpha(s)$ y $\alpha(t)$ tenemos definidos ε_t, ε_s y podemos pedir que ε_t, $\varepsilon_s < \varepsilon$. También están definidos δ_s, δ_t, N_s y N_t. Sea $m \in \mathbf{N}$ tal que $m > \max\{N_s, N_t\}$ y $\frac{1}{m} < \frac{\delta}{3}$. Por definición
$\{\alpha(s)\} = \lambda(s) \cap A_j^{n_m}$ y $\{\alpha(t)\} = \lambda(t) \cap A_i^{n_m}$. Como $s < t$, $j \leq i$. Consideremos $A = A_j^{n_m} \cup A_{j+1}^{n_m} \cup \ldots \cup A_i^{n_m} \in C(X)$, así que $A \subset C(t_{j-1}^{n_m}, t_i^{n_m})$ y A es conexo. Notemos que

$| t_i^{nm} - t_{j-1}^{nm} |= |t_i^{nm} - t| + |t - s| + \left|s - t_j^{nm}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} < \delta.$

Por el lema 3.12, las componentes de $C(t_i^{nm}, t_j^{nm})$ tienen diámetro menor que ε. En consecuencia *diám* $A < \varepsilon$. Por definición $\alpha(s), \alpha(t) \in A$, por tanto $d(\alpha(s), \alpha(t)) < \varepsilon$. Por lo tanto α es continua. Hemos concluido la prueba del teorema. ∎

Definición 3.13 *Sea $X \subset Y$ decimos que X es contraíble en Y si existe $f : X \times I \to Y$ y existe una $y_o \in Y$ tales que $f(x,0) = x$ y $f(x,1) = y_o$ para toda $x \in X$. Observemos que si X es contraíble entonces es contraible en Y para todo espacio Y que lo contenga como subespacio.*

Proposición 3.3 *Si $F_1(X)$es contraíble en $F(X)$, entonces $F(X)$ es contraíble.*

Demostración. Supongamos que $F_1(X)$es contraíble en $F(X)$, entonces existen una función continua

$f : F_1(X) \times I \to F(X)$ y $F_o \in F(X)$ tales que $f(\{q\}, 0) = \{q\}$ y $f(\{q\}, 1) = F_o$ para todo punto $\{q\}$ de $F_1(X)$.

Sea $A = \{x_1, ..., x_n\} \in F(X)$, definimos

$$g(A, t) = \bigcup_{i=1}^{n} f(\{x_i\}, t)$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} g(A,0) &= \textstyle\bigcup_{i=1}^n f(\{x_i\}, 0) \\ &= \textstyle\bigcup_{i=1}^n \{x_i\} \\ &= \{x_1, ..., x_n\} \\ &= A. \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g(A,1) &= \textstyle\bigcup_{i=1}^n f(\{x_i\}, 1) \\ &= \textstyle\bigcup_{i=1}^n F_o \\ &= F_o \end{aligned}$$

Demostremos que g es continua.

Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $H(\{q\}, \{p\}) < \delta$ y $|t - s| < \delta$, entonces $H(f(\{p\}, t), f(\{q\}, s)) < \varepsilon$. Sean $A, B \in F(X)$ y $t, s \in [0,1]$ tales que $H(A, B) < \delta$ y $|t - s| < \delta$, entonces $A \subset N(\delta, B)$, es decir, que para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$. Así que $H(\{a\}, \{b\}) < \delta$ y entonces

$$H(f(\{a\}, t), f(\{b\}, s)) < \varepsilon.$$

Esto implica que $f(\{a\},t) \subset N(\varepsilon, f(\{b\},s))$. De manera que

$$g(A,t) = \cup_{a \in A} f(\{a\},t) \subset N(\varepsilon, \cup_{b \in B} f(\{b\},s)) = N(\varepsilon, g(B,s)).$$

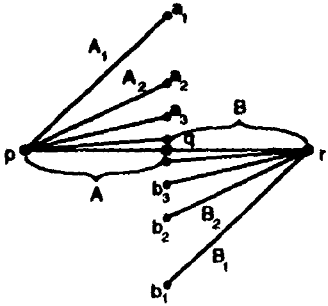
Análogamente concluimos que $g(B,s) \subset N(\varepsilon, g(A,t))$; lo que significa que $H(g(A,t), g(B,s)) < \varepsilon$. Por lo tanto g es continua. Esta es la definición de que $F(X)$ es contraíble. ∎

Corolario 3.7 *Si X es contraíble entonces $F(X)$ también es contraíble.*

El recíproco de este Teorema no es cierto. Veremos que $F(X)$ puede ser contraíble aunque X no lo sea. También veremos un ejemplo en el que $F(X)$ no es contraíble. Abordemos primero este segundo caso.

Ejemplo 3.1 *Sea X como en la siguiente figura, entonces $F(X)$ no es contraíble.*

Demostración.



$$X = \left(\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) \cup \left(\overline{\cup_{n=1}^{\infty} B_n}\right)$$

Con $A_n = \overline{pa_n}$ y $B_n = \overline{rb_n}$, donde $\overline{ab}$ denota el segmento de a a b. Observemos que la sucesión $\{A_n\}_n$ converge a $A = \overline{pq}$ y $\{B_n\}_n$ converge a $B = \overline{qr}$. Las sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ convergen ambas a q. Empecemos la demostración.

Podemos suponer que existe $G : F(X) \times [0,1] \to F(X)$ tal que $G(A,0) = A$ y $G(A,1) = \{p\}$ para toda $A \in F(X)$. Sea

$$t_o = \max\{t \in [0,1] : G(\{q\} \times [0,t]) = \{q\}\}.$$

Demostremos que $\{t \in [0,1] : G(\{q\} \times [0,t]) = \{q\}\}$ es un conjunto cerrado. Consideremos la función $h : X \times [0,1]$ tal que $h(a,t) = \{a\} \times [0,t] \in C(F(X) \times [0,1])$. h es una función continua. En efecto, dada $\varepsilon > 0$, si $d(a,b) < \varepsilon$ y $|s-t| < \varepsilon$, entonces claramente $H(\{a\},\{b\}) < \varepsilon$ y $H([0,s],[0,t]) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\mathcal{H}((\{a\} \times [0,t]),(\{b\} \times [0,s])) < \varepsilon$ donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff para $C(F(X) \times [0,1])$. Entonces la función $\psi(t) = (G\{q\}$
$\times [0,t])$ es continua, pues es una restricción de h seguida de la función imagen bajo G (lema 1.5). Pero $\psi^{-1}(\{q\}) \subset [0,1]$ y

$$\psi^{-1}(\{q\}) = \{t \in [0,1] : G(\{q\} \times [0,t]) = \{q\}\}.$$

Por lo tanto, $\{t \in [0,1] : G(\{q\} \times [0,t]) = \{q\}\}$ es cerrado.

Sea $\mathcal{A} = \{A \in F(X) : p, r \notin A\}$, por el lema 1.2, $\mathcal{A}$ es abierto en $F(X)$. Y tenemos que $G(\{q\}, t_o) = \{q\} \in \mathcal{A}$, entonces $t_o \neq 1$. Entonces existe $t_1 > t_o$ tal que $G(\{q\}, t_1) \in \mathcal{A}$, $G(\{q\}, t_1) \neq \{q\}$ y $G(\{q\}, t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in [t_o, t_1]$. Entonces $G(\{q\} \times [0,t_1]) \subset \mathcal{A}$. Como $\{a_n\} \to \{q\}$, y por el lema 1.5, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $G(\{a_n\} \times [0,t_1]) \subset \mathcal{A}$ para todo $n \geq N$. Entonces $G(\{a_n\} \times [0,t_1])$ es un conexo que tiene a a_n y no tiene a p. De modo que $G(\{a_n\} \times [0,t_1]) \subset A_n$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto $G(\{q\} \times [0,t_1]) \subset A$.

Similarmente se concluye que $G(\{q\} \times [0,t_1]) \subset B$. Entonces $G(\{q\} \times [0,t_1]) \subset A \cap B = \{q\}$, así que $G(\{q\} \times [0,t_1]) = \{q\}$, lo cual contradice la elección de t_o. Por lo tanto $F(X)$ no es contraíble. ∎

Para hacer esta prueba nos basamos en las ideas de la demostración del teorema 2 de [4], las adecuamos y completamos.

Para ver que $F(X)$ puede ser contraíble aún cuando X no lo sea, consideramos la circunferencia S^1 en $\mathbf{R}^2$. Probaremos que $F(S^1)$ es contraíble. La prueba es constructiva y elemental. Primero llevaremos mediante una función continua cualquier punto p de la circunferencia a un conjunto que consta de dos puntos: al formado por $p_o = (1,0)$ y al punto q tal que p dista lo mismo de p_o que de q. Después llevamos con otra función continua, el punto $\{p_o.q\} \in F_2(S^1)$ al punto $\{p_o\}$. Esto se hace en $F_3(S^1)$. Esto demuestra que $F_1(S^1)$ es contraíble en $F_3(S^1) \subset F(S^1)$; y como se enunció y demostró en la proposición 3.3, esto significa que $F(S^1)$ es contraíble.

La prueba que ofrecemos de que $F(S^1)$ es contraíble en $F_3(S^1)$ es una prueba elemental y muy geométrica. Usando teoremas que aparecen en la bibliografía es posible dar demostraciones más cortas de que S^1 es contraíble en $F_3(S^1)$. Un primer camino para hacer esto, es usar el teorema de Boot que asegura que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 (la esfera de dimensión tres). Como es sabido, el grupo fundamental de S^3 es trivial y entonces cualquier círculo dentro de él (en particular $F_1(S^1)$) es contraíble en él.

De manera que el lector que quisiera conocer completa esta prueba, tendría que leer primero el artículo de Boot , [2]. Seguramente estaría también interesado en leer el artículo de Borsuk [3] en el que aseguraba haber probado que "$F_3(S^1)$ es homemorfo a $S^2 \times S^1$". Si hubiera sido cierto el resultado de Borsuk, el nuestro no sería verdadero (pues el grupo fundamental de $S^2 \times S^1$ son los enteros). Como se ve, hay que ser cuidadosos en este tema pues ofrece posibilidades de cometer equivocaciones.

Otra manera, de probar que $F(S^1)$ es contraíble es usando el teorema de D. Curtis y N. To Nhu que asegura que $F(S^1)$ es homeomorfo a l^2_f que es el conjunto de puntos en el cubo de Hilbert cuyas coordenadas son casi todas iguales a cero. Siguiendo este camino, el lector que quisiera conocer la prueba completa, tendría que estudiar por lo menos un curso completo de topología de dimensión infinita. El artículo de Curtis y To Nhu [6], es de la serie de artículos que se publicaron en las décadas de los 70 y los 80 en los que se usaron las técnicas de topología de dimensión infinita y las caracterizaciones de espacios como l_f^2, l^2 y el cubo de Hilbert, para encontrar modelos de los hiperespacios. De esta manera resolvieron preguntas antiguas de hiperespacios (algunas tenían más de 40 años de ser atacadas).

Para ver nuestra demostración, necesitamos unos resultados previos y definir una métrica en S^1.

Sean $p, q \in S^1$ definimos la siguiente función

$$d(p,q) = mín\,\{long\ \overline{pq}, long\ \overline{qp}\}.$$

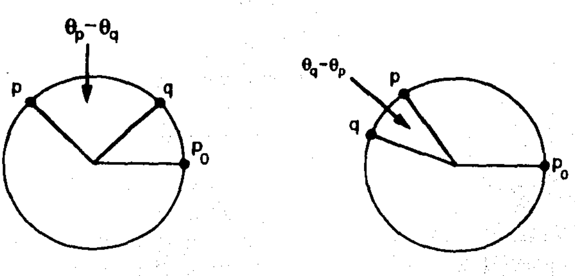
Donde $long\ \overline{pq}$ denota la logitud del arco de p a q recorrido en sentido positivo. Por la definición de longuitud de arco que se ve en cursos de Geometría, y considerando que tomamos puntos de S^1, sabemos que

$$d(p,q) = mín\,\{long\ \overline{pq}, long\ \overline{qp}\} = mín\,\{|\theta_p - \theta_q|, 2\pi - |\theta_p - \theta_q|\}$$

Donde θ_p es el ángulo que forma p con $p_o = (1,0)$ recorrido en el sentido inverso a las manecillas del reloj y $0 < \theta_p \leq 2\pi$. Es fácil demostrar que d es una métrica para S^1.

Lema 3.13 *Sean $p, q \in S^1$ y d definida como arriba. Si $d(p,q) < d(p,p_o)$, entonces $d(p,q) = |\theta_p - \theta_q|$.*

Demostración. La situación se ve en el siguiente dibujo.



Veamos que $d(p,q)$ no puede ser igual a $2\pi - |\theta_p - \theta_q|$. Supongamos por el contrario, que $d(p,q) = 2\pi - |\theta_p - \theta_q|$, entonces como $d(p,q) < d(p,p_o)$, tenemos que

$$2\pi - |\theta_p - \theta_q| < \theta_p. \dots\dots (1),$$
$$2\pi - |\theta_p - \theta_q| < 2\pi - \theta_p \dots\dots (2)$$

Así, tenemos dos casos.

a) Si $\theta_p - \theta_q > 0$, entonces por (2) sabemos que $2\pi - (\theta_p - \theta_q) < 2\pi - \theta_p$ y por lo tanto, $\theta_q < 0$, lo cual es una contradicción.

b) Si $\theta_p - \theta_q \leq 0$ entonces de (1), tenemos que $2\pi - (\theta_q - \theta_p) < \theta_p$, y entonces $2\pi - \theta_q < 0$ de modo que $\theta_q > 2\pi$, que también es una contradicción.

Por lo tanto, $d(p,q) = |\theta_p - \theta_q|$. ∎

Lema 3.14 *Sean $p = \cos\alpha + isen\alpha$, $q = \cos\beta + isen\beta$. Sea $\beta' \equiv \beta$ $(mod\ 2\pi)$. Si $|\alpha - \beta'| < 2\pi$ entonces $d(p,q) \leq |\alpha - \beta'|$.*

Demostración. Tenemos que $d(p,q) = mín\{|\theta_p - \theta_q|, 2\pi - |\theta_p - \theta_q|\}$. Con $\theta_p \in (0, 2\pi]$ y $\alpha \equiv \theta_p \pmod{2\pi}$, $\theta_q \in [0, 2\pi)$ y $\beta \equiv \theta_q \pmod{2\pi}$. Así, escribimos:

$\alpha = \alpha_o + 2\pi n$ con $\alpha_o \in (0, 2\pi]$ y $n \in \mathbf{Z}$.
$\beta = \beta_o + 2\pi k$ con $\beta_o \in (0, 2\pi]$ y $k \in \mathbf{Z}$.
$\beta' = \beta_o + 2\pi m$ con $m \in \mathbf{Z}$.

Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} 2\pi|m-n| - |\alpha_o - \beta_o| &\leq |\alpha_o - \beta_o - 2\pi(m-n)| \\ &= |\alpha - \beta'| < 2\pi. \end{aligned}$$

Entonces. $2\pi|m-n| < 2\pi + 2\pi$, así que $|m-n| < 2$, es decir, $|m-n| \leq 1$.

Esto significa que $m = n$ o $m = n + 1$ o $m = n - 1$.

a) $m = n$.

Sabemos que $d(p,q) \leq |\alpha_o - \beta_o|$
$$= |\alpha - 2\pi n - (\beta' - 2\pi m)|$$
$$= |\alpha - \beta'|.$$

b) $m = n + 1$

Entonces $\alpha - \beta' = (\alpha_o + 2\pi n) - (\beta_o + 2\pi(n+1)) =$
$$= \alpha_o + 2\pi n - \beta_o - 2\pi(n+1)$$
$$= \alpha_o - \beta_o - 2\pi < 0$$
De manera que $\beta' > \alpha$, y como $|\beta' - \alpha| < 2\pi$, se tiene que $|(\beta' - \alpha) - 2\pi(m-n)| = -(\beta' - \alpha) + 2\pi(m-n)$. Así que
$$d(p,q) \leq 2\pi - |\beta_o - \alpha_o|$$
$$= 2\pi - |(\beta' - \alpha) - 2\pi(m-n)|$$
$$= 2\pi + (\beta' - \alpha) - 2\pi(m-n)$$
$$= |\beta' - \alpha|.$$

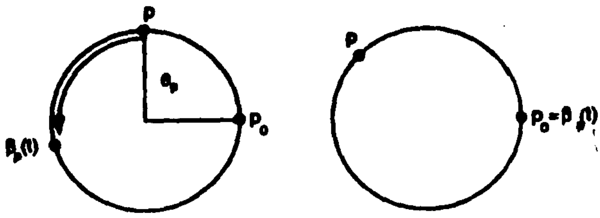
c) $m = n - 1$.

En este caso, $\alpha - \beta' = (\alpha_o + 2\pi n) - (\beta_o + 2\pi(n-1))$
$$= \alpha_o - \beta_o + 2\pi(n - (n-1))$$
$$= \alpha_o - \beta_o + 2\pi > 0.$$
Por lo tanto, $\alpha > \beta'$.
Pero sabemos que $d(p,q) \leq |\alpha_o - \beta_o|$
$$= 2\pi - |(\alpha - 2\pi n) - (\beta' - 2\pi m)|$$
$$= 2\pi - |(\alpha - \beta') - 2\pi(n-m)|$$
$$= 2\pi - |(\alpha - \beta') - 2\pi|$$
$$= 2\pi - (-(\alpha - \beta') + 2\pi)$$
$$= 2\pi + (\alpha - \beta') - 2\pi$$
$$= |\alpha - \beta'|.$$
Con esto, se concluye la prueba del lema. ∎

Definimos ahora, para cada $p \in S^1$ la función $\beta_p(t) : [0,1] \longrightarrow S^1$ tal que

$$\beta_p(t) = \begin{cases} (\cos(\theta_p + 2\pi t)\ ,\ sen(\theta_p + 2\pi t)) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 - \frac{\theta_p}{2\pi} \\ p_o & \text{si } 1 - \frac{\theta_p}{2\pi} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Donde θ_p se toma en el intervalo $(0, 2\pi]$ y $p_o = (1, 0)$



$0 \leq t \leq 1 - \theta_p/2\pi$ $\quad\quad$ $1 - \theta_p/2\pi \leq t \leq 1$

Observemos que esta función lleva el punto p hasta p_o . Las funciones β_p y β_q para $p, q \in S^1$ caminan siempre con la misma velocidad. Así, si q está más cercanp por arriba de p_o que p, tardará más en llegar que p. Una vez que llega a p_o, la función se mantiene constante, como se ilustra en la figura.

Lema 3.15 *Sea $p \in S^1$, $p \neq p_o$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(p, q) < \delta$, entonces $d(\beta_p(t), \beta_q(t)) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, d(p, p_o)\right\}$. Sea $q \in S^1$ tal que $d(p, q) < \delta$. Tenemos cuatro casos.

Caso 1. $0 \leq t \leq 1 - \frac{\theta_p}{2\pi}$ y $0 \leq t \leq 1 - \frac{\theta_q}{2\pi}$.
Por el lema 3.13, $d(p, q) = |\theta_q - \theta_p|$.
Entonces
$$d(\beta_p(t), \beta_q(t)) \leq |(\theta_q + 2\pi t) - (\theta_p + 2\pi t)| = |\theta_q - \theta_p| < \varepsilon.$$

Caso 2. $0 \leq t \leq 1 - \frac{\theta_p}{2\pi}$ y $1 - \frac{\theta_q}{2\pi} \leq t \leq 1$.
Las desigualdades $0 \leq t \leq 1 - \frac{\theta_p}{2\pi}$ implican que $0 \geq -2\pi t \geq \theta_p - 2\pi$, entonces

$$2\pi \geq 2\pi(1 - t) \geq \theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Por otra parte. $1 - \frac{\theta_q}{2\pi} \leq t \leq 1$ implica que $\theta_q - 2\pi \geq -2\pi t \geq -2\pi$, así que

$$\theta_q \geq 2\pi(1-t) \geq 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Entonces tenemos $d(\beta_p(t), \beta_q(t)) \leq |2\pi - (\theta_p + 2\pi t)|$, que por (1) esto es igual a

$$= 2\pi(1-t) - \theta_p$$
$$\leq \theta_q - \theta_p, \text{ por } (2). \text{ Y según el}$$

lema 3.13 ,

$$= d(p,q) < \varepsilon.$$

Caso 3. $1 - \frac{\theta_p}{2\pi} \leq t \leq 1$ y $0 \leq t \leq 1 - \frac{\theta_q}{2\pi}$.
Entonces, $\theta_p - 2\pi \geq -2\pi t \geq -2\pi$.
Por lo tanto,

$$\theta_p \geq 2\pi(1-t) \geq 0. \ldots\ldots (3)$$

Por otra parte $0 \leq t \leq 1 - \frac{\theta_q}{2\pi}$ implica que
$0 \leq 2\pi t \leq 2\pi - \theta_q$ así que,

$$0 \geq 2\pi(1-t) \geq \theta_q. \ldots\ldots (4)$$

Entonces $d(\beta_p(t), \beta_q(t)) = d(p_o, \beta_q(t))$
$\leq |2\pi - (\theta_q + 2\pi t)|$ y por (4),
$= 2\pi(1-t) - \theta_q$ y por (3),
$\leq \theta_p - \theta_q$
$= d(p,q) < \varepsilon.$

Caso 4. $1 - \frac{\theta_p}{2\pi} \leq t \leq 1$ y $1 - \frac{\theta_q}{2\pi} \leq t \leq 1$.

Entonces $d(\beta_p(t), \beta_q(t)) = d(p_o, p_o) < \varepsilon.$

Por lo tanto, en cualquier caso, si $d(p,q) < \delta$, entonces $d(\beta_p(t), \beta_q(t)) < \varepsilon.$ ∎

Lema 3.16 *Sea $p \in S^1$ con $p \neq p_o$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(p,q) < \delta$ y $|s-t| < \delta$, entonces $d(\beta_p(t), \beta_q(s)) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{4\pi}, 1\right\}$; donde δ_1 satisface el lema 3.15 para $\frac{\varepsilon}{2}$.

a) Supongamos que $s \leq t \leq 1 - \frac{\theta_q}{2\pi}$
Apliquemos el lema 3.14 a los puntos $\beta_q(t)$, y $\beta_q(s)$. Haciendo $\beta_q(t) = \cos\alpha + i\text{sen}\alpha$ y $\beta_q(s) = \cos\beta + i\text{sen}\beta$, con $\alpha = \theta_q + 2\pi t$ y $\beta = \theta_q + 2\pi s$. Obviamente tenemos que $\theta_q + 2\pi s \equiv \theta_q + 2\pi s$ (mod 2π).

Entonces se tiene,

$$|(\theta_q + 2\pi t) - (\theta_q + 2\pi s)| = 2\pi\,|t-s| < 2\pi$$

pues $|s-t| < 1$.
Por lo tanto, $d(\beta_q(t), \beta_q(s)) \leq 2\pi\,|t-s|$
$< 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{4\pi} = \frac{\varepsilon}{2}$,
dado que $|t-s|$ también es menor que $\frac{\varepsilon}{4\pi}$.

Por otro lado, como $d(p,q) < \delta_1$, entonces $d(\beta_p(t), \beta_q(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$.
De modo que

$$\begin{aligned} d(\beta_p(t), \beta_q(s)) &\leq d(\beta_p(t), \beta_q(t)) + d(\beta_q(t), \beta_q(s)) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

b) Si $t < s \leq 1 - \frac{\theta_q}{2\pi}$
Hacemos nuevamente $\beta_q(t) = \cos\alpha + i\text{sen}\alpha$ y $\beta_q(s) = \cos\gamma + i\text{sen}\beta$ con $\alpha = \theta_q + 2\pi t$ y $\gamma = \theta_q + 2\pi s$. Evidentemente, $\theta_q + 2\pi s \equiv \theta_q + 2\pi s$ (mod 2π).

Entonces

$$|(\theta_q + 2\pi s) - (\theta_q + 2\pi t)| = 2\pi\,(s-t) < 2\pi$$

ya que $|s-t|<1$.

Por lo tanto, según el lema 3.14, $d(\beta_q(t),\beta_q(s)) \leq 2\pi\,|t-s|$
$$< 2\pi \cdot \tfrac{\varepsilon}{4\pi} = \tfrac{\varepsilon}{2},$$
pues $|t-s| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$.

Además, como $d(p,q) < \delta_1$, (que satisface el lema 3.15), entonces $d(\beta_p(t),\beta_q(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto,
$$d(\beta_p(t),\beta_q(s)) \leq d(\beta_p(t),\beta_q(t)) + d(\beta_q(t),\beta_q(s))$$
$$< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

c) Si $s,t \geq 1 - \frac{\theta_q}{2\pi}$.

Entonces $d(\beta_p(t),\beta_q(s)) \leq d(\beta_p(t),\beta_q(t)) + d(p_o,p_o) < \varepsilon$ Esta última desigualdad es por el lema 3.13.

d) Si $s \leq 1 - \frac{\theta_q}{2\pi} \leq t$.

Sea $t_* = 1 - \frac{\theta_q}{2\pi}$. Razonando como en el caso a), $d(\beta_q(t_*),\beta_q(s)) < \frac{\varepsilon}{2}$, pero $\beta_q(t_*) = p_o = \beta_q(t)$. De manera que $d(\beta_q(t),\beta_q(s)) < \frac{\varepsilon}{2}$. De aquí que $d(\beta_p(t),\beta_q(s)) < \varepsilon$.

e) Si $t \leq 1 - \frac{\theta_q}{2\pi} \leq s$

Sea $s_* = 1 - \frac{\theta_q}{2\pi}$. Por el caso b) tenemos que $d(\beta_p(t),\beta_q(s_*)) < \varepsilon$. Pero $\beta_q(s_*) = p_o = \beta_q(s)$. Así que $d(\beta_p(t),\beta_q(s)) < \varepsilon$.

Hemos terminado con esto la demostración del lema. ∎

Lema 3.17 *El conjunto* $\mathcal{A} = \{A \in F_2(S^1) : p_o \in A\}$ *es contraíble en* $F_3(S^1)$.

Demostración. Tenemos que demostrar que existe una función $F : \mathcal{A} \times I \to F_3(S^1)$ continua tal que $F(A,0) = A$ y $F(A,1) = A_o$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y para algún A_o fijo en $F_3(S^1)$.

Sea $\alpha : I \to S^1$ tal que $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Entonces α es una función continua. Sea $A_o = \{p_o\} \in F_3(S^1)$. Sea $F : \mathcal{A} \times I \to F_3(S^1)$ definida como $F(\{p, p_o\}, t) = \{p_o, \alpha(t), \beta_p(t)\}$. Entonces tenemos que

$$F(\{p,p_o\},0) = \{p_o, \alpha(0), \beta_p(0)\} = \{p_o, p_o, p\} = \{p_o, p\}.$$
$$F(\{p,p_o\},1) = \{p_o, \alpha(1), \beta_p(1)\} = \{p_o, p_o, p_o\} = \{p_o\} = A_o$$

Ahora demostraremos la continuidad de F en todo punto diferente de $\{p_o\}$.

Sea $A = \{p, p_o\} \in \mathcal{A}$, con $A \neq \{p_o\}$.

Tenemos que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $H(A,B) < \delta$ y $|s-t| < \delta$, entonces $H(F(A,t), F(B,s)) < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = mín\{\delta_1, \delta_2, d(p,p_o)\}$; donde δ_1 satisface la continuidad de α para ε y δ_2 cumple el lema 3.16 para la misma ε y para p.

Supongamos que $H(A,B) < \delta$ con $B = \{p_o, q\}$ y $p \neq q$ y $|s-t| < \delta$ entonces como $p \notin B_\delta(p_o)$ y $\{p_o, p\} \subset N(\delta, \{p_o, q\})$ y $\{p_o, q\} \subset N(\delta, \{p_o, p\})$, se tiene que $p \in B_\delta(q)$ y $q \in B_\delta(p)$, entonces $d(p,q) < \delta$ y $|s-t| < \delta$. Por lo tanto

$$d(\alpha(t), \alpha(s)) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(\beta_p(t), \beta_q(s)) < \varepsilon.$$

Entonces $\alpha(t) \in B_\varepsilon(\alpha(s))$, $\alpha(s) \in B_\varepsilon(\alpha(t))$ y $\beta_p(t) \in B_\varepsilon(\beta_q(s))$, $\beta_q(s) \in B_\varepsilon(\beta_p(t))$. Y como $p_o \in B_\varepsilon(p_o)$ tenemos que

$$\{\alpha(t), \beta_p(t), p_o\} \subset N(\varepsilon, \{\alpha(s), \beta_q(s), p_o\}) \quad \text{y}$$
$$\{\alpha(s), \beta_q(s), p_o\} \subset N(\varepsilon, \{\alpha(t), \beta_p(t), p_o\})$$

De manera que $H(F(A,t), F(B,s)) < \varepsilon$. Por lo tanto, F es continua en todo $A \neq \{p_o\}$.

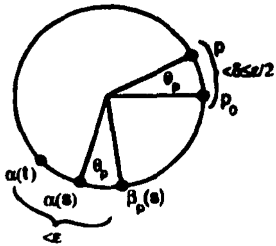
Demostremos ahora que F es continua en $\{p_o\}$.

Sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta = mín\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta_1, \frac{\pi}{2}\right\}$ donde δ_1 satisface la continuidad de α para $\frac{\varepsilon}{2}$.

Caso I. Supongamos que p está por arriba de p_o.

Supongamos que $H(\{p_o, p\}, \{p_o\}) < \delta$ y $|s-t| < \delta$. Entonces $d(p,p_o) < \delta$ y $|s-t| < \delta$. Observemos que p por arriba de p_o y $d(p,p_o) < \delta$ implican que $d(p,p_o) = \theta_p$.

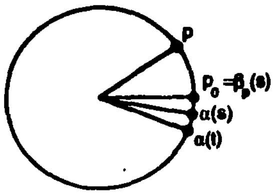
1. **Supongamos que $0 \leq s < 1 - \frac{\theta_p}{2\pi}$.**



$0 \leq s \leq 1 - \theta_p/2\pi$

Entonces $\quad d(\alpha(t), \beta_p(s)) \leq d(\alpha(t), \alpha(s)) + d(\alpha(s), \beta_p(s))$
$$< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2}$$
ya que $d(\alpha(s), \beta_p(s)) = |2\pi s - (\theta_p + 2\pi s)|$
$$= |\theta_p|$$
$$= d(p, p_o)$$
$$< \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
Como además $d(\alpha(t), \alpha(s)) < \varepsilon$, y $p_o \in B_\varepsilon(p_o)$, se tiene que
$F(\{p, p_o\}, s) = \{\alpha(s), \beta_p(s), p_o\} \subset N(\varepsilon, \{\alpha(t), p_o\}) = N(\varepsilon, F(\{p_o\}, t))$,
$F(\{p_o\}, t) = \{\alpha(t), p_o\} \subset N(\varepsilon, \{\alpha(s), \beta_p(s), p_o\}) = N(\varepsilon, F(\{p, p_o\}, s))$
Por lo tanto $H(F(\{p, p_o\}, s), F(\{p_o\}, t)) < \varepsilon$.

2. Ahora supongamos que $1 - \frac{\theta p}{2\pi} \leq s \leq 1$.



$1 - \theta_p / 2\pi \leq s \leq 1$

Entonces $\beta_p(s) = p_o$, así que $\beta_p(s) \in B_\varepsilon(p_o)$. Como $|s-t| < \delta$, $d(\alpha(t), \alpha(s)) < \varepsilon$. De manera que

$$F(\{p_o, p\}, s) = \{\alpha(s), p_o\} \subset N(\varepsilon, \{\alpha(t), p_o\}) = N(\varepsilon, F(\{p_o\}, t)),$$
$$F(\{p_o\}, t) = \{\alpha(t), p_o\} \subset N(\varepsilon, \{\alpha(s), p_o\}) = N(\varepsilon, F(\{p, p_o\}, s))$$

Por lo tanto $H(F(\{p, p_o\}, s), F(\{p_o\}, t)) < \varepsilon$.

Caso II. Supongamos que p está por abajo de p_o.

Supongamos que $H(\{p_o, p\}, \{p_o\}) < \delta$ y $|s-t| < \delta$, entonces $d(p, p_o) < \delta$. Notemos que si p está por abajo de p_o, y $d(p, p_o) < \delta$, $d(p, p_o) = 2\pi - \theta_p$.

1. Primero supongamos que $0 \leq s < 1 - \frac{\theta_p}{2\pi}$.

   Entonces $0 \leq 2\pi s < 2\pi - \theta_p < \frac{\pi}{2}$. De modo que $0 < 2\pi - (\theta_p + 2\pi s) < \pi$. Entonces, $d(\beta_p(s), p_o) = 2\pi - (\theta_p + 2\pi s)$, así que $d(\beta_p(s), p_o) \leq d(p, p_o) < \varepsilon$. Por lo tanto $\beta_p(s) \in B_\varepsilon(p_o)$ y $\alpha(s) \in B_\varepsilon(\alpha(t))$ y entonces

$$\begin{aligned} F(\{p, p_o\}, s) &= \{\alpha(s), \beta_p(s), p_o\} \subset N(\varepsilon, \{\alpha(t), p_o\}) \\ &= N(\varepsilon, F(\{p_o\}, t)), \end{aligned}$$

$$F(\{p_o\},t) = \{\alpha(t), p_o\} \subset N(\varepsilon, \{\alpha(s), \beta_p(s), p_o\})$$
$$= N(\varepsilon, F(\{p, p_o\}, s))$$

Por lo tanto $H(F(\{p,p_o\},s), F(\{p_o\},t)) < \varepsilon$.

2. Ahora supongamos que $1 - \frac{\theta_p}{2\pi} \leq s \leq 1$.
Entonces $\beta_p(s) = p_o$. Y entonces
$$H(\{\alpha(t), p_o\}, \{\alpha(s), p_o\}) < \varepsilon$$
Por lo tanto $H(F(\{p,p_o\},s), F(\{p_o\},t)) < \varepsilon$. Por lo tanto, F es continua en $\{p_o\}$, luego F es continua en A para todo $A \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es contraíble en $F_3(S^1)$, que es la afirmación del lema. ∎

Lema 3.18 *Existe una función continua* $G : S^1 \times [0,1] \to F_3(S^1)$ *tal que* $G(p,0) = \{p\}$ *y* $G(p,1) \in \mathcal{A}$ *para toda* $p \in S^1$.

Demostración. Sea $p = (\cos\theta_p, \mathrm{sen}\theta_p)$ un punto de S^1. Definimos

$$G(p,t) = \{(\cos(\theta_p + \sigma_p t), \mathrm{sen}(\theta_p + \sigma_p t)), (\cos(\theta_p - \sigma_p t), \mathrm{sen}(\theta_p - \sigma_p t))\}$$

donde $\sigma_p = mín\{2\pi - \theta_p, \theta_p\}$.

Esta función bifurca el punto p y lo lleva a dos puntos, uno p_o y otro el punto q tal que $d(p,p_o) = d(p,q)$.

Para probar la continuidad de G, primero observemos que la función $p \to \theta_p$ es continua en el subconjunto abierto $S^1 - \{p_o\}$ de S^1. De aquí que las funciones $p \to \sigma_p$ y

$$(p,t) \to ((\cos(\theta_p + \sigma_p t), \mathrm{sen}(\theta_p + \sigma_p t)), (\cos(\theta_p - \sigma_p t), \mathrm{sen}(\theta_p - \sigma_p t)))$$

de $(S^1 - \{p_o\}) \times [0,1]$ en $S^1 \times S^1$ es continua. Entonces al componer esta función con la función $(z,w) \to \{z,w\}$ de $S^1 \times S^1$ en $F_2(S^1)$, obtenemos una funcion continua (ver Proposición 2.1). Pero esta composición es precisamente la función G. Por tanto G es continua en el conjunto abierto $(S^1 - \{p_o\}) \times [0,1]$ de $S^1 \times [0,1]$.

Nos falta comprobar que G es continua en los puntos de la forma (p_o, t). Observemos que $G(p_o, s) = \{p_o, p_o\} = \{p_o\}$ para toda $s \in [0,1]$. Sea $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ y sea $(p,s) \in S^1 \times [0,1]$ tal que $d(p,p_o) < \delta$. Como $d(p,p_o) < \frac{\pi}{4}$, entonces $0 < \theta_p < min\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ o $min\left\{2\pi - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{5\pi}{4}\right\} < \theta_p \leq 2\pi$. En el primer caso, $\sigma_p = \theta_p$, $0 < \theta_p + \sigma_p s < 2\theta_p < \varepsilon$ y $0 \leq \theta_p - \sigma_p s < \theta_p < \varepsilon$ y $H(G(p,s), p_o) < \varepsilon$. En el segundo caso, $\sigma_p = 2\pi - \theta_p$, $2\pi - \varepsilon < \theta_p \leq \theta_p + \sigma_p s \leq \theta_p + \sigma_p = 2\pi$ y $2\pi - \varepsilon < \theta_p - \frac{\varepsilon}{2} < \theta_p + \theta_p - 2\pi = \theta_p - \sigma_p \leq \theta_p - \sigma_p s \leq \theta_p \leq 2\pi$. De manera que $2\pi - \varepsilon < \theta_p + \sigma_p s \leq 2\pi$ y $2\pi - \varepsilon < \theta_p - \sigma_p s \leq 2\pi$. De aquí que $H(G(p,s), p_o) < \varepsilon$. Por tanto $H(G(p,s), G(p_o,t)) < \varepsilon$ cuando $d(p,p_o) < \delta$. Esto termina la prueba de la continuidad de G y en consecuencia la del lema. ∎

Teorema 3.19 *$F(S^1)$ es contraíble.*

Demostración. Sea $H : S^1 \times [0,1] \to F_3(S^1)$ definida por

$$H(p,t) = \begin{cases} G(p,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(G(p,1), 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde G y F son las funciones definidas en los lemas 3.18 y 3.17 respectivamente.

H es una función continua dada la continuidad de G y F y porque $G\left(p, 2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = G(p,1) \in \mathcal{A}$ y $F\left(G(p,1), 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) = F(G(p,1), 0)$ $= G(p,1)$ para toda $p \in S^1$. Observemos que para toda $p \in S^1$,

$$H(p,0) = G(p,0) = p \quad y \quad G(p,1) = F(G(p,1),1) = p_o$$

Esto significa que $F_1(S^1)$, que es homeomorfo a S^1, es contraíble en $F(S^1)$. Por lo tanto, por la proposición 3.3, $F(S^1)$ es contraíble. ∎

Teorema 3.20 *Sea X conexo por trayectorias. El grupo fundamental del $F(X)$ es trivial. Esto es, $\prod_1(F(X)) \approx \{0\}$.*

Demostración. Tenemos que demostrar que para toda función $H : S^1 \to F(X)$ existe una función $f : S^1 \times [0,1] \to F(X)$ y existe $A_o \in F(X)$ tales que $f(p,0) = H(p)$ y $f(p,1) = A_o$ para toda $p \in S^1$. Sea $H : S^1 \times [0,1] \to F(S^1)$ como en la demostración del teorema 3.19. Por este mismo teorema 3.19, sabemos que existen una función $g : F(S^1) \times [0,1] \to F(S^1)$ y $B_o \in F(S^1)$ tales que $g(B,0) = B$ y $g(B,1) = B_o$ para todo $B \in F(S^1)$.

Definimos $\widehat{H} : F(S^1) \to F(X)$ como $\widehat{H}(B) = \bigcup_{p \in B} H(p)$. Observemos que $\widehat{H}(\{q\}) = H(q)$ para todo $q \in S^1$. Sea $A_o = \bigcup_{b \in B_o} H(b)$ y sea $f(p,t) = \widehat{H}(g(\{p\},t))$. Entonces tenemos que

$$f(p,0) = \widehat{H}(g(\{p\},0)) = \widehat{H}(\{p\}) = H(p) \quad \text{y}$$
$$f(p,1) = \widehat{H}(g(\{p\},1)) = \widehat{H}(B_o) = \bigcup_{b \in B_o} H(b) = A_o$$

Esto termina la prueba. ∎

El teorema 3.20 asegura que $F(X)$ no tiene agujeros detectables usando el grupo fundamental. Con respecto a otra herramienta para detectar agujeros, A. Illanes [8], ha mostrado que si X es localmente conexo, entonces $F(X)$ es unicoherente. Sin embargo, no se sabe si esto es cierto sin la hipótesis de conexidad local.

PROBLEMAS.

PROBLEMA 1. ¿Es $F(X)$ unicoherente para todo continuo X?

En el teorema 3.19 vimos que $F(S^1)$ es contraíble. En el ejemplo 3.1 mostramos que existen espacios X para los que $F(X)$ no es contraíble. Aunque nosotros no sabemos ni siquiera si la siguiente pregunta tiene una respuesta afirmativa:

PROBLEMA 2. ¿Si X es localmente conexo, entonces $F(X)$ es contraíble?

Hemos pensado en muchos espacios localmente conexos y para todos ellos nos hemos convencido de que $F(X)$ es contraíble. Además es conocido ([13] y 16.7 de [11]) que la conexidad local en X implica la contractibilidad en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X.

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Hiperespacios y la propiedad de Kelley,* Tesis de licenciatura en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, 1994.

[2] R. Boot. *On the third symmetric potency of S^1.* Fund. Math. 39(1952), 264-268.

[3] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference,* Fund. Math. 36(1949), 236-244.

[4] W. J. Charatonik, *R^i-continua and hyperspaces,* Topology and its Applications 23(1986), 207-216.

[5] D. Curtis, R. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes,* fund. Math. CI(1978), 19-38.

[6] D. Curtis, N. To Nhu, *Hyperspace of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_o$-dimensional linear metric spaces,* Topology and its Applications, 19(1985), 251-260.

[7] A. García-Maynez, A. Tamariz , *Topología General,* Porrúa, 1988.

[8] A. Illanes *Monotone and open Whitney maps defined in 2^X*, Topology and its Applications 53(1993), 271-288.

[9] S. Macías, *La estructura de los dendroides suaves,* Aportaciones Matemáticas No. 10, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[10] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory,* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1992.

[11] Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets,* Marcel Dekker,Inc., New York and Basel, 1978.

[12] S. Willard, *General Topology,* Addison-Wesley Pu. Co., Reading Mass., 1970.

[13] M. Wojdyslawski, *Sur la contractilité des hyperespaces des continus localemente connexes,* Fund. Math., 30(1938), 247-252.