

29  
2018  
ACADEMIA  
29  
2018



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA DE GEODÉSICAS  
PARA LA MÉTRICA DE LORENTZ  
DE UN CAMPO GRAVITACIONAL ESTACIONARIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

Laura Regina Rodríguez Hernández



México, D.F

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



Septiembre, 1995.

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVANZA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:


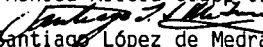
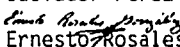

Existencia de geodésicas para la métrica de Lorentz de un campo gravitacional estacionario.  
realizado por

Laura Regina Rodríguez Hernández

con número de cuenta 9052366-5 , pasante de la carrera de Matemático.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis   
Propietario Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora.  
Propietario   
Dr. Santiago López de Medrano Sánchez.  
Propietario Dr. Salvador Pérez Esteva.  
Suplente   
Dr. Ernesto Rosales González  
Suplente   
Mat. José Martínez León.

Consejo Departamental de Matemáticas  
Mat. César Guevara Bravo.

# Existencia de Geodésicas para la Métrica de Lorentz de un Campo Gravitacional Estacionario

Laura Regina Rodríguez Hernández

***A Miguel, Jorge  
y a mon pou***

**Quiero agradecer a todas aquellas personas que me ayudaron a concluir la carrera y mi tesis. En particular agradezco al Dr. Adalberto García Maynez y a los que hicieron posible mi incorporación al Instituto de Matemáticas; a Mónica Clapp y Carlos Alvarez por sus muchos consejos como tutores y como amigos; a Mariel, Richy y Xavier por su calidez. Agradezco también la mucha paciencia de Salvador, Yorsh, Sergio, Eduardo, José y Déborah. A mi familia, perdón por tanto abandono.**

# Indice

<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Formas bilineales . . . . .	3
1.2 Variedades Semi-Riemannianas . . . . .	6
1.3 Espacios-Tiempo . . . . .	9
<b>2 Geodésicas y puntos críticos</b>	<b>13</b>
2.1 El Espacio de Sobolev $H^1$ . . . . .	13
2.2 La Funcional Energía . . . . .	25
<b>3 Teoría de puntos críticos</b>	<b>37</b>
<b>4 Geodésicas en Espacios-Tiempo</b>	<b>53</b>

encl. 1

1. *[Illegible text]*  
 2. *[Illegible text]*  
 3. *[Illegible text]*  
 4. *[Illegible text]*  
 5. *[Illegible text]*  
 6. *[Illegible text]*  
 7. *[Illegible text]*  
 8. *[Illegible text]*  
 9. *[Illegible text]*  
 10. *[Illegible text]*  
 11. *[Illegible text]*  
 12. *[Illegible text]*  
 13. *[Illegible text]*  
 14. *[Illegible text]*  
 15. *[Illegible text]*  
 16. *[Illegible text]*  
 17. *[Illegible text]*  
 18. *[Illegible text]*  
 19. *[Illegible text]*  
 20. *[Illegible text]*  
 21. *[Illegible text]*  
 22. *[Illegible text]*  
 23. *[Illegible text]*  
 24. *[Illegible text]*  
 25. *[Illegible text]*  
 26. *[Illegible text]*  
 27. *[Illegible text]*  
 28. *[Illegible text]*  
 29. *[Illegible text]*  
 30. *[Illegible text]*  
 31. *[Illegible text]*  
 32. *[Illegible text]*  
 33. *[Illegible text]*  
 34. *[Illegible text]*  
 35. *[Illegible text]*  
 36. *[Illegible text]*  
 37. *[Illegible text]*  
 38. *[Illegible text]*  
 39. *[Illegible text]*  
 40. *[Illegible text]*  
 41. *[Illegible text]*  
 42. *[Illegible text]*  
 43. *[Illegible text]*  
 44. *[Illegible text]*  
 45. *[Illegible text]*  
 46. *[Illegible text]*  
 47. *[Illegible text]*  
 48. *[Illegible text]*  
 49. *[Illegible text]*  
 50. *[Illegible text]*  
 51. *[Illegible text]*  
 52. *[Illegible text]*  
 53. *[Illegible text]*  
 54. *[Illegible text]*  
 55. *[Illegible text]*  
 56. *[Illegible text]*  
 57. *[Illegible text]*  
 58. *[Illegible text]*  
 59. *[Illegible text]*  
 60. *[Illegible text]*  
 61. *[Illegible text]*  
 62. *[Illegible text]*  
 63. *[Illegible text]*  
 64. *[Illegible text]*  
 65. *[Illegible text]*  
 66. *[Illegible text]*  
 67. *[Illegible text]*  
 68. *[Illegible text]*  
 69. *[Illegible text]*  
 70. *[Illegible text]*  
 71. *[Illegible text]*  
 72. *[Illegible text]*  
 73. *[Illegible text]*  
 74. *[Illegible text]*  
 75. *[Illegible text]*  
 76. *[Illegible text]*  
 77. *[Illegible text]*  
 78. *[Illegible text]*  
 79. *[Illegible text]*  
 80. *[Illegible text]*  
 81. *[Illegible text]*  
 82. *[Illegible text]*  
 83. *[Illegible text]*  
 84. *[Illegible text]*  
 85. *[Illegible text]*  
 86. *[Illegible text]*  
 87. *[Illegible text]*  
 88. *[Illegible text]*  
 89. *[Illegible text]*  
 90. *[Illegible text]*  
 91. *[Illegible text]*  
 92. *[Illegible text]*  
 93. *[Illegible text]*  
 94. *[Illegible text]*  
 95. *[Illegible text]*  
 96. *[Illegible text]*  
 97. *[Illegible text]*  
 98. *[Illegible text]*  
 99. *[Illegible text]*  
 100. *[Illegible text]*



## INTRODUCCIÓN

Un Espacio-Tiempo como modelo matemático en una pareja  $(\mathcal{M}, g)$ , donde  $\mathcal{M}$  es una variedad de dimensión cuatro, conexa, Hausdorff y de clase  $C^\infty$  y  $g$  es una métrica de Lorentz, i.e. una forma bilineal simétrica no degenerada de índice 1. En nuestro caso, las parejas en cuestión son  $(\mathbb{R}^4, g)$ .

La pregunta que nos hacemos es: dados dos puntos  $a$  y  $b$  en el espacio-tiempo  $(\mathbb{R}^4, g)$  ¿existirá una geodésica que los una? Esto en general no es cierto y los Espacios Anti de Sitter son un ejemplo; sin embargo, recientemente (1990) V. Benci y D. Fortunato demostraron la existencia de trayectorias geodésicas bajo ciertas hipótesis. Una de ellas, la más restrictiva, es que el campo gravitacional –i.e. la métrica de Lorentz – sea estacionario.

Los métodos que se usan para la demostración del *teorema de Benci-Fortunato* son interesantes en sí mismos: se traduce el problema a un variacional donde la funcional correspondiente (la funcional energía) es fuertemente indefinida, se usa el *teorema de punto silla* de A. Ambrosetti y P.H. Rabinowitz (1973) aplicándolo cuidadosamente a subespacios de adecuados de dimensión finita de  $H_0^1(I, \mathbb{R}^4)$  de modo que los puntos críticos de la funcional restringida a dichos subespacios converjan a un punto crítico  $\zeta^*$  de la funcional sobre todo el espacio en cuestión. Así

$$a + (b - a)t + \zeta^*$$

será la geodésica buscada.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Formas bilineales

En esta sección enunciaremos algunas definiciones y resultados de carácter algebraico que pondremos en la base de la definición de métrica semi-Riemanniana. Esta sección cobra sentido por el hecho de que la primera diferencia entre una métrica riemanniana y una semi-riemanniana es que, mientras la primera está representada, en cada punto de la variedad, por una forma bilineal positiva definida, la segunda lo está por un producto escalar. Pasemos a ver lo que esto significa.

#### DEFINICIÓN 1.1

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Una forma bilineal simétrica  $b$  sobre  $V$  es una función bilineal  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $b(v, w) = b(w, v) \forall v, w \in V$ . Una forma bilineal simétrica  $b$  sobre  $V$  es:

- 1) positiva [negativa] definida si  $v \neq 0 \Rightarrow b(v, v) > 0$  [ $< 0$ ]
- 2) indefinida si existen  $v, w$  en  $V$  tales que  $b(v, v) > 0$  y  $b(w, w) < 0$
- 3) no degenerada si  $b(v, w) = 0 \forall w \in V \Rightarrow v = 0$

De aquí, cuando  $b$  satisface ser no degenerada se dice que  $b$  es un producto escalar, si además es positiva definida se le llama producto interior. Es claro que un producto interior es a su vez un producto escalar, sin embargo cuando digamos que  $g$  es un producto escalar vamos a pensar que se trata de una forma bilineal indefinida.

**EJEMPLO:**

i) Sea  $\mathfrak{R}^4$  el espacio vectorial de dimensión 4.

$$g(x, y) := x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$$

con  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$  define una forma bilineal simétrica indefinida y no degenerada en  $\mathfrak{R}^4$ .

Dem: Es claro que es una forma bilineal simétrica.  $g(x, y) = 0 \forall y \in \mathfrak{R}^4$   
 $\Rightarrow g(x, e_i) = 0$  para  $i = 0, \dots, 3 \Rightarrow x_i = 0 \forall i = 0, \dots, 3$ ; por lo tanto  $g$  es no degenerada.  $g$  es indefinida porque  $g(e_0, e_0) = 1$  y  $g(e_i, e_i) = -1$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

□

Veamos que una forma bilineal siempre se puede representar por medio de una matriz.

**DEFINICIÓN 1.2**

Dada una base  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  de  $\mathbf{V}$  y  $b$  una forma bilineal sobre el espacio, la matriz de  $n \times n$  con entradas  $b_{ij} := b(e_i, e_j)$  se llama la matriz de  $b$  asociada a  $\beta$ .

Claramente, si  $b$  es simétrica su matriz asociada a cualquier base  $\beta$  lo es también y determina a  $b$  pues dados  $v, w \in \mathbf{V}$ ,  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ ,  $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$  con  $v_i, w_j \in \mathfrak{R}$  y  $e_i \in \beta \forall i = 1, 2, \dots, n$ , sucede

$$b(v, w) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_i w_j = v^t (b_{ij}) w$$

En adelante con  $g$  denotaremos un producto escalar a menos que se especifique lo contrario. Ahora un teorema para matrices simétricas que traducido a formas bilineales tendrá algunas consecuencias importantes.

**TEOREMA 1.3**

Si  $\mathbf{V}$  es un espacio vectorial dimensionalmente finito sobre  $\mathfrak{R}$ , entonces toda forma bilineal simétrica sobre  $V$  es diagonalizable. [Fr, 7.34]

Por otro lado se dice que  $v$  es ortogonal a  $w$  en  $(V, g)$  si  $g(v, w) = 0$ . En vista de esto, diagonalizar una matriz simétrica equivale a encontrar una base ortogonal con respecto a la forma bilineal definida por dicha matriz; así, el teorema (1.3) nos garantiza que siempre es posible encontrar, para un espacio de dimensión finita sobre  $\mathfrak{R}$ , una base  $g$ -ortogonal.

El siguiente lema va a caracterizar a las formas bilineales no degeneradas vía el hecho de que cualquier matriz asociada sea invertible.

**LEMA 1.4**

$g$  es un producto escalar si y sólo si su matriz relativa a una base cualquiera es invertible.

*Demostración*

Sea  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base de  $V$ . Sea  $v \in V$   $v \neq 0$ ;  $b(v, w) = 0$   $w \in V \Leftrightarrow 0 = b(v, e_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} v_j \forall i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow$  las columnas de  $(b_{ij})$  son linealmente dependientes lo que equivale a decir que  $(b_{ij})$  es singular.

□

Así, para una base  $g$ -ortogonal se obtiene inmediatamente el siguiente

**COROLARIO 1.5**

Si  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es una base  $g$ -ortogonal de  $V$ , entonces  $g(e_i, e_i) \neq 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$ . O bien, dicho de otra forma, la matriz asociada a  $g$  con respecto a  $\beta$  no tiene ceros en la diagonal.

Es claro que si para  $v, w \in V$   $g(v, v) < 0$  y  $g(w, w) < 0$  entonces para cualquier elemento  $u$  del subespacio generado por  $v$  y  $w$  se cumple que  $g(u, u) < 0$ . Entonces a todo producto escalar podemos asociar un único número que enseguida definimos.

**DEFINICIÓN 1.6**

El índice  $\nu$  de  $g$  sobre  $V$  es la dimensión del máximo subespacio  $W \subset V$  en el cual  $g|_W$  es negativa definida.

Pero también es posible asociar a cada producto escalar un vector.

**DEFINICIÓN 1.7**

Sea  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base  $g$ -ortogonal de  $V$ . Se define para  $\beta$  el vector *signatura*

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

donde  $\varepsilon_i = 1$  si  $\lambda_i > 0$  y  $\varepsilon_i = -1$  si  $\lambda_i < 0$  con  $\lambda_i = g(e_i, e_i)$ .

El siguiente lema relaciona los dos anteriores conceptos.

**LEMA 1.8**

Para una base  $g$ -ortogonal  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  de  $V$  el número de signos negativos en el vector *signatura*  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  es el índice de  $g$  sobre  $V$ . [O'N, 2.26]

Sobre cada punto de una variedad semi-riemanniana vamos a tener un producto escalar definido sobre el espacio tangente a la variedad en ese punto, el cuál, en general, va a variar con el punto, sin embargo vamos a pedir que el vector *signatura* sea una constante sobre toda la variedad.

**1.2 Variedades Semi-Riemannianas**

Como hemos dicho antes, la primera diferencia entre geometría riemanniana y semi-riemanniana se encuentra en las características de la forma bilineal, i.e. en la manera de medir. Mientras en una variedad riemanniana para cada uno de sus puntos teníamos una forma bilineal simétrica positiva definida sobre el espacio tangente en ese punto, ahora vamos a permitir que la forma bilineal sea indefinida, i.e. que sobre algún subespacio del espacio tangente, en cada punto de la variedad, sea negativa definida; justo lo que en la primera parte llamamos un producto escalar. Pasemos pues a definir con toda formalidad lo que esto significa.

**DEFINICIÓN 1.9**

Una *métrica semi-Riemmaniana* sobre una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asocia a cada punto  $p$  de  $M$  un producto escalar  $g_p[\cdot, \cdot]$  sobre el espacio tangente  $T_p M$ , de índice constante y que

varía diferenciablemente en el siguiente sentido: si  $\mathbf{x} : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$  es una carta alrededor de  $p$ , con  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $\mathbf{x}(q) = p \in \mathbf{x}(\mathbf{U})$  y

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \dots, 1, \dots, 0),$$

entonces

$$g_p \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}(q), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}(q) \right] = g_{ij}(p)$$

es una función diferenciable.

Una variedad semi-riemanniana es una variedad suave equipada con una métrica semi-riemanniana.

**Nota:** Siempre vamos a trabajar con variedades de dimensión finita.

Al valor  $\nu$  del índice de  $g_p$ , que se mantiene constante sobre toda la variedad semi-riemanniana  $\mathcal{M}$ , se le suele llamar el índice de  $\mathcal{M}$ . Si  $\nu = 1$  entonces  $g_p$  es una forma bilineal simétrica positiva definida y  $\mathcal{M}$  es una variedad riemanniana. Si  $\nu = 1$  y la dimensión de la variedad  $\mathcal{M}$  es  $n \geq 2$ , entonces se dice que  $g_p$  es una *métrica de Lorentz* y  $\mathcal{M}$  una *variedad de Lorentz*. Para los casos particulares en que  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$  y  $g_p$  es una métrica de Lorentz se dice que  $(\mathbb{R}^n, g)$  es un *espacio-tiempo*.

Pasemos ahora a recordar el importante concepto de *conexión afín*. Como en el caso de geometría riemanniana, para métricas semi-riemannianas también se tiene un teorema de *Levi-Civita* que nos garantiza la existencia de una conexión afín simétrica y compatible con la métrica.

### DEFINICIÓN 1.10

Denotemos con  $\mathcal{X}(\mathcal{M})$  al conjunto de todos los campos vectoriales sobre una variedad  $\mathcal{M}$  que son diferenciables. Una conexión afín  $\nabla$  sobre  $\mathcal{M}$  es un mapeo

$$\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

que se denota  $\nabla(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$  y que satisface las siguientes propiedades:

- i)  $\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}$ .
- ii)  $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}$ .
- iii)  $\nabla_{\mathbf{X}}f\mathbf{Y} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{X}(f)\mathbf{Y}$ ,

para  $X, Y, Z$  en  $\mathcal{X}(\mathcal{M})$  y  $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables. [O'N, 3.9]

**TEOREMA 1.11 (LEVI-CIVITA)**

Dada una variedad semi-riemanniana  $\mathcal{M}$ , existe una única conexión afín  $\nabla$  sobre  $\mathcal{M}$  que satisface ser simétrica y ser compatible con la métrica  $g$ , i.e. si satisface

(a)  $[V, W] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$

(b)  $Xg[V, W] = g[\nabla_X V, W] + g[V, \nabla_X W].$

para  $[ , ]$  el paréntesis de Lie. A esta conexión se le llama conexión semi-Riemanniana. [O'N, 3.11]

Cuando lo que se tiene es un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva  $\hat{\alpha}(t) : I \rightarrow \mathcal{M}$ , i.e. una función que a cada  $t \in I$  le asocia suavemente un vector tangente a  $\mathcal{M}$  en el punto  $\hat{\alpha}(t)$ , hay una manera natural de definir la velocidad de cambio de  $V$  y es la que anunciamos en la siguiente

**PROPOSICIÓN 1.12**

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Existe una única correspondencia que asocia a cada campo vectorial  $V$ , a lo largo de una curva  $\hat{\alpha}(t) : I \rightarrow \mathcal{M}$ , otro campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de  $\hat{\alpha}$ , llamado la derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $\hat{\alpha}$ , tal que para  $W$  otro campo vectorial a lo largo de  $\hat{\alpha}$  y  $f$  es una función diferenciable sobre  $I$ :

a)  $\frac{D}{dt}(aV + bW) = a\frac{DV}{dt} + b\frac{DW}{dt} \quad a, b \in \mathbb{R}.$

b)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}.$

c) Si  $V$  es inducido por un campo vectorial  $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , es decir  $V(t) = Y(\hat{\alpha}(t))$ , entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\hat{\alpha}}{dt}} Y.$

Donde, con respecto a la métrica satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}g_{\hat{\alpha}(t)}[Y, W] = g_{\hat{\alpha}(t)}\left[\frac{DY}{dt}, W\right] + g_{\hat{\alpha}(t)}\left[\frac{DW}{dt}, Y\right] \quad (1.1)$$

[O'N, 3.18]

Una consecuencia de la simetría de la conexión es el siguiente

**LEMA 1.13**

Si  $\mathcal{M}$  es una variedad diferenciable con una conexión simétrica y si  $S(t, h) : I \times J \rightarrow \mathcal{M}$  es una superficie parametrizada, entonces

$$\frac{D}{dh} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\partial S}{\partial h} \quad (1.2)$$

[DoC, 3.4]

El paso siguiente es llegar a la definición de geodésica sobre una variedad semi-riemanniana.

**DEFINICIÓN 1.14**

Si  $\hat{\alpha}(t)$  es tal que la derivada covariante de su campo de velocidades es cero, i.e. si

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0,$$

entonces  $\hat{\alpha}(t)$  es una geodésica. [O'N]

## 1.3 Espacios-Tiempo

El ejemplo más simple de una variedad riemanniana es el espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$  donde su producto punto le hereda una métrica riemanniana (i.e. una forma bilineal simétrica de índice  $\nu = 0$ ) con el cual  $\forall v, w \in T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  y para toda  $x \in \mathbb{R}^n$

$$g_x[v, w] = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

Si para un entero  $\nu$ ,  $0 < \nu \leq n$ , cambiamos los primeros  $\nu$  signos positivos por negativos

$$g_x[v, w] = - \sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{i=\nu+1}^n v_i w_i$$

obtenemos un producto escalar de índice  $\nu$ . El resultante es el espacio semi-euclideo  $\mathbb{R}_\nu^n$ . Para  $\nu = 1$  y  $n = 4$  obtenemos el ejemplo más simple de un *espacio-tiempo* relativista.



Diremos que  $v \in \mathbb{R}^4$  es  
 -espacial si  $g[v, v] > 0$   
 -nulo si  $g[v, v] = 0$   
 -temporal si  $g[v, v] < 0$ .

**EJEMPLO:**

Veamos quienes son las geodésicas en el espacio-tiempo  $(\mathbb{R}^4, g)$  cuando consideramos la métrica constante

$$g[v, v] = -v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Como los coeficientes de la métrica son constantes los símbolos de Christoffel se anulan y la derivada covariante coincide con la derivada usual y por lo tanto una curva  $\alpha(t)$  es geodésica si y sólo si es una línea recta.

EL siguiente ejemplo ilustra la existencia de espacios-tiempo para los cuales no es cierto que para cualesquiera dos puntos  $a, b$  existe una geodésica que los una.

**ESPACIOS ANTI-DE-SITTER**

Consideremos la función

$$\pi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\pi(t, x) = \left( \sqrt{1 + \|x\|_{\mathbb{R}^{n-1}}^2} \cos t + \sqrt{1 + \|x\|_{\mathbb{R}^{n-1}}^2} \sin t, x \right)$$

Esta función enrolla a  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$  sobre una hipersuperficie de revolución que llamaremos  $H_1^n$ . Si le damos a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$  la métrica constante de índice 2 para obtener  $\mathbb{R}_2^{n+1}$ , esta métrica induce una métrica en  $H_1^n$  de índice 1.  $H_1^n$  se llama *pseudo-espacio hiperbólico*.

Tomando el *pullback* de la métrica en  $H_1^n$ , se obtiene una métrica de índice 1 en  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ , i.e.

$$\hat{g}(z)[v, w] := g(\pi(z))[D\pi(z)v, D\pi(z)w], \quad z, v, w \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$$

donde  $g$  es la métrica de  $H_1^n \subset \mathbb{R}_2^{n+1}$ . Entonces  $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}, \hat{g})$  se denota por  $\hat{H}_1^n$  y se llama el *espacio anti-de Sitter*.  $\hat{H}_1^n$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  pero la métrica obtenida es distinta de la del ejemplo anterior.

En particular, existen pares de puntos  $p, q \in \hat{H}_1^n$  que no están conectados por trayectoria geodésica alguna [Haw, 5.2].

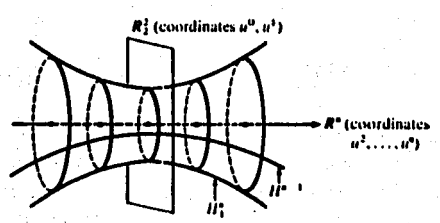


Figura 1.1:  $H_1^n$  en  $\mathfrak{R}_2^{n+1}$ .



## Capítulo 2

# Trayectorias geodésicas y puntos críticos

### 2.1 El Espacio de Sobolev $H^1(I, \mathbb{R}^4)$

Para el estudio de las geodésicas en la variedad a la que se refiere este trabajo –  $\mathbb{R}^4$  con una *métrica de Lorentz* – se requiere de un espacio de curvas que sea completo y es más, de uno que sea la completación del espacio de curvas suaves en  $\mathbb{R}^4$ . El espacio adecuado es el Espacio de Sobolev  $H^1(I, \mathbb{R}^4)$ . Los primeros resultados nos presentan algunas propiedades de este espacio y su subespacio  $H_0^1(I, \mathbb{R}^4)$ , así como en qué otros espacios están contenidos y de qué forma, qué conjuntos densos tienen, etc. Al final viene el teorema más importante de este capítulo donde se demuestra que las geodésicas son puntos críticos de una cierta funcional.

Vamos a dar dos definiciones del espacio  $H^1$ . Una de ellas está dada en términos de funciones que son de clase  $C^1$  y que tienen soporte compacto.

#### DEFINICIÓN 2.1

Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función real y continua en  $I = (0, 1)$ . Se define el soporte de  $f$ , que se denota  $\text{Supp } f$ , como la cerradura del conjunto formado por las  $x \in I$  tales que  $f(x) \neq 0$ . Al espacio de las funciones continuas en  $I$  con soporte compacto se les representa por  $C_c(I)$ .

Para el desarrollo de algunas demostraciones será fundamental tener presente el siguiente

**TEOREMA 2.2**

$C_c(I)$  y  $C_c^1(I) = C_c(I) \cap C^1(I)$  son densos en  $\mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})$ , el espacio de las funciones  $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$  que son cuadrado integrables respecto a la medida de Lebesgue. [Br, cor. IV.23]

Una función de clase  $C^1$  en  $I$  si cumple ser continua con soporte compacto en  $I$ , entonces se pega al cero antes de llegar a los extremos y su derivada resulta ser también un elemento de  $\mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})$ .

**PROPOSICIÓN 2.3**

Si  $\langle G, \varphi \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{D} \subset \mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})$ , con  $\mathbf{D}$  un subconjunto denso en  $\mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})$ , entonces

$$\langle G, f \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})$$

*Demostración*

$$\Psi_G(\cdot) = \langle \cdot, G \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

es una funcional lineal continua, por lo tanto manda sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Así

$$\text{si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - f\|_{\mathcal{L}^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \varphi_n, G \rangle_{\mathcal{L}^2} - \langle f, G \rangle_{\mathcal{L}^2}| = 0$$

pero si  $\varphi_n \in \mathbf{D} \quad \forall n \in \mathcal{N}$ , entonces  $\langle \varphi_n, G \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}$  por lo tanto

$$\langle f, G \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0$$

□

**DEFINICIÓN 2.4**

Se dice que una función real  $f$  definida sobre el intervalo  $[0, 1]$  es absolutamente continua, lo que se denota  $f \in AC(I)$ , si a cada  $\varepsilon > 0$  le corresponde una  $\delta > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon \quad \forall n$$

y para toda colección disjunta de segmentos  $(\alpha_i, \beta_i)$  en  $\bar{I}$  cuyas longitudes satisfagan

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$$

[Ru, 7.17]

Es fácil ver que si  $f$  es absolutamente continua en  $\bar{I}$ , entonces es continua en  $\bar{I}$ . Pero además tenemos la siguiente

### PROPOSICIÓN 2.5

Toda función absolutamente continua posee derivada finita en casi todos los puntos.

Para su demostración puede verse [Kol2, teo. 1, p.368], [Kol2, teo. 1, p.278] y [Kol2, 2, p.368].

### PROPOSICIÓN 2.6

Si  $f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ , entonces

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

es una función absolutamente continua.

*Demostración*

Tenemos dos casos: si  $\|f\|_{\mathcal{L}^2} = 0 \Rightarrow f = 0$  casi donde quiera,  $\Rightarrow F(t) = 0$ , donde  $F(t) = 0$  claramente es una función absolutamente continua.

Supongamos ahora que  $\|f\|_{\mathcal{L}^2} > 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta = \varepsilon / \|f\|_{\mathcal{L}^2}$  y  $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^n$  una colección disjunta de segmentos arbitraria tal que

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(s) ds \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|f\|_{\mathcal{L}^2} |\beta_i - \alpha_i| < \|f\|_{\mathcal{L}^2} \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto  $F(t)$  es absolutamente continua en  $\bar{I}$ .

□

**TEOREMA 2.7** (Definición del espacio de Sobolev)

$$\mathbf{H}_1 = \{u : \bar{I} \rightarrow \mathfrak{R} \mid u \in AC(\bar{I}) \text{ y } \dot{u} \in \mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})\}$$

$\mathbf{H}_1$  es un espacio de Hilbert con el siguiente producto interior

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{H}_1} = u(0)v(0) + \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle_{\mathcal{L}^2} \quad (2.1)$$

*NOTA:* De hecho estamos concibiendo a  $\mathbf{H}_1$  como el conjunto de las clases de equivalencia de funciones que son iguales casi donde sea en  $I$ .

*Demostración*

Sea  $\{u_n\} \subset \mathbf{H}^1$  una sucesión  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ -Cauchy, entonces  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N}$  tal que  $\forall n, m \geq N$

$$\|u_n - u_m\|_{\mathbf{H}^1}^2 = \|u_n(0) - u_m(0)\|_{\mathfrak{R}}^2 + \|\dot{u}_n - \dot{u}_m\|_{\mathcal{L}^2}^2 < \varepsilon$$

Por lo tanto  $\{u_n\}$  y  $\{\dot{u}_n\}$  son sucesiones de Cauchy en  $\mathfrak{R}$  y  $\mathcal{L}^2$  respectivamente. Esto implica que existe  $p \in \mathfrak{R}$  y  $g \in \mathcal{L}^2$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0) - p\|_{\mathfrak{R}}^2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\dot{u}_n - g\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 0$$

Sea

$$u(t) = \int_0^t g(s) ds + p$$

por (2.6)  $u(t)$  es absolutamente continua en  $\bar{I}$ ,  $\dot{u}(t) = g(t)$  casi donde sea en  $I$  (ver [Ru, 7.11]) y además  $u(0) = p$ . Esto implica que  $u \in \mathbf{H}^1$ ,  $u_n(0) \rightarrow u(0)$  en  $\mathfrak{R}$  y  $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}$  en  $\mathcal{L}^2$ . Por lo tanto  $(\mathbf{H}^1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}^1})$  es de Hilbert.

□

**PROPOSICIÓN 2.8** (Segunda definición del espacio de Sobolev)

Sea  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})$ . Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathbf{H}^1(I, \mathfrak{R}) = \left\{ u \in \mathcal{L}^2 : \exists g \in \mathcal{L}^2 \text{ tal que} \right. \\ \left. \int_I u \dot{\varphi} dt = - \int_I g \varphi dt \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\} \quad (2.2)$$

Entonces  $\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}_1$

En adelante se pondrá  $\dot{u}$  en vez de  $g$ . A  $\dot{u}$  se le llama la *derivada débil* de  $u$ .

Antes de pasar a la demostración de esta proposición veamos que la derivada débil es única salvo por un conjunto de medida cero.

Supongamos que  $g$  y  $h$ , elementos de  $\mathcal{L}^2$ , satisfacen

$$\int_I u\varphi' dt = - \int_I g\varphi dt = - \int_I h\varphi dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1$$

entonces

$$- \int_I (g - h)\varphi dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1.$$

Por la proposición (2.3) esto implica

$$\|g - h\|_{\mathcal{L}^2} = 0,$$

i.e.  $g = h$  casi donde sea en  $I$ .

□

Ahora sí, pasemos a demostrar la proposición anterior.

*Demostración*

- $(H_1 \subset H^1)$

Sea  $u \in H_1$ , por ser continua sobre un compacto es claro que  $u \in \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$ .

$$\int_I u\varphi' dt = u\varphi|_0^1 - \int_I \dot{u}\varphi dt = - \int_I \dot{u}\varphi dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Por lo tanto  $u \in H^1$ .

- $(H^1 \subset H_1)$

Sea  $u \in H^1$  y  $\dot{u}$  su derivada débil. Consideremos

$$h(t) = \int_0^t \dot{u} dt \quad t \in [0, 1]$$

por (2.6)  $h(t)$  es absolutamente continua en  $\bar{I}$  y por el teorema [Ru, 7.11]

$$h'(t) = \dot{u}(t) \quad \text{c.d. en } \bar{I}$$



además

$$\begin{aligned} \int_0^1 h\varphi' dt &= h\varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 h'\varphi dt \\ &= - \int_0^1 h'\varphi dt = - \int_0^1 u\varphi dt \\ &= \int_0^1 u\varphi' dt \quad \forall \varphi \in C_c^1(I). \end{aligned}$$

Esto implica

$$\int_0^1 (h - u)\varphi' dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

y por el corolario (2.3)

$$\|h - u\|_{\mathcal{L}^2} = 0$$

i.e.  $h = u$  casi donde quiera en  $I$ . Concluimos entonces que módulo clases de equivalencias  $u \in \mathbf{H}_1$ .

□

Por otro lado sabemos que para dos espacios de Hilbert  $(\mathbf{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}})$  y  $(\mathbf{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{F}})$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} \oplus \mathbf{F} = \{(e, f) \mid e \in \mathbf{E}, f \in \mathbf{F}\}$$

con el producto interior

$$\langle (e_1, f_1), (e_2, f_2) \rangle_{\mathbf{H}} = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbf{E}} + \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbf{F}} \quad (2.3)$$

constituye a su vez un espacio de Hilbert.

Entonces

$$\mathbf{H}^1(I, \mathbb{R}^4) = \mathbf{H}^1(I, \mathbb{R}) \oplus \underbrace{4}_{\text{veces}} \oplus \mathbf{H}^1(I, \mathbb{R})$$

es un espacio de Hilbert con su respectivo producto interior (2.3).

Recordemos ahora que nuestro interés es, dados dos puntos fijos a y  $b \in \mathbb{R}^4$ , un espacio-tiempo, garantizar la existencia de un geodésica que

los una. Entonces podemos restringir nuestro estudio a la familia de curvas que unen  $a$  con  $b$  y que pertenecen a  $H^1(I, \mathfrak{R}^4)$ . Claramente, si  $z(t)$  es una de esas curvas entonces se puede escribir como

$$z(t) = \bar{z}(t) + \zeta(t)$$

donde  $\zeta(t)$  es un lazo en  $\mathfrak{R}^4$ , i.e.  $\zeta(0) = \zeta(1) = 0$ , y

$$\bar{z}(t) = a + (b - a)t \quad t \in [0, 1].$$

Definimos entonces

$$H_0^1 = \{\zeta \in H^1(I, \mathfrak{R}^4) \mid \zeta(0) = 0 = \zeta(1)\} \quad (2.4)$$

Sobre este conjunto tenemos el siguiente

### TEOREMA 2.9

$$H_0^1 = \{\zeta \in H^1(I, \mathfrak{R}^4) \mid \zeta(0) = 0 = \zeta(1)\}$$

es un subespacio cerrado de  $H^1$

*Demostración*

Sea  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty \subset H_0^1$  una sucesión que converge con la norma  $\|\cdot\|_{H^1}$  a  $\zeta \in H^1$ , i.e. dada  $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N}$  tal que

$$\begin{aligned} \|\zeta_n - \zeta\|_{H^1}^2 &= \|\zeta_n(0) - \zeta(0)\|_{\mathfrak{R}^4}^2 + \|\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}\|_{L^2}^2 \\ &= \|\zeta(0)\|_{\mathfrak{R}^4}^2 + \|\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}\|_{L^2}^2 < \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

Sea

$$\hat{\zeta}(t) = \int_0^t \dot{\zeta}(s) ds$$

por la proposición (2.8)  $\hat{\zeta}(t)$  es un representante absolutamente continuo en  $I$  de la clase de  $\zeta(t)$  y cumple que en  $t = 0$  vale 0. Vía la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned} |\zeta_n(1) - \zeta(1)| &= \left| \int_0^1 \dot{\zeta}_n(s) ds - \int_0^1 \dot{\zeta}(s) ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 (\dot{\zeta}_n(s) - \dot{\zeta}(s)) ds \right| \\ &\leq \|\dot{\zeta}_n(s) - \dot{\zeta}(s)\|_{L^1} \\ &\leq \|\dot{\zeta}_n(s) - \dot{\zeta}(s)\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

esto implica  $0 = \zeta_n(1) = \hat{\zeta}(1)$ . Por lo tanto  $\hat{\zeta}(t) \in \mathbf{H}_0^1$ , i.e.  $\mathbf{H}_0^1$  es un subespacio cerrado de  $\mathbf{H}^1$ .

□

De hecho, en vista de que  $\mathbf{H}_0^1$  es un subespacio lineal de  $\mathbf{H}^1$ ,  $\mathbf{H}_0^1$  constituye en sí mismo un espacio de Hilbert con el producto interior inducido

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{H}_0^1} = \langle u, v \rangle_{\mathbf{H}^1} = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle_{L^2}.$$

Más adelante necesitaremos trabajar con subespacios cerrados de  $\mathbf{H}_0^1$  de dimensión finita, por lo cual es conveniente darle una base de Hilbert y definir dichos espacios como los generados por los primeros  $k$  elementos de la base. Demostremos entonces la siguiente

### PROPOSICIÓN 2.10

Denotemos por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k &= \text{gen}\{e_0 \sin \ell \pi t : \ell = 1, \dots, k\} \\ \mathbf{W}_k &= \text{gen}\{e_i \sin \ell \pi t : \ell = 1, \dots, k; i = 1, 2, 3.\} \\ E_k &= \mathbf{V}_k \oplus \mathbf{W}_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

Entonces  $\mathbf{H}_0^1(I, \mathfrak{R}^4)$  es la cerradura, con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1}$ , de la unión de los  $E_k$  sobre todos los  $k \in \mathcal{N}$ , o lo que es lo mismo

$$\{e_i \sin k \pi t : i = 0, \dots, 3; k \in \mathcal{N}\}$$

es una base de Hilbert para  $\mathbf{H}_0^1$ . Además  $E_k$  es un subespacio cerrado de  $\mathbf{H}_0^1$  de dimensión  $4k$ .

*Demostración*

Para la demostración de esta proposición nos restringiremos a una coordenada, i.e. si denotamos por  $\mathbf{V}$  y por  $\mathbf{W}$  a la cerradura, con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1}$ , de la unión de los  $\mathbf{V}_k$  y de los  $\mathbf{W}_k$  respectivamente, con  $k$  corriendo sobre todos los naturales, entonces bastará demostrar el teorema para  $\mathbf{V}$  pues  $\mathbf{H}_0^1(I, \mathfrak{R}^4) = \mathbf{V} \oplus \mathbf{W}$ .

Consideremos los siguientes conjuntos

$$\{\sin k \pi t, k \geq 1\} \quad \text{y} \quad \{\cos k \pi t, k \geq 0\}$$

Ambos constituyen una base ortogonal de Hilbert para el espacio  $\mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})$  (ver [Kol2, p.436]), donde

$$\|\sin k\pi t\|_{\mathcal{L}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \|\cos k\pi t\|_{\mathcal{L}^2}$$

Veremos que la familia de los senos es también una base de Hilbert de  $H_0^1$ . Sea

$$\varphi_k = \sqrt{2} \sin k\pi t \quad y \quad \frac{\dot{\varphi}_k}{\alpha_k} = \sqrt{2} \cos k\pi t$$

entonces  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  y  $\{\frac{\dot{\varphi}_k}{\alpha_k}\}_{k=1}^\infty \cup \{\sqrt{2}\}$  son dos sistemas ortonormales completos de  $\mathcal{L}^2$ , con  $\alpha_k = k\pi$ . Veamos cuanto mide  $\varphi_k$  en  $H_0^1$

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_{H_0^1}^2 &= \|\dot{\varphi}_k\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ &= \int_0^1 (k\pi\sqrt{2} \cos k\pi t)^2 dt \\ &= k^2\pi^2 = \alpha_k^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\alpha_k = \|\varphi_k\|_{H_0^1} = k\pi$ , entonces  $\{\frac{\varphi_k}{\alpha_k}\}$  es un sistema ortonormal en  $H_0^1$ . Veamos ahora quienes son los coeficientes de Fourier de  $u \in H_0^1$  con respecto a  $\{\frac{\varphi_k}{\alpha_k}\}$ . Sea  $c_k$  el  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $u$

$$\begin{aligned} c_k &= \left\langle u, \frac{\varphi_k}{\alpha_k} \right\rangle_{H_0^1} = \left\langle u, \frac{\varphi_k}{\alpha_k} \right\rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}k\pi}{\alpha_k} \int_0^1 u \cos k\pi t dt \\ &= \frac{k^2\pi^2}{\alpha_k} \int_0^1 u \varphi_k dt \\ &= \alpha_k \langle u, \varphi_k \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &= \alpha_k \tilde{c}_k \end{aligned}$$

donde  $\tilde{c}_k$  es  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $u$  en  $\mathcal{L}^2$ . Ahora, para demostrar que  $\{\frac{\varphi_k}{\alpha_k}\}$  es un sistema ortonormal completo en  $H_0^1$  hay que ver que la serie de Fourier de  $u \in H_0^1$  converge a  $u$  en  $H_0^1$ . Para ello

calculemos antes el  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $\dot{u}$  como elemento de  $\mathcal{L}^2$  con respecto a su segundo sistema ortogonal completo.

Para  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \left\langle \dot{u}, \frac{\dot{\varphi}_k}{\alpha_k} \right\rangle_{\mathcal{L}^2} &= \sqrt{2} \int_0^1 \dot{u} \cos k\pi t \, dt \\ &= k\pi \int_0^1 u \varphi_k \, dt \\ &= \alpha_k \langle u, \varphi_k \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &= \alpha_k \bar{c}_k \end{aligned}$$

Y para  $k = 0$  es fácil ver que es cero. De aquí que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \dot{u} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{c}_k \frac{\dot{\varphi}_k}{\alpha_k} \right\|_{\mathcal{L}^2} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{k=1}^n c_k \frac{\varphi_k}{\alpha_k} \right\|_{\mathbf{H}_0^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \dot{u} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{c}_k \frac{\dot{\varphi}_k}{\alpha_k} \right\|_{\mathcal{L}^2} = 0$$

i.e.  $\left\{ \frac{\varphi_k}{\alpha_k} \right\}$  es una base de Hilbert para  $\mathbf{H}_0^1$ .

Ahora veamos que  $\forall k \in \mathcal{N}$   $\mathbf{V}_k$  es un subespacio cerrado de  $\mathbf{H}_0^1$ , o bien, que en sí mismos son espacios de Hilbert con el producto interior heredado por  $\mathbf{H}_0^1$ .

Sea  $\{S_m\}$  una sucesión en  $\mathbf{V}_n$  que es  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1}$ -Cauchy.

$$S_m = (\beta_1^m, \dots, \beta_n^m) = \sum_{k=1}^n \beta_k^m \sin k\pi t$$

Entonces  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathcal{N}$  tal que para toda  $i, j \geq N$

$$\|S_i - S_j\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 = \|\dot{S}_i - \dot{S}_j\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 (\beta_k^i - \beta_k^j)^2 < \varepsilon$$

claramente esto ocurre si y sólo si

$$|\beta_k^i - \beta_k^j| < \varepsilon' < \varepsilon \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

esto implica que  $\{\beta_k^i\}_{i=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathfrak{R}$  para toda  $k = 1, \dots, n$ .

Sea  $\beta_k$  el límite cuando  $i \rightarrow \infty$  de  $\beta_k^i$  y

$$S = \sum_{k=1}^n \beta_k \sin k\pi t$$

Dada  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathcal{N}$  tal que para toda  $m \geq N$

$$\|S_m - S\|_{\mathbf{H}_0^1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 (\beta_k^m - \beta_k)^2 < \varepsilon$$

Por lo tanto  $S_m$  converge a  $S \in \mathbf{V}_n$ , i.e.  $\mathbf{V}_n$  es un espacio de Hilbert de dimensión  $n$ . □

Una consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente

### COROLARIO 2.11

$\mathbf{H}_0^1$  está encajado de manera continua en  $\mathcal{L}^2$ .

*Demostración*

Sea  $i$  la inclusión  $i: \mathbf{H}_0^1 \hookrightarrow \mathcal{L}^2$  definida como

$$i(u) = u \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1$$

de la proposición anterior

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k \rangle_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

$$\|u\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \frac{\varphi_k}{\alpha_k} \rangle_{\mathbf{H}_0^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 c_k^2$$

es claro que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|u\|_{\mathbf{H}_0^1},$$

por lo tanto la inclusión es continua.

□

Para nuestro estudio va a ser conveniente pensar a las curvas que unen a los puntos fijos  $a$  y  $b \in \mathbb{R}^4$  dentro de un espacio más grande y con otra topología, éste es  $\mathcal{L}^\infty$ , el espacio de las funciones que son esencialmente acotadas. Del teorema (2.7) es claro que, como conjuntos,  $\mathbf{H}^1 \subset \mathcal{L}^\infty$ ; pero además, como espacios topológicos tenemos el siguiente

**TEOREMA 2.12**

*El espacio de Sobolev  $\mathbf{H}^1$  está encajado en  $\mathcal{L}^\infty$  con inyección continua y compacta. En particular, existe una constante  $M$  tal que*

$$\|u\|_\infty \leq M\|u\|_{\mathbf{H}^1} \quad \forall u \in \mathbf{H}^1.$$

Para su demostración consúltese [Br, teo.VIII.7].

Antes de pasar a la siguiente sección un poco de herramienta.

**PROPOSICIÓN 2.13**

*Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $\{x_n\}$  una sucesión de elementos de  $\mathcal{L}^\infty(\bar{I}, \mathbb{R}^4)$ , i.e.  $x_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ , tal que  $x_n$  converge en  $\mathcal{L}^\infty$  a  $x$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .*

*Demostración*

Por la convergencia tenemos que dada  $\epsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N}$  tal que  $\forall n > N$   $\|x_n - x\|_\infty < \epsilon$ . Sea

$$M > \max\{\|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty, \dots, \|x_N\|_\infty, \|x\|_\infty - \epsilon, \|x\|_\infty + \epsilon\}$$

claramente  $\|x_n\|_\infty < M \forall n \in \mathcal{N}$ . Esto significa que  $\forall t \in \bar{I}$  y  $\forall n \in \mathcal{N}$   $\|x_n(t)\|_{\mathbb{R}^4} < M$  y  $\|x\|_{\mathbb{R}^4} < M$ , o lo que es lo mismo, todo este conjunto de puntos se encuentra dentro de la bola de radio  $M$  y centrada en  $0$ , subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ . Llamemos  $K$  a la cerradura de esta bola (con la norma en  $\mathbb{R}^4$ ),  $K$  resulta ser un compacto como subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ , entonces, usando el teorema 23.3 del Bartle ([Ba]) tenemos que  $f$  es uniformemente continua sobre  $K$ . Así, dada  $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $\forall y, z \in K$  con  $\|y - z\|_{\mathbb{R}^4} < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \epsilon/2$ . Por la convergencia de la sucesión, para esta  $\delta \exists N \in \mathcal{N}$  tal que  $\forall n \geq N$   $\|x_n - x\|_\infty < \delta$  donde esto significa que  $\forall t \in \bar{I}$   $\|x_n(t) - x(t)\|_{\mathbb{R}^4} < \delta$ , y esto implica que  $\forall t \in \bar{I}$  y  $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} & |f(x_n(t)) - f(x(t))| < \epsilon/2 \\ \Rightarrow \sup\{|f(x_n(t)) - f(x(t))| : t \in \bar{I}\} & \leq \epsilon/2 < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, dada  $\epsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N}$  tal que  $\forall n \geq N$

$$\|f(x_n) - f(x)\|_{\infty} < \epsilon$$

□

## 2.2 La Funcional Energía de un Espacio-Tiempo $(\mathfrak{R}^4, g)$

Una vez establecidas las propiedades anteriores de  $H^1$  y  $H_0^1$ , podemos pasar a traducir el problema de garantizar la existencia de una geodésica que una a  $a$  con  $b$  (para  $a, b \in \mathfrak{R}^4$  un espacio-tiempo) a un problema variacional. Comencemos con describir la funcional que usaremos, no sin antes especificar que en adelante  $a$  y  $b$  serán cualesquiera dos puntos en  $\mathfrak{R}^4$  fijos.

### DEFINICIÓN 2.14

Llamamos Funcional Energía a  $\Phi : H_0^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^1 g_{(z(t))}[\dot{z}(t), \dot{z}(t)] dt \quad (2.6)$$

donde  $g$  es la métrica semi-riemanniana,  $z(t) = \bar{z}(t) + \zeta(t)$ , con  $\zeta(t) \in H_0^1$  y

$$\bar{z} = a + (b - a)t \quad (2.7)$$

NOTA: es claro que en esta definición  $\Phi$  depende de los puntos  $a$  y  $b$ , por ello, para no cambiar a un dominio más general, los vamos a considerar fijos.

Como anunciamos antes, nos estamos restringiendo al estudio de las curvas, que unen a  $a$  con  $b$ , elementos de  $H^1$  que siempre son aproximables por funciones diferenciables con soporte compacto en  $I$  (teorema 2.2). A esta familia de curvas la vamos a llamar

$$\mathcal{M}_{ab} = \mathcal{I} + H_0^1(I, \mathfrak{R}^4)$$

La interpretación de nuestro problema consiste en demostrar que, si existe una curva geodésica  $s(t)$  que une a  $a$  con  $b$ , entonces  $\zeta(t) =$



$z(t) - \bar{z}(t)$  es un punto crítico de  $\Phi$ ; e inversamente, si  $\zeta(t) \in \mathbf{H}_0^1$  es un punto crítico de  $\Phi$ , entonces  $z(t) = \bar{z}(t) + \zeta(t)$  también es una geodésica que une  $a$  con  $b$ .

Pero para poder hablar de puntos críticos de la funcional energía es indispensable demostrar primero el siguiente:

**TEOREMA 2.15**

*La funcional energía es diferenciable en todo  $\mathbf{H}_0^1$ .*

*Demostración*

Procederemos en el siguiente orden.

-Obtendremos la derivada de  $\Phi$  en la dirección de  $\vartheta$  para  $\vartheta$  arbitraria.

-Demostraremos que la derivada de Gâteaux de  $\Phi$  en  $\zeta$  es una funcional lineal acotada.

-Demostraremos también que la transformación  $\zeta \rightarrow D\Phi_\zeta$  es continua.

-Con todo lo anterior estaremos en posibilidad de aplicar el corolario [Ma, 2.4.10] que dice: Si  $f : U \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  es  $C^1$ -Gâteaux, entonces es  $C^1$ -Frechet y las dos derivadas coinciden. Así terminaremos la demostración.

Recordemos que

$$z = \bar{z} + \zeta.$$

$\dot{z}_i$  es la  $i$ -ésima coordenada de la derivada de  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ .

$\dot{\vartheta}_i$  es la  $i$ -ésima coordenada de la derivada de  $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ .

La derivada de Gâteaux se define como el siguiente límite, para  $h$  un parámetro.

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dh} \Phi(\zeta + h\vartheta) \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\zeta + h\vartheta) - \Phi(\zeta)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 \frac{g_{ij}(z + h\vartheta)(\dot{z}_i + h\dot{\vartheta}_i)(\dot{z}_j + h\dot{\vartheta}_j) - g_{ij}(z)\dot{z}_i\dot{z}_j}{h} dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 \frac{(g_{ij}(z + h\vartheta) - g_{ij}(z))\dot{z}_i\dot{z}_j}{h} dt \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 \left( 2 \frac{g_{ij}(z + h\vartheta)h\dot{z}_i\dot{\vartheta}_j}{h} + \frac{g_{ij}(z + h\vartheta)h^2\dot{\vartheta}_i\dot{\vartheta}_j}{h} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 \frac{(g_{ij}(z+h\vartheta) - g_{ij}(z)) \dot{z}_i \dot{z}_j}{h} dt \\
&+ \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 g_{ij}(z+h\vartheta) \dot{z}_i \dot{z}_j dt + \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 g_{ij}(z+h\vartheta) h \dot{\vartheta}_i \dot{\vartheta}_j dt \right)
\end{aligned}$$

Vamos a considerar a cada uno de los anteriores sumando como una sucesión, para lo cual vamos a tomar  $h = 1/n$ . Además nos conviene escribirlas en términos del producto interior en  $\mathcal{L}^2(I, \mathfrak{R})$ . Así

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(g_{ij}(z + \frac{1}{n}\vartheta) - g_{ij}(z)) \dot{z}_i \dot{z}_j}{\frac{1}{n}} dt &= \left\langle \frac{g_{ij}(z + \frac{1}{n}\vartheta) - g_{ij}(z)}{\frac{1}{n}}, \dot{z}_i \dot{z}_j \right\rangle_{\mathcal{L}^2} \\
\int_0^1 g_{ij} \left( z + \frac{1}{n}\vartheta \right) \dot{z}_i \dot{z}_j dt &= \left\langle g_{ij} \left( z + \frac{1}{n}\vartheta \right), \dot{z}_i \dot{z}_j \right\rangle_{\mathcal{L}^2} \\
\int_0^1 g_{ij} \left( z + \frac{1}{n}\vartheta \right) \frac{1}{n} \dot{\vartheta}_i \dot{\vartheta}_j dt &= \left\langle g_{ij} \left( z + \frac{1}{n}\vartheta \right) \frac{1}{n}, \dot{\vartheta}_i \dot{\vartheta}_j \right\rangle_{\mathcal{L}^2}
\end{aligned}$$

entonces para cada  $i, j$  lo las integrales correspondientes son evaluaciones de funcionales lineales continuas en  $\mathcal{L}^2$  en los términos de una sucesión. Además es claro que  $z + \frac{1}{n}\vartheta$  converge uniformemente a  $z$  cuando  $n$  tiende a infinito, entonces, usando la proposición (2.13)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| g_{ij} \left( z + \frac{1}{n}\vartheta \right) - g_{ij}(z) \right\|_{\infty} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| g_{ij} \left( z + \frac{1}{n}\vartheta \right) \frac{1}{n} \right\|_{\infty} = 0$$

y por otro lado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{ij}(z + \frac{1}{n}\vartheta) - g_{ij}(z)}{\frac{1}{n}} = \langle \nabla g_{ij}(z), \vartheta \rangle_{\mathfrak{R}^4}$$

donde, en nuestro caso, convergencia uniforme implica convergencia en  $\mathcal{L}^2$ . Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{g_{ij}(z + \frac{1}{n}\vartheta) - g_{ij}(z)}{\frac{1}{n}}, \dot{z}_i \dot{z}_j \right\rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle \langle \nabla g_{ij}(z), \vartheta \rangle_{\mathfrak{R}^4}, \dot{z}_i \dot{z}_j \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle g_{ij} \left( z + \frac{1}{n} \vartheta \right), \dot{z}_i \dot{\vartheta}_j \right\rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle g_{ij}(z), \dot{z}_i \dot{\vartheta}_j \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle g_{ij} \left( z + \frac{1}{n} \vartheta \right) \frac{1}{n} \dot{\vartheta}_i \dot{\vartheta}_j dt \right\rangle_{\mathcal{L}^2} = 0$$

de donde

$$\frac{d}{dh} \Phi(\zeta + h\vartheta) \Big|_{h=0} = \int_0^1 g_{(z)}[\dot{z} + \dot{\zeta}, \dot{\vartheta}] dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 \langle \dot{z}_i \dot{z}_j \nabla g_{ij}(z), \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^4} dt$$

El paso siguiente es demostrar que la derivada de Gâteaux, que en adelante denotaremos como  $D\Phi_\zeta$ , satisface, para cada  $z \in \mathcal{M}_{ab}$ , ser lineal y continua. La linealidad de  $D\Phi_\zeta$  es consecuencia inmediata de la linealidad de: la métrica  $g$ , la integral de Lebesgue y del producto interior en  $\mathbb{R}^4$ .

Veamos que es una funcional acotada, para esto nos apoyaremos en una notación que nos permita ver a la derivada de Gâteaux en términos del producto interior en  $\mathcal{L}^2$ .

Hacemos primero la siguiente observación

$$\begin{aligned} g_{(z)}[\dot{z}, \dot{\vartheta}] &= \sum_{i,j=0}^3 g_{ij}(z) \dot{z}_i \dot{\vartheta}_j \\ &= \dot{\vartheta}_0 \sum_{i=0}^3 \dot{z}_i g_{i0}(z) + \dots + \dot{\vartheta}_3 \sum_{i=0}^3 \dot{z}_i g_{i3}(z) \\ &= \left\langle \left( \sum_{i=0}^3 \dot{z}_i g_{i0}(z), \dots, \sum_{i=0}^3 \dot{z}_i g_{i3}(z) \right), \dot{\vartheta} \right\rangle_{\mathbb{R}^4} \end{aligned}$$

Denotemos con  $Z$  al vector

$$\left( \sum_{i=0}^3 \dot{z}_i g_{i0}(z), \dots, \sum_{i=0}^3 \dot{z}_i g_{i3}(z) \right)$$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} |D\Phi_c(\vartheta)| &= \left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 \langle \dot{z}_i \dot{z}_j \nabla g_{ij}(z), \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^4} dt + \int_0^1 \langle Z, \dot{\vartheta} \rangle_{\mathbb{R}^4} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 \langle \dot{z}_i \dot{z}_j \nabla g_{ij}(z), \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^4} dt + \langle Z, \dot{\vartheta} \rangle_{L^2} \right| \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde la expresión

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 \langle \dot{z}_i \dot{z}_j \nabla g_{ij}(z), \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^4} dt \right|$$

se puede descomponer en términos del producto interior de  $L^2(I, \mathbb{R})$  en

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \sum_{\ell=0}^3 \int_0^1 \dot{z}_i \dot{z}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_\ell}(z) \vartheta_\ell \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \sum_{\ell=0}^3 \left\| \dot{z}_i \dot{z}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_\ell}(z) \right\|_\infty \left| \int_0^1 \vartheta_\ell(t) dt \right| \\ & \leq \sum_{\ell=0}^3 C_\ell \left| \int_0^1 \vartheta_\ell(t) dt \right| \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde

$$C_\ell = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \left\| \dot{z}_i \dot{z}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_\ell}(z) \right\|_\infty$$

Integrando por partes, usando el hecho de que  $\vartheta \in \mathbf{H}_0^1$  y con la ayuda de la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \vartheta_\ell(t) dt \right| &\leq \left| t \vartheta_\ell \Big|_0^1 - \int_0^1 t \dot{\vartheta}_\ell(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |t \dot{\vartheta}_\ell(t)| dt \\ &\leq \left( \int_0^1 t^2 dt \right)^{1/2} \|\dot{\vartheta}_\ell(t)\|_{L^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \|\dot{\vartheta}_\ell(t)\|_{L^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

entonces, sustituyendo (2.10) en (2.9)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \sum_{\ell=0}^3 \int_0^1 \dot{z}_i \dot{z}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_\ell}(z) \vartheta_\ell \right| &\leq \sum_{\ell=0}^3 \frac{\sqrt{3}}{3} C_\ell \|\dot{\vartheta}_\ell\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq 4 \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{\ell=0}^3 C_\ell \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} = C \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

para  $C = 4\frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{\ell=0}^3 C_\ell$ . Sustituimos (2.11) en (2.8) para llegar a que

$$\begin{aligned} |D\Phi_\zeta(\vartheta)| &\leq C \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} + \langle Z, \dot{\vartheta} \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq C \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} + \|Z\|_{\mathcal{L}^2} \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} \\ &= K \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} = K \|\vartheta\|_{\mathbf{H}_0^1} \end{aligned}$$

con  $K = C + \|Z\|_{\mathcal{L}^2} < \infty$  pues la métrica  $g$ , sus parciales y  $z$  son elementos de  $\mathcal{L}^\infty$  por ser continuas sobre  $\bar{I}$  y  $\dot{z} \in \mathcal{L}^2$ . Como  $K$  no depende de  $\vartheta$  se tiene que  $D\Phi_\zeta : \mathbf{H}_0^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  es una funcional lineal y acotada. Nos resta demostrar que la transformación  $\zeta \rightarrow D\Phi_\zeta$  es continua en  $\zeta$ , con  $\zeta$  arbitrario, y lo vamos a hacer vía sucesiones, i.e. vamos a demostrar que para toda  $\{\zeta_n\}$  sucesión en  $\mathbf{H}_0^1$ , que converge a  $\zeta \in \mathbf{H}_0^1$ ,  $D\Phi_{\zeta_n}$  converge a  $D\Phi_\zeta$  en el dual de  $\mathbf{H}_0^1$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D\Phi_{\zeta_n} - D\Phi_\zeta\|_* = 0$$

Recordemos que la norma del espacio dual, que hemos denotado con  $\|\cdot\|_*$  se define como

$$\|T(\vartheta)\|_* = \inf\{A \leq 0 : |T(\vartheta)| \leq A \|\vartheta\|_{\mathbf{H}_0^1} \quad \forall \vartheta \in \mathbf{H}_0^1\} \quad (2.12)$$

En los cálculos siguientes vamos a considerar

$$\begin{aligned} z_n(t) &= \bar{z}(t) + \zeta_n(t) & z_n(t) &\in \mathcal{M}_{ab} \\ z(t) &= \bar{z}(t) + \zeta(t) & z(t) &\in \mathcal{M}_{ab} \\ Z_n &= \left( \sum_{i=0}^3 (\dot{z}_n)_i g_{i0}(z_n), \dots, \sum_{i=0}^3 (\dot{z}_n)_i g_{i3}(z_n) \right) \\ Z &= \left( \sum_{i=0}^3 (\dot{z})_i g_{i0}(z), \dots, \sum_{i=0}^3 (\dot{z})_i g_{i3}(z) \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

La idea de la demostración será encontrar una  $A$  como la de la definición (2.12), que dependerá de  $n$  - en sentido estricto encontrar una  $A_n$  - y que al tomar el límite cuando  $n$  tiende a infinito tienda a cero.

Sea  $\vartheta \in H_0^1$  arbitraria

$$\begin{aligned}
 & |D\Phi_{\zeta_n}(\vartheta) - D\zeta(\vartheta)| \\
 = & \left| \sum_{i,j=0}^3 \langle (\dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j \nabla g_{ij}(z_n) - (\dot{z})_i (\dot{z})_j \nabla g_{ij}(z), \vartheta \rangle_{\mathcal{L}^2} + \langle Z_n - Z, \dot{\vartheta} \rangle_{\mathcal{L}^2} \right| \\
 \leq & \sum_{i,j=0}^3 \| (\dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j \nabla g_{ij}(z_n) - (\dot{z})_i (\dot{z})_j \nabla g_{ij}(z) \|_{\mathcal{L}^2} \|\vartheta\|_{\mathcal{L}^2} \\
 & + \|Z_n - Z\|_{\mathcal{L}^2} \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} \\
 \leq & \left( \sum_{i,j=0}^3 \| (\dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j \nabla g_{ij}(z_n) - (\dot{z})_i (\dot{z})_j \nabla g_{ij}(z) \|_{\mathcal{L}^2} \right) (\|\vartheta\|_{\mathcal{L}^2} + \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2}) \\
 & + \|Z_n - Z\|_{\mathcal{L}^2} (\|\vartheta\|_{\mathcal{L}^2} + \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2}) \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Ahora una observación fundamental, es claro que

$$\|\vartheta\|_{H_0^1} \leq \|\vartheta\|_{\mathcal{L}^2} + \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2}$$

Por otro lado la desigualdad de Poicaré [Br, prop. VIII.12] nos dice: Si  $I$  es acotado, entonces existe una constante  $K$ , que depende sólo de la medida de  $I$ , tal que

$$\|\vartheta\|_{\mathcal{L}^2} + \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} \leq K \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2} \quad \forall \vartheta \in H_0^1$$

Dicho de otra forma, la norma en  $H_0^1$  es equivalente a la que aparece del lado izquierdo de la anterior desigualdad. Pero lo que nos interesa de este resultado es que al sustituir en (2.14) obtenemos una cota  $A_n$ , que es lo que buscábamos.

$$|D\Phi_{\zeta_n}(\vartheta) - D\zeta(\vartheta)| \leq K A_n \|\dot{\vartheta}\|_{\mathcal{L}^2}$$

con

$$A_n = K \sum_{i,j=0}^3 \| (\dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j \nabla g_{ij}(z_n) - (\dot{z})_i (\dot{z})_j \nabla g_{ij}(z) \|_{\mathcal{L}^2} + \|Z_n - Z\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Recordemos que partimos de una sucesión  $\{\zeta_n\}$  en  $\mathbf{H}_0^1$  que converge a  $\zeta \in \mathbf{H}_0^1$ , esto tiene las siguientes implicaciones

$z_n$  converge a  $z$  en  $\mathbf{H}^1$

$z_n$  converge a  $z$  en  $\mathcal{C}^\infty$ , esto por el teorema 2.12.

$\dot{z}_n$  converge  $\dot{z}$  en  $\mathcal{L}^2$ .

Con esto en mente, apoyandonos en la proposición 2.13 y en la continuidad de la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} K \sum_{i,j=0}^3 \|(\dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j \nabla g_{ij}(z_n) - (\dot{z})_i (\dot{z})_j \nabla g_{ij}(z)\|_{\mathcal{L}^2} \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \|Z_n - Z\|_{\mathcal{L}^2} \\ &= K \sum_{i,j=0}^3 \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} (\dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j \nabla g_{ij}(z_n) - (\dot{z})_i (\dot{z})_j \nabla g_{ij}(z) \right\|_{\mathcal{L}^2} \\ &+ \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^3 (\dot{z}_n)_i g_{i0}(z_n), \dots, \sum_{i=0}^3 (\dot{z}_n)_i g_{i3}(z_n) \right) - Z \right\|_{\mathcal{L}^2} \\ &= K \sum_{i,j=0}^3 \|(\dot{z})_i (\dot{z})_j \nabla g_{ij}(z) - (\dot{z})_i (\dot{z})_j \nabla g_{ij}(z)\|_{\mathcal{L}^2} \\ &+ \left\| \left( \sum_{i=0}^3 (\dot{z})_i g_{i0}(z), \dots, \sum_{i=0}^3 (\dot{z})_i g_{i3}(z) \right) - Z \right\|_{\mathcal{L}^2} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el operador  $D\Phi : \mathbf{H}_0^1 \rightarrow (\mathbf{H}_0^1)^*$  es continuo.

En resumen, hasta aquí hemos demostrado que la funcional energía es  $\mathcal{C}^1$ -Gâteaux, entonces por [Ma, 2.4.10]  $\Phi$  es  $\mathcal{C}^1$ -Frechet y ambas derivadas coinciden. □

Enunciemos ahora el teorema mas importante de este capítulo. Después de concluir su demostración mudaremos la búsqueda de geodésicas en un campo gravitacional estacionario con una métrica de Lorentz a la de puntos críticos de la funcional energía.

#### TEOREMA 2.16

Sea  $(\mathfrak{R}^4, g)$  un espacio-tiempo, toda geodésica  $z(t) = \bar{z}(t) + \zeta(t)$  que une

a a con b corresponde a un punto crítico de la Funcional Energía

$$\Phi(\zeta) : \mathbf{H}_0^1 \longrightarrow \mathfrak{R};$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^1 g_{(z+\zeta)}[\dot{z} + \dot{\zeta}, \dot{z} + \dot{\zeta}] dt$$

Recíprocamente, si  $\zeta(t) \in \mathbf{H}_0^1$  es un punto crítico de  $\Phi$ , entonces  $z(t) = \bar{z}(t) + \zeta(t)$  es una geodésica que una a a con b.

*Demostración*

En la demostración del teorema anterior llegamos a que la derivada de Frechet de  $\Phi$  coincide con la de Gâteaux, i.e., que

$$D\Phi_{\zeta}(\vartheta) = \frac{d}{dh} \Phi(\zeta + h\vartheta) \Big|_{h=0} \quad h \in (-\varepsilon, \varepsilon) = J$$

y de hecho

$$D\Phi_{\zeta}(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{d}{dh} g_{(z+h\vartheta)}[\dot{z} + h\dot{\vartheta}, \dot{z} + h\dot{\vartheta}] \Big|_{h=0} \right) dt \quad (2.15)$$

donde  $S(t, h) = z(t) + h\vartheta(t)$  resulta ser una superficie parametrizada que contiene a la curva  $z(t) \in \mathcal{M}_{ab}$ . Podemos entonces aplicar las ecuaciones (1.2) y (1.1) para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} g_{(z+h\vartheta)}[\dot{z} + h\dot{\vartheta}, \dot{z} + h\dot{\vartheta}] \Big|_{h=0} &= 2g_{(z+h\vartheta)} \left[ \frac{D}{dh} \frac{d}{dt} S(t, h), \dot{z} + h\dot{\vartheta} \right] \Big|_{h=0} \\ &= 2g_{(z+h\vartheta)} \left[ \frac{D}{dt} \frac{d}{dh} S(t, h), \dot{z} + h\dot{\vartheta} \right] \Big|_{h=0} \\ &= 2g_{(z+h\vartheta)} \left[ \frac{D}{dt} \vartheta, \dot{z} + h\dot{\vartheta} \right] \Big|_{h=0} \\ &= 2g_{(z)} \left[ \frac{D}{dt} \vartheta, \dot{z} \right] \end{aligned}$$

Si  $\dot{z}(t)$  es diferenciable, entonces

$$2g_{(z)} \left[ \frac{D}{dt} \vartheta, \dot{z} \right] = 2 \left( \frac{dg_{(z)}}{dt} [\vartheta, \dot{z}] - g_{(z)} \left[ \vartheta, \frac{D\dot{z}}{dt} \right] \right)$$



Sustituyendo (2.16) en la expresión (2.15)

$$\begin{aligned}
 D\Phi_{\zeta}(\vartheta) &= \frac{1}{2} \int_0^1 2 \left( \frac{d}{dt} g_{(z)}[\vartheta, \dot{z}] - g_{(z)} \left[ \vartheta, \frac{D}{dt} \dot{z} \right] \right) dt \\
 &= g_{(z(t))}[\vartheta(t), \dot{z}(t)] \Big|_0^1 - \int_0^1 g_{(z)} \left[ \vartheta, \frac{D}{dt} \dot{z} \right] dt \\
 &= - \int_0^1 g_{(z)} \left[ \vartheta, \frac{D}{dt} \dot{z} \right] dt \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

De modo que si  $\dot{z}(t)$  es diferenciable tenemos las siguientes equivalencias  $z(t)$  es geodésica si y sólo si

$$\frac{D}{dt} \dot{z} = 0 \Leftrightarrow D\Phi_{\zeta}(\vartheta) = 0 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{H}_0^1$$

Sólo nos falta ver que si  $\zeta$  es un punto crítico de  $\Phi$ , entonces  $\dot{z}(t) = \dot{\zeta}(t) + \zeta(t)$  es diferenciable. Para ello requerimos cambiar nuevamente nuestra expresión de la derivada de la funcional energía. Observemos el siguiente hecho:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i,j=0}^3 \dot{z}_i \dot{z}_j \langle \nabla g_{ij}(z), \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^4} \\
 &= \vartheta_0 \sum_{i,j=0}^3 \dot{z}_i \dot{z}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_0}(z) + \dots + \vartheta_3 \sum_{i,j=0}^3 \dot{z}_i \dot{z}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_3}(z) \\
 &= \left\langle \left( \sum_{i,j=0}^3 \dot{z}_i \dot{z}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_0}(z), \dots, \sum_{i,j=0}^3 \dot{z}_i \dot{z}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_3}(z) \right), \vartheta \right\rangle_{\mathbb{R}^4} \\
 &= \left\langle \left( \frac{\partial g}{\partial u_0}(z)[\dot{z}, \dot{z}], \dots, \frac{\partial g}{\partial u_3}(z)[\dot{z}, \dot{z}] \right), \vartheta \right\rangle_{\mathbb{R}^4} \\
 &= \langle Dg_{(z)}[\dot{z}, \dot{z}], \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^4}
 \end{aligned}$$

donde

$$Dg_z[\dot{z}, \dot{z}] = \left( \frac{\partial g}{\partial u_0}(z)[\dot{z}, \dot{z}], \dots, \frac{\partial g}{\partial u_3}(z)[\dot{z}, \dot{z}] \right)$$

es un vector en  $\mathbb{R}^4$  para cada  $t \in I$ , pues cada entrada es una aplicación cuadrática. Por otro lado

$$g_z[\dot{z}, \dot{z}] = \langle Z, \dot{z} \rangle_{\mathbb{R}^4}$$

con  $Z$  como lo definimos en (2.13) Entonces la expresión de la derivada de la funcional energía queda

$$D\Phi_{\zeta}(\vartheta) = \int_I \langle Z, \dot{\vartheta} \rangle_{\mathbb{R}^4} dt + \frac{1}{2} \int_I \langle Dg_z[\dot{z}, \dot{z}], \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^2} dt$$

Supongamos que  $\zeta$  es un punto crítico de la funcional energía, esto significa que para toda  $\vartheta \in \mathbf{H}_0^1$

$$D\Phi_{\zeta}(\vartheta) = \int_I \langle Z, \dot{\vartheta} \rangle_{\mathbb{R}^4} dt + \frac{1}{2} \int_I \langle Dg_z[\dot{z}, \dot{z}], \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^2} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_I \langle Z, \dot{\vartheta} \rangle_{\mathbb{R}^4} dt = -\frac{1}{2} \int_I \langle Dg_z[\dot{z}, \dot{z}], \vartheta \rangle_{\mathbb{R}^2} dt \quad \forall \vartheta \in \mathbf{H}_0^1$$

en particular, para toda  $\vartheta \in C_c^1$ , entonces, por la segunda definición del espacio de Sobolev  $\mathbf{H}^1$  (2.8)

$$Z = \left( \sum_{i=0}^3 (\dot{z})_i g_{i0}(z), \dots, \sum_{i=0}^3 (\dot{z})_i g_{i3}(z) \right)$$

pertenece al espacio de Sobolev  $\mathbf{H}^1(I, \mathbb{R}^4)$ , de hecho su derivada débil de acuerdo a (2.8) es  $Dg_z[\dot{z}, \dot{z}] \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}^4)$ . Pero lo importante es que

$$Z = (\dot{z}_0, \dots, \dot{z}_3) \begin{pmatrix} g_{00}(z(t)) & \cdots & g_{03}(z(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{40}(z(t)) & \cdots & g_{43}(z(t)) \end{pmatrix} = g_{(z)} \dot{z}$$

donde por definición de métrica semi-riemanniana la matriz con entradas  $g_{ij}(z(t))$ ,  $i, j = 0, \dots, 3$  es invertible para toda  $t \in I$ , además como la inversa está dada en términos de los coeficientes de la matriz original entonces sus coeficientes son a su vez de clase  $C^1$ , en particular  $g^{ij}(z(t)) \in \mathbf{H}^1(I, \mathbb{R})$ , esto nos lleva a que

$$g^{-1}(z)g(z)\dot{z} = \dot{z} \in \mathbf{H}^1(I, \mathbb{R}^4)$$

i.e. tiene sentido hablar de la derivada covariante de  $\dot{z}(t)$ .

□



## Capítulo 3

# Teoría de puntos críticos

Esta sección estará dedicada a dar condiciones para que una funcional  $\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathfrak{R}$  de clase  $C^1$  sobre un espacio de Hilbert  $\mathbf{H}$  tenga un punto crítico.

En primer lugar requerimos una condición de compacidad que se conoce con el nombre de *Condición de Palais Smale* (3.1, [P] y en [St]). Esta condición tiene la siguiente implicación: si para todo  $\varepsilon > 0$  el conjunto subnivel  $\Phi^{c+\varepsilon} = \{u \in \mathbf{H} : \Phi(u) \leq c + \varepsilon\}$  no se puede deformar en  $\Phi^{c-\varepsilon}$ , entonces  $c$  es un valor crítico de  $\Phi$  (*Lema de Deformación*, (3.5). El *Teorema del Punto Silla* (3.6, [R1], [R2]) da condiciones que permiten encontrar un valor  $c$  tal que  $\Phi^{c+\varepsilon}$  no se puede deformar en  $\Phi^{c-\varepsilon}$ . Dicho valor se obtiene a través del principio de *minimax* aplicado adecuadamente.

### DEFINICIÓN 3.1 (Condición de Palais-Smale)

Sea  $\mathbf{H}$  un espacio de Hilbert y  $\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función de clase  $C^1$ . Se dice que  $\Phi$  satisface la condición de Palais-Smale (PS) si toda sucesión  $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{H}$ , con  $\{\Phi(u_n)\}$  acotada y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla \Phi(u_n) = 0$ , tiene una sub-sucesión convergente.

Recordemos que la derivada de una funcional  $\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathfrak{R}$ , con  $\mathbf{H}$  un espacio de Hilbert, es un operador que denotamos  $D\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  tal que para cada  $u \in \mathbf{H}$   $D\Phi_u$  es una funcional lineal continua sobre  $\mathbf{H}$ , i.e. un elemento del dual. Por el teorema de representación de Riesz existe un elemento en  $\mathbf{H}$  que llamaremos  $\nabla \Phi(u)$  tal que para toda  $v \in \mathbf{H}$

$$D\Phi_u(v) = \langle \nabla \Phi(u), v \rangle_{\mathbf{H}}.$$

Con esto claro pasemos a enunciar una consecuencia inmediata de la anterior definición.

### PROPOSICIÓN 3.2

Sea  $\Phi$  como en la definición anterior y tal que satisface (PS). Entonces

$$K_c = \{u \in \mathbf{H} \mid \Phi(u) = c \text{ y } \nabla\Phi(u) = 0\}$$

es compacto.

#### Demostración

Sea  $\{u_n\}$  una sucesión en  $K_c$ , entonces  $\Phi(u_n) = c$  y  $\nabla\Phi(u_n) = 0 \forall n \in \mathcal{N}$  y por (PS)  $\{u_n\}$  tiene un punto de acumulación, el cual, por la continuidad de  $\Phi$  y  $\nabla\Phi$ , pertenece a  $K_c$ . Por lo tanto  $K_c$  es secuencialmente compacto y esto, en espacios de Hilbert, equivale a ser compacto. □

Recordemos brevemente lo que significa que una función satisfaga la condición de Lipschitz que más tarde usaremos.

### DEFINICIÓN 3.3

Se dice que una función  $f : \mathbf{H} \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}$  es localmente Lipschitz si para cada  $u \in \mathbf{H} \exists$  una vecindad  $U$  de  $u$  y una constante  $M$  tal que  $\forall v, w \in U$

$$\|f(v) - f(w)\|_{\tilde{\mathbf{H}}} \leq M\|v - w\|_{\mathbf{H}}$$

$f$  es Lipschitz si existe una constante  $M$  tal que la desigualdad anterior se cumple para todos los  $v, w \in \mathbf{H}$ .

### PROPOSICIÓN 3.4

Si  $f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  es de clase  $C^1$ , entonces  $f$  es localmente Lipschitz [Ma, 2.4.1].

### TEOREMA 3.5

Sea  $\mathbf{H}$  un espacio de Hilbert sobre los reales y  $\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  que satisface (PS). Sean  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\varepsilon} > 0$  y  $V$  una vecindad de  $K_c$  ( $K_c$  como en la proposición 3.1), entonces existe una  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$  y  $\eta : [0, 1] \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  continua tal que:

- (a)  $\eta(0, u) = u \quad \forall u \in \mathbf{H}$   
 (b)  $\eta(t, u) = u \quad \forall t \in [0, 1]$  si  $\Phi(u) \notin [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$   
 (c)  $\eta_t(u)$  es un homeomorfismo de  $\mathbf{H}$  en  $\mathbf{H}$  para cada  $t \in [0, 1]$   
 (d)  $\|\eta(t, u) - u\|_{\mathbf{H}} \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1]$  y  $u \in \mathbf{H}$   
 (e)  $\Phi(\eta(t, u)) \leq \Phi(u) \quad \forall t \in [0, 1]$  y  $u \in \mathbf{H}$   
 (f)  $\eta(1, \Phi^{c+\varepsilon} \setminus V) \subset \Phi^{c-\varepsilon}$ , donde  $\Phi^c = \{u \in \mathbf{H} \mid \Phi(u) \leq c\}$   
 (g) Si  $K_c = \emptyset$ ,  $\eta(1, \Phi^{c+\varepsilon}) \subset \Phi^{c-\varepsilon}$

Antes de demostrar el teorema analicemos sus implicaciones.

La afirmación que nosotros usaremos será (g). Esta dice que si  $c \in \mathfrak{R}$  no es valor crítico, entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\Phi^{c+\varepsilon}$  se puede deformar en  $\Phi^{c-\varepsilon}$ .

Dicho de otro modo: si  $\Phi^{c+\varepsilon}$  no se puede deformar en  $\Phi^{c-\varepsilon}$  para ninguna  $\varepsilon > 0$ , entonces  $\Phi$  tiene un punto crítico con valor  $c$ . Para ilustrar esto vease la figura (3.1).

*Demostración del teorema 3.5*

Consideremos el conjunto

$$N_\delta = \{u \in \mathbf{H} \mid \|u - K_c\|_{\mathbf{H}} < \delta\}$$

donde  $\|u - K_c\|_{\mathbf{H}} = \min \{\|u - x\|_{\mathbf{H}} \mid x \in K_c\}$ . Claramente  $K_c \subset N_\delta \quad \forall \delta > 0$ ; por lo tanto  $\exists \delta > 0$ , suficientemente pequeña, para la cual  $K_c \subset N_\delta \subset V$ . Afirmamos que existen constantes  $b, \varepsilon > 0$  que satisfacen

$$\|\nabla\Phi(u)\|_{\mathbf{H}} \geq b \quad \forall u \in \Phi^{c+\varepsilon} \setminus (\Phi^{c-\varepsilon} \cup N_{\delta/b}) \quad (3.1)$$

(Vease figura 3.2)

Si no, querría decir que existen sucesiones positivas  $\{b_n\}$ ,  $\{\varepsilon_n\}$  convergentes a cero, y  $u_n \in \Phi^{c+\varepsilon_n} \setminus (\Phi^{c-\varepsilon_n} \cup N_{\delta/b})$  tales que

$$\begin{aligned} & \|\nabla\Phi(u_n)\|_{\mathbf{H}} < b_n \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ \text{i.e.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla\Phi(u_n) = 0 \\ \text{y} & c - \varepsilon_n < \Phi(u_n) \leq c + \varepsilon_n \end{aligned}$$

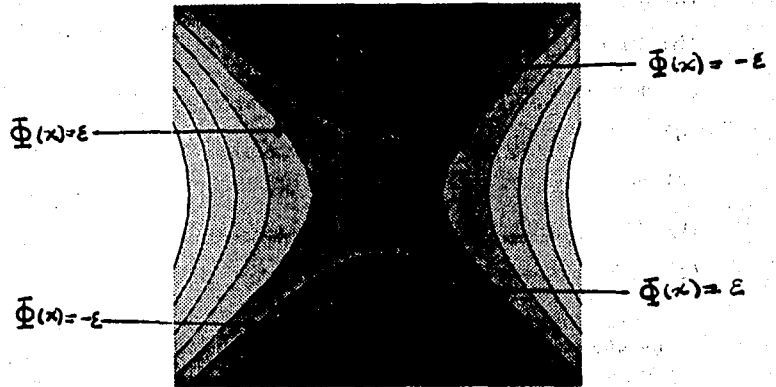


Figura 3.1: Consideremos  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$ . Observemos que  $\Phi$  satisface (PS). Para toda  $\varepsilon > 0$ ,  $\Phi^{-\varepsilon}$  no es conexo mientras  $\Phi^\varepsilon$  si lo es, de modo que el *Teorema de Deformación* asegura que 0 es valor crítico de  $\Phi$ , lo cual es inmediato verificar en este ejemplo.

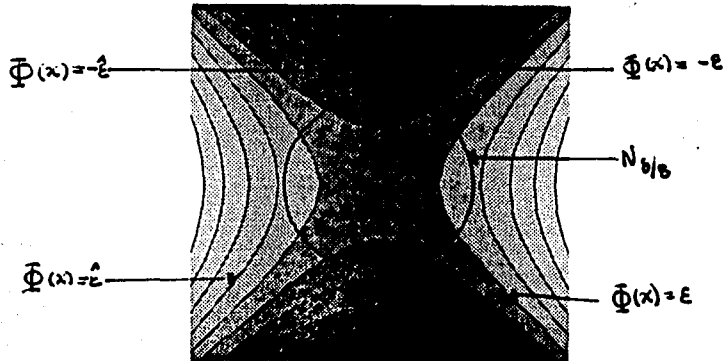


Figura 3.2: Para  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$  y 0 un valor crítico de  $\Phi$  ilustramos las curvas de nivel  $\Phi^\varepsilon$ ,  $\Phi^{-\varepsilon}$  y  $N_{\delta/8}$  vecindad de  $K_c$ .

Por (PS)  $\{u_n\}$  tiene una subsucesión convergente a  $u$ , y de la continuidad de  $\Phi$  y  $\nabla\Phi$  obtenemos que

$$\Phi(u) = c \text{ y } \nabla\Phi(u) = 0 \text{ i.e. } u \in K_c,$$

pero  $\forall n \in \mathcal{N}$   $\{u_n\}$  está en el complemento de  $N_{\delta/8}$ , que es cerrado en  $\mathbf{H}$ ; por lo tanto  $u$  no pertenece a  $N_{\delta/8}$ . Esto es una contradicción pues  $K_c \subset N_{\delta/8}$ .

Si pedimos además

$$\hat{\varepsilon} < \min \left\{ \bar{\varepsilon}, \frac{b\delta}{16}, \frac{b^2}{2}, \frac{b}{2} \right\} \quad (3.2)$$

seguimos teniendo (3.1).

Sea  $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$ , definimos

$$A = \{u \in \mathbf{H} \mid \Phi(u) \leq c - \hat{\varepsilon}\} \cup \{u \in \mathbf{H} \mid \Phi(u) \geq c + \hat{\varepsilon}\}$$

$$B = \{u \in \mathbf{H} \mid c - \varepsilon \leq \Phi(u) \leq c + \varepsilon\}$$

$$C = \mathbf{H} \setminus N_{\delta/4}$$

$$D = N_{\delta/8}$$

(Vease la figura 3.3.)

Observemos que  $A \cap B = C \cap D = \emptyset$ . Definimos

$$g(u) = \frac{\|u - A\|_{\mathbf{H}}}{\|u - A\|_{\mathbf{H}} + \|u - B\|_{\mathbf{H}}} \quad (3.3)$$

$$f(u) = \frac{\|u - C\|_{\mathbf{H}}}{\|u - C\|_{\mathbf{H}} + \|u - D\|_{\mathbf{H}}} \quad (3.4)$$

Es claro que  $|g(u)| \leq 1, |f(u)| \leq 1 \forall u \in \mathbf{H}$ .

Veamos que  $f(u)$  y  $g(u) = \frac{A(u)}{B(u)}$ , con  $A(u) = \|u - A\|_{\mathbf{H}}$  y  $B(u) = A(u) + \|u - B\|_{\mathbf{H}}$ , son localmente Lipschitz. Sea  $u \in \mathbf{H}$ ,  $\exists r_u > 0$  tal que  $B(v) \geq r_u \forall v \in \mathbf{B}_{r_u}(u)$ . (Razón: sea  $\{r_n\} \subset \mathfrak{R}$  una sucesión de reales positivos convergente a cero. Si la afirmación no fuera cierta,  $\forall n \in \mathcal{N}$  existiría  $v_n \in \mathbf{B}_{r_n}(u)$  tal que  $B(v_n) < r_n$ ; pero  $v_n$  converge a  $u$  y la continuidad de la norma implica que  $B(u) = 0 \Rightarrow u \in A \cap B = \emptyset$ !).



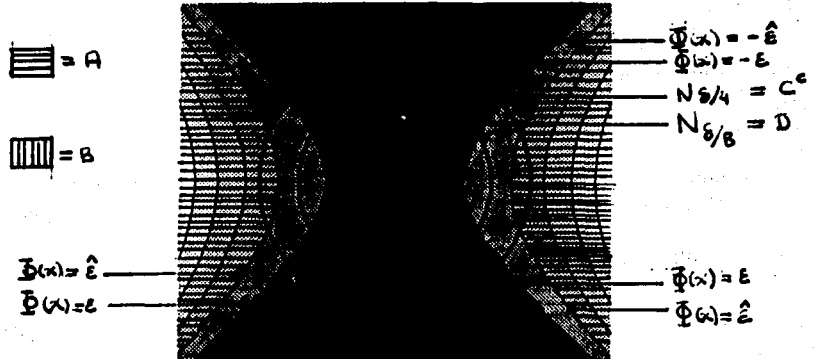


Figura 3.3: La figura representa a las regiones A, B, C y D para el caso de  $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$ .

Sean  $v, w \in B_{r_u}(u)$ ,

$$\begin{aligned}
 |g(v) - g(w)| &= \left| \frac{A(v)}{B(v)} - \frac{A(w)}{B(w)} \right| \\
 &= \left| g(v) \frac{B(w) - B(v)}{B(w)} + \frac{A(v) - A(w)}{B(w)} \right| \\
 &\leq \left| 2 \frac{\|v - w\|_{\mathbf{H}}}{r_u} + \frac{\|v - w\|_{\mathbf{H}}}{r_u} \right| \\
 &= \frac{3}{r_u} \|v - w\|_{\mathbf{H}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $g(u)$  es localmente Lipschitz. De manera análoga se obtiene la demostración para  $f(u)$ . Ahora definimos  $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1]$  por

$$h(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in [0, 1] \\ 1/s & \text{si } s \geq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

y  $W: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  por

$$W(u) = -f(u)g(u)h(\|\nabla\Phi(u)\|_{\mathbf{H}})\nabla\Phi(u) \quad (3.6)$$

$W(u)$  es localmente Lipschitz ya que  $\Phi$  es de clase  $C^2$ <sup>1</sup> y  $\|W(u)\|_{\mathbf{H}} \leq 1 \forall u \in \mathbf{H}$ . Entonces, por el teorema general de existencia y unicidad

<sup>1</sup>Para la demostración de este teorema de hecho basta con que  $\Phi$  sea de clase  $C^1$

para ecuaciones diferenciales ordinarias, la ecuación

$$\frac{d\eta}{dt} = W(\eta(t, u)) \quad (3.7)$$

con condición inicial

$$\eta(0, u) = u \quad (3.8)$$

tiene solución única definida sobre un intervalo maximal  $(\alpha, \beta)$  y la solución depende continuamente de la condición inicial [Ma, 4.1.6]. Afirmamos que para cada  $u \in \mathbf{H}$  la solución se extiende a todo  $\mathfrak{R}$ . Si no, sea  $t_n \rightarrow \beta < \infty$  con  $t_n < \beta \forall n \in \mathcal{N}$ , integrando la ecuación (3.7) (con la integral de Bochner [Hil, cor. del Teo. 3.6.5])

$$\begin{aligned} \|\eta(t_{n+1}, u) - \eta(t_n, u)\|_{\mathbf{H}} &= \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(\eta(\tau, u)) d\tau \right\|_{\mathbf{H}} \\ &\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|W(\eta(\tau, u))\|_{\mathbf{H}} d\tau \quad [\text{Hil, teo. 3.5.4}] \\ &\leq |t_{n+1} - t_n| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \eta(t_n, u)$  es  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$ -Cauchy  $\Rightarrow \exists \bar{u} \in \mathbf{H}$  tal que

$$\bar{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta(t_n, u) = \eta(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n, u) = \eta(\beta, u)$$

Entonces  $\eta(t, u)$  se puede extender a un intervalo con valores de  $t > \beta$ . Por lo tanto  $(\alpha, \beta) = \mathfrak{R}$ .

- De la dependencia continua de la solución de la condición inicial se tiene que  $\eta \in C([0, 1] \times \mathbf{H}, \mathbf{H})$
- Por ser  $\eta$  solución de (3.7), (3.8)  $\eta(0, u) = u \forall u \in \mathbf{H}$  y se tiene (a).
- $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$ . Si  $\Phi(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}] \Rightarrow \exists$  una vecindad abierta  $U_u$  de  $u$  tal que para toda  $v \in U_u$   $\Phi(v) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$  lo cual implica  $U_u \subset A \Rightarrow g(u) = 0 \Rightarrow W(u) = 0 \Rightarrow$  la solución a (3.7), (3.8) es  $\eta(t, u) = u, \forall t \in \mathfrak{R}$  y obtenemos (b).

pués siempre es posible construir una función, a la que se le llama *pseudogradiante* de  $\Phi$ , que satisface la condición de Lipschitz; acerca de esto puede consultarse [R1]

- Llamemos  $\eta_u(t) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbf{H}$  a la solución de (3.7), (3.8) y  $\eta_\sigma(u) : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ ; con  $\sigma$  fijo, a la función que a cada  $u$  en  $\mathbf{H}$  la manda a  $\eta(t, u)$  valuada en el tiempo  $t = \sigma$ . Veamos que  $\eta_{t+\sigma}(u) = \eta_t \cdot \eta_\sigma(u) \forall t, \sigma \in \mathfrak{R}$ . Sea  $u \in \mathbf{H}$  y  $\sigma \in \mathfrak{R}$  fija y

$$w = \eta_\sigma(u) = \eta(t, u) |_{t=\sigma}$$

Se tiene también

$$w = \eta(t, w) |_{t=0} = \eta(0, \eta_\sigma(u)).$$

Consideremos la reparametrización  $\tau = t + \sigma$

$$\frac{d}{dt}\eta(\tau, u) = W(\tau, \eta(\tau, u)) \frac{d\tau}{dt} = W(\tau, \eta(\tau, u)) \quad y \quad \eta(\tau, u) |_{\tau=0} = u$$

Por lo tanto  $\eta(\tau, u)$  es solución de (3.7), (3.8)

$$\eta(t + \sigma, u) |_{t=0} = w = \eta(t, w) |_{t=0}$$

entonces, por la unicidad de la solución

$$\begin{aligned} \eta(t + \sigma, u) &= \eta(t, w) = \eta(t, \eta_\sigma(u)) \quad \forall t, \sigma \in \mathfrak{R} \\ \text{i.e.} \quad \eta_{t+\sigma}(u) &= \eta_t \cdot \eta_\sigma(u) \end{aligned} \quad (3.9)$$

De aquí se sigue que  $\eta_\sigma$  es homeomorfismo con inverso  $\eta_{-\sigma}$ .

- $\forall t \in [0, 1]$  y  $u \in \mathbf{H}$

$$\begin{aligned} \|\eta_u(t) - u\| &= \|\eta_u(t) - \eta_u(0)\| \\ &= \left\| \int_0^t W(\eta_u(s)) ds \right\| \leq \int_0^t \|W(\eta_u(s))\| ds \\ &\leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Y se tiene (d).

- En adelante nos restringiremos a valores de  $t$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Para toda  $u \in \mathbf{H}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(\eta_u(t)) &= \langle \nabla\Phi(\eta_u(t)), \frac{d}{dt}\eta_u(t) \rangle_{\mathbf{H}} \\ &= \langle \nabla\Phi(\eta_u(t)), -W(\eta_u(t)) \rangle_{\mathbf{H}} \\ &= -f(\eta_u(t))g(\eta_u(t))h(\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|)\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi(\eta_u(t))$  es decreciente para  $t \in [0, 1]$  y por tanto su máximo valor lo toma en  $t = 0$ , i.e.

$$\Phi(\eta_u(t)) \leq \Phi(\eta_u(0)) = \Phi(u) \quad \forall t \in [0, 1]$$

- Para ver (f) notemos que  $\Phi^{c-\varepsilon} \subset \Phi^{c+\varepsilon}$  y si  $u \in \Phi^{c-\varepsilon}$ , entonces, por (e),  $\Phi(\eta(t, u)) \leq \Phi(\eta(0, u)) \leq c - \varepsilon$ . Por lo tanto requerimos mostrar solamente que

$$\eta(1, \Phi^{c+\varepsilon} \setminus (\Phi^{c-\varepsilon} \cup V)) \subset \Phi^{c-\varepsilon}$$

y para esto basta ver que  $\eta(1, Y) \subset \Phi^{c-\varepsilon}$ , pues

$$\Phi^{c+\varepsilon} \setminus (\Phi^{c-\varepsilon} \cup V) \subset Y = \Phi^{c+\varepsilon} \setminus (\Phi^{c-\varepsilon} \cup N_\delta) \subset Z = \Phi^{c+\varepsilon} \setminus \Phi^{c-\varepsilon} \cup N_{\delta/2}$$

Buscaremos demostrar que para alguna  $t \in (0, 1)$   $\eta_u(t) \notin Z$ , i.e, que

$$\eta_u(t) \in Z^c = (\Phi^{c+\varepsilon})^c \cup \Phi^{c-\varepsilon} \cup N_{\delta/2}$$

Por (e) es claro que  $\eta_u(t) \notin (\Phi^{c+\varepsilon})^c \quad \forall t \in [0, 1]$ . Sea  $u \in Y$ , afirmamos que  $\eta(t, u) \notin \Phi^{c-\varepsilon} \quad \forall t \in [0, 1]$ . Razón: si para  $t_0 \in [0, 1]$   $\Phi(\eta_u(t_0)) = c - \varepsilon$ , entonces, como  $\Phi(\eta_u(t))$  es decreciente en  $\mathfrak{R}$ ,  $\forall t \in [t_0, \infty)$   $\eta_u(t) \in A_{c-\varepsilon}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \eta_u(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty)$$

Sea  $t' \in (t_0, \infty)$ ,  $v = \eta_u(t') \in \Phi^{c-\varepsilon}$  y  $\eta_v(t)$  la solución de (3.7) con condición inicial  $v$ . Por (3.9)

$$\eta_{t+v}(u) = \eta_t \cdot \eta_{t'}(u) = \eta_t(v) = v \quad \forall t \in \mathfrak{R}$$

$$\Rightarrow u = v \in \Phi^{c-\varepsilon} !$$

Por lo tanto,  $\forall t \in [0, 1]$   $\Phi(\eta_u(t)) > c - \varepsilon$  y como  $\Phi(u) \leq c + \varepsilon$  se tiene

$$\Phi(\eta_u(0)) - \Phi(\eta_u(t)) \leq \varepsilon + \hat{\varepsilon} < 2\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1]$$

Supongamos que para  $t \in [0, s]$ , con  $s < 1$ ,  $\eta_u(t) \in Z$ . Por (3.3), (3.4)  $f(\eta_u(t)) = g(\eta_u(t)) = 1$ . Por otro lado  $\Phi(\eta_u(t)) : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$  es una función continua, diferenciable y acotada por  $c + \varepsilon$  porque  $u \in \Phi^{c+\varepsilon}$ , por lo tanto vale el teorema fundamental del cálculo diferencial e integral, i.e

$$\begin{aligned}
 2\varepsilon &\geq \Phi(\eta_u(0)) - \Phi(\eta_u(t)) \\
 &= \int_t^0 \langle \nabla \Phi(\eta_u(\tau)), -W(\eta_u(\tau)) \rangle_{\mathbf{H}} d\tau \\
 &= \int_0^t h(\|\nabla \Phi(\eta_u(\tau))\|) \|\nabla \Phi(\eta_u(\tau))\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau \\
 &\geq b \int_0^t h(\|\nabla \Phi(\eta_u(\tau))\|) \|\nabla \Phi(\eta_u(\tau))\| d\tau \\
 &\geq b \left\| \int_0^t h(\|\nabla \Phi(\eta_u(\tau))\|) \nabla \Phi(\eta_u(\tau)) d\tau \right\| \\
 &= b \left\| \int_0^t W(\eta_u(\tau)) d\tau \right\| \\
 &= b \|\eta_u(t) - u\|
 \end{aligned}$$

y de (3.2)

$$\|\eta_u(t) - u\| \leq \frac{2\varepsilon}{b} < \frac{\delta}{8} \quad \forall t \in [0, s]$$

Supongamos que existe  $t^* \in (s, 1]$  tal que  $\eta_u(t^*) \in N_\delta$ , i.e

$$\|\eta_u(t^*) - K_c\| < \frac{\delta}{2}$$

por la continuidad de  $\eta_u(t)$  existe  $t^{**} \in [0, s]$  tal que

$$\|\eta_u(t^{**}) - \eta_u(t^*)\| < \frac{\delta}{8}$$

de donde obtenemos

$$\frac{\delta}{2} \leq \|\eta_u(t^*) - u\| \leq \|\eta_u(t^*) - \eta_u(t^{**})\| + \|\eta_u(t^{**}) - u\| \leq 2(\delta/8) !$$

Por lo tanto  $\eta_u(t)$  no abandona  $Z$  para entrar a  $N_{\delta/2}$ . En consecuencia, si abandona  $Z$  debe entrar a  $\Phi^{c-\varepsilon}$ . Entonces solo nos falta ver que para alguna  $t \in (0, 1)$   $\eta_u(t) \notin Z$ . Pero si fuera así querría decir, por (3.4) y (3.3), que

$$\frac{d}{dt}\Phi(\eta_u(t)) = -h(\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}})\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}}^2 \leq 0. \quad (3.10)$$

Notemos que  $Z \subset \Phi^{c+\varepsilon} \setminus (\Phi^{c-\varepsilon} \cup N_{\delta/8})$  y que si para alguna  $t \in (0, 1)$

$$\Rightarrow \text{por (3.5)} \quad \begin{aligned} \|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}}^2 &\leq 1 \\ h(\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}}^2) &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{y por (3.1) y (3.10)} \quad \frac{d}{dt}\Phi(\eta_u(t)) = -\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}}^2 \leq -b^2$$

por otro lado, si para alguna  $t \in (0, 1)$

$$\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}}^2 > 1$$

$$\text{por (3.5)} \quad h(\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}}^2) = \frac{1}{\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}}}$$

$$\text{y por (3.1) y (3.10)} \quad \frac{d}{dt}\Phi(\eta_u(t)) = -\|\nabla\Phi(\eta_u(t))\|_{\mathbf{H}} \leq -b$$

Consecuentemente,  $\forall t \in (0, 1)$

$$\frac{d}{dt}\Phi(\eta_u(t)) \leq -\min\{b^2, b\}$$

Integrando esta última desigualdad

$$\begin{aligned} \text{por (3.2)} \quad \min\{b^2, b\} &> 2\varepsilon \\ &\geq -\int_0^1 \frac{d}{dt}\Phi(\eta_u(t)) \\ &\geq \Phi(\eta_u(0)) - \Phi(\eta_u(1)) \\ &\geq \min\{b^2, b\}! \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\eta_u(t)$  abandona  $Z$  para entrar a  $\Phi^{c-\varepsilon}$  en alguna  $t \in (0, 1)$  y por (e)

$$\Phi(\eta_u(1)) \leq \Phi(\eta_u(t)) \leq c - \varepsilon$$

• (g) se sigue de lo anterior tomando  $N_\delta = \emptyset$ .

□

**TEOREMA 3.6** (del punto silla)

Sea  $\mathbf{H}$  un espacio de Hilbert tal que  $\mathbf{H} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{W}$  con  $\mathbf{W}$  de dimensión finita. Sea  $\Phi: \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$  que satisface (PS). Sean  $\alpha < \beta$  tales que

i) existe  $\rho > 0$  tal que

$$\Phi(x) \leq \alpha \quad \forall x \in \mathbf{W} \text{ con } \|x\|_{\mathbf{H}} = \rho$$

ii)  $\Phi(x) \geq \beta \quad \forall x \in \mathbf{V}$

Entonces

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max\{\Phi(h(x)) \mid \|x\|_{\mathbf{H}} \leq \rho, \quad x \in \mathbf{W}\},$$

donde

$$\Gamma = \{h: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{H} \mid h \text{ es continua y } h(x) = x \text{ si } \|x\|_{\mathbf{H}} = \rho\}$$

satisface

$$\beta \leq c \leq \max\{\Phi(x) \mid x \in \mathbf{W} \text{ y } \|x\|_{\mathbf{H}} \leq \rho\} \quad (3.11)$$

y  $c$  es un punto crítico de  $\Phi$ .

NOTA:  $c$  está bien definido porque  $B_\rho \mathbf{W}$  es compacto en  $\mathbf{H}$  y una función continua sobre un compacto siempre alcanza su máximo.

*Demostración*

Llamemos

$$B_\rho \mathbf{W} = \{x \in \mathbf{W} \mid \|x\|_{\mathbf{H}} \leq \rho\} \quad (3.12)$$

Afirmamos que  $\forall h \in \Gamma \exists x \in B_\rho \mathbf{W}$  tal que  $h(x) \in \mathbf{V}$ .

Razón: sea  $\pi: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{W}$  la proyección ortogonal, si  $h(B_\rho \mathbf{W}) \cap \mathbf{V} = \emptyset$ , entonces  $\pi \cdot h(x) \neq 0 \quad \forall x \in B_\rho \mathbf{W}$  y obtenemos una retracción

$$\begin{aligned} r &: B_\rho \mathbf{W} \rightarrow S_\rho \mathbf{W} \\ r(x) &= \rho \frac{\pi \cdot h(x)}{\|\pi \cdot h(x)\|} \end{aligned}$$

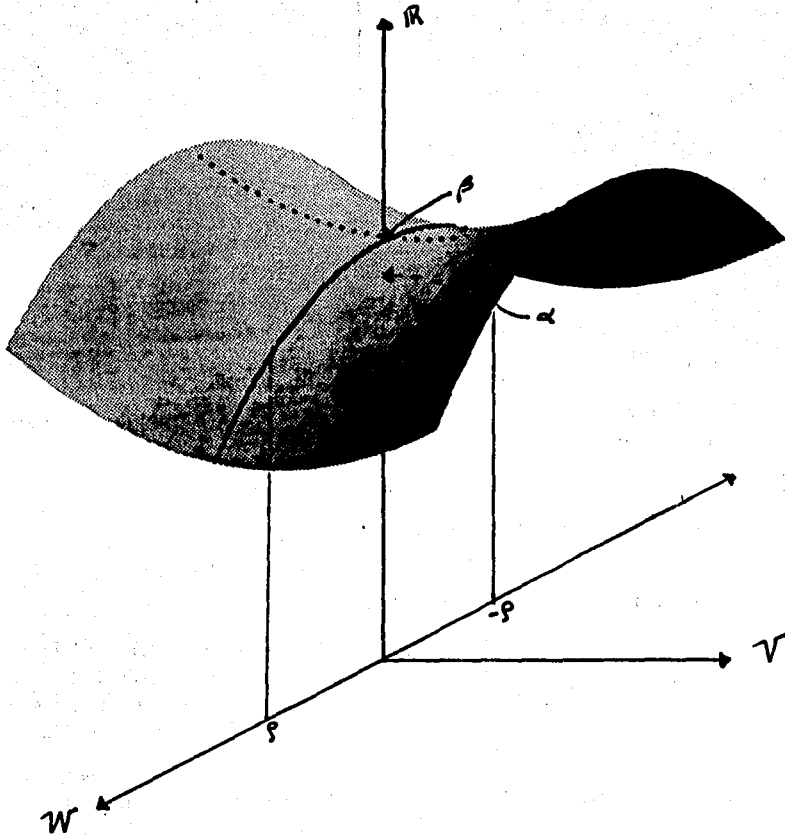


Figura 3.4: Ejemplo: Gráfica de  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$ , La silla de montar.



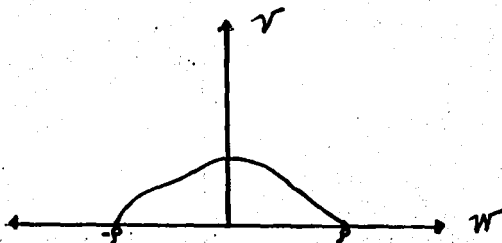


Figura 3.5: Para que  $r(x)$  fuera una retracción la curva debería truncarse y no cruzar por  $V$ , cosa imposible debido a la continuidad de las  $h(t) \in \Gamma$ .

i.e, una función continua tal que  $r(x) = x \forall x \in S_\rho W$ , lo cual es imposible (no se puede deformar continuamente a la bola en su frontera [Mas, III.2.3]) De la hipótesis ii) obtenemos  $\beta \leq c$ .

Supongamos que  $c$  es un valor regular, por el teorema de deformación (g), dada  $\bar{\epsilon} < c - \alpha$

$$\exists 0 < \epsilon < \bar{\epsilon} < c - \alpha$$

y un homeomorfismo  $\eta: H \rightarrow H$  tal que

$$\eta(\Phi^{c+\epsilon}) \subset \Phi^{c-\epsilon} \text{ y } \eta(x) = x \text{ si } \Phi(x) \leq \alpha$$

Por definición de ínfimo  $\exists h_0 \in \Gamma$  tal que

$$\max\{\Phi(h_0(x)) \mid x \in B_\rho W\} \leq c + \epsilon$$

entonces  $h = \eta \cdot h_0 \mid_{W \in \Gamma}$  pues  $h_0 \in \Gamma$

$$\Rightarrow h_0(x) = x \quad \forall x \in S_\rho W$$

$$\Rightarrow h(x) = \eta \cdot h_0(x) = \eta(x) = x \quad \forall x \in S_\rho W \text{ por } i)$$

y como  $h_0(B_\rho W) \subset \Phi^{c+\epsilon}$  obtenemos, del teorema de deformación

$$\eta(h_0(B_\rho W)) \subset \Phi^{c-\epsilon}$$

$$\text{i.e } \Phi(\eta \cdot h_0(x)) \leq c - \epsilon \quad \forall x \in B_\rho W$$

$$\Rightarrow \max\{\Phi(h(x)) \mid x \in B_\rho W\} \leq c - \epsilon$$

$$\text{pero } c \leq \max\{\Phi(h(x)) \mid x \in B_\rho W\} \leq c - \epsilon !$$

por lo tanto  $c$  es un valor crítico de  $\Phi$ .

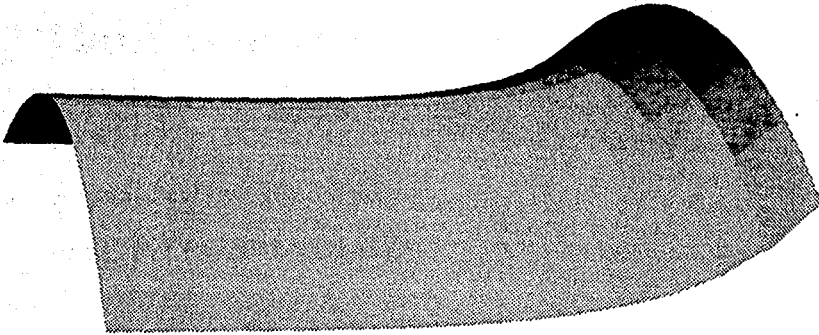


Figura 3.6: Gráfica de  $\Psi$ .

□

**EJEMPLO:**

El siguiente ejemplo muestra que la condición de Palais-Smale es necesaria para el teorema del punto silla. Sea  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Psi(x, y) = -x^2 + e^y$ ,  $\Psi$  satisface:

1.  $\Psi(x, 0) = -x^2 \leq -1 = \alpha$  para toda  $x \in \mathbb{R}$  con  $|x| = \rho = 1$ .
2.  $\Psi(0, y) = e^y > 0$  para toda  $y \in \mathbb{R}$ .

Sin embargo  $\Psi$  no tiene puntos críticos:

$$\nabla \Psi(x, y) = (-2x, e^y) \neq 0 \quad !$$

¿Contradice ésto a (3.6)?

La respuesta es no y la razón es que  $\Psi$  no satisface la condición de (PS). Consideremos la sucesión  $\{(0, -n)\} \subset \mathbb{R}^2$ , su imagen bajo  $\Psi$  es acotada

$$\Psi(0, -n) = e^{-n} \leq 1$$

y bajo  $\nabla\Psi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla\Psi(0, -n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (0, e^{-n}) = 0$$

sin embargo trivialmente se ve que  $\{(0, -n)\}$  no tiene ninguna sub-sucesión convergente.

## Capítulo 4

# Existencia de trayectorias geodésicas en espacios-tiempo

Ya vimos en la sección 1.3 que en los *espacios Anti-de-Sitter* dados dos puntos  $a$  y  $b$  del espacio-tiempo no siempre existe una geodésica que los una. Sin embargo, en 1990 *Vieri Benci* y *Donato Fortunato* (ver [B-F]) demostraron que bajo ciertas condiciones es posible garantizar la existencia de una geodésica que una  $a$  a  $b$ ; una característica que se le va a pedir a la métrica  $g$  es que sea un *campo gravitacional estacionario*, donde esto significa que los  $g_{ij}$  no dependan del tiempo, i.e. que no dependan de la primera coordenada de un vector en  $\mathbb{R}^4$ . Por otro lado, en el capítulo 2 tradujimos el problema de existencia de una geodésica que una  $a$  a  $b$  a un problema variacional cuya solución consiste en garantizar la existencia de un punto crítico sobre  $H_0^1$  para la funcional energía. La demostración de esto último es larga y la hemos dividido en algunos lemas, corolarios y proposiciones.

Comencemos con el enunciado del *Teorema de Benci-Fortunato* y con un esquema de su demostración, la cual quedará cubierta en el resto del capítulo.

### TEOREMA 4.1 (*Benci – Fortunato*)

Denotemos por  $g_{ij}$  ( $i, j = 0, \dots, 3$ ) a los componentes del tensor métrico  $g$ . Supongamos que  $g$  satisface las siguientes condiciones:

**B-F.1**  $g_{ij} \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$  ( $i, j = 0, \dots, 3$ )

**B-F.2**  $g_{00}(z) \geq \nu > 0$  para toda  $z \in \mathbb{R}^4$

**B-F.3** Existe  $\mu > 0$  tal que

$$-\sum_{i,j=1}^3 g_{ij}(z) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^4$$

y toda

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$$

**B-F.4** Las funciones  $g_{0i}$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) son acotadas

**B-F.5**  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_0}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^4$

Entonces para cualesquiera dos puntos  $a, b \in \mathbb{R}^4$  existe una geodésica, con respecto a la métrica  $g$ , que une  $a$  a  $b$ .

Antes de pasar a la demostración de este teorema es conviene recordar que

$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^1 g(z(t)) [\dot{z}(t), \dot{z}(t)] dt$  es la funcional energía.

$\mathbf{H}_0^1 = \{z \in \mathbf{H}^1(I, \mathbb{R}^4) \mid z(0) = 0 = z(1)\}$  es el dominio de  $\Phi$ .

$\langle u, v \rangle_{\mathbf{H}^1} = \langle u(0), v(0) \rangle_{\mathbb{R}^4} + \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle_{\mathcal{L}^2}$ ,  $\mathbf{H}_0^1 = \mathbf{V} \oplus \mathbf{W}$ , con  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  la cerradura de la unión, sobre todos los naturales, de  $\mathbf{V}_k$  y  $\mathbf{W}_k$  respectivamente.

$\langle u, v \rangle_{\mathbf{H}_0^1} = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle_{\mathcal{L}^2}$ ,  $\mathbf{V}_k = \text{gen}\{e_0 \sin \ell \pi t : \ell = 1, \dots, k\}$

$\mathbf{W}_k = \text{gen}\{e_i \sin \ell \pi t : \ell = 1, \dots, k; i = 1, 2, 3\}$

$\mathbf{E}_k = \mathbf{V}_k \oplus \mathbf{W}_k$

Además, en adelante usaremos la siguiente notación:

$(\tau_n, \xi_n) = \zeta_n$  con  $\tau_n \in \mathbf{V}_k$  y  $\xi_n = ((\xi_n)_1, (\xi_n)_2, (\xi_n)_3) \in \mathbf{W}_k \quad \forall n \in \mathcal{N}$

$\bar{z} = a + (b - a)t$  para  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}^4$  fijos,

$\dot{\bar{z}} = c = c_0 + \hat{c} = (\hat{c}_0, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$

$z_n = \bar{z} + \zeta_n = (s_n, x_n)$  con  $s_n \in \bar{z} + \mathbf{V}_k$ ,  $x_n \in \bar{z} + \mathbf{W}_k$

$(z_n)_i$  es la  $i$ -ésima entrada de  $\bar{z} + \zeta_n$

### Esquema de la demostración

La idea de la demostración es probar lo siguiente:

- La funcional energía restringida a los  $E_k \subset \mathbf{H}_0^1$ , que son de dimensión finita, satisface (PS).
- La existencia de dos constantes  $\alpha = \sup \Phi|_{S_R W}$  y  $\beta = \inf \Phi|_V$ , para alguna  $R$ , con las cuales  $\Phi$  cumplirá las hipótesis i) y ii) del teorema del punto silla.
- La existencia de  $\zeta_n \in E_n \forall n \in \mathcal{N}$  tal que  $\zeta_n$  es un punto crítico de  $\Phi_n = \Phi|_{E_n}$  y  $\alpha \leq \Phi(\zeta_n) \leq \beta$ .
- La sucesión de puntos críticos es fuertemente acotada en  $\mathbf{H}^1$ .
- La sucesión de puntos críticos  $\zeta_n$  tiene una subsucesión que converge fuertemente a un  $\zeta^*$ .
- $\zeta^*$  es un punto crítico de  $\Phi : \mathbf{H}_0^1 \rightarrow \mathfrak{R}$ .

Observemos que el teorema del *punto silla* requiere que la dimensión de  $W$  sea  $< \infty$ . Esto no sucede en nuestro caso, por ello es necesario aplicar dicho teorema a cada uno de los subespacios  $E_n = V_n \oplus W_n$  para obtener un punto crítico  $\zeta_n$  en cada  $E_n$  y después es necesario checar que la sucesión  $\{\zeta_n\}$  converge a un punto crítico  $\zeta^*$  de  $\Phi$  en  $\mathbf{H}_0^1$ .

Notemos que si  $g$  satisface las condiciones del *Teorema de Benci-Fortunato*, entonces por (B-F.4) existen constantes positivas  $\kappa_i$ , con  $i = 0, \dots, 3$ , que cumplen

$$|g_{i0}(z)| < \kappa_i \quad \forall z \in \mathfrak{R}^4$$

Sea  $\kappa = 4 \max\{\kappa_i, i = 0, \dots, 3\}$ . Se tiene entonces

$$|g_{i0}(z)| < \kappa \quad y \quad \sum_{i=0}^3 |g_{i0}(z)| < \kappa.$$

La segunda parte del siguiente lema será útil para demostrar que la funcional energía está acotada sobre ciertos conjuntos y con ello después garantizar también el acotamiento de la sucesión de puntos críticos.

**LEMA 4.2**

Consideremos la función real de variable real

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

- i)  $f(x)$  tiene un único punto crítico en  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ , donde  $f(x_0)$  es el valor mínimo de la función si  $a > 0$  y es el valor máximo si  $a < 0$ .
- ii) Si  $a > 0$  y  $m$  es una constante, entonces

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq m\}$$

es de la forma  $[\alpha, \beta]$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ó bien es el vacío si  $m < f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-b^2}{4a} + c$ .

**Demostración**

Del cálculo elemental sabemos que  $x_0$  es punto crítico de  $f(x)$  si y sólo si la derivada de  $f(x)$  valuada en  $x_0$  es cero. Ahora

$$f'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ax_0 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Por lo tanto  $x_0$  es único. Además  $f''(x) = 2a$ , lo que significa que  $f(x_0)$  es el valor máximo de la función si  $a < 0$  y es mínimo si  $a > 0$ .

Para ii) tomemos  $\tilde{f}(x) = ax^2 + bx + c - m$  y supongamos  $m \geq \frac{-b^2}{4a} + c$ , como  $a > 0$  se tiene que  $4am \geq -b^2 + 4ac$ , i.e.  $0 \leq b^2 - 4a(c - m)$ , lo que implica que  $\tilde{f}(x) = 0$  en

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c - m)}}{2a} \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - m)}}{2a}$$

con  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  y como  $a > 0$   $\tilde{f}(x)$  alcanza su mínimo en  $x_0 = \frac{-b}{2a} \in (\alpha, \beta)$ . Por lo tanto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{f}(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \leq m\} = [\alpha, \beta]$$

□

**TEOREMA 4.3**

Si  $g$  satisface las hipótesis del teorema (4.1), entonces

$$\Phi_k = \Phi|_{E_k}: E_k \rightarrow \mathbb{R}$$

satisface (PS)  $\forall k \in \mathcal{N}$ .

**Demostración**

Sea  $\{\zeta_n\} \subset E_k$ , para  $k$  arbitraria y fija, tal que  $\{\Phi_k(\zeta_n)\}$  está acotada y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla \Phi_k(\zeta_n) = 0$ , demostraremos que la sucesión real  $\{\|\zeta_n\|_{\mathbf{H}^1}\}_{n \in \mathcal{N}}$  está acotada, de donde se sigue que la sucesión  $\{\zeta_n\}$  unión sus puntos límites constituyen un cerrado y acotado en  $E_k$ , i.e un compacto ya que  $E_k$  es un espacio de Hilbert de dimensión finita; por lo tanto, por *Bolzano-Weierstraß*, existe una subsucesión  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ -convergente.

De la hipótesis sobre  $\{\zeta_n\}$  y de la definición de producto interior

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} D\Phi_{\zeta_n} \zeta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla \Phi(\zeta_n), \zeta \rangle_{\mathbf{H}^1} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \Phi(\zeta_n)\|_{\mathbf{H}_0^1} \|\zeta\|_{\mathbf{H}^1} = 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \|\zeta\|_{\mathbf{H}^1} = 0 \quad \forall \zeta \in E_k \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $\varepsilon_n$  depende de la norma de  $\nabla \Phi(\zeta_n)$ . Por otro lado, de la expresión para  $D\Phi$  dada en (2.8) y de B-F.5, obtenemos

$$\begin{aligned} D\Phi_{\zeta_n}(\zeta) &= \int_I \left( g(z_n) [\dot{z}_n, \dot{\zeta}] + \frac{1}{2} \sum_{ij=0}^3 (\dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j \sum_{l=1}^3 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}(z_n) \xi_l \right) dt \quad 2.8 \\ &\leq \varepsilon_n \|\zeta\|_{\mathbf{H}^1} \quad \forall \zeta \in \mathbf{H}_0^1 \quad \text{por 4.1} \end{aligned}$$

En particular, para  $\zeta = (\tau_n, 0)$

$$D\Phi_{\zeta_n}((\tau_n, 0)) = \int_I g(z_n) [\dot{z}_n, (\dot{\tau}_n, 0)] dt \leq \varepsilon_n \|(\tau_n, 0)\|_{\mathbf{H}^1} \quad (4.2)$$

Consideremos la siguiente transformación lineal  $T : \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  dada por

$$T(s, x) = (s, -x) \quad \text{con } x = (x_1, x_2, x_3) \quad (4.3)$$

Así,

$$(\tau_n, 0) = \frac{1}{2}((\tau_n, \xi_n) + (\tau_n, -\xi_n)) = \frac{1}{2}(z_n - \bar{z} + T(z_n - \bar{z})) \quad (4.4)$$

sustituyendo en (4.2)



$$\begin{aligned}
& \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, (\dot{\tau}_n, 0)] dt \\
&= \int_I g_{(z_n)} \left[ \dot{z}_n, \frac{1}{2}(\dot{z}_n - c + T(\dot{z}_n - c)) \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \int_I (g_{(z_n)}[\dot{z}_n, \dot{z}_n] - g_{(z_n)}[\dot{z}_n, c + T(c)]) dt + \frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, T(\dot{z}_n)] dt \\
&\leq \varepsilon_n \|(\tau_n, 0)\|_{\mathbf{H}^1}
\end{aligned}$$

Por hipótesis existe  $d_1 > 0$  tal que

$$\Phi(\zeta_n) \leq |\Phi(\zeta_n)| = \frac{1}{2} \left| \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, \dot{z}_n] dt \right| \leq d_1 \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (4.5)$$

Reacomodando y usando (4.5)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, T(\dot{z}_n)] dt \\
&\leq -\frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, \dot{z}_n] dt + \frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, c + T(c)] dt + \varepsilon_n \|(\tau_n, 0)\|_{\mathbf{H}^1} \\
&\leq d_1 + \frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, c + T(c)] dt + \varepsilon_n \|(\tau_n, 0)\|_{\mathbf{H}^1} \\
&= d_1 + \frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, c + T(c)] dt + \varepsilon_n \|(\tau_n, 0)\|_{\mathbf{H}^1} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

donde  $c + T(c) = (2\hat{c}_0, 0)$ , entonces

$$\begin{aligned}
g_{(z_n)}[\dot{z}_n, c + T(c)] &= 2\hat{c}_0 \sum_{i=0}^3 g_{i0}(z_n)(\dot{z}_n)_i \\
&\leq 2|\hat{c}_0| \sum_{i=0}^3 |g_{i0}(z_n)| |(\dot{z}_n)_i| \\
\text{por B-F.4} \quad &\leq 2|\hat{c}_0| \kappa \sum_{i=0}^3 |(\dot{z}_n)_i| \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (4.6) y (4.7)

$$\begin{aligned}
 \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, T(\dot{z}_n)] &\leq 2d_1 + 4|\hat{c}_0|\kappa \sum_{i=0}^3 \|(\dot{z}_n)_i\|_{\mathcal{L}^1} + 2\varepsilon_n \|(\tau_n, 0)\|_{\mathbf{H}^1} \\
 &\leq 2d_1 + 16|\hat{c}_0|\kappa \|\dot{z}_n\|_{\mathcal{L}^2} + 2\varepsilon_n \|(\tau_n, 0)\|_{\mathbf{H}^1} \\
 &\leq 2d_1 + d_2 \|z_n\|_{\mathbf{H}^1} + 2\varepsilon_n \|z_n\|_{\mathbf{H}^1} \\
 &\leq 2d_1 + d_2 \|z_n\|_{\mathbf{H}^1} + 2\|z_n\|_{\mathbf{H}^1} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

pues  $\|(\dot{z}_n)_i\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|(\dot{z}_n)_i\|_{\mathcal{L}^2} \leq 4\|\dot{z}_n\|_{\mathcal{L}^2}$  y  $d_2 = 16|\hat{c}_0|\kappa + 2^1$ . Por otro lado

$$\begin{aligned}
 &\int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, T(\dot{z}_n)] dt \\
 &= \int_I (g_{(z_n)}[(\dot{s}_n, \dot{x}_n), (\dot{s}_n, 0)] - g_{(z_n)}[(\dot{s}_n, \dot{x}_n), (0, \dot{x}_n)]) dt \\
 &= \int_I \left( g_{00}(z_n) \dot{s}_n^2 + \sum_{i=1}^3 g_{i0}(z_n) (\dot{x}_n)_i \dot{s}_n \right) dt \\
 &\quad - \int_I \left( \sum_{i=1}^3 g_{0j}(z_n) (\dot{x}_n)_j \dot{s}_n + \sum_{ij=1}^3 g_{ij}(z_n) (\dot{x}_n)_i (\dot{x}_n)_j \right) dt \\
 &= \int_I \left( g_{00}(z_n) \dot{s}_n^2 - \sum_{ij=1}^3 g_{ij}(z_n) (\dot{x}_n)_i (\dot{x}_n)_j \right) dt \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

de **B-F.2** tenemos que  $g_{00}(z_n) \geq \nu > 0$  y de **B-F.3** que

$$- \sum_{ij=1}^3 g_{ij}(z_n) (\dot{x}_n)_i (\dot{x}_n)_j \geq \mu \|\dot{x}_n\|_{\mathbb{R}^3}^2 \quad \text{con } \mu > 0$$

Comparando con (4.9)

$$\begin{aligned}
 \int_I g_{z_n}[\dot{z}_n, T(\dot{z}_n)] dt &\geq \int_I (\nu \dot{s}_n^2 + \mu \|\dot{x}_n\|_{\mathbb{R}^3}^2) dt \\
 &\geq \int_I \rho \|\dot{z}_n\|_{\mathbb{R}^4}^2 dt = \rho \|\dot{z}_n\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\
 &= \rho (\|\dot{z}_n\|_{\mathbf{H}^1}^2 - \|a\|_{\mathbb{R}^4}^2) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> $\varepsilon_n$  es una sucesión convergente a cero, por lo tanto podemos suponer que la sucesión empieza con  $n$  suficientemente grande de tal forma que  $\varepsilon_n < 1$ .

$$\text{con } \rho = \min\{\nu, \mu\} > 0$$

Uniendo (4.8) con (4.10) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \rho(\|z_n\|_{\mathbf{H}^1}^2 - \|a\|_{\mathfrak{R}}^2) &\leq 2d_1 + d_2\|z_n\|_{\mathbf{H}^1} \\ \text{i.e. } \rho\|z_n\|_{\mathbf{H}^1}^2 &\leq d_3 + d_2\|z_n\|_{\mathbf{H}^1} \end{aligned}$$

con  $d_3 = 2d_1 + \rho\|a\|_{\mathfrak{R}}^2$ , para finalmente

$$\rho\|z_n\|_{\mathbf{H}^1}^2 - d_2\|z_n\|_{\mathbf{H}^1} - 2\varepsilon_n\|z_n\|_{\mathbf{H}^1} \leq d_3$$

Ahora, por el lema (4.2) el lado izquierdo, visto como una función de la forma  $\rho x^2 - d_2 x$ , tiene un valor mínimo en el punto  $x = \frac{d_2}{2\rho}$  y

$$\{x \in \mathfrak{R} \mid \rho x^2 - d_2 x \leq d_3\} = [x_1, x_2]$$

Por lo tanto  $\|z_n\|_{\mathbf{H}^1}$  es  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ -acotada y se sigue el teorema <sup>2</sup>.

□

#### LEMA 4.4

Si  $g$  satisface las hipótesis del teorema (4.1) de Benci-Fortunato, entonces

i)  $\inf \Phi|_V > \sup \Phi|_{S_R W}$  para  $R$  suficientemente grande, donde

$$S_R W = \{x \in W \mid \|x\|_{\mathbf{H}^1} = R\}$$

ii)  $\sup \Phi|_{B_R W} < \infty$ , donde

$$B_R W = \{x \in W \mid \|x\|_{\mathbf{H}^1} \leq R\}$$

#### Demostración

Para i) basta ver dos cosas:

$$\bullet \beta = \inf \Phi(\zeta) |_V > -\infty$$

<sup>2</sup>Notese que para demostrar que la sucesión  $\{z_n\}$  es  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ -acotada no se uso que la dimensión del espacio fuera finita y si fue fundamental suponer  $\{\Phi_k(\zeta_n)\}$  acotada y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla \Phi(\zeta_n) = 0$ , las hipótesis para la condición de (PS).

- $\Phi(\zeta) \rightarrow -\infty$  cuando  $\|\zeta\|_{H^1} \rightarrow \infty$  con  $\zeta \in W$ .

Veamos que  $\beta > -\infty$ . Sea  $\zeta \in V$ ,  $\zeta = (\tau, 0, 0, 0)$ .

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2} \int_I g_{(z+\zeta)}[c + \dot{\zeta}, c + \dot{\zeta}] dt$$

donde, por la hipótesis B-F.5,  $g(\bar{z} + \zeta) = g(\bar{z})$  si  $\zeta \in V$ . Usando la linealidad de la métrica

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{1}{2} \int_I g_{(z)}[c + \dot{\zeta}, c + \dot{\zeta}] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_I g_{(z)}[c, c] dt + \int_I g_{(z)}[c, \dot{\zeta}] dt + \frac{1}{2} \int_I g_{(z)}[\dot{\zeta}, \dot{\zeta}] dt \quad (4.11) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g_{(z)}[c, c] &= \sum_{ij=0}^3 g_{ij}(\bar{z}) \hat{c}_i \hat{c}_j \quad \text{no depende de } \zeta \\ g_{(z)}[\dot{\zeta}, \dot{\zeta}] &= g_{00}(\bar{z}) \dot{\tau}^2 \geq \nu \dot{\tau}^2 \quad \text{por B-F.2} \\ g_{(z)}[c, \dot{\zeta}] &= \sum_{i=0}^3 \hat{c}_i \dot{\tau} \end{aligned}$$

Tomemos  $k_1 = \frac{1}{2} \int_I g_{(z)}[c, c] dt$ ,  $k_1$  es una constante pues no depende de la  $\zeta$  en  $V$  que elijamos. De aquí que

$$\Phi(\zeta) \geq \int_I \left( \frac{1}{2} \nu \dot{\tau}^2 + \sum_{i=0}^3 g_{i0}(\bar{z}) \hat{c}_i \dot{\tau} + k_1 \right) dt$$

Sea

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^3 g_{i0}(\bar{z}(t)) \hat{c}_i$$

Fijemos  $t$ , sea  $\gamma = \gamma(t)$  y  $x = \dot{\tau}(t)$ . Por el lema (4.2)

$$\frac{\nu}{2} x^2 + \gamma x + k_1$$

alcanza su mínimo en  $-\frac{\gamma}{\nu}$  ya que  $\nu > 0$ . Por lo tanto

$$\frac{\nu}{2}x^2 + \gamma x \geq -\frac{1}{2\nu}\gamma^2$$

es decir

$$\frac{\nu}{2}(\dot{r}(t))^2 + \gamma\dot{r} \geq -\frac{1}{2\nu}(\gamma(t))^2 = -\frac{1}{2\nu}\left(\sum_{i=0}^3 g_{i0}(\bar{z})\hat{e}_i\right)^2$$

para toda  $t \in I$ . Entonces

$$\Phi(\zeta) \geq k_1 + k_2 = k = \text{constante}$$

con  $k_2 = -\frac{1}{2\nu} \int_I (\sum_{i=0}^3 g_{i0}(\bar{z})\hat{e}_i)^2 dt$  que no depende de la  $\zeta \in V$  elegida. Por lo tanto

$$\inf\{\Phi(\zeta) \mid \zeta \in V\} \geq k > -\infty$$

Veamos ahora que  $\Phi|_W$  cumple:  $\Phi(\zeta) \rightarrow -\infty$  cuando  $\|\zeta\| \rightarrow \infty$ . Sea  $\zeta \in W$ ,  $\zeta = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{1}{2} \int_I g_{(z)}[c_0 + \hat{c} + \dot{\zeta}, c_0 + \hat{c} + \dot{\zeta}] \\ &= \frac{1}{2} \int_I g_{(z)}[c_0, c_0] dt + \int_I g_{(z)}[c_0, \hat{c} + \dot{\zeta}] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_I g_{(z)}[\hat{c} + \dot{\zeta}, \hat{c} + \dot{\zeta}] dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

Identifiquemos a los integrandos de (4.12)

$$g_{(z)}[c_0, c_0] = g_{00}(z)\hat{e}_0^2 \leq \kappa\hat{e}_0^2 \quad \text{por B-F.4} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} g_{(z)}[\hat{c} + \dot{\zeta}, \hat{c} + \dot{\zeta}] &= \sum_{ij=1}^3 g_{ij}(z)(\hat{e}_i + \dot{\xi}_i)(\hat{e}_j + \dot{\xi}_j) \\ &\leq -\mu\|\hat{c} + \dot{\zeta}\|_{\mathbb{R}^3}^2 \quad \text{por B-F.3} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
g_{(z)}[c_0, \hat{c} + \hat{\zeta}] &= \sum_{i=1}^3 g_{i0}(z) \hat{c}_0 (\hat{c} + \hat{\zeta})_i \\
&\leq |\hat{c}_0| \sum_{i=1}^3 |g_{i0}(z)| |(\hat{c}_i + \hat{\zeta}_i)| \\
&\leq \kappa |\hat{c}_0| \sum_{i=1}^3 |(\hat{c}_i + \hat{\zeta}_i)| \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Combinando (4.13), (4.14), (4.15) con la expresión (4.12) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\Phi(\zeta) &\leq \frac{1}{2} \kappa \hat{c}_0^2 - \frac{\mu}{2} \int_I (\hat{c} + \hat{\zeta}, \hat{c} + \hat{\zeta})_{\mathbb{R}^3} dt \\
&\quad + \kappa |\hat{c}_0| \int_I \sum_{i=1}^3 |(\hat{c}_i + \hat{\zeta}_i)| dt \quad (4.16)
\end{aligned}$$

donde

$$\sum_{i=1}^3 |(\hat{c}_i + \hat{\zeta}_i)| \leq \sum_{i=1}^3 |(\hat{c}_i + \hat{\zeta}_i)| + |\hat{c}_0|$$

y la desigualdad de Hölder llevan (4.16) a

$$\begin{aligned}
\Phi(\zeta) &\leq \frac{1}{2} \kappa \hat{c}_0^2 - \frac{\mu}{2} \|\hat{c} + \hat{\zeta}\|_{L^2}^2 + \kappa |\hat{c}_0| \|\hat{z}\|_{L^1} \\
&\leq \frac{1}{2} \kappa \hat{c}_0^2 - \frac{\mu}{2} (\|z\|_{\mathbb{H}^1}^2 - \hat{c}_0^2 - \|a\|_{\mathbb{R}^4}^2) + \kappa |\hat{c}_0| \|\hat{z}\|_{L^1} \\
&\leq \frac{1}{2} \kappa \hat{c}_0^2 - \frac{\mu}{2} \|z\|_{\mathbb{H}^1}^2 + \kappa |\hat{c}_0| \|z\|_{\mathbb{H}^1} - \frac{\mu}{2} (\hat{c}_0^2 - \|a\|_{\mathbb{R}^4}^2) \quad (4.17)
\end{aligned}$$

donde (4.17) es una expresión de la forma

$$-\kappa_1 t^2 + \kappa_2 t + \kappa_3$$

para  $t$  una variable real positiva y  $\kappa_1 > 0$ . Vista así es claro sus valores tienden a  $-\infty$  cuando  $t$  tiende a infinito, entonces dada  $\hat{\beta} > -\infty$ ,  $\beta > \hat{\beta}$ , existe  $t \geq 0$  suficientemente grande, tal que (4.17) toma un

valor menor que  $\hat{\beta}$ , en particular existe  $t = R$  suficientemente grande tal que si  $\|\zeta\|_{\mathbf{H}^1} = R$ , entonces

$$\begin{aligned} & \Phi(\zeta) |_{S_R W} \leq \hat{\beta} \\ \Rightarrow & \sup \Phi(\zeta) |_{S_R W} \leq \hat{\beta} \leq \inf \Phi(\zeta) |_{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

Para ii) partimos de la desigualdad (4.17) y usando la proposición 4.2 tenemos que el lado derecho de (4.17) alcanza su máximo en  $R = \frac{\kappa|\hat{c}_0|}{\mu}$  (recordemos que  $\mu > 0$ ), i.e.

$$\Phi(\zeta) < \infty$$

y

$$\sup \Phi(\zeta) |_{B_R W} \leq \sup \Phi(\zeta) |_{\mathbf{H}_0^1} < \infty$$

□

#### COROLARIO 4.5

Si  $g$  satisface las hipótesis del teorema 4.1, entonces existe una sucesión  $\{\zeta_n\} \subset \mathbf{H}_0^1$  tal que

- (a)  $\zeta_n$  es un punto crítico de  $\Phi |_{H_n}: H_n \rightarrow \mathfrak{R}$   
 (b)  $\inf \Phi |_{\mathbf{V}} \leq \Phi(\zeta_n) \leq \sup \Phi |_{B_R W}$

*Demostración*

$E_k = V_k \oplus W_k$  con  $W_k$  tiene dimensión finita  $\forall k \in \mathcal{N}$ .

Por el lema 4.3 tenemos que  $\Phi |_{E_k}: E_k \rightarrow \mathfrak{R}$  satisface (PS)  $\forall k \in \mathcal{N}$  y  $\Phi |_{E_k}$  es de clase  $C^1$  porque es la restricción de una función de clase  $C^1$ .

Sean

$$\alpha = \sup \Phi |_{S_R W} < \infty$$

y

$$\beta = \inf \Phi |_{\mathbf{V}} > -\infty$$

con  $R$  la del lema 4.4. Para dicha  $R$  ocurre:

- $\Phi(\xi) \leq \alpha \forall \xi \in W_k$  con  $\|\xi\|_{\mathbf{H}^1} = R$ .

$$\bullet \Phi(\tau) \geq \beta \quad \forall \tau \in V_k$$

Entonces, por el teorema del punto silla (3.6)

$$c_k = \inf_{h \in \Gamma} \max\{\Phi(h(\xi)) \mid \|\xi\|_{\mathbf{H}^1} \leq R, \xi \in W_k\}$$

donde

$$\Gamma = \{h : W_k \rightarrow E_k \mid h \text{ es continua y } h(\xi) = \xi \text{ si } \|\xi\|_{\mathbf{H}^1} = R\}$$

satisface

$$\beta \leq c_k$$

y  $c_k$  es un valor crítico de  $\Phi|_{E_k}$ , con lo que obtenemos (a).

Además, por definición de ínfimo

$$c_k \leq \max\{\Phi(h(\xi)) : \xi \in B_R W_k\}$$

$\forall h \in \Gamma$ , en particular para la inclusión  $h : W_k \rightarrow E_k$  dada por

$$h(\xi) = (0, \xi)$$

que claramente es una función que pertenece a  $\Gamma$ . Esto implica

$$c_k \leq \max\{\Phi(\xi) : \xi \in B_R W_k\}$$

$$\Rightarrow \beta \leq c_k \leq \max_{B_R W_k} \Phi \leq \sup_{B_R W} \Phi$$

con lo que obtenemos el inciso (b)

□

#### COROLARIO 4.6

La sucesión de puntos críticos  $\{\zeta_n\}$ , encontrada en (4.5), satisface ser  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ -acotada.

*Demostración*

Siguiendo con nuestra notación,  $z_n = \bar{z} + (\tau_n, \xi_n)$  con  $(\tau_n, \xi_n) \in \mathbf{H}_0^1$ . Dado que  $z_n$  es un punto crítico de  $\Phi_n = \Phi|_{E_n}$  ocurre

$$D\Phi_n(\zeta_n)(\zeta) = \langle \nabla \Phi_n(\zeta_n), \zeta \rangle_{\mathbf{H}^1} = 0 \quad \forall \zeta \in E_n$$



Tomemos la sucesión  $\{(\tau_n, 0)\}$  de elementos de  $\mathbf{H}_0^1$ , que denotaremos simplemente  $\{\tau_n\}$ . Para esta sucesión también pasa que

$$\langle \nabla \Phi_n(\zeta_n), \tau_n \rangle_{\mathbf{H}^1} = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

a la vez que, valuando en la expresión de la derivada

$$D\Phi_n(\zeta_n)(\tau_n) = \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, \dot{\tau}_n] dt$$

Si sustituimos ahora la expresión (4.4)

$$\int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, \dot{\tau}_n] dt = \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, \frac{1}{2}(\dot{z}_n - c + T(\dot{z}_n - c))] dt = 0$$

Por la linealidad de  $T$  y la de la métrica  $g$  podemos descomponer esta última expresión en dos sumandos que al despejar nos dejan la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, T(\dot{z}_n)] dt = \frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, c + T(c)] dt - \Phi(\zeta_n)$$

Por el inciso (b) del corolario (4.5) sabemos

$$-\beta < -\Phi(z_n) < -\alpha \quad \forall n \in \mathcal{N},$$

a partir de este hecho obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, T(\dot{z}_n)] dt \leq \frac{1}{2} \int_I g_{(z_n)}[\dot{z}_n, (c + T(c))] dt - \alpha$$

El resto de la demostración de continua de manera análoga a la del lema (4.3).

□

Recordemos ahora que en un espacio de Hilbert separable toda sucesión fuertemente acotada (i.e. acotada con la norma del espacio de Hilbert) tiene una subsucesión convergente con la topología débil (ver [Kol, p.202]). Llamemos igualmente  $\{z_n\}$ , por mera comodidad notacional, a esta subsucesión existente. Sea  $z^* \in \mathbf{H}^1$  el límite débil de

esta sucesión. Dado que  $\mathbf{H}^1$  está encajado de manera compacta en  $\mathcal{L}^\infty$ ,  $\{z_n\}$  posee una subsucesión convergente a algún  $z$  en  $\mathcal{L}^\infty$ . Claramente esta subsucesión también converge débilmente a  $z^*$ . Con base en este hecho insistimos en denotar a la subsucesión como  $\{z_n\}$ . La siguiente proposición nos dice que relación guardan  $z^*$  y  $z$

### PROPOSICIÓN 4.7

Sea  $z^* = \bar{z} + \zeta^*$  el límite débil de  $\{z_n = \bar{z} + \zeta_n\}$ , la sucesión de puntos límites encontrada en (4.5), y sea  $z$  el límite de la misma sucesión en  $\mathcal{L}^\infty$ . Entonces  $z^*$  y  $z$  coinciden (salvo en un conjunto de medida cero).

#### Demostración

Consideremos las sucesiones  $x_n = z_n - z^*$  y  $y_n = z_n - z$ . Se tiene entonces que  $x_n$  converge débilmente a 0 y  $y_n$  converge a 0 en  $\mathcal{L}^\infty$ . Observemos además que  $x_n \in \mathbf{H}_0^1$ . Tomemos  $(\text{sen} \pi kt, 0, 0)$ , un elemento de  $\mathbf{H}^1$

$$\langle x_n, \text{sen} \pi kt \rangle_{\mathbf{H}^1} = \pi k \langle \dot{x}_n, \cos \pi kt \rangle_{\mathcal{L}^2} = (\pi k)^2 \langle x_n, \text{sen} \pi kt \rangle_{\mathcal{L}^2} \quad (4.18)$$

Es claro que algo análogo ocurre si tomamos  $(\cos \pi kt, 0, 0)$ . Con esta ecuación podemos pasar del producto interior en  $\mathbf{H}^1$  al producto interior en  $\mathcal{L}^2$  multiplicando sólo por una constante.

Por otro lado, como  $z^*$  está en  $\mathbf{H}^1$ , entonces está en  $\mathcal{L}^\infty$  y, en vista de que el dual de  $\mathcal{L}^1$  es  $\mathcal{L}^\infty$ , se tiene

$$\|z^* - z\|_\infty = \sup \left\{ \int_I \psi(z^* - z) dt \mid \psi \in \mathcal{L}^1 \right\}$$

Dada  $\epsilon > 0$  existe un polinomio trigonométrico  $\psi$  tal que

$$\|z^* - z\|_\infty < \epsilon + \int_I \psi(z^* - z) dt$$

pero

$$\begin{aligned} \left| \int_I \psi(z^* - z) dt \right| &\leq \left| \int_I \psi(z^* - z_n) dt \right| + \left| \int_I \psi(z_n - z) dt \right| \\ &\leq \|\psi\|_\infty \|z^* - z_n\|_\infty + \left| \int_I \psi(z_n - z) dt \right| \end{aligned}$$

donde el lado derecho es una sucesión de reales que converge a cero, pues  $\psi(t)$  es combinación lineal finita de funciones seno y coseno y, por la ecuación (4.18), equivale a tener una combinación lineal finita de expresiones de la forma  $\langle x_n, \text{sen}\pi kt \rangle_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\langle x_n, \text{cos}\pi kt \rangle_{\mathbf{H}^1}$  que pueden verse como elementos del dual de  $\mathbf{H}^1$  valuadas en  $x_n$ , que es una sucesión que converge debilmente a 0. Por lo tanto, para toda  $\epsilon > 0$

$$\|z^* - z\|_{\infty} < \epsilon \quad \text{i.e.} \quad \|z^* - z\|_{\infty} = 0$$

□

#### PROPOSICIÓN 4.8

Sea  $\{\zeta_n\}$  la sucesión de puntos críticos encontrada en el corolario (4.5). Entonces:

- (a)  $\{\zeta_n\}$  tiene una subsucesión que converge fuertemente en  $\mathbf{H}^1$  a  $\zeta^*$ , donde  $\zeta^*$  es el límite débil de  $\{\zeta_n\}$
- (b)  $\zeta^*$  es un punto crítico de  $\Phi : \mathbf{H}_0^1 \rightarrow \mathfrak{R}$ .

#### Demostración

Sea  $P_n$  la proyección ortogonal sobre  $E_n$  y  $\zeta_n^* = P_n(\zeta^*)$ . De la expresión para la derivada de la funcional energía, ecuación (2.8), tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla \Phi(\zeta_n), T(\zeta_n - \zeta_n^*) \rangle_{\mathbf{H}^1} &= \int_0^1 g(x_n) [\dot{z}_n, T(\zeta_n - \zeta_n^*)] dt \\ &- \int_0^1 \sum_{i,j=0}^3 \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{\ell}}(x_n) (\xi_n - \xi_n^*)_{\ell} (\dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j dt = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $T(s, x) = (s, -x)$  es la transformación que se definió en la ecuación (4.3) y  $z_n = (s_n, x_n)$ . Por hipótesis del teorema (4.1),  $g_{ij} \in C^1(\mathfrak{R}^4, \mathfrak{R})$ , i.e.  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{\ell}} : \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$  es una función continua, para toda  $i, j, \ell = 0, \dots, 3$ . Podemos usar entonces la proposición (2.13) para garantizar que  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{\ell}}(x_n)$  converge en  $\mathcal{L}^{\infty}$  a  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{\ell}}(x^*)$ . Esto aunado a las

siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x_n)(\xi_n - \xi_n^*) \right\|_\infty \\ & \leq \left\| \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x_n) \right\|_\infty (\|(\xi_n - \xi^*)\|_\infty + \|(\xi^* - \xi_n^*)\|_\infty) \\ & \leq \left\| \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x_n) \right\|_\infty (\|(\xi_n - \xi^*)\|_\infty + M\|(\xi^* - \xi_n^*)\|_{\mathbb{H}^1}) \end{aligned}$$

nos garantiza que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x_n)(\xi_n - \xi_n^*) \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{L}^\infty$$

para  $i, j = 0, \dots, 3$  y  $\ell = 1, 2, 3$ . Además, dadas las siguientes desigualdades (que se derivan de la desigualdad de Hölder)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x_n)(\xi_n - \xi_n^*) \dot{z}_n)_i (\dot{z}_n)_j dt \\ & \leq \|(\dot{z}_n)_i\|_{\mathcal{L}^2} \|(\dot{z}_n)_j\|_{\mathcal{L}^2} \left\| \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x_n)(\xi_n - \xi_n^*) \right\|_\infty \\ & \leq \|(\dot{z}_n)_i\|_{\mathbb{H}^1} \|(\dot{z}_n)_j\|_{\mathbb{H}^1} \left\| \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x_n)(\xi_n - \xi_n^*) \right\|_\infty \end{aligned}$$

obtenemos, usando la proposición (2.13), que el segundo sumando del lado derecho de la ecuación (4.19) es una sucesión convergente a cero, lo que denotaremos como  $O(1)$ , por lo tanto también

$$\int_0^1 g(x_n)[\dot{z}_n, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt = O(1) \quad (4.20)$$

De aquí, el lado izquierdo de (4.20) lo podemos separar en dos sumandos dada la linealidad de  $g$  y que  $z_n = \bar{z} + \zeta_n$ , i.e.

$$\int_0^1 g(x_n)[\dot{z}, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt + \int_0^1 g(x_n)[\dot{\zeta}_n, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt = O(1) \quad (4.21)$$

70      CAPITULO 4. GEODÉSICAS EN ESPACIOS-TIEMPO

Como  $\zeta_n^*$  converge fuertemente en  $\mathbf{H}^1$  a  $\zeta^*$  y  $\zeta_n$  converge débilmente en  $\mathbf{H}^1$  a  $\zeta^*$ , entonces para toda  $f$  en el dual de  $\mathbf{H}^1$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\zeta_n^*) = f(\zeta^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\zeta_n)$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\zeta_n^* - \zeta_n) = 0$$

es decir,  $\zeta_n^* - \zeta_n$  converge a cero débilmente en  $\mathbf{H}^1$ , lo que en términos del producto interior de  $\mathbf{H}^1$  significa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f', \zeta_n^* - \zeta_n \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0$$

veamos que esto nos lleva a que  $\zeta_n^* - \zeta_n$  converge a cero débilmente en  $\mathcal{L}^2$ , para esto basta ver que para toda  $f \in \mathcal{L}^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \zeta_n^* - \zeta_n \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0$$

Para  $f \in \mathcal{L}^2$  sea

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + f(0)$$

$F(t)$  resulta ser absolutamente continua,  $F'(t) = f(t)$  casi en todos lados (ver [Ru, 7.11]) y  $f(t) \in \mathcal{L}^2$ , entonces  $F(t) \in \mathbf{H}^1$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle F, \zeta_n^* - \zeta_n \rangle_{\mathbf{H}^1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \zeta_n^* - \zeta_n \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0 \quad (4.22)$$

i.e.  $\zeta_n^* - \zeta_n$  converge a cero débilmente en  $\mathcal{L}^2$ .

Por otro lado, para los  $g_{ij}$  usamos la proposición (2.13) para concluir que  $g_{ij}(z_n)(\dot{z})_i$  (donde  $\dot{z}_i$  es una constante) converge fuertemente en  $\mathcal{L}^\infty$  a  $g_{ij}(z^*)(\dot{z})_i$ , en particular está acotada; de esto y de (4.22) obtenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 g(x_n) [\dot{z}, T(\zeta_n - \zeta_n^*)] dt \right| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{ij=0}^3 \|g_{ij}(x_n)(\dot{z}_n)_i\|_\infty \left| \int_0^1 [(\zeta_n - \zeta_n^*)] dt \right| = 0 \end{aligned}$$

Entonces, de (4.21),

$$\int_0^1 g(x_n)[\dot{\zeta}_n, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt = O(1) \quad (4.23)$$

donde, agregando simplemente un cero de manera adecuada, a la expresión (4.23) la podemos reescribir como

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g(x_n)[\dot{\zeta}_n - \zeta_n^*, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt \\ & + \int_0^1 g(x_n)[\dot{\zeta}_n^*, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt = O(1) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por otro lado se demuestra fácilmente que  $g_{ij}(x_n)(\dot{\zeta}_n^*)_i$  converge en  $\mathcal{L}^2$ , veamos

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_{ij}(x_n)((\dot{\zeta}_n^*)_i - \dot{\zeta}_i^*)|^2 dt & \leq \|g_{ij}(x_n)\|_\infty^2 \|(\dot{\zeta}_n^*)_i - \dot{\zeta}_i^*\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ & = \|g_{ij}(x_n)\|_\infty^2 \|(\zeta_n^*)_i - \zeta_i^*\|_{\mathbb{H}^1}^2 \rightarrow 0 \\ & \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Esto nos lleva a que  $g_{ij}(x_n)(\dot{\zeta}_n^*)_i$  está acotada en  $\mathcal{L}^2$ , por lo cuál

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 g(x_n)[\dot{\zeta}_n^*, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt \right| \\ & = \left| \sum_{i,j=0}^3 \int_0^1 g_{ij}(x_n)(\dot{\zeta}_n^*)_i T((\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)_j) dt \right| \\ & \leq \sum_{i,j=0}^3 \|g_{ij}(x_n)(\dot{\zeta}_n^*)_i\|_{\mathcal{L}^2} \left| \int_0^1 T((\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)_j) dt \right| \\ & \leq \text{cte.} \left| \int_0^1 T((\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)_j) dt \right| \end{aligned}$$

donde el último término tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Por lo tanto, de (4.24)

$$\int_0^1 g(x_n)[\dot{\zeta}_n - \zeta_n^*, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt = O(1) \quad (4.25)$$

Finalmente vemos que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=0}^3 g_{ij}(x_n)(\zeta_n - \zeta_n^*)_i T((\zeta_n - \zeta_n^*)_j) \\
 &= g_{00}(x_n)(\zeta_n - \zeta_n^*)_0^2 - \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}(x_n)(\zeta_n - \zeta_n^*)_i (\zeta_n - \zeta_n^*)_j \\
 &\geq \nu(\zeta_n - \zeta_n^*)_0^2 + \mu \|\zeta_n - \zeta_n^*\|_{\mathbb{R}^3} \quad \text{por B-F.2, B-F.3} \\
 &\geq \rho \|\zeta_n - \zeta_n^*\|_{\mathbb{R}^4}
 \end{aligned}$$

con  $\rho = \min\{\nu, \mu\}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 g(x_n)[\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*, T(\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*)] dt &\geq \int_0^1 \rho \|\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*\|_{\mathbb{R}^4} \\
 &= \rho \|\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_n^*\|_{\mathcal{L}^2} \\
 &= \rho \|\zeta_n - \zeta_n^*\|_{\mathbf{H}^1}
 \end{aligned}$$

y con (4.25) concluimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\zeta_n - \zeta_n^*\|_{\mathbf{H}^1} = 0$$

o lo que es lo mismo,  $\{\zeta_n\}$  converge fuertemente a  $\zeta^*$  en  $\mathbf{H}^1$ . Así queda demostrado el inciso (a) de esta proposición.

Pasemos ahora a demostrar la parte (b). Usando el inciso anterior tenemos que para todo  $\vartheta$  elemento de  $\mathbf{H}_0^1$

$$\langle \nabla \Phi(\zeta_n), \vartheta \rangle_{\mathbf{H}^1} \longrightarrow \langle \nabla \Phi(\zeta^*), \vartheta \rangle_{\mathbf{H}^1} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (4.26)$$

Por otro lado

$$\langle \nabla \Phi(\zeta_n), \vartheta \rangle_{\mathbf{H}^1} = \langle \nabla \Phi(\zeta_n), \vartheta_n \rangle_{\mathbf{H}^1} + \langle \nabla \Phi(\zeta_n), \vartheta - \vartheta_n \rangle_{\mathbf{H}^1}$$

donde  $\vartheta_n = P_n(\vartheta)$ .

Como  $\zeta_n$  es un punto crítico de  $\Phi|_{E_n}$  y  $\vartheta_n \in E_n$ , entonces

$$\langle \nabla \Phi(\zeta_n), \vartheta_n \rangle_{\mathbf{H}^1} = 0.$$

Además

$$\langle \nabla \Phi(\zeta_n), \vartheta - \vartheta_n \rangle_{\mathbf{H}^1} \leq \|\nabla \Phi(\zeta_n)\|_{\mathbf{H}^1} \|\vartheta - \vartheta_n\|_{\mathbf{H}^1} \longrightarrow 0$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto

$$\langle \nabla \Phi(\zeta_n), \vartheta \rangle_{\mathbf{H}^1} = O(1)$$

Donde esto aunado a (4.26) nos lleva a que

$$\langle \nabla \Phi(\zeta^*), \vartheta \rangle_{\mathbf{H}^1} = 0$$

para toda  $\vartheta \in \mathbf{H}_0^1$ , i.e.  $\zeta^*$  es un punto crítico de  $\Phi$  sobre todo  $\mathbf{H}_0^1$ .

□





## Bibliografía

- [Ba] R. G. Bartle. *Introducción al Análisis Matemático*. Grupo Noriega Editores, México 1992.
- [B-F] Benci V., Fortunato D. *Existence of geodesics for Lorentz metric of a stationary gravitational field*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 7, No.1, 1990, p. 27-35.
- [Br] Haïm Brézis. *Análisis Funcional*. Alianza Editorial, Madrid 1984.
- [DoC] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston 1992.
- [Fr] S. H. Friedberg., A. J. Insel., L. E. Spence. *Algebra lineal*. Publicaciones cultural, México 1982.
- [Haw] S.W. Hawking, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London 1973.
- [Hil] E. Hille. *Functional Analysis*. Amer. Math. Soc., Colloquium Publications Vol.XXXI.
- [Kol] A.N. Kolmogórov, S. V. Fomín. *Introductory Real Analysis*. Prentice Hall, 1970.
- [Kol2] A. N. Kolmogórov., S. V. Fomín *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Editorial Mir, Moscú 1975.
- [Ma] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag, New York 1988.

- [Mas] W. S. Massey. *Singular Homology Theory*. Springer, New York 1980.
- [O'N] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, New York 1983.
- [P] R. Palais. *Critical point theory and the minimax principle*. Proc. Symp. Pure Math. **15** (1970), 185-212.
- [R1] P.H. Rabinowitz, *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*. Nolinear analysis; A collection of papers in honor of Erich R othe, Academic Press, New York 1978, 161-177.
- [R2] P.H. Rabinowitz. *Minimax methods in Critical point Theory with applications to differential equations*, Reg. Conf. Ser. Math. **65**, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1986.
- [Ru] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York 1966.
- [St] M. Struwe. *Variational methods and applications to partial differential equations and hamiltonian systems*. Springer-Verlag, Berlin 1990.