65
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DE ALEA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A

RAYMUNDO OLIVARES LABASTIDA

MEXICO, D. F. SEPTIEMBRE 1995

VNIVERSDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

DE ALEA

realizado por RAYMUNDO OLIVARES LABASTIDA

con número de cuenta 5902969 **, pasante de la carrera de** ACTUARIO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	MAT. MARGARITA ELVIRA CHAVEZ CANO
Propietario	DR. CARLOS ALVAREZ JIMENEZ
Propietario	ACT. AURORA VALDES MICHEL
Suplente	ACT. HORTENSIA CANO GRANADOS
Suplente	MAT. MARIA DE LA LUZ NUÑEZ MORALES

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

DEDICATORIA

A M D G

A mis padres Sebastián Olivares y Apolinaria Labastida

A mis hermanos, tíos y sobrinos

A mi esposa Yolanda Pretelín y a José Pablo nuestro hijo

A mis mecenas Pbro. Aristeo G. Hernández L. y Fr. Sebastián Zepeda

INTRODUCCION

Pensando en qué tema desarrollar en esta tesis, me ha parecido conveniente seleccionar éste acerca de álea, una función que sirve de enlace entre las matemáticas determinísticas y las probabilísticas; unifica a éstas últimas y sugiere otras; y se esparce prolíficamente por el ancho mundo de las Matemáticas.

Asentada en la probabilidad teórica es al mismo tiempo útil en la ciencia actuarial y en otros campos de la matemática pura o aplicada, con rasgos de síntesis bien definidos y de esteticidad. Trataré este asunto, en la manera de lo posible, en forma intuitiva y tal, para quien no todo resulta evidente. A partir de lo concreto y sin perderlo de vista llegar a resultados formales; pero gradual y consecuentemente. Se habla en este trabajo no sólo del aspecto formal sino que también se discurre acerca del contenido de álea.

A la que vamos a analizar aquí es a la función que llamaré álea; se trata del modelo matemático de una ley natural, $z = x^n / n!$, con x y n complejos, que satisface a la ecuación diferencial

$$nz - z'x = 0.$$

En este trabajo, de forma preferente, nos ocuparemos de las áleas con x arriba descritas; sin por eso al menos mencionar cuando haya lugar, ya que también las hay, a las áleas con n fraccionario, en cuyo caso, el factorial de nuestra función en el medio continuo se calculará mediante la función Gamma.

Hace tiempo tuve la idea de que algunas funciones de densidad de probabilidad tenian algo en común, adicionalmente a las propiedades que se piden a las funciones de densidad de probabilidad. Con el tiempo esta suposición nos la hemos demostrado en algunas, por cierto las más usuales, si no es que las más importantes funciones de densidad, mediante álea. Así mismo, al hojear cualquier libro de matemáticas a cada paso nos encontramos con suma frecuencia a la función álea, per se o en el número e. El resultado de éstas dos investigaciones en las matemáticas determinísticas y probabilísticas, es el que me propongo narrar en los capitulos segundo y tercero.

En la elegancia de los números e, i, π, los cuales tienen como componente principal a álea, según en su lugar veremos, haremos hincapié en los lugares innumerables en que esparcidos se hallan en el campo de la Matemática que aquí citaremos; mas no serán sino una mínima parte de los que son. Casi en cualquier lugar de Matemáticas, a cualquier nivel, se nos presentará una alta probabilidad de encontrar áleas. Todo mundo sabe del extenso uso de los números π, i, e; pero cabe cuestionarse porqué.

Responder a esas interrogantes es incursionar dentro de la naturaleza misma de nuestra función; pero no vayamos a pensar que en π, i, e y en las fórmulas en que estos números intervienen, ha ya agotado su presencia; de hecho, cualquiera puede comprobar que existe en forma directa y autónoma en otras fórmulas. Realmente su intervención vgr. en e, sólo nos muestra a álea en una suma; pero también en la operación producto, resta, división, potencia y radicación, pudiendo ser operando u operador, se encuentra. En lo anterior se descubre el carácter unificador, sintetizador de nuestra función. Nada nos debe extrañar que si el número -e- es el rey en las matemáticas, la función álea es su ánima. Y si aquella es fundamental en el Análisis Matemático y en el Cálculo de Probabilidades, corre álea una suerte pareja.

Al mismo tiempo, en la búsqueda de la función álea, descubrimos sus caracteristicas (Campanoides), las cuales le visten de cierto rasgo estético. La consideramos simétrica en el sentido de que tanto en el numerador el exponente y en el denominador el número, cuyo factorial es, son idénticos. En honor a la verdad es a este rasgo que me fijé en su existencia: la forma, como dirían los antiguos.

En realidad, álea está formada por elementos, nada complicados. De ahi su simplicidad y elegancia. Son operadores algebraicos fundamentados en la multiplicación y no es exagerado afirmar que ya en los estudios primarios la encontramos.

Voy a tratar en este asunto de seguir a Sir Isaac Newton, quien recomendaba que: in scientiis adiscendis exempla magis prosunt quam praecepta. Y también esta conseja: quien escribe una vez lee dos. No por otra sino por esta razón es que algunas veces puedo ser repetitivo al insistir en algún concepto; hasta que se tome conciencia de él. También daré reconocimiento a los hombres forjadores de los temas que vaya tratando llamándoles por su nombre completo y citando el tiempo en que vivieron. Sin perder rigor en la deducción de álea, más conveniente me ha parecido hacerla en cierta forma intuitiva, para ser congruente con el párrafo anterior.

La secuencia de los capitulos en que dividiré esta exposición es la siguiente: un capitulo que nos sirva para explicar la esencia y existencia de álea, su nombre y su notación. Otro más en que haremos un recorrido por diferentes ramas de la matemática determinística en que álea figura como componente probabilístico. El tercero, está dedicado a poner en términos de álea a varias funciones de densidad de probabilidad con el objeto de hacer notar que forman el grupo de densidades campanoides, e igualmente interpretar según nuestro enfoque a las funciones generatrices y características, y a las transformadas de Laplace y de Fourier. En el último capítulo se habla de las aplicaciones prácticas de álea en el cálculo de Probabilidades y en el Cálculo Actuarial y, para finalizar, las conclusiones o valoración del objetivo inicial. Agradezco en todo lo que vale la invaluable intervención en esta tesis a mis sinodales:

M. en C. Margarita E. Chávez Cano.

Dr. Carlos Alvarez Jiménez

Act. Aurora Valdés Michel

Act. Hortensia Cano Granados

Mat. María de la Luz Núñez Morales

consistente en su atenta dirección y revisión paciente.

México, D. F., septiembre de 1995.

El arte de la demostración matemática a menudo consiste en hallar un marco de referencia en el cual lo que se trata de demostrar sea casi obvio.

Mark kac y Stanislaw M. Ulam en

Matemáticas y Lógica, Monte Avila Ed.,1969. página 98

CONTENIDO

C A P I T U L O I

DE ALEA EN SI

A).- ETIOLOGIA Y DEFINICION

Alea es una palabra esdrújula, derivación del verbo alear, cuyo significado es mezclar y combinar, como en el juego de dados, en que se agitan primero y se tiran después para observar la combinación resultante, con la cual palabra, designo a la función $z = x^n/n!$

Probablemente quien primero dió una aplicación a esta función haya sido John Napier, matemático escocés nacido en Edimburgo en 1550 y muerto ahí mismo en abril 4 de 1617, el cual pensó que cualquier cifra se podía expresar en forma exponencial e inventó los logaritmos de base e, que llevan su nombre.

La función álea, así como también las exponencial y logaritmo natural tienen su origen en la hipérbola equilátera, y su distribución campanoide representa a las etapas de crecimiento y decremento naturales.

Los que siguen son varios ejemplos que muestran a álea en diferentes escenarios a fin de que intuitivamente nos acerquemos a su concepto para después hacer su formal definición.

Entiéndese como ponderación a la acción de pesar, pesar con una pesa, compensar, equilibrar, contrapesar y, en un sentido más lato, quitar el exceso de peso a una cosa por medio de una pesa cuantificable explícita o tácitamente, exceso medido en número de veces. Por ejemplo, si se tiene n número de elementos, entre los cuales hay n_1 iguales entre sí y n_2 iguales entre sí, n! es el número de permutaciones $(n = n_1 + n_2)$, $n_1!$ y $n_2!$ es el número de permutaciones de la clase 1 y de la clase 2, respectivamente; entonces, n! está excedido en $n_1!$ y también en $n_2!$; por ésto debemos ajustar, equilibrar, compensar, ponderar a n! así: $n!/(n_1!* n_2!)$; de esta manera, tendremos el número correcto de permutaciones.

Sea n_i el resultado en el tiempo i. Sea d_i el número ordinal de aparición del resultado n_i. En el tiempo i la ponderación de cada resultado viene dado por el cociente de n_i/d_i. Ahora bien, la ponderación (peso) de la función que sospechamos representa a nuestro fenómeno en el tiempo i, es la ponderación compuesta resultado de multiplicar las ponderaciones individuales(los cocientes). **A esta ponderación compuesta le llamo álea.**

La ponderación hasta el tiempo t viene dada por

$$\text{Alea} = (n_1/d_1)\,(n_2/d_2)\,(n_3/d_3)\ldots(n_t/d_t)$$
$$= (n_1 n_2 n_3 \ldots n_t)\;/\;(d_1 d_2 d_3 \ldots d_t)$$

entonces

$$\text{Alea} = \Pi\,(n_i\;/\;d_i)$$
$$= \Pi n_i / \Pi d_i$$

con el barrido de la multiplicación de 1 á t. Las n_i es la sucesión de los entes objetos de la ponderación (ponderados) y las d_i es la sucesión de los entes que describen cómo se va a efectuar la ponderación, partición (ponderantes). Intuitivamente n son las bolas a distribuir en d cajones.

$$\text{álea} = n^d\;/\;d!$$

si $n_i = n_{i-1}$ y $d = 1, 2, 3,\ldots,d_t$, que es el caso que vamos tratar; pero pueden ser las n_i diferentes y es el caso de la Combinatoria clásica; empero, si d = constante, ésto nos conduce a otra Combinatoria, vgr., d = 2, sería partir (asignar probabilidades estructurales) a un todo sucesívamente por mitades, al modo de Demócrito.

Otra forma de investigar el origen de álea es mediante el proceso de crecimiento natural. Si la razón entre el incremento de crecimiento y la materia que lo produjo es constante se dice que el crecimiento es exponencial. Esa es la forma en que crecen los seres vivos y algunos fenómenos financieros. La razón antes mencionada se conoce como tasa de crecimiento por periodo unitario; si supongamos, dividimos el periodo a la mitad, entonces nuestra tasa será la mitad de la original y lo que pretendemos es que el crecimiento de la primera mitad del periodo también crezca al mismo tiempo que la masa original durante la segunda mitad del periodo original. Si dividimos el periodo original en mil partes, nuestra nueva tasa por subperiodo estará dividida entre mil y pretendemos que cada fin de subperiodo el crecimiento acumulado a ese momento también crezca. Cuando los subperiodos tienden a ser de tamaño cero estamos en presencia de un crecimiento exponencial.

Vamos a servirnos de un ejemplo. Supongamos que tenemos un árbol de un metro de altura al día primero del año; al día último del año ha crecido 20 cm. Su tasa de crecimiento es entonces 20/100 = .2 ó 20% anual.

Al final del periodo 1 el crecimiento total sería

$$(1 + 0.2/1)^1 = 1.20$$

Si dividimos el periodo entre 2 el crecimiento total al final del periodo original es

$$(1 + .2/2)^2 = (\ 1.1\ )(\ 1.1)$$

Si dividimos el periodo entre 4 el crecimiento total al final del periodo original es

$$(1 + .2/4)^4 = (1.05)(1.05)(1.05)(1.05) = 1.2155$$

Si en lugar del 20% nuestra tasa es del 100% y, en lugar de cuatro subperiodos, tomamos 10000000000000, o sea, subperiodos de tamaño cercano a cero entonces estamos hablando del número e:

$$e = (1 + 1/10000000000000)^{10000000000000} = 2.7\ 1828\ 1828\ 459045$$

Este ejemplo sencillo de cuatro crecimientos y tasa del 20% va a ser complicado por nosotros con la finalidad de verlo desde otro punto de vista.

$(1+.2/4)^4$ por la fórmula del binomio de newton viene a ser expresado en los siguientes términos:

$$4!\ (\ (1^0/0!)((.2/4)^4/4!) + (1^1/1!)((.2/4)^3/3!) + $$
$$+ (1^2/2!)((.2/4)^2/2!) + (1^3/3!)((.2/4)^1/1!) +$$
$$+ (1^4/4!)((.2/4)^0/0!)\ )$$

Vamos analizar a cada uno de los anteriores términos.

$$(1^0/0!)((.2/4)^4/4!) = ((((\frac{1}{1} * \frac{.05}{1}) * \frac{.05}{2}) * \frac{.05}{3}) * \frac{.05}{4}) = 0.0000002$$

en palabras: (1/1) es ponderación de la masa, .05/1, .05/2, .05/3 y .05/4 son las ponderaciones de la tasa de crecimiento. Los paréntesis nos indican el orden a efectuar con fines de claridad; pero se pueden efectuar en cualquier orden.

El producto de las ponderaciones de masa multiplicado por el producto de las ponderaciones de la tasa de crecimiento por los subperiodos a que están expuestos da por resultado el incremento debido a cuatro subperiodos: $24 * 0.0000002 = 0.0000048$

$$(1^1/1!)((.2/4)^3/3!) = \frac{1}{1} * \frac{.05}{1} * \frac{.05}{2} * \frac{.05}{3} = 0.0000208$$

El resultado de esta expresión es solamente el incremento por tres periodos: $24 * 0.0000208 = 0.0004992$

$$(1^2/2!)((.2/4)^2/2!) = \frac{1}{1} * \frac{1}{2} * \frac{.05}{1} * \frac{.05}{2} = 0.000625$$

Este resultado es el crecimiento por dos subperiodos: $0.000625 * 24 = 0.015$

$$(1^3/3!)((.2/4)^1/1!) = \frac{1}{1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{.05}{1} = 0.008333$$

Es claro que este incremento resulta de aplicar la tasa ponderada de un subperiodo sobre una masa de tamaño (1/2)(1/3), ésto es, $24 * 0.008333 = 0.1999992$

$$(1^4/4!)((.2/4)^0 0!) = \frac{1}{1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{1} = 0.041667$$

En esta expresión no hay nada de crecimiento; sólo la masa original: $24 * 0.041667 = 1$.

De aquí se sigue que $\sum 24! \ (1^i/i!) \ (.05^{4-i}/(4-i)!) = 1.2155$, que coincide con 1.05^4, lo cual nos dice que el 20% por un periodo unitario se convierte en 21.55% si subdividimos en cuatro cortes, y por tanto a la tasa de crecimiento por subperiodo de 5%.

Ha sido necesario complicar, en apariencia, un proceso sencillo que, se nos puede argüir, es fútil hacer complejo; sin embargo, se acerca más a la realidad y clarifica el modelo. Se llama a la masa, capital y a la tasa de crecimiento, tasa de interés en Matemáticas

Financieras. Pues bien, en el proceso que acabamos de describir álea es el producto de las ponderaciones: tanto álea es $1^{1}/1!$ como también $.05^{4-1}/(4-1)!$

Pongamos otros ejemplos más :

1).- Leonhard Euler (se pronuncia OILeR) (1707-1783) fué quien investigó y extendió el uso del número e, y en honor a él se le bautizó e; su descubridor fué Daniel Bernoulli. En el número e (el exponente es igual a uno) quiere decir que la tasa de crecimiento es del 100% por periodo unitario, o lo que es lo mismo, esta función se reproduce totalmente en un periodo.

El número -e-, base de los logaritmos naturales o neperianos, es la suma de las áleas:

$$e^{1} = 1^{0}/0! + 1^{1}/1! + 1^{2}/2! + 1^{3}/3! + \dots$$
$$= \lim (1 + 1/n)^{n} \text{ cuando n tiende a infinito}$$

y todavía más, en términos de ponderación

$$e^{1} = 1/1 + 1/1 + (1/1)*(1/2) + (1/1)*(1/2)*(1/3) + \dots$$

e = 2.7 1828 1828 459045 235360 287471 352662 497757 247093 69996...

Si la tasa de crecimiento es x, entonces

$$e^{x} = x^{0}/0! + x^{1}/1! + x^{2}/2! + x^{3}/3! + \dots$$
$$= (1 + x/n)^{n} \text{ cuando n tiende a infinito}$$
$$= 1 + (x / 1) + (x\, x / 1 * 2) + (x\, x\, x / 1 * 2 * 3) + \dots$$

En las Matemáticas financieras, se tiene que un capital de C pesos invertido durante un año a la tasa nominal anual i convertible m veces al año, al final del año acumula a $C * \left[1 + i^{(m)}/m\right]^{m*1}$; si el valor de m tiende a infinito, i.e., la convertibilidad es en cada instante, entonces, recordando que $e^{1} = (1 + 1/m)^{m}$, el capital acumulado a fin de año será $C * e^{r*1}$, donde $r = i^{(m)}$ para facilidad en la notación. De manera semejante, si a fin de año tenemos un capital F, su valor actual será, $F / \left[1 + r/m\right]^{m*1} = F*\left[1+ r/m\right]^{-m*1}$; si la convertibilidad es instantánea, será $F * e^{-r*1}$. Generalizando estas operaciones de acumulación y valor presente anuales a t años, respectívamente serán:

$$\text{VALOR ACUMULADO} = C\, e^{rt}$$

para m tendiendo a infinito.

$$\text{VALOR PRESENTE} = F\, e^{-rt}$$

puse tasa de interés igual a r para no confundir con $i = (-1)^{1/2}$

$$e^{rt} = (rt)^0/0! + (rt)^1/1! + (rt)^2/2! + \ldots$$

$$e^{-rt} = (-rt)^0/0! + (-rt)^1/1! + (-rt)^2/2! + \ldots$$

Las funciones e^{rt} y e^{-rt} aparecen con harta frecuencia en las Matemáticas determinísticas y en las probabilísticas; en esta tesis implícitamente veremos que "valuar" es determinar el valor presente o el valor acumulado de un una sucesión, (primas, siniestros, primas menos siniestros, rentas, variables aleatorias o de carácter no determinístico, impulsos eléctricos, etc.), generada por una función en el tiempo; su desarrollo en áleas nos muestra el carácter probabilístico de ellas. En siguiendo con este tenor ya comprenderemos mejor al numerador de la densidad Normal: $r = 1/2$ y $t = (x-\mu)^2/\sigma^2$: desviación cuadrática media.

$$e^{-(1/2)((x-\mu)/\sigma)^2} = (-.5((x-\mu)/\sigma)^2)^0/0! +$$

$$+ (-.5((x-\mu)/\sigma)^2)^1/1! + (-.5((x-\mu)/\sigma)^2)^2/2! + \ldots$$

o, por ejemplo también, a la solución general de una ecuación diferencial

$$y = C_1 e^{1x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$$

donde las raíces de la ecuación auxiliar son $r = +1, -2, -1$.

Siempre que nos encontremos con e^{rt} ó e^{-rt} debemos seguir estos dos pasos:

A).- Asociar siempre a esta expresión la curva campanoide. La sucesión de áleas que la componen es $\{ (rt)^n/n! \}$

B).- Analizar a (rt). Visualizar a r como: la raíz de una ecuación, la tasa de interés, la razón o proporción, la varianza o amplitud, la derivada, etc.; visualizar t, como el tiempo o eje de la abscisa.

2).- La serie de Taylor es la mejor en cuanto a polinomios de colocación. Para encontrar el valor de una función $f(x)$ a partir del punto $f(a)$, donde $a < x$, a cercano a x, y $f(x)$ continua en ese intervalo, por medio de él, es

$$f(x) = \sum f^{(n)}(a) * (x - a)^n/n!$$

n de cero a k, que es el grado de la función $f(x)$.

En la forma desplegada:

$$f(x) = f^{(0)}(a)(x-a)^0/0! + f^{(1)}(a)(x-a)^1/1! + f^{(2)}(a)(x-a)^2/2! +\ldots$$

con $f^{(0)}(a) = f(a)$

$f^{(n)}(a)$ significa derivada de orden n de la función $f(x)$ en el punto -a- cercano y menor a x. Aquí los numeradores son una función ya que para obtener, vgr. la segunda derivada, es necesario obtener la primera y para ésta, partir de la función original y a cada una de ellas multiplicarla por x-a, el cual término (x-a), está dividido (ponderado) entre 1, entre 2, entre 3 y así sucesívamante y de ahí viene el factorial. Cada uno de los términos $(x-a)^i/i!$ es una álea. Hasta aquí los ejemplos.

Otro punto de vista. Vamos a auxiliarnos con el eje del tiempo para anotar el resultado de nuestras observaciones sobre la función A; los resultados pueden ser de clase a, b, c, ...,z

```
a x f t s v a a b t x x x v b a ...     clase de elemento
1 1 1 1 1 1 2 3 1 2 2 3 4 2 2 4         número de elemento DENTRO
--------------------------------
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14        número de elemento EN
```

agrupemos por clase:

la clase a contiene 4 elementos

la clase b contiene 2,

la clase c contíene 0,

la clase d contiene 0,

la clase x contiene 4; la f,1; t,2; s,1; v,2.

En t=1 a pesa 1; en t=2 x pesa 1, en t=7 a pesa la mitad en su clase, en t=8 a pesa la tercera parte, en t=14 a pesa la cuarta parte dentro de su clase; estas se llaman PONDERACIONES INDIVIDUALES de la clase a

. $a/1 * a/2 * a/3 * a/4$ es la PONDERACION TOTAL de a dentro de su clase; ésto se puede expresar como $a^4/4!$ para a; $x^4/4!$ para x; $t^2/2!$ para t; $f^1/1!$ para f; y así, la ponderación total para cada clase.

Sea el conjunto A de elementos a_1, a_2, ...a_n un subconjunto de B y queremos determinar la ponderación que cada elemento tiene dentro del subconjunto, entonces cada ponderación será: $a_1/1$, $a_2/2$, $a_3/3$ ...

Definición de álea en términos de ponderación.

ALEA es la PONDERACION TOTAL DE CLASE A, que vendrá dada como el PRODUCTO DE LAS PONDERACIONES INDIVIDUALES DE LA CLASE A, efectuadas en base a los números naturales.

$$\frac{a_1}{1}\ \frac{a_2}{2}\ \frac{a_3}{3}\ \frac{a_4}{4} \cdots \frac{a_{n-1}}{n-1}\ \frac{a_n}{n}$$

si $a_i = a_{i-1}$ entonces

$$= \frac{a^n}{n!}$$

La definición formal, en términos de conjuntos, es la que sigue:

ALEA ES EL COCIENTE RESULTANTE DE DIVIDIR: AL PRODUCTO DE LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO ORDENADO ENTRE EL PRODUCTO DE SUS ORDINALES.

Desde el punto de vista operacional álea es una función que consiste en dividir, la base elevada a una potencia entre el factorial de esa potencia. La peculiaridad de álea es que el exponente a su vez es ordinal de la base. Necesita explicación el número ordinal por ser poco usual. Ordinal es derivación de orden. Orden implica secuencia: primero, segundo, tercero, etc. Sabemos que función es el resultado de aplicar ciertos operadores, no necesariamente matemáticos, a un ente llamado operando, no necesariamente matemático. Aquí me referiré a operadores y operandos matemáticos. Ejemplos de operadores son suma, resta, multiplicación, división, potencia, Σ, Δ, Π, el número e, (d/dx), ($\Delta/\Delta x$), inverso, recíproco, adelantamiento, retardamiento, esperanza, álea, etc.

Siempre que hablemos de función tendremos que definir el dominio de la misma. En tratándose de álea es el de los números complejos. Otra definición equivalente de álea en término de funciones es

ALEA ES EL COCIENTE
DE LA FUNCION POTENCIA ENTRE LA FUNCION FACTORIAL DE LA POTENCIA

Como operador, la función álea es $(\ )^x/x!$; dentro del paréntesis se pondrá el operando; veamos si satisface las leyes del álgebra de los operadores. Sea $A = a^x/x!$, $B = b^y/y!$ y $C = c^z/z!$

I-1.	$A + B = B + A$	Ley conmutativa para la suma
I-2.	$A + (B + C) = (A + B) + C$	Ley asociativa para la suma
I-3.	$AB = BA$	Ley conmutativa para el producto
I-4.	$A(BC) = (AB)C$	Ley asociativa para el producto
I-5.	$A(B + C) = AB + AC$	Ley distributiva

Estas leyes se cumplen para álea. En el caso de a = b = c, que no es tan evidente, I-3. queda: $(a^x/x!)(a^y/y!) = a^{x+y}/x!y!$. En la ley distributiva se tiene $a^x/x!(\ a^y/y! + a^z/z!) = (a^{x+y}/x!y! + a^{x+z}/x!z!)$ y por lo tanto se cumple, como igualmente I-1.

La suma o resta de áleas produce una álea:

$$x^m/m! + x^n/n! = (n!x^m + m!x^n)/m!n!$$

El producto de áleas también produce una álea:

$$x^m/m! \cdot x^n/n! = x^{m+n}/m!n!$$

La división de áleas resulta ser una álea:

$$x^m/m! \ / \ x^n/n! = (n!/m!)\ x^{m-n}$$

También existe la potenciación en álea y el resultado es otra álea:

$$(x^m \ / \ m!)^n = x^{mn} \ / \ m!^n$$

Relacionados con los elementos componentes de álea, (x, n), se presentan los siguientes casos:

1.- La base x puede ser una cantidad real positiva o negativa.

2.- El exponente n, puede ser real positivo o negativo.

2.1 El exponente n positivo real puede ser par o impar.

2.2 El exponente n negativo real puede ser par o impar.

3.- El factorial correspondiente a cada uno de los párrafos 2, 2.1, 2.2 aceptable, sólo puede ser entero positivo o real positivo si en vez de factorial calculamos con la función Gamma.

Las áleas que resultan de estas combinaciones y que estudiaremos son las de x positiva: no nos interesan varianzas o amplitudes cero o negativas; que además, el exponente sea real positivo, par o impar. Debido a esta segunda restricción es que podemos calcular el inciso 3. Así, la función factorial se define como

$$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$$

$$n! = 1 * n * 3 * 8 * \ldots * (n-1)$$

función que crece más despacio que n^n, ya que, para que un producto sea máximo sus factores tienen que ser iguales, $n^n = n * n * n * \ldots_{\text{n-veces}} \ldots * n$. A partir de una unidad, en el factorial, se construye una área de 1 * 2; con esta área formamos el volumen 1*2*3 y así sucesívamente formaremos hiperplanos y con éstos el hiperplano: $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \ldots * n = n!$; en el orden que se quiera efectuar la multiplicación, siempre y cuando sean los factores, enteros naturales hasta n inclusive.

y también es útil

$$1/n! = (n!)^{-1} = (1/1)(1/2)(1/3)*\ldots*(1/n)$$

$$n¡ = 1 / 2 / 3 / \ldots / n$$

elegante y sencilla expresión, en la que parodiando lo dicho para el factorial, mutatis mutandis, ésta vendría a ser la función "relacional" y también partiendo de una unidad iríamos construyendo los hipoplanos hasta hacerlos finitamente pequeños, con "volumen" tendiendo a cero. En n¡ el orden de las operaciones se debe respetar.

Alea, según lo arriba dicho, también se puede expresar como

$$x^n / n! = x^n / 1 / 2 / 3 / 4 / \ldots / n$$

y n^{-n} decrece más rápidamente que x¡

o la inversa

$$n! / x^n = x^{-n}\, 1 * 2 * 3 * \ldots * n$$

ya que $(x^n / n!)^{-1} = x^{-n} / n!^{-1} = x^{-n} * n!$

Veamos ahora dos expresiones muy útiles:

$$\sum (-x)^n/n! = e^{-x} = 1 / e^x$$

con n de cero a infinito; y también

$$\sum x^n/n! = e^x$$
$$= \lim \ (1 + x/n)^n$$

con n de cero a infinito.

Este límite es obvio y en él se localiza el carácter **estacionario** de las áleas: en el número **e**.

$$\lim \Pi \ x^n/n! \ \text{--->} \ 0 \text{ cuando n tiende a infinito.}$$

En su lugar investigaremos a las derivadas e integrales de álea; sólo apuntaremos aquí que sus derivadas de orden creciente producen áleas de orden decreciente y; sus integrales de orden creciente devienen en áleas crecientes.

En realidad el origen del tema de esta tesis no es más que el desarrollo del siguiente proceso. Al estar dándole vueltas a la función de distribución Binomial en su forma original, se me ocurrió que cómo se vería en otra forma; y ese fué el comienzo.

Como comúnmente conocemos a la función de probabilidad Binomial, de parámetros (n, p), $(0 < p < 1, \quad n \geq 1)$ es

$$f(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x! \ (n-x)!} \ p^x \ (1-p)^{n-x}$$

donde

$$\binom{n}{x} = n! \ (1^x/x!) \ (1^{n-x}/(n-x)!) = n! \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ n-x \end{bmatrix}$$

Vamos a agrupar así

$$f(x,n,p) = n! \ \frac{p^x}{x!} \ \frac{(1-p)^{n-x}}{(n-x)!}$$

Ahora bien, si observamos con detenimiento a la fórmula anterior vamos a descubrir tres componentes:

a).- El factorial de n: n!

b).- El exponente y el número factorial de la primera fracción son iguales: x

c).- El exponente y el número factorial de la segunda fracción: (n-x) también son idénticos.

d).- En seguida concluí que cada fracción es simétrica tomando en

cuenta que el exponente y el número, cuyo factorial es, es el mismo. Esto me indujo a pensar que lo mismo podría ocurrir en otras distribuciones de probabilidad.

El problema fundamental de las matemáticas consiste en la representación formal de los fenómenos físicos; ahora bien, cuatro tipos de mapeo o representación existen a saber: algebraica, proposicional, algorítmica y probabilística.

Del tipo algebraico hablamos al mencionar las fórmulas de Isaac Newton (1642-1727) en el cálculo de las diferencias finitas, en la serie de Brook Taylor aparecida en su Methodus Incrementorum en 1715 ahora conocida en notación de Lagrange, en la Integral de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y en Joseph Louis de Lagrange (1736-1813); si se trata de cualquier función definida por medio de sus propiedades, vgr.,la función δ de Paul Adrien Maurice Dirac (1902-), nos estamos refiriendo al tipo proposicional; representación algorítmica decimos al conjunto de operaciones lógicas y matemáticas utilizadas para definir a una función y finalmente, probabilística si la representación viene dada por una proporción que, cuando n grande, tiende a definirla; ésto en un principio tenderá a ser un fractal y al final una curva. Obvio es decir que la función objeto de nuestro desarrollo interviene, excepto en la segunda, en las restantes.

La función δ de P. A. Dirac debe satisfacer las siguientes proposiciones: Vale cero para toda x diferente de cero. Para $x = 0$ se hace infinita. Además, el área bajo esta función δ vale uno. Este es un ejemplo de definición de tipo proposicional de una función.

Sabido es que la operación de SUMAR equivale a YUXTAPONER (poner junto a) áreas o volúmenes; también lo es, que la operación de MULTIPLICAR equivale a REPRODUCIR.

Pongamos un par de ejemplos para ilustrar el parráfo anterior. Sea x_1 una línea de x_1 unidades ; x_2 una línea de x_2 unidades y así x_i una línea de i unidades. Las unidades pueden ser lineales; superficiales, de área o cuadráticas,que es lo mismo; o cúbicas, volumétricas.

Para el caso de la suma tenemos que

- paso número uno: tomamos x_1
- paso número dos: a x_1 yuxtaponemos x_2, ésto es, tenemos $x_1 + x_2$
- paso número tres: a $(x_1 + x_2)$ yuxtaponemos x_3, i.e., tenemos $x_1 + x_2 + x_3$
- paso general: a $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{i-1})$ yuxtaponemos x_i

En forma general si y_{i-1} es la suma de los primeros i-1 términos

$$y_i = y_{i-1} + x_i$$

En volviendo a la multiplicación diremos que si multiplicamos a * b tenemos un rectángulo de área ab; si a su vez multiplicamos por c el área ab, entonces lo que estamos haciendo es reproducir el área ab en c veces; o lo que es lo mismo, ahora tenemos una especie de cubo, que puede serlo propiamente si a = b = c. Si multiplicamos (a * b * c) * d lo que estamos haciendo es reproducir o superponer nuestro cubo (abc) d veces, dando por resultado que nuestra nueva figura tiene área abcd. Por último, para no ser tan repetitivos, si multiplicamos (a b c d) * e, quiere decir que tomamos la figura abcd y la reproducimos e veces.

Ahora bien, en álea, el numerador es una potenciación, i.e., nuestro cubo perfecto se reproduce exactamente x veces la base λ formando así hiperplanos regulares.

1 * 2 * 3 * 4 *...* n es llamada la función factorial. Consiste en que nuestro cubo especial, 1 * 2 * 3 se reproduce en forma uniformemente creciente; o sea, en forma recurrente sería:

$$y_t = y_{t-1} * t$$

sabiendo que $y_{t-1} = 1 * 2 * 3 * \ldots * (t-1)$.

Efectuar el cociente x^t / t! vale tanto como decir que cuántas veces está contenido en x^t el denominador t!, o sea, la proporción o relación entre los dos crecimientos.

La división entre dos crecimientos, el de la función y su argumento, cuando el incremento del argumento tiende a cero se llama derivada. Ahora bien, en el medio discreto, el cociente de dos crecimientos, el de la función y su argumento, sin hallar el límite a cero, es una álea. Así la relación entre la derivada de orden n, $d^n y / dx^n$ y el cociente $\Delta^n / \Delta x^n$ es estrecha.

Hay una función de recurrencia que liga a las áleas: la ponderación total hasta t es la ponderación total hasta t-1, multiplicada por la ponderación en t; así,

$$y^t/t! = y^{t-1}/(t-1)! * y/t$$

En la sección dedicada al Análisis, en lo relativo a Combinatoria vamos a ubicar a álea en ese terreno; por ahora, para concluir con su definición, va esta otra interpretación. Se define una Ordenación con Repetición (Reemplazo) como el número total de arreglos de tamaño k (cada arreglo está formado por k lugares, casilleros o compartimentos) que se pueden formar con n elementos indistinguibles. Se denota así: $(OR)^n_k = n^k$; el número total de formas en que pueden ser ocupados los k lugares viene dado por el producto del número de maneras en que pueden ser llenados: k!.

De este modo vamos a definir a álea en función de elementos combinatorios: álea es la proporción de Ordenaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, respecto al número de maneras en que los podemos colocar en k lugares.

$$ALEA = (OR)^n_k / k! = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n^k}{k!}$$

En palabras:

ALEA ES EL NUMERO COMBINATORIO QUE RESULTA DE SIMETRIZAR A LAS ORDENACIONES CON REPETICION.

Algunos autores a las ordenaciones les llaman Variaciones o también Muestras con reemplazo o sin él.

En cuanto que álea determina una acción sobre los elementos que la configuran, en este sentido se la define como **OPERADOR**.

Si entramos al campo de las probabilidades, nuevamente aquí definiremos a nuestra función **ALEA**, como **LA PROBABILIDAD DE LOS**

EVENTOS ELEMENTALES DE LOS PROCESOS DE POISSON, la cual es **decreciente** con el tiempo y tendiendo a cero, vgr., 1/1/2/3/4/5 = 1/5!, **y que por construcción se basa en los números naturales.**

Después de estos ejemplos vamos a dar aquí el **origen y la definición formales de ALEA.**

Además de las cuatro operaciones fundamentales (+, -, x, /) las propiamente algebraicas son, por pares, la potenciación (a^n) y la radicación ($\sqrt[n]{a}$); la exponenciación (a^x) y la logaritmación ($\log_a x$). Esta última está definida como $x = a^y$ y se traduce como: el logaritmo de **x** es **y** en base **a**: la base **a** elevada al logaritmo de **x** es igual al número **x**.

Sabemos que **xy = k** define a una familia de hipérbolas equiláteras; que, la hipérbola equilátera de amplificador 1, **y = 1/x**, es el punto de partida para la construcción de las funciones exponencial y logarítmica y de todas las "hiperbólicas".

$$\log_e x = \int \frac{1dx}{x}$$

Si en vez de la integral tomamos la aproximación Suma, (cuando John Napier (en español Neper) descubrió sus logaritmos en 1616 publicados en Mirifici logarithmorum canonis descriptio, el cálculo integral apenas nacía), queda:

$$L_n = 1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$$

La idea de Napier era la de construir dos sucesiones de números relacionadas de modo tal que cuando una aumentara en progresión aritmética la otra disminuyera en progresión geométrica. Si hacemos

$$n = e^{(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n)} = e^1 e^{1/2} e^{1/3} e^{1/4} \ldots e^{1/n}$$

tenemos las dos sucesiones. Su primera fórmula era $ae^{-x/a}$ con $a=10^7$.

Si hacemos la diferencia $L_n - \int dx/x$, observaremos que para n grande, ésta disminuye y tiende a C = 0.57721... llamada **constante de Euler**: polígonos vs. función continua.

La base es **e** en los logaritmos naturales, de modo que $e^{Lnx} = x$. El número **e**, para x tendiendo a infinito, en forma de desarrollo binomial, queda

$$e = \text{Lim } (1 + 1/x)^x =$$

$$= \binom{x}{0} 1^x (1/x)^0 + \binom{x}{1} 1^{x-1} (1/x)^1 + \binom{x}{2} 1^{x-2} (1/x)^2 + \ldots$$

$$e = \sum \binom{x}{k} 1^{x-k} (1/x)^k$$

con **k** de cero a infinito.

$$= 1 + (x!/(1!(x-1)!))(1/x^1) + ((x!/2!(x-2)!)(1/x^2) + \ldots$$

$x!/(k!(x-k)!(1/x^k)$ tiende a $1/k!$ para **x** grande

y entonces $e = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \ldots$

Esta es la estructuración de e, según la ideó Napier. **Si a la serie**, n tendiendo a **infinito**

$$\log_e x = \sum 1/n$$

$$= \quad \mathbf{1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n}$$

$$= 0!/1! + 1!/2! + 2!/3! + 3!/4! + \ldots + (n-1)!/n!$$

$= \sum (n-1)! \;/\; n!$, con n de 1 á x

la transformamos en

$$e = \sum 1/n!, \text{ con n de 0 á infinito}$$

$$= 1 + \left(1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots + 1/n! + \ldots\right)$$

$$= 1 + (1/1)/0! + (1/2)/1! + (1/3)/2! + + \ldots + (1/(n+1))/n! + \ldots$$

vemos que ésto ha sido posible sólo mediante la **operación álea.**

Esto es, que

$$\log_e x = \sum_1^x (n-1)! \bullet (1^n/ n!)$$

en términos de álea $(1^n/n!)$ nos dice que por medio de la función álea estamos suavizando a la función factorial. Si en vez de suavizar a n! tomamos la sucesión (1, 1, 1, ...) entonces

$$e = \sum (1) \; (1^n/n!)$$

con n de cero a infinito, ambas funciones ligadas por

$$\textbf{álea} = (1^n/n!) = \frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{n} = \Pi \; L'n \; a$$

con a de 1 á n

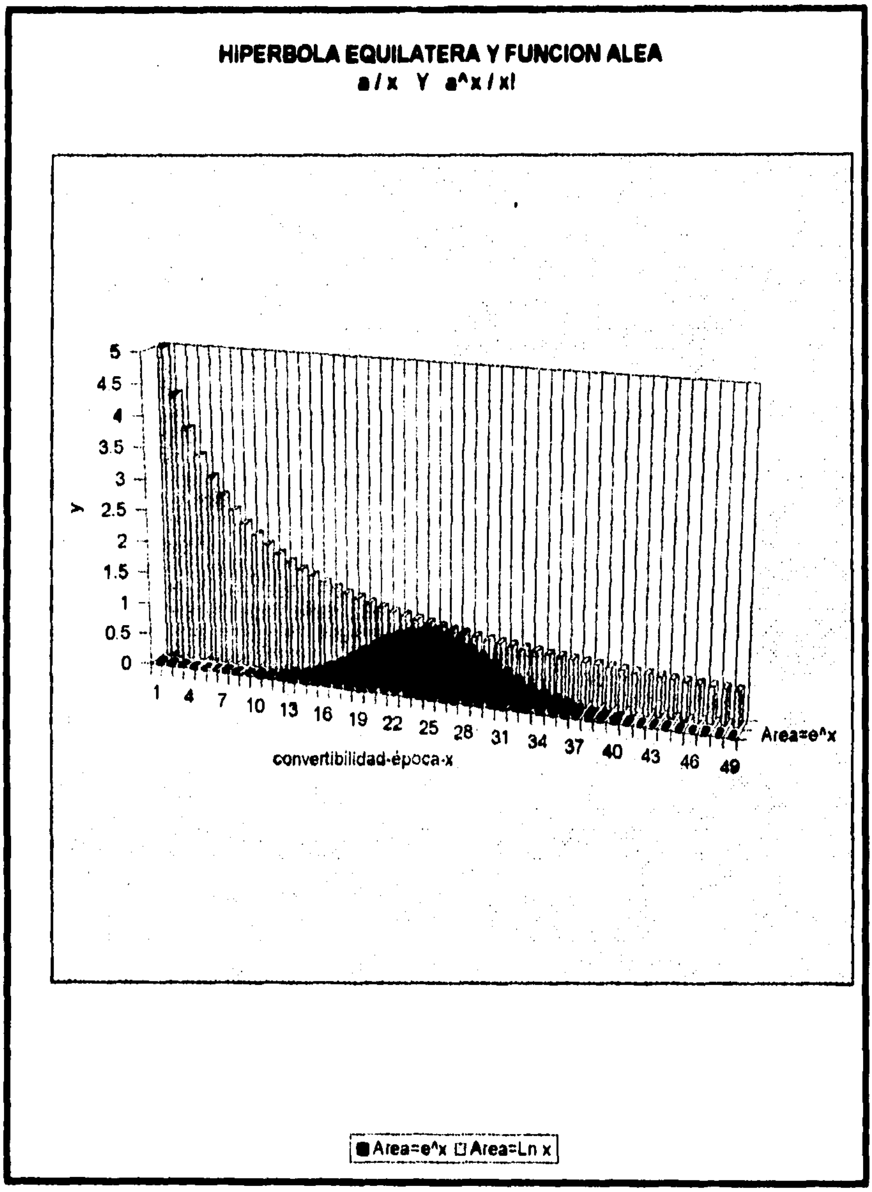
ALEA ES EL PRODUCTO DE LAS n PRIMERAS ORDENADAS DE LA HIPERBOLA EQUILATERA DE AMPLITUD x. **n = 1, 2, ...**

$$x^n/n! = \frac{x}{1}\ \frac{x}{2}\ \frac{x}{3} \ldots \frac{x}{n}$$

para x=1, $1^n/n!$ es la función álea de amplitud 1, la suma de cuyas ordenadas es el área de tamaño e^1. Esta es otra expresión para el número **e**:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Lím}\left\{1 + \frac{1}{1}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{4}(1 + \ldots\frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n+1}(1\ldots\right\}$$

Estos son los cimientos hiperbólicos de la función álea y su relación con **e** y $\log_e$, los cuales ubican a álea, aunados a las propiedades de los Grupos Cíclicos, de los Grupos de Permutación y de los Grupos Cociente, dentro de las **FUNCIONES HIPERBOLICAS PERMUTABLES**.



HIPERBOLA EQUILATERA Y FUNCION ALEA
a / x Y a^x / x!
5
4.5
4
3.5
3
y
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43 46 49
convertibilidad-época-x
Area=e^x
Area=e^x
Area=Ln x

B).- **EL PORQUE DEL NOMBRE ALEA**

No es muy prolijo explicar cómo elegí este nombre; antes bien, el tiempo para escogerlo si. Por cuanto yo pretendía que el nombre cumpliera con ciertos requisitos, cuando escogía un nombre, fallaba en alguno. Estos son los requerimientos que al menos debería satisfacer:

1).- Mnemotécnico

2).- Que representara al contenido fielmente (**combinación y aleatorización**)

3).- Que no existiera duplicidad

Voy a exponer cómo es que álea es la palabra satisfactoria.

Históricamente hablando, ya hace veinte siglos era de cuño popular el juego de los dados. Julio César, emperador romano en el siglo anterior a nuestra era cristiana, narra ya en su clásico libro De Bello Civile, que él antes de cruzar el río Rubicón para salir a atacar a su contrincante llamado Pompeyo, dijo: álea iacta est, i.e., he tirado los dados, los dados están en reposo, hay que contar los puntos, o como menos literalmente traducen otros: la suerte está echada, aludiendo con ésto al carácter azaroso (incierto) de su empresa. También en la Biblia se da cuenta de que los soldados romanos que vigilaban a N.S. Jesucristo crucificado, se jugaron a los dados su túnica.

Como no se trata aquí de investigar si el juego de los dados también existía en otros pueblos, me limito a estas dos citas entre los romanos; y no se crea que solamente conocían el ludo alae sino que también tuvieron sus científicos, vgr., M. Terencio Varrón, Tito Lucrecio Caro, Vitrubio en el año 10 D.C., Sexto Julio Frontino, Aulo Cornelio Celso, Pomponio Mela, Plinio el Viejo y a los Doctores en la ciencia de la Comunicación en la más perfecta de las lenguas, Cicerón y Cayo Julio César y todos los escritores latinos; en las grandes naciones sajonas actuales la ciencia del debate es de suma importancia. ¿ O es que ya nos olvidamos que las virtudes y defectos, la cultura y la civilización del pueblo romano nos ha sido heredada transformada en civilización occidental (escala de valores) y que la lengua española, para no ir tan lejos, es entre las hablas romances la más fiel copia del decir latino y el vocabulario inglés contiene un sesenta por ciento de palabras de ese origen ?

Alea, álea, es una palabra latina. Es obvio que el ludo aleae (juego de los dados), se pronuncia álee, por estar definido por las reglas de las probabilidades permite que la asociación de ideas entre un ente y sus propiedades se fijen mejor; en este caso el ente es la función $y^x/x!$ la cual aparece con bastante frecuencia en el cálculo de Probabilidades en el cual es propiedad fundamental el estudio de la ALEAtoriedad. Por ser eminentemente de carácter combinatorio, aún cuando la Combinatoria no es exclusiva del Cálculo de Probabilidades; sin embargo los principios, histórica y epistemológicamente hablando, se basan en esta rama del contar y enumerar. De lo hasta esta parte comentado puedo suponer que álea satisface los dos primeros requisitos, a saber: mnemotécnica y rica en contenido.

Referente al último requerimiento acerca de que no exista duplicidad en la palabra álea, debo decir que después de recorrer el diccionario etimológico no he encontrado significado igual para otro concepto, excepto que en el cálculo de Probabilidades la palabra álea, no sino su derivada en el uso adjetival, se emplea para designar el carácter de azar de esa ciencia.

Ya que, como más abajo veremos, la función álea nos ayuda a construir la mayoría de las funciones de densidad en el cálculo de probabilidades, me ha parecido que no sólo es conveniente sino hasta necesario llamar con propiedad a este ladrillo de nuestro edificio probabilístico.

Aún cuando la presencia de nuestra función no es exclusiva del cálculo de probabilidades, ya que aparece casi en cualquier lugar de las matemáticas deterministas, a cualquier nivel, desde la aritmética, álgebra, pasando por el cálculo y la trigonometría y el análisis matemático, las ecuaciones en diferencias, las ecuaciones diferenciales, ya sea en el medio discreto o en el medio continuo, este hecho sugiere su carácter aleatorio. Las funciones deterministas contienen su grado de aleatoriedad. En otras palabras A. Einstein decia que no era posible que Dios jugara a los dados, dado el carácter cuántico de la materia. Asi las cosas, las Matemáticas Determinísticas tal vez tan sólo sean un estado más en la Ciencia de las Probabilidades o éstas en realidad tengan cierto grado de causalidad. Alea es el eslabón entre los fenómenos determinísticos y los aleatorios por su naturaleza misma, en cuanto que x^n es un modelo de los primeros, y n!, de los segundos.

C).- NOTACION

Una vez que hemos definido y nombrado a la función álea, para terminar este capitulo no nos resta sino darle escritura. Los caracteres de imprenta, sofisticados o no, tal como actualmente pueden generarse en las computadoras ya no representan ningún obstáculo en su manejo. En honor a la sencillez, y para ser congruente con todo lo anterior, escogi el simbolo æ que precede a los paréntesis que contienen a la base de la función potencial primero, y, separado por una coma, el número que es exponente y número cuyo factorial es,

$$æ(\lambda, x) = \lambda^x/x!$$

o más sencillo

$$æ\,(\text{elemento1},\ \text{elemento2})$$

$$= (\text{elemento1})^{(\text{elemento2})} / (\text{elemento2})!$$

para la función álea.

Este simbolo æ(,) está compuesto por las vocales unidas A y E, como recordando alea, y simboliza al operador álea; antes de la coma que está dentro del paréntesis va el operando y después de ella, el número al que hay que potenciar al operando y, entre cuyo factorial hay que dividir ese resultado. Para e definido en áleas, resulta

$$e = \sum_{0}^{\infty} æ(1,\ 1)$$

ya que es válido poner $1/x! = 1^x/x!$, para x positivo.

Para el caso específico de álea como número combinatorio he escogido $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ a fin de diferenciarlo de $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Aunque en esta tesis no las tratamos, x podría ser a su vez cualquier función, digamos, $t^2 / 2$ y así el álea correspondiente se escribiría así:

$$z = ((t^2/2)^y / y! = æ\ (t^2/\ 2,\ y)$$

o ésta otra

$$y = D^i/i! = æ\ (D,\ i)$$

D es el operador de derivación.

La ecuación de Euler $e^{\pi i} - 1 = 0$ produce una hermosa álea:

$$= \sum æ(\pi i, k) - 1 = 0$$

i es $\sqrt{-1}$ y k es la variable formal que va de cero a infinito.

Otro ejemplo. $(a + ib)^{c+id} = æ\ \{\ a+ib,\ c+id\ \}$, donde i es el número imaginario.

D).- REPRESENTACION GEOMETRICA

René Descartes en su opúsculo, pequeño por el tamaño, valga la redundancia; pero enciclopedia por su alcance, que tituló "Reglas para la Dirección del Espíritu", además de asentar las normas a seguir en toda investigación científica, aseveró que todo ente conceptual debería de ir acompañado de su respectiva representación geométrica, así como el álgebra y la geometría (Regla XIV).

Analicemos al numerador primero y después al denominador de la función álea; pero no sin antes precisar conceptos. Para mi gusto la designación de las operaciones aritméticas por su vocablo etimológico es más descriptiva; así: adición en vez de suma toda vez que sumar vale tanto como tomar; en cambio adición describe perfectamente la operación de añadir o poner al lado de, que es lo que en realidad hace la operación de ADICION: el crecimiento es en forma de línea. En lo relativo a la resta el término SUSTRACCION es más descriptivo.

La multiplicación queda mejor descrita por la REPRODUCCION y la división, si lo está.

En estos términos, refiriéndonos a álea, el numerador es una potenciación o equirreproducción, dado que la base reprodúcese n veces su igual tamaño, y producto, cuando los elementos son diferentes.

La reproducción del denominador es diferente; la n-ésima reproducción será el resultado de reproducir n veces el n-1 saldo. El denominador, recordamos, es el factorial. El cociente de lo anterior vendrá dado por el número de veces que el factorial, o hiperplano exponencial, está comprendido en el hiperplano regular del denominador.

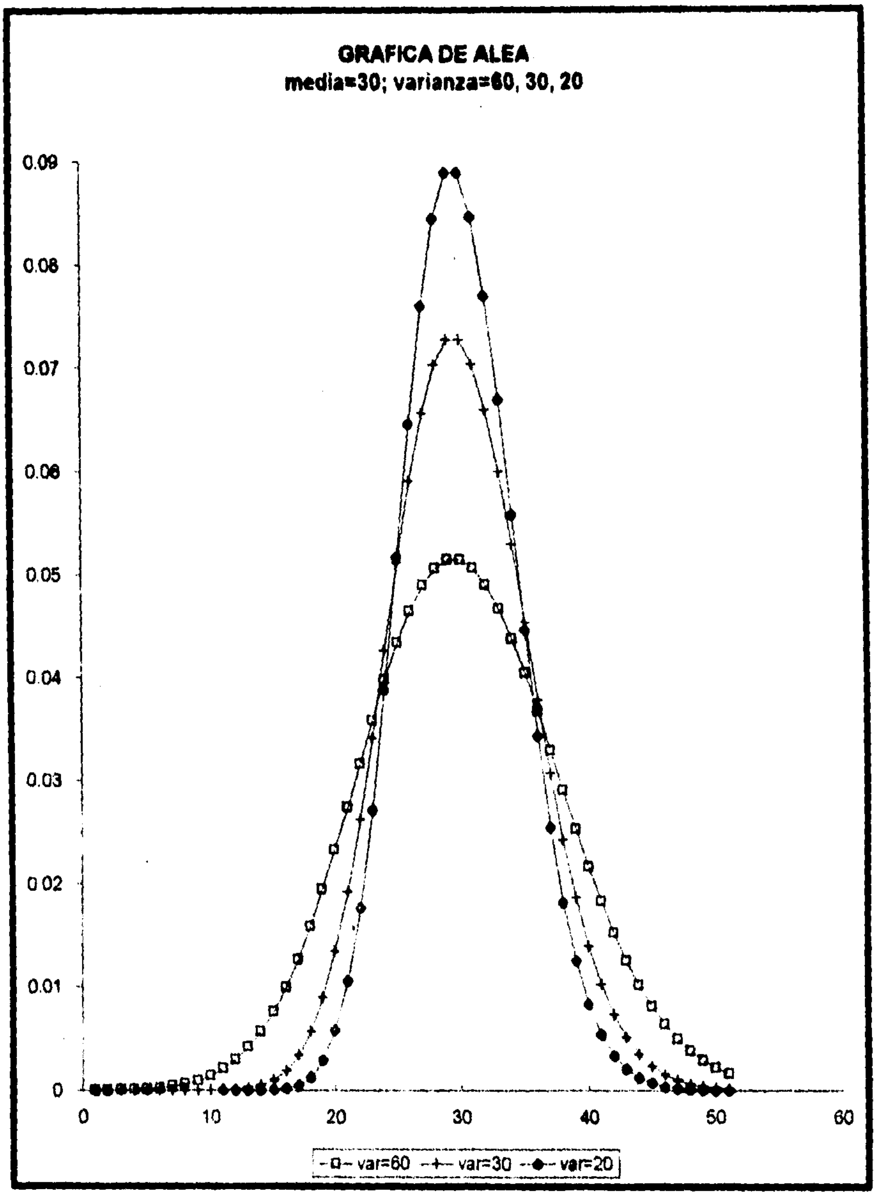
Sea nuestra álea:

$$y = p^x / x! = æ(p, x)$$

Una inspección cuidadosa de la gráfica nos sugiere de inmediato, es la gráfica de p^x en R^+ (las x parten de cero y tienden a infinito), que es parabólica creciente monótona; así mismo, la gráfica de los factoriales conserva la misma tendencia parabólica; pero con crecimiento más brusco. El cociente de ambas funciones, la potencial entre la factorial, aparece en la siguiente página: **es la gráfica de álea, $v^y/y!$**; con v = 20, 30, 60; μ = 30; y = $(x-\mu+v)$; x = 1,2... Con el propósito de que en una sola página tengan cabida las gráficas de álea, y así tener un perfil de ella, hemos dividido entre e^v.

VALORES DE LA FUNCION ALEA Y SUS DIFERENCIAS FINITAS

X	X!	ALEA 60	ALEA 30	ALEA 20	30^X / X!	1A DERIV	2A DERIV	3A. DERIV	4A DERIV
1	1	1.413E-05	2.807E-12						
2	2	2.648E-05	4.211E-11						
3	6	4.815E-05	4.211E-10						
4	24	8.498E-05	3.158E-09						
5	120	0.0001457	1.895E-08						
6	720	0.0002428	9.475E-08						
7	5040	0.0003937	4.061E-07						
8	40320	0.0006217	1.523E-06						
9	362880	0.0009564	5.076E-06						
10	3628800	0.0014346	1.523E-05						
11	39916800	0.0020994	4.153E-05	4.122E-08	20	20	20	20	20
12	479001600	0.0029992	0.0001038	4.122E-07	200	180	160	140	120
13	6.227E+09	0.0041849	0.0002396	2.748E-06	1333.3333	1133.3333	953.33333	793.33333	653.33333
14	8.718E+10	0.0057067	0.0005134	1.374E-05	6666.6667	5333.3333	4200	3246.6667	2453.3333
15	1.308E+12	0.007609	0.0010268	5.496E-05	26666.667	20000	14666.667	10466.667	7220
16	2.092E+13	0.0099247	0.0019252	0.0001832	88888.889	62222.222	42222.222	27555.556	17088.889
17	3.557E+14	0.0126699	0.0033975	0.0005235	253968.25	165079.37	102857.14	60634.921	33079.365
18	6.402E+15	0.0158373	0.0056625	0.0013087	634920.63	380952.38	215873.02	113015.87	52380.952
19	1.216E+17	0.0193927	0.0089408	0.0029082	1410934.7	776014.11	395061.73	179188.71	66172.84
20	2.433E+18	0.0212712	0.0134112	0.0058163	2821869.5	1410934.7	634920.63	239858.91	60670.194
21	5.109E+19	0.0273779	0.0191588	0.0105751	5130671.8	2308802.3	897867.56	262946.93	23088.023
22	1.124E+21	0.0315899	0.0261256	0.0176252	8551119.7	3420447.9	1111645.6	213777.99	-49169.94
23	2.585E+22	0.0357621	0.0340769	0.0271156	13155569	4604449	1184001.2	72355.629	-141422.4
24	6.204E+23	0.0397357	0.0425961	0.0387366	18793670	5638100.9	1033651.8	-150349.4	-222705
25	1.551E+25	0.043348	0.0511153	0.0516489	25058226	6264556.5	626455.65	-407196.2	-256846.8
26	4.033E+26	0.0464443	0.0589792	0.0645611	31322783	6264556.5	-3.73E-09	-626455.7	-219259.5
27	1.089E+28	0.0488887	0.0655325	0.0759542	36850333	5527549.9	-737006.7	-737006.7	-110551
28	3.049E+29	0.0505745	0.0702134	0.0843936	40944814	4094481.4	-1433068	-696061.8	40944.614
29	8.842E+30	0.0514317	0.0726345	0.0888353	43099804	2154990.2	-1339491	-500422.7	189639.14
30	2.653E+32	0.0514317	0.0726345	0.0888353	43099804	0	-2154990	-215499	290923.68
31	8.223E+33	0.0505886	0.0702915	0.0846051	41047432	-2052372	-2052372	102618.58	318117.6
32	2.631E+35	0.0489567	0.0658983	0.0769137	37315848	-3731585	-1679213	373153.48	270539.9
33	8.683E+36	0.0466254	0.0599075	0.0668815	32448563	-4867284	-1135700	543513.43	170354.96
34	2.952E+38	0.0437112	0.0528596	0.0557346	27040469	-5408094	-540809.4	594890.33	51376.892
35	1.033E+40	0.0403489	0.0453082	0.0445876	21632375	-5408094	-3.73E-09	540809.39	-54080.94
36	3.72E+41	0.0366809	0.0377568	0.0342982	16640289	-4992087	416007.22	416007.22	-124802.2
37	1.376E+43	0.0328485	0.0306136	0.0254061	12326140	-4314149	677937.69	261930.47	-154076.7
38	5.23E+44	0.028984	0.0241687	0.0181472	8804385.6	-3521754	792394.71	114457.01	-147473.5
39	2.04E+46	0.0252035	0.0185913	0.0125153	6071990.1	-2732396	789358.71	-3035.995	-117493
40	8.159E+47	0.021603	0.0139435	0.0083435	4047993.4	-2023997	708398.84	-80959.87	-77923.87
41	3.345E+49	0.018256	0.0102025	0.0053829	2611608.6	-1436385	587611.94	-120786.9	-39827.03
42	1.405E+51	0.0152134	0.0072875	0.0033643	1632255.4	-979353.2	457031.51	-130580.4	-9793.532
43	6.042E+52	0.0125041	0.0050843	0.002039	989245.7	-643009.7	336343.54	-120688	9892.457
44	2.658E+54	0.0101365	0.0034666	0.0011994	581909.23	-407336.5	235673.24	-100670.3	20017.676
45	1.196E+56	0.0081108	0.0023111	0.0006854	332519.56	-249389.7	157946.79	-77726.45	22943.85
46	5.503E+57	0.0064033	0.0015072	0.0003808	184733.09	-147786.5	101603.2	-56343.59	21382.855
47	2.586E+59	0.0049835	0.000962	0.0002058	99855.724	-84877.37	62909.106	-38694.09	17649.499
48	1.241E+61	0.0038381	0.0006013	0.0001083	52555.644	-47300.06	37577.266	-25331.82	13362.273
49	6.083E+62	0.002915	0.0003631	5.555E-05	26951.613	-25604.03	21696.048	-15881.24	9450.5029
50	3.041E+64	0.0021863	0.0002209	2.778E-05	13475.806	-13475.81	12128.226	-9567.822	6313.4152
51	1.551E+66	0.0016195	0.0001299	1.355E-05	6573.564	-6902.242	6573.564	-5554.663	4013.1608
52	8.066E+67	0.001185	7.496E-05	6.452E-06	3130.2686	-3443.295	3453.9468	-3114.617	2440.0444
53	4.275E+69	0.0008566	4.243E-05	3.001E-06	1455.9389	-1674.33	1768.9657	-1689.981	1424.6362
54	2.308E+71	0.0006119	2.357E-05	1.364E-06	661.7904	-794.1485	860.16123	-838.7845	801.19655
55	1.27E+73	0.0004313	1.286E-05	6.062E-07	294.12907	-367.6613	426.48715	-453.6941	435.03042
56	7.11E+74	0.0003013	6.880E-06	2.636E-07	127.8822	-166.2469	201.41447	-225.0727	228.62141
57	4.053E+76	0.0002078	3.625E-06	1.122E-07	54.417959	-73.46424	92.783619	-108.6318	116.14083
58	2.351E+78	0.0001417	1.875E-06	4.673E-08	22.674149	-31.74381	41.728435	-51.06218	57.569665
59	1.387E+80	9.552E-05	9.534E-07	1.908E-08	9.2547544	-13.41939	18.224415	-23.39602	27.666164
60	8.321E+81	6.366E-05	4.767E-07	7.63E-09	3.7019013	-5.552853	7.8665416	-10.45787	12.936147
61	5.076E+83	4.199E-05	2.345E-07	2.992E-09	1.4517263	-2.250176	3.3026272	-4.563864	5.8940036
62	3.147E+85	2.738E-05	1.134E-07	1.151E-09	0.5583563	-0.89337	1.3569057	-1.945872	2.6179929
61	1.983E+87	1.767E-05	5.402E-08	4.343E-10	0.2107005	-0.347656	0.5457142	-0.811091	1.1347801


GRAFICA DE ALEA
media=30; varianza=60, 30, 20
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
10
20
30
40
50
60
var=60
var=30
var=20

Al graficar la función exponencial y por separado la función factorial, sabemos que en ambos casos, las dos son crecientes. Lo interesante es que el cociente es creciente siempre hasta antes de ser iguales en el punto medio, la base, el exponente y el número cuyo factorial es, que es donde adquiere su máximo valor, y de ahí en adelante comienza a decrecer.

Si por ejemplo, observamos æ(p,5) vemos que el centro de esta función es 5.

a).-De 1 á 4 nuestra función se comporta así: creciente.

b).-En el punto 5, vale $5^5/5!$ y es el punto de máximo valor, y

c).-De 6 á 9 la función álea es decreciente.

Podemos observar varias **propiedades** interesantísimas **en la sucesión de Aleas**, a saber:

Sean la sucesión de áleas $\left\{\frac{p^x}{x!}\right\}$, donde p es **parámetro** y x **es** igual á 0, 1, 2,...y la primera diferencia de la sucesión, Δ_x.

$$\Delta_x = \frac{p^x}{x!}\left(\frac{p}{x+1} - 1\right)$$

1.- Cuando p < x, la sucesión crece.

2.- Cuando p = x, la sucesión tiene el valor máximo.

3.- Cuando p > x, la sucesión decrece.

4.- Los puntos de inflexión se localizan en:

a).-Cuando p < x y ocurre por primera vez $\Delta_x < \Delta_{x-1}$

b).-Cuando p > x y ocurre por primera vez $\Delta_x > \Delta_{x-1}$

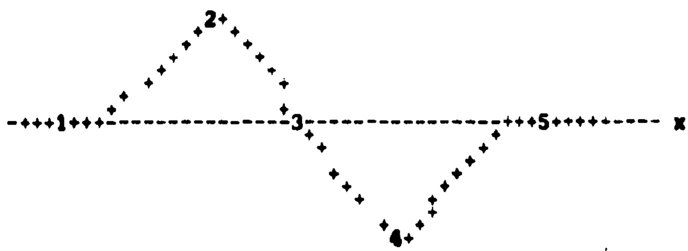
5.- Las asíntotas respecto al eje de las abscisas son dos

a).-Cuando p < x

b).-Cuando p > x

Lo anterior es válido para toda p > 0 y para toda x positiva.

Todas estas propiedades se muestran abajo en la gráfica de la primera diferencia de álea. Valores de álea: máximo, 3; puntos de inflexión: 2, 4; asíntotas: 1, 5.



Vale la pena observar con detenimiento las gráficas de la sucesión álea:

TODAS TIENEN FORMA CAMPANOIDE

Es una ley. Podemos decir que la forma campanoide de álea es una **invariante** propia de nuestra función. La sucesión

$$\left\{ p^{i} \;/\; i! \right\}$$

con i de cero a infinito, es el conjunto de áleas que dan a la función CAMPANOIDE su forma característica.

Hay que aclarar que estas características todas, forma campanoide, amplitud de la base y curtosis, son propias de la función ALEA en R^{+}.

Este comportamiento es debido al crecimiento propio de las funciones que componen la función álea, cuando n tiende a infinito:

la función n! crece **más** rápido que la p^{x};

a su vez

la función n^{n} crece **más** rápido que n!.

En razón de la velocidad de sus crecimientos:

$$p^{x} < n! < n^{n}$$

por aquello de que el producto es máximo cuando los factores son iguales: n^{n}.

De esta manera, $1/\Sigma\ (t!/t^{t}) = 2.8798539\ldots$ que es el área del recíproco de las ordenadas máximas de las campanoides de cualquier amplitud.

C A P I T U L O II

ALEA EN LAS MATEMATICAS DETERMINISTICAS

A fin de irnos familiarizando con el significado y notación de álea, en lo que sigue haremos una incursión por algunos lugares de las matemáticas determinísticas en que nuestra función aparece, con el objetivo de mostrar de paso, que a causa de álea, algunas funciones determinísticas compartan con las probabilísticas el rasgo aleatorio; sin embargo, para seguir un cierto orden lo haremos de menos a más según el grado de dificultad.

ARITMETICA Y ALGEBRA:

La función álea del número 5 se denota así: $5^1/1! = \text{æ}\,(5,1)$

La función álea de la función x^3 es:

$$x^3 \,/\, 3! = \text{æ}\,(x,3)$$

La representación del número e es la siguiente haciendo uso de la notación álea:

$$e^1 = \sum (1^i \,/\, i!) = \Sigma\, \text{æ}(1,i)$$

con i de cero a infinito.

$$e^1 = 1 + 1^1/1 + 1^2/1/2 + 1^3/1/2/3 + 1^4/1/2/3/4 + \dots$$

se obtiene como la suma de las particiones obtenidas con los números naturales que se pueden hacer a un todo (unidad). Si en lugar de los números naturales, en cada etapa dividimos entre dos, estaremos siguiendo un proceso binomial: $1 + 1/2 + 1/2/2 + 1/2/2/2 + 1/2/2/2/2 + \dots = 2$

Si en vez de particionar a la unidad lo hacemos con el valor **p** se obtiene el valor de e^p

$$e^p = \Sigma\, p^i/i! = \sum \text{æ}\,(p,\, i)$$

con i de cero a infinito.

$$e^p = p^0/0! + p^1/1! + p^2/2! + p^3/3! + \dots$$

$$e^p = p^0/0! + p^1/1 + p^2/1/2 + p^3/1/2/3 + p^4/1/2/3/4 + \dots$$

y cada término de esta sucesión es igual a sendos

$$p^0/0!,\ p^1/1!,\ p^2/2!,\ \ldots,\ p^i/i!,\ \ldots,\ p^n/n!$$

y cada término es una álea: $p^i/i! = \text{æ}(p,\ i)$

Tenemos que

$$\text{Ln } x = \sum (-1)^{\nu+1}\ x^{\nu}/\nu = \sum (-1)^{\nu+1}\ (x^{\nu}/\nu!)\ (\nu-1)!$$
$$= \sum (-1)^{\nu+1}\ \text{æ}(x,\ \nu) * (\nu-1)!$$

TRIGONOMETRIA:

Las funciones trigonométricas se pueden obtener como desarrollo de series de áleas.

La fórmula de Euler en el dominio complejo nos dice:

$$e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$$
$$= \sum \text{æ}\ (ix,k) = \cos x + i \text{ sen } x$$

donde $i = (-1)^{1/2}$ y el barrido de la suma es sobre k de 0 á infinito.

$$e^{ix} = \sum (ix)^k/k! = \sum \text{æ}(ix,k)$$

es claro que cuando k es par todo la álea es positiva y cuando k es impar es negativa. Cuando es par i se convierte en 1 y cuando impar permanece i. Luego entonces

$$e^{ix} = \sum \text{æ}\ (x,k) + i \sum \text{æ}\ (x,j)$$
$$= \cos x + i \text{ sen } x$$

k va de 0 á infinito y j va de 1 á infinito.

$$\text{sen } z = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{z^{2r-1}}{(2r-1)!}$$

$$\cos z = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{z^{2r-2}}{(2r-2)!}$$

por ende en nuestra notación

$$\text{sen } z = \sum (-1)^{r-1}\ \text{æ}(z,2r-1)$$
$$\cos z = \sum (-1)^{r-1}\ \text{æ}(z,2r-2)$$

con el barrido de los índices bajo la sumatoria en los correspondientes de arriba. El seno x es la suma de las áleas impares y el complemento a uno, el cos x, dado que este último es la suma de las áleas pares.

Estas son las áleas para las funciones hiperbólicas:

$$\operatorname{senh} x = \sum \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum æ(x, 2n-1)$$

$$\cosh x = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum æ(x, 2n)$$

La ecuación de Euler $e^{i\pi} = -1$, nos proporciona el valor de π, en la siguiente forma. Tomando logaritmos naturales y despejando π.

$$\pi = (\log_e(-1)) / i$$

con $i = (-1)^{1/2}$, o también: $\pi = \lim (1/n)\left[n!^4 \left(\frac{2^{2n}}{(2n)!}\right)^2\right]$ cuando n tiende a infinito; y en álea:

$$\pi = \lim (1/n)(n!^4\, æ(2,\ 2n)^2).$$

CALCULO Y ANALISIS:

Existe una analogía sorprendente entre los análisis discreto y continuo. No es extraño que Newton y Leibnitz, descubridores del Cálculo diferencial e integral, antes dejaran grandes escritos de Análisis numérico.

Newton y sus discípulos Taylor y Mclaurin nos legaron sendas series para desarrollar funciones; el primero, Newton y Leibniz simultánea y separadamente, las bases del Cálculo Diferencial e Integral, además. Leibniz y los Bernoulli y los Lagrange y los Euler y los Cauchy, todos discípulos de Leibniz , formaron la escuela que desarrolló, con Gauss y Abel y Weierstrasse, el Análisis Matemático tal como hasta nuestros días lo conocemos. En este contexto sería injusto no mencionar a Paul Dirac por su función δ. Además hay que resaltar que Leonhard Euler también incursionó en asuntos actuariales, como lo demuestran sus dos escritos: "Cálculos sobre Probabilidades de Vida" y "Investigaciones generales sobre la mortalidad y crecimiento de la raza humana".

A álea en el Cálculo Diferencial e Integral, es lo que en seguida veremos. Se pretende mostrar la analogía entre $x^n/n!$ y $D^n/n!$. Comenzaremos por derivar a álea con respecto a **x** y ver que esta derivada es la que da a la derivada del número **e** la relación $f = f' = f'' = \ldots = f^{(n)}$.

Sea $f(x, n) = x^n/n!$

A)_ Las derivadas de f con respecto a **x** (digamos, para cualesquier amplitud o varianza de la campana) son:

$$Df_x = f^{(1)}_{(x)} = n\, x^{n-1}/n! = x^{n-1}/(n-1)! = æ(x, n-1)$$

$$D^2f_x = f^{(2)}_{(x)} = n(n-1)x^{n-2} / n! = x^{n-2}/(n-2)! = æ(x, n-2)$$

$$D^3f_x = f^{(3)}_{(x)} = (n-2)\, x^{n-3} / (n-2)! = x^{n-3}/(n-3)! = æ(x, n-3)$$

y en general

$$D^kf_x = f^{(k)}_{(x)}(x^n/n!) = x^{n-k}/(n-k)! = æ(x, n-k)$$

La suma de estas derivadas, cuando n tiende a infinito, es igual a la suma de las áleas y de ahí que $e^x = De^x = D^2e^x = D^ne^x$. **La gráfica de estas derivadas es la misma de álea.**

Ahora en el cálculo **integral, similarmente** al desarrollo en el **párrafo anterior, se puede** por inducción llegar **a** un **resultado congruente, y sin pérdida de generalidad**

$$\int(x^n n!)dx = = (1/n!)\, x^{n+1}/(n+1) = x^{n+1}/(n+1)! = æ(x, n+1)$$

$$\iint(x^n/n!)dx\, dx = (1/n!)\, x^{n+2}/ (n+2) = x^{n+2}/(n+2)! = æ(x, n+2)$$

y en **general**

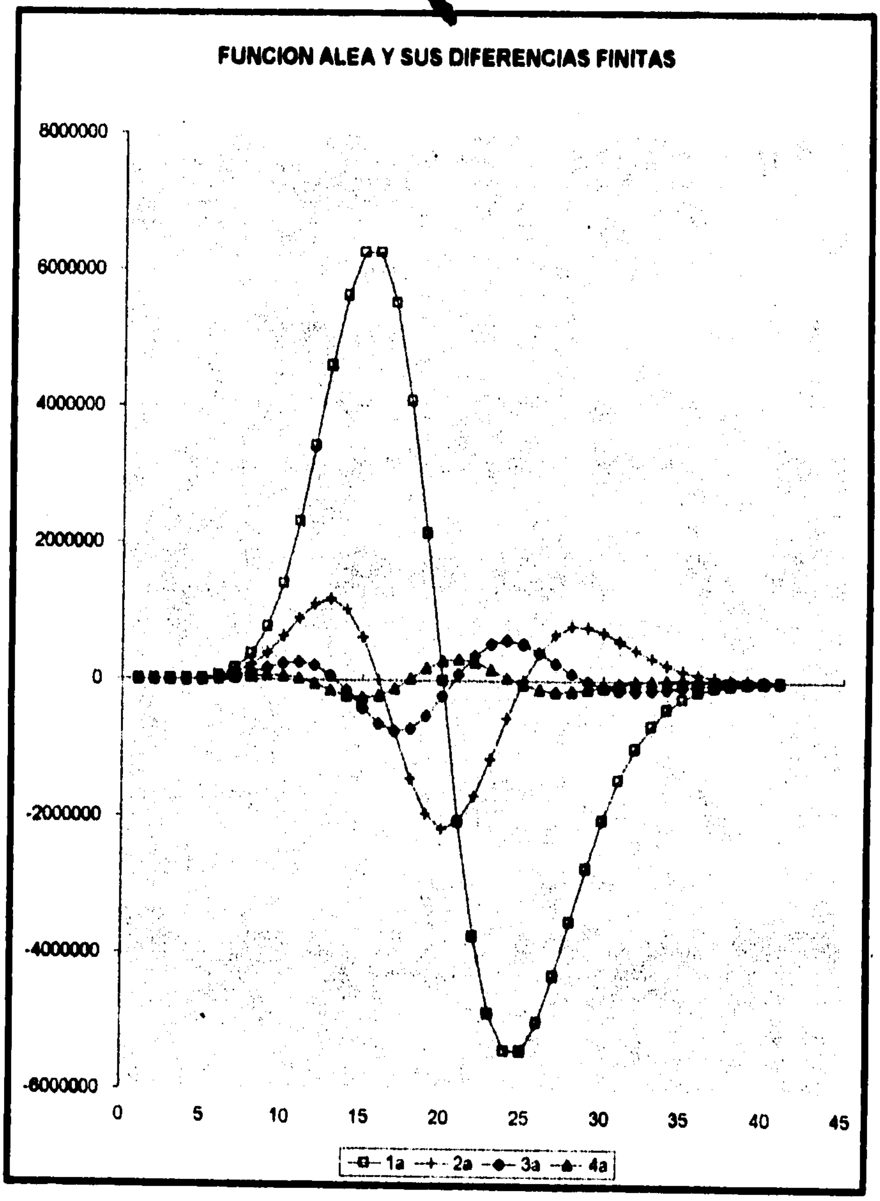
$$\iint\ldots k\ldots\int(x^n/n!)dx\, dx \ldots k\ldots dx = x^{n+k}/(n+k)! = æ(x, n+k)$$

de las fórmulas anteriores podemos deducir que la derivada de orden k de álea respecto a x es una álea de orden n-k, **i.e., la álea inmediata** anterior **para el caso k=1,** y **así...; de igual manera,** la **k-ésima integral de álea es una álea de orden n+k; esta propiedad de las integrales de álea, parece insinuar un procedimiento para resolver integrales múltiples y ecuaciones integrales, así como la de las derivadas de álea, ecuaciones diferenciales y en diferencias.**

B).- Las **diferencias finitas de álea respecto á n** son:

$$\Delta_n^k\,(x^n/n!) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \frac{x^{n+k-i}}{(n+k-i)!}$$

El comportamiento de estas **diferencias finitas**, cuya gráfica en la siguiente página puede analizarse, resulta muy interesante; son oscilaciones simétricas arriba y abajo del eje **x**; para n grande, las oscilaciones se estabilizan en frecuencia y amplitud. Sugieren estar formadas por sucesiones de seno y coseno en un medio atómico.


FUNCION ALEA Y SUS DIFERENCIAS FINITAS
8000000
6000000
4000000
2000000
0
-2000000
-4000000
-6000000
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
1a
2a
3a
4a

A fin de investigar el papel de álea en la función Derivada e Integral, por medio del Cálculo de Diferencias Finitas primero veremos el procedimiento de Newton y después el de Cauchy para derivar e integrar (parecido al Método de Arquímedes); este último, conocido en el Cálculo de Variable Compleja como Fórmulas Integrales de Cauchy.

En este lugar, al margen, voy a hacer un comentario. **El cálculo de Diferencias Finitas** es la gran laguna entre el Algebra y el Cálculo, en la formación escolar. Después de pasar de la aritmética al álgebra a través de las razones y proporciones, de estudiar más que las funciones trigonométricas en su etiología, a sus tablas, a éste momento, se estudia la Geometría Analítica que es como un gran diccionario del Algebra; y de golpe, ya se encuentra el alumno derivando funciones después de tres clases solamente para estudiar Incrementos y Limites. No sólo cuesta trabajo seguir a los maestros en este recetario sino que los alumnos menos seguros de sus anteriores conocimientos matemáticos desertan de la materia. Estoy seguro que dedicar un semestre completo a las diferencias finitas haría que la enseñanza del cálculo Diferencial no sea una colección de recetas y de esta manera, al eliminar esta laguna, el estudio del Cálculo tendría una concatenación lógica con lo anteriormente aprendido desde la primaria.

Una tabla de diferencias finitas nos lleva de la mano del álgebra al cálculo diferencial. Es por éso que si sabemos lo que es la primera diferencia, la segunda diferencia, la tercera diferencia, la n-ésima diferencia de una función cualquiera y el tamaño del intervalo que separa a cada diferencia y sabemos también lo que significa el cociente "diferencia entre intervalo" por analogia en el limite, sabremos lo que es la primera derivada, la segunda derivada, la tercera derivada, la n-ésima derivada y por contraposición, una sumatoria, dos sumatorias, n-sumatorias y correlativamente una integral, doble integral, triple integral, diferencias divididas y derivadas parciales, ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales y así como $\int \ldots dx$ siempre van juntos, de la misma manera, sin haber ningún motivo de comodidad para suponer a $\Delta x = 1$, entonces también deberían ir juntos $\sum \ldots \Delta x$

Veamos cómo se construyen las áleas para diferencias finitas y para las derivadas, para lo que, comenzaremos por construir una tabla de diferencias finitas "ordinarias" o equiespaciadas y después una tabla de diferencias "divididas". Nos vamos a detener un poco en este asunto, dado que las áleas están en forma natural en el origen de las derivadas.

La tabla siguiente de diferencias finitas sea un ejemplo de **diferencias ordinarias.**

k	x	y = f(x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	3	6				
			18			
1	5	24		16		
			34		0	
2	7	58		16		0
			50		0	
3	9	108		16		
			66			
4	11	174				

El intervalo del argumento es $h = 2$.

Δy es la primera diferencia: 18 = 24-6, 34 = 58-24, etc.

$\Delta^2 y$ es la segunda diferencia y es: 16 = 43-18, 16 = 50-34, etc.

Por medio de esa tabla de diferencias que hemos calculado calcularemos, vgr., f(9) = 108 en función de las diferencias principales: 6, 18 y 16 basándonos en la fórmula de Newton, para argumentos equiespaciados:

$$y_k = \sum \frac{\Delta^i y_0}{i!\, h^i} (x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{i-1})$$

Así

$$f(9) = 108 = 6 + (18/2)(9-3) + (16/(2^2\ 2!))(9-3)(9-5)$$

No olvidemos este procedimiento.

Es importante anotar que el intervalo entre los valores de la variable independiente es constante: 2. Las diferencias ordinarias son un caso particular de las diferencias divididas; éstas se definen como el cociente de la diferencia, de la función o de otra diferencia, dividida entre el intervalo que cubren, diferencia de x. La que sigue es una **tabla de diferencias divididas.**

x	f(x)	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$
2	10				
		43			
4	96		19		
		100		2	
5	196		27		0
		154		2	
6	350		35		0
		259		2	
8	868		45		
		439			
10	1746				

En la columna tres aparecen las primeras diferencias, en la cuatro, las segundas, etc.

Pasos para determinar cualquier diferencia, por ejemplo, 35 de la cuarta columna:

1.- NUMERADOR. Se restan los dos valores adjuntos al lugar de la diferencia que se va a calcular: 259 - 154 ó 154 - 259 = 105 ó -105.

2.- DENOMINADOR. A partir del valor a calcular, se localizan dos diagonales, siguiendo la posición de las diferencias ya calculadas, que apuntan y terminan en la columna de f(x); a cada una (dos) de las f(x) corresponde una x; se restan las x: (8 - 5) ó (5 - 8)

3.- DIFERENCIA DIVIDIDA. Se divide el paso 1 entre el paso 2, conservando el orden elegido. (259-154)/(8-5) ó (154-259)/(5-8); el cociente vale 35.

Pongamos en símbolos la tabla anterior.

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f(x_0, x_1) & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f(x_0,x_1,x_2) & & \\
 & & f(x_1,x_2) & & f(x_0,x_1,x_2,x_3) & \\
x_2 & f(x_2) & & f(x_1,x_2,x_3) & & f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) \\
 & & f(x_2,x_3) & & f(x_1,x_2,x_3,x_4) & \\
x_3 & f(x_3) & & f(x_2,x_3,x_4) & & \\
 & & f(x_3,x_4) & & & \\
x_4 & f(x_4) & & & &
\end{array}
$$

Calculemos, por ejemplo

$$f(x_0,x_1,x_2) = (\ f(x_1,x_2) - f(x_0,x_1)\ )\ /\ (x_2 - x_0)$$

Esta es la fórmula de Newton para calcular f(x), observando el parangón con la fórmula de Taylor, y sin olvidar cómo obtuvimos f(x) en el ejemplo numérico de diferencias ordinarias. Vamos a recalcular f(8) = 868.

$$868 = 350 + 259\ (8-6)$$

pero

$$259 = 154 + 35\ (8-5)$$

pero

$$35 = 27 + 2\ (8-4)$$

o sea,

$$868 = 350 + (8-6)\left[\ 154 + (8-5)\left[\ 27 + 2(8-4)\right]\right]$$

desarrollando queda

$$868 = 154(8-6) + 27(8-6)(8-5) + 2(8-6)(8-5)(8-4)$$

basados en la siguiente fórmula:

$$f(x) = f(x_0) \quad + (x-x_0)f(x_0,x_1) \quad + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+$$
$$+\ldots+ (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n) + R$$

R es el residuo; donde

Diferencia Dividida de Orden n = Diferencia Ordinaria de Orden n / n!

Suponemos equivocadamente que se llaman Ordinarias, porque son las de uso común; pero no es tal; sino porque sus argumentos guardan un orden.

Aquí podemos resumir que para calcular el valor de la función en un punto x se usa el mismo algoritmo, con la salvedad de que de acuerdo a cómo hayamos calculado la tabla de las diferencias deberemos tomar la diferencia dividida o, la diferencia ordinaria dividida entre el factorial de su ordinal. Esta es la álea de las Derivadas.

Existen tres propiedades interesantísimas de las diferencias divididas, a saber:

I.- Son SIMETRICAS. De la tabla: $f(x_0,x_1) = f(x_1,x_0)$

$$f(x_0,x_1,x_2) = f(x_1,x_0,x_2) = f(x_2,x_0,x_1)$$

II.-EL GRADO DE LAS DIFERENCIAS ES DECRECIENTE. Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, la primera diferencia será de grado n-1; la segunda, de grado n-2; la n-1, será una constante y finalmente, la n-ésima diferencia será cero.

III.- LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS PUEDEN PONERSE EN TERMINOS DE LAS PRIMERAS DIFERENCIAS. Recordemos ésto para las Integrales de Cauchy.

Por ejemplo:

la primera diferencia dividida es

$$f(x_0,\ x_1) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)}\ ;$$

la segunda diferencia dividida es

$f(x_0,x_1,x_2) =$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\ ;$$

Calculemos la segunda diferencia dividida que en la tabla vale 27, por este procedimiento.

$$27 = 350\ /\ (6-5)(6-4)\ +\ 196\ /\ (5-4)(5-6)\ +\ 96\ /\ (4-5)(4-6)$$

y esta otra, tercera diferencia dividida, en la tabla, el primer 2.

$$2 = 350\ /\ (6-2)(6-4)(6-5)\ +\ 196\ /\ (5-2)(5-4)(5-6)\ +$$
$$+\ 96\ /\ (4-2)(4-5)(4-6)\ +\ 10\ /\ (2-4)(2-5)(2-6)$$

Después de este aparato introductorio veamos el papel de las **áleas en las Diferencias Finitas y en las Derivadas.**

Sabemos que: si f está definida en un intervalo abierto (a,b), entonces para dos puntos distintos x y x_0 en (a,b) podemos formar la diferencia dividida $(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0)$. Fijemos x_0 y estudiemos este comportamiento de la diferencia dividida cuando x toma valores arbitrariamente cercanos a x_0. Entonces para cualquier x_0 existe el límite, cuando x tiende a cero, de la anterior diferencia dividida y es la derivada de f en el punto x_0: $f'(x_0)$

Por el inciso I.- (SIMETRIA) La primera diferencia dividida se forma de una solo modo: 1!; a la segunda diferencia se puede llegar de dos modos, i.e., tiene dos denominadores permutables: 2!; la tercera diferencia tiene tres denominadores permutables: 3!, y así sucesívamente. **Así hemos hallado la relación entre las Diferencias Finitas Divididas y las Derivadas.**

$$f(x,x_0) = f^{(1)}(x) / 1!$$
$$f(x,x_0,x_1) = f^{(2)}(x) / 2!$$
$$\cdots$$
$$f(x,x_0, \ldots ,x_{i-1}) = f^{(i)}(\xi) / i!$$

por tanto

$$f(x,x_0, \ldots , x_{i-1}) = æ (f^{()}, i)$$

y también

$$f^{(i)}(\xi) = \frac{f(x,x_0,x_1, \ldots, x_{i-1})}{i!}$$

y podemos deducir que la permutación de los intervalos, denominador de las diferencias finitas divididas (las ordinarias son un caso particular de éstas) **es la que dá origen a las áleas de las derivadas.**

Ahora pasemos a la **Serie de Taylor**. Con la notación del último cuadro y recordando la forma en que numéricamente reprodujimos f(9),

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f(x,x_0)$$

pero

$$f(x,x_0) = f(x_0,x_1) + (x-x_1)\ f(x,x_0,x_1)$$

pero

$$f(x,x_0,x_1) = f(x_0,x_1,x_2) + (x-x_2)\ f(x,x_0,x_1,x_2)$$

y así en forma recurrente.

Por definición

$$f(x,x_0) = (f(x) - f(x_0)) / (x-x_0)$$

$$f(x,x_0,x_1) = (\ f(x,x_0) - f(x_0,x_1)\ ) / (x - x_1)$$

$$f(x,x_0,x_1,x_2) = (f(x,x_0,x_1) - f(x_0,x_1,x_2))/(x-x_2)$$

La serie de Taylor para calcular f(x), a partir de **a** (**a** < **x** y cercano a él) por medio de sus "diferencias divididas", es

$$f(x) = \left\{f^{(0)}(a)/0!\right\}(x-a)^0 + \left\{f^{(1)}(a)/1!\right\}(x-a)^1 + \left\{f^{(2)}(a)/2!\right\}(x-a)^2 + $$

$$+\ldots+ \left\{f^{(n)}(a)\ /\ n!\right\}(x-a)^n + R_n$$

Los términos entre corchetes son las "diferencias divididas" en función de derivadas. En este lugar es conveniente recordar que el procedimiento para determinar un valor de f(x) siguiendo la tabla de diferencias, divididas u ordinarias, según vimos en los ejemplos, es la fórmula de Taylor con las diferencias divididas en función de las derivadas. Puesto en detalle y usando D = d/dx

$$f(x) = f(a) + \frac{D(a)\ *\ (x-a)}{1} + \frac{D(a)\ \ D(a)\ *\ (x-a)(x-a)}{1\ *\ 2} +$$

$$+ \frac{D(a)\ D(a)\ D(a)\ \ (x-a)(x-a)(x-a)}{1\quad 2\quad 3} + \ldots$$

que significa que cada vez que hacemos una aplicación de D, al resultado debemos multiplicarlo por (x-a). La razón es la siguiente: la tg α es igual a cateto opuesto entre cateto adyacente; en este caso el cateto adyacente vale x-a y el opuesto, inicialmente, f(a); por aproximaciones sucesivas se llega al cateto opuesto f(x).

$$tg\ \alpha = opuesto\ /\ adyacente = derivada$$

por ende

cateto opuesto = tg α * adyacente = derivada * adyacente

$$\text{opuesto}_i = D^{(i)} * (x-a)^i/i!$$

Vamos a relacionar ésto con la **PRIMERA FORMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY.** Tanto las fórmulas de las Integrales como las de las Desigualdades de Cauchy provienen del TEOREMA de la Integral de Cauchy.

$$\int f(z)\, dz = 0$$

Sea f(z) una función analítica en un dominio que incluye al punto z = a y, C sea, un círculo con centro en a tal que f(z) no tiene singularidad en y dentro de él. O sea, C está dentro de D.

$$f(z_0) = (1/2\pi i)\int (f(z)dz) \,/\, (z-a)$$

Si z_0 = a + h es un punto dentro de C entonces

$$f(a + h) = (1/(2\pi i)) \int_C f(z)dz \,/\, (z - a + h)$$

$$= (1/2\pi i) \int \frac{f(z)dz}{(z - a)} \; \frac{1}{1 -(h /(z - a))}$$

La serie de potencias 1 - h/(z - a) puede ser representada por su recíproca (este desarrollo es puramente formal)

$$\frac{1}{1 - h/(z - a)} = 1 + \frac{h}{z - a} + \left(\frac{h}{z - a}\right)^2 +$$

dado que esta serie converge uniformemente cuando el valor absoluto de h/(z - a) es menor que 1 - ε, donde $\varepsilon > 0$, puede integrarse la serie término a término, quedando así

$$f(a + h) = \frac{h^0}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{z - a} + \frac{h^1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{(z - a)^2} + \frac{h^2}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{(z - a)^3} +$$

Aquí la **analogía entre las diferencias divididas y la Primera fórmula de la Integral de Cauchy es fascinante**, ya que las primeras, cualquiera su orden sea, se pueden obtener como la suma de cocientes, por la **propiedad III**, vgr.

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0)(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)(x_2-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_2-x_1)} +$$

como aquí $(1/2\pi i)\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$. Esto sugiere $\int \frac{f(x)dx}{(x-a)^{n+1}}$ análisis real.

$$f(a + h) = f^{(0)}(a)\ h^0/0! + f^{(1)}(a)\ h^1/1! + f^{(2)}(a)\ h^2/2! + \ldots$$
$$+ f^{(n)}(a)h^n/n! + (h^{n+1}/2\pi i)\int \frac{f(z)dz}{(z - a)^{n+1}(z - a - h)}$$

o sencillamente

$$f(a + h) = \sum \frac{f^{(i)}(a) * h^i}{i!}$$

con i de cero a n. Si h = z - a, entonces

$$f(z) = f^{(0)}(a)(z - a)^0/0! + f^{(1)}(a)(z - a)^1/1! +$$
$$+ f^{(2)}(a)(z - a)^2/2! + \ldots$$
$$= \sum f^{(i)}_{(a)} * (z - a)^i/i!$$
$$= \varkappa(\ D,\ i) * \varkappa(\ z\text{-}a,\ i)$$

En este lugar es conveniente recordar a unas fórmulas que ligan a las diferencias con las derivadas. La que sigue, en el medio discreto es la homóloga a la de Taylor en el medio continuo.

$$f(x + \Delta x) = \sum \varkappa(\Delta x, i)f(x)$$

por la fórmula de Newton, con i de 0 á n, que es el desarrollo de $(1+\Delta)^n f(x)$; esta fórmula nos recuerda en matemáticas financieras que el valor acumulado de un capital de un peso colocado a una tasa de interés durante n años es $1*(1 + \Delta)^n$

$$(1 + \Delta)^n = \left\{\Delta^0/0! + \Delta^1/1! + \Delta^2/2! + \quad +\Delta^n/n!\right\} f(x)$$

Si el intervalo es h, entonces

$$f(x+\Delta x) = \sum (\Delta/h)^i/\ i! = e^{\Delta/h}$$

con i de cero a infinito; donde h = (x+Δx) - x; si Δx = 1 es equiespaciado y si Δx tiende a cero, h tiende a su vez a cero; que es igual a

$$1 + \Delta = e^{dy/dx}$$

cuando $\lim_{h \to 0} \Delta/h = dy/dx$

D es el operador de derivación: $D = d/dx$; $D^2 = d^2/dx^2$; $D^n = d^n/dx^n$

entonces

$$1 + \Delta = e^{D}$$

de donde

$$D = Ln\ (1 + \Delta)$$
$$= \Delta - (1/2)\Delta^{2} + (1/3)\Delta^{3} - \dots$$

quedando en esta forma definida la derivada en función de las diferencias finitas.

O también los operadores diferencia y suma en función del operador derivada en la siguiente forma se pueden rxpresar:

$$\Delta = e^{D} - 1$$
$$\Delta^{-1} = \sum = 1/(e^{D}-1)$$

de aquí proviene también

$$y_{i+1} = (1+\Delta)$$
$$= y_{i}(1 + \Delta + \Delta^{2}/2! + \dots)$$

con i de uno a infinito.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \text{æ}\ [D,k]$$

fórmula que verbalmente se explica así: EL INCREMENTO TOTAL DE UNA FUNCION, en ganancia, en materia, en cantidad, en pesos y centavos, SE OBTIENE COMO LA ACUMULACION DE LAS ALEAS DE LAS DERIVADAS, pendientes, tangentes, inclinaciones, tasas, velocidades, varianzas; palabras con las cuales se quiere significar el mismo concepto.

Por estas mismas relaciones es que para resolver ecuaciones diferenciales interviene el número e y porqué para resolver ecuaciones en derivadas parciales se aproximan por ecuaciones en diferencias.

Se desprende de las relaciones anteriores que el inverso del operador diferencia (Δ) es el operador $\sum$ y en forma similar

$$\int = 1\ /\ (e^{D}-1)$$

Parecen triviales y evidentes estas relaciones que enlazan los medios continuo al discreto; pero por lo mismo tal vez las olvida uno. Son tan importantes que en mi opinión son las que llevándonos de la mano a partir del Algebra nos introducen de lleno en el Cálculo diferencial e integral.

Vamos ahora a encontrar una forma intuitiva para llegar a la SEGUNDA FORMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY a través de la la primera y la tercera propiedades de las diferencias finitas divididas ya anteriormente enunciadas.

I.- Son SIMETRICAS. De la tabla: $f(x_0,x_1) = f(x_1,x_0)$

$$f(x_0,x_1,x_2) = f(x_1,x_0,x_2) = f(x_2,x_0,x_1)$$

y la

III.- LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS PUEDEN PONERSE EN TERMINOS DE LAS PRIMERAS DIFERENCIAS. Así

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_0)(x_1-x_0)}{(x_0-x_1)(x_1-x_0)} + \frac{f(x_1)(x_0-x_1)}{(x_1-x_0)(x_0-x_1)}$$

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_0)(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)(x_2-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_2-x_1)} + \frac{f(x_2)(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_1)}$$

el paso no es inmediato; pero el concepto persiste, tan solamente hemos dividido y multiplicado a cada fracción por su propio intervalo.

$$f(x_0,x_1) = \sum \left[f(x) \cdot dx\right] / (x-x_0)^2 = f^{(1)}_{(x_0)} / 1!$$

La que sigue es la **SEGUNDA FORMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY**; fórmula que sirve para expresar el valor de una función analítica en un punto en términos de los valores de $f(z)$, z complejo, los cuales caen en un contorno que rodea al punto. Sea $f(z)$ es una función analítica en el dominio D, y C, un contorno completamente dentro de D; y sea $z = z_0$ un punto arbitrario dentro del contorno C. Si dividimos $f(z)$ entre $z - z_0$, la función resultante también es analítica en y dentro de C, excepto en $z = z_0$:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\ dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$
$$= æ\,(f^{()}(z_0),\ n)$$

en un círculo $(2\pi i)$. El miembro izquierdo de la ecuación es la DIFERENCIA FINITA DIVIDIDA DE ORDEN n, valuada en el punto z_0; o sea, la derivada entre el factorial: álea de las derivadas.

Por inducción se obtienen las diferencias finitas divididas de orden creciente. Sabemos que la siguiente relación vale para n = 0, simplemente f(z):

$$æ(\ f^{()}(z_0),\ 0\ ) = (2\pi i)^{-1}\int f(z)dz\ /\ (z - z_0)^1$$

para n = 1, primera diferencia dividida:

$$æ(\ f^{()}(z_0),\ 1\ ) = (2\pi i)^{-1}\int f(z)dz\ /\ (z - z_0)^2$$

y así

para n, n-ésima diferencia dividida:

$$æ(\ f^{()}(z_0),\ n\ ) = (2\pi i)^{-1}\int f(z)dz\ /\ (z - z_0)^{n+1}$$

recordando que la diferencia dividida de orden n es igual a la derivada de orden n, dividida entre, el factorial del ordinal. Si despejamos $f^{()}(z_0)$, en la integral de Cauchy, queda:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\ dz$$
$$= 1/2\pi i\int \frac{f(z)\ dz}{æ(z-a,\ 1)\ æ(z-a,\ n)}$$

ahora bien, si ponemos n! en términos de la función Gamma,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\int \frac{f(z)\ dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

siendo n no necesariamente entero, de esta manera quedan definidas las derivadas de orden fraccionario, pudiendo decir correctamente, la media derivada, la derivada 2.5, la derivada 5.87654, etc. Cfr. Lloyd P. Smith. Matematical methods for scientists and engineers. Pág. 151 fórmula (87.2)

Tomando en consideración, que la integral de Cauchy es una "diferencia dividida" de orden n, y recordando que el desarrollo de

Taylor para determinar una función es la suma, de las "diferencias divididas" de orden n multiplicadas por el producto de las n-1 diferencias de sus intervalos, es claro que la fórmula de Taylor se puede expresar por medio de la integral de Cauchy.

Habiendo encontrado un procedimiento común entre las Diferencias Divididas, las Derivadas, la Serie de Taylor y las Integrales de Cauchy, vamos a poner un ejemplo, de porqué **la serie de Taylor es un polinomio con componentes aleatorios: es la esperanza matemática del producto de dos distribuciones campanoides (ambas álea): la de las derivadas y la de los intervalos.** Actuarialmente hablando la Serie es un monto; o la transformada álea: $\sum \mathbf{s}(x-a,\ i) \bullet D^i$ con i de 0 á ∞.

$$f(z) = \sum D^{(i)} \bullet (x-a)^i/i!$$
$$= e^{D \bullet (x-a)}$$

= ESPERANZA DE LOS PRODUCTOS DE DOS ALEAS: DE LAS DERIVADAS Y DEL INTERVALO EXISTENTE ENTRE **A** y **X**, con i de cero a infinito.

Por $(1 + \Delta) = e^D$ sabemos que la distribución de cualquier derivada (D) viene dada por las áleas de D: es campanoide. Por otra parte la distribución de (x-a) también está formada por áleas de (x-a): es campanoide. El producto de estas dos áleas de exponente i es también una álea producto de orden i; la suma de estas áleas-producto de orden i es el valor de la función encontrada f(z), a partir de f(a). Es el área bajo la curva campanoide producto.

Vamos a poner un **ejemplo 1** para $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$. Los datos corresponden a la tabla de Diferencias Finitas Divididas, **página** 7.

PASO I. Gráfica de las Derivadas.

Calculemos las derivadas de la función para a = 5

$D^0_{(5)} = 196$; $D^1_{(5)} = 125$; $D^2_{(5)} = 54$; $D^3_{(5)} = 12$; las derivadas mayores a 3 valen cero.

PASO II. Gráfica de las áleas del intervalo.

Calculemos las áleas de $x - a$: $(x-a)^i/i!$

$(8-5)^0/0! = 1$; $(8-5)^1/1! = 3$; $(8-5)^2/2! = 4.5$; $(8-5)^3/3! = 4.5$;

$(8-5)^4/4! = 3.375$; $(8-5)^5/5! = 2.025$; $(8-5)^6/6! = 1.0125$; $(8-5)^7/7! = 0.4339$; etc.

PASO III. Gráfica de la álea-producto y su Acumulación.

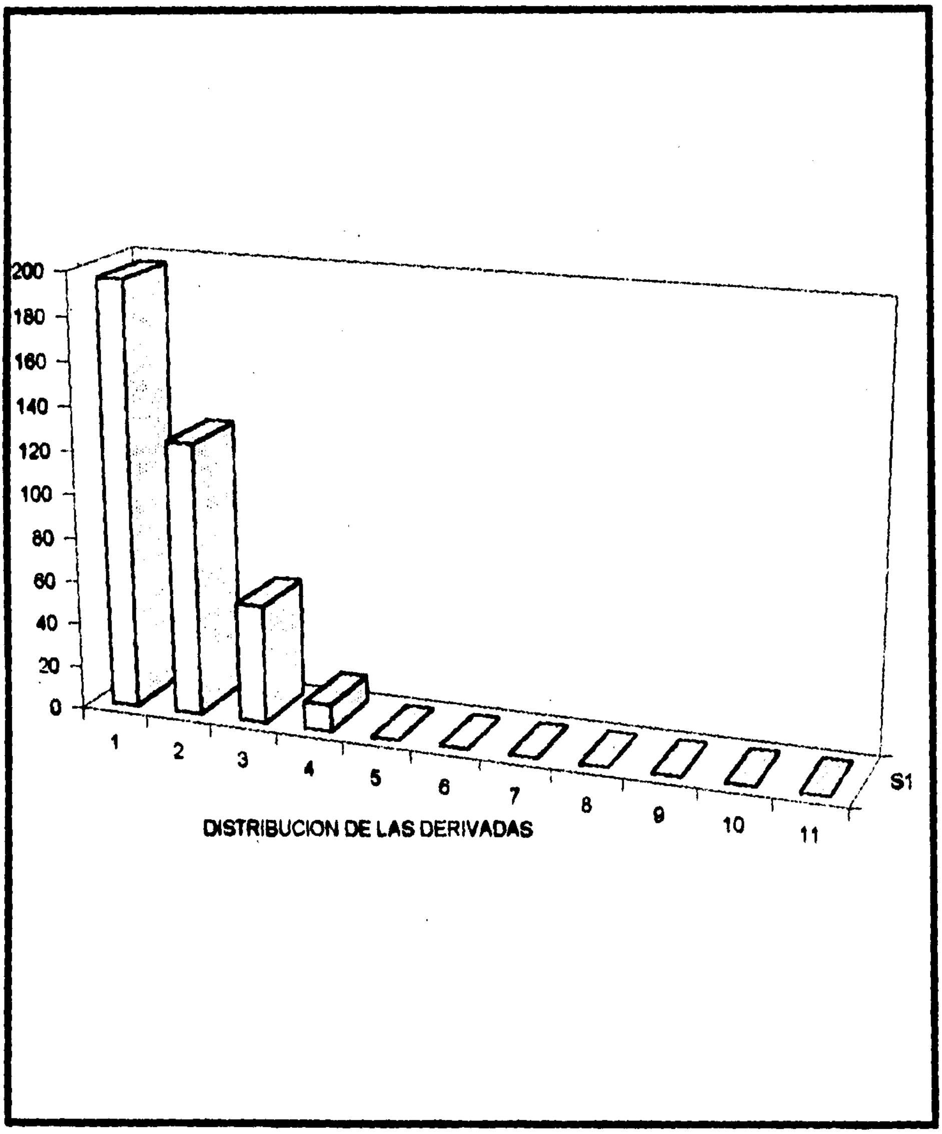
Multiplicar $D^{(i)} \bullet (x-a)^i/i!$: 196, 375, 243, 54, 0, 0, 0, 0, 0, 0

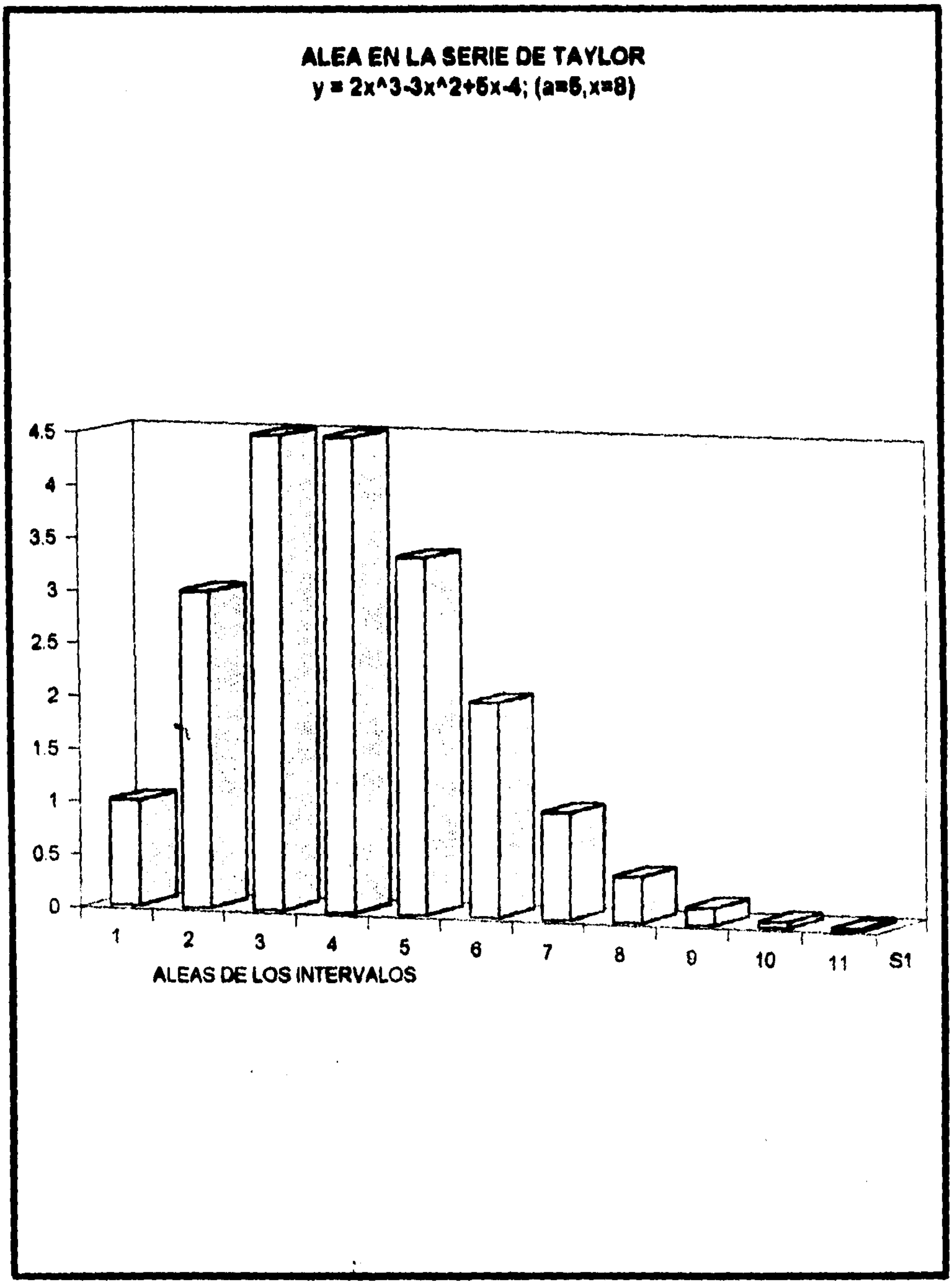
y Sumar al producto anterior: 196, 196+375=571, 571+243=814, 814+54=868, 868+0=868

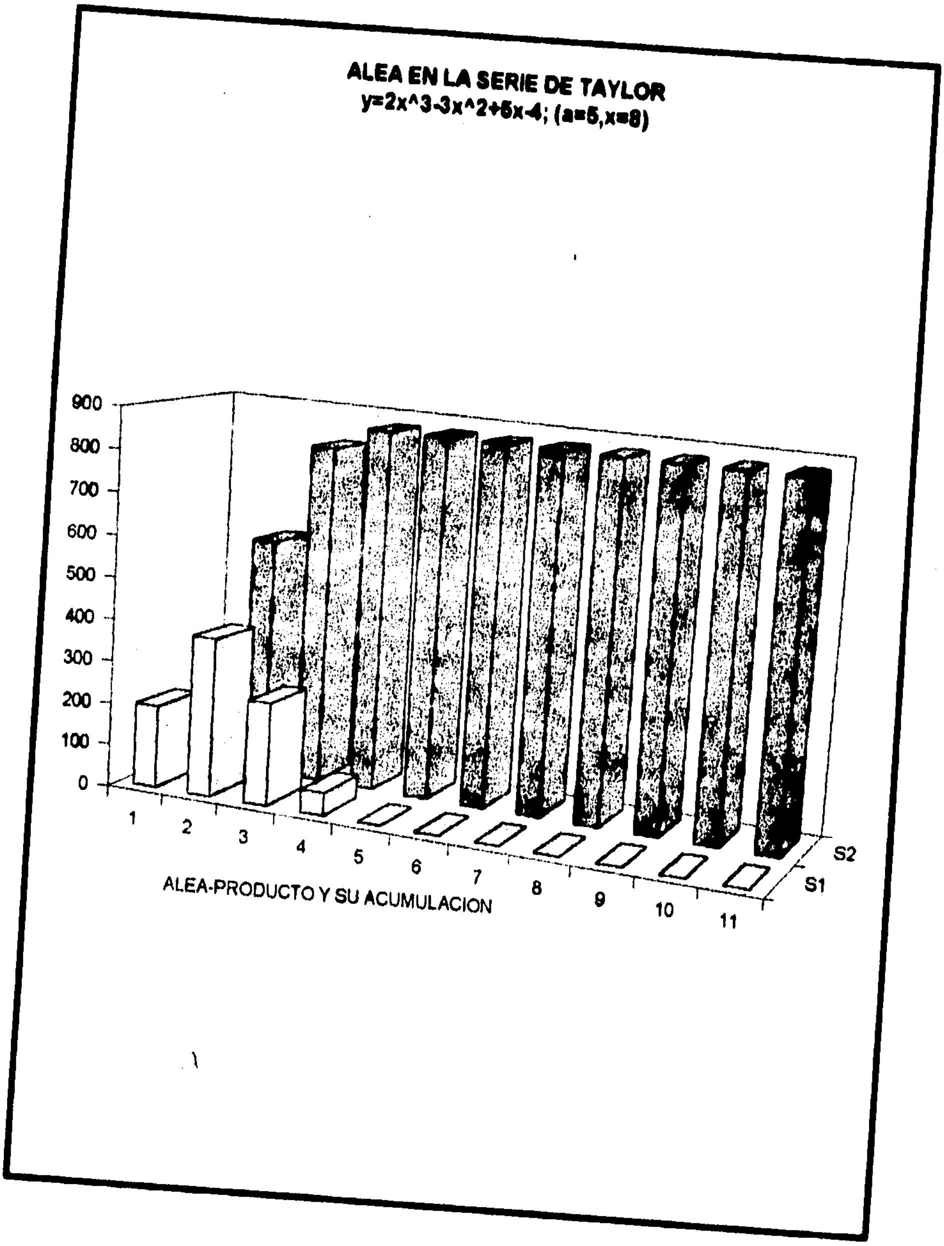
PASO IV. Comparar f(8) = 868 con la Acumulación del PASO III.

Las páginas siguientes contienen la gráfica de cada PASO.

ALEA EN LA SERIE DE TAYLOR
y = 2x^3-3x^2+5x-4; (a=5,x=8)




ALEA EN LA SERIE DE TAYLOR
y = 2x^3-3x^2+5x-4; (a=5,x=8)
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
S1
ALEAS DE LOS INTERVALOS


ALEA EN LA SERIE DE TAYLOR
y=2x^3-3x^2+5x-4; (a=5,x=8)
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
S2
S1
ALEA-PRODUCTO Y SU ACUMULACION

Existe otra fórmula de "**Desigualdades de Cauchy** para Máximos de $f(z)$ en z_0. Su expresión es

$$\text{El valor absoluto de } f^{(n)}(z_0) \leq n!\, M / r^n$$

donde $M = \text{máx } f(z)$. También aquí interviene álea

$$n!\, M / r^n = M\, \text{a}^{-1}(r,\, n)$$

Y en esta otra para el **Cálculo de Residuos**:

$$(1/2\pi i)\int f(z)\, dz = \phi^{(m-1)}(a) / (m-1)!$$
$$= \text{a}(\phi,\, m-1)$$

El papel de **álea en las Ecuaciones Diferenciales** es lo que en seguida trataremos. Recordemos que $1 + \Delta = e^D$

En palabras quiere decir que el valor de una función construida a partir de otra anterior, es igual a la suma de las áleas de las derivadas; pero no olvidando que la álea de una derivada de orden n es la "diferencia dividida" de orden n, entonces si

$$\Delta^n = y^{(n)}/n!$$
$$y^{(n)} = n!\,\Delta^n$$

Se trata de determinar una función y por ahora expresada en términos de sus derivadas: $(1+\Delta)^\lambda = e^{\lambda t}$

Sea λ un número complejo y sea una solución

$$y = e^{\lambda x}$$

de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes y raíces reales no repetidas. $D = d/dx$

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)\, y = 0$$

si y sólo si λ es una raíz de

$$= e^{\lambda x}\,(\, a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\,) = 0$$

y la solución general se expresa como

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

en ésto se basa en que $y = e^{\lambda x}$, tiene las siguientes derivadas:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$
$$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Veamos ésto en un ejemplo de ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes.

$$d^3y/dx^3 + 2\, d^2y/dx^2 - dy/dx - 2y = 0$$

la ecuación auxiliar es $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

factorizando queda: $(\lambda - 1)\ (\lambda + 2)\ (\lambda + 1) = 0$

por lo tanto las **raíces (tasas)**, son: $\lambda = +1,\ -2,\ -1$

y la solución general es

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-x}$$

de donde podemos observar que el carácter combinatorio de **e** también introduce en estas funciones determinísticas el tono probabilístico de álea; **las áleas son el spectrum del número e; aquellas son los colores, ésta la luz blanca.** Intuitivamente podemos en términos financieros ver, que C_1, C_2, C_3 son Capitales; invertidos al 100%, -200% y -100% respectivamente. La suma en la solución general se explica por el hecho de que cada raíz satisface a la ecuación característica, sola y no todas a la vez.

Vamos a tratar ahora el tema de las **particiones. (Combinatoria).**

Por el Binomio de Newton, en áleas tiene la forma siguiente para dos particiones

$$(a + b)^n = n! \sum æ(a, n-i) * æ(b, i)$$

con i de cero a n. Para **e** es

$$\lim (1 + 1/n)^n = n! \sum æ(1,\ n-i) * æ(1/n,\ i)$$

con i de cero a ∞

Como se ve la distribución Binomial y el número **e** provienen de un modelo de partición. El producto de estas áleas sujetas a la condición $n = (n-i)+i$ se llama convolución.

Pensemos en un modelo tripartición, o sea, en el que existan tres opciones, vgr. a, b, y c en un experimento de tamaño n.

La condición general es $n = (n-i-k) + i + k$.

Los grupos formados son $(n-i-k)$, i, k ,por lo tanto los índices de variación para tres salidas serán $i, k, n-i-k$

$$(a + b + c)^n = n! \sum æ(a,\ n-i-k) * æ\ (b,\ i) * æ\ (c,\ k)$$

y en general para X particiones

$$(a + b + c + \quad x\text{-particiones} \quad + x)^n$$

$$n! \sum æ(a, n-\alpha-\beta-\ldots\kappa) * æ(b,\alpha) * æ(c,\beta) * \ldots * æ(x,\kappa)$$

o sea igual a

$$n! \sum \Pi\, æ(a_i, n - \Sigma k_i)$$

También éste es un ejemplo de cómo partir al número n en x-formas o en x sumandos. Familiarmente aludimos a ésto cuando pedimos cambio de un billete de n pesos; nos lo devolverán particionado en x billetes de distintas denominaciones.

De aqui generalizamos que $(\Sigma a_i)^n$ es igual a la fórmula anterior e igual también a la suma de las convoluciones de áleas. En palabras ésto quiere decir que con i áes que suman n se pueden hacer $(\Sigma a_i)^n$ formas o figuras, con sentido o no.

Algunos autores le llaman Combinatoria a esta rama de las matemáticas finitas o discretas; en ella se trata de la multiplicación como "número de veces"; de la suma como "alternativas"; de Permutaciones, de Combinaciones. Particiones, Funciones Generatrices, etc. El Cálculo de Probabilidades, en sus inicios tuvo como punto de arranque el cálculo de probabilidades en que los casos favorables y posibles eran por enumeración directa. Los números combinatorios eran conocidos por los matemáticos chinos hacia el año 1300 D.C., por Miguel Stifel (1544) y por John Napier; aunque ésto no hubiera sido posible sin la intervención de Fibonacci (Leonardo de Pisa, 1170-1250), de Francisco Maurolico (1494-1575) o de Commandino (1509-1565) en la introducción de los números indoarábigos y en la traducción y divulgación de las ciencias griegas y árabes en lengua latina. La sospecha inicial como ciencia matemática se debe a Girolamo Cardano (1501-1576), a Nicola Tartaglia (1500-1557) y a Galileo Galilei (1564-1642); formalmente la fundamentaron Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665); posteriormente grandes matemáticos la han enriquecido, tales como, Christiaan Huygens (1629-1695), Gottfried Wilhelm Leibniz

(1646-1716), Jacques (Jakob) Bernoulli (1654-1705), Leonhard Euler (1707-1783), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Abraham De Moivre publica en 1718 Doctrine of Chances y en 1724 Rentas Vitalicias, y William Feller en 1957 publicó An introduction to probability theory and its applications, volumen I y en 1965 el volumen II; A. A. Márkov; B. V. Gnedenko; A. Kolmogorov; A. Liapunov y aquí me detengo para evitar omisiones, no sin mencionar en forma muy particular a un grande matemático injustamente relegado: Simeón D. Poisson (1781-1841) con su "Recherches sur la probabilité des jugements en matiere criminelle et en matiere civile, precedees des regles generales du calcul des probabilites", aparecido en 1837.

Vamos ahora a ubicar á x^n y á $n!$, componentes de **álea, en la Combinatoria.**

Sean n el número de elementos de un conjunto y k el tamaño del arreglo para acomodarlos, con $n > k$.

El **análisis** combinatorio tiene su punto de partida en dos principios: Si el evento v_1 sucede de n_1 formas y el evento v_2 sucede de n_2 formas, entonces:

I.- Principio de la **adición**, el evento (sucede v_1 ó sucede v_2) se presenta de $(n_1 + n_2)$ maneras.

II.- Principio de la **multiplicación**, el evento (sucede v_1 y sucede v_2) se presenta de ($n_1 \cdot n_2$) maneras.

En seguida aparece un resumen de fórmulas que responden a la pregunta ¿ de cuántas formas o maneras ?, fórmulas básicas, en el análisis combinatorio, siguiendo el modelo de la **urna** con n bolillas, y un casillero con k compartimentos; el experimento consiste en extraer de la urna una bolilla y asignarla a cualesquiera de los compartimentos vacíos; después de esta operación se presentan tres opciones fijas para todo el experimento: **primera**: reemplazar en la urna a la bolilla extraída por otra de igual característica; **segunda**: reemplazar en la urna a la bolilla extraída por otra de igual característica y agregar otra u otras; **tercera**: no reemplazar.

El proceso se continúa apegándose a los pasos anteriores hasta llenar los k casilleros. Relativo a los casilleros diremos que cada uno de ellos es **permutable**. En términos algebraicos estaríamos hablando de un **grupo cuya operación fundamental es la permutabilidad.**

ORDENACIONES

Sean n el número de elementos de un conjunto y k el tamaño del arreglo; se dice, n elementos tomados de k en k. Algunos autores a las Ordenaciones también les llaman Variaciones.

I).- ORDENACIONES-CON repetición (ordenaciones con elementos repetidos)

$$(OR)^n_k = n^k = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \text{(k-veces)} \ldots \cdot n$$

para todo k.

II).- ORDENACIONES-SIN repetición (ordenaciones sin elementos repetidos)

$$O^k_n = (n-0)\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ \ldots\ (n-k+1)$$

$$= n!\ /\ (n-k)!$$

PERMUTACIONES

Sean n el número de elementos y n el tamaño del arreglo; se dice, n elementos de n en n, o sea, tomados todos los n elementos del conjunto. La notación n! se debe a Leibniz.

III.-PERMUTACIONES-CON repetición. Dentro de los n elementos hay α iguales, β iguales, γ iguales.

$$n!\ /\ \alpha!\beta!\gamma!$$

IV).-PERMUTACIONES-SIN repetición.

$$n!$$

COMBINACIONES

V).- COMBINACIONES-CON repetición o sea, de la segunda opción arriba mencionada. La notación de todas las Combinaciones se debe a Euler. "Estadística de Bose-Einstein"

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

$$= (n+k-1)!\ /(k!\ (n-1)!) = (n+k-1)!\ a(1,\ k)\ a(1,\ n-1)$$

$$= \frac{(n+0)}{0!}\frac{(n+1)}{1}\frac{(n+2)}{2}\cdots\frac{(n+k-1)}{k-1}$$

$$B_1 = \sum_{r=1}^{n} \prod_{k=1}^{r} \frac{(n+k-1)}{k}$$

VI).-COMBINACIONES-SIN repetición o sea, de la tercera opción. "Estadística de Fermi-Dirac"

O sea que provienen de Ordenaciones sin repetición:

$$\binom{n}{k} = n!/((n-k)! * k!) = n!\ \mathbf{z(1,\ k)\ z(1,\ n-k)}$$

$$\frac{(n-0)}{0!}\frac{(n-1)}{1}\frac{(n-2)}{2}\cdots\frac{(n-k+1)}{k+1}$$

$$B_2 = \sum_{r=1}^{n} \prod_{k=1}^{r} \frac{n-k+1}{1}$$

$$= O_n^k / k!$$

VII).- **ALEA. Combinaciones de Ordenaciones con Repetición.**

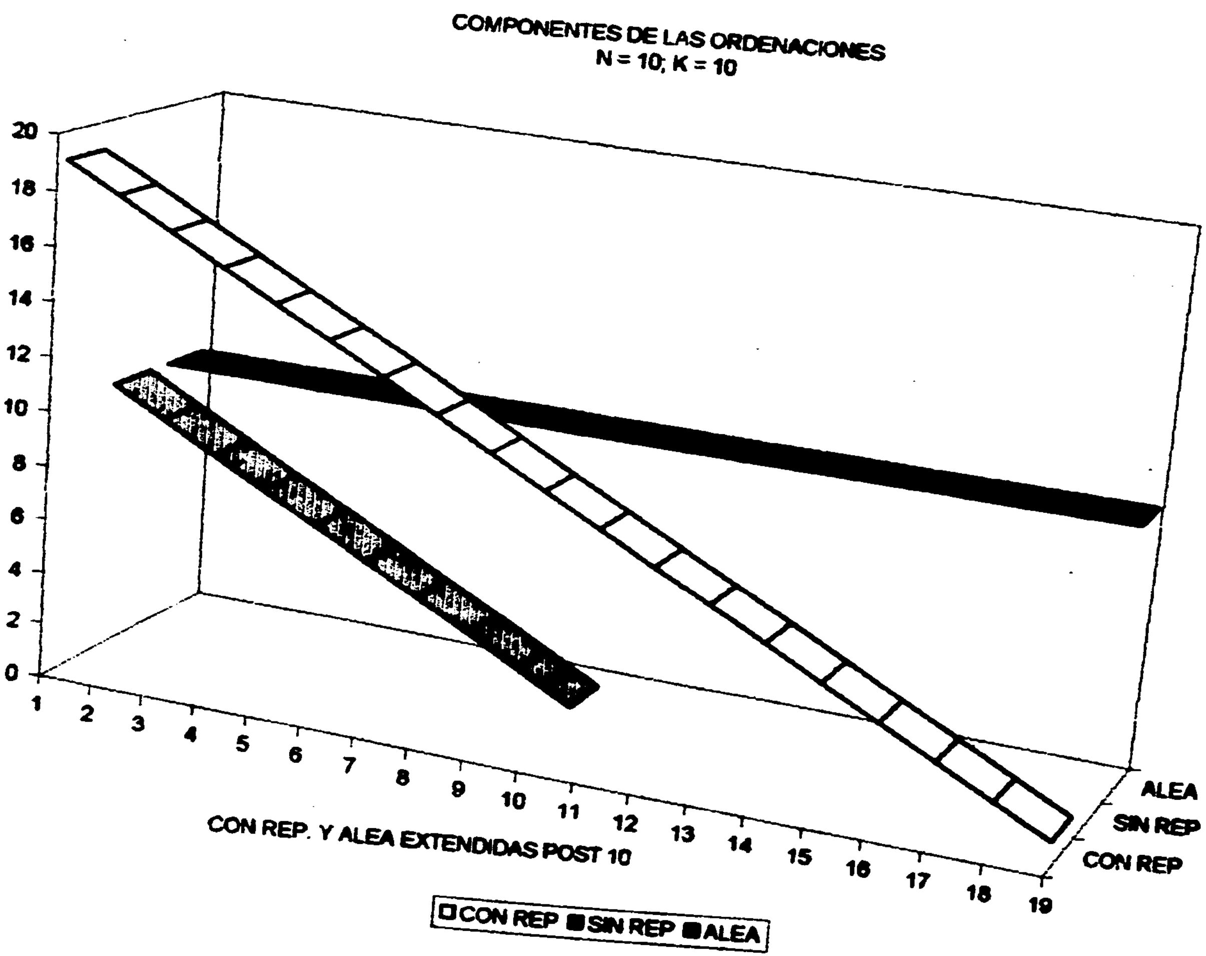
$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = n^k / k! = \mathbf{z(n,\ k)}$$

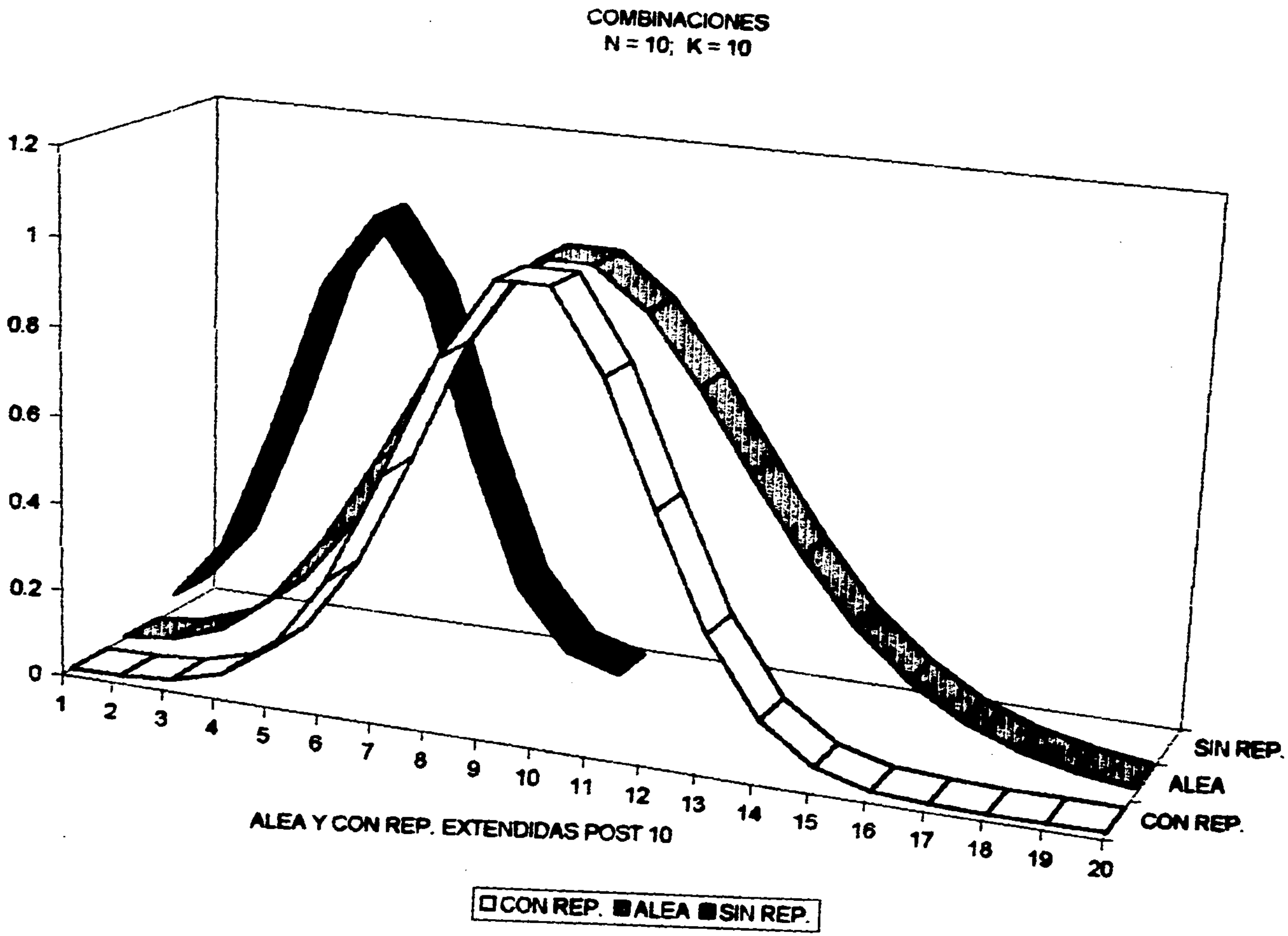
$$= \frac{n}{1}\frac{n}{2}\frac{n}{3}\cdots\frac{n}{k}$$

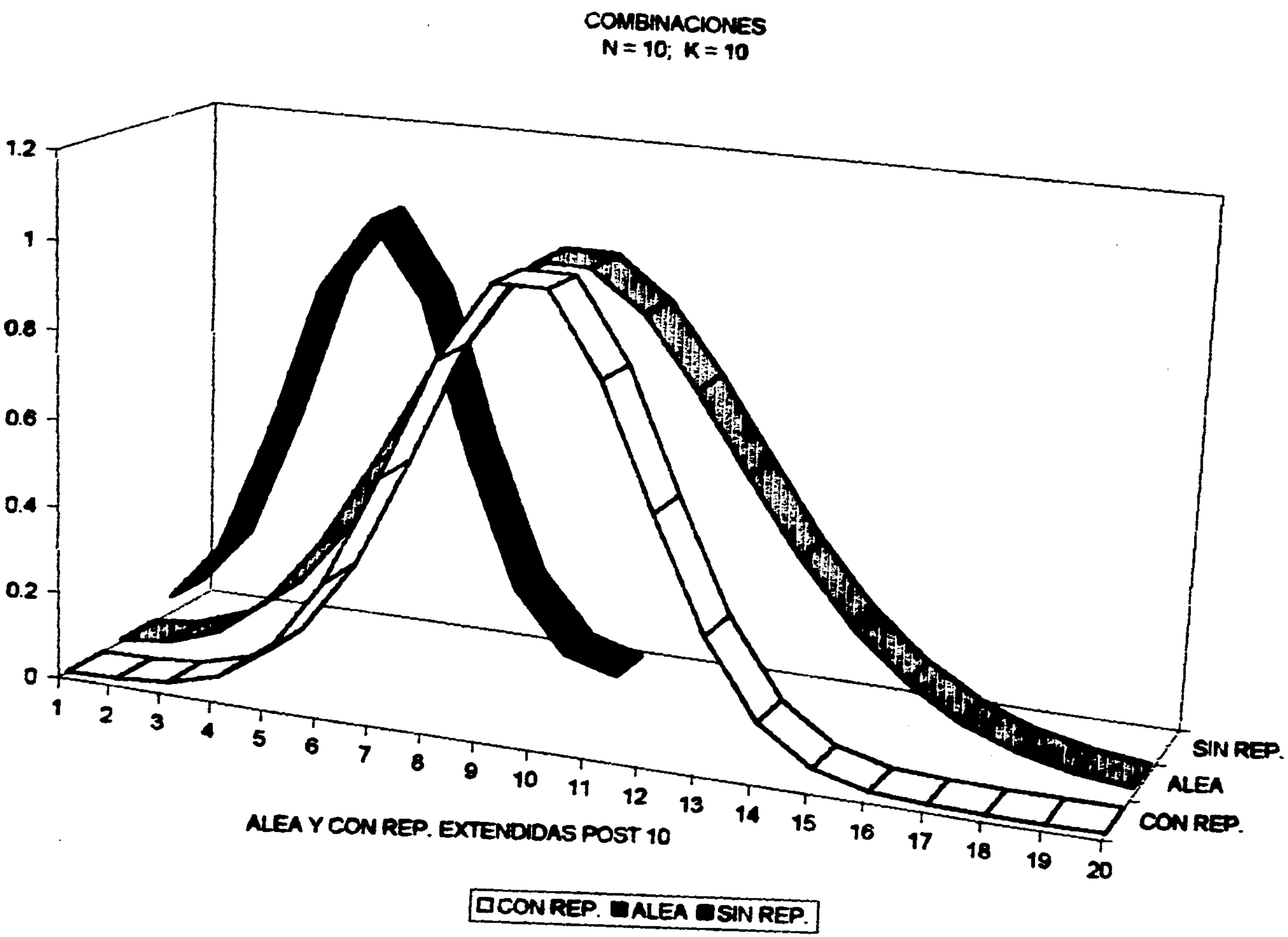
$$= (OR)_k^n / k!$$

$$e^n - 1 = \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} \frac{n^i}{i!}$$

En las siguientes dos páginas aparecen, en la primera, la gráfica de las Ordenaciones y, en la segunda, la de las Combinaciones, en ambas, para un caso particular.


COMPONENTES DE LAS ORDENACIONES
N = 10; K = 10
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
CON REP. Y ALEA EXTENDIDAS POST 10
ALEA
SIN REP
CON REP
CON REP SIN REP ALEA


COMBINACIONES
N = 10; K = 10
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
ALEA Y CON REP. EXTENDIDAS POST 10
SIN REP.
ALEA
CON REP.
□CON REP. ■ALEA ■SIN REP.


COMBINACIONES
N = 10; K = 10
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
ALEA Y CON REP. EXTENDIDAS POST 10
SIN REP.
ALEA
CON REP.
CON REP. ALEA SIN REP.

Al examinar B_1, B_2 y e^n-1, vemos que tanto los **números binomiales** como **álea** provienen de particionar con los números naturales y por ende **tienen un origen común; las consecuencias de este hecho son formidables**. Obsérvese bien que los coeficientes binomiales son funciones que dependen de álea y, por lo tanto, ella es **fundamental.**

La "Estadística" de Maxwell-Boltzmann proviene de n^k y ¿ de $n^k/k!$ cuál ? Cfr. Modern probability theory and its applications de Emanuel Parzen. Pág. 70. John Wiley. 1960. Respuesta: **el grupo álea.**

Como ejemplo del numerador pongamos: con los números del 0 al 9 queremos formar los números de placa de automóvil con cinco dígitos que pueden estar repetidos. El primer lugar será ocupado por cualquiera de los diez dígitos: 10; el segundo, 10; el tercero, 10; el cuarto, 10; por último el quinto lugar también podrá ser ocupado por 10 dígitos. El número total de placas será 10^5.

Ejemplo para el denominador: se dispone de 5 personas para ocupar 5 puestos. Para el primer puesto dispondremos de 5 candidatos; una vez escogida una persona para el primer puesto sólo disponemos de 4 personas para el segundo puesto; tres, para el tercer puesto; dos para el cuarto puesto y solamente 1 para el quinto puesto; por lo tanto tenemos $5 * 4 * 3 * 2 * 1$ posibilidades para designar los cinco puestos: $5! = 120$

Vamos a ver la fórmula de Stirling. Cfr. W. Feller. Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Vol. I. pág.67. Está relacionada con $n!$; es una aproximación para calcular factoriales; como después veremos, cuando n tiende a infinito, el cálculo de los factoriales es prohibitivo y entonces hay que recurrir a una aproximación: la fórmula de Stirling. Esta es

$$n! \text{ es aproximadamente igual a } (2\pi)^{1/2}\, n^{n+1/2} e^{-n}$$

$$n^n/n! \text{ es aproximadamente igual a } 1/(2\pi n)^{1/2}\, e^{-n} = a(n,n).$$

ó más exacta; pero sigue siendo aproximación

$$(2\pi)^{1/2}\, n^{n+1/2}\, e^{-n}\, e^{(12n+1)^{-1}}$$

La fórmula que da buena aproximación para n tendiendo a infinito es, sin ser muy exigente

$$n! = (2\pi n)^{1/2}\, n^{n}\, e^{-n}$$

Analicemos las varias presentaciones de la función factorial. Cfr. Eugene Jahnke y Fritz Emde. Tables of functions with formulae and curves. Dover publications. 4a. Edición. New York. 1945.

Sea z en el dominio complejo, $z = x + iy$, entonces

$$z! = \lim_{n \to \infty} \left\{ n^{z} \Big/ \prod_{\nu=1}^{n} (1 + z/\nu) \right\}$$

$$= \prod \left[(1 + 1/\nu)^{z} / (1 + z/\nu) \right.$$

o en coordenadas polares

$$z = re^{i\rho}$$

y donde i es el número imaginario en ambos sistemas

$$z! = he^{i\eta}$$

$$h = x! \Big/ \prod r_{n}$$

bajo el producto, n va de uno a infinito y

$$\eta = y\, \Psi(x) + \sum (tg\, \rho_{n} - \rho_{n})$$

bajo la suma, n va de uno a infinito. Esto en palabras, a grosso modo, quiere decir que z! se compone, del producto de los reales x, más la suma de sus correspondientes ángulos o argumentos.

Cuando $r << 1$

$$z! = \left\{ (\pi z/\text{sen}\, \pi z)\ ((1-z)/(1+z)) \right\}^{1/2}$$

Para $x >> 1$

$$x! = \sqrt{2\pi x}\, x^{x}\, e^{-x} \left\{ 1 + 1/12x + 1/288x^{2} - 139/51840x^{3} - \right.$$

$$\left. - 571/2488320x - \ldots \right\}$$

o esta otra equivalente, para $x >>1$

$$x! = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\, e^{-x} \left[x(x+1) \right]^{x/2+1/4} (1 + e^{\lambda}/x)^{1/12}$$

donde $\lambda = 1/180 \left(1/x^{2} - 1/(x+1)^{2} \right) - 1/840 \left(1/x^{4} - 1/(x+1)^{4} \right) + \ldots$

Si $z = iy$ para $y >> 1$, o sea, el factorial de los números imaginarios es

$$(iy)! = he^{i\eta}$$

en que

$$h = (\pi y/\text{sh}\ \pi y)^{1/2} = \sqrt{2\pi y}\ \ e^{-\pi y/2}$$

$\eta = \pi/4 + y(\text{Ln}\ y - 1) - 1/12y$

Pongamos unos ejemplos más de álea en el análisis.

No podemos dejar de lado los **polinomios de Bessel**. Estos son soluciones a la ecuación diferencial:

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2-\nu^2)w = 0$$

La ecuación de primera clase es

$$J_\nu(z) = \sum^{\infty}(-1)^k\ (z/\ 2)^{\nu+2k}/\ k!\ (\nu+k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\ (z/\ 2)^k/\ k!\ \ (z/\ 2)^{\nu+k}\ /\ (\nu+k)!$$

y en áleas queda

$$\sum_{k=0}^{\omega}(-1)^k\ \ae(z\ /\ 2,\ k)\ \ae(z\ /\ 2,\ \nu+k)$$

La ecuación de segunda clase de Bessel es

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\ \frac{(z/\ 2)^{2k-n}}{(n-k)!}$$

y en áleas

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty}\ (-1)^k\ \ae(z\ /\ 2,k)\ \ae(z\ /\ 2,k-n)$$

las cuales son más transparentes que las originales.

Otro ejemplo del empleo de áleas, es la hermosa **fórmula de Euler**:

$$e^{\pi i} - 1 = 0$$

i es el número imaginario. Esta fórmula proviene de

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\ \text{sen}\ \pi$$

o de

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta$$

y ésta de

$$i = e^{i\pi/2}$$

$$i = \sum \ae(-\frac{\pi i}{2},\ j)$$

con j de cero a infinito y $i=\sqrt{-1}$

Como propósito de este capítulo se tenía el que encontráramos lugares comunes con la función álea en las matemáticas determinísticas y, al mismo tiempo, mostrar que con ella, éstas adquieren un rasgo de aleatoriedad; si se cumplió, ahora lo tendremos para continuar en las matemáticas no determinísticas.

CAPITULO III

ALEA EN EL CALCULO DE PROBABILIDADES

Una vez que ya nos hemos familiarizado con la función álea, ahora vamos a localizar a álea en el campo de las Probabilidades, por una parte como elemento de las funciones de densidad más conocidas y en otra, en la función generadora, en la función caracteristica, en las transformadas de Laplace y de Fourier; dando por sentado que álea viene a ser el apellido de una gran familia.

Sabemos que esta rama de las matemáticas es el meollo de las ciencias actuariales; por ende las áleas también conforman el campo del Seguro. El propósito en este capitulo es fijar estos tres conceptos:

1.- Cualquier función de densidad de probabilidad se puede expresar como el cociente resultante de dividir la función que sigue esa ley entre la suma o la integral de ella. Esto es la función favorable entre las posibles.

3.- Tratar de encuadrar en un modelo general a las distintas funciones de densidad por medio de Alea.

En las funciones más conocidas, como son la binomial, la Poisson, la Beta, la Normal, etc.,se logra este objetivo; empero en otras pocas, no; sin embargo, al menos álea nos sirve para simplificar y hacer más transparente la constitución de éstas. Cuando me referia al carácter sintetizador de álea estaba aludiendo a este carácter.

Aparecen al final de la tesis dos anexos con las gráficas de las funciones de densidad más comunes, discretas y continuas, a los que debemos recurrir cada vez que describamos una densidad de probabilidad en el cuerpo de este capítulo.

A pesar de que filosóficamente se cuestiona la legitimidad de la definición clásica de probabilidad, aún los defensores de la probabilidad como frecuencia relativa en los modelos, o sea, en las funciones de densidad de probabilidad por ellos definidas, hacen uso de la probabilidad clásica. Típicos ejemplos de lo que estoy diciendo son la t de Student, la Z de Fisher y la función F.

La probabilidad es el cociente de dividir los casos, atributos, o caracteres a los que nos interesa observar -FAVORABLES-, entre los casos, atributos o caracteres -POSIBLES-, según la perspectiva clásica. Los empiristas la definen como el límite al que tiende el cociente del número de caracteres observados entre el tamaño del experimento. O sea que en uno u otro caso el numerador: FAVORABLES, cuando el tamaño de experimento es grande, es igual a la MEDIA.

Por ejemplo en la función Normal el numerador es la función que produce resultados de una variable que sigue esa distribución; la variable es $t = (x-\mu)/\sigma$, y; $e^{-t^2/2}$ es la función favorable. Los casos posibles son

$$\sqrt{2\pi}\sigma = \int e^{-t^2/2}\, dt$$

La función de densidad buscada es así

$$= \frac{\sum \text{æ}(-t^2/\ 2, 1)}{\int \sum \text{æ}(-t^2/\ 2, 1)\, dt}$$

Otro ejemplo:

Sea $\text{æ}(p,x)$ la álea que representa el comportamiento, en nuestro experimento de tamaño n, de una cierta característica que aparece con la probabilidad p. En el evento x la propensión o tendencia o inclinación vale precisamente $\text{æ}(p,x)$. Haciendo la función $\sum \text{æ}(p,k)$, con k de 0 a ∞ el resultado no vale uno sino e^p; por lo tanto nuestra función álea debe estar dividida entre e^p.

Las siguientes son algunas funciones de densidad de probabilidad a las que trataremos de unificar por medio de álea: Hipergeométrica, Beta, Gamma, Binomial, Binomial Negativa, Geométrica, Multinomial, Poisson, Z de Fisher, F, Normal, Logarítmica-normal, Exponencial Doble, χ^2, t de Student, Uniforme, Exponencial y Logística. En el Apéndice localízanselas gráficas de algunas funciones de densidad discretas y continuas; más de las que aquí analizamos y todas sin excepción tienen forma campanoide.

Sabiendo que, aunque parezca repetitivo es conveniente hacerlo, la función de densidad es la primera derivada de otra función llamada Primitiva, en el Cálculo de Probabilidades conocida como Función de Distribución, no es otra que la integral de aquella; repito ésto porque si conocemos la clave para construir funciones de densidad, en teoria, conoceremos la función de Distribución. Y como más adelante veremos, todas las funciones de densidad que conocemos se ciñen a ese patrón. Este criterio usaré para analizar a las funciones de Densidad.

El propósito general es encuadrar a las más que se pueda funciones de densidad con el criterio de probabilidad clásica; empero, si en algunas no se lograre, al menos con la notación álea intentaré simplificarlas. En la mayoria de los casos expongo la presentación tradicional para después llegar al propósito propuesto sin entrar en detalle en su aplicación, lo cual sale del contexto de esta exposición.

A).- FUNCIONES DE DENSIDAD.

FUNCION DE DENSIDAD BETA.

Esta distribución en el medio continuo es la equivalente a la binomial en el medio discreto.

Se representa así:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\ t^{\alpha-1}\ (1-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$(\alpha+\beta-1)! \ast t^{\alpha-1} / (\alpha-1)! \ast (1-t)^{\beta-1} / (\beta-1)!$$

$$= (\alpha+\beta-1)!\ \text{æ}(t,\alpha-1)\ \text{æ}(1-t,\beta-1)$$

los parámetros α y $\beta > 0$. Cfr. en el apéndice la figura 7.

es la misma que la anterior; pero en otra presentación; si hacemos $n = \alpha + \beta$ y $p = t$ se convierte en la binomial.

Euler es el descubridor de esta distribución beta.

DE LA FUNCION DE DENSIDAD F.

Se llama así esta distribución en honor de Ronald A. Fisher, investigador y divulgador científico inglés, quien primero la descubrió; su libro Métodos estadísticos para investigadores es una exposición de técnicas científicas de un conocedor, en términos de divulgación. Esta distribución es seguida por la variable F (cociente de dos varianzas); se usa para comprobar la igualdad entre dos varianzas o entre tres o más medias.

$$f(x) = \frac{\Gamma((m_1 + m_2)/2)}{\Gamma(m_1/2)\,\Gamma(m_2/2)} x^{(m_1/2)-1} (m_2 + m_1 x)^{-(m_1+m_2)/2}$$

$$= (m_1/2 + m_2/2 - 1)! \left(\frac{x^{(m_1/2)-1}}{((m_1/2)-1)!}\right) \left(\frac{1^{(m_2/2)-1}}{((m_2/2)-1)!}\right) \Big/ (m_2 + m_1 x)^{(m_1/2+m_2/2)}$$

Esta densidad con m_1 y m_2 grados de libertad vale la expresión anterior para $x > 0$ y vale 0 para $x < 0$. Ver apéndice la Figura 13

$$= \frac{(m_1/2 + m_2/2 - 1)! \ast \left(x,\ (m_1/2)-1\right) \ast \left(1,\ (m_2/2)-1\right)}{(m_2 + m_1 x)^{(m_1/2+m_2/2)}}$$

El numerador es una binomial negativa : $n = m_1/2 + m_2/2$; $p = x$; $q=1$
y el denominador la función necesaria para que sea función de densidad.

DENSIDAD Z DE FISHER.

$$f(x) = \frac{2\, m_1^{m_1/2}\, m_2^{m_2/2}\, \Gamma((m_1+m_2)/2)\, e^{m_1 x}}{\Gamma(m_1/2)\, \Gamma(m_2/2)\, (m_2 + m_1 e^{2x})^{(m_1+m_2)/2}}$$

con m_1 y m_2 grados de libertad y x de menos infinito a más infinito. multiplicando y dividiendo lo anterior por $m_1 * m_2$, en términos de álea queda

$$= \frac{2*(m_1/2 + m_2/2 - 1)!\ æ(m_1, m_1/2-1)\ æ(m_2, m_2/2-1)}{m_1 * m_2\, e^{-m_1 x} \left(m_2 + m_1 e^{2x}\right)^{(m_1+m_2)/2}}$$

FUNCION DE DENSIDAD GAMMA.

Esta función de densidad se debe a Euler, como en otra parte veremos no es otra cosa que el integrando en la transformada de Laplace de la función exponencial $(x^{\alpha-1})$. O sea, el integrando es $e^{-\lambda x} * x^{\alpha-1}$. Se le define a función Gamma como el valor presente de la serie de beneficios (a grosso modo anuales; en realidad son, la base, infinitésimos): $1^{\alpha-1}, 2^{\alpha-1}, 3^{\alpha-1}...$ $\qquad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} dx$

$\Gamma(\alpha) = \lim n^{x-1} / \binom{x+n-1}{n}$ cuando n tiende a infinito, gaussianamente.

Los componentes de esta función de densidad son:

PRIMERO: $e^{-\lambda x}$ función que algunos llaman de alisamiento, ya que su rango de operación va del 100 % a cantidades cada vez más pequeñas y tendiendo a cero.

SEGUNDO: $f(x) = x^{\alpha-1}$. Esta función va de cero a cantidades cada vez más grandes, o sea lo contrario de $e^{-\lambda x}$. La función resultante de esa multiplicación tiende a ser una recta: la acumulación de esa función de cero a infinito es la función Gamma y si α es entera se llama función Factorial.

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

con parámetros (α, λ) ambos mayores a cero y con $x > 0$

$$= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} x^{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda x}$$

ésto es porque multiplicamos y dividimos por λ

$$= (\lambda x)^{\alpha-1} / (\alpha-1)! \quad \lambda e^{-\lambda x}$$

$$= \text{æ}(\lambda x, \alpha-1) \cdot \lambda e^{-\lambda x}$$

luego entonces esta densidad queda:

$$= \lambda \, \text{æ}(\lambda x, \alpha-1) \, / \sum \text{æ}(\lambda x, i)$$

el producto de una Poisson de parámetro λx por una exponencial.

Más de acuerdo a nuestro criterio de presentar a cualquier función de densidad como casos favorables entre casos posibles, es ésta otra manera de anotación de la Gamma.

$$\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}} = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

esta última expresión es la suma de todos los casos favorables, o sea, todos los casos posibles. Los casos favorables: $x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$

por ende

$$= \frac{x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}}$$

o más claro

$$= \frac{x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx}$$

Recordemos de paso que $\lambda^{\alpha}/\alpha!$ es igual en términos de la función Gamma a

$$\lambda^{\alpha} / \Gamma(\alpha+1) = \lambda^{\alpha} / \alpha \, \Gamma(\alpha)$$

DENSIDAD DE LAPLACE O EXPONENCIAL DOBLE

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|}$$

$$= \lambda / 2 \, e^{\lambda|x-\alpha|}$$

de parámetros (α, λ) $(\lambda > 0)$, $x \in$ (menos infinito, más infinito). Cfr.

en el apéndice fig. 9

La función de densidad exponencial es λ/e^{λ}, que en otro lugar veremos; con el valor absoluto de x-a se producen dobles valores por lo que hay que dividir entre 2; en formato álea queda así

$$= æ(\lambda\ ,1)\ /\ 2 \bullet \sum æ(\lambda|x-\alpha|,1)$$

FUNCION DE DENSIDAD χ^2

Esta función es un caso particular de la función Gamma. En 1900 por primera vez fué descrita y bautizada por Karl Pearson (1857-1936). Una de sus aplicaciones es la de hacer inferencia acerca de la varianza de una distribución; otra, sobre la independencia de los datos en las tablas de Contingencia y otra, sobre la bondad de Ajuste. Cfr. en el apéndice fig. 10

$$f(x) = \frac{1}{2^{\alpha/2}\,\Gamma(\alpha/2)}\, x^{(\alpha/2)-1} e^{-x/2}$$

con α grados de libertad y $x > 0$

$$= \frac{x^{(\alpha/2)-1}}{((\alpha/2)-1)!} \quad \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2^{\alpha}}}$$

en términos de álea

$$= \quad æ\left(x\ ,\ (\alpha/2)-1 \right) \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2^{\alpha}}}$$

$$= \quad 2^{-\alpha/2}\, æ\left(x, (\alpha/2)-1\right)\ /\ \sum æ(x/2,k)$$

Esta densidad se utiliza en pruebas no paramétricas como la prueba de Bondad de Ajuste para k grados de libertad. $\chi^2_{(k-1)} = \sum \frac{(\ o_i - e_i)^2}{e_i}$

donde o_i es el valor observado y e_i, el esperado.

FUNCION DE DENSIDAD t DE STUDENT.

El descubridor de esta distribución es William S. Gosset en 1908, quien usó el seudónimo "Student" por prohibición de la compañía Guinness Brewery en Dublín en la que trabajaba para usar su nombre propio para publicar sus resultados. Se usa esta distribución para inferir sobre la media o sobre la diferencia entre dos medias, cuando hay que estimar la varianza de la población. Ver Lincoln L. Chao. Op. Cit. pág. 215. Cfr. en el apéndice figura 12

$$f(x) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\alpha\pi}\quad\Gamma(\alpha/2)}\left(1 + x^2/\alpha \right)^{-((\alpha+1)/2)}$$

con α grados de libertad y $\alpha > 0$.

$$= \frac{(\alpha/2+1/2-1)!\ 1^{(\alpha/2)-1}}{((\alpha/2)-1)!\ \sqrt{\alpha\pi}}\left(1 + x^2/\alpha\right)^{-(\alpha+1)/2}$$

en formato álea queda:

$$= (\alpha/2 - 1/2)!\ \mathbf{a}\left(1,\ (\alpha/2)-1\right) * \frac{(1+ x^2/\alpha)^{-(\alpha+1)/2}}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

$$= (\alpha/2-1/2)!\ \mathbf{a}(1, (\alpha/2)-1)\ \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}(1 + x^2/\alpha)^{-(\alpha+1)/2}$$

DE LA FUNCION DE DENSIDAD BINOMIAL

Ya hemos hablado algo acerca de esta densidad de probabilidad; empero, voy a abundar en ella dado su carácter tan importante. Al establecer en una población una dicotomía (dos cortes), o sea, éxito-fracaso, presencia de la característica A-no presencia de la característica A, Aguilas-soles, más de 5 puntos en dos dados, los puntos que no suman más de 5 puntos en dos dados, etc. Es una función comprendida dentro de los procesos de Benoulli.

Se expresa así

$$B(n,x,p) = n! \left(\mathbf{a}(p,x) * \mathbf{a}(1-p,n-x)\right) / \left(n! \sum \mathbf{a}(p,i)\ \mathbf{a}(1-p,n-i)\right)$$

con parámetros (n, p) ($0 < p < 1$, $n >= 1$).

El denominador vale 1. No sale sobrando repetir que el numerador es la función de situaciones favorables y el denominador lo es de las posibles; el denominador es la suma de las convoluciones binomiales.

No está de más analizar un poco a esta importante función cuyo rasgo fundamental es la dicotomía, o sea, como más abajo veremos, esta aseveración significa que si disponemos de 2^N unidades de elementos cualesquiera y las dejamos caer en un punto material las hemos separado en la mitad de elementos al lado derecho y la otra mitad en elementos del lado izquierdo; el número de elementos de uno y otro lado será: $N! \ / \ 2!(N-k)! = B(n,k)$, con $k=1,2, \ldots$ Dejemos caer esos $B(n,k)$ sobre otro punto material que los divida por mitad hacia la derecha y hacia la izquierda: entonces en esta operación tres ya tendremos a partir de dos ahora cinco grupos con 1, 3, 6, 3, 1 elementos cada uno, que son las combinaciones de N elementos tomados de 1, 2, 3, 4 y 5 .

Como ya sabemos esta distribución y también la Normal son un modelo matemático que consiste en dividir entre 2 cada una de las poblaciones resultantes y asi ad infinitum. O también representa a una población original de 2^N individuos o particulas atómicas que después de cada cierta unidad de tiempo se separan, la mitad resultante hacia la derecha y la otra hacia la izquierda.

Buena representación visual de ésto es el triángulo llamado de B. Pascal. Este cae dentro de una matriz de tamaño N x k. El renglón N es el número de elementos y k es el número de grupo o columna que contiene $N!/(k! \ (N-k)!$ elementos.

Si N es grande, i.e., se tiene dificultad para calcular directamente los factoriales; por medio de la función Gamma o con la aproximación de Stirling se producen buenos resultados:

$$N! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n+1/(12n)}$$

o esta otra modalidad más usual

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

o si se quiere más aproximación

$$n! = (2\pi n)^{1/2} \, n^n \, e^{-n} \, (1 + 1/12n + 1/288n^2)$$

utilizando esta aproximación de Stirling encontraremos al tratar de la función de densidad Normal a una muy importante ALEA; por ahora con esta aproximación a la función factorial vamos a pasar de la Binomial a la Normal. Sea

$$B(n,x,p) = n! \ p^x / \ x! \quad q^{n-x} / \ (n-x)!$$

Apliquemos la función logaritmo natural a $B(n,x,p)$

$$\ln B(n,x,p) = \ln n! - \ln x! - \ln (n-x)! + x \ln p + (n-x) \ln q$$

asignemos a x y (n-x) sus valores más probables y adecuémoslos en tal forma que tengan el desarrollo

$$\log_e (1+k) = \sum (-1)^i k^i / i!$$

aquí $k = t^*[q/np]^{1/2}$ para x ó $-t^*[p/nq]^{1/2}$ para (n-x)

este cambio de variable es fundamental

$$x = np + t \sqrt{npq} = np (1 + t^*[q/np]^{1/2})$$

$$n-x = nq - t \sqrt{npq} = nq (1 - t^*[p/nq]^{1/2})$$

encontremos ahora

$$\ln n! = \ln \sqrt{(2\pi n)} + n \ln n - n$$

$$\ln x! = \ln \sqrt{(2\pi x)} + (np + t\sqrt{npq}) \ln (np + t\sqrt{npq}) - np - t\sqrt{npq}$$

$$\ln (n-x)! = \ln \sqrt{(2\pi(n-x))} + (nq - t\sqrt{npq}) \ln (nq - t\sqrt{npq}) - nq +$$
$$+ t\sqrt{npq}$$

y recordando también que

$$\ln(np(1 +tk_1) = \ln np + t k_1 - t^2 k_1^2 / 2 + O(q^3/(n\sqrt{n} p^3))$$

$$\ln(nq(1+ - tk_2) = \ln nq - t k_2 - t^2 k_2^2 / 2 + O(p^3/(n\sqrt{n} q^3))$$

haciendo mucha álgebra se llega a la densidad Normal. Cfr. Teoría de las probabilidades. V. K. Zajarov, B. A. Sevastiánov, V. P. Chistiakov. Ed. Mir. Moscú. Pág.149.

$$= (1/\sqrt{2\pi}) e^{-t^2/2} \Delta t (1 + \varepsilon) \text{ donde } \Delta t = 1/\sqrt{npq}$$

Lo que enunciaron De Moivre y Laplace es que si p está entre cero y uno, siendo $t = (x-np)/\sqrt{npq}$, entonces si el valor absoluto de t es menor a cualquier número c por pequeño que sea, la variable t sigue la distribución Normal cuando n tiende a infinito.

Por medio del símbolo de las combinaciones se puede presentar a la Binomial, y de hecho es pues la más general forma conocida.

$$B(n,x,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

y es igual a

$$n! p^x (1-q)^{n-x} / (x! (n-x)!)$$

para funciones discretas; pero si son continuas con ésta

$$\Gamma(n+1) p^x (1-q)^{n-x} /(\Gamma(x+1) \Gamma(n-x+1))$$

Verbalmente el número combinatorio se interpreta como " el número de permutaciones sobre el total de elementos con atributo A y 1-A, dividido entre la partición de elementos con atributo A multiplicado por la partición de los elementos con atributo 1-A."

Aqui podemos anticipar que dada la común proveniencia del modelo matemático de la Binomial con la Normal, haciendo

$$x = np + t\sigma$$

con n grande y $\sigma = (npq)^{1/2}$ la binomial se aproxima a la normal por la razón de que ambas parten del modelo de bipartición y comparten la CARACTERISTICA ALEA. La x de la binomial de hecho es un valor cualquiera que sigue esa distribución; pero no es precisamente el de mayor probabilidad. Por ejemplo, decir : cuál es la probabilidad de obtener 2 en una población dicótoma de 10 elementos, con probabilidad 1 / 2 sería en términos de las variables conocidas: $10!*.5^2/ 2! * (1-.5)^{10-2} / (10-2)!$. En la Distribución Normal veremos que la x más probable es $10*.5 = 5$. Esta es la diferencia entre la x de $p^x / x!$ binomial y la $x = np + t\sigma$ de la Normal. Bueno es recordar estos conceptos elementales para clarificar los modelos matemáticos que usamos en las Probabilidades.

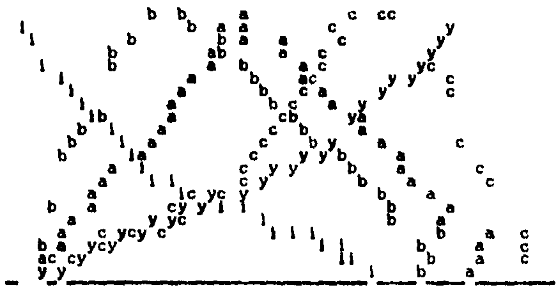
Lo hermoso de ésta densidad es que al representarla con áleas,

$$B(n,k,p) = n!\ æ[p,k] * æ[1-p,n-k]$$

aunado a su simetría, nos permite el cálculo de convoluciones más fácilmente. Esta es una convolución de dos elementos; los elementos favorables. Los elementos posibles son la suma de estos pares de convoluciones; pero éstas suman 1.

Hacia adelante, con este modelo se construyen modelos de tricotomía, tetratomía, pentatomia, etc. dando como resultado la distribución multinomial y yéndonos ,más lejos, casi todas las Distribuciones de Probabilidad que conocemos, ya sean discretas o continuas.

Aún cuando parece ocioso vamos a **presentar un escenario de la tendencia de la mayoría de las densidades de probabilidad**; y que además son de forma campanoide.



En el caso de la función (a) se observa simetría como en la Binomial con $p = q = 1 / 2$ ó como la Normal. La función (b) está cargada a la izquierda y se dá en el caso de la binomial con valores pequeños y en la Poisson, etc.; cargada a la derecha está la función (c) vgr. para la Binomial con $p > .5$.

En mayor o menor grado todas las funciones de densidad de Probabilidad se mueven como las funciones (a), (b), (c) y esa unidad característica se debe exclusivamente a la función ALEA: $æ(p, x)$

FUNCION DE DENSIDAD MULTINOMIAL

Esta densidad se llama así porque es el término general del desarrollo multinomial de $(p_a + p_b + \ldots + p_z)^n$

Sea $n = a + b + c + d + \ldots z$ el tamaño de una muestra con z clases y sean las correspondientes probabilidades p_a, p_b, p_c, ...entonces

$$M(n, \Sigma p_i) = \left\{(a+b+c+\ldots+z)! \left(p_a{}^a / a!\right)\left(p_b{}^b / b!\right) \quad \left(p_z{}^z / z!\right)\right\} / \left\{1\right\}$$

El denominador vale 1 porque es la suma de las convoluciones posibles.

$$M(n, \Sigma p_i) = n! * \; æ(p_a, a) * æ(p_b, b) * \ldots * \; æ(p_z, z)$$
$$= n! \prod æ(p_{n-\Sigma i}, i)$$

que también se parece a la binomial, sólo que aquí no son biparticiones sino n-particiones.

Como ejemplo de esta distribución vaya el siguiente: supóngase que un departamento de una compañía tenga 100 empleados; 50 de ellos con preparación académica superior; 30 con grados superiores y 20 con formación de escuela secundaria. Se toma una muestra con reemplazo de 10 empleados. Hallar la probabilidad de que la muestra contenga 5 de preparación académica, 3 con grado superior y 2 con formación de escuela secundaria. Ver Lincoln L. Chao. Estadística para las ciencias administrativas. Pág. 137.

FUNCION DE DENSIDAD GEOMETRICA

Si queremos saber con que probabilidad aparecerá el atributo A después de que aparezcan x atributos que no nos interesan entonces usaremos esta densidad, la cual se expresa así:

En el eje de tiempo:

pppppppppppp (x veces) q

$$G(x,p) = x! \quad p^{x}/x! \quad q^{x+1-x}/\ (x+1-x)! = p^{x} \cdot q$$

con parámetro p ($0 < p < 1$).

Con áleas queda:

$$G(x,\ p) = x!\ \text{æ}(p,x)\ \text{æ}(1-p,1)$$

Esta última forma nos recuerda a la función de densidad Binomial.

FUNCION DE DENSIDAD HIPERGEOMETRICA.

Es una función discreta cuya representación es:

$$f(x) = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}}{\binom{N}{x}}$$

en la que $N = N_1 + N_2$ y $x = x_1 + x_2$

En seguida explicaremos la anotación. Se tiene una población de N elementos; de las cuales N_1 son rojos y $N_2 = N - N_1$, son negros; se elige aleatoriamente un grupo de x elementos. Se trata de investigar la probabilidad f(x) de que el grupo elegido contenga exactamente x_1

elementos rojos; x_1 puede ser cualquier entero entre cero y N_1 ó x, el que sea más pequeño. Cfr. W. Feller. Vol I. pág. 59. Está claro que nuestra funcióm de densidad es "Favorables" entre "Posibles".

En áleas:

$$\left\{ N_1!\ æ(1,x_1)\ æ(1,N_1-x_1)\ N_2!\ æ(1,x_2)\ æ(1,N_2-x_2) \right\} / \; / \left\{ N!\ æ(1,x)\ æ(1,N-x) \right\}$$

Generalizando

$$= \Pi \left[N_i!\ æ(1,x_i)\ æ(1,N_i-x_i) \right] / \left(N!\ æ(1,x)\ æ(1,N-x) \right)$$

donde $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ y $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$

Presentada en esta forma la función de densidad Hipergeométrica parece más bien un producto de binomiales, lo cual no sería aparente si no es por medio de la función álea.

DENSIDAD BINOMIAL NEGATIVA o DE PASCAL

Esta distribución se interpreta como la distribución de probabilidades que corresponde al tiempo de espera del r-ésimo éxito y se basa en las Combinaciones Con Repetición. Si r = 1 esta distribución se reduce a la distribución geométrica y, es función límite de la distribución de Polya. Su entorno de aplicación más conocido es el Seguros de Accidentes y Enfermedades.

$$f(x) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k$$

con parámetros (r, p) y k = 1, 2, 3, ...

con áleas:

$$= (r+k-1)!\ æ(p,r-1)\ æ(1-p,k)\ p$$

La característica común que tienen todas estas funciones de distribución en el denominador o sea en los casos posibles es que vale 1 ya que el barrido que se hace en la sumatoria vale 1 y es la función de Distribución misma.

Otra característica, es la de que son el cociente entre particiones; el valor de las convoluciones del denominador vale uno.

FUNCION DE DENSIDAD DE POISSON

El nombre de esta función deviene de su descubridor Simeón D. Poisson. Esta densidad es el modelo representativo de densidad a base de, y exclusivamente, compuesta de Aleas; le llaman la densidad de los eventos raros debido a que su media λ es pequeña y resulta de multiplicar una pequeña probabilidad de ocurrencia (p) por una población grande (n).

Siendo de una estructura tan transparente y elegante, así mismo, es la base de todos los procesos de Poisson y cuya característica común es que la aparición de este tipo de eventos, en un periodo dado, son independientes todos y proporcionales a dicho periodo.

Recordemos que la probabilidad de que aparezcan x eventos con un valor esperado medio λ, o sea, np, en una binomial, para que λ se mantenga constante a medida que n crece implica una p tendiendo a cero. Recordemos que

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x}}{x!}$$

de parámetro λ ($\lambda > 0$). Tradicionalmente se le conoce así:

$$P(x,\lambda) = e^{-\lambda}\,\lambda^{x}/x!$$

es el valor presente de la serie $\lambda^{x}/x!$; que también es la misma que

$$P(\lambda,\ x) = \frac{\lambda^{x}}{x!\ e^{\lambda}} = \frac{\frac{\lambda^{x}}{x!}}{e^{\lambda}}$$

$$P(\lambda,\ x) = \frac{\lambda^{x}/x!}{{}^{0}/0! + \lambda^{1}/1! + \ldots + \lambda^{x}/x! + \ldots}$$

o en áleas

$$= \frac{a(\lambda,x)}{\Sigma\ a(\lambda,x)}$$

Esta densidad depende de un parámetro λ que vale μ y σ^{2}, o sea, su media y su varianza son iguales; sin embargo, dicen los conocedores que para que funcione bien n debe ser grande y p pequeña, lo que produce una λ constante. Es un magnífico ejemplo de cociente de una álea entre una suma de áleas; es la proporción, como se dice más familiarmente, entre la álea en cuestión que es un número y el área de todas.

Ahora voy a desarrollar y deducir la distribución ésta, a partir de conceptos sencillos y elementales. Los procesos de Poisson tienen una amplia gama de aplicación; control de calidad, stocks, límites de retención y Teoría de Ruina en las Compañías de Seguros tanto de Personas como de Daños, Lineas de Espera, etc.

Se dá un proceso de Poisson cuando se cumplen estas tres condiciones:

1.- La aparición de un evento no interviene el la aparición del otro.

2.- La cantidad de eventos aparecidos es directamente proporcional al tiempo o distancia expuestos. Esto significa que:
si 1 evento aparece en 1 segundo
si 2 eventos aparecen en 2 segundos
entonces en UN minuto aparecerán 60 eventos.

3.- Dos eventos no aparecen al mismo tiempo.

El NUMERADOR de Poisson es: $\lambda^x / x!$

El DENOMINADOR de Poisson es $e^\lambda = \sum_x \lambda^x / x!$

La representación geométrica del numerador es una campana colocada sobre la absisa λ cuya cúspide o valor máximo es $\lambda^\lambda / \lambda!$. Estaremos de acuerdo en que si al numerador y denominador, a cada uno lo dividimos entre $\lambda^\lambda / \lambda!$ lo que estamos haciendo es reducir la altura de cualquier campana NUMERADOR a tamaño UNO. El DENOMINADOR, que es la suma de los valores posibles. En esta distribución λ es igual a la media y a la varianza; ésto es una limitación, sin embargo para valores de λ menores a uno es la densidad exacta. Haciendo $x = \lambda + t\lambda$, se aproxima a la Normal cuando n tiende a infinito.

FUNCION DE DENSIDAD UNIFORME

Si a es el segmento de recta, uno de cuyos valores puede incidir en él con atributo a y (a+b) la recta con un valor posible entonces la densidad de ésta es:

$$f(x) = 1 / (b-a)$$

para $x \in [a,b]$, $a < b$; vale cero la función si x no está en el intervalo. En términos de álea:

$$= æ(1,1) / æ(b-a,\ 1)$$

FUNCION DE DENSIDAD EXPONENCIAL

$$f(x) = \lambda\ e^{-\lambda x}$$

con parámetro $\lambda > 0$ para $x >= 0$; $f(x) = 0$ para $x < 0$

Me voy a detener un poco en esta función, por dos motivos; el primero por su muy extensa aplicación y otro, por su interés teórico. Comenzaré con la exponencial positiva; la densidad exponencial que aquí vamos a tratar es la inversa de la anterior.

Dado que el modelo físico en que se sustenta es el que predomina en la naturaleza, lógico es que esta función corra la misma suerte. Pongamos un ejemplo para visualizar la exponencial. Vamos a suponer que estamos en la cúspide de un cerro cuya pendiente es de 15 grados de inclinación; que el cerro está cubierto de nieve y que dejamos caer una piedra. Después de algún tiempo, dependiendo de la textura de la nieve, la piedra se habrá cubierto de nieve y será una bola de considerable volumen. Veamos cómo se le ha ido agregando la nieve; intuitivamente es claro que en un momento dado la cantidad de nueva nieve en la bola tiene que ver con el tamaño de la bola; así, una bola pequeña tiene poco añadido nuevo;, en cambio, una bola grande tiene más volumen para absorber más nieve. Eso en palabras se expresa como la relación, como el cociente entre la nueva cantidad de nieve agregada y el nuevo crecimiento de la bola, o sea, el incremento en la nieve entre el incremento de tamaño de la bola, i.e., los crecimientos así mismo contribuyen con nuevos crecimientos. Cuando el cociente o relación es CONSTANTE es entonces cuando se dice que el crecimiento es exponencial. Ahora ya podemos ver que la mayoría de los crecimientos o decrementos (crecimientos negativos) en la naturaleza siguen este modelo; vgr., el crecimiento en los animales y en las plantas, en algunas reacciones físicas, químicas, etc.

Si t es el tiempo transcurrido desde la iniciación del crecimiento, y el volumen o tamaño actual de la bola de nieve o de la planta, entonces:

$$dy / y \text{ es una constante}$$

por ejemplo, si $r = dy / y = 0.1$ decimos que el crecimiento respecto al volumen es del 10 % y el tamaño actual vale 100, o sea 110; el siguiente incremento será $.1 * 110 = 11$; y el siguiente $110 + 11 = 121$ y el incremento 12.1 y así sucesivamente.

El modelo tal como generalmente se conoce es así:

$$y = K e^{tr}$$

donde K es el tamaño inicial, t el tiempo y r la proporción de crecimiento. Cuando hay decremento se convierte en $y = K e^{-tr}$.

Para pasar de éste modelo al exponencial hay sólo que poner las variables adecuadas: $K = r$; $\lambda = r$; $x = t$ en el entendido que nuestra función de densidad exponencial es la decreciente; $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ donde λ es el valor inicial disminuído por medio de $e^{-\lambda x}$.

Regida por esta ley también lo están la velocidad de crecimiento de información técnica, crecimiento de la población terrestre, crecimiento natural de los seres vivos, crecimiento financiero, etc.

En Aleas queda así $f(x) = \text{æ}(\lambda, 1) / \sum_{0}^{\infty} \text{æ}(\lambda x, 1)$

FUNCION DE DENSIDAD NORMAL

Esta densidad se debe a Abraham De Moivre, el cual escribió The doctrine of chances en 1716 y a Pierre Simon Laplace (1749-1827) quienes primero la emplearon y a Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855) posteriormente. De esta misma época es George Louis Leclerc, Conde de Buffon, introductor del primer ejemplo de probabilidad geométrica: la aguja de Buffon que experimentalmente permite determinar al número π, componente de la Normal.

La distribución Normal es la función de densidad de más amplio uso, en que por ello a veces, en honor a la verdad, se incurre en abuso, dado que cuando n tiende a infinito todas las distribuciones acampanadas o en conjunto tienden a ella. Se conoce también esta distribución como segunda ley de Laplace, distribución laplaciana, distribución gausiana, distribución de Laplace-Gauss, distribución de Gauss-Laplace.

$$f(x) = \frac{e^{-.5\{(x-\mu)/\sigma\}^2}}{(2\pi\sigma)^{1/2}}$$

con parámetros (μ, σ^2); para x entre menos infinito y más infinito.

Así como la distribución binomial contempla probabilidades y la distribución de Poisson, valores esperados, del mismo modo la distribución Normal se refiere al comportamiento de la DISTANCIA (ERROR = $x-\mu$) EN UNIDADES DE DESVIACION (σ) que separa al valor observado del evento x de su valor más frecuente o esperado (media). Normal es la distribución de una variable compuesta en la siguiente forma: se dice en función de la variable observada x, del valor más probable μ o media, y de la mayor o menor amplitud en la dispersión de la variable x con respecto a μ. A esa variable le llaman t y es igual a $(x-\mu)/\sigma$. Al valor μ se le conoce como valor central dado que al rededor de él están distribuidos los demás: la mitad hacia un lado y la otra mitad al otro; es además, cuando la función adquiere su máximo valor: $1/\sqrt{2\pi\sigma}$.

Ahora bien, vamos a ver de dónde viene $t^2/2$: es el error cuadrático medio. Vamos a detallar un poco ésto último basándonos en el juego al tiro al blanco. El objetivo en este juego es de acertar en el blanco.Consta de dos instrumentos: el círculo en cuyo centro está el blanco o punto objetivo al cual se pretende acertar y el disparador, llámese flecha, dardo o cualesquiera otras variantes. Cada disparo x es un evento y al conjunto de disparos en una sesión se le llama experimento. El círculo es de radio con magnitud arbitraria; el centro está en μ. La desviación estándar σ es una magnitud o número real mayor o igual a uno, $\sigma = 0$ es un parámetro común a las matemáticas determinísticas, con el que vamos a determinar nuestro grado de habilidad en el juego; así decimos que si todos los disparos dan el blanco, tuvimos cero errores o cero desviaciones; si la mayoría de los disparos están cerca del blanco, diremos que tenemos pequeñas desviaciones o una σ pequeña; si no somos muy hábiles, los disparos a partir del blanco vendrán a menos, estarán más dispersos y entonces nuestra σ es mayor que la del caso anterior; μ y x son números reales que se mueven en todo el eje de las x, pudiendo por lo tanto ambas asumir valores positivos o negativos. En cada disparo podemos anotar la siguiente información: si dimos en el centro μ, acertamos y entonces $x = \mu$; si no dimos en el blanco, nos habremos desviado $x - \mu$ y diremos que hemos cometido un error de tamaño $x - \mu$; el mismo error $(x - \mu)$ no tiene el mismo peso para un jugador hábil que para un inexperto; por lo tanto el error debe ser medido de acuerdo a la habilidad σ, la cual rige para cada sesión, quedando nuestro error acotado o ponderado así:

$$(x - \mu)/\sigma$$

Cuando en forma familiar hablamos de distancia, en realidad estamos hablando de distancia al cuadrado: $((x - \mu)/\sigma)^2$. Ahora bien, como tanto x como μ cada una pueden asumir el signo positivo o negativo, obtendremos cuatro resultados: dos de igual valor absoluto y diferente signo, por lo que al elevarse al cuadrado producen un solo resultado; ésta es la razón por la que hay que multiplicar la distancia al cuadrado por un medio: error cuadrático medio.

$$((x - \mu)/\sigma)^2 / 2$$

Para que nuestra distribución sea hacia abajo, debemos multiplicar además, la nueva variable por -1

$$u = - ((x - \mu)/\sigma)^2 / 2$$

El siguiente paso es alear la variable u

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{u}{n} \right)^n = e^u$$

entonces e^u es el numerador; el denominador es la integral de esa función (e^u) y vale $\sqrt{2\pi\sigma}$, como lo demostraremos abajo.

De esta manera se llega a

$$N (\mu, \sigma^2) = e^{-t^2/2} / 2\pi\sigma^{1/2}$$

$$= \frac{e^{-t^2/2}}{\int e^{-t^2/2} dt} = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

y es directo que

$$\int e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi\sigma}$$

cuando σ <> 1. Las dos integrales anteriores van de menos infinito a más infinito.

Vamos a demostrarlo. (cfr. Iván Obregón Sanin. Teoría de la probabilidad. Ed. Limusa. México 1975 pág. 104.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy$$

transformando a la última integral a coordenadas polares, r, θ

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi$$

y de ahí

$$I = (2\Pi)^{1/2},$$

que es lo que se quería demostrar.

Por medio de la fórmula de Stirling para calcular factoriales se puede aproximar a la Normal por medio de

$$N(\mu,\ \sigma^2) = (1 + 1/12\sigma)\ (\sigma^\sigma/\sigma!)\ e^{(-\sigma-.5(x-\mu)^2)}$$

Con ésto es claro que la función numerador es la de los atributos favorables y la del denominador $(2\pi\sigma)^{1/2}$es la de los posibles.

Tiene la ventaja sobre otras distribuciones por el hecho de que la

$$N(\mu,\sigma^2) = (1/\sigma)^* N(0, 1)$$

La demostración directa de que la función de distribución de esta densidad vale uno es muy simple. Haciendo la suma de todas las densidades posibles vemos que ésta no afecta a la constante $\sqrt{2\pi}$; por lo tanto si la sacamos como factor común, la dicha suma afecta sólo al numerador cuyo valor es $\sqrt{2\pi}$, y en conclusión $\sqrt{2\pi} / \sqrt{2\pi}$ vale uno; que es lo que se queria demostrar.

Cuando n tiende a infinito se pueden hacer aproximaciones de las distribuciones acampanadas linearizando así los parámetros de cada distribución:

x = media MENOS t-veces la desviación estándar

media y desviación estándar propias de cada distribución de que se trate.

La distribución Normal es una de las más hermosas en Probabilidades; es perfectamente acampanada, simétrica y por sencilla, elegante: μ le da la posición en el eje de las x y σ es la que unívocamente determina la forma, como en todas las distribuciones en que existe σ; además para toda μ y para cualquier σ se cumple que el área bajo la curva está comprendida en 99.7 para $\mu+3\sigma$ y $\mu-3\sigma$. Es la aleatorización de $t^2/2$ que es un triángulo equilátero, cuyas propiedades caen dentro de los problemas isoperimétricos ("De todos los triángulos con una área dada, el triángulo equilátero es el tiene el menor perímetro"). Ver Nicholas D. Kazarinoff. Geometric inequalities. Random House. Estados Unidos 1961.

Si en vez de $t^2/2$ tomáramos $t^2/4$ ó $t^2/.4$, el valor máximo sería igual al de la Normal; pero la forma, más amplia o más estrecha respectivamente.

Así como en la práctica estadística se acostumbra restar del valor medio a cada observación a fin de obtener una normal tipificada o estandarizada ($\mu=0$, $\sigma^2=1$) para poder entrar a tablas, también se puede echar mano de recursos, como el que sigue: al multiplicar o dividir una constante por la media o la varianza, éstos parámetros se ven afectados de la siguiente forma: "multiplicando (o dividiendo), a cada observación por una constante, se multiplicará (o se dividirá) la media aritmética por la misma constante, se multiplicará (o se dividirá) a la varianza por el cuadrado de la constante, y se multiplicará (o se dividirá) la desviación típica por la misma constante. Ver Dixon y Massey. Introducción al análisis estadístico. 1965. Pág. 22.

Vamos ahora a insistir cómo también **La distribución Normal viene de álea**. El numerador es $e^{-t^2/2}$, o sea, $\sum æ\ (-t^2/2,\ i)$ con i de cero a infinito.

$$\sum æ\ (-t^2/2,\ i) = (-t^2/2)^0/0! + (-t^2/2)^1/1! + (-t^2/2)^2/2! + \ldots$$

el denominador, como ya vimos, es $(2\pi\sigma)^{1/2}$, el cual es la integral indefinida de $e^{-t^2/2}$; pero también

$$\sum_t \sum_i æ\ (-t^2/2,\ i)$$

con i de cero a infinito y después con t de menos infinito a más infinito.

El **carácter aleatorio de π**, el cual interviene en el denominador de la distribución Normal y en otras, se puede intuir en su composición misma. Según la fórmula de John Wallis (1616-1703)

$$\pi = \lim 1/n \left(\frac{2 * 4 * \ldots * 2n}{1 * 3 * \ldots * (2n-1)} \right)^2$$

para n = infinito. De acuerdo con ésto, n! está dividido en dos partes; el numerador formado por el producto de los números pares y el denominador, por el de los números impares, ambos dentro del paréntesis. Cada número par (perímetro) está ponderado por su impar (perímetro) inmediato anterior. Cfr. Kazimierz Kuratowski. Introducción al Cálculo. 1978. Pág. 240.

$$\pi = 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3832\ 79$$

En la distribución Binomial se trata de las áleas de probabilidades directas, p; en la Poisson, de las áleas del valor esperado λ, que es a la vez media y varianza; en la Multinomial de probabilidades p_i; en la Normal, de la distancia cuadrática media del evento x y la μ en tantos de σ. Como puede apreciarse, aún las distribuciones que no estudiamos, como la de Polya, llamada de contagio, o la de Pareto, distribución del ingreso económico o número de hijos por familia; pero exceptuando la distribución de Cauchy, todas se asimilan a la Normal por medio del modelo álea.

FUNCION DE DENSIDAD LOGARITMICA-NORMAL

Si hacemos $t = (\mathrm{Ln}\ x - \mu)/\sigma$, y seguimos el mismo razonamiento que en la normal llegamos a ésta:

$$N'(\mu,\sigma^2) = \left(e^{-t^2/2}\right) / \sqrt{2\pi}\ x\sigma$$

de parámetros $(\mu,\ \sigma^2)$ y $x > 0$, (Ver apéndice figura 14)

o sea que respectivamente a la normal queda:

$$N'(\mu,\sigma) = N(\mu,\sigma)/\ (x\sigma)$$

Esta función es de uso frecuente en la Física matemática.

DENSIDAD LOGISTICA

Tan sólo apunto esta distribución en la que álea solamente interviene a través del número e para que se vea la simplificación.

$$f(x) = \frac{\pi\, e^{\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi(x-m)}{\sigma}\right)\right]}}{\sigma\sqrt{3}\left\{1 + e^{\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{x-m}{\sigma}\right]}\right\}^2}$$

con el cambio de variable $\alpha = (\pi\ /\ \sqrt{3})((x - m)/\ \sigma)$ y álea, ésta se simplifica

$$f(x) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}}\ \frac{e^{-\alpha}}{(1 + e^{-\alpha})^2}$$

$$= (\pi/\sigma\sqrt{3}) \sum æ(-\alpha, i) \left[1 + \sum æ(-\alpha, i) \right]^{-2}$$

Ver en el apéndice, figura 15

Como puede observarse hasta aquí, las funciones de densidad presentadas en su forma tradicional parecen complicadas y se pierde el concepto sencillo de la definición: atributos favorables entre atributos totales, ya sean CASOS, ya PROBABILIDADES, ya VALORES ESPERADOS, ya DISTANCIAS, etc.; empero las áleas hacen que sean menos complejas y por ende más inteligibles.

Sólo mencionaré de nombre a la distribución χ, cfr. fig.11 del apéndice, a la distribución de Pareto fig. 16 del apéndice, a la distribución de Sherman fig. 17 del apéndice, a la distribución de Weibull-Gnedenko fig. 19 del apéndice, a la distribución de Cauchy, todas ellas de forma campanoide y que seguramente se pueden poner en términos de álea.

Hasta aquí lo relacionado entre álea y función de densidad; no sin antes recalcar que la característica de estas distribuciones es que son el cociente entre expresiones que contienen áleas o e^{x}, y otra muy importante es que TODAS tienen forma ACAMPANADA sin excepción y que la variante entre ellas es que el valor más alto puede estar cargado a la derecha o a la izquierda; sólo en la Normal está centrado. Nuestras funciones además, comenzando por la densidad uniforme, que es lineal, pasamos a otras de orden dos lo cual nos indica que provienen de cúbicas u otras derivadas del número e^{-x}. Esta forma acampanada la comparten todas.

Hemos visto en este capítulo sólo funciones de densidad. Ahora nos enfocaremos a

a).- Funciones: Generatriz y Característica.

b).- Funciones: Transformada de Laplace y de Fourier.

B).- FUNCION GENERATRIZ DE FUNCIONES Y FUNCION CARACTERISTICA

Nadie ignora la existencia del operador E (Esperanza). También existe el operador E en diferencias finitas cuya definición, entre paréntesis, consiste en adelantar del valor actual de la función, el anterior y se liga a Δ así:

$$\Delta = E + 1$$

Δ es el operador de diferencia y E, es el de translación o adelantamiento.

Volvamos al operador Esperanza. En el Cálculo de Probabilidades se puede decir con justeza, que este operador es el más genuinamente probabilista. Se dice tomar la Esperanza de una función cualquiera, en el mismo sentido de sumar sus valores probables. Si el valor esperado es lineal se trata de la media; si de los cuadrados, del segundo momento, etc.. Hay momentos respecto a la media o no. Se denotan por la letra griega μ, que se pronuncia mi.

La función generadora de momentos (acumulación, monto) es el caso típico de función generadora de función. Los momentos son funciones derivadas (provenientes) de una función original, cada una de ellas, describiendo las características de ella: posición, anchura, altura, i.e., media, variancia, curtosis, etc.

El objetivo de la función generadora es crear una serie creciente de potencias: x, x^2, x^3, ..., en sentido álea.

$\sum x * f(x)$ es la media

$\sum x^2 * f(x)$ es la variancia y así. Esto que aquí asentamos en los siguientes pasos detallaremos su presentación formal.

$$E(e^{tx})$$

se denota; más explícitamente la escribiré así: $E(e^{tx} * f(x))$.

Cada término, componente de la siguiente fórmula, merece una explicación por separado.

- t es una variable formal, "tasa", velocidad.
- x es el "tiempo".
- f(x) es una función, de densidad o no, vgr.

$$B(n,x,p) = n!\ æ(p,x)\ æ(q,n-x)$$

en ésta reconocemos a la binomial; aplicando el operador E

$$E(e^{tx}f(x))$$

y en áleas

$$E\left(\sum æ(tx,i) * f(x)\right)$$

$$= \sum\sum æ\ (tx,i) * f(x)$$

desplegada es

$$= E\left\{\left[(tx)^0/\ 0! + (tx)^1/\ 1! + (tx)^2/\ 2! \ + \ (tx)^3/\ 3! + \ldots\right] * f(x)\right\}$$

$$= \sum (tx)^0 * f(x)/0! \ + \ \sum (tx)^1 * f(x)/\ 1! \ + \ \sum (tx)^2 * f(x)/\ 2! \ + \ldots$$

A la función momento así se le llama, por momentum = peso, del latín.

La función generadora puede o no existir; sin embargo, su similar en el dominio complejo, la característica, siempre existe.

La función generatriz es en el dominio real como la función característica lo es en el dominio complejo, ambas son "montos".

Según la fórmula de Euler e^{iz} = cos z + i sen z. Sabiendo que $\cos^2 z$ + i * $\mathrm{sen}^2 z$ = 1; también sabemos que la función característica siempre existe, evidentemente que $(e^{i\pi})^2 = 1$ siempre existe. En este caso tan sólo hemos sustituido la z por π.

$$E(e^{iz})$$

es la función generatriz en el medio complejo conocida como función característica; ahora bien, E(cos z +i sen z) es la contraparte de la función característica y es la llamada serie de Fourier (se basa en el Teorema de De Moivre). Cabe recordar que

$$e^{inz + 2\pi inz} = e^{inz}$$

o lo que es lo mismo, es periódica en el intervalo (π,2π)

La relación que las liga es ésta:

$$\text{EULER-TAYLOR} \quad = \quad \text{FOURIER}$$

$$f(x) = \sum_{-N}^{+N} c_n\, e^{inx} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \,\mathrm{sen}\, nx)$$

donde los coeficientes a_n, b_n, y c_n son ortonormales; a y b son las amplitudes y n es la frecuencia; y

$$c_m = 1 / 2\pi \int_{-\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx.$$

lo cual quiere decir, que en la función generatriz y en la función característica, y en general, donde intervenga el número e podemos también trabajar con las funciones trigonométricas, vgr., en la distribución de Poisson o en la misma distribución Normal.

Por ésta razón, también es válida la afirmación inversa.

$$e^{inz} = \cos nz + i \operatorname{sen} nz$$
$$e^{-inz} = \cos nz - i \operatorname{sen} nz$$

por lo tanto

$$\cosh z = (e^{z} + e^{-z})/ 2$$

y así las demás funciones trigonométricas a partir de éstas.

Otra demostración más directa es ésta. e^{x} es la suma de las áleas pares más la suma de las áleas impares. e^{-x} es la suma de las áleas pares menos la suma de las áleas impares. Por ésto, $e^{-x} + e^{x} = 2 * \sum$ áleas pares. Ahora bien, la suma de las áleas pares es cos x; y entonces despejando queda:

$$\cosh x = (e^{-x} + e^{x})/ 2 \quad = \quad e^{-x}/ 2 + e^{x}/ 2$$

Y ya que hemos llegado a tocar las funciones trigonométricas hiperbólicas, no me parece ocioso recordar porqué se llaman hiperbólicas. Recordemos que en la trigonometría rectilinea el lado opuesto al ángulo es una recta; hay también funciones trigonométricas circulares en que como lo indica su nombre el lado opuesto es precisamente un arco de circunferencia mirando hacia el centro, pudiendo estar orientado también al revés. Las funciones trigonométricas hiperbólicas tienen el lado opuesto limitado por una sección de hipérbola. Esto sugiere otras delimitantes como puede ser parábola, elipse o cualquier función de cualquier grado.

Existen tantas trigonometrias como tipos de coordenadas; las hay plana o rectilinea o polar; esférica, cilindrica, hiperbólica, etc.

Sabemos que $y = x/a$ es la recta; $y = (x/a)^2$ es la parábola; $r^2 = (x/a)^2 \pm (y/b)^2$ es una circunferencia, una elipse o una hipérbola. Esta última expresión es una general representación de las cónicas, dependiendo del tamaño de a y b y del signo $\pm$.por ejemplo, si a=b y b=1 y con signo + ésto es una circunferencia. Como vemos siempre es cómodo tratar con el circulo unitario.

Aqui, si: $x = \cos z$ y $b = i \operatorname{sen} z$ y **a** y **b** difieren de uno y el signo es -, entonces hablamos de funciones trigonométricas hiperbólicas.

Ahora bien, como hemos ya visto, la mayoria de las densidades son parábolas hacia abajo; sin embargo podrian existir como cocientes en la circunferencia, en la elipse o en secciones cerradas, limitadas, por hipérbolas.

C).- TRANSFORMACION DE FUNCIONES: DE LAPLACE Y DE FOURIER.

Ahora vamos a investigar el papel de las **áleas en las transformadas de Laplace y de Fourier.**

A las funciones transformadoras de funciones (a secas como **transformadas** conocidas) **se las define** en términos actuariales, como **el valor actual de una sucesión** (f(x)= beneficios, primas, primas menos siniestros, rentas, etc.) **de números, variables o funciones aleatorios o no,** etc.) calculado a una tasa (velocidad) **t** y por **x** **años:**

$$\mathfrak{F}(t) = \int e^{-tx} f(x)\, dx = \int \frac{f(x)}{e^{tx}}\, dx$$

los **límites** de integración de **cero a infinito.**

El **alma de** todo este asunto es **t**. La integral tiene un radio de **convergencia** r^{*}, de modo que para $0 \leq x' < r^{*}$ converge. El valor de x debe ser positivo, ya que de otro modo x^t sería imaginario. Así, con $0 < e^{-t} < r^{*}$ la integral converge y define a una función $\mathfrak{F}(t)$, e implica que $t > \log(1/r^{*})$. Cfr. Advanced Calculus de Wilfred Kaplan. Addison-Wesley 1959. Pág. 380.

Dado que **el conjunto de las áleas a(-tx, i) asume la forma**

campanoide, el producto de $e^{-tx}f(x)$ resulta en forma campanoide también. Las transformadas sirven para alisar funciones; también, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales: no es necesario encontrar la solución general y después determinar las constantes (con las transformadas la solución es directa); para establecer funciones de densidad o procesos estocásticos cualesquiera; se usan en la física, ingeniería, etc. Tienen cierta analogía con el manejo de los logaritmos: a).- Se aplica la transformada; b).- Se maneja la información, en base al **parámetro t**; c).- De ser necesario, se aplica la inversa de la transformada, para regresar al escenario original.

Si a los miembros de una ecuación se les aplica el Operador de transformación, el resultado no se altera. Aquí es conveniente volver a insistir en que para encontrar el valor presente interviene e^{-tx}. La integración es "por partes".

Existen otras Transformadas que sólo citaré: Geométrica, Coseno de Fourier, Seno de Fourier, de Mellim, de Hankel, etc.

La Transformada de Fourier en el medio complejo es la homóloga a la de Laplace en el medio real. Se la define así:

$$F(\xi) = \int e^{-it\xi} f(x)\, dx$$

Los límites de integración de $-\infty$ á $+\infty$. Interviene en la composición de las matemáticas superiores probabilísticas o determinísticas: **en los Procesos Estocásticos, en las distribuciones infinitamente divisibles, etc**. Es el "valor presente" de la sucesión aleatoria o no, $f(x)$.

Volvamos a la Transformada de Laplace o Exponencial, que es otra forma de encontrar funciones de densidad; en seguida veremos qué relación guarda con las funciones generatrices que acabamos de ver y con la función Gamma.

la función generatriz de funciones es $E(e^{tx})$

la función transformadora de Laplace es $\int e^{-tx}f(x)dx$

la función Gamma es $\int e^{-tx}\, x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha)/t^{\alpha}$

$$= (\alpha-1)!/t^{\alpha} = (1/\alpha)\alpha!/t^{\alpha}$$
$$= (1/\alpha)^{*}\ æ(t,\ \alpha)$$

ambas, suma e integral, de cero a infinito.

Como a simple vista se ve, la relación entre ellas es evidente.

Por medio del operador E expresemos la transformada de Laplace:

$$E(e^{-tx})$$

ó $\sum e^{-tx} f(x)\ \Delta x$ en el medio discreto y

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}\ f(x)\ dx$$

en el medio continuo, la cual en algunos casos es más fácil de determinar que la misma función original.

Como podemos observar existe una relación entre Función Generatriz y la Transformada de Laplace; y entre la función Característica y la Transformada de Fourier: álea. Veamos unos ejemplos.

La Transformada directa de Laplace de t^n, $n \geq 0$, s es el parámetro formal, es

$$\mathcal{L}(t^n) = \int e^{-st} \cdot t^n\ dt = (1\ /\ s)\ (\ n!\ /\ s^n\ )$$

los límites de la integral, de cero a infinito; queriendo significar con ésto que

$$\mathcal{L}(t^n) = (1/s)\ æ(s,\ n)^{-1}$$

y lo mismo se tiene para la transformada de Laplace de t^x, $x > -1$

$$\mathcal{L}(t^x) = (1/s)\Gamma(x+1)/s^x$$
$$= (1/s)\ x!/s^x = (1/s)\ æ(s,\ x)$$

que en el medio discreto es

$$\mathcal{L}(t^x) = (1/s)\ æ(s,\ x)^{-1}$$

Este es otro ejemplo:

$$\mathcal{L}(e^{at}t^n) = (1/(s-a))\ n!/(s-a)^n$$
$$= 1/(s-a)\ \Big[\ æ\ (s-a,\ n)\ \Big]^{-1}$$

y uno más, para $\mathcal{L}(H(t-a))$ con $a \geq 0$

$$\mathcal{L}(H(t-a)) = e^{-as}/s = (1/s)\sum_{i=0}^{\omega} æ(-as,\ i)$$

Se desprende en forma natural de lo anterior que la función **álea** también como **Transformada y su Inversa** se pueden considerar. Esta es la Transformada álea (Vgr. la Serie de Taylor, Teoría del Riesgo, Procesos de Poisson, De Márkov, **no estacionarios**, etc.), Monto:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{tx}}{(tx)!} f(x) = \sum æ(\lambda,\ tx)\ f(x)$$

y su Inversa (valor presente)

$$\sum_{0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^{tx}}{(tx)!}\right]^{-1} f(x) = æ^{-1}(\lambda,\ tx)\ f(x)$$

Lo visto hasta aquí en este capítulo tiene como fin demostrar que las áleas son componentes, sine qua non, de muchas Funciones de Densidad, Funciones generatrices, Transformadas de Laplace y Fourier, Funciones Características e Integral de Fourier. De paso también, nos hemos encontrado con que para calcular el "monto" o "el valor presente" de una sucesión, **aleatoria o no,** lo podemos efectuar mediante la Función generatriz o la Característica en el primer caso; y con las Transformadas, en el segundo.

D).- EN TORNO A LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS.

Vamos a comenzar con un breve comentario. Esta Ley de los grandes números así fué bautizada por el matemático Simeón D. Poisson y está expuesta por vez primera por su descubridor Jacob Bernoulli (1654-1705) en su libro Ars Conjectandi, póstumamente publicado en 1713, que significa El arte de conjeturar, o sea, el procedimiento para formar una interpretación en base a las observaciones; conjeturar, viene etimológicamente de conicio y éste a su vez de cum y de iacio: tirar,. arrojar con, lanzar; ésto nos recuerda al juego de los dados. Conjeturar: formarse un juicio por medio de conjeturas.

Jacob Bernoulli fué hermano de Johann Bernoulli (1667-1748); éste a su vez, de estrecha relación laboral con Leonhard Euler y considerado el inventor del cálculo de variaciones fué el padre de Nicolaus Bernoulli (1695-1726), el de "el problema de San Petersburgo" en Probabilidades y de Daniel Bernoulli (1700-1782) autor de Hydrodynamica. Jacob y Johann pertenecen a la escuela de Gottfried Wilhelm von Leibniz.

Jacob Bernoulli contribuyó en las matemáticas determinísticas con el uso de las coordenadas polares, el estudio de la catenaria, la lemniscata y la espiral logarítmica e integración de ecuaciones diferenciales ordinarias así como también a él se deben en las probabilísticas, el Teorema de Bernoulli o Ley de los grandes números, Permutaciones y Combinaciones, Distribución Binomial y los "Números de Bernoulli". Cfr. Historia concisa de las matemáticas de Dirk Jan Struik página 170 y sig.

Los comentarios que siguen están tomados del libro El mundo de las matemáticas de autor James R. Newman, Colección Sigma tomo 3, páginas 134 á 141. En la página 140 se lee, del Ars Conjectandi:

" Lo que aún tiene que ser averiguado es si, cuando se aumenta el número de observaciones, también se sigue aumentando la probabilidad de que la proporción registrada de casos favorables y desfavorables se aproxime a la verdadera relación, por lo que esta probabilidad excederá finalmente cualquier grado deseado de certeza, o si el problema tiene, en fin, una asíntota."

Existen varios planteamientos para demostrar la ley de los grandes números, cfr. William Feller. Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones. Vol. II. Segunda Edición. 1989. Pág. 274 y sig.

Sean x_1, $x_2, \ldots x_n$ independientes con una distribución común, una esperanza μ y varianza finita. Sea S_n la suma de las X_k. Para que existan constantes μ_n tales que para cada $\varepsilon > 0$ fija, conforme n tiende a infinito

$$P(|n^{-1}S_n - \mu| > \varepsilon) \text{ ------> } 0$$

que significa que la probabilidad de que los casos favorables observados difieran de su valor teórico esperado en una cantidad mayor a ε, esa probabilidad tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Se llaman leyes débiles de los grandes números si la probabilidad anterior tiende a cero y, fuertes si tiende a uno; la primera situación implica μ <> 0, la segunda, μ =0.

Ahora bien, vamos a exponer nuestro punto de vista. De acuerdo a la definición clásica de probabilidad ésta sería una proporción constante a priori y para los frecuentistas esa no existe sino su estimación a posteriori, i.e. dialécticamente. Pensamos que así como existe una relación entre análisis matemático y análisis numérico también la hay en las dos extremas definiciones anteriores: en el análisis matemático se demuestran situaciones límites del análisis numérico.

Ya arriba en otra parte hemos asentado que el concepto de tangente, pendiente, inclinación, propensión, proporción, tasa, probabilidad es el mismo para cada uno de estos entes matemáticos. De igual modo como se maneja a la función derivada, sin preocuparse por su naturaleza metafísica, así también debería manejarse la función probabilidad. Debemos así hablar de **probabilidades de orden** cero, de orden uno, de orden dos, de orden n, la función P probabilística, como su símil D, operador de derivación. Así

$$P_0 = p$$
$$p_1 = f(p_0)$$
$$\dots$$
$$p_n = f(P_{n-1})$$

$$P^{(n)} = P_0\ P_1\ P_2 * \dots\text{n-veces}\dots * P_{n-1}$$

como $D^n = D\ D \dots\text{n-veces}\dots D$.

Una función de densidad de probabilidad, estamos de acuerdo, es la proporción entre la derivada de una función y la integral de esa función, con ésto queremos indicar que la densidad de probabilidad de cualquiera distribución, que a su vez proviene de otra distribución y, que ésta de otras distribuciones, se puede estructurar mediante las probabilidades de i-orden. Mediante este sistema, las funciones de densidad conocidas se pueden agrupar en probabilidades de i-orden.

La función de densidad más simple es $x/\Sigma x$, o sea, x/n, llamada probabilidad p, a secas. La que le sigue es la llamada función de densidad de probabilidad, que es el cociente entre la función generadora de casos favorables entre (la suma de esa función generadora de casos favorables) y la función de casos posibles.

La probabilidad y la densidad de probabilidad es la proporción, relación, cociente, tasa, tangente, propensión, fracción entre el incremento o derivada y su función de Distribución de probabilidad.

Los ejemplos que siguen darán claridad.

Sea $P_0 = p = x / n$

recordemos que $æ(x, n) = æ(x, n-1)^{*} x/n$; entonces

$$P_0 = p = x/n = æ(x, n)/ æ(x, n-1)$$

La Binomial contiene á p

$$P_1 = n!\ p^x/x!\ q^{n-x}/(n-x)!$$

es directo aquí que

$$P_1 = f(P_0)$$

queriendo con ésto significar que la binomial, que depende de $p = x/n$, es una probabilidad de orden uno.

A su vez la Poisson contiene a la binomial. Ver Feller. op.cit. pág. 164

$$P_2 = ((np)^x/x!)/e^{np}$$

por lo tanto la Poisson es una probabilidad P de orden dos.

$$P_2 = f(P_1)$$

La exponencial contiene a la Poisson ($æ(\mu t, r-1)/e^{\mu t}$)

$$P_3 = \mu\ ((\mu t)^{r-1}/(r-1)!)/ e^{-\mu t}$$

ésto es, la exponencial es una probabilidad de orden tres.

$$P_3 = f(P_2).$$

La Normal contiene a la Poisson. $t = (x-\mu)/\sigma$

$$P_3 = e^{-t^2/2}/(2\pi\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} æ(-t^2/2,\ i)\ /\ \sum_{t=-\infty}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{\infty} æ(-t^2/2,\ i)$$

y así, la densidad Normal es una P de orden tres.

$$P_3 = f(P_2)$$

La variable aleatoria $\sum\left((x_i - \mu)/\sigma\right)^2$, la cual supone normalidad, sigue la distribución χ^2. De igual modo la variable $(\bar{x} - \mu)/s_{\bar{x}}$ sigue la distribución de t de Student y la distribución F es seguida por s_1^2/s_2^2, ambas distribuciones suponen normalidad; por lo tanto podemos deducir que la χ^2 y la t y la F son probabilidades de orden cuatro.

$$P_4 = f(P_3)$$

Ahora bien, por el teorema del Límite Central, variante de la ley de los grandes números, sabemos que cuando n tiende a infinito la densidad de probabilidad de S_n tiende a la densidad Normal. Con esta estructura de P vemos la jerarquía de unas sobre otras y sobre todo que todas, contienen a la función álea; ésta, estructura al número e, base de las funciones exponenciales que existen cuando la relación, entre el incremento de una función y ella es constante: $\Delta y/y = k$.

En la Ley de los grandes números se trata de p_0. Se dice que para n tendiendo a infinito p_0 tiende a una constante, o sea, que para que ésto suceda, la probabilidad, de que el valor absoluto de la diferencia entre el valor esperado de casos favorables y la suma de los casos favorables, exceda a cualquier ε pequeña, cuando n tiende a infinito, tiende a cero.

Vamos ahora a describir por medio de álea a ley de los grandes números con este límite:

$$\lim_{x-\mu+v \;\dashrightarrow\; v} \frac{v^{(x-\mu+v)}}{(x-\mu+v)!} \Rightarrow x \to \mu$$

dado que $v^v/v!$ es el valor de la ordenada máxima cuando x es igual a la μ y la distribución es simétrica y, se alcanza con mayor rapidez cuanto menor sea el valor de v. x es el número de evento, μ es la media y v es la varianza.

Resumamos este capitulo:

a).- Grande número de Densidades de Probabilidad con la función álea se unifican y explican su forma campanoide.

b).- Las funciones Generatriz y Característica adquieren otra expresión e interpretación, de igual modo que la Transformada de

Laplace o la de Fourier (**TODAS valúan sucesiones, directa o implícitamente, con álea**).

c).- Hemos hablado de probabilidades de orden n, con el fin de estructurar el estudio de las funciones de densidad de probabilidad.

C A P I T U L O IV

EJEMPLOS DE APLICACION PRACTICA DE LA FUNCION ALEA

A).- FUNCION DE DENSIDAD ρ

Este capítulo está dividido en dos secciones; la primera de ellas dedicada a una función de densidad de probabilidad ρ que pretende comprender en el eje positivo real a las distribuciones acampanadas y la segunda, a una función de tipo álea actuarial.

Ejemplo 1.

Denotemos por ν a la varianza y por μ a la media de la función de densidad que llamaremos ρ, letra griega RO y por x a la variable que sigue esta distribución, para $(\nu, \mu) > 0$

$$\rho(\mu,\nu) = \frac{\nu^{(x-\mu+\nu)}/(x-\mu+\nu)!}{e^{\nu}} \qquad \text{con } x-\mu+v = 0,\ 1,\ 2$$

Es característico en esta densidad el tener forma acampanada o cuasi, y ser exacta en su dominio de 1 a infinito. Cuando $x = \mu$ alcanza su máximo valor en $\nu^{\nu}/\nu!$. Se comporta como la Poisson cuando $\mu = \nu$ y μ pequeña; empero para μ diferente de la varianza y μ pequeña aventaja a la Normal en exactitud y la Poisson en esta situación no existe. Para μ mayor a 30 nuestra función ρ tiende a la Normal. La gráfica que vimos anteriormente para la función álea nos dá un panorama de estas situaciones.

La utilidad que hallo para ρ es que para valores de x y v enteros mayores o iguales a 1, donde funciona la Poisson la suple con ventaja, dado que la media y la varianza no necesariamente deben ser iguales; y respecto a la Normal, para valores de la media menores a 30 también.

B).- DE LA RESERVA EN EL SEGURO DE VIDA, PENSIONES Y PRIMA DE ANTIGUEDAD.

En este segundo ejemplo voy a discurrir acerca de la función actuarial $v^n \; {}_np_x$ (${}_np_x$: probabilidad de que una persona de edad x sobreviva n años) que aparece por todas partes en el Cálculo Actuarial, desde el enfoque álea. Pretendo dar un enfoque nuevo a una cosa vieja; pero a cambio, devolver su sentido prístino al cálculo actuarial y de paso, olvidarnos para siempre de los valores Conmutados así como en otro tiempo de la regla de Cálculo y relegarlos al archivo de la arqueología como simple curiosidad, útiles en su tiempo; pero ahora obsoletos merced a la explosión computacional.

Se define a ${}_np_x$ de la siguiente forma: probabilidad de que una persona de edad x sobreviva un año, multiplicada por la probabilidad de que esa misma persona, ahora ya de edad x+1 sobreviva un año, multiplicada por la probabilidad de que esa misma persona, ahora de edad x+2 sobreviva un año, y así...en el año n el producto de todas las multiplicaciones anteriores multiplicado por la probabilidad de que esa misma persona, ahora ya de x+n-1 años de edad sobreviva un año más.

Cada una de estas probabilidades está definida como el cociente entre las personas que han logrado alcanzar la edad x+t-1 y las que alcanzarán la edad x+t. En fórmulas se expresa ésto así, siendo l_x la cantidad de personas vivas de edad x:

para sobrevivir un año: $p_x = l_{x+1} / l_x$

para sobrevivir dos años: $p_{x+1} = l_{x+2} / l_{x+1}$

para sobrevivir n años : $p_{x+n-1} = l_{x+n} / l_{x+n-1}$

Supuesto que es válido para toda x hacer $l_x = 1$ entonces la probabilidad que estamos buscando es

$${}_np_x = l_x * (l_{x+1}/l_x) * (l_{x+2}/l_{x+1}) * (l_{x+3}/l_{x+2}) * \ldots * (l_{x+n}/l_{x+n-1})$$

$$= \Pi \; p_{x+t-1} \text{ con t de 1 á n}$$

$$= l_x * p_x * p_{x+1} * \ldots * p_{x+n-1}$$

De la primera ecuación se desprende una importantísima deducción:

$${}_np_x = l_{x+n}$$

Las p son las probabilidades anuales de supervivencia y se definen como $1-q_x$, en donde q_x es la probabilidad anual de fallecimiento. No es ocioso decir aquí que una tabla de mortalidad o demográfica cualquiera tan sólo es una ilustración (vivos, muertos, Radix, retirados, inválidos, etc.). El alma de toda tabla está en las probabilidades anuales: de fallecimiento, de morbilidad, de retiro, de invalidez, etc.

Hemos explicado esta terminología. Ahora bien, para que se vea la aplicación de esta función en el cálculo actuarial voy a dar ejemplos de Reserva en el Seguro de Vida, en los Planes de Pensión por Retiro y en la Prima de Antigüedad. ¿ y álea qué ?

El valor actual de un beneficio es la esperanza matemática de los beneficios anuales, es la SUMA de una SUCESION, en que la norma es el beneficio anual; las NORMAS que abajo aparecen del año i son los elementos de la sucesión. Esto nos rememora a las Transformadas.

El valor presente al principio del año i de cualquier beneficio en cualquier plan viene dado como

$$[(v_i)\ (q^{(m)}_{x+i})]\ (S_i)\ ]_{x+i}$$

donde

I) v_i es el valor presente de un peso en el año i.

II) $q^{(m)}_{x+i}$ es la probabilidad anual del año i del riesgo m, según m: fallecimiento, invalidez, separación voluntaria, despido, etc. o de decremento múltiple cuando m = tot, o sea, por ejemplo, fallecimiento más invalidez más rotación; las tasas de retiro anticipado forman parte de estas últimas.

III) S_i son los beneficios en el año i

a).-En Vida es la suma asegurada;

b).-En el plan de prima de prima de antiguedad, es el número de días de salario, real o limitado a tantos de salario mínimo por cada año de servicio prestado a la Empresa, proyectados o no a la tasa j y a la tasa s (tasa de crecimiento de salarios IMSS).

c).-En el plan de pensiones es el valor presente de la renta de retiro a la edad y fecha de retiro, con o sin beneficio por fallecimiento del jubilado y con o sin plan de Gastos médicos, etc. y con o sin deducción de la renta que proporciona el beneficio del SAR o la que proporciona el IMSS.

$$[0.85 * M * (1+j)^{i}] * [12(a_g + a_c)]$$

M representa el salario mensual actual, j la tasa de crecimiento de salario del año i, a_g es una anualidad garantizada a partir del retiro y a_c es una anualidad contingente al retiro o después de los años de la anualidad cierta. Estas anualidades suponen uniformidad en las rentas y tasa constante; sin embargo, para no complicar las cosas aquí lo supuse; como el cálculo es recurrente, tanto las probabilidades como la tasa y como la renta pueden ser variables.

IV) l_{x+i} es el número de personas vivas a edad x+i calculada como $\prod_i (1-q^{(tot)}_{x+i})$ con i de 0 á i-1.

En los planes de Pensión y Prima de antiguedad $q^{(tot)}$ es la suma: de la q_x de fallecimiento más la q_x de retiro más la q_x de invalidez. En el ejemplo de vida individual es la de mortalidad.

De este modo, el valor presente (prima única) será a la tasa r

$$A_x = \sum [(v)\ (q^{(m)}_{x+i})]\ (S_i)\ l_{x+i} * \left(1 + r^{(k)}/k\right)^{-ki}$$

con i de cero a ω. Hasta aquí lo referente a beneficios.

Verbalmente la fórmula anterior denota en pesos y centavos:

$$\left(vS_i\ (q^{(m)}_{x+i} * l_{x+i})\right) * v^{i}$$

Ahora explicaré la **ausencia de álea** en v^i. r es la tasa de interés é i, el tiempo.

$v^i = \left(1 + r^{(k)}/k\right)^{-ki}$; si k tendiera a infinito, o sea, que la convertibilidad de la tasa fuera instantánea, v^i que no contiene elementos combinatorios devendría en e^{-ir}, que sí los tiene: $(-ir)^j/j!$. Por lo general la tasa es anual efectiva.

En los planes de Retiro a la prima le llaman contribución; a la cobertura, beneficio; a la reserva, fondo; debido a que se aplican a colectividades, aunque no se basan en la teoría del riesgo colectivo sino en el del individual.

El valor presente total de las primas que corresponde pagar al asegurado es la esperanza matemática de las primas anuales, sean o no variables.

$$a = \Sigma P_i * v^i l_{x+i}$$

de ahí: P = A/a, con los índices adecuados, para los plazos.

Analicemos ahora a la Reserva terminal. **El cálculo de la reserva es un proceso de tipo muy general. Reserva inicial + ingresos - egresos, todo acumulado a cierta tasa, es la reserva final.** Sea el Disponible al inicio del año i, la prima que cobramos menos el valor actual de los siniestros pagaderos a fin de año: $D_i = P_i - vqS_i$

Al principio del año i la diferencia del valor presente de la prima y la del beneficio vale D_i. La reserva terminal a este momento vale y_{i-1}. Al final del año i la reserva terminal es: la reserva terminal del año anterior y_{i-1} más D_i acumulados con supervivencia e interés.

El camino casual de Ruina de una Compañía de seguros será la insuficiencia de D_i (sucesión de Primas menos Siniestros) aplicada sobre toda la cartera sujeta a una probabilidad de ruina. En este caso si interviene álea. Ejemplos de Reserva:

a).- Valor presente de un Préstamo (Tabla de amortización, Anualidades ciertas)

$$A_i = (A_{i-1} - v_i R_i)/ v_i$$

A es el capital insoluto, R, la renta de amortización y v, valor presente de un peso. Este es un ejemplo Financiero (no contingente, sin áleas) cuya finalidad es ilustrar el proceso de acumulación o deflación.

b).- Reserva de un plan de Seguro en forma recurrente y por el método retrospectivo:

$$ {}_tV_x = \left\{ {}_{t-1}V_x + D_t \right\} / vp_{x+t-1} $$

La expresión de b) se usa en el cálculo recurrente; mas, si se quiere en forma directa, es:

$$ {}_tV_x = \sum \; [\, D_i * v^{i} * l_{x+i-1} \,] \; / \; [v^{t} * l_{x+t} \,] $$

con i de 1 a t

y en palabras, la reserva del año t, es el valor acumulado de los disponibles anuales con mortalidad y supervivencia durante t-i años.

Hasta hace algún tiempo cuando se usaban los valores conmutados, éso era por el poco avance de la computación, fácilmente podia uno perderse confundiendo el fin con los medios. Se les dedicaba mucho esfuerzo y tiempo. Manejar hábilmente a los valores conmutados y a la regla de cálculo era todo un complicado arte. A la fecha, afortunadamente con el acelerado desarrollo de la computación ésto ha sido superado de tal forma que ahora cuatro semestres de cálculo actuarial, sin el uso de los conmutados, podría reducirse a uno.

No sin antes anotar, aunque sea someramente un asunto que ocupa frecuentemente a los actuarios, que es el de cómo se determina el incremento a la reserva en el seguro de vida, es que concluiré lo referente a reserva de seguro individual. A partir de

$$ y_t = \{\, y_{t-1} + [P_t - vq_{x+t-1} S_t \,]\} \; / \; vp_{x+t-1} $$

reagrupando encontraremos el incremento a la reserva

$$ \Delta_t = y_t (1 - vp_{x+t-1}) + P_t - vq_{x+t-1} S_t $$

$$ = P_t + (1 - vp_{x+t-1}) - vq_{x+t-1} S_t $$

P = Ingreso por primas = P_t

I = Producto de Inversiones = $(1-vp_{x+t-1})$

M = Mortalidad = $vq_{x+t-1} S_t$

luego entonces el incremento anual a la reserva terminal es

$$ \Delta_t = (\mathbf{PIM})_t = +P_t + I_t - M_t $$

El incremento a la reserva media queda asi

$$ = (1 / 2) * \Delta(y_t + y_{t-1} + P_t) $$

$$ = (1/ 2)\{\, PIM_t + P_t + PIM_{t-1} \} $$

y en forma desplegada

$$= (1/2)\{ P_t + I_t - M_t + P_t + P_{t-1} + I_{t-1} - M_{t-1} \}$$

$$= (1/2) \{ 2P + (IM)_t + (IM)_{t-1} \}$$

$$\Delta R_t = P_t + 0.5 \{ (IM)_t + (IM)_{t-1} \}$$

donde, ΔR_t es el incremento a la reserva media en el seguro de vida individual; en Pensiones y Prima de Antiguedad es la diferencia entre las Obligaciones por Beneficios Proyectados de t y t-1, presentados según la reglamentación del Boletín D-3, basado en el sistema de financiamiento de Crédito Unitario (incremento del año): es similar al del Incremento a la Reserva en Seguro Individual.

CONCLUSIONES

Como todo lo que empieza, así de igual manera, nuestra panorámica acerca de álea debe terminar. A través de los capítulos anteriores, nos propusimos describir a la función álea de tal manera que al llegar a este lugar hubiésemos logrado obtener una visión de ella. Este objetivo se habrá alcanzado si se ha incitado a clarificar y metodizar la filosofía de este modelo así como también despierto ideas afines para profundizar y explorar en este sentido, vgr. Grupos.

De todo lo anteriormente visto en esta tesis se desprenden los siguientes resultados:

1).- **Alea es un modelo matemático** de amplísima difusión **en las Matemáticas determinísticas y probabilísticas**, debido a que representa bien a fenómenos de muy variada etiología. Tiene su origen en la naturaleza. Aún cuando **más** nos hemos enfocado a funciones que se expresan como series de potencias no por ello se excluye su extensivo uso a funciones de otro tipo. Alea es una estructura. **La Serie de Taylor es un modelo probabilístico, también la Transformada de Laplace y la de Fourier, similares a las "valuaciones actuariales".**

2).- **Alea es componente de muchas funciones de densidad de probabilidad cuya característica común es la forma acampanada o cuasi.** Esta característica hace que mediante álea se **sinteticen.**

3).- **El concepto de álea es simple.** Su **notación clarifica**; su **simetría le da belleza.** En basando su forma de particionar en la sucesión de los números naturales, por origen, está en la naturaleza.

4).- Sirve de base para **nuevos modelos matemáticos**, vgr., la **densidad de probabilidad** $\rho = v^{(x-\mu+v)}/(e^{v}(x-\mu+v)!)$

5).- **Alea nos permite pasar de las matemáticas discretas** a las **continuas**: de la Aritmética: razones y proporciones, al Algebra: funciones; **por medio del Cálculo de Diferencias Finitas nos hemos la Derivada y la Serie de Taylor explicado e igualmente las fórmulas de las Integrales y de las desigualdades de Cauchy en el análisis Real y en el Complejo**; la palabra, etimológicamente viene de complector, con supino complexus: abarcar, abrazar, comprender; de igual modo la traducción de imaginario a fantástico parece inexacta, ya que la palabra latina imago significa imagen.

6).- **Alea es grande parte en el Análisis Combinatorio: Combinación de Ordenaciones Con Repetición:** $\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}$; comparando el campo de acción del número combinatorio binomial al del número combinatorio álea, se puede uno dar idea. Los coeficientes binomiales toman su forma y contenido de álea.

7).- **Mediante la notación de álea: a (base, exponente)**, por lo menos aunque sola ésta su utilidad fuera, se **facilita la comprensión de fórmulas** que en apariencia son tan distantes en varias ramas de las matemáticas y que; sin embargo, tienen a álea en común.

8).- **Después de Analizar hemos intentado Sintetizar**; por ejemplo las diferencias divididas con intervalo no equiespaciado, las anualidades variables, los seguros variables, Alea, etc. que contienen como casos particulares, en ese orden, a las diferencias ordinarias, a las anualidades o seguros con tasa y monto fijos, a las distribuciones acampanadas. En este sentido son de riqueza conceptual más amplia las antítesis, las desigualdades, la antimateria, las antipartículas, las funciones no analíticas, el desorden, la no regularidad, etc.

9).- Hemos manifiesto el carácter aleatorio de funciones de apariencia determinística: **la serie de Taylor, las transformadas de**

Laplace y Fourier, las ecuaciones diferenciales, álea mediante.

10).- Hemos insistido mucho en el método muy generalizado de tratar a los fenómenos determinísticos o aleatorios como una **sucesión, (valores secuenciales de una función)** y a su **valor actual o monto**, en términos actuariales, como las **Transformadas** o como las **Generatrices.**

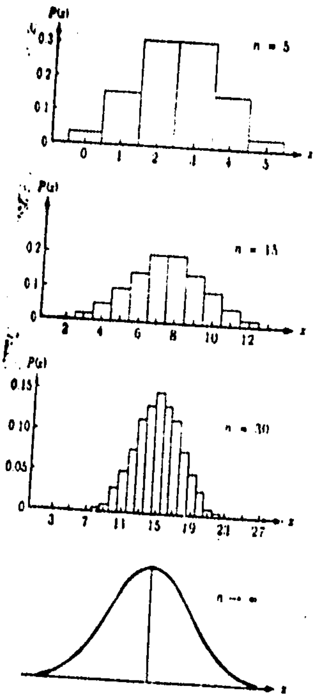
11).- El uso de **álea** en Procesos Estocásticos **no estacionarios**; y en procesos **estacionarios**, su derivado, el número **e**, es altamente frecuente.

12).- **Con ALEA podemos ALEATORIZAR** y **COMBINAR.**

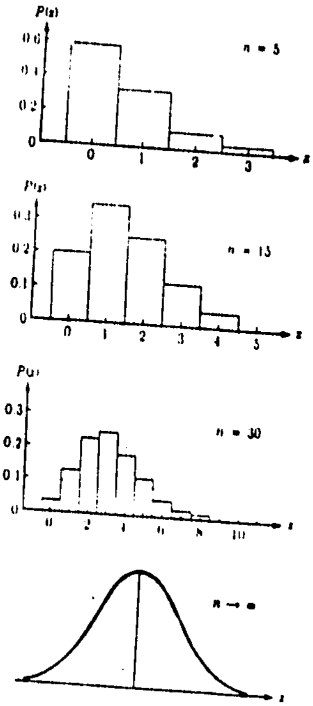
Uno de los propósitos de esta tesis es desentrañar el contenido de álea; de ningún modo complicar la notación. Hemos sacrificado rigor para conseguir intuitividad. La notación álea es la escritura del apellido que identifica a muchas funciones como de la misma familia o proveniencia.

El terreno por explorar, aún cuando sólo fuera narrativamente, es muy extenso y éso queda para una investigación más profunda. Localizar en la Ciencia Matemática a las áleas, es trabajo que requiere de un carácter enciclopédico y mayores arrestos. Me he concretado tan sólo a encontrar a las áleas de mi preferencia y explicar el origen, definición, nombre y notación de la función álea, de modo tal que en cualquiera función dependiente de la sucesión álea (en e ó sin él), dondequiera que la encontremos, entendamos cabalmente de qué se trata: $z^n/n!$ es invariante.

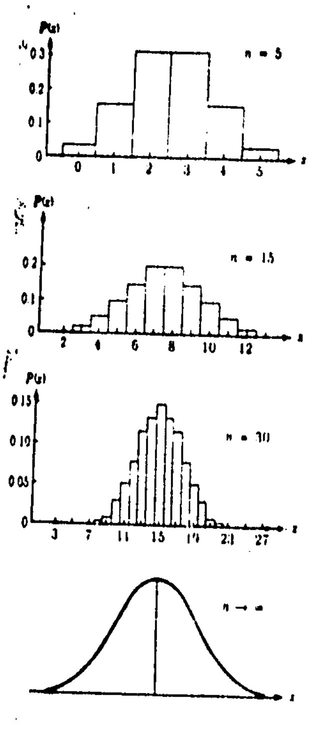
GRAFICAS DE ALGUNAS FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD
DISTRIBUCIONES DISCRETAS



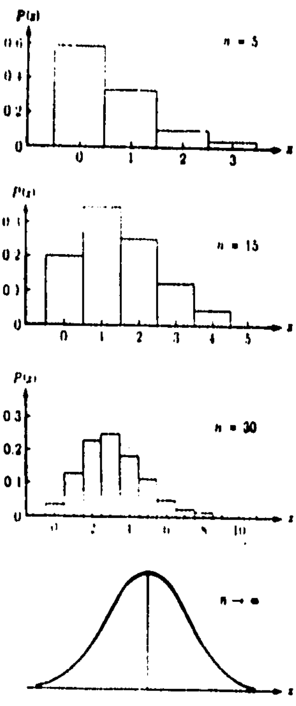
Distribución binomial, p = 0.5.



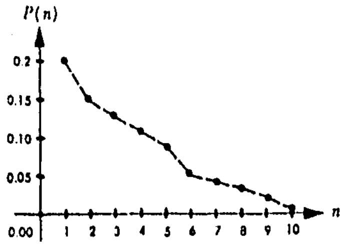
Distribución binomial, p = 0.1.



Distribucion binomial, p = 0.5.



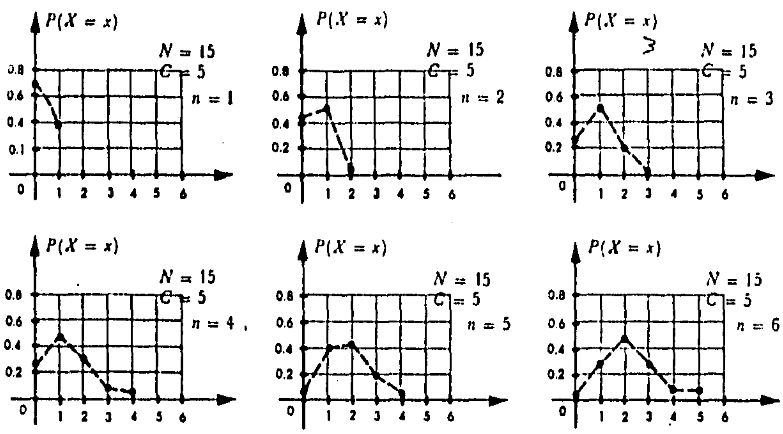
Distribución binc.nial, p = 0.1.



GEOMÉTRICA

FUNCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

$$\frac{\binom{5}{x}\binom{10}{n-x}}{\binom{15}{x}}$$



GRAFICAS DE ALGUNAS FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD
DISTRIBUCIONES CONTINUAS

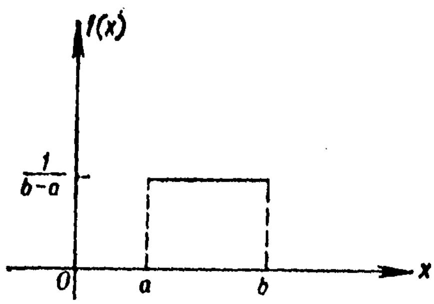


Fig. 1. Densidad de la distribución uniforme

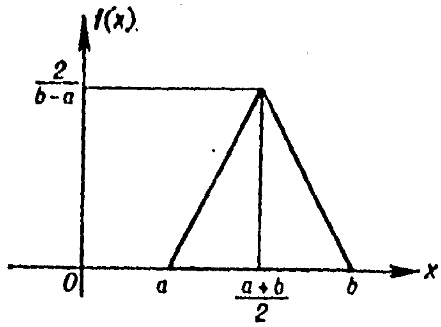


Fig. 2. Densidad de la distribución en triángulo

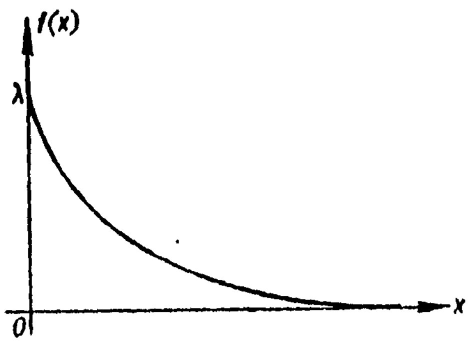


Fig. 3. Densidad de la distribución exponencial

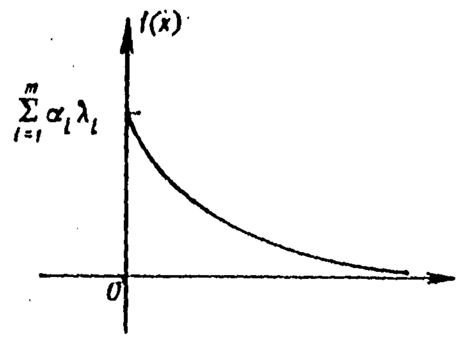


Fig. 4. Densidad de la distribuc' hiperexponencial

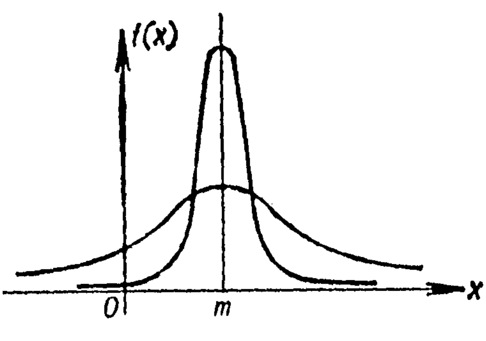


Fig. 5. Densidad de la distribución normal

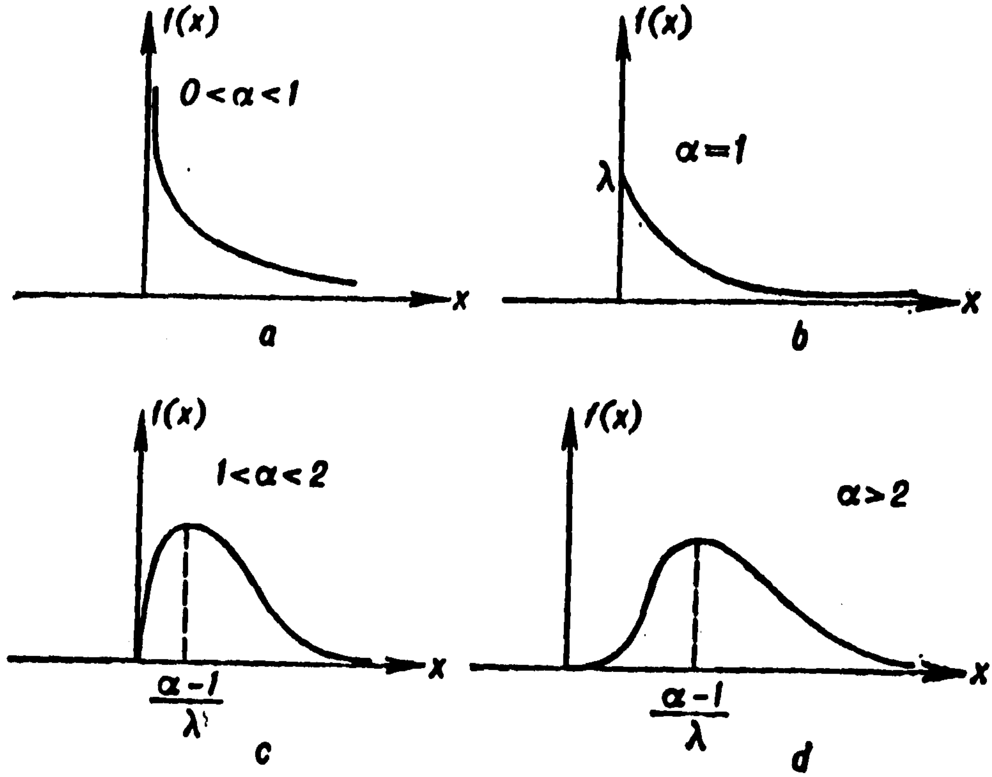


Fig. 6. Densidad de la distribución gamma

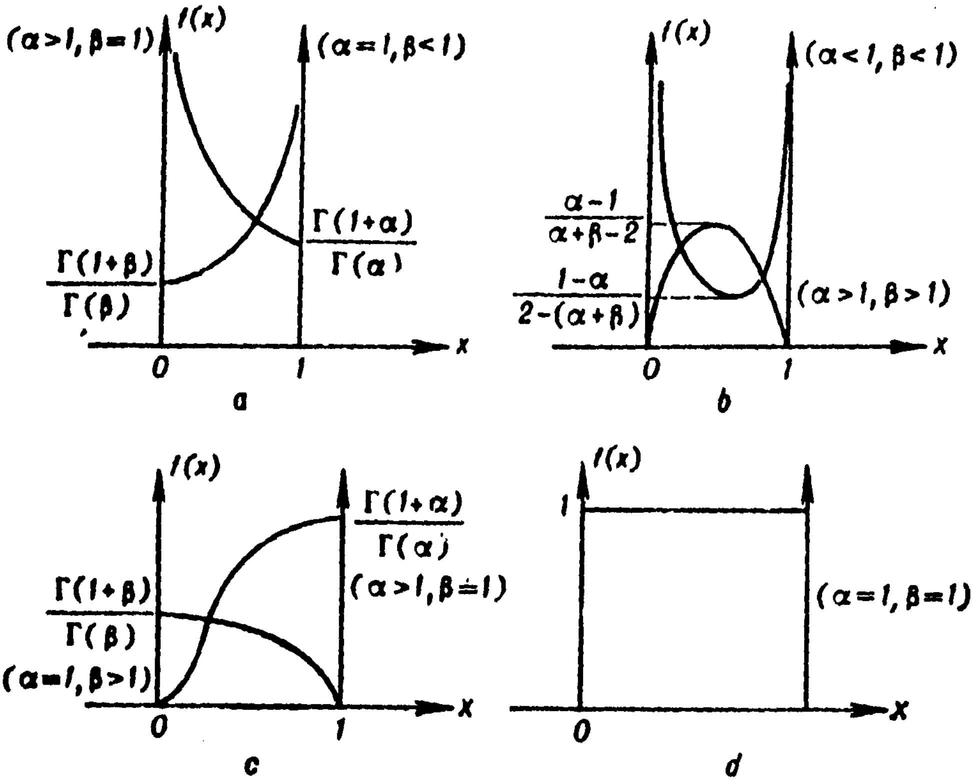


Fig. 7. Densidad de la distribución beta

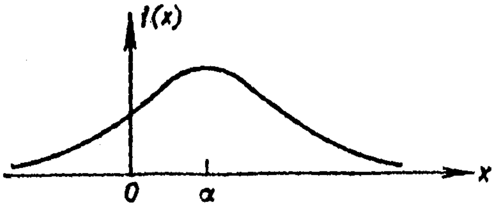


Fig. 8. Densidad de la distribución de Cauchy

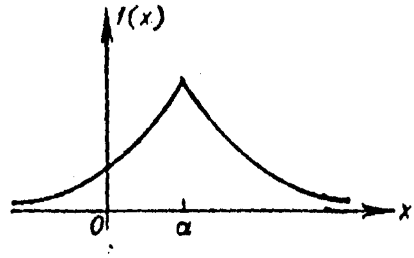


Fig. 9. Densidad de la distribución exponencial doble

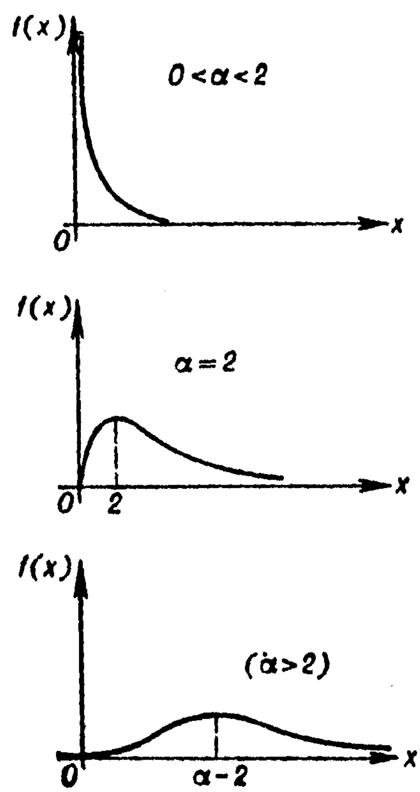


Fig. 10. Densidad de la distribución χ^2

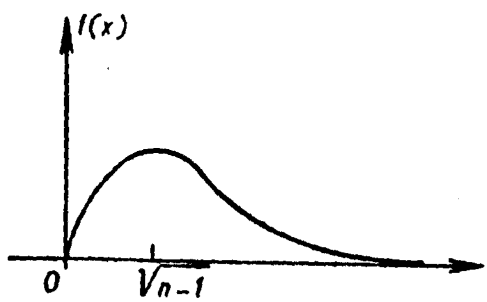


Fig. 11. Densidad de la distribución χ

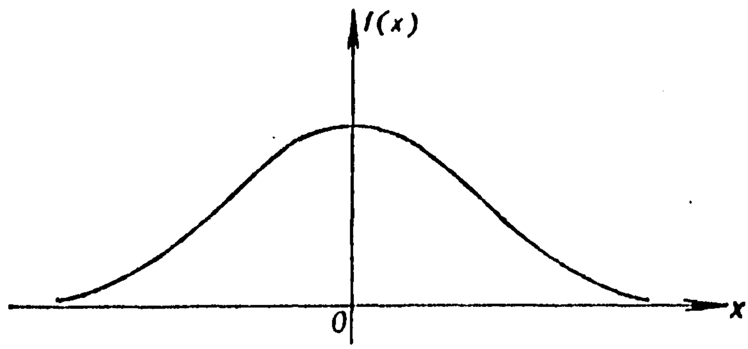


Fig. 12. Densidad de la distribución de Student

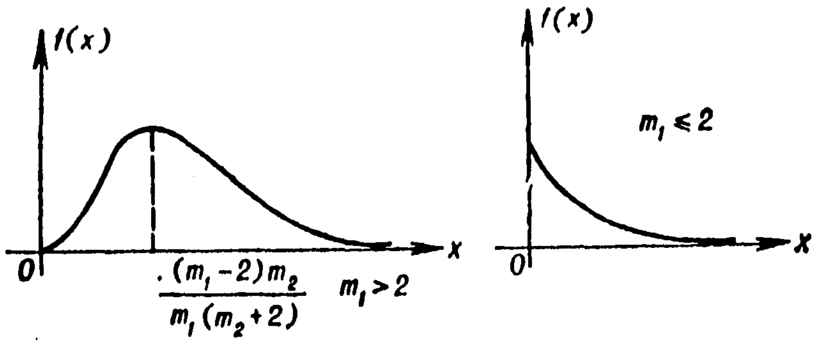


Fig. 13. Densidad de la distribución F

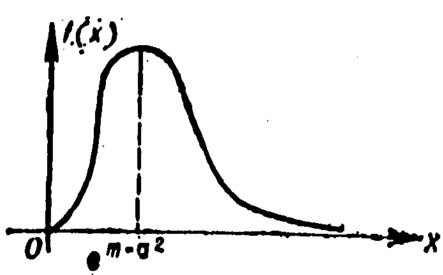


Fig. 14. Densidad de la distribución logarítmica normal

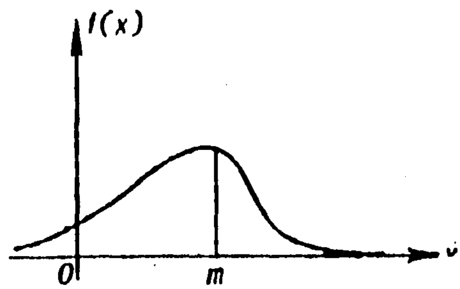


Fig. 15. Densidad de la distribuc logística

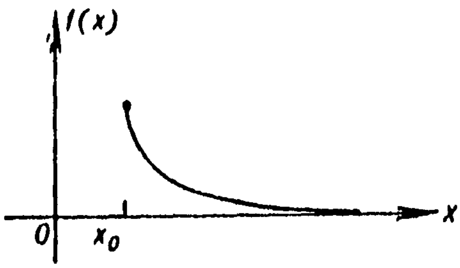


Fig. 16. Densidad de la distribución de Pareto

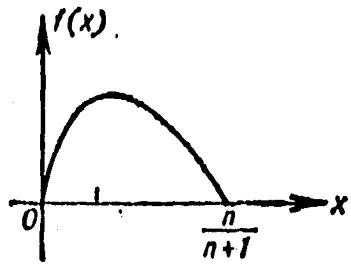


Fig. 17. Densidad de la distribución de Sherman

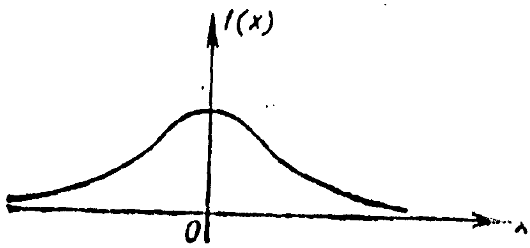


Fig. 18. Densidad de la distribución de la razón de varianza de Fisher

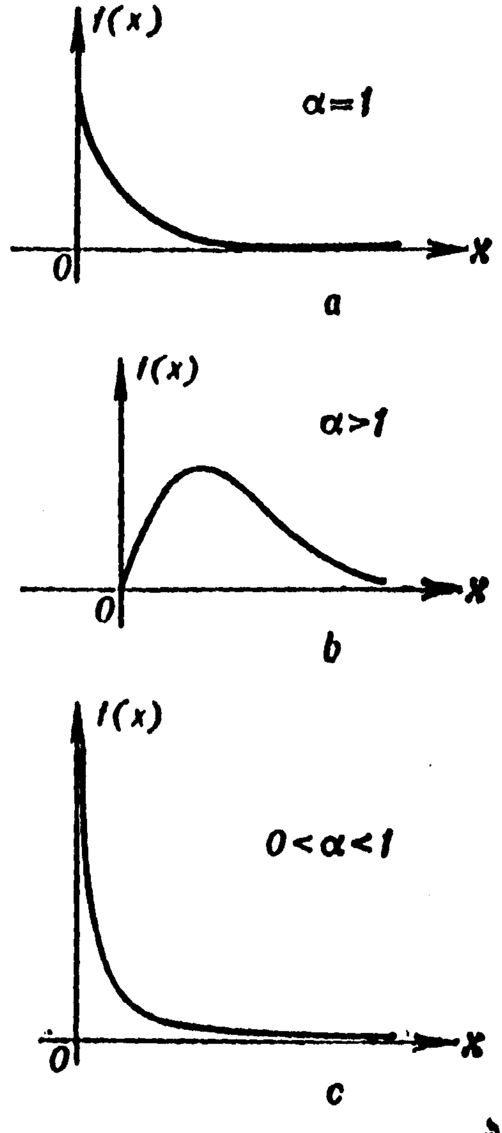


Fig. 19. Densidad de la distribución de Weibull—Gnedenko

BIBLIOGRAFIA

•Mathematical Methods for Scientists and Engineers

Lloyd P. Smith. Dover Publications, Inc. EE UU. 1961

•Geometric Inequalities. Nicholas D. Kazarinoff

Random House. EE.UU. 1961

•Finite Differences and Difference Equations.

Murray R. Spiegel. McGraw-Hill. Col. Schaum's. 1971

•Análisis Numérico

Francis Scheid. McGrow-Hill de México. Col. Schaum's. 1972

•Introducción al cálculo

Kuratowski. Ed. Limusa. México 1978.

•Introducción al análisis estadístico

Dixon y Massey. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Segunda edición. New York 1966

•Métodos estadísticos para investigadores

R. A. Fisher. Ed. Aguilar. Madrid 1949

•Estadística para las ciencias administrativas.

Lincoln L. Chao. McGraw-Hill. Seg. Ed. México 1982

•Manual de la teoria de probabilidades y estadística matemática

V. S. Koroliuk. Editorial Mir. Moscú. 1981

•Análisis Combinatorio

Dr.K. Ríbnikov, M. Ménshikov, A. Reviakin, A. Kopilova, Yu. Makárov, B. Stechkin. Editorial Mir. Moscú, 1989

•A treatise on the calculus of finite differences

George Boole. Second edition. Dover publications, inc.New York. 1960

•Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Volumen II. William Feller. Segunda edición. Ed. Limusa. 1989

•Introduction a la statistique

E. Amzallag. N. Piccioli. F. Bry. Hermann Paris. Collection Methodes. Paris 1978

•Probabilidad, Estadística y Verdad

Richard von Mises. Espasa - Calpe Argentina, S.A. Argentina 1946.
•Introducción a las variables complejas
Peter Colwell y Jerold C. Mathews. Editorial Trillas. México, 1976
•Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes
I. Bronshtein y K. Semendiaev. Ediciones Quinto Sol. México.
•Historia concisa de las matemáticas
Dirk Jan Struik. Instituto Politécnico Nacional, segunda edición
México, 1986.
•El mundo de las matemáticas
James R. Newman. Ed. Grijalbo. España 1968.
•Teoría de las probabilidades
V. K. Zajarov, B. A. Sevastianov, V. P. Chistiakov.
Ed. Mir. Moscú 1985.
•Dos opúsculos
Reglas para la dirección del espiritu
René Descartes. Nuestros Clásicos/UNAM, México 1984
•Enciclopedia Biográfica de Ciencia y Tecnología
Isaac Asimow. Alianza Editorial Mexicana. México 1988
• ¿ De cuántas formas ? Combinatoria.
N. Vilenkin. Ed. Mir Moscú.1972