

6  
2E



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**EL RADIO ESPECTRAL DE CUBIERTAS  
DE GALOIS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :  
MATEMATICO**

**P R E S E N T A :  
PABLO DAVID BRENA ZEPEDA**

**ASESORES:  
JOSE ANTONIO DE LA PEÑA MENA  
MARTHA TAKANE IMAY**



**MEXICO, D. F.**

**SEPTIEMBRE DE 1995**

**FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"El ratio espectral de cubiertas de Galois"

realizado por Pablo David Brena Zepeda

con número de cuenta 7337723-9 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atestamento

Director de Tesis  
Propietario Dr. José Antonio de la Peña Mena

Propietario Dra. Martha Takane Imay

Propietario Dr. Francisco Larrión Riveroll

Suplente Ent. Victor Neumann Lara

Suplente Dra. Hortensia Ualcana Sánchez

Consejo Departamental de Matemáticas

A mis queridos Padres

## **Agradecimientos**

---

Me complace la oportunidad de expresar mi agradecimiento a los muchos familiares y amigos sin cuya ayuda no hubiera sido posible la conclusión del presente trabajo. En primer término agradezco a mi cuñado Rodolfo Meza por su valiosa ayuda y consejos en el uso de las herramientas de edición y la impresión final del texto así como a mi hermana Silvia Brena en la reproducción de dicha impresión. A mi hermana Armida Brena y su esposo Gildardo Marbán por su minuciosa revisión y corrección del texto, así como sus sugerencias de redacción. Estoy especialmente agradecido con el Sr. Rubén Gallegos y el Sr. Alejandro Mendez por permitirme usar las herramientas de edición con que se mecanografió este trabajo. Finalmente, aunque no en último término agradezco a los profesores J. A. de la Peña y Martha Takane su paciente asesoría.

# **El radio espectral de cubiertas de Galois**

---



**Impreso en papel reciclado.**

# Índice

---

<b>Introducción</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Conceptos Básicos</b>	<b>1</b>
1.1 Gráficas	2
1.2 Matrices y operadores de adyacencia.	6
El caso finito.	6
El caso de la gráfica infinita.	8
Espectro y radio espectral.	10
1.3 Morfismos de Gráficas.	18



<b>2 El Teorema de Perron-Frobenius.</b>	<b>20</b>
2.1 Definiciones y resultados preliminares.	22
2.2 Demostración.	27
<b>3 Propiedades de los Operadores de Adyacencia.</b>	<b>30</b>
3.1 Propiedades generales.	32
3.2 Las Sucesiones de gráficas y sus operadores.	46
<b>4 Las Cubiertas de Galois.</b>	<b>59</b>
4.1 Definiciones.	60
4.2 Resultados preliminares.	64
4.3 Resultados espectrales.	70
<b>5 La constante isoperimétrica.</b>	<b>78</b>
5.1 Definiciones.	79
5.2 El espectro de gráficas regulares infinitas.	81
<b>6 Cubiertas de Galois para grupos manejables</b>	<b>92</b>
6.1 La gráfica de Cayley	93
6.2 Definiciones y resultados preliminares.	95
6.3 Resultado Principal.	104
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>

## **Introducción.**

---

La principal motivación del presente trabajo se encuentra en el artículo: "The Spectral Radius of the Galois Covering of a finite Graph" de J. A. de la Peña y M. Takane [1]. Y su objetivo es completar todos los detalles que una obra tan breve como un artículo ha de pasar por alto, así como incluir todo el material necesario, tanto de otros artículos, como de textos, que permitan una más pronta comprensión del tema aún al lector no familiarizado, en este sentido, solo se asumen conocimientos básicos en álgebra lineal y moderna, así como de análisis matemático.

El orden en que se presenta el material es el siguiente:

El capítulo uno presenta una breve introducción a los conceptos de gráficas, operadores de adyacencia y morfismos de gráficas.

En el capítulo dos se demuestra el muy útil teorema de Perron-Frobenius, demostración basada en la que se encuentra en Gantmacher [7].

El capítulo tres, el más extenso de este trabajo, consta de dos partes, la primera de ellas aplica elementos de análisis funcional a  $L^p$ , que es el espacio vectorial en el que actúan los operadores de adyacencia, los teoremas que resultan serán indispensables para una completa comprensión del comportamiento general de dichos operadores y también para posteriormente, probar los resultados espectrales de las cubiertas de Galois. La segunda parte contempla algunos resultados más especializados para operadores de adyacencia y que tienen como fuente principal al artículo "The Spectrum of an Infinite Graph" de B. Mohar [4].

En el capítulo cuatro introducimos el concepto de cubiertas de Galois, así como de su radio espectral y damos los primeros resultados concernientes a dicho radio espectral.

El capítulo cinco, cuyo contenido debe su origen al artículo "The Spectral Radius of Infinite Graphs" de N. Biggs, B. Mohar, et. al. [3], estudia el concepto de la constante isoperimétrica y su relación con el radio espectral de gráficas regulares infinitas que será de suma importancia cuando en el siguiente capítulo, se haga énfasis en las cubiertas de Galois para grupos manejables.

El capítulo sexto y último, incluye el resultado central de este trabajo, el cual postula la igualdad de los radios espectrales de gráficas entre las cuales existe una cubierta de Galois para un grupo manejable y que tiene su origen en el artículo de J. A. de la Peña y M. Takane citado inicialmente.

A lo largo del trabajo, se incluyen diversos ejemplos que por su simplicidad, pretenden proporcionar una ilustración clara de los conceptos, así como una percepción del poder y utilidad de los resultados.

# 1

## Conceptos Básicos

---

Este capítulo contiene los conceptos y definiciones fundamentales para el presente trabajo, se inicia con un breve repaso al concepto de gráficas y operadores de adyacencia, para continuar con el espectro, radios espectrales y morfismos de gráficas.

## 1.1 Gráficas

(1.1) **Definición:** Una gráfica  $\Delta$  es un objeto matemático que consta de:

- a) Un conjunto  $\Delta_0$ , cuyos elementos se llaman **vértices**.
- b) Un conjunto  $\Delta_1$ , cuyos elementos se llaman **aristas** y tal que, a cada una de ellas corresponde una pareja (desordenada) de vértices.

Así pues, cada arista  $\alpha$  decimos que incide con (o "une" a) una pareja de vértices  $i, j$ , o bien que  $i, j$ , son los extremos de  $\alpha$  y denotamos  $i \alpha j$ . De  $i$  y  $j$  diremos que son **adyacentes**. De hecho diremos que dos conjuntos de vértices  $X, Y$ , serán **adyacentes** y denotaremos  $X \text{---} Y$ , si existen  $x \in X, y \in Y$  donde  $x, y$  son adyacentes.

En el presente trabajo, sólo consideraremos gráficas cuyos vértices sean a lo más, un conjunto numerable, así, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\Delta_0$  es igual a: los números naturales  $\mathbb{N}$ , o bien a algún subconjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Para referirnos al número de elementos de algún subconjunto  $X$  (de vértices o aristas) denotaremos  $|X|$ .

(1.2) **Definición:**

- a) Sea  $i$  en  $\Delta_0$ , el **grado** o **valencia** de  $i$  es el número de veces que  $i$  figura como extremo de alguna arista de  $\Delta_1$ , y denotaremos dicho número por  $\text{val}(i)$ .

Observemos que una arista puede tener como ambos extremos a un único vértice, en tal caso se le llama **lazo** y contribuye dos veces a la valencia de su extremo.

b) A una gráfica con todos sus vértices de valencia  $k$  se le llama **regular de grado  $k$** .

(1.3) **Definición:** Denotaremos por  $M_\Delta$  al  $\text{Sup} \{ \text{val}(i) : i \in \Delta_0 \}$  y si  $M_\Delta$  es finito, decimos que  $\Delta$  es una **gráfica acotada**.

De hecho siempre se asumirá que nuestras gráficas  $\Delta$  serán **gráficas acotadas**.

(1.4) **Definición:**

a) Una pareja de funciones  $(s, e)$  con dominio en  $\Delta_1$  y contradominio  $\Delta_0$  es llamada una **orientación de  $\Delta$**  si para cada arista  $\alpha \in \Delta_1$ , se tiene que  $\{s(\alpha), e(\alpha)\} = \{i, j\}$ , a  $s(\alpha)$  se le llamará el **inicio** y a  $e(\alpha)$  el **final** de la arista  $\alpha$ .

b) A una gráfica y su orientación le llamamos **gráfica dirigida**.

c) Si  $\alpha$  pertenece a una gráfica dirigida podemos definir  $\alpha^{-1}$ , como la arista tal que  $s(\alpha^{-1}) = e(\alpha)$  y  $e(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ .

(1.5) **Definición:** Sea  $\Delta$  una gráfica dirigida por la orientación  $(s, e)$ , un camino  $\delta$  de longitud  $n$  en  $\Delta$  entre un par de vértices  $i$  y  $j$ , es una secuencia de  $n$  aristas  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  donde  $\beta_1 = \alpha_i$  o  $\beta_1 = \alpha_i^{-1}$  y donde:

a)  $i = s(\beta_1)$  y  $j = e(\beta_n)$ .

b)  $e(\beta_k) = s(\beta_{k+1})$  donde  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Denotamos  $s(\delta) = i$  y  $e(\delta) = j$ . También se puede extender este concepto para señalar que entre un vértice y sí mismo existe un camino de longitud cero (sin ninguna arista).

- (1.6) **Lema:** Sean  $(s,e)$  y  $(s',e')$  dos orientaciones de  $\Delta$  y sean  $i$  y  $j$  dos vértices en  $\Delta$ . Entonces, existe una biyección de los caminos entre  $i$  y  $j$  dados por  $(s,e)$ , y los dados por  $(s',e')$ .

**Demostración:** Esta biyección surge naturalmente, pues si consideramos  $\delta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  un camino de longitud  $n$  entre  $i$  y  $j$  dado en base a la orientación  $(s,e)$ , entonces sabemos que para cada  $\beta_i$  corresponde una única  $\alpha_i$  en la gráfica no dirigida, que es simplemente  $\beta_i$  sin considerar la orientación. Y entonces, si orientamos  $\alpha_i$  con  $(s',e')$ , resulta claro que podremos formar un único camino  $\delta' = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  donde  $\gamma_i = \alpha_i$  o  $\gamma_i = \alpha_i^{-1}$  con respecto a la nueva orientación.  $\square$

Podemos entonces hablar de los caminos entre  $i$  y  $j$  en  $\Delta$ , sin referirnos a ninguna orientación en particular.

- (1.7) **Definición:** Una gráfica  $\Delta$ , donde para cualquier pareja de vértices existe un camino entre ellos, se llama conexa, también asumimos que, todas nuestras gráficas son conexas.

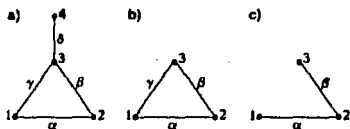
- (1.8) **Definición:** Denotamos como  $d(i,j)$  la distancia (en  $\Delta$ ) entre  $i$  y  $j$ , que está definida por la longitud mínima de todos los caminos entre  $i$  y  $j$ . Claramente también podemos hablar de la distancia entre dos conjuntos de vértices  $d(X,Y)$ , como la mínima distancia entre cualesquiera de sus respectivos elementos.

- (1.9) **Lema:** Si  $\Delta$  es una gráfica conexa, entonces para cualquier partición  $P_1, P_2$  de  $\Delta_0$  existe al menos una arista en  $\Delta$  con un extremo en  $P_1$  y otro en  $P_2$ .

**Demostración:** Sean  $p \in P_1$  y  $q \in P_2$ , y sea  $\delta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  un camino entre ellos. Sabemos que  $s(\beta_1) = p \in P_1$ , así que nos basta elegir el primer  $\beta_i$  (según el orden de los índices) tal que  $e(\beta_i) \in P_2$  (es claro que existen pues  $e(\beta_n) = q \in P_2$ ) para encontrar la arista que buscamos. En efecto, si  $i > 1$  claramente  $\beta_i$  cumple la condición, mientras que si  $i = 1$   $s(\beta_i) = e(\beta_{i-1}) \in P_2$ , por tanto  $s(\beta_i) \in P_1$  mientras que  $e(\beta_i) \in P_2$ .  $\square$

(1.10) **Definición:** Una subgráfica  $\Delta'$  de  $\Delta$  (cuyos vértices y aristas son subconjuntos, respectivamente, de los vértices y aristas de  $\Delta$ ) es inducida\* si para todo  $i^{\alpha}j$  en  $\Delta_1$  tal que  $i, j$  están en  $\Delta'$ , implica que  $i^{\alpha}j$  está en  $\Delta'_1$ .

(1.11) **Ejemplo:** La siguiente figura representa tres gráficas finitas, claramente las gráficas son conexas, pues no presentan subconjuntos de vértices aislados, la gráfica b es una subgráfica inducida de a, pues coinciden en las aristas de los todos vértices que comparten (el 1, 2 y 3) a saber  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , mientras que c es una subgráfica tanto de a como de b, pero no es una subgráfica inducida pues no tiene la arista  $\gamma$ .




---

\* También conocidas como **plenas**.



## 1.2 Matrices y operadores de adyacencia.

En esta sección definiremos a los operadores de adyacencia y observaremos sus propiedades principales, restringiéndonos inicialmente al caso en que  $\Delta$  es una gráfica finita. Aunque, una vez despejadas algunas dificultades en la definición del operador infinito, la mayoría de las observaciones también serán válidas para el caso general.

### *El caso finito.*

Consideraremos inicialmente el caso en que  $\Delta_0$  es finito (Y al ser  $\Delta$  acotada esto implica que  $\Delta_1$  también es finito).

(1.12) **Definición:** La matriz de adyacencia de una gráfica  $\Delta$ ,  $A$  (o bien:  $A_\Delta$  o  $(a_{ij})$  o  $(a(\Delta)_{ij})$ ) es aquella cuya  $(i,j)$ -ésima entrada es el número de aristas entre  $i$  y  $j$ , si  $i$  es diferente de  $j$ , y el doble del número de lazos en caso de que sean iguales.

(1.13) **Ejemplo:** Las siguientes son las matrices de adyacencia correspondientes al ejemplo 1.11 a y b.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Algunas observaciones se desprenden directamente de la definición :

(1.14) **Observaciones:**

a)  $A$  tiene entradas reales mayores o iguales que cero (de hecho son enteros no negativos).

b)  $A$  es Simétrica ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) y por tanto, Hermitiana ( $A^H = A$  donde  $A^H$  aquella matriz cuyas entradas  $a_{ij}^H$  son exactamente  $\bar{a}_{ji}$ ), Normal ( $A^H A = A A^H$ ), y Auto-adjunta ( $(Ax, y) = (x, Ay)$  donde  $(x, y)$  denota el producto escalar euclidiano, ver 1.17)

c) Podemos interpretar el hecho de que  $\Delta$  sea acotada (Definición 1.3), de la siguiente forma:

$$\sum_{j \in \Delta_0} a_{ij} \leq M_\Delta \quad \text{para todo } i \text{ en } \Delta_0$$

A lo largo de los siguientes capítulos, será de importancia para los operadores finitos (exclusivamente) la propiedad de ser irreducibles, según la siguiente definición.

(1.15) **Definición:** Una matriz  $A$  de  $n \times n$ , es irreducible, si para toda pareja de conjuntos de índices no vacíos y ajenos  $\{i_s\}$ ,  $\{j_w\}$  cuya unión sea todo  $\{1, \dots, n\}$ , existen  $i$  en  $\{i_s\}$  y  $j$  en  $\{j_w\}$  tales que,  $a_{ij}$  es mayor que cero. En caso contrario será reducible.

Dada una matriz de adyacencia  $A$ , por el Lema 1.9 decir que es irreducible, es equivalente a decir que  $\Delta$  es conexa. En efecto, los conjuntos de índices son también conjuntos de vértices, y sabemos, existe alguna arista entre ellos, por lo tanto, la entrada correspondiente a los extremos de dicha arista es mayor que cero.

La siguiente es una propiedad muy interesante de las potencias de  $A$ .

(1.16) **Teorema:** Sea  $A = (a_{ij})$  la matriz de adyacencia de  $\Delta$ , entonces  $(a_{ij}^{(n)})$  la entrada  $(i, j)$  de su potencia  $n$ -ésima, corresponde al número de caminos de longitud  $n$  que existen entre  $i$  y  $j$ .

**Demostración:** Se demostrará por inducción sobre  $n$ . En el caso  $n = 1$ , sabemos bien que  $a_{ij}$ , es el número de aristas entre

$i$  y  $j$ , y por tanto el número de caminos de longitud uno. Ahora, observemos la entrada  $(i,j)$  de la potencia  $n+1$ :

$$a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in \Delta_0} a_{ik}^{(n)} a_{kj}$$

Para cada  $k$ , por hipótesis de inducción, sabemos que  $a_{ik}^{(n)}$  es el número de caminos de longitud  $n$  entre  $i$  y  $k$ , y por otro lado  $a_{kj}$  son las aristas entre  $k$  y  $j$ , por lo que, basta multiplicar estos dos números, para obtener todos los posibles caminos entre  $i$  y  $j$  cuyo penúltimo vértice (el inicio de la última arista) sea  $k$ , y por tanto, si sumamos los valores para toda posible  $k$  ( $k \in \Delta_0$ ), obtendremos el número de todos los posibles caminos entre  $i$  y  $j$  de longitud  $n+1$ .  $\square$

### ***El caso de la gráfica infinita.***

Es claro que la matriz  $A$  de  $n \times n$  es la representación de una transformación lineal con dominio y contramínimo en  $\mathbb{C}^n$ . Sin embargo, cuando ponemos atención en el caso de una gráfica con un número infinito de vértices, nos encontramos con algunas dificultades para una definición análoga. Por ejemplo, la definición clásica de  $\{Ax\}$ , como el producto punto entre el  $i$ -ésimo renglón de  $A$  y  $x$ , se transforma aquí en una serie infinita que no necesariamente ha de converger.

Así pues, en nuestro interés de generalizar los operadores de adyacencia al caso en que  $\Delta$  sea infinita, habremos de encontrar un espacio vectorial en el cual dicha matriz, efectivamente represente un operador lineal y en el cual podamos definir el producto interior, la norma, etc. En seguida introduciremos dicho espacio vectorial y en posteriores

capítulos justificaremos plenamente que las matrices infinitas de adyacencia son efectivamente sus operadores lineales.

- (1.17) **Definición:**  $l^2$  es el conjunto de todas las sucesiones  $x := \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  en los números complejos tales que la serie de sus valores absolutos al cuadrado convergen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

$l^2$  es un espacio vectorial de dimensión infinita, con producto interno definido como:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

Como justificación de lo anterior nos basta señalar un par de hechos:

- (1.18) Por la desigualdad de Cauchy:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n |x_i \bar{y}_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2} < \infty$$

Ya que:  $\sum |x_i|^2$  y  $\sum |y_i|^2$  son acotadas por estar  $(x_i)$  y  $(y_i)$  en  $l^2$ , de aquí que, la serie infinita, cuyas sumas parciales corresponden a la parte izquierda de la desigualdad, converge, esto implica que, el producto punto está bien definido (recuérdese que una serie converge, si converge absolutamente). Por otro lado:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + |y_i|^2 + 2|x_i||y_i|$$

De donde, por (1.18) es nuevamente fácil ver que la suma infinita de la izquierda converge, y por tanto  $(x, y)$  está en  $l^2$ .

Ahora, intuitivamente podemos ver que, como nuestras gráficas son acotadas y la suma de todas las entradas del renglón  $i$ -ésimo de  $A$ , no es otra cosa que el número de aristas que inciden en  $i$ , el cual, sabemos es un número finito, por tanto, lo es también la suma de dichas entradas al cuadrado:

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^2 \leq M_{\Delta}^2 < \infty$$

Por tanto:

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 < \infty$$

Es decir: los renglones de  $A$  están en  $l^2$ . Así pues, la multiplicación de dicha matriz infinita con elementos en  $l^2$ , basada en el producto interior de "renglón-columna" estará bien definido, y compartirá las propiedades básicas de las matrices finitas.

También podemos extender la notación de  $l^2$  al caso de gráficas finitas, pues los elementos en  $\mathbb{C}^n$ , al contar con un número finito de elementos, tienen una suma (finita) de valores absolutos al cuadrado bien definida. Así, denotando  $l_{\Delta}^2$  nos referiremos a  $\mathbb{C}^n$  cuando  $\Delta_0$  tenga  $n$  vértices.

### ***Espectro y radio espectral.***

En cuanto a los conceptos de espectro y radio espectral de una gráfica haremos las siguientes definiciones:

**(1.19) Definición:**

a) El espectro de una gráfica  $\sigma(\Delta)$ , es el espectro de su operador de adyacencia, es decir el conjunto de las  $\lambda$  en los números complejos tales que  $A-\lambda I$  no es un operador invertible (no existe  $(A-\lambda I)^{-1}$ ).

b) El radio espectral  $r(\Delta)$ , es el radio espectral de la matriz de adyacencia  $A$ , es decir: el  $\text{Sup}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\Delta)\}$

**(1.20) Ejemplo:** Retomaremos el ejemplo 1.11-b, que sabemos tiene como matriz de adyacencia la correspondiente al ejemplo 1.13-b, de aquí que el determinante de la siguiente matriz, nos dará el polinomio característico:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Que mediante un cálculo directo resulta ser:

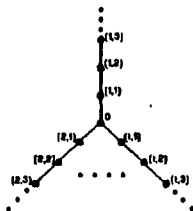
$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (-1)(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

Y por tanto, sus raíces, que son precisamente el espectro de 1.10-b son:

$$\{2, -1, -1\}$$

Y el radio espectral es, naturalmente 2.

(1.21) **Ejemplo:** Sea  $\Delta^t$  la gráfica infinita siguiente:



Es decir, la estrella infinita de  $t$  brazos, aquí veremos que :

$$r(\Delta^t) = \sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}$$

Para llegar a esta conclusión requeriremos echar mano de algunos resultados del capítulo tres, que nos permiten caracterizar dicho radio espectral de la siguiente manera:

$$r(\Delta^t) = \sup_M \{r(\Delta_M^t)\}$$

Donde  $\Delta_M^t$  es la estrella finita de  $t$  brazos de longitud  $M$  donde  $M$  es par (ver 3.34, 3.24 y 3.7)

Probaremos entonces que  $\lambda_0$  es igual a dicho supremo, viendo que  $\lambda_0$  es cota de todos los valores:

$$\{r(\Delta_M^t)\}$$

Y que si  $\lambda < \lambda_0$  existe un  $M$  tal que  $\lambda < r(\Delta_M^t)$ .

Iniciaremos con algunos cálculos para la línea finita de longitud  $M$ .

Llamaremos  $L_M$  a su matriz de adyacencia y  $q_M(\lambda)$  a su polinomio característico, entonces:

$$\begin{aligned} q_M(\lambda) &= \det(L_M) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & & \\ 0 & -1 & \lambda & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 \\ -1 & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & \lambda \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & -1 & \lambda \end{pmatrix}^{M-1} \\ &= \lambda q_{M-1}(\lambda) - q_{M-2}(\lambda) \end{aligned}$$

Veremos por inducción que si hacemos el cambio de variable  $\lambda = \omega + \omega^{-1}$  (para las  $\lambda > 2$ ) entonces:

$$q_M(\omega) = \frac{\omega^{M+1} - \omega^{-(M+1)}}{\omega - \omega^{-1}}$$

a) Cuando  $M$  es uno, claramente:

$$q_1(\lambda) = \omega + \omega^{-1} = \frac{(\omega + \omega^{-1})(\omega - \omega^{-1})}{\omega - \omega^{-1}} = \frac{\omega^2 - \omega^{-2}}{\omega - \omega^{-1}}$$

b) Supongamos que se cumple para toda  $n < M$ , entonces:

$$\begin{aligned} q_M(\lambda) &= \lambda q_{M-1}(\lambda) - q_{M-2}(\lambda) = \\ &= \frac{(\omega + \omega^{-1})(\omega^M - \omega^{-M})}{\omega - \omega^{-1}} - \frac{(\omega^{M-1} - \omega^{-(M-1)})}{\omega - \omega^{-1}} \\ &= \frac{\omega^{M+1} - \omega^{-(M+1)} + \omega^{M-1} - \omega^{-(M+1)} - (\omega^{M-1} - \omega^{-(M-1)})}{\omega - \omega^{-1}} \\ &= \frac{\omega^{M+1} - \omega^{-(M+1)}}{\omega - \omega^{-1}} \end{aligned}$$



Ahora calcularemos el polinomio característico  $p_M(\lambda)$  de  $\Delta_M^t$  que resulta ser:

$$p_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_M & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L_M & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & L_M & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & L_M \end{pmatrix}$$

Para esto habremos de tener presente el siguiente resultado de Álgebra Lineal (ver por ejemplo [11] Hoffman, 5.20), si A y B son matrices cuadradas y O una matriz nula:

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$$

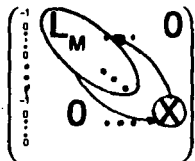
Así pues, desarrollando el determinante por su primer renglón, resulta claro que tendremos  $t + 1$  sumandos, siendo el primero de ellos:

$$\lambda \det^t(L_M) = \lambda q_M(\lambda)^t$$

Mientras que el  $k$ -ésimo es aquel que resulta del siguiente determinante:

$$(-1)^{Mk+3} (-1) \det \begin{pmatrix} \overset{k}{\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_M & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix} \det^{t-k}(L_M)$$

Donde X es la matriz que resulta de  $L_M$  cuando ésta pierde su primer columna. Claramente X no es una matriz cuadrada pero podemos completarla mediante una permutación de  $M(k-1)M$  renglones y  $(M-1)(k-1)M$  columnas como se ilustra:



Y ya que  $M((k-1)M + (k-1)(M-1))$  es par ( $M$  lo es) el determinante conserva su signo después de las permutaciones, igualmente al ser  $Mk+3$  siempre impar, resulta ser que el  $k$ -ésimo factor es igual a:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & X & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \det^{-1}(L_M)$$

De donde, si ponemos atención resulta igual a:

$$-q_{M-1}(\lambda)q_M(\lambda)^{t-1}$$

Y por tanto:

$$p_M(\lambda) = \lambda q_M(\lambda)^t - t q_{M-1}(\lambda)q_M(\lambda)^{t-1}$$

Usando en  $p_M(\lambda)$  el cambio de variable que ya habíamos visto para  $q_M(\lambda)$  resulta esta importante caracterización de:

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= q_M(\lambda)^{t-1} \left[ \frac{(\omega + \omega^{-1})(\omega^{M+1} - \omega^{-(M+1)}) - t(\omega^M - \omega^{-M})}{\omega - \omega^{-1}} \right] \\ &= q_M(\lambda)^{t-1} \left[ \frac{\omega^{M+2} - \omega^{-M} + \omega^M - \omega^{-(M+2)} - t\omega^M + t\omega^{-M}}{\omega - \omega^{-1}} \right] \end{aligned}$$

$$= \left[ \frac{q_M(\lambda)^{l-1}}{\omega - \omega^{-1}} \right] \left[ \omega^M (\omega^2 - (t-1)) + \omega^{-(M+2)} (\omega^2 (t-1) - 1) \right]$$

Ahora hagamos  $\omega_0 = \sqrt{t-1}$  y  $\lambda_0 = \omega_0 + \omega_0^{-1}$ , y observemos que si  $\omega \geq 1$ ,  $\omega + \omega^{-1}$  es monótona creciente (su derivada es no negativa) y su imagen es  $[2, \infty)$ . Además:  $\omega^{-1} \leq 1 \leq \omega$  donde (para  $\lambda = \omega + \omega^{-1} \geq 2$ )  $\omega^n \leq \omega^n$  y también:

$$q_n(\lambda) = \frac{\omega^{n+1} - \omega^{-(n+1)}}{\omega - \omega^{-1}} > 0$$

Y ya que si:

$$\omega^2 > \omega_0^2 = t-1 > 1 \text{ se da también que: } \omega^2(t-1) > 1 \\ \text{y también: } \omega^2 - (t-1) > 0 \text{ y } \omega^2(t-1) - 1 > 0$$

En base a la caracterización que habíamos hecho de  $p_M(\lambda)$ , resulta claro que  $\lambda = \omega + \omega^{-1} > \lambda_0$  implica  $p_M(\lambda) > 0$ , pues todos los múltiplos de dicha caracterización son positivos. Lo cual quiere decir que no hay valores propios de ninguna  $\Delta_M^i$  mayores que  $\lambda_0$ .

Ahora, claramente  $\lambda_0 \geq \sqrt{3-1} + (\sqrt{3-1})^{-1} > 2$ , y entonces podemos tomar  $2 < \lambda = \omega + \omega^{-1} < \lambda_0$  con  $1 < \omega < \sqrt{t-1}$ , entonces se sigue cumpliendo que:

$$\left[ \frac{q_M(\lambda)^{l-1}}{\omega - \omega^{-1}} \right] > 0$$

Pero veremos que para alguna M

$$\left[ \omega^M (\omega^2 - (t-1)) + \omega^{-(M+2)} (\omega^2 (t-1) - 1) \right] < 0$$

En efecto si mantenemos  $\omega$  fija tenemos que esto se daría para n si:

$$\omega^{-(n+2)} ((t-1)\omega^2 - 1) < \omega^n ((t-1) - \omega^2)$$

Lo cual es equivalente a:

$$\omega^{-(n+2)} \left[ \frac{(1-\eta)\omega^2 - 1}{(1-\eta) - \omega^2} \right] = \omega^{-(n+2)} K < \omega^n$$

Lo cual claramente se da para alguna  $m$  pues la sucesión de la izquierda tiende a cero y la de la derecha tiende a infinito, Así pues:  $p_m(\lambda) < 0$ . Por otro lado ya habíamos visto que  $p_m(\lambda) > 0$  si  $\lambda > \lambda_0$ , por el Teorema del valor intermedio  $p_m(\lambda_1) = 0$  para algún  $\lambda_1 \in (\lambda, \lambda_0)$  dicho de otro modo si  $\lambda < \lambda_0$  existe un valor propio de  $\Delta_m^1$  mayor que  $\lambda$  de aquí que  $\lambda < r(\Delta_m^1)$  con lo cual completamos el ejemplo.

### 1.3 Morfismos de Gráficas.

- (1.22) **Definición:** Un **Morfismo de gráficas** entre  $\Delta$  y  $\Delta'$  es una función  $\phi: \Delta \rightarrow \Delta'$  (que envía vértices a vértices y aristas a aristas) con la propiedad de conservar la adyacencia de los vértices, es decir:

$$\text{si } i \alpha_j \in \Delta_1, \text{ entonces } \phi(i) \phi(j) \in \Delta'_1,$$

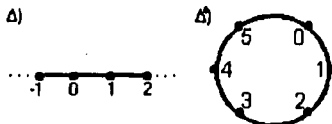
Por otro lado, para que un morfismo sea **sobre**, bastará que:

$$\forall \alpha \in \Delta'_1, \exists \beta \in \Delta_1, \text{ tal que } \phi(\beta) = \alpha$$

Pues, nótese que en nuestro caso, (el de las gráficas conexas) como no hay vértices aislados cada vértice del contradominio es extremo de alguna arista y por tanto, también imagen de algún vértice (salvo el caso de la gráfica con un solo vértice).

Ilustremos lo anterior con el siguiente ejemplo:

- (1.23) **Ejemplo:** Sean, las siguientes gráficas:



Podemos definir un morfismo sobre de gráficas, el cual, consista en "enrollar" la gráfica infinita  $\Delta$  en  $\Delta'$ , que consiste en un ciclo de seis vértices, la función  $\phi$  estará definida como:

$$\phi(x) = r \quad \text{donde } r \text{ es el residuo de } x \text{ al dividirlo por seis.}$$

(Esta regla servirá tanto para vértices, como para aristas). Y claramente, conserva la adyacencia de todos los vértices.

Resultan claras las siguientes observaciones sobre automorfismos:

a) Si  $f$  y  $g$  son automorfismos,  $f \circ g$  (o simplemente  $fg$ ) también lo es, pues claramente es biyectivo, y :

si  $i \neq j$  entonces  $g(i) \neq g(j)$  y también:  $fg(i) \neq fg(j)$

b) Existe  $I$  (la función identidad), que claramente es un automorfismo con  $I \circ g = g \circ I = g$  para todo automorfismo  $g$ .

c) Todo automorfismo  $f$ , al ser biyectivo, tiene una función inversa  $f^{-1}$ , por la propia definición de automorfismo, resulta claro  $f^{-1}$  que conserva también la adyacencia y por tanto es también un automorfismo, y además:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$$

d) También es claro, que la composición de automorfismos es asociativa (lo sabemos para las funciones).

(1.24) De las anteriores observaciones se desprende que, el conjunto de todos los automorfismos de  $\Delta$ , forman un grupo, tomando la composición de automorfismos como la operación.

# 2

## El Teorema de Perron-Frobenius.

---

El resultado principal de esta sección es el **Teorema 2.12**, el cual será muy útil en posteriores capítulos. Basicamente nos garantiza que para nuestras matrices de adyacencia de gráficas finitas el radio espectral es también un valor propio, y aunque en posteriores capítulos veremos una cierta generalización de esto para el caso infinito, una segunda parte del resultado permanece cierto exclusivamente para el caso finito, a saber: que para el radio espectral se puede elegir un vector propio estrictamente positivo. El **Teorema** es válido para las matrices irreducibles en general y de hecho es más extenso, pero como en nuestro caso sólo nos interesa mostrar la propiedad arriba mencionada de las matrices de adyacencia,

hemos restringido el alcance del resultado (que puede ser consultado en su versión original en [7]).



## 2.1 Definiciones y resultados preliminares.

(2.1) **Definición:** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices de  $n \times m$ , denotaremos:  $A \leq B$  si y sólo si,  $a_{ij} \leq b_{ij} \forall i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$  (análogamente para  $A < B$ ). En el caso particular de que en  $A$  todas las entradas sean mayores o iguales a cero (positivas) denotaremos  $0 \leq A$  ( $0 < A$ ) y les llamaremos matrices no-negativas (positivas).

(2.2) **Lema:** Si  $A \leq B$  entonces:

- a)  $Ax \leq Bx$  para  $x \geq 0$ .
- b)  $0 \leq (B-A)$ .

**Demostración:**

a) Como  $a_{ik} \leq b_{ik}$  entonces  $a_{ik}x_k \leq b_{ik}x_k$  de donde:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \leq \sum_{k=1}^n b_{ik}x_k$$

b)  $a_{ik} \leq b_{ik}$  si y sólo si  $0 \leq a_{ik} - b_{ik} = (A-B)_{ik}$

□

(2.3) **Lema:** Sea  $A$  una matriz cuadrada, entonces:  $A(I+A)^k = (I+A)^k A$ .

**Demostración:** Observemos que:  $A(I+A) = A + A^2 = (I+A)A$ , repitiendo esto  $k$  veces obtendremos el resultado. □

(2.4) **Definición:** A continuación tenemos los siguientes conjuntos:

- a)  $(\mathbb{R}^n)^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \text{ y } x \neq 0\}$
- b)  $X = \{x \in (\mathbb{R}^n)^+ : (x, x) = 1\}$
- c)  $Y = \{y : y = (I+A)^{n-1}x, x \in X\}$

- (2.5) **Lema:** Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ , no-negativa, si existen  $P$  una permutación, y  $A'$  tal que  $A' = P^m A P$ , y además es de la forma:

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ E & D \end{bmatrix}$$

Donde  $C$  y  $D$  son matrices cuadradas (de orden  $\mu$  y  $n-\mu$  respectivamente) y  $0$  es la matriz nula, entonces  $A$  es reducible.

**Demostración:** Sea:

$$P = [e_1 \dots e_\mu e_{\mu+1} \dots e_n]$$

Nótese que la columna  $c$ -ésima de  $P$  y el renglón  $r$ -ésimo de  $P^m$  son respectivamente:

$$e_c \text{ y } e_r^t$$

Por otro lado sean  $r \in \{1, \dots, \mu\}$  y  $c \in \{\mu+1, \dots, n\}$  notemos que la entrada  $(r, c)$ -ésima de  $A'$  se encuentra en la parte correspondiente a la matriz nula y por tanto:

$$0 = a'_{rc} = (P^m A P)_{rc} = (P^m (A P))_{rc}$$

Ahora recuérdese que, la entrada  $(r, c)$ -ésima del producto de dos matrices, no es otra cosa que el producto punto del  $r$ -ésimo renglón de la primera, por la  $c$ -ésima columna de la segunda, que en este caso resulta ser:

$$e_r^t (A e_c) = a_{rc} = 0$$

Pero si observamos cuidadosamente lo anterior, y recordamos la definición (1.5), esto implica que  $A$  es reducible, pues

claramente los conjuntos  $\{i_1, \dots, i_p\}$  y  $\{i_{\mu_1}, \dots, i_n\}$  son no vacíos, ajenos, y  $a_{ij} = 0$ , para  $i \in \{i_1, \dots, i_p\}$  y  $j \in \{i_{\mu_1}, \dots, i_n\}$ .  $\square$

- (2.6) **Lema:** Sea  $A$  irreducible no negativa y  $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ , entonces  $(I + A)^{n-1}x > 0$ .

**Demostración:** Si  $y = (I + A)x = x + Ax$ , sabemos por 2.2 que también  $Ax \geq 0$  y entonces  $y_i = x_i + \Sigma$ , donde  $\Sigma \geq 0$ . Es decir,  $(I + A)x$  tiene al menos las mismas entradas positivas que  $x$ .

Demostraremos que de hecho tiene más entradas positivas. Y ya que  $x$  tenía al menos una entrada diferente de cero, después de  $n-1$  multiplicaciones  $(I + A)^{n-1}x$  tendrá todas sus entradas positivas.

Spongamos lo contrario, es decir que dicha  $y$  tiene las mismas entradas positivas que  $x$ , y sea  $P$  una permutación tal que:

$$Px = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Py = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde  $u$  y  $v$ , son positivos. De aquí que:

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = Py = Px + PAx = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + PAP^n \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

En la última parte de la igualdad, simplemente hemos particionado la matriz, de tal forma que el producto "compuesto" de las submatrices esté bien definido, y que  $A_{11}$ , y  $A_{22}$  sean matrices cuadradas.

De aquí que:  $A_{21}u = 0$ , pero como  $A_{21} \geq 0$  y  $u > 0$  por lo tanto  $A_{21} = 0$ , pero de acuerdo al Lema 2.5 esto es una contradicción con el hecho de que  $A$  es irreducible.  $\square$

(2.7) **Corolario:** Si  $y \in Y$  entonces  $y > 0$ .  $\square$

(2.8) **Lema:** El conjunto  $Y$  es cerrado y acotado.

**Demostración:** Ya que  $Y$  es la imagen de  $X$  bajo la transformación lineal  $(I+A)^{-1}$  (que sabemos son continuas) nos basta observar que  $X$  es cerrado y acotado.  $\square$

(2.9) **Definición:** Sean  $A$  irreducible y  $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ , entonces definimos el número:

$$r_x = \min_{\substack{i \in \{1, n\} \\ x_i > 0}} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

(2.10) **Lema:** Sean  $A$  irreducible, no negativa y  $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ , entonces:

- a)  $r_x$  es claramente mayor o igual que cero.
- b)  $r_x = \max\{p : px \leq Ax\}$
- c) Si  $px < Ax$  entonces  $p < r_x$ .
- d)  $R(x) = r_x$  es continua para  $x \in (\mathbb{R}^n)^+$  y  $x > 0$ .

**Demostración:**

b) Por definición, para toda  $i$  donde  $x_i \neq 0$ :

$$(2.11) \quad r_x \leq \frac{(Ax)_i}{x_i} \quad \text{por tanto} \quad r_x x_i \leq (Ax)_i \quad \text{por tanto} \quad r_x x \leq Ax$$

Por otro lado si sucediera que  $r_x < p$  y  $px \leq Ax$  entonces  $r_x x_i < px_i \leq (Ax)_i$  para toda  $i$ , de donde, (si  $x_i \neq 0$ ):

$$r_x < p \leq \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

Lo que contradeciría el hecho de que  $r_x$  es el mínimo de tales números.

- c) Si  $px < Ax$ , sea  $i$  tal que  $x_i \neq 0$  entonces:  $px_i < (Ax)_i$ , por tanto:

$$p < \frac{(Ax)_i}{x_i} \text{ y entonces } p < \min \frac{(Ax)_i}{x_i} = r_x$$

- d) Sabemos que  $Ax$  es continua por ser lineal en  $\mathbb{C}^n$ , de donde la función componente,  $(Ax)_i$  lo es, y por tanto también  $(Ax)_i/x_i$  (pues  $x_i \neq 0$ ), se concluye que  $R(x)$  es continua (recuérdese que el mínimo entre funciones puede expresarse en términos de el valor absoluto, sumas y multiplicaciones por constantes).  $\square$

## 2.2 Demostración.

Estamos ahora preparados para demostrar el resultado principal de este capítulo.

- (2.12) **Teorema (Perron-Frobenius):** Una matriz  $A$  de adyacencia de una gráfica acotada y conexa (que sabemos es no-negativa e irreducible) tiene un valor característico en los números reales positivos tal que, el valor absoluto de cualquier otro valor característico no lo excede. Expresado de otra manera, el radio espectral  $r(\Delta)$ , pertenece al espectro  $\sigma(\Delta)$ . Además para  $r(\Delta)$  podemos elegir un vector característico, con entradas estrictamente positivas.

**Demostración:** Ya que  $R(x) = r_x$  es continua para todo  $x > 0$  (2.10d) en particular lo es en  $Y$  (Corolario 2.7) el cual es un conjunto cerrado y acotado (Lema 2.8) por lo cual  $R(x)$  toma un valor máximo para algún vector en  $Y$  digamos  $z$  (nótese nuevamente que  $z > 0$  por estar en  $Y$ ). Ahora si  $x$  es cualquier vector en  $(\mathbb{R}^n)^+$  sea:

$$v = \frac{x}{\|x\|} \therefore (x, x) = 1 \text{ y } v \geq 0$$

Se desprende directamente de la definición (2.9) que  $r_x = r_v$ . Ahora, sabemos que  $r_v v \leq Av$  (Lema 2.10b), por tanto  $r_v(I+A)^{n-1}v \leq (I+A)^{n-1}Av = A(I+A)^{n-1}v$  (lemas 2.2 y 2.3). Si le llamamos  $y$  a  $(I+A)^{n-1}v$  entonces:  $r_v y \leq Ay$  y por tanto (Lema 2.10b)  $r_v \leq r_y$ , pero nótese que  $y$  está en  $Y$  de donde  $r_x = r_v \leq r_y \leq r_x$ , es decir,  $r_x$  es el máximo para todo  $(\mathbb{R}^n)^+$ .

Ahora si consideramos al vector  $u = (1, 1, 1, \dots, 1)$  vemos que:

$$r_u = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{k=1}^n a_{ik} > 0$$

Ya que para todo vértice  $i$ , existe alguna entrada  $a_{ij} > 0$  al ser  $\Delta$  conexa. De donde  $r_i \geq r_u > 0$ , es decir  $r_i$  es estrictamente positivo.

Sabemos por 2.10b que  $r_i z \leq Az$ , por tanto  $0 \leq Az - r_i z$ . Supongámoslo diferente de cero, entonces por 2.6 y 2.3:

$$0 < (I+A)^{n-1}(Az - r_i z) = A(I+A)^{n-1}z - r_i(I+A)^{n-1}z \\ \therefore r_i(I+A)^{n-1}z < A(I+A)^{n-1}z$$

Si llamamos  $x$  a  $(I+A)^{n-1}z$ , entonces por 2.6 tendríamos  $x > 0$  y además  $r_i x < Ax$ , y por 2.10c:  $r_i < r_x$  lo cual contradeciría el hecho de que  $r_i$  es el máximo de tales valores. De aquí se concluye que  $Az = r_i z$ .

Ahora si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  y  $x$  uno de sus vectores propios (que bien pueden estar compuestos de números complejos) entonces:

$$|\lambda| |x_i| = |(Ax)_i| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n a_{ik} |x_k| = (Ax^+)_i$$

Donde  $x^+$  es el vector cuyas entradas son las mismas que  $x$ , pero en valor absoluto, por tanto  $|\lambda| x^+ \leq Ax^+$  y de aquí, por 2.10b:

$$|\lambda| \leq r_{x^+} \leq r_x$$

Lo cual, demuestra el resultado.  $\square$

(2.13) **Observación:** Podemos asumir que el vector propio  $x$  de  $r(\Delta)$ , es unitario además de ser positivo, pues claramente:

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|}$$

es también un vector propio.

- (2.14) **Ejemplo:** Para encontrar un vector propio correspondiente al radio espectral de la gráfica 1.11b, nos basta resolver el sistema homogéneo correspondiente a  $\lambda=2$ , de la matriz en 1.20, que resulta ser:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Que tras unos cálculos fáciles resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuyas soluciones son los múltiplos escalares de (1,1,1), de donde:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así pues, se comprueba que  $r(\Delta)=2$  pertenece a  $\sigma(\Delta)$  y que podemos encontrar un vector propio con entradas positivas.



# 3

## Propiedades de los Operadores de Adyacencia.

---

En este capítulo se verán diversas propiedades del operador de adyacencia y de su espectro. Iniciando en la Sección 3.1, con resultados generales, donde destacan la relación que hay entre la continuidad y la acotación de un operador (**Teorema 3.1**), la caracterización de la norma de  $A$  como el supremo de los valores de  $|(Ax, x)|$  para  $x$  unitarios (**Teorema 3.14**) y un criterio para saber si un valor  $\lambda$  pertenece al espectro de un operador basado en el cálculo de cierto límite (**Teorema 3.4**). La mayoría de los resultados se demuestran para operadores autoadjuntos y/o acotados, por lo que el **Teorema 3.10**, que demuestra precisamente que los operadores de adyacencia son acotados, nos permite aplicarlos a dichos operadores. Hemos simplificado varios de los resultados a las partes que serán de

utilidad en posteriores capítulos, por lo que un tratamiento más extenso de los mismos, puede ser encontrado en textos de análisis funcional.

La Sección 3.2 en cambio, contiene resultados especializados para operadores de adyacencia, tales como el concepto de subgráficas convergentes y su relación con el radio espectral (Teorema 3.24), una cierta generalización del Teorema de Perron-Frobenius que demuestra que el radio espectral de  $\Delta$  pertenece al espectro aún para  $\Delta$  infinitas (Teorema 3.25) y la caracterización del radio espectral como el límite de ciertos valores de las entradas del operador de adyacencia (Teorema 3.28).

### 3.1 Propiedades generales.

Un resultado conocido de análisis postula que cualquier transformación lineal  $B$  en un espacio vectorial finito es una función continua. También se sabe para dicho caso, que siempre podemos definir su norma como el supremo de los valores  $\|Bx\|$  para  $x$  de norma uno (es decir  $B$  es acotada). Sin embargo, cuando observamos el caso en que el espacio vectorial tiene dimensión infinita como  $l^2$ , las observaciones anteriores no se cumplen necesariamente para todo operador lineal. El siguiente Teorema relaciona ambos conceptos, resultando que, es equivalente decir que un operador es continuo o acotado.

- (3.1) **Teorema:** Sea  $B$  un operador lineal de  $l^2$ , si  $B$  es continua en algún punto  $x_0$ , lo es en todo  $l^2$ , y además es continua sí y sólo si existe una constante  $M$  tal que  $\|Bx\| \leq M\|x\|$  (equivalentemente  $\|Bx\| \leq M \forall \|x\| = 1$ ).

**Demostración:** Si  $B$  es continua en  $x_0$  entonces:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \|Bx - Bx_0\| < \epsilon \text{ si } \|x - x_0\| < \delta$$

Ahora supóngase que  $\|x - x_0\| < \delta$ , por tanto  $\|(x + x_0 - x_0) - x_0\| < \delta$ , y entonces:

$$\|B(x + x_0 - x_0) - Bx_0\| = \|Bx - Bx_0\| < \epsilon$$

Lo que demuestra la primera parte del Teorema.

Ahora, si  $\|Bx\| \leq M\|x\|$  para todo  $x$ , entonces:

$$\|Bx - B0\| = \|Bx - 0\| = \|Bx\| \leq M\|x\| = M\|x - 0\|$$

Y entonces basta tomar:

$$\delta = \frac{\epsilon}{M}$$

para que sea fácil mostrar que  $B$  es continua en cero y por tanto continua en general.

En caso de que  $B$  sea continua, en particular lo será en cero, y si tomamos  $\epsilon = 1$  resulta que:

$$\exists \delta \text{ tal que: } \|Bx - B0\| = \|Bx\| < 1 \text{ si } \|x\| < \delta$$

Si  $x \neq 0$  hagamos:

$$x_0 = \frac{\delta x}{2\|x\|}$$

Lo que es equivalente a:

$$x = \frac{2\|x\|}{\delta} x_0$$

Además,  $\|x_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$  por tanto  $\|Bx_0\| < 1$ , de aquí que:

$$\|Bx\| = \frac{2\|x\|}{\delta} \|Bx_0\| < \frac{2}{\delta} \|x\|$$

Así que, podemos elegir  $M = \frac{2}{\delta}$  para obtener el resultado.

Por último, para comprobar la parte de la equivalencia, pues basta ver que a cada  $x \neq 0$  corresponde un vector unitario:

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|}$$

Y como:

$$\|Bx_0\| = \frac{1}{\|x\|} \|Bx\|$$

De aquí que:

$$\|Bx_0\| \leq M \Leftrightarrow \|Bx\| \leq M\|x\|$$

□

(3.2) **Corolario:** Si B es continua entonces existe:

$$\|B\| := \sup_{\|x\|=1} \{\|Bx\|\}$$

**Demostración:** Al ser B continua, el Teorema anterior nos dice que los valores de  $\|Bx\|$  para  $\|x\|=1$  están acotados y por tanto, existe dicho supremo.  $\square$

(3.3) **Corolario:** Si B es acotada, entonces existe:

$$\sup\{ |(Bx, y)| : \|x\| = \|y\| = 1 \}$$

**Demostración:** Por la desigualdad de Schwarz:

$$|(Bx, y)|^2 \leq \|Bx\| \|y\| \leq \|B\| \leq M$$

Es decir, dichos valores están acotados superiormente, de donde se concluye el resultado.  $\square$

El siguiente resultado, nos proporciona un criterio de mucha utilidad para determinar si un valor  $\lambda$  pertenece al espectro de un operador B.

(3.4) **Teorema:** Sea B un operador lineal acotado y  $\lambda \in \mathbb{C}$ , tales que existe una sucesión  $\{x_n\}$ , con  $x_n \in \ell_2^2$ ,  $\|x_n\| = 1$ , y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Bx_n - \lambda x_n\| = 0$$

entonces:  $\lambda \in \sigma(B)$ .

**Demostración:** Veremos que si  $\lambda \notin \sigma(B)$  no puede existir una sucesión con tales características.

Pero, si existe  $(B-\lambda I)^{-1}$  entonces es continua, esto es claro si observamos que, por 3.1, B es continua, obviamente la función identidad lo es, y entonces dicha función inversa lo será. De aquí que (también por 3.1 y 3.2), ambas están

acotadas y por tanto su norma está bien definida. Por tanto para toda  $x$  tal que  $\|x\| = 1$ :

$$1 = \|x\| = \|(B-\lambda I)^{-1}(B-\lambda I)x\| \leq \|(B-\lambda I)^{-1}\| \|Bx-\lambda x\|$$

Así, si tomamos:

$$\epsilon = \frac{1}{\|(B-\lambda I)^{-1}\|}$$

(Pues claramente  $\|(B-\lambda I)^{-1}\|$  es diferente de cero) entonces:

$$\epsilon \leq \|Bx-\lambda x\|$$

Lo cual implica, precisamente que no puede existir tal sucesión donde  $\|Bx-\lambda x\|$  tienda a cero.  $\square$

(3.5) **Lema:** Sea  $B$  auto adjunta (ver 1.14), tal que  $\langle Bx, x \rangle \geq 0$ , si denotamos  $\{x, y\} := \langle Bx, y \rangle$ , entonces comparte las siguientes propiedades con el producto punto.

- a)  $\{x, y\} = \{y, x\}$
- b)  $\{x + y, z\} = \{x, z\} + \{y, z\}$
- c)  $\{\alpha x, y\} = \alpha \{x, y\}$
- e)  $|\{x, y\}|^2 \leq \{x, x\} \{y, y\}$  (desigualdad de Schwarz)

**Demostración:**

- a)  $\{x, y\} = \langle Bx, y \rangle = \langle x, By \rangle = \langle By, x \rangle = \{y, x\}$
- b)  $\{x + y, z\} = \langle B(x + y), z \rangle = \langle Bx + By, z \rangle = \langle Bx, z \rangle + \langle By, z \rangle = \{x, z\} + \{y, z\}$
- c)  $\{\alpha x, y\} = \langle B(\alpha x), y \rangle = \alpha \langle Bx, y \rangle = \alpha \{x, y\}$
- e) Precisamente las propiedades de producto punto anteriores son las que se usan en la demostración de la desigualdad de Schwarz:

$\forall \alpha \quad 0 \leq \{x + \alpha y, x + \alpha y\}$  y entonces:

$$\begin{aligned}
 &= \{x, x\} + \{x, \alpha y\} + \{\alpha y, x\} + \{\alpha y, \alpha y\} \\
 &= \{x, x\} + \bar{\alpha}\{x, y\} + \alpha\{y, x\} + \alpha\bar{\alpha}\{y, y\}
 \end{aligned}$$

Podemos suponer que  $\{x, y\}$  es diferente de cero, pues de lo contrario obtendríamos fácilmente el resultado. Así si elegimos:

$$\alpha = \frac{-\{x, x\}}{\{y, x\}}$$

entonces lo anterior se convierte en:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \{x, x\} + \frac{-\{x, x\}\{x, y\}}{\{y, x\}} + \frac{-\{x, x\}\{y, x\}}{\{y, x\}} + \frac{|\{x, x\}|^2\{y, y\}}{|\{y, x\}|^2} \\
 \therefore 0 &\leq -\{x, x\} + \frac{\{x, x\}^2\{y, y\}}{|\{x, y\}|^2} \\
 \therefore \{x, x\} &\leq \frac{\{x, x\}^2\{y, y\}}{|\{x, y\}|^2} \\
 \therefore |\{x, y\}|^2 &\leq \{x, x\}\{y, y\}
 \end{aligned}$$

□

(3.6) **Lema:** Sea B un operador autoadjunto, entonces los valores  $\langle Bx, x \rangle$  son reales.

**Demostración:** Por un lado, por ser Autoadjunta:

$$\langle Bx, x \rangle = \langle x, Bx \rangle$$

Por otro, por las propiedades del producto punto:

$$\langle Bx, x \rangle = \overline{\langle x, Bx \rangle}$$

De aquí, se concluye el resultado. □

- (3.7) **Lema:** Sea  $B$  un operador auto-adjunto, si  $\lambda \in \sigma(B)$ , entonces  $\lambda$  pertenece a la cerradura de todos los valores de  $(Bx, x)$  para las  $x$  tales que  $\|x\| = 1$ .

**Demostración:** Supongamos que no se cumple lo anterior, entonces  $\lambda$  no es uno de tales valores, ni tampoco uno de sus puntos de acumulación, por tanto la "distancia" entre  $\lambda$  y cualquiera de los valores  $(Bx_0, x_0)$  con  $\|x_0\| = 1$  es mayor que cero, digamos:

$$|\lambda - (Bx_0, x_0)| \geq d > 0$$

Entonces para cualquier  $x \neq 0$ , recordemos que podríamos tomar:

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|} \text{ de donde:}$$

$$\begin{aligned} d &\leq |\lambda - (Bx_0, x_0)| = |\lambda(x_0, x_0) - (Bx_0, x_0)| = |((\lambda I - B)x_0, x_0)| = \\ &= \left| \left( (\lambda I - B) \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \frac{1}{\|x\|^2} |((\lambda I - B)x, x)| \end{aligned}$$

De aquí, por la desigualdad de Schwarz:

$$\begin{aligned} d\|x\|^2 &\leq |((\lambda I - B)x, x)| \leq \|((\lambda I - B)x)\| \|x\| \\ \therefore d\|x\| &\leq \|(\lambda I - B)x\| \end{aligned}$$

Pero esto implica que, si  $x \neq 0$ , entonces  $(\lambda I - B)x$  es también, diferente de cero. Es decir el espacio nulo de  $(\lambda I - B)$  es  $\{0\}$ , y por tanto existe  $(\lambda I - B)^{-1}$ , lo que es una contradicción con el supuesto de que  $\lambda \in \sigma(B)$ .  $\square$

- (3.8) **Teorema:** Sea  $B$  auto-adjunta y acotada entonces:

$$\sup_{\|x\|=1} (Bx, x) \in \sigma(B)$$

Y también:

$$\inf_{\|x\|=1} (Bx, x) \in \sigma(B)$$



**Demostración:** Como B es auto-adjunta y acotada sabemos (por 3.6) que los valores  $(Bx, x)$  son reales, y 3.3 nos garantiza que existe su supremo:

$$\lambda = \sup_{\|x\|=1} (Bx, x)$$

Obsérvese que:

$$((\lambda I - B)x, x) = (\lambda x, x) - (Bx, x) = \lambda \cdot (x, x) - (Bx, x) \geq 0$$

Pues  $\lambda$  es el supremo de tales valores. También de este hecho, se desprende que podemos encontrar una sucesión de  $\{x_n\}$  con  $x_n \in E_n$ , tal que:

$$(3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} ((\lambda I - B)x_n, x_n) = 0$$

También es claro que  $(\lambda I - B)$  es autoadjunta, pues:

$$(\lambda x - Bx, x) = (\lambda x, x) - (Bx, x) = (x, \lambda x) - (x, Bx) = (x, (\lambda I - B)x)$$

Así, el operador  $(\lambda I - B)$  cumple las propiedades del Lema 3.5 y por tanto, si elegimos  $(\lambda I - B)x$  en el lugar de  $Bx$ ,  $x$  y  $(\lambda I - B)x$  en el lugar de  $Bx$ ,  $x$  y  $y$  respectivamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|(\lambda x - Bx)\|^4 &= \|(\lambda I - B)x, (\lambda I - B)x\|^2 \leq \\ &\leq \|(\lambda I - B)x, x\| \|(\lambda I - B)^2 x, (\lambda I - B)x\| \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Schwarz, y ya que  $\|x\| = 1$  esto es menor o igual a:

$$\leq \|(\lambda I - B)x, x\| \|(\lambda x - Bx)\|^2 \leq \|(\lambda I - B)x, x\| \|(\lambda I - B)\|^2$$

De donde, si tomamos  $K = \|(\lambda I - B)\|^2$ :

$$0 \leq \|Bx - \lambda x\| \leq \sqrt{\|(\lambda I - B)x, x\|} \sqrt{K}$$

Por tanto, para la sucesión en 3.9 resulta que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Bx_n - \lambda_n\| = 0$$

Y por 3.4, esto implica que  $\lambda \in \sigma(B)$ . Omitimos la demostración análoga para el caso del ínfimo.  $\square$

En este momento contamos ya, con los resultados que nos permitirán demostrar que todo operador de adyacencia es acotado y continuo, además de dar una cota precisa de su norma. Esto se logrará aplicando algunos de los resultados al caso de las gráficas finitas (ya sabíamos que eran acotadas y continuas), lo que será la base para llegar al resultado general.

(3.10) **Teorema (Schur):** Sea  $A$  el operador de adyacencia para la gráfica  $\Delta$  (posiblemente infinita) entonces  $A$  es un operador lineal acotado de  $\ell^2$  en  $\ell^2$  donde:

$$\|A\| \leq M_\Delta$$

**Demostración:**

**Caso finito:**

Para esta primera parte de la demostración nos basaremos sólo en dos propiedades de  $A$ , por un lado, que es real y simétrica, por otro en que:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq M_\Delta$$

Como  $A$  es normal (ver 1.14) entonces por un resultado de álgebra lineal (ver por ejemplo [10] Noble, 8.6):

$$A = P^{-1} \Lambda P$$

Donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  y  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , recordemos que por 3.7 dichas  $\lambda$  son reales, ahora

$$A^2 = P^{-1} \Lambda^2 P$$

De donde se desprende que  $\sigma(A^2) = \{\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\}$ , por lo que si  $\lambda \in \sigma(A^2)$ ,  $\lambda$  será real positiva. Sea  $x$  un vector propio de  $\lambda$  tal que  $\|x\| = 1$  y sea  $|x_p|$  la mayor de sus entradas en valor absoluto, entonces:

$$\lambda |x_p| = |\lambda x_p| = \left| \sum_{i=1}^n a_{pi}^{(2)} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n a_{pi}^{(2)} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n a_{pi}^{(2)} |x_p|$$

(3.11) Por tanto:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \sum_{i=1}^n a_{pi}^{(2)} \leq \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n a_{pk} a_{ki} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{pk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{pk} \left[ \sum_{i=1}^n a_{ki} \right] \leq \sum_{k=1}^n a_{pk} M_{\Delta} \leq M_{\Delta}^2 \end{aligned}$$

Pero claramente  $A^2$  es también autoadjunta, pues:

$$(A^2 x, x) = (Ax, Ax) = (x, A^2 x)$$

Y al ser finita y por tanto acotada, por el Teorema 3.8:

$$\sup_{\|x\|=1} (A^2 x, x) \in \sigma(A^2)$$

Y por la observación 3.11, tenemos que si  $\|x\| = 1$ :

$$(3.12) \quad \|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^2 x, x) \leq \sup_{\|x\|=1} (A^2 x, x) \leq M_{\Delta}^2$$

Es decir

$$\|A\| \leq M_{\Delta}$$

**Caso infinito:**

En el caso en que  $A$  sea una matriz infinita, podemos tomar  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $A_n$  la matriz de  $n \times n$  tal que:

$$(A_n)_{ij} = a_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Es claro que,  $A_n$  "hereda" de  $A$ , las propiedades de ser real y simétrica, y de que:

$$\sum_{j=1}^n (A_n)_{jj} = \sum_{j=1}^n a_{jj} \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{jj} \leq M_A$$

Por lo que, por el caso finito (ver 3.12) sabemos que, si  $\|x\| = 1$  entonces:

$$(A_n x, A_n x) \leq M_A^2$$

Lo que equivale a decir, para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \neq 0$ :

$$\frac{(A_n x, A_n x)}{\|x\|^2} \leq M_A^2$$

Y por tanto para toda  $x \in \mathbb{C}^n$

$$(3.13) \quad \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right|^2 = \sum_{i=1}^n |(A_n x)_i|^2 = (A_n x, A_n x) \leq M_A^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Pero obsérvese que, si elegimos  $x \in \ell^2$  tal que  $\|x\| = 1$ :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = 1$$

Y sus sumas parciales son menores o iguales que uno. También, para toda  $m > n$ , sucede que:

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^m a_{ik} x_k \right|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^m a_{ik} x_k \right|^2 \leq M_A^2 \sum_{i=1}^m |x_i|^2 \leq M_A^2$$

Recordemos de la sección 1.2 que:

$$(A_n x)_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$$

Está bien definida (converge), por lo que:

$$\sum_{i=1}^n |(Ax)_i|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 \leq M_A^2$$

Como esto se cumple para toda  $n$ , claramente la serie infinita es convergente (por el criterio de acotación), pero si observamos con cuidado, esto quiere decir precisamente, que  $Ax \in \ell^2$ , también en el caso general (cuando  $\|x\| \neq 1$ ), se sigue naturalmente de lo anterior. Así pues, esto confirma que  $A$  es efectivamente un operador de  $\ell^2$  a  $\ell^2$ . Además:

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{(Ax)_i} = \sum_{i=1}^{\infty} |(Ax)_i|^2 \leq M_A^2$$

Que es equivalente a decir (como  $\|x\| = 1$ ):

$$\|A\| \leq M_A$$

□

(3.14) **Teorema:** Sea  $B$  acotada y autoadjunta entonces:

$$\sup_{\|x\|=1} |(Bx, x)| = \|B\|$$

**Demostración:** Ya vimos en 3.3 que:

$$|(Bx, y)| \leq \|B\| \quad \text{Para } \|x\| = \|y\| = 1$$

Por otro lado, sean  $x$ ,  $y$  cualesquiera (diferentes de cero):

$$\frac{|(Bx, y)|}{\|x\| \|y\|} = \left| \left( B \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \right| \leq \|B\|$$

Si definimos:

$$s := \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \left\{ \frac{|(Bx, y)|}{\|x\| \|y\|} \right\}$$

entonces, de lo anterior:

$$s \leq \|B\|$$

Ahora, si  $Bx \neq 0$  (y  $x \neq 0$ ):

$$\frac{|(Bx, Bx)|}{\|x\| \|Bx\|} \leq s$$

Pues  $s$  es el supremo de dichos valores:

$$\therefore \|Bx\|^2 = |(Bx, Bx)| \leq s \|x\| \|Bx\|$$

$$\therefore \|Bx\| \leq s \|x\|$$

$$\therefore \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq s \quad \forall x \neq 0$$

$$\|B\| \leq s$$

Lo que nos da:  $s = \|B\|$ . A continuación veremos que, de hecho:

$$s' := \sup_{\|x\|=1} |(Bx, x)| = s$$

Dada la definición resulta evidente que:

$$s' \leq s$$

Por otro lado, también resulta claro que:

$$s' = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{|(Bx, x)|}{\|x\|^2} \right\}$$

Y por tanto, para cualquier  $x$  resulta que:

$$(3.15) \quad |(Bx, x)| \leq s' \|x\|^2$$

Ahora:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(Bx, y)| &= \left| \frac{1}{2} \{ (Bx, y) + \overline{(Bx, y)} \} \right| = \frac{1}{4} |2\{ (Bx, y) + (y, Bx) \}| \\ &= \frac{1}{4} |2\{ (Bx, y) + (By, x) \}| \\ &= \frac{1}{4} |(Bx, x) + (Bx, y) + (By, x) + (By, y) \\ &\quad - [(Bx, x) - (Bx, y) - (By, x) + (By, y)]| \\ &= \frac{1}{4} |(Bx, x+y) + (By, x+y) - [(Bx, x-y) - (By, x-y)]| \\ &= \frac{1}{4} |(B(x+y), x+y) - (B(x-y), x-y)| \\ &\leq \frac{1}{4} \{ |(B(x+y), x+y)| + |(B(x-y), x-y)| \} \end{aligned}$$

Pero, nótese que, aquí podemos aplicar la observación 3.15, por lo que, lo anterior es menor o igual a:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{4} \{ s' \|x+y\|^2 + s' \|x-y\|^2 \} \\ &= \frac{s'}{4} \{ (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \} \\ &= \frac{s'}{4} \{ (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) \} \\ &= \frac{s'}{4} \{ 2(x, x) + 2(y, y) \} = \frac{s'}{2} \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 \} \end{aligned}$$

Ahora, sean  $x$  y  $y$ , fijos, de norma uno, entonces elegimos  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = 1$  y  $\alpha(Bx, y) = |(Bx, y)|^*$ , entonces:

\*Esto es claro si observamos que, si  $z$  es complejo y  $z = r(\cos\theta + i \operatorname{Sen}\theta)$  su forma polar, podemos elegir  $\alpha = \cos(2\pi - \theta) + i \operatorname{Sen}(2\pi - \theta)$  y entonces  $\alpha z = r$

$$\begin{aligned}
 |(Bx, y)| &= \alpha(Bx, y) = (B\alpha x, y) = \operatorname{Re}(B\alpha x, y) = |\operatorname{Re}(B\alpha x, y)| \\
 &\leq \frac{s'}{2} \{ \|\alpha x\|^2 + \|y\|^2 \} = s'
 \end{aligned}$$

Es decir,  $s'$  es una cota superior de tales números y por tanto su supremo cumple que:

$$s \leq s'$$

Lo cual completa la demostración.  $\square$



### 3.2 Las Sucesiones de gráficas y sus operadores.

A continuación, veremos el concepto de convergencia de una sucesión de subgráficas y su relación con el radio espectral.

Con motivo de llevar a todos los operadores (y vectores) de la sucesión, a un solo espacio vectorial, con frecuencia los extenderemos de tal forma que operen en  $l^2$ .

- (3.16) **Definición:** Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de subgráficas de  $\Delta$ , diremos que converge a  $\Delta$ , si:

$$\forall \alpha \in \Delta, \exists N \text{ tal que } \alpha \in (F_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

**Observación:** Siempre podemos encontrar una sucesión  $\{F_n\}$  de subgráficas finitas, inducidas y conexas que converjan a  $\Delta$ .

Lo anterior es claro si  $\Delta$  es finita, mientras que si no lo es, podemos suponer que existe una subgráfica  $F_n$  que contiene a los primeros  $n$  vértices de  $\Delta$  y tiene las características arriba mencionadas, construiremos la siguiente subgráfica agregando el vértice  $n+1$ , eligiendo un camino entre  $n$  y  $n+1$  tomando todos los vértices involucrados y finalmente, haciendo  $F_{n+1}$ , la gráfica inducida que contenga los nuevos vértices y los de  $F_n$ , claramente  $\{F_n\}$  convergerá a  $\Delta$ .

- (3.17) **Lema:** Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de subgráficas convergentes a  $\Delta$ , entonces para todo  $x \in l^2$ : (si denotamos  $A_n = A(F_n)$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$$

**Demostración:** Nótese que hemos hecho una extensión del operador  $A_n$ , ya que bien pudiera corresponder a una gráfica

finita, de tal forma que requeriría que agregáramos ceros a las entradas correspondientes a los vértices de  $\Delta$  que no estén en  $F_n$ .

Sea  $\epsilon > 0$  y  $x \in l^2$ , ahora definiremos:

$$(3.18) \quad x_i^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq m \\ x_i & \text{si no} \end{cases}$$

Si recordamos, ya que  $x \in l^2$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \Sigma$$

Entonces:

$$\|x^{(m)}\|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_i|^2 = \Sigma - \sum_{i=1}^m |x_i|^2$$

Que sabemos, tiende a cero cuando  $m$  tiende a infinito.

Entonces, escogemos  $m$  de tal forma que:

$$\|x^{(m)}\| \leq \epsilon / 2M_A$$

$\{F_n\}$  converge a  $\Delta$ , por lo que podemos encontrar una  $K$  tal que, todas las gráficas a partir de  $F_K$ , contengan todas las aristas de los vértices  $i \leq m$  (son un número finito), es decir:

$$a(F_k)_{ij} = a_{ij} \quad \forall k \geq K, \quad i \leq m \quad \forall j$$

De aquí, que para  $k \geq K$ :

$$(3.19) \quad \|Ax - A_k x\| = \|Ax^{(m)} - A_k x^{(m)}\|$$

Pues, las entradas  $(Ax)_i$  y  $(A_k x)_i$ , al coincidir para  $i \leq m$  se anulan, y por tanto, sólo contarán aquellas para las que  $i > m$ , lo que nos remite precisamente a la definición de  $x^{(m)}$  (3.18). Ahora, por el Teorema de Schur (3.10), sabemos que  $\|A\| \leq M_\Delta$ , pero también al ser  $F_n$  una subgráfica de  $\Delta$ ,  $\|A_n\| \leq M_{F_n} \leq M_\Delta$ . Por tanto:

$$\|Ax^{(m)} - A_k x^{(m)}\| \leq \|Ax^{(m)}\| + \|A_k x^{(m)}\| \leq 2M_\Delta \|x^{(m)}\| \leq 2M_\Delta \left(\frac{\epsilon}{2M_\Delta}\right) = \epsilon$$

Lo cual completa la demostración.  $\square$

(3.20) **Lema:** Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de subgráficas convergentes a  $\Delta$ , entonces: (si denotamos  $A_n = A(F_n)$  y  $(a_n)_{ij} = a(F_n)_{ij}$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{(k)})_{ij} = a_j^{(k)}$$

**Demostración:** Por inducción. Si  $k = 1$ , sabemos que:

$$(a_n)_{ij} = (e_i, A_n e_j)$$

Pero, por el Lema anterior (3.17), y por el hecho que el producto punto es una función continua:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e_i, A_n e_j) = (e_i, A e_j) = a_{ij}$$

Que comprueba lo que buscábamos, ahora, supongamos que se da lo anterior para  $k$ , y si observamos el caso  $k+1$ :

$$(a_n^{(k+1)})_{ij} = (e_i, A_n^{(k+1)} e_j) = (e_i, A_n (A_n^{(k)} e_j))$$

Pero al ser  $A_n$  autoadjunta, esto es igual a :

$$(a_n^{(k+1)})_{ij} = (A_n e_i, A_n^{(k)} e_j)$$

Pero por hipótesis de inducción y por el Lema 3.17

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n e_i, A_n^{(k)} e_i) = (A e_i, A^{(k)} e_i) = (e_i, A^{(k+i)} e_i) = a_{ij}^{(k+i)}$$

Lo cual concluye la demostración.  $\square$

(3.21) **Lema:** Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de subgráficas convergente a  $\Delta$ , entonces (si denotamos  $A_n = A(F_n)$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = \|A\|$$

**Demostración:** Se demostrará lo anterior mediante dos desigualdades, que juntas, nos darán el resultado, a saber:

$$\|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \leq \|A\|$$

Así pues, para demostrar la primera desigualdad empezaremos usando el resultado 3.17 y recordando que, tanto el producto punto, como el valor absoluto, son funciones continuas podemos concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(A_n x, x)| = |(Ax, x)|$$

Ahora, si  $\{\|A_n\|\}$  es una subsucesión convergente cualquiera de  $\{\|A_n\|\}$ , que digamos, converge a  $L$ , y sea una  $x$  cualquiera de norma uno, entonces, observemos que:

$$(Ax, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |(A_n x, x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(A_{n_k} x, x)|$$

Pues cualquier subsucesión convergerá al mismo límite. Además lo anterior es menor o igual a:

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = L$$

Ya que, de 3.14 sabemos que:

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \{(A_n x, x)\}$$

Como la anterior desigualdad se da para  $\ell$  y  $x$  arbitrarias, resulta que:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \{(Ax, x)\} \leq \inf \left\{ L : L = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \end{aligned}$$

Para verificar la segunda desigualdad, nos restringiremos inicialmente, al caso en que las gráficas  $F_n$  sean finitas.

Por el Teorema de Perron-Frobenius (2.12) podemos elegir un vector propio de  $r(F_n)$ ,  $v > 0$  y  $\|v\| = 1$ , y como podemos suponer que tanto  $v$  como  $A_n$  están o actúan en  $\ell^2$ , entonces:

$$r(F_n) = \|r(F_n)v\| = \|A_n v\| \leq \|Av\| \leq \|A\|$$

Para toda  $n$ , pues  $a(F_n)_i \leq a_i$  al ser  $F_n \subset \Delta$ . Pero además:

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \{(A_n x, x)\} = \max \left\{ \inf_{\|x\|=1} (A_n x, x), \sup_{\|x\|=1} (A_n x, x) \right\}$$

Pero, por 3.8 sabemos que dichos supremo e ínfimo, pertenecen al espectro y por tanto son ambos menores o iguales a  $r(F_n)$ , lo que nos permite concluir que:

$$\|A_n\| \leq \|A\|$$

Y como esto sucede para toda  $n$ , tenemos que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \leq \sup_n \|A_n\| \leq \|A\|$$

Lo que comprueba el resultado para el caso finito.

Reconsiderando el caso en que alguna  $F_n$  es infinita, podemos elegir una sucesión de subgráficas finitas  $\{G_m\}$  que converga a  $F_n$ , al que podemos entonces aplicar el resultado:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A(G_m)\| = \|A_n\|$$

Como cada  $G_m$  es también subgráfica de  $\Delta$ , ya sabíamos del caso finito, que para tales gráficas se cumple:

$$\|A(G_m)\| \leq \|A\|$$

Y como sucede para todo  $m$ , por tanto:

$$\|A_n\| \leq \|A\|$$

Para toda  $n$ , por lo que, nuevamente:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \leq \sup_n \|A_n\| \leq \|A\|$$

Lo que completa la demostración.  $\square$

(3.22) **Corolario:** Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de subgráficas convergente a  $\Delta$ , entonces (si denotamos  $A_n = A(F_n)$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$$

**Demostración:** Para comprobar lo anterior, basta percatarse de que:

$$\|A - A_n\| \leq \|A\| - \|A_n\|$$

Y que, por el Lema anterior (3.21), sabemos que la parte derecha de la desigualdad, tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.  $\square$

- (3.23) **Teorema:** Sea  $A$  el operador de adyacencia de la gráfica  $\Delta$ , entonces:

$$r(\Delta) = \|A\|$$

**Demostración:** Sabemos de 3.7 que,  $\sigma(\Delta)$  está contenido en la cerradura de  $(Ax, x)$ , de aquí que para todo  $\lambda \in \sigma(\Delta)$ , sucede que:

$$|\lambda| \leq \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|$$

Por tanto:

$$r(\Delta) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\Delta)\} \leq \|A\|$$

Por otro lado, a partir del Teorema 3.14, que dice que  $\|A\|$  es el supremo de los valores  $|(Ax, x)|$  para  $\|x\|=1$ , también podemos caracterizarla como:

$$\|A\| = \max \left\{ \sup_{\|x\|=1} (Ax, x), \left| \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) \right| \right\}$$

Pero por 3.8, sabemos que ambos, supremo e ínfimo están en  $\sigma(\Delta)$ , por tanto, sus valores absolutos son menores que  $r(\Delta)$ , de aquí:

$$\|A\| \leq r(\Delta)$$

Lo que completa la demostración.  $\square$

- (3.24) **Teorema:** Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de subgráficas convergentes a  $\Delta$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(F_n) = r(\Delta)$$

**Demostración:** Lo anterior es una consecuencia directa del Lema 3.21 y del Teorema anterior (3.23).  $\square$

(3.25) **Teorema:** Sea  $\Delta$  una gráfica infinita, entonces  $r(\Delta) \in \sigma(\Delta)$ .

**Demostración:**

Podemos elegir una sucesión de subgráficas finitas  $\{F_n\}$  que converga a  $\Delta$ . Por el Teorema de Perron-Frobenius (2.12) también podemos elegir vectores  $x_n$  unitarios, tal que  $A_n x_n = r(F_n) x_n$ , de aquí que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|A x_n - r(\Delta) x_n\| = \|A x_n - A_n x_n + A_n x_n - r(\Delta) x_n\| \leq \\ &\leq \|A x_n - A_n x_n\| + \|r(F_n) x_n - r(\Delta) x_n\| \\ &\leq \|A - A_n\| \|x_n\| + |r(F_n) - r(\Delta)| \|x_n\| \\ &= \|A - A_n\| + |r(F_n) - r(\Delta)| \end{aligned}$$

Pero, si tomamos en cuenta el límite cuando  $n$  tiende a infinito, por 3.22 y 3.24, sabemos que ambos sumandos de la parte derecha de la desigualdad tienden a cero, por lo que, del criterio 3.4 se deduce el resultado.  $\square$

(3.26) **Lema:** Sea una gráfica  $\Delta$ , entonces:

$$a_{ij}^{(k)} \leq r(\Delta)^k$$

**Demostración:**

**Caso finito.**

Sabemos que  $A$  es normal (ver 1.14), y por tanto, un resultado de álgebra lineal (ver por ejemplo [10] Noble, 7.14 y 8.8) nos permite elegir  $V$  y  $\Lambda$  tales que:

$$A = V \Lambda V^T$$

Donde  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , y donde  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  son vectores propios ortonormales (lo que implica que  $V$  es ortogonal), correspondientes a los valores propios



reales (3.7)  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Más aún, por el Teorema de Perron-Frobenius (2.12), también podemos elegir  $\lambda_n = r(\Delta)$  y  $v_n > 0$ , y como  $A^k = V\Lambda^k V^T$ , entonces:

$$(3.27) \quad a_{ij}^{(k)} = \sum_{r=1}^n v_{ir} \left[ \sum_{s=1}^n (\Lambda^{(k)})_{rs} v_{sj}^T \right] = \sum_{r=1}^n v_{ir} \left[ \sum_{s=1}^n \lambda_r^k \delta_{rs} v_{sj}^T \right] = \sum_{r=1}^n v_{ir} \lambda_r^k v_{rj}^T = \sum_{r=1}^n v_{ir} v_{rj} \lambda_r^k$$

Por tanto:

$$a_{ij}^{(k)} = |a_{ij}^{(k)}| = \left| \sum_{r=1}^n v_{ir} v_{rj} \lambda_r^k \right| \leq \sum_{r=1}^n |v_{ir} v_{rj} \lambda_r^k| \leq \left[ \sum_{r=1}^n |v_{ir}| |v_{rj}| \right] \lambda_n^k$$

Pero, por la desigualdad de Cauchy:

$$\sum_{r=1}^n |v_{ir}| |v_{rj}| \leq \sqrt{\sum_{r=1}^n |v_{ir}|^2} \sqrt{\sum_{r=1}^n |v_{rj}|^2} = 1$$

Pues sabemos que  $V$  es ortonormal y por tanto, sus renglones tienen norma uno. De aquí que:

$$a_{ij}^{(k)} \leq r(\Delta)^k$$

**Caso infinito:**

Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de subgráficas finitas convergente a  $\Delta$ , por el caso finito, sabemos que :

$$a(F_n)_{ij}^{(k)} \leq r(F_n)^k$$

Para toda  $n \in \mathbb{N}$ , lo que implica que los límites (ver 3.20 y 3.24), también respetan la desigualdad:

$$a_{ij}^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a(F_n)_{ij}^{(k)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r(F_n)^k = r(\Delta)$$

Lo que concluye la demostración.  $\square$

(3.28) **Teorema:** Sea  $\Delta$  una gráfica y  $i, j \in \Delta_0$  entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{ij}^{(n)}} = r(\Delta)$$

**Demostración:** Sabemos por el **Lema** anterior (3.26) que todos los elementos de la sucesión:

$$\left\{ \sqrt[k]{a_{ij}^{(k)}} \right\}_k$$

Son menores o iguales a  $r(\Delta)$ , lo que implica que el límite de cualquiera de sus subsucesiones convergentes, también será menor o igual a  $r(\Delta)$ , y por tanto, bastará encontrar una subsucesión convergente a  $r(\Delta)$ , o bien, mostrar que  $r(\Delta)$  es de hecho el supremo de los elementos de la sucesión, para concluir el resultado. Iniciaremos con el caso en que  $\Delta$  sea finita.

**Caso finito:**

Para encontrar una subsucesión como la arriba mencionada, procederemos por pasos, iniciando con el caso particular en que, tanto  $i$  como  $j$  sean iguales a  $n$  y a partir de esto, progresaremos hasta el caso general.

Retomaremos el desarrollo del **Lema** anterior (en el cual habíamos encontrado la descomposición:  $A^k = V\Lambda^k V^T$ ). A partir de 3.27 obtenemos:

$$\therefore 0 \leq a_{nn}^{(k)} = \sum_{r=1}^n v_{nr}^2 \lambda_r^k \leq \sum_{r=1}^n v_{nr}^2 \lambda_n^k = \lambda_n^k$$

Ahora:

$$\sum_{r=1}^n v_{nr}^2 \lambda_r^k = v_{nn}^2 \lambda_n^k + \sum_{r=1}^{n-1} v_{nr}^2 \lambda_r^k$$

Y si  $k$  es mayor que cero y par, ambos sumandos a la derecha son no-negativos, y por tanto:

$$(3.29) \quad 0 < v_{nn}^2 \lambda_n^k \leq a_{nn}^{(k)} \leq \lambda_n^k$$

Pues sabemos que  $v_{nn} > 0$  de aquí que:

$$\sqrt[k]{v_{nn}^2 \lambda_n^k} = \sqrt[k]{v_{nn}^2} \lambda_n \leq \sqrt[k]{a_{nn}^{(k)}} \leq \lambda_n$$

Como  $\sqrt[k]{v_{nn}^2}$  tiende a uno cuando  $k$  tiende a infinito, esto implica que la sucesión de las  $k$ ésimas potencias tiende a  $\lambda_n = r(\Delta)$ . Por otro lado, para cada  $i$ , existe un  $q$  tal que  $a_{in}^{(q)} > 0$  (pues existe al menos un camino entre  $i$  y  $n$ ) entonces si  $(k-q)$  es mayor que cero y par, de 3.29 se sigue que:

$$(3.30) \quad 0 < a_{in}^{(q)} a_{nn}^{(k-q)} \leq a_{in}^{(k)}$$

Pues es uno solo de los sumandos que definen  $a_{in}^{(k)}$ , que son todos no-negativos. También:

$$(3.31) \quad 0 < a_{in}^{(k)} = |a_{in}^{(k)}| = \left| \sum_{r=1}^n v_{ir} v_{nr} \lambda_r^k \right| \leq \sum_{r=1}^n |v_{ir} v_{nr}| \lambda_n^k = \Sigma \lambda_n^k$$

Pero  $\Sigma$  es mayor que cero, pues el producto y  $\lambda_n^k$  lo son. De donde:

$$(3.32) \quad \sqrt[k]{a_{in}^{(q)}} \sqrt[k]{a_{nn}^{(k-q)}} = \sqrt[k]{v_{nn}^2} \lambda_n \leq \sqrt[k]{a_{in}^{(k)}} \leq \sqrt[k]{\Sigma} \lambda_n$$

Y ya que, ambos extremos de la desigualdad tienden a  $\lambda_n$  cuando  $k$  tiende a infinito, se deduce que la parte central, también tiende a  $\lambda_n$ , para las  $k$ ésimas descritas anteriormente.

Igualmente, sabemos existe, para cada  $j$ ,  $p$  tal que  $a_{nj}^{(p)} > 0$ , y si además se cumple que,  $(k-p)-q$  es mayor que cero y par, por 3.30:

$$0 < a_{in}^{(k-p)} a_{nj}^{(p)} \leq a_{ij}^{(k)}$$

Similarmente a 3.31 y 3.32 se obtiene:

$$\sqrt{a_{in}^{(k-p)}} \sqrt{c} \leq \sqrt{a_{ij}^{(k)}} \leq \sqrt{\Sigma \lambda_n}$$

Lo que nos conduce, tal como en los casos anteriores, a la conclusión de que, la parte central de la desigualdad tiende a  $r(\Delta)$ , cuando las  $k$ as descritas anteriormente tienden a infinito.

**Caso infinito:**

Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de subgráficas finitas que converga a  $\Delta$  y tales que  $F_n \subset F_{n+1}$ , (ver observación 3.16), de aquí que:

$$0 \leq a(F_n)_{ij} \leq a(F_{n+1})_{ij} \leq a_{ij}$$

Pues toda arista de  $i$  a  $j$  de  $F_n$ , pertenecerá también a  $F_{n+1}$  y a  $\Delta$  de aquí que :

$$(3.33) \quad \sqrt{a(F_n)_{ij}^{(k)}} \leq \sqrt{a(F_{n+1})_{ij}^{(k)}} \leq \sqrt{a_{ij}^{(k)}}$$

De donde, por el caso finito, podemos concluir:

$$r(F_n) \leq r(F_{n+1}) \leq r(\Delta)$$

Es decir,  $\{r(F_n)\}$  es una sucesión monótona creciente y acotada, y por tanto su límite es también su supremo:

$$(3.34) \quad r(\Delta) = \text{Sup}_n \{r(F_n)\}$$

También sabemos, por el Lema 3.26, que:

$$\sqrt{a(F_n)_{ij}^{(k)}} \leq r(F_n)$$

De aquí:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a(F_n)_{ij}^{(k)}} = r(F_n) = \sup_k \left\{ \sqrt[k]{a(F_n)_{ij}^{(k)}} \right\}$$

Pues es una cota superior y además es el límite superior de tales valores. Sea  $\varepsilon > 0$ , elíjase  $n$  tal que:

$$0 \leq r(\Delta) - r(F_n) \leq \varepsilon/2$$

Y ahora elíjase  $m$  tal que:

$$r(F_n) - \sqrt[m]{a(F_n)_{ij}^{(m)}} \leq \varepsilon/2$$

Por el Lema 3.26 sabemos que, para toda  $k$ :

$$\sqrt[k]{a_{ij}^{(k)}} \leq r(\Delta)$$

De aquí que

$$\begin{aligned} 0 \leq r(\Delta) - \sqrt[m]{a_{ij}^{(m)}} &= (r(\Delta) - r(F_n)) + \left( r(F_n) - \sqrt[m]{a(F_n)_{ij}^{(m)}} \right) + \\ &+ \left( \sqrt[m]{a(F_n)_{ij}^{(m)}} - \sqrt[m]{a_{ij}^{(m)}} \right) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + r \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Pues por 3.33 la última resta es un número negativo, de esto se deduce que:

$$\sup_k \sqrt[k]{a_{ij}^{(k)}} = r(\Delta)$$

Lo que completa el caso general.  $\square$

# 4

## Las Cubiertas de Galois.

---

En el presente capítulo, presentaremos la definición de cubierta de Galois, que involucra básicamente tres objetos, a saber, dos gráficas  $\Delta$  y  $\Delta'$  que serán el dominio y contradominio de un morfismo de gráficas  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$ , así como un grupo  $G$  de automorfismos del dominio, y que tendrá ciertas propiedades muy particulares con respecto a  $\pi$ . También veremos algunas de las principales propiedades de su espectro (el espectro de las dos gráficas involucradas), dentro de las que destacan el **Teorema 4.21** que da como resultado  $r(\Delta) \leq r(\Delta') \leq r(\Delta)$ , el **Teorema 4.15** del que resulta que el espectro de  $\Delta'$  está contenido en el de  $\Delta$ , si  $\Delta$  es finita, mientras que en 4.24 y 4.25 se obtendrá  $r(\Delta) = r(\Delta')$  si  $\Delta$  ó  $G$  son finitos.

## 4.1 Definiciones.

Iniciaremos con un par de definiciones que serán necesarias a su vez, para poder definir las cubiertas de Galois, a saber, los grupos de automorfismos que actúan libremente y sus órbitas.

Ya en el capítulo uno (1.24) habíamos observado que, el conjunto de todos los automorfismos de una gráfica, forma un grupo (con la composición como operación entre sus elementos). Claramente, dicho grupo puede tener uno o varios subgrupos, en la siguiente definición se destacan un tipo especial de subgrupos que serán muy importantes en el resto del presente trabajo.

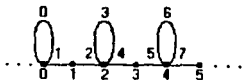
(4.1) **Definición:** Sea  $G$  un grupo de automorfismos de  $\Delta$ , se dirá que dicho grupo actúa libremente si:

- a) Sea  $g \in G$ , si existe  $i \in \Delta_0$  tal que  $g(i) = i$ , esto implica que  $g = I$
- b) Sea  $g \in G$ , si existe  $\alpha \in \Delta_1$  tal que  $g(\alpha) = \alpha$  esto implica que  $g = I$

Es decir, que la imagen de cualquier automorfismo diferente del automorfismo identidad  $I$ , no dejará invariante a ningún elemento de  $\Delta$  (ni vértices, ni aristas).

Ilustremos lo anterior con el siguiente ejemplo:

(4.2) **Ejemplo:** Sea  $\Delta$  la siguiente gráfica infinita:



Entonces las "traslaciones"  $t$ , a la derecha o a la izquierda (es decir donde a cada vértice  $i$  le corresponde el vértice  $i+2r$ , y a cada arista  $\alpha$  le corresponde la arista  $\alpha+3r$ , con  $r \in \mathbb{Z}$ ) forman claramente un grupo de automorfismos que actúan libremente (si  $i=g(i)=i+2r$  entonces  $r=0$  y por tanto  $g=I$ )

- (4.3) **Definición:** Sea  $G$  un grupo de automorfismos de  $\Delta$  y sea  $i$  un elemento de  $\Delta_0$  (respectivamente  $\alpha$  de  $\Delta_1$ ) entonces, la órbita de  $i$  con respecto a  $G$ ,  $G_i$  es el conjunto:

$$\{j \in \Delta_0 : j = g(i) \text{ donde } g \in G\}$$

Respectivamente,  $G\alpha$  es:

$$\{\beta \in \Delta_1 : \beta = g(\alpha) \text{ donde } g \in G\}$$

Es decir, son todos aquellos elementos de  $\Delta_0$  (respectivamente de  $\Delta_1$ ) que son imagen de  $i$  (respectivamente de  $\alpha$ ) para algún automorfismo en el grupo  $G$ .

Resulta claro que la relación,  $a$  esté en la órbita de  $b$ , es una relación de equivalencia, pues:

- a)  $a = I(a)$
- b)  $a = g(b)$  implica  $b = g^{-1}(a)$
- c)  $a = g(b)$  y  $b = h(c)$  implica  $a = gh(c)$

Por lo que las órbitas forman una partición, tanto del conjunto de los vértices, como el de las aristas.

- (4.4) **Ejemplo:** En la gráfica descrita en el ejemplo 4.2 resulta que:

$$\begin{aligned} t_r(i) &= 2r + i & \forall i \in \Delta_0 \\ t_r(\alpha) &= 3r + \alpha & \forall \alpha \in \Delta_1 \end{aligned}$$



Y entonces es claro que las órbitas de los vértices, son los dos conjuntos de enteros congruentes módulo dos, mientras que, las órbitas de las aristas son los tres conjuntos de enteros congruentes módulo tres.

(4.5) **Definición:** Sean  $\Delta$  y  $\Delta'$  dos gráficas,  $G$  un grupo de automorfismos de  $\Delta$  que actúa libremente,  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  un morfismo sobre de gráficas. Diremos que  $\pi$  es una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , si sucede que:

- a)  $\pi^{-1}[\pi(i)] = Gi \quad \forall i \in \Delta_0$
- b)  $\pi^{-1}[\pi(\alpha)] = G\alpha \quad \forall \alpha \in \Delta_1$

Es decir, si sucede que las órbitas (tanto de vértices como de aristas) corresponden exactamente, al conjunto de elementos que comparten una misma imagen en  $\pi$ .

Para tratar de aclarar lo anterior, podemos agregar que si  $\alpha$  y  $\beta$  son tales que su imagen en  $\pi$  es la misma, ( $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$ ) entonces estarán en la misma órbita y por tanto podremos encontrar una  $g \in G$ , tal que  $\alpha = g(\beta)$ .

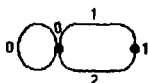
Igualmente, si consideramos que claramente  $\alpha$  y  $g(\alpha)$  están en la misma órbita, esto implica que su imagen en  $\pi$  es la misma, es decir:

$$\pi g(\alpha) = \pi(\alpha)$$

En lo que resta del trabajo, nos referiremos a los operadores de adyacencia de  $\Delta$  y  $\Delta'$  como  $A$  y  $A'$  y a sus entradas como  $(a_{ij})$  y  $(a'_{ij})$  respectivamente.

Ilustremos el anterior concepto con el siguiente ejemplo:

- (4.6) **Ejemplo:** Sea  $\Delta$  como en el ejemplo 4.2 y sea  $\Delta'$  como en la figura. Si definimos  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  de tal forma que los vértices  $i$ , tengan como imagen al residuo de  $i$  al dividirlo entre dos y las aristas  $\alpha$  al residuo de  $\alpha$  al dividirlo por tres, obtendremos claramente un morfismo de gráficas. Por otro lado, si consideramos el grupo  $G$  en 4.2 es claro que los elementos de las órbitas (que son los enteros congruentes módulo dos para los vértices y los congruentes módulo tres para las aristas según 4.4) comparten una misma imagen en  $\pi$ , que además, es distinta a la imagen de los elementos de otra órbita cualquiera, de donde se sigue que  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  es una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ .



## 4.2 Resultados preliminares.

A continuación se encontrarán varios resultados, que permitirán posteriormente demostrar los teoremas básicos sobre el espectro de cubiertas de Galois.

(4.7) **Lema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , y sea  $(s', e')$  una orientación de  $\Delta'$ , entonces existe una orientación  $(s, e)$  de  $\Delta$ , tal que:

- a)  $\pi s = s' \pi$  y  $\pi e = e' \pi$
- b)  $gs = sg$  y  $ge = eg \quad \forall g \in G$ .

**Demostración:** Construiremos dicha orientación. En primer término, recordemos que las órbitas  $(G\alpha = \pi^{-1}(\pi(\alpha)))$  forman una partición del conjunto de las aristas  $\Delta_1$ , (ver 4.3).

Así que, si elegimos un  $\alpha \in \Delta_1$ , para cada  $\alpha' \in \Delta_1$ , tal que  $\alpha \in \pi^{-1}(\alpha')$ , lo podemos orientar fácilmente de tal forma que:

$$\pi s(\alpha) = s'(\alpha') \quad \text{y} \quad \pi e(\alpha) = e'(\alpha')$$

Simplemente asignando  $s(\alpha)$  y  $e(\alpha)$  para que lo anterior se cumpla (nótese que esto se puede hacer aún cuando  $\alpha'$  sea un lazo y  $\alpha$  no).

Ahora sea  $\beta$  una arista cualquiera en  $G\alpha$ , es decir, existe  $g \in G$ , tal que,  $\beta = g(\alpha)$ , si dicha  $g$  fuese única, podríamos usar la misma idea anterior (la usada con  $\pi$ ) para garantizar que:

$$s(\beta) = s(g(\alpha)) = g(s(\alpha)) \quad \text{y} \quad e(\beta) = e(g(\alpha)) = g(e(\alpha))$$

Pero, precisamente ese es el caso, pues si sucediera que:

$g(\alpha) = h(\alpha)$  se tendría:  $\alpha = g^{-1}h(\alpha)$   
 y por tanto:  $g^{-1}h = I$  y  $h = g$ .

Ya que  $G$  actúa libremente. Además:

$$\begin{aligned}\pi(s(\beta)) &= \pi(s(g(\alpha))) = \pi(g(s(\alpha))) = \pi(s(\alpha)) = s^{-1}\pi(\alpha) = s^{-1}\pi(\beta) \\ \pi(e(\beta)) &= \pi(e(g(\alpha))) = \pi(g(e(\alpha))) = \pi(e(\alpha)) = e^{-1}\pi(\alpha) = e^{-1}\pi(\beta)\end{aligned}$$

Y ya que, toda  $\beta \in \Delta_1$ , está en algún  $G\alpha = \pi^{-1}(\alpha')$ , esto completa la construcción de  $(s, e)$ .  $\square$

En lo sucesivo, asumiremos con frecuencia tales orientaciones en  $\Delta$  y  $\Delta'$ .

(4.8) **Lema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ . Para todo camino  $\delta'$  en  $\Delta'$  y todo vértice  $i$  en  $\Delta_0$ , tal que  $\pi(i) = s'(\delta')$  entonces existe un único camino  $\delta$  en  $\Delta$  tal que  $s(\delta) = i$  y  $\pi(\delta) = \delta'$ .

**Demostración:** Por inducción en la longitud de  $\delta'$ . Si  $\delta'$  tiene longitud uno, eso significa que consta de una única arista, digamos  $u\overset{\alpha'}{\rightarrow}v$ ,  $s'(\alpha') = u$  y  $e'(\alpha') = v$ .

Sea  $i \in \Delta_0$  tal que  $\pi(i) = u$  (que, por cierto, siempre existe pues  $\pi$  es sobre). Sea  $a'b \in \Delta_1$ ,  $\exists \pi(\gamma) = \alpha'$ , y digamos que  $\pi(a) = u = \pi(i)$  y  $\pi(b) = v$ , ya que  $\pi^{-1}(\pi(i)) = G_i$  (por ser  $\pi$  cubierta de Galois) entonces existe  $g$  tal que  $g(a) = i$ , ahora si observamos a:

$$g(a) = i \overset{g(\alpha')}{\rightarrow} g(b)$$

Resulta que  $\pi(g(\gamma)) = \pi(\gamma) = \alpha'$ , y también  $\pi(g(b)) = \pi(b) = v$ , llamémosles  $\beta := g(\gamma)$  y  $j := g(b)$ , si  $i = s(\beta)$  entonces  $\beta$  es la arista  $\alpha$  que buscamos, si por el contrario  $i = e(\beta)$  (y por tanto  $j = s(\beta)$ ) entonces:

$$\pi(j) = v = e'(\alpha') = e'(\pi(\beta)) = \pi(e(\beta)) = \pi(i)$$

(Es decir  $\alpha'$  es un lazo), por tanto:

Existe  $h \in G$  tal que:  $h(j) = i$

Por tanto si  $\alpha = h(\beta)$ , entonces  $s(\alpha) = s(h(\beta)) = h(s(\beta)) = h(j) = i$

Veremos ahora la unicidad de dicha  $\alpha$ , si existiera otra arista  $a$  tal que,  $s(a) = i$  y  $\pi(a) = \alpha' = \pi(\alpha)$ , entonces existiría  $g \in G$  tal que  $g(\alpha) = a$ , por tanto:

$$i = s(a) = s(g(\alpha)) = g(s(\alpha)) = g(i) \text{ por tanto: } g = 1$$

De donde:  $a = \alpha$

Ahora, como hipótesis de inducción supongamos que se da el resultado para los caminos con longitud menor o igual a  $n$ , y sea  $\delta'$  de longitud  $n + 1$ .

Sea  $\gamma'$  de longitud  $n$  tal que  $\delta' = (\gamma', \alpha')$  donde  $s(\delta') = s(\gamma') = \pi(i)$ ,  $e(\gamma') = s(\alpha')$  y  $e(\alpha') = e(\delta')$ . Es decir  $\gamma'$  es  $\delta'$  menos su última arista  $\alpha'$ .

Por hipótesis de inducción existe un único camino  $\gamma$  en  $\Delta$  tal que  $s(\gamma) = i$  y  $\pi(\gamma) = \gamma'$ , si llamamos  $i' = e(\gamma)$  entonces:

$$\pi(i') = \pi(e(\gamma)) = e'(\pi(\gamma)) = e'(\gamma') = s'(\alpha')$$

Por tanto, también por hipótesis de inducción, existe una única  $\alpha$  tal que  $s(\alpha) = i'$  y  $\pi(\alpha) = \alpha'$ . Así pues  $\delta = (\gamma, \alpha)$  cumple las propiedades requeridas y es único pues  $\gamma$  y  $\alpha$  lo son.  $\square$

(4.9) **Corolario:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , entonces para todo  $i, j \in \Delta_0$  y  $n \geq 1$ :

$$(4.10) \quad \sum_{t \in \pi^{-1}[j]} a_{it}^{(n)} = a_{\pi(i)\pi(j)}^{(n)} \quad \text{y} \quad \sum_{t \in \pi^{-1}[j]} a_{it}^{(n)} = a_{\pi(i)\pi(j)}^{(n)}$$

**Demostración:** Denotemos a los conjuntos de caminos entre  $i$  y  $j$  de longitud  $n$  en  $\Delta$  [y respectivamente en  $\Delta'$ ] como:

$$W_{ij}^{(n)} \quad \text{y} \quad [W_{ij}^{(n)}]$$

Veremos que existe una biyección entre los siguientes conjuntos:

$$(4.11) \quad \bigcup_{i \in \pi^{-1}\{j\}} W_{\pi(i)}^{(n)} \rightarrow W_{\pi(i)\pi(j)}^{(n)}$$

Sea  $\delta$  pertenece a la unión 4.11, por el simple hecho de ser  $\pi$  una función,  $\pi(\delta)$  es único, y además:

$$\begin{aligned} s'(\pi(\delta)) &= \pi(s(\delta)) = \pi(i) \\ e'(\pi(\delta)) &= \pi(e(\delta)) = \pi(j) \end{aligned}$$

Por lo que claramente  $\pi(\delta)$ , pertenece a :

$$W_{\pi(i)\pi(j)}^{(n)}$$

Por otro lado sea  $\delta'$  un camino en:

$$W_{\pi(i)\pi(j)}^{(n)}$$

Por el Teorema anterior (4.8) sabemos que existe un único  $\delta$  en  $\Delta$  tal que  $s(\delta) = i$  y  $\pi(\delta) = \delta'$ , también  $\pi(e(\delta)) = e'(\pi(\delta)) = e'(\delta') = \pi(j)$ , por tanto  $e(\delta) \in \pi^{-1}\{j\}$ . Es decir  $\delta$  pertenece algún conjunto en la unión 4.11.

Así pues, en base al Teorema 1.16 resulta claro que, el número de elementos de ambos conjuntos en 4.11 está dado, respectivamente, por las cantidades representadas en 4.10 (en la primera de las dos igualdades), y como ya vimos que existe una biyección entre los conjuntos, esto confirma dicha igualdad. En cuanto a la segunda igualdad, esta es una consecuencia directa de la primera y del hecho de que tanto  $A$  como  $A'$  son simétricas.

□

- (4.12) **Lema:** Sea  $B$  una matriz de  $n \times n$ , con un espacio invariante  $I_m$  de dimensión  $m$  ( $m \leq n$ ), con base ordenada  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  entonces  $B$  puede ser representada en alguna base, por una matriz de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} B' & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

(y por tanto es similar a ella)

Donde  $B'$  es la matriz de  $m \times m$  que representa a  $B$  restringida al subespacio  $I_m$  con respecto a la base  $V$ .

**Demostración:** Completamos a  $V$  para formar una base ordenada de todo  $\mathbb{C}^n$ , como sigue:

$$T = \{v_1, v_2, \dots, v_m, k_{m+1}, \dots, k_n\}$$

Ahora, observemos los siguientes hechos:

- (4.13) Primero,  $[v_i]_T = e_i$ , donde  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Notemos también que tiene ceros en todas las entradas a partir de la  $m+1$  y por tanto se puede escribir de la siguiente manera:

$$[v_i]_T = \begin{bmatrix} [v_i]_V \\ 0 \end{bmatrix}$$

En segundo lugar:

$$(4.14) \quad [Bv_i]_T = [B]_T [v_i]_T = [B]_T e_i$$

Es decir  $[Bv_i]_T$  es la columna  $i$ -ésima de  $[B]_T$

Por último, sabemos que, como  $v_i \in I_m$  entonces  $Bv_i$  también está en  $I_m$  y por tanto sus  $T$ -coordenadas:

$$[Bv_i]_T = [B]_T [v_i]_T = \sum_{j=1}^m \alpha_j [v_j]_T$$

De aquí, de 4.14 y de 4.13, se deduce que las columnas de la 1 a la  $m$  de  $[B]_T$  tienen ceros en los renglones mayores que  $m$ . Por tanto, podemos escribirla como:

$$[B]_T = \begin{pmatrix} B' & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Con  $B'$   $m \times m$ . Y por la observación 4.13:

$$[B]_T [v]_T = \begin{pmatrix} B' & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{bmatrix} [v]_V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' [v]_V \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pero si observamos cuidadosamente, de aquí se concluye que,  $B'$  es la representación de la transformación lineal  $B$  restringida a  $I_m$  con respecto a la base  $V$ , pues basta completar con ceros  $B'[v]_V$  para obtener  $[Bv]_T$ .  $\square$



### 4.3 Resultados espectrales.

(4.15) **Teorema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , si  $\Delta$  es finita entonces  $\sigma(\Delta') \subset \sigma(\Delta)$ .

**Demostración:** Iniciemos recordando un par de resultados de álgebra lineal:

- Los matrices similares tienen el mismo espectro.
- Toda matriz triangular superior (a la que se llama forma de Schur) tiene sus valores propios en la diagonal, más aún, toda matriz cuadrada es similar a otra que está en forma de Schur.

Así que para demostrar el resultado, nos bastará mostrar que la matriz de adyacencia  $A$  es similar a una matriz de la forma:

$$(4.16) \quad \begin{pmatrix} A' & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

Donde  $A'$  es la matriz de adyacencia de  $\Delta'$ , y  $O$  la matriz nula, pues si  $T_1 = P_1^{-1} A P_1$  y  $T_2 = P_2^{-1} D P_2$ , son las formas de Schur para  $A'$  y  $D$ , claramente:

$$\begin{pmatrix} P_1^{-1} & O \\ O & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{pmatrix}$$

Será la forma de Schur para  $A$ , y por las observaciones de los incisos anteriores se sigue el resultado.

Así pues, en primer lugar, como  $\pi$  es sobre, si  $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$  y  $\Delta'_0 = \{1, \dots, m\}$ , claramente  $n \geq m$ , lo que da sentido a una matriz como 4.16.

Ahora, para todo  $s \in \Delta'_0$  (y  $i \in \Delta_0$ ), se define el siguiente vector:

$$(v^s)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(i) = s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- (4.17) Notemos que, para todo  $i$  existe un único  $s$ , tal que  $v^s_i = 1$  y todos los demás  $v^s_i = 0$  ya que al ser  $\pi$  función sólo existe un único  $s$  igual a  $\pi(i)$ . Otra forma de escribir los vectores columna  $v^s$  es:

$$v^s = \sum_{i \in \pi^{-1}[s]} e_i$$

Ahora, si:

$$\sum_{s \in \Delta'_0} \alpha_s v^s = 0$$

En particular si  $j \in \Delta'_0$ , tomemos  $i \in \Delta_0$  tal que  $\pi(i) = j$ , entonces:

$$\sum_{s \in \Delta'_0} \alpha_s v^s_i = 0$$

Pues se da para toda entrada  $i$ . Por tanto (véase 4.17) la suma anterior es igual a:

$$(4.18) \quad 0 = \alpha_j v^j_i = \alpha_j \cdot 1 = \alpha_j$$

Es decir los vectores  $v^s$  son linealmente independientes. Llamémosles  $V = \{v^1, \dots, v^m\}$ . Por otro lado:

$$(Av^s)_i = \sum_{k \in \Delta_0} a_{ik} v^s_k = \sum_{k \in \pi^{-1}[s]} a_{ik} \cdot 1$$

Pues todas las demás entradas  $v^s_k$  son cero, pero por el Corolario 4.9, la suma anterior es igual a:

$$= a'_{\pi(i)s} \\ \therefore Av^s = \sum_{i=1}^n a'_{\pi(i)s} e_i$$

Si asociamos la suma anterior de forma que las  $\pi(i)$  vayan en forma creciente, lo anterior es igual a:

$$= \sum_{i \in \pi^{-1}\{1\}} a'_{is} e_i + \dots + \sum_{i \in \pi^{-1}\{m\}} a'_{is} e_i \\ = a'_{i_1s} \sum_{i \in \pi^{-1}\{1\}} e_i + \dots + a'_{i_ms} \sum_{i \in \pi^{-1}\{m\}} e_i$$

Pero ya habíamos observado que esas sumas eran otra forma de escribir los  $v^s$  :

$$(4.19) \quad = \sum_{i=1}^m a'_{is} v^i$$

Lo que implica que, el subespacio generado por  $V$  es un subespacio invariante y ya que los  $v^s$  son linealmente independientes (4.18), pues forman una base de dicho subespacio de dimensión  $m$ . Entonces, por el Lema anterior (4.12)  $A$  es similar a:

$$(4.20) \quad \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Donde  $B$  es la representación de  $A$  restringida al subespacio invariante (que en este caso es el generado por  $V$ ), para la base ordenada  $V$  y 4.20 es la representación de  $A$  para alguna base ordenada  $T = \{v^1, \dots, v^m, k^{m+1}, \dots, k^n\}$ .

Ahora, si recordamos 4.19 la columna  $s$ -ésima (con  $s$  en  $\{1 \dots m\}$ ) de esta matriz es:

$$[A]_T e_i = [Av^i]_T = \left[ \sum_{j=1}^m a'_{ij} v^j \right]_T = \sum_{j=1}^m a'_{ij} [v^j]_T = \sum_{j=1}^m a'_{ij} e_j = \begin{bmatrix} a'_{i1} \\ \vdots \\ a'_{im} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde se sigue que:  $A' = B$ .  $\square$

(4.21) **Teorema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , entonces:

$$r(\Delta) \leq r(\Delta') \leq r(\Delta)^2$$

**Demostración:** Sea  $u \in \Delta_0'$  y  $i \in \Delta_0$  tal que  $\pi(i) = u$ , por el Corolario 4.9 sabemos:

$$\sum_{i \in \pi^{-1}(u)} a_{ii}^{(n)} = a_{\pi(i)\pi(i)}^{(n)} = a'_{uu}^{(n)}$$

Lo que implica:

$$a_{ii}^{(n)} \leq a'_{uu}^{(n)}$$

Pues  $a_{ii}^{(n)}$  es uno solo de los términos de la suma, los cuales son todos no negativos. De donde, por el Teorema 3.28:

$$(4.22) \quad r(\Delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{ii}^{(n)}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a'_{uu}^{(n)}} = r(\Delta')$$

Ahora, por el Lema 4.8 para cada  $\gamma' \in W_{uu}^{(n)}$  existe un único  $\gamma_{(X)} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  en  $\Delta$  tal que  $s(\gamma_{(X)}) = i$  y  $\pi(\gamma_{(X)}) = \gamma'$ , aún cuando  $\gamma'$  forma claramente un ciclo, no podemos decir lo mismo de  $\gamma_{(X)}$ , sin embargo, podemos formar naturalmente un ciclo del doble de longitud de la siguiente manera:

$$\gamma = (\gamma_{(X)}, \gamma_{(X)}^{-1}) = (\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_n^{-1}, \dots, \beta_1^{-1})$$

Así tendremos bien definida la función:

$$\varphi: W_{uu}^{(n)} \rightarrow W_{ii}^{(2n)}$$

que asigne  $\varphi(\gamma') = \gamma$ , además  $\varphi$  es inyectiva ya que si:

$$\gamma = \varphi(\gamma') = \varphi(\delta') = \delta$$

Entonces:

$$\gamma_{(X)} = \delta_{(X)}$$

(Pues si son iguales entonces también sus "mitades" lo serán).

Y además:

$$\gamma' = \pi(\gamma_{(X)}) = \pi(\delta_{(X)}) = \delta'$$

Y por tanto:

(4.23)

$$a_{uu}^{r(n)} \leq a_{ii}^{(2n)}$$

Pero sabemos:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{a_{ii}^{(2n)}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[2]{a_{ii}^{(2n)}} \right)^{1/2} = r(\Delta)$$

Por tanto:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{a_{ii}^{(2n)}} = r(\Delta)^2$$

De aquí y de 4.23:

$$r(\Delta') = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{a_{uu}^{r(n)}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{a_{ii}^{(2n)}} = r(\Delta)^2$$

Que junto con 4.22 completa la demostración.  $\square$

(4.24) **Corolario:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , si  $\Delta$  es finita entonces:

$$r(\Delta) = r(\Delta')$$

**Demostración:** Por 4.15 sabemos que:  $\sigma(\Delta') \subset \sigma(\Delta)$  y por tanto:

$$r(\Delta') \leq r(\Delta)$$

Y por 4.21:

$$r(\Delta) \leq r(\Delta')$$

Lo cual implica el resultado.  $\square$

(4.25) **Teorema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo finito  $G$ , entonces:

$$r(\Delta) = r(\Delta')$$

**Demostración:** Tomemos una sucesión de subgráficas finitas  $\{F_n\}$  convergentes a  $\Delta$ , y llamemos:

(4.26) 
$$F'_n := \pi(F_n)$$

Que por supuesto, es también una subgráfica finita de  $\Delta'$ .

Ya que  $\pi$  es sobre, para toda  $\alpha' \in \Delta'$ , existe  $\alpha \in \Delta$ , tal que  $\pi(\alpha) = \alpha'$ . Pero sabemos que, para  $\alpha$  existe  $N$  tal que  $n \geq N$  implica  $\alpha \in F_n$ , por tanto  $\alpha' = \pi(\alpha) \in F'_n$ . Es decir, la sucesión  $\{F'_n\}$  también es convergente a  $\Delta'$ .

Ahora consideremos la gráfica inducida  $\bar{F}_n$  cuyo conjunto de vértices es:

$$(\bar{F}_n)_0 = G(F_n)_0 = \{i \in \Delta_0 : i = g(x), g \in G, x \in (F_n)_0\}$$

Claramente  $\bar{F}_n$  es también finito pues  $G$  lo es. Además, por la forma en que la definimos,  $\bar{F}_n$  es cerrada en  $G$ , es decir, la imagen de cualquier vértice o arista de  $F_n$  bajo cualquier  $g$  en  $G$ , está también en  $\bar{F}_n$ . Y como  $F_n \subset \bar{F}_n$ , esto implica que la sucesión  $\{\bar{F}_n\}$  también converge a  $\Delta$ . Por otro lado recordemos que si  $j = g(i)$  y  $\beta = g(\alpha)$  sucede que:

$$\pi(j) = \pi g(i) = \pi(i)$$

$$\pi(\beta) = \pi g(\alpha) = \pi(\alpha)$$

Lo que quiere decir que:

$$\pi(\hat{F}_n) = F'_n$$

Así pues, de las observaciones anteriores resulta que:  $\pi$  restringida a  $\bar{F}_n$  como dominio y  $F'_n$  como contradominio es un morfismo de gráficas sobre y que "hereda" las propiedades:

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\{\pi(i)\} &= Gi \\ \pi^{-1}\{\pi(\alpha)\} &= G\alpha\end{aligned}$$

Que lo convierten en una cubierta de Galois  $\pi: \bar{F}_n \rightarrow F'_n$  para el grupo  $G$ . Por el **Corolario 4.24**:

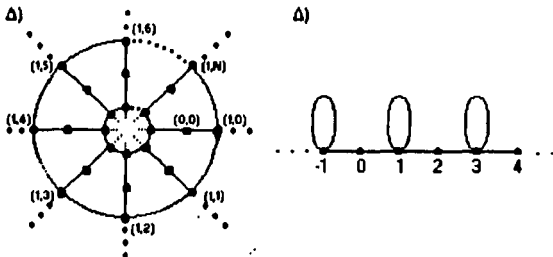
$$r(\bar{F}_n) = r(F'_n)$$

Y por el **Teorema 3.24**:

$$r(\Delta) = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} r(\bar{F}_n) = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} r(F'_n) = r(\Delta')$$

Ya habíamos observado en el ejemplo 1.21, lo complicado que puede resultar un cálculo directo del radio espectral de una gráfica infinita, aún cuando ésta no sea particularmente sofisticada. En el siguiente ejemplo, se utilizan los resultados anteriores precisamente para simplificar un poco dicho cálculo (el cual se completará sólo hasta el capítulo seis).

(4.27) **Ejemplo:** Sean  $\Delta$  y  $\Delta'$  siguientes gráficas:



Donde los vértices para  $\Delta$  son de la forma  $(n,x)$  donde  $i \in \{0, \dots, N\}$ , con  $N \in \mathbb{N}$  fija y  $x \in \mathbb{Z}$ . Claramente las rotaciones  $r_k$  (que asignan cada vértice  $(n,x)$  al vértice  $(r,x)$  donde  $r$  es el residuo de  $n+k$  al dividirlo por  $N+1$ ) forman un grupo de automorfismos de  $\Delta$  que actúan libremente. Naturalmente,  $G$

es un grupo cíclico de  $N+1$  elementos. Y ya que podemos establecer una cubierta de Galois  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  para el grupo  $G$  (aquella que envía el vértice  $(n,x)$  al  $x$ ), en base al **Teorema 4.25**, concluimos que  $r(\Delta)$  es igual a  $r(\Delta')$ , que en el ejemplo 6.24 calcularemos como  $1 + \sqrt{5}$  (gracias a una segunda simplificación)



# 5

## **La constante isoperimétrica.**

---

**En este capítulo introduciremos el concepto de la constante isoperimétrica, y veremos algunos teoremas que relacionan dicha constante con el espectro de gráficas regulares infinitas, y que serán requeridos para los resultados más importantes del próximo capítulo.**

## 5.1 Definiciones.

(5.1) **Definición:** Sea  $\Delta$  una gráfica y  $X \subset \Delta_0$ , la frontera de  $X$  es:

$$\partial X = \{i^{\alpha} \in \Delta_1 : i \in X \text{ y } j \notin X\}$$

Es decir es el conjunto de aristas con un extremo en  $X$  y otro fuera.

Por otro lado:

$$\text{Int}(F) = \{i \in F_0 : i^{\alpha} \in \Delta_1 \Rightarrow j \in F_0\}$$

Es decir, es el conjunto de los vértices tales que, todas las aristas que los contienen, tienen ambos extremos en  $F$ .

(5.2) **Definición:** La constante isoperimétrica de  $\Delta$  es:

$$k(\Delta) = \inf \left\{ \frac{|\partial X|}{|X|} : X \subset \Delta_0, X \neq \emptyset \text{ y } X \text{ finito} \right\}$$

o bien:

$$k(\Delta) = \inf \left\{ \frac{|\partial X|}{|X|} : X \subset \Delta_0, X \neq \emptyset \text{ y } |X| \leq \frac{|\Delta_0|}{2} \right\}$$

Para los casos infinito y finito respectivamente.

(5.3) **Definición:** Sea  $\Delta$  una gráfica, definiremos:

- a)  $b_i(n) = \{j \in \Delta_0 : d(i,j) \leq n\}$ .
- b)  $s_i(n) = \{j \in \Delta_0 : d(i,j) = n\}$ .

Es decir  $b_i(n)$  es el conjunto de vértices cuya distancia a  $i$  es menor o igual a  $n$  mientras que  $s_i(n)$  es el conjunto de los vértices cuya distancia es exactamente  $n$ .

(5.4) Se desprende inmediatamente de la definición que:

$$a) s_i(n+1) \cap b_i(n) = \emptyset$$

$$b) b_i(n+1) = b_i(n) \cup s_i(n+1).$$

(5.5) **Lema:** Sea una gráfica  $\Delta$  entonces  $b_i(n)$  es finito (recordemos que siempre asumimos que las gráficas son acotadas).

**Demostración:** Por inducción. Sabemos que  $|b_i(1)| \leq 1 + M_\Delta$  y si suponemos que  $|b_i(n)|$  es finito, como por 5.4:  $|b_i(n+1)| = |b_i(n)| + |s_i(n+1)|$  basta ver que  $s_i(n+1)$  es finito, pero sabemos que está contenido en el conjunto de vértices adyacentes a algún elemento de  $b_i(n)$ , de aquí que  $|s_i(n+1)| \leq M_\Delta |b_i(n)|$ .  $\square$

## 5.2 El espectro de gráficas regulares infinitas.

El siguiente **Lema** es muy interesante, pues nos permite identificar exactamente, el radio espectral de algunas gráficas regulares infinitas.

(5.6) **Lema:** Sea  $\Delta$  una gráfica regular de grado  $k$  (ver 1.2b), con  $\Delta_0 = \mathbb{N}$ , y tal que  $i(\Delta) = 0$ , entonces  $r(\Delta) = k$ .

**Demostración:** Por el **Teorema 3.4**, basta que construyamos una sucesión de vectores  $\{x^n\}$  con  $\|x^n\| = 1$ , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax^n - kx^n\| = 0$$

Lo que implicaría que  $k \in \sigma(\Delta)$ , y como por el **Teorema 3.10** sabemos que  $r(\Delta) \leq M_\Delta = k$  esto completaría el resultado.

Como  $i(\Delta) = 0$  podemos elegir una sucesión  $\{X_n\}$  de subconjuntos (no vacíos) de  $\Delta_0$ , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial X_n|}{|X_n|} = 0$$

Sea  $x^n \in \ell^2$  el vector "característico" (con norma uno) definido como:

$$(5.7) \quad \text{si } i \in \Delta_0: \quad x_i^n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|X_n|}} & \text{si } i \in X_n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Nótese que:

$$(5.8) \quad (Ax^n)_i = \sum_{j \in \Delta_0} a_{ij} x_j^n = \sum_{j \in X_n} \frac{a_{ij}}{\sqrt{|X_n|}} = \frac{1}{\sqrt{|X_n|}} \sum_{j \in X_n} a_{ij}$$

Pues sólo cuentan las  $j$  en  $X_n$  pues las demás entradas de  $x^n$  son cero.

- (5.9) Ahora consideremos el vector  $(A-kI)x^n$ , veremos que su  $i$ -ésima entrada es distinta de cero sólo si el vértice  $i$  es extremo de una arista en  $\partial X_n$ .

En efecto, si sucediera que fuera cero sabemos:

$$(5.10) \quad (Ax^n)_i = kx_i^n = \begin{cases} k & \text{si } i \in X_n \\ \sqrt{|X_n|} & \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En el primer caso, si  $i \in X_n$  de lo anterior y de 5.8 resulta que:

$$\sum_{j \in X_n} a_{ij} = k$$

Es decir:  $i$  tiene  $k$  aristas (o sea todas sus aristas) con el otro extremo en  $X_n$ , es decir  $i$  está en  $\text{int}(X_n)$  y no poseería una arista de  $\partial X_n$ .

En el segundo caso, nuevamente por 5.8 y 5.10:

$$\sum_{j \in X_n} a_{ij} = 0$$

Lo que significa que  $i$  no tiene ninguna arista con el otro extremo en  $X_n$ , y como tampoco la propia  $i$  está en  $X_n$ , entonces ninguna de sus aristas estaría en  $\partial X_n$ .

Así pues, consideremos tales  $i$  (extremos de alguna arista en  $\partial X_n$ )

- a) Si  $i \in X_n$  observemos que:

$$k - \sum_{j \in X_n} a_{ij}$$

Es el total de aristas de  $i$  (son  $k$ ) menos las que tienen ambos extremos en  $X_n$ , dicho de otro modo, son el número de aristas de  $\partial X_n$  que inciden en  $i$ , llamemos a dicho número  $\partial_i$ . Ahora obsérvese que, por 5.7 y 5.8:

$$Ax_i^n - kx_i^n = \frac{1}{\sqrt{|X_n|}} \left( k - \sum_{j \in X_n} a_{ij} \right) = \frac{1}{\sqrt{|X_n|}} \partial_i$$

b) Si  $i \notin X_n$

$$\sum_{j \in X_n} a_{ij}$$

Es el total de aristas en  $X_n$  que inciden en  $i$  y por ese mismo hecho están en  $\partial X_n$ , además nuevamente:

$$Ax_i^n - kx_i^n = \frac{1}{\sqrt{|X_n|}} \sum_{j \in X_n} a_{ij} - 0 = \frac{1}{\sqrt{|X_n|}} \partial_i$$

(5.11) Nótese que, en ambos casos el resultado es  $\partial_i$  por la misma constante (salvo el signo). Por otro lado este número  $\partial_i$ , representa sólo un subconjunto de las aristas que inciden con  $i$  y por tanto es menor o igual que  $k$ . Ahora:

$$\|Ax^n - kx^n\|^2 = \sum_{i \in \Delta_0} |Ax_i^n - kx_i^n|^2$$

Y por 5.11:

$$= \sum_{i \in \Delta_0} \left| \frac{\partial_i}{\sqrt{|X_n|}} \right|^2 \leq \sum_{i \in \Delta_0} \frac{k}{|X_n|} \partial_i = \frac{k}{|X_n|} \sum_{i \in \Delta_0} \partial_i$$

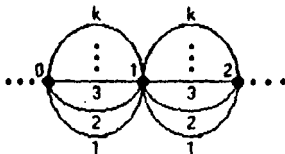
Pero  $\sum \partial_i$  es el número total de las aristas en  $\partial X_n$ , con la salvedad de que cada arista será contada dos veces, pues  $i$  tomará el valor de sus dos extremos. De aquí que la suma anterior sea igual a:

$$2k \frac{|\partial X_n|}{|X_n|}$$

Que sabemos tiende a cero, con lo cual completamos la demostración.  $\square$

Ya vimos en el capítulo uno (1.21), que el cálculo directo del radio espectral para gráficas infinitas, puede ser muy complicado aún cuando las gráficas no sean particularmente sofisticadas, en el siguiente ejemplo se identifica rápidamente el radio espectral aplicando el Lema anterior.

(5.12) **Ejemplo:** Sea  $\Delta$  la siguiente gráfica regular infinita:



En donde cada vértice tiene valencia  $2k$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $X_n = \{1, \dots, n\}$  entonces, claramente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial X_n|}{|X_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{n} = 0$$

Lo que implica que  $r(\Delta) = 0$ , así que el Lema 5.6, nos permite identificar de inmediato el radio espectral de  $\Delta$  como:

$$r(\Delta) = 2k$$

El Lema anterior nos permitió conocer el radio espectral para gráficas regulares infinitas, cuando éstas tienen su constante isoperimétrica igual a cero. El siguiente Teorema nos da una cota superior del radio espectral basada también, en la

constante isoperimétrica y que será de utilidad aún cuando ésta no sea igual a cero.

(5.13) **Teorema:** Sea  $\Delta$  una gráfica regular de grado  $k$ , entonces:

$$r(\Delta) \leq k - \frac{k(\Delta)^2}{2k}$$

**Demostración:** Se demostrará la siguiente propiedad:

$$r(H) \leq k - \frac{l(\Delta)^2}{2k}$$

Donde  $H$  es cualquier subgráfica de  $\Delta$ , pero inducida, conexa y finita a partir de lo anterior, es fácil llegar al caso general usando el Teorema 3.24 para una sucesión  $\{F_n\}$  de dichas subgráficas convergentes a  $\Delta$ . Efectivamente, por un lado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(F_n) = r(\Delta)$$

Y como la desigualdad se dará para todo  $r(F_n)$ , entonces se dará necesariamente para su límite.

Sea pues una  $H$  como la descrita anteriormente y llamemos  $B$  a su matriz de adyacencia, por el Teorema de Perron-Frobenius 2.12, podemos elegir el valor propio  $\lambda = r(H)$  y  $x$  uno de sus vectores propios, positivo y unitario, así que:

$$(Bx, x) = \lambda$$

Podemos extender  $x$  para que pertenezca a  $\mathbb{R}^2$  de la siguiente manera:

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in H_0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



Para llegar a la desigualdad nos servirá analizar el siguiente valor:

$$\delta^2 = \left( \sum_{i,j \in \Delta_1} |x_i^2 - x_j^2| \right)^2 = \left( \sum_{i,j \in \Delta_1} |x_i + x_j| |x_i - x_j| \right)^2$$

Pero, por la desigualdad de Cauchy:

$$\leq \sum_{i,j \in \Delta_1} |x_i + x_j|^2 \sum_{i,j \in \Delta_1} |x_i - x_j|^2$$

Ahora recuérdese que:

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \text{ por tanto; } 2xy \leq x^2 + y^2 \\ \text{de aquí; } x^2 + 2xy + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) \text{ y entonces} \\ (x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$$

De aquí que la suma anterior sea menor o igual a:

$$(5.14) \quad \leq \sum_{i,j \in \Delta_1} 2(x_i^2 + x_j^2) \sum_{i,j \in \Delta_1} (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j)$$

Observemos ahora la suma:

$$\sum_{i,j \in \Delta_1} (x_i^2 + x_j^2)$$

Como para toda arista  $\alpha$ , se consideran los valores de  $x$  correspondientes a sus dos extremos, podemos reordenarla ya no por las aristas  $\alpha$ , sino exclusivamente por los vértices  $i$ , y ya que sabemos que  $\Delta$  es regular de grado  $k$ , cada vértice aparece exactamente  $k$  veces como extremo de alguna arista  $\alpha$ , de modo que la suma anterior se convierte en:

(5.15)

$$\sum_{i \in \Delta_0} kx_i^2 = k \sum_{i \in \Delta_0} x_i^2 = k \|x\|^2 = k$$

(Recuérdese que el resto de las  $x_i$  son cero). Ahora veamos la suma:

$$\sum_{\beta \in \Delta_1} 2x_i x_j = \sum_{\beta \in \Delta_1} (x_i x_j + x_j x_i)$$

Si  $i$  ó  $j$  no están en  $H_0$  su entrada correspondiente en  $x$  es cero y por lo tanto, podemos excluir cualquier arista de  $\Delta$ , que no tenga ambos extremos en  $H_0$ . Pero como  $H$  es una subgráfica inducida, esto significa que tales aristas pertenecen a  $H_1$ , así que, si en la suma anterior asociamos aquellas  $\alpha$  con una misma pareja de extremos, notaremos que hay exactamente  $b_\alpha$  repeticiones de tales aristas. Además, como está considerada tanto la pareja  $x_i x_j$  como la  $x_j x_i$  y además:  $b_\alpha = 0$  sí y sólo si no hay aristas entre  $i$  y  $j$ , podemos reordenar la suma anterior en base a todas las parejas desordenadas de elementos de  $H_0$  de la siguiente manera:

$$\sum_{\substack{i \in H_0 \\ j \in H_0}} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i \in H_0} \sum_{j \in H_0} (b_{ij} x_j) x_i$$

Que es igual a :

(5.16)

$$\sum_{i \in H_0} (Bx)_i x_i = (Bx, x) = \lambda$$

(5.17) Entonces por (5.14), (5.15) y (5.16),  $\delta^2 \leq 2k(k-\lambda)$ .

Ahora veremos que relación hay entre  $\delta$  e  $i(\Delta)$ .

Analicemos nuevamente  $\delta$ , recordemos que corresponde a la suma:

$$\delta = \sum_{\alpha \in \Delta_1} |x_i^2 - x_j^2|$$

Pero entonces, cualquier arista  $\alpha$  cuyos valores  $x_i$  y  $x_j$  sean iguales, no contribuirá al valor de  $\delta$  y podemos para este fin ignorarla. Por otro lado, sólo hay un número finito de valores de  $x_i$  diferentes de cero (sólo aquellas  $i$  que pertenecen a  $H_0$ ), denotemos a dichos valores de la siguiente manera:

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m$$

Tomemos una orientación de  $\Delta$  de tal forma que, para toda  $\alpha$ :

$$x_{\alpha(i)} \leq x_{\alpha(j)}$$

Sea  $F_k$  la subgráfica inducida de  $\Delta$  donde:

$$(5.18) \quad (F_k)_0 = \begin{cases} \{i: x_i \geq y_k\} & \text{si } k \in \{1 \dots m\} \\ \emptyset & \text{si } k = m+1 \end{cases}$$

También, sea:

$$S_k = \{\alpha \in \Delta_1: x_{\alpha(i)} = y_k\}$$

En base a la orientación anterior podemos expresar:

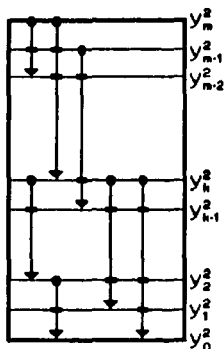
$$(5.19) \quad \delta = \sum_{\alpha \in \Delta_1} (x_{\alpha(i)}^2 - x_{\alpha(j)}^2)$$

Y reorganizar dicha suma, reordenando en base a los valores distintos de cero (que son  $m$ ) de  $x_{\alpha(i)}$ , asociando todos los valores iguales (lo que implica que dichas aristas están en  $S_k$ ), de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^m \left( \sum_{\alpha \in S_k} x_{\alpha(i)}^2 - x_{\alpha(j)}^2 \right)$$

- (5.20) Consideremos el conjunto  $\partial(F_k)_0$ : obsérvese que por definición, consiste de las aristas con un vértice que pertenece a  $(F_k)_0$  y otro que no pertenece. Es decir: si  $\alpha \in \partial(F_k)_0$ , entonces

$x_{\text{fin}} \geq y_k > x_{\text{inicio}}$ , en palabras:  $\alpha$  está en el conjunto anterior, si el valor de la entrada asociada a su inicio es mayor o igual a  $y_k$ , y el de su fin es estrictamente menor.



Ahora observemos la figura  $x,y$ , en ella están representadas todas las aristas dirigidas de  $\Delta$  a excepción de aquéllas que no contribuyen al valor de  $\delta$ . En el  $k$ -ésimo renglón se encuentran todos los

vértices con valor de  $(y_k)^2$  (nótese que el valor ya se encuentra elevado al cuadrado, que es la forma en la que aparece en la suma), su inicio está representado por un punto y su fin por una flecha. Es evidente que la suma 5.19 resulta ser la suma total de las "longitudes"  $(y_p^2 - y_q^2)$  con  $p > q$  de dichas flechas, ahora bien, nótese que, cada flecha está subdividida en fragmentos, pongamos atención a cuantos fragmentos de longitud  $(y_k^2 - y_{k-1}^2)$  existen. Para que una flecha pase entre los renglones  $y_k$  y  $y_{k-1}$ , su inicio debe estar antes o incluso hasta el renglón  $k$  y su fin estrictamente después, pues bien, ésta es precisamente la definición (5.20) que observamos para  $\partial(F_k)_0$  y por tanto hay tantos fragmentos como elementos en él. De aquí que  $\delta$  sea igual a :

$$\delta = \sum_{k=1}^m |\partial(F_k)_0| (y_k^2 - y_{k-1}^2)$$

Como sabemos que:

$$i(\Delta) \leq \frac{|\partial(F_k)_0|}{|(F_k)_0|}$$

Entonces la suma anterior es mayor o igual a:

$$\begin{aligned} &\geq i(\Delta) \sum_{k=1}^m |(F_k)_0| (y_k^2 - y_{k-1}^2) \\ &= i(\Delta) \left[ \sum_{k=1}^m |(F_k)_0| y_k^2 - \sum_{k=1}^m |(F_k)_0| y_{k-1}^2 \right] \\ &= i(\Delta) \left[ \sum_{k=1}^m |(F_k)_0| y_k^2 - \sum_{k=0}^{m-1} |(F_{k+1})_0| y_k^2 \right] \end{aligned}$$

como  $y_0 = 0$ , y  $F_{m+1} = \emptyset$ :

$$\begin{aligned} &= i(\Delta) \left[ \sum_{k=1}^m |(F_k)_0| y_k^2 - \sum_{k=1}^m |(F_{k+1})_0| y_k^2 \right] \\ &= i(\Delta) \left[ \sum_{k=1}^m y_k^2 (|(F_k)_0| - |(F_{k+1})_0|) \right] \end{aligned}$$

Pero de la definición 5.18, resulta evidente que  $|(F_k)_0| - |(F_{k+1})_0|$  es exactamente el número de vértices que comparten el valor de  $y_k$ , de aquí que la suma anterior resulta ser la suma de todos los valores  $x_i$  diferentes de cero, es decir:

$$i(\Delta) \left[ \sum_{k=1}^m y_k^2 (|(F_k)_0| - |(F_{k+1})_0|) \right] = i(\Delta) \sum_{i \in \Delta_0} x_i^2 = i(\Delta)$$

Por tanto:  $i(\Delta) \leq \delta$ , de aquí que, a partir de 5.17:  $i(\Delta)^2 \leq 2k(k-\lambda)$ , de donde se deduce fácilmente el resultado.  $\square$

Una consecuencia del Teorema anterior es el reverso del Lema 5.6, que veremos en el siguiente Corolario.

(5.21) **Corolario:** Si  $\Delta$  es una gráfica regular de grado  $k$ , con  $\Delta_0 = \mathbb{N}$ , y tal que  $r(\Delta) = k$ , entonces  $i(\Delta) = 0$ .

**Demostración:** Por el Teorema anterior sabemos que:

$$k = r(\Delta) \leq k - \frac{i(\Delta)^2}{2k}$$
$$\frac{i(\Delta)^2}{2k} \leq 0 \therefore 0 \leq i(\Delta)^2 \leq 0$$

□

Es decir, para una gráfica  $\Delta$  regular de grado  $k$ , el radio espectral  $r(\Delta)$  es  $k$  sí y sólo si la constante isoperimétrica  $i(\Delta)$  es cero. Y cuando no es cero, contamos con un criterio de acotación para  $r(\Delta)$  basado en  $i(\Delta)$ . En el ejemplo 6.25 del capítulo seis, se ilustra precisamente una gráfica con  $i(\Delta)$  diferente de cero, donde se comprueba la desigualdad entre  $r(\Delta)$  y  $k$ , y donde la cota para  $r(\Delta)$  juega un papel importante.

# 6

## Cubiertas de Galois para grupos manejables

---

En este capítulo introduciremos el concepto de la gráfica de Cayley del grupo de automorfismos  $G$  (de una cubierta de Galois), así como el concepto de grupos manejables, el cual nos permitirá, apoyados en los resultados del capítulo anterior, mostrar más resultados espectrales para cubiertas de Galois, entre los que destacan el Teorema 6.17, que postula  $r(\Delta) = r(\Delta')$  si  $\Delta'$  es finita y  $G$  es manejable.

## 6.1 La gráfica de Cayley

- (6.1) **Definición:** Sea  $G$  un grupo y sea  $S$  un subconjunto de  $G$  tal que:

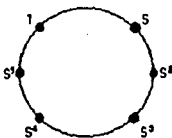
$$1 \in S \text{ y } \forall g \in G, g = \prod_{i=1}^n s_i \text{ donde } s_i \in S$$

Entonces se dirá que  $S$  es un conjunto de generadores de  $G$  y si  $S$  es finito, que  $G$  es finitamente generado.

- (6.2) **Definición:** Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $S$  un conjunto finito de generadores de  $G$ . Entonces la gráfica de Cayley  $\Gamma(G, S)$  (o simplemente  $\Gamma$ ) es aquella tal que:

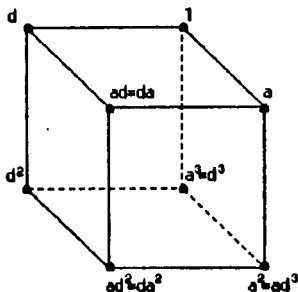
$$\Gamma_0 = G, \text{ y } gSh \in \Gamma, \text{ si y sólo si } h = sg \text{ donde } s \in S \text{ y } h, g \in G.$$

Notemos que  $\Gamma$  será una gráfica regular de grado  $2|S|$ , pues de cada vértice  $i$  "partirán"  $|S|$  aristas de la forma;  $iS_j$ , donde  $j = s_i$ , y por otro lado a cada una de las anteriores corresponde otra de la forma;  $jS_i^{-1}$ , pues  $i = s^{-1}j$ .

- (6.3) **Ejemplos:** Sea  $\Delta$  como se ilustra. Si los vértices son elementos de un grupo cíclico de seis elementos, claramente las rotaciones  $r_n$  (que a  $is^n$ ) forman un automorfismos  $G$  de libremente, y este cíclico de seis podemos tomar a conjunto generador)
- 
- también es un grupo de  $\Delta$  que actúan elementos (donde  $S = \{r_1\}$  como el y curiosamente su gráfica de Cayley resulta ser la misma  $\Delta = \Gamma$ .



En el siguiente caso,  $\Delta$  es el cubo, cuyos vértices podemos numerar a partir del centro 1 de la siguiente manera:



Dependiendo de que tan a la "derecha", o hacia "adelante", se encuentre el vértice a partir del centro, si consideramos las rotaciones que resulten de multiplicar cualquier vértice por  $a^m d^n$ , donde a y d son generadores de grupos cíclicos de cuatro elementos, es claro que forman un grupo de automorfismos G que actúan libremente, además podemos elegir precisamente  $S = \{a, d\}$ . De donde resulta que la gráfica de Cayley para los ocho automorfismos de G (cada automorfismo envía el centro 1 a cualquier otro vértice), vuelve a ser nuevamente el cubo.

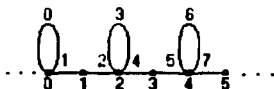
## 6.2 Definiciones y resultados preliminares.

- (6.4) **Definición:** Sea  $G$  como en 6.2, si su gráfica de Cayley  $\Gamma$  es tal que:

$$i(\Gamma) = 0$$

Entonces el grupo  $G$  será llamado manejable.

- (6.5) **Ejemplo:** Ya vimos en los ejemplos 4.2 y 4.4, que las "translaciones"  $t_r$  de la gráfica:

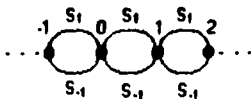


Forman un grupo  $G$  de automorfismos de  $\Delta$ . Si elegimos  $S = \{s_1, s_{-1}\}$  donde  $s_1 = t_1$  y  $s_{-1} = t_{-1}$ , resulta claro que:

$$\begin{aligned} t_0 &= s_1 s_{-1} \\ t_r &= s_1^r \quad \text{Para } r > 0 \\ t_r &= s_{-1}^{-r} \quad \text{Para } r < 0 \end{aligned}$$

Es decir  $S$  es un conjunto finito de generadores de  $G$ .

Por otro lado, la siguiente es su gráfica de Cayley  $\Gamma$ :



Donde cada vértice  $t_r$  está representado exclusivamente por el número  $r$ . Por el ejemplo 5.12, sabemos que tiene constante isoperimétrica  $i(\Gamma) = 0$ , es decir  $G$  es un grupo manejable.

En este capítulo nos ocuparemos exclusivamente, del caso de las cubiertas de Galois  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  con  $\Delta'$  finita. Y para ellas, sucederá que su grupo asociado  $G$  será un grupo finitamente generado, y por tanto siempre podremos elegir una gráfica de Cayley  $\Gamma$  acotada para  $G$ , como veremos en los siguientes resultados.

- (6.6) **Lema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , donde  $\Delta'$  es finita entonces, existe una subgráfica inducida  $W$  de  $\Delta$ , tal que es conexa, con un solo vértice en cada órbita  $\Omega$ , de  $G$  y por tanto  $|W_0| = |\Delta'_0|$ .

**Demostración:** Construiremos dicha subgráfica. Sean  $\Omega_x = \pi^{-1}(x)$  (donde  $x \in \Delta'_0$ ) las órbitas de  $G$  en  $\Delta_0$ , sabemos que al ser  $\Delta'$  finita, digamos  $|\Delta'_0| = t$ , hay exactamente  $t$  órbitas distintas (de hecho son no vacías y ajenas entre sí).

- a) Sea  $u \in \Omega_p$  con  $p \in \{1, \dots, t\}$  y sea  $(W^1)_0 = \{u\}$ .  
 b) Supongamos definida a  $W^n$  conexa, inducida, y con un solo vértice en cada una de las  $n$  órbitas:

- (6.7)  $\{\Omega_j\}$  con  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

- c) Podemos suponer la  $n$  anterior menor a  $t$ , pues de lo contrario  $W^n$  sería la gráfica que buscamos.

Sea  $X$  el conjunto de los  $n$  vértices de  $\Delta'$ , correspondientes a las órbitas  $\Omega_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $Y$  los demás vértices de  $\Delta'$ . Como  $\Delta'$  es conexa sabemos existe una arista  $i \overset{\alpha}{\sim} j'$  donde  $i' \in X$  y  $j' \in Y$ . Sea  $i \in W^n$  tal que  $i \in \pi^{-1}(i')$ , por el Lema 4.8 existe  $\alpha \in \Delta$ , tal que  $\alpha$  incide en  $i$  y  $\pi(\alpha) = \alpha'$ . Claramente  $i \overset{\alpha}{\sim} j'$  donde  $\pi(j) = j'$ , por lo que podemos definir  $W^{n+1}$  como la subgráfica inducida de  $\Delta$  con vértices  $(W^n)_0 \cup \{j\}$ . Y, en un número finito de repeticiones del anterior procedimiento (tantos como elementos haya en  $\Delta'_0$ ) llegaremos a la gráfica buscada  $W$ .

(6.8) **Observaciones:** Sea  $W$  como en el Lema 6.6.

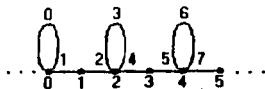
Si  $g \in G$ , llamemos:  $g(W_0) = \{i \in \Delta_0 : i = g(j) \text{ tal que } j \in W_0\}$ , es decir, al conjunto de vértices tales que, son imágenes bajo  $g$  de algún vértice de  $W$ . Y por otro lado  $g(W)$  la gráfica inducida cuyos vértices son  $g(W_0)$ .

Si  $g \neq 1$  entonces  $g(W_0) \cap W_0 = \emptyset$ , pues para todo  $i \in W_0$ ,  $g(i)$  no puede estar en  $W_0$  pues, claramente  $i$  y  $g(i)$  están en la misma órbita y  $W_0$  sólo tiene un vértice por órbita y  $G$  actúa libremente sobre  $\Delta$ .

Al tener  $W_0$  un vértice representante de cada órbita, y al aplicar toda  $g \in G$  sobre ellos, se obtienen todas las órbitas, que juntas, son todo  $\Delta_0$ .

Otra forma de interpretar lo anterior, es que, cada vértice  $i$  se encontrará en una y sólo una  $g(W_0)$ .

(6.9) **Ejemplo:** De nuestra gráfica del ejemplo 4.2:



Sabemos que las órbitas de los vértices son los conjuntos de números congruentes módulo dos. De aquí que, naturalmente podamos elegir a:



Como nuestra gráfica  $W$ , pues claramente:

- Es conexa.
- Es una subgráfica inducida.
- Tiene exactamente un vértice por órbita.

(6.10) **Teorema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , donde  $\Delta'$  es finita, entonces existe un conjunto finito  $S$  de generadores de  $G$ .

**Demostración:** Por construcción. Sea  $W$  una subgráfica de  $\Delta$  como en 6.6, y consideremos el siguiente conjunto:

$$S = \{g \in G: g \neq 1, g(W) \cap W\} \text{ (recuerde la definición de } g(W) \text{ en 1.1)}$$

En seguida veremos que  $S$ , es **precisamente** el conjunto de generadores que buscábamos.

- a)  $S$  es finito, ya que sabemos que  $W_0$  lo es, y al ser  $\Delta$  acotada, el conjunto de sus vértices adyacentes a  $W$  también lo es, la conclusión se sigue de que

cada uno de dichos vértices está en una y sólo en una  $g(W)$  (por 6.8).

b)  $S$  genera a  $G$ . Es decir que si  $g \in G$  entonces:

$$g = \prod_{i=1}^k s_i$$

Donde  $s_i \in S$ .

Como caso especial consideraremos a  $1$ . Si  $s \in S$  y por tanto  $s(W) \text{---} W$ , claramente  $W \text{---} s^{-1}(W)$ , por tanto  $s^{-1} \in S$  también, y entonces  $1 = ss^{-1}$ . Ahora probaremos que cualquier  $g \neq 1$  es generado por  $S$  por inducción en la distancia entre  $W$  y  $g(W)$ . Si  $d(g(W), W) = 1$  entonces dos de sus vértices son adyacentes y por definición  $g \in S$ .

Ahora, supongamos el resultado para las gráficas  $h(W)$  con distancia menor o igual a  $n$ . Y tomemos  $g \in G$  tal que  $d(g(W), W) = n + 1$ . Entonces tomemos  $\delta = (\delta', \alpha)$  donde  $\delta$  y  $\delta'$  son caminos de longitud  $n + 1$  y  $n$  respectivamente, y  $\alpha$  es una arista y donde:

$$s(\delta) = s(\delta') = i, e(\delta') = s(\alpha) = k, e(\delta) = e(\alpha) = j, \\ \text{con } i \in g(W_0) \text{ y } j \in W_0$$

Entonces, por 6.8 podemos elegir un  $h \in G$  tal que  $k \in h(W_0)$ , por hipótesis de inducción:

$$h = \prod_{i=1}^l s_i$$

Además:

$$h(W) \text{---} g(W)$$

Por tanto:

$$W \text{---} h^{-1}g(W) \text{ por tanto: } h^{-1}g = s_k \text{ donde } s_k \in S$$

Por tanto:

$$\therefore g = hs_k = \left( \prod_{i=1}^r s_i \right) s_k$$

Lo cual completa la demostración.  $\square$

- (6.11) **Lema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , con  $\Delta'$  finita,  $S$  un conjunto generador de  $G$  (que por 6.10 podemos elegir finito) y  $\Gamma$  la gráfica de Cayley asociada a  $G$  y  $S$ , entonces:

$$i(\Delta) \leq M_\Delta i(\Gamma)$$

**Demostración:** Se verá que, para cada subgráfica  $F$  de  $\Gamma$  existe una subgráfica  $D$  de  $\Delta$ , donde:

$$0 \leq \frac{|\partial D|}{|D|} \leq M_\Delta \frac{|\partial F|}{|F|}$$

Lo cual implica, que los ínfimos también satisfacen esa desigualdad.

Sea  $F$  una subgráfica inducida y finita de  $\Gamma$ , y sea  $W$  una subgráfica de  $\Delta$  como la descrita en el Lema 6.6. Definamos a  $D$  como la subgráfica inducida (y finita) de  $\Delta$  cuyos vértices son:

$$D_0 = \bigcup_{g \in F_0} g(W_0)$$

Observemos que:

$$|D_0| = |F_0| |W_0| = t |F_0|$$

Pues por las observación 6.8 las  $g(W_0)$  no comparten vértices, y  $|W_0| = t$ .

De aquí que nos bastará demostrar que:

$$|\partial D_0| \leq M_A |\partial F_0|$$

Para este fin, nos será útil la siguiente función:

$$\phi: \{D_0 - \text{int}(D_0)\} \rightarrow \{F_0 - \text{int}(F_0)\}$$

Que asigna  $\phi(a) = g_a$ , donde  $a \in g_a(W_0)$ , esta función está bien definida, pues de la observación 6.8 existe una única  $g_a$  de tales características.

Ahora, si  $a \in D_0 - \text{int}(D_0)$  entonces existe  $b$  tal que  $b \in D_0$  y  $a \sim b$ , pero entonces  $g_a(W) \sim g_b(W)$ , por tanto:

$$W \sim g_a^{-1} g_b(W) \quad \therefore \quad g_a^{-1} g_b = s \quad \text{con } s \in S$$

$$\text{Por tanto: } g_a s = g_b$$

Es decir son adyacentes en  $\Gamma$ . Y como  $b$  no pertenece a  $D_0$ , por la propia definición de  $D_0$ ,  $g_b$  no puede pertenecer a  $F_0$ , por tanto:

$$g_a \in F_0 - \text{int}(F_0)$$

Ahora,  $\phi^{-1}[g]$  son todos aquellos vértices  $i$  en  $D_0 - \text{int}(D_0)$  tales que  $i \in g(W_0)$  y entonces, necesariamente  $\phi^{-1}[g] \subset g(W_0)$  y por tanto:

$$(6.12) \quad |\phi^{-1}[g]| \leq |g(W_0)| = |W_0| = t$$

(Pues  $g$  es un automorfismo, y por tanto biyectivo). Ahora analicemos un poco el número:

$$\frac{|D_0 - \text{int}(D_0)|}{t}$$

Dividir el número de elementos por  $t$ , nos da el número de subconjuntos de  $t$  elementos, que una partición de ese



conjunto puede tener. Y como mientras menos elementos tenga cada subconjunto, más subconjuntos puede haber, el número representa la mínima cantidad de subconjuntos de hasta  $t$  elementos, que una partición de  $|D_0 - \text{int}(D_0)|$  puede tener. Por 6.12 se concluye que es menor o igual al número de  $\phi^{-1}(g)$  diferentes que puede haber. Y como sólo puede haber hasta  $|F_0 - \text{int}(F_0)|$  (uno por cada elemento). Entonces:

$$(6.13) \quad \frac{|D_0 - \text{int}(D_0)|}{t} \leq |F_0 - \text{int}(F_0)|$$

$$\therefore |D_0 - \text{int}(D_0)| \leq t|F_0 - \text{int}(F_0)|$$

Y ahora bien, como cada arista en  $\partial D_0$  incide necesariamente con algún vértice en  $D_0 - \text{int}(D_0)$ , y ya que cualquier vértice tiene a lo más  $M_\Delta$  aristas, entonces:

$$(6.14) \quad |\partial D_0| \leq M_\Delta |D_0 - \text{int}(D_0)|$$

Ahora, como a cada arista en  $\partial F_0$  corresponde un vértice en  $F_0 - \text{int}(F_0)$  (y de hecho solo uno pues el otro está fuera de  $F_0$ ) y como por definición los vértices en  $F_0 - \text{int}(F_0)$  tienen al menos una arista en  $\partial F_0$ , dicha correspondencia es sobre y por tanto:

$$|F_0 - \text{int}(F_0)| \leq |\partial F_0|$$

De aquí, de 6.14 y 6.13:

$$|\partial D_0| \leq M_\Delta t |\partial F_0|$$

Esto completa la demostración.  $\square$

(6.15) **Observación:** Si en particular  $i(\Gamma) = 0$ , podemos encontrar una sucesión  $\{D_n\}$  de subgráficas de  $\Delta$ , con:

$$(6.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial(D_n)_0|}{|(D_n)_0|} = 0$$

Y tal que el número de elementos de la intersección con cada órbita  $|\Omega_s \cap (D_n)_0|$  es constante para cada  $s \in \mathbb{N}$ .

Tomemos unas sucesiones  $\{F_n\}$ , y  $\{D_n\}$  como en el Lema anterior, donde además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial(F_n)_0|}{|(F_n)_0|} = 0$$

De aquí, se sigue que  $\{D_n\}$  cumple 6.16. Ahora por la forma en que se construyó  $D$ , resulta que:

$$\Omega_s \cap (D_n)_0 = \Omega_s \cap \left\{ \bigcup_{g \in (F_n)_0} g(W_0) \right\} = \bigcup_{g \in (F_n)_0} \{\Omega_s \cap g(W_0)\}$$

Y recordando que  $g(W_0)$  sólo tiene un elemento de cada órbita, y que las  $g(W)$  no comparten vértices resulta que:

$$|\Omega_s \cap (D_n)_0| = \sum_{g \in (F_n)_0} |\Omega_s \cap g(W_0)| = \sum_{g \in (F_n)_0} 1 = |(F_n)_0|$$

Es constante para cada  $n$ .

### 6.3 Resultado Principal.

(6.17) **Teorema:** Sea  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$ , si  $\Delta'$  es finita y  $G$  es manejable, entonces:

$$r(\Delta) = r(\Delta')$$

**Demostración:** Como ya sabemos, por el Teorema 4.21 que,  $r(\Delta) \leq r(\Delta')$ , nos bastaría ver que  $r(\Delta') \in \sigma(\Delta)$  para completar la demostración.

Así pues, construiremos una sucesión  $\{y^{(n)}\}$  en  $l^2$  tal que,  $\|y^{(n)}\| = 1$  para toda  $n$ , y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ay^{(n)} - r(\Delta')y^{(n)}\| = 0$$

Como en el Teorema 3.4.

Tomemos  $\{D_n\}$  una sucesión de subgráficas inducidas de  $\Delta$  como la descrita en la observación 6.15.

Como  $\Delta'$  es finita, por el Teorema de Perron-Frobenius (2.14) sabemos existe un  $x$  tal que  $x > 0$ ,  $\|x\| = 1$  y  $A'x = r(\Delta')x$ , y sea  $x^{(i)} \in l^2_0$ , tal que si  $i \in \Delta'_0$ :

(6.18)

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} x_{x^{(i)}} & \text{si } i \in (D_n)_0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Tomemos:

$$y^{(n)} = \frac{x^{(n)}}{\|x^{(n)}\|}$$

Para que  $y^{(n)}$  sea unitario. Ahora observemos que:

$$(6.19) \quad (Ax^{(n)})_i = \sum_{j \in \Delta_0} a_{ij} x_j^{(n)} = \sum_{j \in (D_n)_0} a_{ij} x_j^{(n)}$$

Pues las demás entradas de  $x^{(n)}$  son cero, además, también podemos reordenar los sumandos, de tal forma que las jotas en una misma órbita estén asociadas:

$$= \sum_{j \in \pi^{-1}(1) \cap (D_n)_0} a_{ij} x_j^{(n)} + \sum_{j \in \pi^{-1}(2) \cap (D_n)_0} a_{ij} x_j^{(n)} + \dots$$

Y por la definición 6.18 resulta claro que dichas jotas, comparten el mismo valor de  $x$ , entonces, lo anterior es igual a :

$$(6.20) \quad = \left( \sum_{j \in \pi^{-1}(1) \cap (D_n)_0} a_{ij} \right) x_1 + \left( \sum_{j \in \pi^{-1}(2) \cap (D_n)_0} a_{ij} \right) x_2 + \dots = \sum_{s \in \Delta'_0} \left[ \left( \sum_{j \in \pi^{-1}(s) \cap (D_n)_0} a_{ij} \right) x_s \right]$$

(6.21) A continuación, veremos que, para que  $i$ , aporte algo al valor de  $\|Ax^{(n)} - r(\Delta')x^{(n)}\|$  habrá de tener una arista en  $\partial(D_n)_0$  (es decir,  $i \in (D_n)_0 - \text{int}(D_n)_0$  ó  $i \notin (D_n)_0$  y existe alguna  $j \in (D_n)_0$  adyacente a  $i$ ) y en caso contrario:  $(Ax^{(n)})_i - r(\Delta')x_i^{(n)} = 0$ . Efectivamente, revisando los siguientes casos:

a) En el caso de que  $i \in \text{int}(D_n)$ , sucede que la restricción  $i \in \{\pi^{-1}(k) \cap (D_n)_0\}$  es equivalente a simplemente decir que,  $i$  está en  $\pi^{-1}(k)$ , pues para toda  $j$  que no esté en  $(D_n)_0$ , resulta que  $a_{ij} = 0$ . Por tanto, en base al Corolario 4.9, la suma 6.20 es igual a:

$$= \sum_{s \in \Delta'_0} a'_{\pi(i)s} x_s$$

Pero esto es.

$$(A'x)_{\pi(i)} = r(\Delta')x_{\pi(i)} = r(\Delta')x_i^{(n)}$$

(6.22)

$$\therefore (Ax^{(n)})_i - r(\Delta')x_i^{(n)} = r(\Delta')x_i^{(n)} - r(\Delta')x_i^{(n)} = 0$$

b) Si  $i \notin (D_n)_0$  y si no existe  $j \in (D_n)_0$  tal que  $i$  sea adyacente a  $j$  entonces (por 6.19 y 6.18):

$$(Ax^{(n)})_i - r(\Delta)x_i^{(n)} = (Ax^{(n)})_i - 0 = \sum_{j \in (D_n)_0} a_{ij}x_j^{(n)} = 0$$

Pues necesariamente  $a_{ij} = 0$  para todas esas jotas.

c) Si  $i \in (D_n)_0$  y existe  $j \in (D_n)_0$  adyacente a  $i$  entonces

$$(Ax^{(n)})_i - r(\Delta')x_i^{(n)} = \sum_{s \in \Delta'_0} \left[ \sum_{j \in \pi^{-1}[s] \cap (D_n)_0} a_{ij} \right] x_s - 0$$

Por 6.20 y 6.18. Además, lo anterior es menor o igual a:

$$\leq \sum_{s \in \Delta'_0} \left[ \sum_{j \in \Delta_0} a_{ij} \right] x_s \leq \sum_{s \in \Delta'_0} M_{\Delta} x_s$$

Pues claramente,  $\{\pi^{-1}[s] \cap (D_n)_0\} \subset \Delta_0$ , y como  $x > 0$  y  $\|x\| = 1$  entonces  $x_s \leq 1$ , por tanto, también es menor o igual a:

$$\leq \sum_{s \in \Delta'_0} M_{\Delta} \cdot 1 = M_{\Delta} |\Delta'_0| = M_{\Delta} t$$

d) Por otro lado, si  $i \in (D_n)_0 - \text{int}(D_n)_0$ , notemos que:

$$-r(\Delta')x_i^{(n)} = -r(\Delta')x_{\pi(i)} = -(A'x)_{\pi(i)} = -\sum_{s \in \Delta'_0} a'_{\pi(i)s} x_s$$

Por el Corolario 4.9, esto es igual a:

$$-\sum_{\alpha \in \Delta'_0} \left[ \sum_{j \in \pi^{-1}(\alpha)} a_{ij} \right] x_\alpha = -\sum_{\alpha \in \Delta'_0} \left[ \sum_{j \in \pi^{-1}(\alpha) \cap (D_n)_0} a_{ij} + \sum_{j \in \pi^{-1}(\alpha) \cap (D_n)_b} a_{ij} \right] x_\alpha$$

Y por tanto, ayudados de 6.20, se obtiene que:

$$\left| (Ax^{(n)})_i - r(\Delta')x_i^{(n)} \right| = \left| -\sum_{\alpha \in \Delta'_0} \left[ \sum_{j \in \pi^{-1}(\alpha)} a_{ij} \right] x_\alpha \right|$$

Lo cual es menor o igual a:

$$\leq \sum_{\alpha \in \Delta'_0} \left[ \sum_{j \in \Delta_0} a_{ij} \right]$$

Pues  $x_i \leq 1$  y el subconjunto de las jotas consideradas en la suma, está claramente, contenido en  $\Delta_0$ , y por lo tanto, también es menor o igual a:

$$\leq \sum_{\alpha \in \Delta'_0} M_\Delta = M_\Delta |\Delta'_0| = M_\Delta t$$

Así pues, por la observación 6.21 y las desigualdades señaladas en los incisos anteriores:

$$\|Ax^{(n)} - r(\Delta')x^{(n)}\| \leq \sqrt{\sum_{j \in \{i, \beta\} : \alpha \in \partial(D_n)_0} (tM_\Delta)^2}$$

Pero claramente, para cada  $\alpha \in \partial(D_n)_0$  existen dos únicos vértices (los extremos de  $\alpha$ ) que cumplen la restricción de la

suma, lo que implica que el número de los que cumplen dicha restricción, es el doble de  $|\partial(D_n)_0|$ . De aquí que lo anterior es igual a:

$$(6.23) \quad \begin{aligned} &= tM_\Delta \sqrt{\sum_{\alpha \in \partial(D_n)_0} 2} = tM_\Delta \sqrt{2|\partial(D_n)_0|} \\ \|Ax^{(n)} - r(\Delta')x^{(n)}\| &\leq tM_\Delta \sqrt{2|\partial(D_n)_0|} \end{aligned}$$

Ahora pongamos atención al valor  $\|x^{(n)}\|^2$ , que es igual a:

$$\sum_{i \in \Delta_0} (x_i^{(n)})^2 = \sum_{i \in (D_n)_0} x_{\pi(i)}^2$$

Pues todas las demás entradas son cero. Y si reordenamos, la suma asociando todos los valores idénticos de  $\pi(i)$ , obtendremos:

$$\sum_{i \in \pi^{-1}\{1\} \cap (D_n)_0} x_i^2 + \sum_{i \in \pi^{-1}\{2\} \cap (D_n)_0} x_i^2 + \dots$$

Pero por la observación 6.15 sabemos que el número de elementos en toda  $\pi^{-1}\{i\} \cap (D_n)_0$  es constante (digamos igual a  $k$ ) para  $n$ . Por lo tanto lo anterior es igual a:

$$kx_1^2 + kx_2^2 + kx_3^2 + \dots = k \sum_{i \in \Delta_0} x_i^2 = k \cdot 1$$

Pues  $\|x\|=1$ . Pero también, observando el número de sumandos distintos de cero que hay en las sumas anteriores, podemos concluir que:

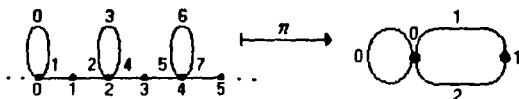
$$k|\Delta_0| = kt = |\partial(D_n)_0| \quad \therefore \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{|\partial(D_n)_0|}$$

Pues antes de la reordenación, eran tantos sumandos como elementos en  $(D_n)_0$  mientras que después fueron  $k$  veces el número de elementos en  $\Delta'_0$ . De aquí y de 6.23, resulta que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}y^{(n)} - r(\Delta')y^{(n)}\| &= \frac{1}{\|x^{(n)}\|} \|\mathbf{A}x^{(n)} - r(\Delta')x^{(n)}\| \leq \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{|(D_n)_0|}} \text{IM}_\Delta \sqrt{|(D_n)_0|} \\ &= K \sqrt{\frac{|(D_n)_0|}{|(D_n)_0|}} \end{aligned}$$

Que sabemos tiende a cero, con lo cual concluimos la demostración.  $\square$

(6.24) **Ejemplo:** Ya vimos en los ejemplos 4.2 y 4.4 que:

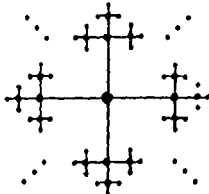


$\pi$  es una cubierta de Galois definida por el grupo  $G$  de las translaciones  $t$ . En el ejemplo 6.5 se comprobó que  $G$  es un grupo manejable. Así que, una aplicación inmediata del Teorema anterior nos garantiza que los radios espectrales de ambas gráficas son iguales, por lo que un rápido cálculo de las raíces del polinomio característico de  $\Delta'$ ,  $(\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0)$  nos da como resultado  $r(\Delta) = r(\Delta') = 1 + \sqrt{5}$ .

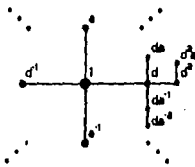
Por otro lado, en el siguiente ejemplo se verá que, si el grupo  $G$  de una cubierta de Galois no es manejable, no se puede garantizar la igualdad de los radios espectrales.



(6.25) Ejemplo: Considérese la siguiente gráfica  $\Delta$ :



El árbol infinito en que cada vértice, es adyacente a cuatro y sólo cuatro vértices distintos. A partir del "centro" (arbitrario), que podemos nombrar como uno, podemos numerar los vértices de la siguiente manera:

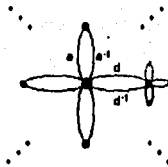


Es decir, a cada vértice corresponderá un elemento  $\Pi s_i$ , donde  $s_i \in \{d, d^{-1}, a, a^{-1}\}$ , dependiendo de que tan a la derecha:  $(d^n)$  o izquierda  $(d^{-n})$ , y/o arriba  $(a^n)$  o abajo  $(a^{-n})$  se encuentre del centro.

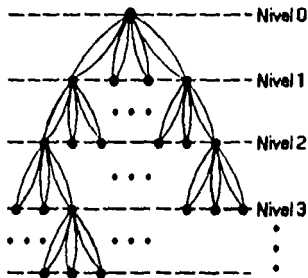
Así mismo, si consideramos a  $G$ , el grupo de los automorfismos que corresponden a trasladar el centro 1 a cualquier otro vértice, es claro que si  $H \in G$  entonces:

$$H(i) = hi, \quad \text{donde } i \in \Delta_0 \text{ y } h = \Pi s_i$$

Ahora, encontremos su gráfica de Cayley. Podemos elegir claramente a  $S = \{a, a^{-1}, d, d^{-1}\}$  como un conjunto finito de generadores de  $G$ , de donde la gráfica de Cayley  $\Gamma$  será:



Que es una gráfica muy similar a  $\Delta$ , con la única diferencia de tener dos aristas entre cada vértice. A continuación calcularemos su constante isoperimétrica. Para este fin, podemos graficar  $\Gamma$  de la siguiente manera:



Es claro que, en el nivel  $n$  habrá  $4 \cdot 3^{n-1}$  vértices, que tendrán, cada uno, dos aristas con cada vértice adyacente del nivel siguiente (o sea  $2(4 \cdot 3^n)$ ). Entonces si tomamos  $X_n$  como el conjunto de vértices en los niveles menores o iguales a  $n$ , procedemos con los siguientes cálculos:

$$|\partial X_n| = 2 \cdot 4 \cdot 3^n$$

$$|X_n| = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 4 \cdot 3^i$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{|X_n|}{|\partial X_n|} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \sum_{i=0}^{n-1} 4 \cdot 3^i}{4 \cdot 3^n} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4 \cdot 3^n} - 1 + 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 3^{i-n} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4 \cdot 3^n} - 1 + \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^i \right] \end{aligned}$$

De aquí que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{|\partial X_n|} = \frac{1}{2} \left[ 0 - 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right] = \frac{1}{4}$$

Y entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial X_n|}{|X_n|} = 4$$

Ahora, nos bastará probar que 4 es una cota inferior de los valores:

$$\left\{ \frac{|\partial X|}{|X|} \right\}$$

Para demostrar que 4 es la constante isoperimétrica de  $\Gamma$ . O de modo equivalente, que para cualquier conjunto finito de vértices  $X$  sucede que  $4|X| \leq |\partial X|$ . Procederemos por inducción en el número de elementos de  $X$ .

a) Si  $|X| = 1$ ,  $X = \{i\}$  con  $i \in \Gamma_0$ , pero entonces, sus ocho aristas pertenecen a  $\partial X$ , y por tanto:

$$4|X| = 4 \leq 8 = |\partial X|$$

b) Supongamos que:  $4|X| \leq |\partial X|$  si  $|X| = n$ .

c) En el caso  $|X| = n+1$ , como  $X$  tiene un número finito de vértices, éstos se encuentran necesariamente en un número finito de niveles. Así

que podemos elegir un  $i \in X$  que se encuentre en el nivel mayor de  $X$ . Sea  $X'$  tal que:

$$X = X' \cup \{i\}$$

De donde, por hipótesis de inducción:

$$4|X'| \leq |\partial X'|$$

Es claro que  $i$ , es adyacente a tres vértices del siguiente nivel y que, ninguno de éstos está en  $X$ , por tanto las aristas involucradas (que son seis) pertenecen a  $\partial X$ . Por otro lado,  $i$  también es adyacente a un solo vértice del nivel anterior, el cual, en dado caso, pudiera estar en  $X'$ , lo que implicaría que las dos aristas que los unen estarían en  $\partial X'$  pero no en  $\partial X$ . Es decir, al agregar  $i$  a  $X'$ ,  $\partial X$  tendrá una "ganancia" de seis aristas con respecto a  $\partial X'$  y una "pérdida" de a lo más dos, por tanto:

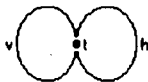
$$|\partial X'| + 4 \leq |\partial X|$$

De aquí que:

$$4|X| = 4|X'| + 4 \leq |\partial X'| + 4 \leq |\partial X|$$

Con lo cual, concluimos el cálculo  $i(\Gamma) = 4$  (De una manera análoga, se puede calcular que  $i(\Delta)$  resulta ser dos).

Lo anterior nos permite concluir que  $G$  es un grupo no manejable. Por otro lado podemos dar una cubierta de Galois  $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$  para el grupo  $G$ , donde  $\Delta'$  es:



Donde  $\pi$  envía todos los vértices de  $\Delta$  a  $t$ , las aristas "horizontales" a  $h$  y las "verticales" a  $v$ . Un rápido cálculo permite conocer:  $r(\Delta')=4$ .

Por el Teorema 5.13 sabemos que:

$$r(\Delta) \leq k - \frac{i(\Delta)^2}{2k} = 4 - \frac{1}{2} = 3.5$$

Es decir:

$$r(\Delta) < r(\Delta')$$

## **Bibliografía**

---

- [1] **J.A. de la Peña & M. Takane**, The Spectral Radius of the Galois of a Finite Graph. *Linear Algebra and its applications* 160:175-188 (1992).
- [2] **M. Takane**, Propiedades espectrales de las matrices de Coexter y las matrices de adyacencia de las algebras hereditarias de tipo salvaje (Tesis Doctoral), UNAM, México D.F. 1992.
- [3] **N.L. Biggs & B. Mohar**, The spectral radius of infite graphs, *Bull. London Math. Soc.* 20:116-120 (1988).
- [4] **B. Mohar**, The spectrum of an infinite graph, *Linear Algebra Appl.* 48:245-256 (1982).

- [5] **V. Neumann**, *Introducción a la Teoría de las Gráficas*, IV Coloquio del Depto. de Matemáticas, Cinvestav, IPN.
- [6] **J.A. de la Peña & M. Takano**, *Some Bounds for the Spectral Radius of a Coexter Transformation*, *Tsukuba Journal of Mathematics* 17:193-200, 1993.
- [7] **F.R. Gantmacher**, *The Theory of Matrices*, Vols. I, II, Chelsea, New York, 1959.
- [8] **A.E. Taylor**, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley, New York, 1958.
- [9] **P.R. Halmos**, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, New York, 1951.
- [10] **B. Noble**, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, New Jersey, 1969.
- [11] **K. Hoffman & R. Kunze**, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- [12] **R.G. Bartle**, *The Elements of real Analysis*, Wiley, New York, 1964.
- [13] **J.E. Marsden**, *Basic Complex Analysis*, Freeman & Co. San Francisco, 1973.