



011739
24

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingenieria

**CONVECCION NATURAL EN UN CANAL
DE AIRE INCLINADO, CALENTADO
POR LA PLACA SUPERIOR**

DAVID PALOMINO MERINO

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERIA
(MECANICA)**

OPCION TERMOFLUIDOS

FALLA DE ORIGEN

CIUDAD UNIVERSITARIA
AGOSTO DE 1995



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre, con todo cariño,
por todo lo que representa

A la memoria de mi padre,
con el respeto que me inspira

A Ana Lia, mi esposa y compañera,
por el apoyo, comprensión y los
momentos que me motivaron a
concluir este trabajo

A mis hermanos,
Amparo, Rodolfo, Rosario y Roberto

A mi prima Male

A mis sobrinos,
Karen, Brendita, Betito y Dani
por la ternura que me inspiran,

Agradecimientos

Mi mas sincero agradecimiento al Dr. Diego Alfonso Samano Tirado, por su confianza, apoyo y paciencia, así como por las invaluablees sugerencias que realizó durante la dirección de esta tesis.

A los Doctores José Luis Fernández Zayas, Alejandro Rodríguez Valdéz, Francisco Solorio Ordaz y Luis Ferrer Argote por su aceptación como miembros del jurado y sus valiosas sugerencias.

Al Centro de Instrumentos de la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial al Dr. Claudio Firmani Clementi, Director de ésta Institución por su apoyo y confianza, y por permitirme el uso de sus instalaciones.

También agradezco a los Ingenieros Roberto Reséndiz Nuñez, Gerardo Ruiz Botello, Gabriel Ascanio Gasca por su confianza y apoyo, y a todos mis compañeros y amigos del Departamento de Diseño Mecánico del Centro de Instrumentos.

A todas las personas que, desinteresadamente, me apoyaron en la realización de éste trabajo.

Índice

Nomenclatura

Resumen

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Descripción del Problema	4
1.2 Contenido de la Tesis	5
Capítulo 2. Antecedentes	8
2.1 Convección Natural en Canales Inclinados	8
2.2 Convección Natural en Placas Inclinadas	12
2.3 Convección Natural en Cavidades Inclinadas	16
2.4 Trabajos Relacionados con el Problema	17
2.5 Conclusiones de la Revisión	19
2.6 Objetivos	20

Capítulo 3. Formulación del Problema Simplificado	21
3.1 Modelo Unidimensional Completamente Desarrollado en un Canal Inclinado	22
3.2 Modelo Unidimensional en Capa Limite en una Placa Plana	26
3.2.1 Temperatura en la Pared Constante	29
3.2.2 Flujo de calor constante en la pared	32
3.3 Conclusiones	34
Capítulo 4. Formulación del Problema en Capa Limite	36
4.1 Ecuaciones del Movimiento del Fluido	37
4.2 Magnitud de los parametros adimensionales	42
4.3 Solución numérica	43
4.4 Procedimiento de Solución	47
4.5 Independencia de Malla	49
Capítulo 5. Resultados	54
5.1 Resultados del Modelo con Temperatura de Pared Constante	55
5.2 Resultados del Modelo con Flujo de Calor Constante	66
Capítulo 6. Conclusiones	83
Bibliografía	87

Nomenclatura

b	Longitud de la placa normal al plano x-y	[m]
C_p	Capacidad térmica específica a presión constante del fluido	[J/(Kg°C)]
d_l	Espesor de la placa	[m]
f	Factor de fricción entre el fluido y la pared	
F	Fuerza	[N]
g	Componente vertical del vector aceleración debida a la gravedad	[9.81 m/s ²]
$Gr_p = \frac{\beta g (T_{w1} - T_{\infty}) \delta^3}{\nu^2}$	Número de Grashof en modelo unidimensional con temperatura de pared constante	
$Gr_q = \frac{\beta g \delta^3 L q'}{\nu^3 \rho C_p}$	Número de Grashof en el modelo unidimensional con flujo de calor constante	
$Gr_x = \frac{\beta g (T_0 - T_{\infty}) x^3}{\nu^2}$	Número de Grashof local cuando la temperatura de pared es constante	
$Gr_x' = \frac{\beta g q x^3}{k \nu^2}$	Número de Grashof local cuando el flujo de calor es constante	
H	Ancho del canal	[m]
H_f	Entalpia del fluido	[W]
h_i	Coefficiente convectivo en el interior del canal	[W/(m ² °C)]
k	Conductividad térmica del fluido	[W/(m°C)]

L	Longitud de las paredes del canal	[m]
m	Subdivisiones en dirección x	
n	Subdivisiones en dirección y	
$Nu_x = \frac{hx}{k}$	Número de Nusselt local	
$Pr = \frac{C_p \mu}{k}$	Número de Prandtl	
q	Flujo de calor por unidad de área	[W/m ²]
Q	Flujo de calor	[W]
$Ra_x = Gr_x Pr$	Número de Rayleigh local	
$Re = \frac{u_\infty D_e}{\nu}$	Número de Reynolds	
T	Temperatura del fluido	[°C]
t	Tiempo	[s]
u	Componente de velocidad del fluido en dirección x	[m/s]
U	Componente adimensional de velocidad en dirección X	
v	Componente de velocidad del fluido en dirección y	[m/s]
V	Componente adimensional de velocidad en dirección Y	
x	Dirección principal del flujo	[m]
X	Dirección adimensional principal del flujo	
y	Dirección perpendicular al flujo	[m]
Y	Dirección adimensional perpendicular al flujo	
$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$	Difusividad térmica del fluido	[m ² /s]
β	Coefficiente de expansión volumétrica	[°K ⁻¹]
δ	Espesor de la capa límite	[m]
ϕ	Flujo de calor adimensional hacia el fluido	
γ	Ángulo de inclinación del canal o placa	[rad]
ϕ	Flujo de calor adimensional	
ΔX	Tamaño del incremento longitudinal en dirección X	

ΔY	Tamaño del incremento longitudinal en dirección Y	
$\Delta \tau$	Tamaño del incremento del tiempo τ	
μ	Viscosidad dinámica	[kg/(m s)]
ν	Viscosidad cinemática	[m ² /s]
θ	Temperatura adimensional del fluido	
ρ	Densidad del fluido	[kg/m ³]
τ	Tiempo adimensional	

SUBÍNDICES

<i>cond</i>	Conducción
<i>ext</i>	Exterior
<i>f</i>	Fluido
<i>g</i>	Gravedad
<i>H</i>	Evaluado en la distancia que separa las placas
<i>m</i>	Medio
<i>max</i>	Máximo
<i>sol</i>	Sol
<i>wi</i>	Pared interior
<i>x</i>	Dirección principal del flujo o relativo a variables locales
δ	Evaluado en el espesor de la capa límite
τ	Cortante
∞	Medio ambiente
0	Pared superior
1	Pared inferior

SUPERÍNDICES

* Relativo a flujo de calor constante

Resumen

En el presente trabajo se estudia el problema de la convección natural laminar entre dos placas paralelas inclinadas separadas por aire, con calentamiento a temperatura y flujo de calor constantes en la placa superior. Este problema representa un modelo simplificado, en capa límite bidimensional, de los “techos escudo” a la radiación solar, donde las condiciones de temperatura y flujo de calor, en la placa superior, varían periódicamente con el tiempo.

En el sistema bajo estudio, el aire contenido entre las placas, aumenta su temperatura, ejerciendo una fuerza de flotación que lo obliga a desplazarse hacia arriba, abandonando el canal por la parte superior.

Un primer acercamiento nos permite conocer los comportamientos unidimensionales en un canal inclinado en zona de flujo completamente desarrollado y en capa límite bajo la placa superior del canal con temperatura y flujo de calor constantes.

En el siguiente modelo, se obtienen resultados numéricos del comportamiento del fluido mediante las ecuaciones de capa límite laminar bidimensional, con la aproximación de Boussinesq, bajo una placa inclinada con calentamiento a temperatura y flujo de calor

constantes. En el resto del espacio del canal, el movimiento del fluido es poco apreciable. Los campos de velocidad y temperatura se obtienen numéricamente por el método explícito de diferencias finitas, obteniendo también los parámetros adimensionales de Rayleigh y Nusselt.

Los resultados muestran la evolución transitoria de los campos de velocidad y temperatura, así como su dependencia, en estado permanente, con la dirección principal del flujo y con el ángulo de inclinación. Se observa que, aunque adimensionalmente ocurre lo contrario, los perfiles de velocidad y temperatura crecen con la longitud mencionada, debido al calentamiento continuo, y con el ángulo de inclinación debido a la fuerza de flotación.

Los resultados del modelo bidimensional se alejan del unidimensional debido a las simplificaciones. Sin embargo, al compararse con resultados experimentales de Al-Arabi [33] en condiciones de temperatura constante, de Vliet [32] en condiciones de flujo de calor constante, y Morillón [35] en condiciones periódicas de temperatura y flujo de calor, se observa una diferencia máxima de 12%, lo cual valida la solución y la posibilidad de usar las correlaciones de capa límite en el diseño térmico de edificaciones tendientes a la máxima eficiencia energética con techos o muros escudo.

Capítulo 1

Introducción

Recientemente, en algunos centros de investigación de la UNAM, se han desarrollado estudios para el diseño térmico de edificios, principalmente, se han impulsado estudios tendientes al diseño del edificio confortable de máxima eficiencia energética, como lo menciona Sámano [1]. Una línea de Investigación es la que está orientada al estudio de los fenómenos de transferencia de calor que incorporan sistemas pasivos, como los muros masivos [2] que almacenan el calor de manera sensible, y pueden dar ventajas térmicas al funcionamiento eficiente del edificio, o los techos escudo que reducen considerablemente el flujo de calor hacia el interior de las habitaciones y las mantienen dentro de un rango de temperaturas confortables para el cuerpo humano.

El presente trabajo, contribuye al diseño de habitaciones confortables mediante el análisis de la convección natural en un techo escudo compuesto por dos placas paralelas inclinadas que, como se menciona, reducen la temperatura en el interior de las habitaciones por el efecto del soleamiento.

El diseño térmico de un edificio es importante, porque debe ser confortable y de máxima eficiencia energética, ya sea que use aire acondicionado o sin él. Esto significa que la temperatura dentro del cuarto debe mantenerse dentro del rango de confort al humano y debe emplear tanta climatización natural como sea posible para reducir el consumo energético de la climatización artificial, si existe. De esta manera, el edificio mas eficiente es el que emplea climatización natural únicamente y no utiliza energía extra en su acondicionamiento, sin embargo, esto sería posible solo si el clima del lugar donde se ubique el edificio lo permite.

En lugares con climas cálidos, el almacenamiento térmico de paredes y techos juega un papel importante tanto en el amortiguamiento de la oscilación de la temperatura exterior como en la protección contra la radiación térmica. En zonas climáticas con temperatura ambiente alejada del confort, donde las temperaturas extremas diarias se presentan en un lapso de tiempo mas corto, los sistemas de climatización artificial empleados para obtener la temperatura de confort consumen mayor cantidad de energía, siendo necesario aumentar el tamaño del equipo de aire acondicionado para absorber la carga que se presenta en dicho lapso. El almacenamiento térmico en los materiales de construcción, suprime los picos en la demanda de energía de los sistemas acondicionadores de aire como lo muestran Sámano y Vazquez [3].

En la mayor parte del territorio nacional, la temperatura ambiente oscila alrededor de la temperatura de confort para el humano con grandes variaciones durante el día, por ello, las culturas antiguas utilizaron los muros masivos para tomar ventaja del clima. Sin embargo, debido a la innovación de nuevos materiales de construcción y de nuevas formas arquitectónicas, no es posible aprovechar la experiencia de la arquitectura tradicional, por lo que hay que optimar el diseño térmico de manera que no se construyan mas edificios térmicamente incómodos y de baja eficiencia energética. Además, el cambio en la innovación de materiales y formas es tan rápido que no es posible experimentar con construcciones para lograr obtener un material óptimo para cada región. Por ello, es

necesario conocer tanto las propiedades térmicas del material como el clima del lugar para hacer uso de la ingeniería térmica y predecir la operación del edificio que se construirá.

La teoría de mecánica de fluidos y transferencia de calor es suficiente para explicar y predecir los fenómenos que ocurren en la edificación, contribuyendo al diseño térmico eficiente y cómodo.

En zonas donde la temperatura se aleja del confort por períodos de semanas, el efecto del amortiguamiento de la oscilación de temperatura lleva a rangos que causan desconfort al humano. En estos casos, el diseño térmico se resuelve con paredes de alta resistencia térmica (aislantes), puesto que la gran diferencia entre las temperaturas exterior e interior del cuarto originan el flujo de calor por las paredes.

Un ejemplo que muestra la potencialidad de la aplicación de un diseño térmicamente confortable, usando climatización natural, son el conjunto de edificios del Laboratorio de Energía Solar (LES) de la UNAM en Temixco, Morelos reportado por Sámano et al [4]. En dichas instalaciones se toma en cuenta esta propiedad de los muros masivos para incorporar el concepto de los techos y paredes escudo, cuya finalidad es amortiguar aún más la oscilación de la temperatura exterior. Este amortiguamiento acerca la temperatura interior de los edificios a un rango térmicamente más confortable.

Dichos sistemas, incorporan nuevos materiales de construcción y aprovechan su fabricación con doble pared para liberar el calor almacenado en una de ellas por convección natural, evitando que el calor solar llegue a la otra pared y aumente la temperatura en el interior del cuarto, reduciéndola considerablemente.

De esta manera, para poder realizar un diseño térmico óptimo y eficiente, es necesario desarrollar herramientas de cálculo y criterios para el ingeniero y constructor especialistas.

1.1 Descripción del Problema

En este trabajo, se estudia el problema de los techos y paredes escudo consistente de dos placas paralelas inclinadas formando un canal por donde circula aire naturalmente debido al calentamiento o enfriamiento de éstas. Este techo o muro separa el medio ambiente exterior del aire interior de un cuarto.

En el problema real, la cara exterior de la placa superior del sistema interactúa con el medio ambiente de distintas maneras, por convección con el aire exterior, por radiación infrarroja con el medio ambiente exterior, y por la radiación solar que incide sobre esta cara. Cada uno de estos efectos es función del tiempo y se presenta de manera periódica cada día, de modo que tanto la temperatura de la cara exterior de la placa, como el flujo de calor sobre ella, serán también función del tiempo y tendrán un máximo cada medio día y un mínimo cada media noche.

Cada interacción tiene un efecto sobre la distribución de temperaturas en las placas, sobre el campo de velocidades y temperaturas del aire comprendido entre ellas, y sobre el campo de temperaturas y velocidades del aire dentro del cuarto.

En nuestro sistema, consistente en el espacio comprendido entre ambas placas, el aire, expuesto a un calentamiento y enfriamiento continuo, ascenderá durante el calentamiento (día) en la región cercana a la placa superior y descenderá en la región cercana a la placa inferior, mientras que durante el enfriamiento (noche) se invertirán los flujos. Estos movimientos son debidos al efecto de flotación. Sin embargo, con la finalidad de entender la transferencia de calor y el movimiento del aire entre las placas, para el estudio se considera que no hay variación periódica de la temperatura o el flujo de calor, es decir, la temperatura y el flujo de calor entre las placas se mantienen constantes. Esto puede justificarse si se supone que la variación periódica de temperaturas es pequeña comparada con el tamaño del periodo (1 día).

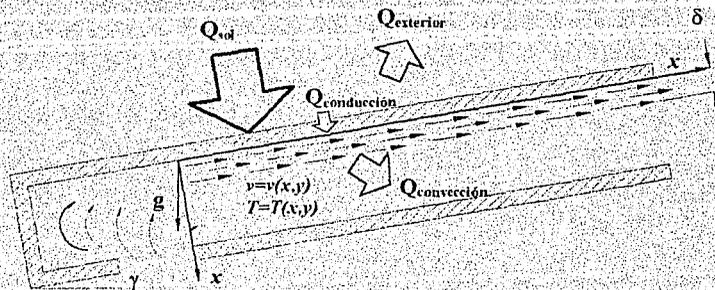


Fig. 1.1 Configuración general de un Techo Escudo

De esta manera, la transferencia de calor entre las placas y el aire comprendido entre ellas se lleva a cabo por convección natural, resultado de la diferencia entre sus temperaturas.

El problema se estudia bidimensionalmente, es decir, se supone que la dimensión normal al plano en estudio es infinita o muy grande comparada con las otras dimensiones, de manera que el comportamiento del flujo sea el mismo a lo largo de toda esa longitud infinita. De este modo, tanto la velocidad como la temperatura varían a lo largo de las dos longitudes mostradas en la figura 1.1 del canal, producto de un calentamiento de la placa superior.

1.2 Contenido de la Tesis

En el capítulo 2 se hace una revisión de todos los trabajos sobre convección natural en canales formados por placas paralelas, en una placa plana inclinada, y en cavidades inclinadas, para establecer un punto de partida, algunos criterios en el estudio, y los objetivos principales.

En el capítulo 3 se presentan los modelos unidimensionales, que comprenden toda la región de un canal inclinado y en capa límite en una placa inclinada, en condiciones de temperatura y flujo de calor constantes. Se establecen las ecuaciones que rigen el movimiento del fluido, y se obtiene una solución analítica de la velocidad, que se supone constante a lo largo de toda la longitud del canal, de la temperatura del fluido o la pared, y del flujo de calor. Finalmente, se presentan las gráficas que muestran la variación de los parámetros anteriores.

En el capítulo 4 se plantea el modelo bidimensional del flujo en capa límite laminar en una placa inclinada para las mismas condiciones de temperatura y flujo de calor constantes en la superficie superior. Para ello, se plantean las ecuaciones de continuidad momentum y energía que incluyen el término de flotación de Boussinesq, se adimensionalizan, y se presentan los órdenes de magnitud de los parámetros adimensionales característicos, de manera que se cubra el rango laminar para todas las inclinaciones. Finalmente, se desarrollan las ecuaciones en diferencias finitas del problema, así como la solución numérica empleada, el procedimiento de solución y las pruebas de independencia de malla realizadas en la simulación.

En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos en la formulación bidimensional. Inicialmente, se presentan los resultados transitorios de velocidad, temperatura y flujo de calor. En el estado permanente, se presenta la variación de los mismos parámetros con la longitud y el ángulo de inclinación de la placa. Se presentan también distintas gráficas de la variación local de la velocidad y temperatura, así como de los parámetros adimensionales más importantes como Rayleigh y Nusselt para distintos ángulos de inclinación. Se muestra la variación entre los dos parámetros adimensionales comparados con resultados experimentales de otros autores, la ecuación que correlaciona a ambos, y la del coeficiente convectivo de transferencia de calor. Finalmente, se muestra el promedio de los parámetros Nusselt y Coeficiente convectivo de transferencia de calor y la comparación con los resultados experimentales de otros autores.

Finalmente, el capítulo 6 se dedica a las conclusiones, donde se interpretan los resultados obtenidos de velocidad, temperatura, flujo de calor, y coeficiente convectivo. Se hacen también comentarios acerca del método numérico, de la aproximación de las soluciones, validadas con los trabajos experimentales de otros autores, y algunas recomendaciones en el diseño térmico.

Capítulo 2

Antecedentes

El problema bajo estudio se puede describir como el de la convección natural en un canal inclinado con temperatura o flujo de calor constantes en la frontera superior. En la literatura no se ha encontrado reportado el problema completo, solo casos particulares de canales verticales o inclinados con condiciones simétricas de temperatura o flujo de calor. Por otro lado, también existen reportados problemas en capa límite de placas verticales o inclinadas con distintas condiciones de temperatura o flujo de calor, y soluciones para capas de aire o cavidades inclinadas.

2.1 Convección Natural en Canales Inclinados

Lee *et al.* [5] presentan un estudio numérico y experimental del flujo por convección natural en un canal compuesto por una placa porosa que transpiraba CO_2 , y otra placa sólida impermeable. Las dos mantienen una temperatura constante mayor que la del aire. Los campos de concentración y temperatura de CO_2 fueron medidos por una combinación de termopares e interferometría Mach-Zehnder donde la inyección de CO_2 hace que se

contrarreste la fuerza ascendente de flotación. También fueron obtenidos por diferencias finitas de las ecuaciones transitorias de capa límite. Se menciona que las mediciones experimentales tuvieron buena aproximación con respecto a las predicciones teóricas.

Bar-Cohen y Rohsenow [6] presentan un desarrollo matemático de las ecuaciones que permiten determinar un espaciamiento óptimo entre dos placas paralelas verticales enfriadas con aire por convección natural, basado en la maximización de la transferencia de calor por unidad de área. Dicha modelación se basa en configuraciones encontradas en componentes electrónicos con condiciones de frontera, simétricas o asimétricas, de temperatura o flujo de calor. Para ello usan expresiones numéricas y experimentales de otros autores para ajustarlas a las nuevas expresiones optimadas.

Azevedo y Sparrow [7] presentan un estudio experimental de la convección natural del agua en un canal inclinado, abierto en sus extremos, con variaciones en la relación de aspecto, en las condiciones de calentamiento en las paredes, y en la diferencia de temperaturas pared-ambiente. El rango de pruebas fue para $2 \times 10^2 \leq (S/H)Ra \leq 10^5$, ángulo de inclinación 0, 30 y 45°, y distintas separaciones. Se utilizó una técnica de visualización (Thymol Blue) para obtener patrones de flujo, observándose flujos secundarios en forma de vórtices longitudinales. La correlación $Nu=0.645[(S/H)Ra]^{0.25}$ engloba todos los resultados dentro de un 10% de error; esto implica valores para el número de Nu entre 2 y 40.

Yamada [8] presenta un estudio numérico y experimental de la transferencia de calor combinada, por convección natural y radiación, entre placas paralelas, calentadas asimétricamente empleando CO_2 y N_2 como fluido de trabajo. Para ello emplea modelos de ancho de banda y de gas gris con emisividades de pared arbitrarias, para tomar en cuenta el intercambio de radiación entre el fluido y las placas. El rango del número de Gr estuvo entre 2.8×10^4 y 9.88×10^6 . El perfil de temperaturas mostrado para diferentes absortividades, incluyendo la no emisividad, no muestra que éste factor sea importante. El número de Nu reportado para la $Gr \approx 10^4$ está entre 3 y 8.

Hung y Shiau [9] presentan un estudio experimental de la convección natural entre dos placas paralelas verticales, conteniendo una de ellas una protuberancia rectangular, bajo condiciones asimétricas de flujo de calor, una placa calentada y la otra aislada. Se empleó trazador de humo para visualizar patrones de flujo. Se observaron dos celdas de recirculación cercanas a la protuberancia. El rango de pruebas fue en $10^4 \leq Ra \leq 10^6$, con calentamiento desde 41.32 hasta 265.66 W/m² y diversos tamaños relativos de la protuberancia. Los rangos del coeficiente de convección varían entre 3 y 10 W/m² siendo mayores en la región de entrada. Muestran la correlación $Nu = 0.0617 Ra^{0.316}$ y mencionan que es aplicable aguas abajo donde se generan turbulencias generadas por la protuberancias, mientras que aguas arriba, los resultados son los mismos que para una placa plana.

Naito y Nagano [10] muestran un estudio numérico del efecto, en las regiones de entrada hidrodinámica y térmica, de la flotación en la convección laminar forzada entre dos placas paralelas inclinadas con tres distintas condiciones de temperatura uniforme y aislamiento. Se utilizan distintos números de Rayleigh que varían entre 500 y 3000 para números de Prandtl de 0.07, 0.71 y 7. Los resultados muestran las ecuaciones de correlación para el número de Nusselt y el coeficiente de fricción locales en la pared calentada. Asimismo, se muestra como disminuye el coeficiente de fricción al incrementar la inclinación en la pared calentada, mientras que en la pared aislada aumenta con la inclinación, y también se muestra como aumenta el efecto de la flotación al decrecer el número de Prandtl.

Nelson y Wood [11] presentan un estudio numérico de la transferencia combinada, de calor y masa, por convección natural en flujo completamente desarrollado entre placas paralelas inclinadas con condiciones de frontera simétricas y asimétricas. En él, el movimiento del fluido es generado por el efecto de flotación debido a la diferencia de temperaturas y concentraciones entre el canal y el fluido. Los resultados muestran las correlaciones de los números locales de Nusselt y Sherwood para ambas paredes.

Ramanathan y Kumar [12] presentan resultados numéricos del flujo convectivo entre dos placas paralelas verticales dentro de una cavidad grande. Las condiciones de la cavidad son

de temperatura constante, mientras que en la placa son de flujo de calor constante desconocido. El estudio fue realizado para distintos números de Prandtl y relaciones de aspecto del canal. Los resultados concuerdan bien con los resultados de otros trabajos para relaciones de aspecto grandes, pero no ocurre lo mismo para relaciones de aspecto pequeñas debido a que se toma en cuenta la difusión debida a la energía térmica. Los resultados muestran correlaciones para predecir la temperatura máxima y el número de Nusselt promedio sobre la placa como funciones del número de Rayleigh y la relación de aspecto. Se muestra también una correlación de la temperatura máxima del canal sobre la placa, que incluye el efecto del número de Prandtl para relaciones de aspecto grandes.

Naylor *et al* [13] presentan un estudio numérico de la convección libre, laminar bidimensional, entre placas verticales isotérmicamente simétricas que incluyen los efectos del flujo de entrada. Las formas elípticas de las ecuaciones de movimiento son resueltas usando condiciones de flujo de entrada novedosas. Los resultados son presentados para $Pr=0.7$, $50 \leq Gr \leq 5 \times 10^2$ y relaciones de aspecto de L/b de 10, 17 y 24. Se observan fenómenos de separación del flujo en la entrada. Comparaciones con la aproximación en capa límite muestran que la solución elíptica es necesaria para dar precisión en los parámetros locales cerca de la entrada del canal. Los números de Nusselt promedio en la placa son 1.802 mediante la solución elíptica y 1.9 mediante la solución parabólica.

Martin *et al* [14] presentan el problema de la convección natural bidimensional a través de un canal vertical de placas paralelas isotérmicas para números de Rayleigh pequeños ($0 < Ra \leq 50$), donde el flujo es completamente desarrollado y el número de Nusselt es directamente proporcional al número de Rayleigh. En el análisis no toman en cuenta el efecto conductivo. Los resultados muestran las correlaciones generales para el número de Nusselt y los casos límites en que $Ra \rightarrow 0$ y $Ra \rightarrow \infty$.

Anand *et al* [15] presentan un estudio del efecto del espaciamiento en la convección libre entre dos placas paralelas calentadas a temperatura y flujo de calor simétricos. Para ello resuelven las ecuaciones de capa límite y aplican el criterio de obtener el número de Nusselt

promedio máximo, donde el espaciamiento será óptimo, al graficar el espaciamiento adimensional con el número de Nusselt. Finalmente, en los resultados se muestran los espaciamientos óptimos para distintas condiciones de temperatura y flujo de calor constantes variando el número de Grashoff desde 10 hasta 10^5 .

Wang [16] presentó una solución analítica para la convección natural, en flujo completamente desarrollado, entre placas paralelas calentadas periódicamente para números de Rayleigh pequeños ($0 < Ra \leq 10$). Para ello, la velocidad, temperatura, y flujo de calor, los separa en un término que contiene la temperatura media en el transitorio de la pared, y otro que contiene la oscilación. Presenta los perfiles de velocidad y temperatura obtenidos para flujo de calor prescrito, y concluye que para bajas frecuencias, el efecto no permanente es grande. Para altas frecuencias disminuye hasta cero.

2.2 Convección Natural en Placas inclinadas

Yung y Oetting [17] presentan un estudio experimental de la convección libre en una placa plana inclinada isotérmica. El experimento se realizó a 0, 30, 45, 60 y 90°. Para medir las temperaturas utilizan termopares colocados a distintas posiciones longitudinales de la placa. Obtienen para $Pr=0.733$ los perfiles de temperatura y la correlación para el número de Nusselt basada en una aproximación teórica propuesta por otro autor, usando números de Grashof dentro del rango de 10^5 a 10^9 .

Lloyd y Sparrow [18] establecen las relaciones entre la naturaleza de las inestabilidades del flujo (número de Rayleigh) y el ángulo de inclinación de una placa inclinada calentada isotérmicamente. Utilizan técnicas de visualización de flujo electroquímico para obtener los patrones de flujo del movimiento del fluido. Se encuentra que para ángulos menores a 14° (relativo a la posición vertical), se generan ondas, mientras que para ángulos mayores a 17°, la inestabilidad se caracteriza por la formación de vórtices longitudinales.

Fujii e Imura [19] presentan un estudio experimental bidimensional de la convección natural, debida al calentamiento de agua, por una placa con inclinación arbitraria. El arreglo experimental, que consta de una placa calentadora de latón y paredes transparentes de acrílico formando una cavidad, está acondicionado de tal manera que las condiciones en la frontera no son ni isotérmicas ni de flujo de calor constante. Obtuvieron patrones de flujo por "shadow graphs" para inclinaciones de 0, 45, 75, 80, 85 y 89 grados (respecto a la posición vertical), y números de Rayleigh entre 10^5 y 10^{11} . Obtienen los perfiles de estratificación del fluido a media cámara y presentan las gráficas de Nu vs $R\cos\theta$ que correlacionan con la ecuación $Nu=0.56(R\cos\theta)^{1/4}$ para la región laminar en capa límite con la cara caliente de la placa hacia abajo. Muestran también otras correlaciones para placa inclinada con flujo por arriba y placa casi horizontal con flujo por ambos lados.

Churchill y Ozoe [20] construyen una correlación general, del número de Nusselt local y espesor de la capa límite, para convección libre laminar desde una placa vertical, tanto para temperatura de pared constante como para flujo de calor uniforme, en base a una solución numérica de las ecuaciones de capa límite para números de Prandtl de 0, 0.001, 0.01, 0.1, 1.0, 10, 100, 1000 e ∞ , y otras correlaciones propuestas por otros autores. Dicha correlación está dada por $Nu=AR\alpha^{1/4}/[1+(A/B)^{9/4}/Pr^{9/16}]^{4/9}$.

Warneford y Fussey [21] presentan una investigación experimental de la convección natural debajo de una placa inclinada con flujo de calor constante e inmersa en un tanque de agua. Utilizan un método de visualización para observar los patrones de flujo basado en pequeñas partículas de aluminio que son introducidas dentro del agua e iluminadas por un haz de luz. Los parámetros locales de transferencia de calor fueron obtenidos cubriendo un rango del número de Grashof de 10^6 a 10^{12} y un rango de ángulos de inclinación de 0 a 85 grados respecto a la vertical. Para obtener la correlación experimental del número de Nusselt local, proponen una ecuación obtenida por el método integral, cuyos coeficientes son obtenidos experimentalmente.

Black y Norris [22] utilizan interferometría diferencial, para visualización del flujo y medición del coeficiente de transferencia de calor, en la convección libre desde una placa plana isotérmica inclinada. Analizan la estructura del flujo dentro de la capa límite térmica turbulenta, donde se encuentran ondas térmicas que atraviesan la superficie de la placa y causan variaciones significativas en el coeficiente de transferencia de calor. Estas ondas se incrementan al pasar del régimen de transición a turbulento. El rango del número de Rayleigh se encuentra entre 10^6 y 10^{10} , mientras que las inclinaciones son de 45, 60, 70 y 80 grados. Se presentan datos del número de Nusselt local integrado con respecto al tiempo para flujos laminar, de transición y turbulento, y se muestra la correlación del número de Nusselt en el régimen turbulento, así como los números de Rayleigh críticos donde se presentan las fluctuaciones del flujo.

Shaukatullah y Gebhart [23] presentan una investigación experimental de la convección natural sobre una superficie inclinada con flujo de calor constante. El arreglo consta de una placa introducida dentro de un tanque lleno de agua con termopares y pruebas de anemometría de película caliente para investigar la región en frontera sobre la superficie inclinada. Miden la temperatura y velocidad transversal y longitudinal, observando la formación de vórtices longitudinales que interfieren en los cálculos de los parámetros locales de transferencia de calor. Construyen una correlación de los datos experimentales para una inclinación de 29° , con un rango del número de Grashoff entre 10^8 y 10^{13} variando el flujo de calor que toma en cuenta los vórtices generados y la comparan con la solución en capa límite.

Siebers *et al* [24] estudian experimentalmente la convección natural en el aire desde una placa vertical, con temperatura y flujo de calor constantes, y con propiedades variables. La placa se alojó en un túnel de viento, que fue operado para régimen turbulento. Se operó para el número de Grashoff entre 10^6 y 10^{12} y con temperaturas de la placa de 2.7 veces la del ambiente. En los resultados se muestra que la variación en las propiedades no tiene un efecto significativo sobre la convección de calor. También se observa que el número de Grashoff en la transición disminuye al aumentar la temperatura, y que el perfil de la capa límite turbulenta

puede ser representado por un perfil universal. Construyen además una correlación para cada región, siendo para flujo laminar $Nu_f = a Gr_f^{1/4} (T_w/T_\infty)^{-0.04}$ con a igual a 0.404 para flujo de calor constante y 0.356 para temperatura constante.

Jaluria [25] presenta un estudio numérico de la interacción de la convección natural en aire debido al calentamiento de una placa vertical con fuentes de calor discretizadas a lo largo de su superficie. Parte del estudio estuvo orientado a observar el efecto de una frontera inferior horizontal, por donde entra el flujo a la placa vertical. Se trabajó para números de Grashoff entre 100 y 10^5 , y relaciones de aspecto de 2 y 4. El trabajo muestra que, para valores pequeños del número de Grashoff, la frontera inferior es importante en el resultado, y que aguas abajo del elemento calentador, la solución es parecida a la de la placa uniforme para los números de Grashoff grandes.

Poulikakos [26] presenta un estudio teórico de la condensación de un vapor por un lado de una placa vertical conjugado al problema de convección natural en capa límite del otro lado. Cada fenómeno es tratado separadamente y las soluciones de ambas son aplicadas a la pared. Emplea la solución propuesta por otro autor para el lado de una fase, mientras que para el lado de la condensación toma la solución clásica que aparece en un libro de Rohsenow. En la ecuación de cantidad de movimiento, desprecia los términos de inercia comparados con los viscosos que es válido para $Pr > 0$. Con lo anterior establece una serie de ecuaciones que aplica en la pared y que resuelve numéricamente. Para el lado de la convección natural, los resultados los correlaciona para obtener $Nu = 0.621 Ra^{1/4}$.

Chen *et al* [27] presentan un estudio numérico de la convección libre laminar en capa límite a lo largo de placas planas horizontales, inclinadas y verticales con variación exponencial de la temperatura ó el flujo de calor en la pared en dirección de la coordenada axial. Las ecuaciones del movimiento del fluido se transforman con variables de similitud adimensionales para resolverse por diferencias finitas. Para ello resuelven el problema en dos orientaciones distintas, inclinada-horizontal ($0^\circ \leq \gamma < 90^\circ$) e inclinada-vertical ($0^\circ < \gamma \leq 90^\circ$). Presentan resultados en gráficas de esfuerzos cortantes locales en la pared, de los números

de Nusselt y Grashof locales, de la velocidad y temperatura locales, así como del número de Nusselt promedio, todos para las inclinaciones de 0°, 5°, 15°, 30°, 45°, 60° y 90°, para distintos valores del exponente, para dos fluidos con números de Prandtl de 0.7 y 7. Las correlaciones del número de Nusselt promedio para la orientación inclinada-vertical con variación exponencial de la temperatura es: $Nu = (4/3)K_1(Ra_L \text{sen} \gamma)^{1/4}$, siendo K_1 una constante, función de Pr , y válida para $5 \times 10^3 \leq Ra_L \text{sen} \gamma \leq 5 \times 10^9$.

2.3 Convección Natural en Cavidades Inclinadas

Arnol *et al* [28] desarrollan una investigación experimental de la convección natural en regiones rectangulares para distintas relaciones de aspecto. Observan el efecto de la inclinación en la transferencia de calor para números de Rayleigh entre 10^3 y 10^6 , para inclinaciones entre 15° y 180°, y relaciones de aspecto de 1, 3, 6 y 12. Los fluidos utilizados cubren un rango del número de Prandtl entre 4.5 y 2000, los cuales no causan ningún efecto en los resultados. Los resultados muestran la variación del número de Nusselt, y otros parámetros adimensionales, con el ángulo de inclinación. Obtienen una correlación para el número de Nusselt en función del ángulo de inclinación.

Hollands *et al* [29] presentan mediciones experimentales de la transferencia de calor por convección libre en capas de aire inclinadas con relaciones de aspecto grandes, calentadas por abajo. El rango del número de Rayleigh va desde el valor subcrítico determinado por $Ra_c = 1708 / \cos \phi$ hasta 10^5 , el cual es variado con la presión del aire. El aparato experimental usado consiste de una cavidad rectangular con dos placas paralelas mantenidas a temperatura constante con corrientes de agua calentadas termostáticamente, cuya temperatura es medida por termopares. Los experimentos fueron realizados para ángulos de inclinación de 15°, 30°, 45°, 60° y 75°. La diferencia de temperaturas entre las placas fue de 12 y 15 K. Los resultados muestran gráfica y correlación del número de Nusselt, que es independiente de la variable longitudinal x , en función del ángulo de inclinación, y presenta

errores máximos del 5% para $\phi \leq 60^\circ$ y de 10% para $\phi > 75^\circ$. Esta correlación fue construida a partir de las sugeridas por el mismo autor en otros trabajos y de los datos experimentales.

Raithby *et al* [30] presentan un análisis de la transferencia de calor por convección natural en capas de fluido limitadas lateralmente por paredes verticales isotérmicas y por paredes horizontales adiabáticas en la parte superior e inferior. Los resultados son una extensión analítica de trabajos previos, que predicen la distribución de temperaturas en regímenes conductivos, laminar en capa límite y turbulento para relaciones de aspecto mayores a 5. Se realizan comparaciones extensas del número de Nusselt promedio y la distribución de temperaturas con datos experimentales y construyen una correlación general del número de Nusselt promedio para capas de aire verticales aplicables en el diseño de colectores solares planos.

ElSherbiny *et al* [31] presentan un estudio experimental de la transferencia de calor por convección natural de capas de aire verticales e inclinadas. La capa de aire está limitada por placas planas isotérmicas a distinta temperatura y en los extremos por fronteras conductivas. Reportan mediciones para relaciones de aspecto de 5, 10, 20, 40, 80 y 110, que cubren el rango en colectores solares. Los números de Rayleigh varían entre 10^2 y 2×10^7 . Utiliza el mismo aparato experimental que el utilizado por Hollands en trabajos previos y los resultados parten del análisis de los mismos trabajos. Obtiene correlaciones para el número de Nusselt derivado de ese análisis para las distintas relaciones de aspecto, tanto para capas de aire verticales como inclinadas, con desviaciones máximas de 9% y 5%, respectivamente, comparadas con los datos experimentales.

2.4 Trabajos Relacionados con el problema

Como puede apreciarse en la revisión anterior, no existe solución al problema de convección natural en una placa inclinada para los grados de inclinación requeridos.

Sin embargo, Pohlhausen y Ostrach [32] obtienen una solución analítica para las ecuaciones de capa límite laminar bidimensional en convección natural para una placa vertical, demostrando que si se introduce una función de corriente, la ecuación diferencial parcial se reduce a una ecuación diferencial ordinaria mediante una variable de similitud. En la solución obtiene que el número medio de Nusselt para el aire está dado por $Nu_m = 0.478Gr_L^{1/4}$, válida para $GrPr < 10^8$.

Otros trabajos más recientes contemplan el problema de capa límite en una placa inclinada para flujo de calor constante o temperatura constante, donde proponen una relación que establece el límite del número de Rayleigh para flujo laminar, el cual depende del ángulo de inclinación. En ellos, Vliet [33] presenta un arreglo experimental para estudiar la convección natural en una placa inclinada con flujo de calor constante. El experimento lo realizan con una placa inclinada contenida dentro de un tanque lleno de agua o aire donde los rangos utilizados son 30, 45, 60, 75, y 85 grados de inclinación; flujo de calor constante de 0.04 a 1.8 Btu/m² para agua y de 0.2 a 0.5 Btu/m² para aire; y $2.7 \times 10^{13} \leq Ra \leq 2.1 \times 10^{15}$ para agua y $1.4 \times 10^{12} \leq Ra \leq 2.5 \times 10^{12}$ para aire. En los resultados se muestran las distribuciones de temperaturas de pared para las distintas inclinaciones y de Nu vs Ra , y las correlaciones locales, $Nu_x = 0.6Ra_x^{1/5}$ para flujo laminar, y $Nu_x = 0.3Ra_x^{0.24}$ para flujo turbulento.

Más recientemente, Al-Arabi y Sakr [34] realizan un estudio experimental de la transferencia de calor por convección natural en aire debido al calentamiento isotérmico de la cara superior de una placa inclinada. La placa de latón es calentada con vapor a presión atmosférica, con un sobrecalentamiento de 8°C. Las inclinaciones de la placa respecto al eje vertical fueron de 0°, 15°, 30°, 45°, 60° y 80°. En un extremo de la placa se coloca otra placa plana horizontal que le sirve de frontera de entrada, y cuyos efectos se observan en el patrón de flujo y la transferencia de calor. El experimento se lleva a cabo en el rango $2 \times 10^4 \leq Ra \leq 10^{10}$. Presentan los coeficientes convectivos locales a lo largo de la placa observándose el efecto de entrada, hasta que el valor se hace asíntota a un flujo desarrollado. Los valores del coeficiente convectivo se incrementan con la inclinación, mostrando valores para la condición asíntota entre 3.8 y 5.4 W/m²°C. Los valores promedio del número de

Nusselt se correlacionaron para flujo laminar y turbulento en las siguientes expresiones, respectivamente, $Nu_l=0.54(Ra\cos\gamma)^{1/4}$ y $Nu_l=(0.1+0.05\gamma/\pi)Ra^{1/3}$

Por otro lado, Morales [35] realiza mediciones experimentales de temperaturas y radiación térmica, durante un año, en uno de los techos escudo ubicado en los cubículos del LES con el fin de comprender el fenómeno. Reporta gráficas mensuales de radiación térmica, y de temperaturas en distintos puntos del canal. El trabajo solo muestra un estudio comparativo entre los distintos meses del año de las distintas temperaturas.

Finalmente, Morillón [36] realiza un estudio experimental de la convección natural en un canal de aire vertical acoplado a un muro con flujo periódico de calor. Reporta mediciones de velocidades y temperaturas del fluido en la entrada y salida del canal, así como temperaturas en distintos puntos de las paredes del canal. El trabajo explica, principalmente, el efecto de la inercia térmica de la pared en contacto con el fluido.

2.5 Conclusiones de la Revisión Bibliográfica

De la revisión bibliográfica realizada anteriormente, se observa que el problema de los techos escudo, vistos como canal con condiciones asimétricas o periódicas de temperatura o flujo de calor no ha sido estudiado aún. Sin embargo el problema de capa límite en placas verticales ha sido bastante estudiado y hay suficiente información para predecir experimentalmente si una pared escudo puede ser aproximada a alguno de los casos estudiados. El problema de capa límite laminar bidimensional donde existe un ángulo de inclinación, no ha sido suficientemente estudiado, ni mucho menos para las inclinaciones requeridas en los techos escudo. Los resultados de los trabajos presentados anteriormente, sobre todo los que incluyen el coeficiente de convección natural, pueden ser útiles para validar nuestro modelo en capa límite.

2.6 Objetivos

- Entender la transferencia de calor por convección natural en canales y placas inclinados, con temperatura y flujo de calor constantes en la pared superior.
- Conocer la respuesta del fluido como consecuencia de la transferencia de calor para las condiciones de frontera mencionadas.
- Conocer la certeza con que el modelo numérico bidimensional utilizado puede reproducir el fenómeno del flujo convectivo real donde las condiciones exteriores fluctúan a lo largo de un período (un día), en base a resultados experimentales de otros autores.
- Obtener una relación numérica del coeficiente de transferencia de calor, para utilizarla en cálculos del diseño térmico de edificios.

Capítulo 3

Formulación del Problema

Simplificado

El problema en estudio consiste de un canal inclinado por donde fluye aire debido a las fuerzas de flotación originadas por el calentamiento de la pared superior del canal. Este aire toma por convección natural el calor que la placa superior recibe del exterior, lo cual ocasiona que la temperatura de la placa inferior sea menor a la de la placa superior, de manera que en una zona muy alejada de la entrada, se llegue a una zona de flujo completamente desarrollado donde las variaciones de velocidad y temperatura ocurren en dirección perpendicular al flujo. Un primer nivel de solución simplificada consiste en obtener un modelo unidimensional en flujo completamente desarrollado.

Un mayor acercamiento al problema completo, que sería obtener una solución que comprenda las regiones de entrada hidrodinámica y térmica, dificulta el problema, pues el modelo resultante es un problema elíptico donde se requieren las condiciones de velocidad y temperatura en todas las fronteras del canal, que aún no se conocen.

Por otro lado, la diferencia entre las temperaturas de las paredes y el fluido en la entrada del canal, establecen el movimiento en la región cercana a la pared superior, lo cual permite que el comportamiento del fluido pueda modelarse usando la teoría de la capa límite. Por ello, otro modelo simplificado se refiere al de capa límite unidimensional donde la velocidad se considera constante y la temperatura varía en dirección del flujo.

3.1 Modelo Unidimensional Completamente Desarrollado en un canal Inclinado.

Este modelo se establece en una zona de flujo alejada de las regiones de entrada hidrodinámica y térmica, donde las variaciones de velocidad y temperatura ocurren solo en la dirección perpendicular al flujo que es la zona de flujo completamente desarrollado (ver figura 3.1).

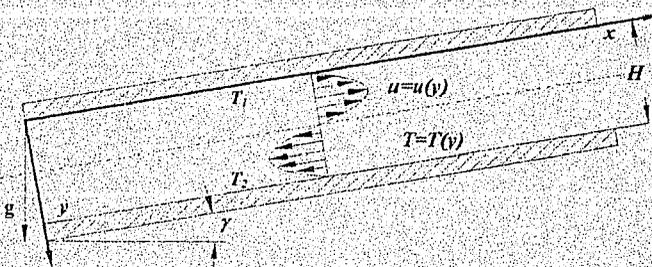


Fig. 3.1 Región de flujo completamente desarrollado.

Las respectivas ecuaciones resultantes de continuidad, momentum y energía, en éste modelo, son las siguientes:

$$\frac{dv}{dy} = 0$$

$$0 = \beta g (T - T_m) \sin \gamma + \nu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (3.1)$$

$$0 = \frac{d^2 T}{dy^2}$$

Siendo T_m la temperatura media del fluido entre ambas placas, con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} u = 0, \quad T = T_0, \quad \text{en } y = 0 \\ u = 0, \quad T = T_1, \quad \text{en } y = H \end{aligned} \quad (3.2)$$

Definiendo las variables adimensionales siguientes:

$$Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{H}{\nu} u, \quad \theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$$

las ecuaciones (3.1) y las condiciones a la frontera (3.2) resultan:

$$\frac{dU}{dY} = 0$$

$$0 = Gr_H \theta \sin \gamma + \frac{d^2 U}{dY^2} \quad (3.3)$$

$$0 = \frac{d^2 \theta}{dY^2}$$

y

$$\begin{aligned}
 U &= 0, & \theta &= 1, & \text{en } Y &= 0 \\
 U &= 0, & \theta &= 0, & \text{en } Y &= 1
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

siendo:

$$Gr_H = \frac{\beta g(T_0 - T_1)H^3}{\nu^2}$$

Estas ecuaciones unidimensionales se resuelven analíticamente para obtener:

$$\begin{aligned}
 U &= \left[\frac{1}{6}Y^3 - \frac{1}{4}Y^2 + \frac{1}{12}Y \right] Gr_H \sin \gamma \\
 \theta &= 1 - Y
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

de modo que, al graficarlas, se obtienen los perfiles mostrados en las figuras 3.2 y 3.3, respectivamente, donde puede apreciarse que el flujo es antisimétrico respecto al plano que se encuentra a la mitad entre ambas placas.

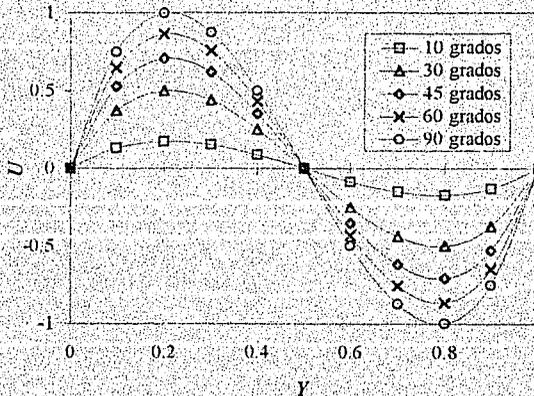


Fig. 3.2 Variación de la velocidad con la longitud Y, para distintas inclinaciones

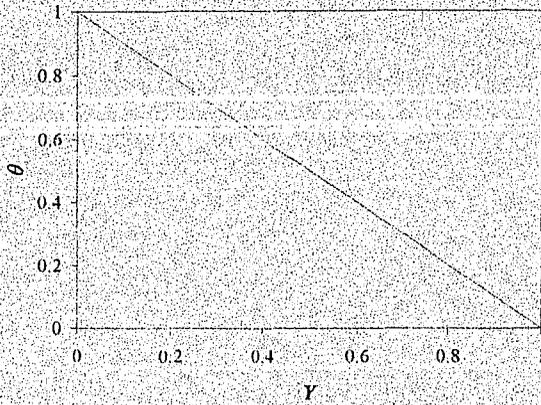


Fig. 3.3 Variación de la temperatura co la longitud Y , para las distintas inclinaciones.

Por otro lado, si la ecuación de velocidad (3.5) se deja en función de θ_m , temperatura adimensional evaluada en T_m , se obtiene:

$$U = \left\{ \frac{1}{6} Y^3 - \frac{1}{2} (1 - \theta_m) Y^2 + \left[\frac{1}{2} (1 - \theta_m) - \frac{1}{6} \right] Y \right\} Gr_{fl} \text{ sen } \gamma \quad (3.6)$$

Esto nos da una idea de como se va desarrollando el flujo entre ambas placas, de modo que si observamos la figura 3.4, cuando θ_m es cercana a 0, la temperatura media del fluido es cercana a la de la placa inferior y el flujo se desarrolla hacia abajo, y cuando θ_m es casi 1, la temperatura media del fluido es cercana a la de la placa superior y el flujo se desarrolla hacia arriba.

Si en éste régimen de flujo, calculamos el número adimensional de Nusselt en $y=0$ de acuerdo a la definición:

$$Nu = -\frac{H}{2(T_0 - T_m)} \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0}$$

obtenemos $Nu=1$, que representa el valor límite en un canal inclinado cuando $L \rightarrow \infty$, es decir, cuando se cambia de las regiones de entrada hidrodinámica y térmica, donde las variaciones en la velocidad y la temperatura ocurren en las dos direcciones del plano $x-y$, a la región de flujo completamente desarrollado.

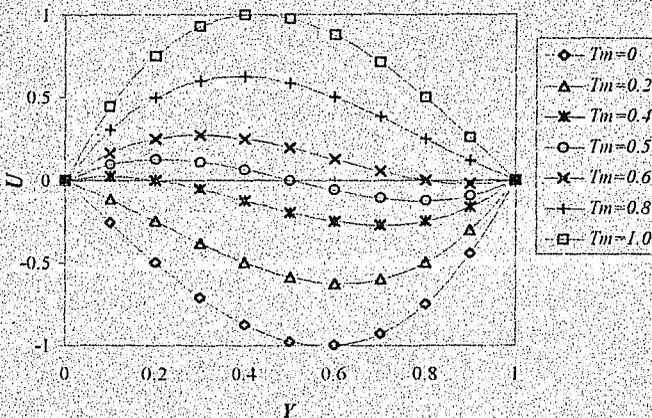


Fig. 3.4 Variación de la velocidad con la temperatura media del fluido

3.2 Modelo Unidimensional en Capa Límite en una Placa Plana

Este modelo resulta al considerar que el flujo se desarrolla solo en la región cercana a la pared superior donde, de acuerdo a mediciones realizadas por Morales [35] en un techo escudo de un cubículo del LES-UNAM, las diferencia máxima de temperaturas, en la entrada del canal, ocurre entre la pared superior y el fluido, que es de 4°C aproximadamente, mientras que entre la pared inferior y el fluido es de 1°C aproximadamente. Esto origina que la fuerza motriz se realice en la región cercana a la pared superior. De acuerdo en ello,

Sámano [1] reporta que el espesor de la capa límite para placas isotérmicas inclinadas es del orden de $Lsen\theta/Ra^{1/4}$, siendo L la longitud de la placa, de manera que para una placa vertical de la misma longitud del techo escudo (6.5 m), el espesor de la capa límite, usando las propiedades del aire, es de 0.0155 m, siendo menor al ancho del canal.

Por otro lado, Al-Arabi y Sakr [34] reportan que el régimen laminar de capa límite para una placa vertical se lleva a cabo para números de Rayleigh menores a 10^7 . Para un techo escudo con 10° de inclinación el número de Rayleigh es del orden de 10^9 , que es el régimen de transición, sin embargo, en esta primera etapa se omite la discusión dado que el modelo no distingue entre laminar y turbulento. Por lo tanto, es válido suponer que el flujo se desarrolla en la región de capa límite, para lo cual se plantea este modelo unidimensional.

De acuerdo a la figura 3.5, se realiza un balance de fuerzas mediante la segunda ley de Newton para obtener la velocidad del fluido que se supone constante y un balance de energía para obtener la variación de la temperatura del fluido en la dirección del flujo.

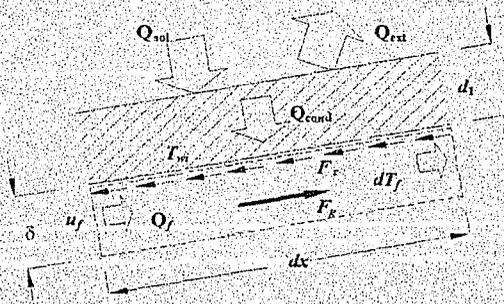


Fig. 3.5 Balance de fuerzas y energía en un elemento diferencial de fluido

La velocidad del fluido depende de la fuerza de flotación que, a su vez, depende del campo de temperaturas y de la fuerza cortante, por lo que al plantear el balance de fuerzas en el

volumen de control mostrado en la figura 3.5, despreciando la inercia de la capa límite en el aire, se obtiene:

$$\sum F_{vi} = F_x - F_r = 0 \quad (3.7)$$

donde la fuerza de flotación F_x se calcula mediante:

$$F_x = \rho_c \beta \delta b g \sin \gamma \int_0^L (T_f - T_c) dx$$

y la fuerza cortante F_r , debida a la viscosidad, entre la placa y el aire es:

$$F_r = b L f \frac{\rho_\infty u_f^2}{2}$$

siendo f el factor de fricción que puede calcularse de acuerdo a Roshenow y Hartnett [37] para una placa plana mediante:

$$f = \frac{16}{\phi Re}$$

donde ϕ es un factor de corrección que, para el tamaño de la placa, toma un valor de 0.67; y Re es el número de Reynolds expresado por:

$$Re = \frac{u_f D_c}{\nu}$$

siendo $D_c (=2\delta)$ el diámetro equivalente. Así, al sustituir en la ecuación (3.7) de balance de fuerzas y despejar la velocidad se tiene:

$$u_f = \frac{\delta^2 \beta g \text{sen } \gamma}{5.97 L \nu} \int_0^L (T_f - T_\infty) dx \quad (3.8)$$

Donde puede notarse la dependencia de la velocidad con la temperatura del fluido. Esta temperatura del fluido se calculará para temperatura de pared constante y flujo de calor constante.

3.2.1 Temperatura de Pared Constante

Si se supone que la temperatura de la pared T_w es constante, al realizar un balance de energía en el volumen de control del fluido establecido por la primera ley de la termodinámica para sistemas abiertos se tiene:

$$Q_f = \Delta H_f \quad (3.9)$$

donde Q_f y ΔH_f son el flujo de calor y el cambio de entalpía, respectivamente, y se escriben como:

$$Q_f = h_f b dx (T_w - T_f)$$

$$\Delta H_f = \rho \delta b u_f C_p dT_f$$

de donde, al sustituir en (3.9) se obtiene:

$$h_f (T_w - T_f) = \rho \delta u_f C_p \frac{dT_f}{dx}$$

Al resolver la ecuación anterior para obtener la temperatura del fluido T_f , y sustituirla en la ecuación (3.8) de la velocidad y en la expresión del flujo de calor se obtiene:

$$T_f = T_{wf} - (T_{wf} - T_{\infty})e^{-\alpha x}$$

$$u_f = \frac{\beta g \delta^2 (T_{wf} - T_{\infty}) \text{sen } \gamma}{5.97 \nu} \left[1 - \frac{1}{\alpha L} (1 - e^{-\alpha L}) \right] \quad (3.10)$$

$$q = h_f (T_{wf} - T_{\infty}) e^{-\alpha x}$$

siendo:

$$\alpha = \frac{h_f}{\rho \delta u_f C_p}$$

Al adimensionalizar el anterior conjunto de ecuaciones (3.10), se obtienen, respectivamente:

$$\theta_f = \frac{T_f - T_{\infty}}{T_{wf} - T_{\infty}} = 1 - e^{-\alpha L x}$$

$$U_f = \frac{u_f \delta}{\nu} = \frac{\text{Gr}_\delta \text{sen } \gamma}{5.97} \left[1 - \frac{1}{\alpha L} (1 - e^{-\alpha L}) \right] \quad (3.11)$$

$$\varphi = \frac{q}{h_f (T_{wf} - T_{\infty})} = e^{-\alpha L x}$$

donde:

$$\text{Gr}_\delta = \frac{\beta g \delta^3 (T_{wf} - T_{\infty})}{\nu^2}$$

Para los techos escudo del LES [35], $L=6.5$ m, $\delta=0.0041$ m y $\gamma=10^\circ$. Por otro lado, el número del Nusselt reportado por Roshenow y Hartnett [37] para convección forzada en canales de sección transversal infinita es 8.235, de modo que el coeficiente convectivo obtenido a partir de éste parámetro es $h_f=11.477$ W/(m²°C).

Usando las propiedades del aire [38] siguientes:

$$\rho = 1.295 \text{ Kg/m}^3$$

$$\beta = 0.003501 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\nu = 1.478 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta T = T_w - T_\infty = 1 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$C_p = 1006.5 \text{ J/(Kg}^\circ\text{C)}$$

$$k = 0.02545 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$$

$$\text{Pr} = 0.71$$

al sustituir en el conjunto de ecuaciones (3.11), por prueba y error se obtiene una velocidad adimensional de 0.3151 a la cual le corresponde un valor de 0.0011 m/s, que es del orden de velocidades reportadas para convección natural en una pared vertical o inclinada [1].

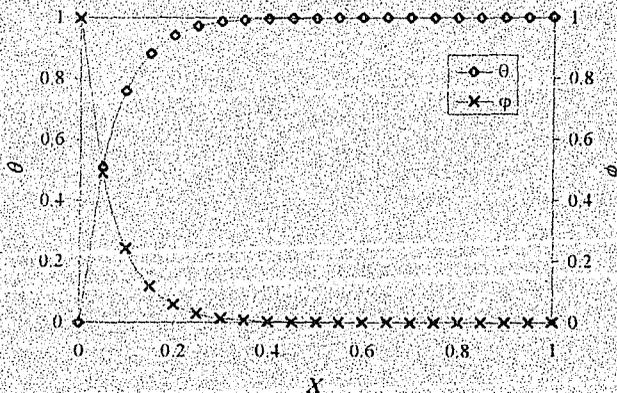


Fig. 3.6 Variación de la temperatura del fluido y del flujo de calor con la longitud de la placa

La variación de la temperatura y el flujo de calor con la longitud de la placa, se obtienen de las correspondientes ecuaciones (3.11) y son mostradas en la figura 3.6. Sin embargo, el fluido alcanza la temperatura ambiente asintóticamente en una región muy pequeña de 0.004 m, por lo cual solo se grafica esta zona adimensionalizada sobre esta longitud.

3.2.2 Flujo de Calor Constante

Dado el flujo de calor constante sobre la placa superior, al realizar un balance de energía para el mismo volumen de control del fluido, se tiene:

$$q = \rho \delta u_f C_p \frac{dT_f}{dx} \quad (3.12)$$

y, en función del coeficiente convectivo:

$$q = h_i (T_w - T_\infty) \quad (3.13)$$

Al resolver la primera ecuación (3.12) para obtener la temperatura del fluido y sustituir en la segunda (3.13) para obtener la temperatura en la pared, y ambos valores de temperatura en la ecuación (3.8) de velocidad, se obtienen respectivamente:

$$T_f = \frac{q}{\alpha} x + T_\infty$$

$$T_w = q \left(\frac{1}{h_i} + \frac{x}{\alpha} \right) + T_\infty \quad (3.14)$$

$$u_f = \left(\frac{\beta g \delta L q \text{ sen } \gamma}{1194 \nu \rho C_p} \right)^{1/2}$$

siendo:

$$\alpha' = \rho \delta u_f C_p$$

Al adimensionalizarlas resultan:

$$\theta_f = \frac{k(T_f - T_a)}{qL} = \frac{kx}{L\alpha'}$$

$$\theta_{wi} = \frac{k(T_{wi} - T_r)}{qL} = \frac{k}{L} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{x}{\alpha'} \right) \quad (3.15)$$

$$U_f = \frac{u_f \delta}{\nu} = \left(\frac{Gr_g \text{ sen } \gamma}{11.94} \right)^{1/2}$$

donde:

$$Gr_g = \frac{\beta g q \delta^3 L}{\nu^3 \rho C_p}$$

Usando los mismos valores reportados en la sección anterior con un flujo de calor de 100 W/m², se obtiene una velocidad adimensional de 38.9683 que le corresponde un valor de 0.1404 m/s.

La figura 3.7 muestra una variación lineal de las temperaturas adimensionales del fluido y la pared cuya diferencia es de alrededor de 8.7°C.

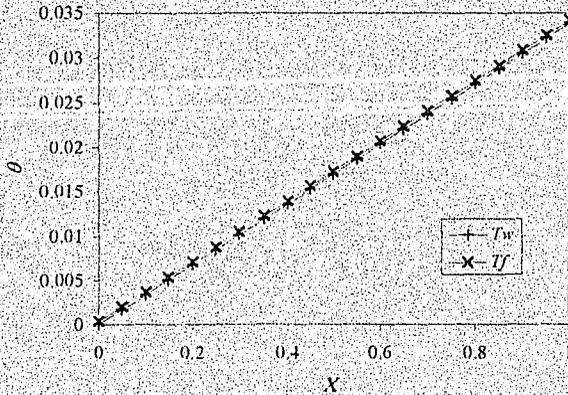


Fig. 3.7 Variación de las temperaturas del fluido y la pared con la longitud de la placa

3.3 Conclusiones

Los problemas unidimensionales formulados anteriormente nos dan una idea general de lo que será el comportamiento bidimensional del flujo en un canal inclinado para longitudes muy grandes, es decir, cuando $L \rightarrow \infty$, y para la capa límite laminar bidimensional en una placa inclinada.

El caso de un canal inclinado nos permite conocer el comportamiento del fluido en regiones alejadas de la entrada donde la variación solo ocurre en la dirección perpendicular al flujo. En esta región, la temperatura media del fluido es el promedio entre la temperatura de ambas placas, es decir, de 0.5. En regiones cercanas a la entrada o salida, es posible predecir el comportamiento del fluido si se supone que la temperatura media es menor o mayor que el valor promedio mencionado. En este caso se obtienen perfiles de velocidades donde se aprecia la formación del flujo desarrollado. El comportamiento bidimensional del canal es de mayor complejidad debido a la solución de las ecuaciones elípticas resultantes donde es necesario conocer el comportamiento del fluido en la entrada y salida del canal.

El comportamiento unidimensional del problema en capa límite nos permite conocer el orden de magnitud de las velocidades del fluido en una placa plana así como el comportamiento de la temperatura del fluido a lo largo de la longitud de la placa. Cuando la temperatura en la pared es constante la temperatura del fluido crece exponencialmente hasta alcanzar la temperatura de la placa, mientras que cuando el flujo de calor es constante, la temperatura del fluido crece linealmente al igual que la temperatura de la placa. Este comportamiento se debe obtener en el problema bidimensional si se integra la temperatura del fluido sobre la dirección perpendicular al flujo para ambos casos, temperatura o flujo de calor constantes. El orden de magnitud de las velocidades debe obtenerse si se integra sobre ambas direcciones del movimiento. El comportamiento bidimensional del problema en capa límite es aún más sencillo debido a que es un problema parabólico donde solo es necesario conocer las condiciones de entrada y obtener el comportamiento en la salida. Este problema de capa límite laminar bidimensional es el que se tratará en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Formulación del Problema en Capa Límite

En el presente capítulo se estudia el problema bidimensional del flujo en la región cercana a la pared superior del canal, modelándolo con las ecuaciones de capa límite que incluyen el término de las fuerzas de cuerpo en la ecuación de momentum, donde se introduce la fuerza de flotación.

Para ello supondremos que la placa, como puede apreciarse en la figura 4.1, se encuentra inclinada un cierto ángulo γ y es calentada a temperatura o flujo de calor constantes. Este calentamiento origina una fuerza motriz en el fluido debido a las fuerzas de flotación. El movimiento se considera en régimen laminar y se formula en estado transitorio para observar la formación de las capas límite hidrodinámica y térmica. El fluido tiene a la entrada una temperatura igual a la ambiente, y existe la condición de no deslizamiento en las fronteras en contacto con la pared de la placa.

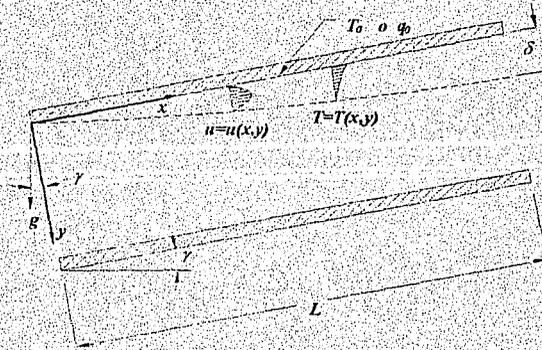


Fig. 4.1 Modelo bidimensional en capa límite

4.1 Ecuaciones del Movimiento del Fluido

Las ecuaciones generales de conservación que establecen el movimiento del fluido con propiedades constantes, para flujo laminar, bidimensional, en estado transitorio, y sin disipación por viscosidad, son las siguientes:

Continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

Momentum:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (4.2)$$

Energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (4.3)$$

donde:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

y ρ , ν , k , C_p y α son la densidad, viscosidad, conductividad térmica, capacidad térmica específica y difusividad térmica del aire, respectivamente, mientras que \mathbf{g} es el vector aceleración gravitacional.

El modelo completo mostrado por las ecuaciones (4.1) a (4.3), rige el comportamiento del fluido dentro del espacio comprendido en el canal. Estas ecuaciones constituyen un problema elíptico cuya solución requiere las condiciones en todas las fronteras. Sin embargo, tal como se ha venido mencionando, el problema puede modelarse con las ecuaciones de capa límite, laminar, y bidimensional en una placa plana inclinada, que incluyen el término de flotación con la aproximación de Boussinesq y que, para un fluido viscoso, son:

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

Momentum:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta g (T - T_\infty) \sin \gamma \quad (4.5)$$

Energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.6)$$

Las condiciones de frontera son:

Caso 1:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_0 \quad \text{en } y = 0, \quad t > 0 \quad (\text{temperatura constante})$$

Caso 2:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial T / \partial y = -q/k \quad \text{en } y = 0, \quad t > 0 \quad (\text{flujo de calor constante})$$

Ambos:

$$u = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{en } y \rightarrow \infty, \quad t > 0 \quad (4.7)$$

$$u = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{en } x \neq 0, \quad t > 0$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_\infty, \quad \text{en } t = 0, \quad \forall x, y$$

Con el fin de generalizar la solución, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{\nu}{L^2} t$$

$$U = \frac{L}{\nu} u, \quad V = \frac{L}{\nu} v,$$

Caso 1:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0 - T_\infty} \quad (\text{temperatura constante}) \quad (4.8)$$

Caso 2:

$$\theta = \frac{k}{qL} (T - T_\infty) \quad (\text{flujo de calor constante})$$

de modo que, al sustituir en las ecuaciones (4.4) a (4.6) se obtiene la adimensionalización siguiente para ambos casos:

Continuidad:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.9)$$

Momentum:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + Gr \theta \sin \gamma \quad (4.10)$$

Energía:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4.11)$$

donde Gr es el número de Grashoff representado por:

$$\begin{aligned} Gr &= \frac{\beta g (T_0 - T_\infty) L^3}{\nu^2} \quad (\text{temperatura constante}) \\ \text{ó} & \\ Gr &= \frac{\beta g q L^4}{k \nu^2} = Gr^* \quad (\text{flujo de calor constante}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

El número de Grashoff que para el problema es del orden de 10^9 , provoca que el término de flotación en la ecuación de momentum sea mucho mayor que el orden de magnitud de los demás términos, lo cual genera inestabilidad en la solución numérica [1]. Por ello, para eliminar esta inestabilidad se proponen otras variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \text{Ra}^{1/4} \frac{y}{L}, \quad \tau = \left(\frac{\text{Gr}}{\text{Pr}} \right)^{1/2} \frac{v}{L^2} t \quad (4.13)$$

$$U = \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Gr}} \right)^{1/2} \frac{L}{v} u, \quad V = \text{Pr}^{3/4} \text{Gr}^{-1/4} \frac{L}{v} v,$$

Caso 1:

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c} \quad (\text{temperatura constante})$$

Caso 2:

$$\theta = \frac{k}{qL} (T - T_c) \quad (\text{flujo de calor constante})$$

donde Gr está representado por las ecuaciones (4.12).

Al sustituir estas variables en las ecuaciones (4.4) a (4.6), se obtiene también la misma adimensionalización siguiente para temperatura o flujo de calor constantes:

Continuidad:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.14)$$

Momentum:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \text{Pr} \theta \text{sen } \gamma \quad (4.15)$$

Energía:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4.16)$$

Y las condiciones de frontera son ahora:

Caso 1:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \theta = 1, \quad \text{en } Y = 0, \quad \tau > 0 \quad (\text{temperatura constante})$$

Caso 2:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \partial\theta/\partial X = -(Gr^* Pr)^{-1/4} \quad \text{en } Y = 0, \quad \tau > 0 \quad (\text{flujo de calor constante})$$

Ambos:

$$U = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{en } Y \rightarrow \infty, \quad \tau = 0 \quad (4.17)$$

$$U = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{en } X = 0, \quad \tau = 0$$

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{en } \tau = 0, \quad \forall X, Y$$

La solución de las ecuaciones (4.14) a (4.16), constituyen un sistema de ecuaciones acopladas, a través de los términos de flotación y convectivo, que se resolverán usando el método numérico de diferencias finitas.

4.2 Magnitud de los parámetros adimensionales

Las propiedades físicas del aire a temperatura ambiente y presión atmosférica son las utilizadas en el capítulo anterior con un número de Prandtl de 0.71. En el caso de un techo escudo del LES con 10° de inclinación, el calor absorbido por la placa es de aproximadamente 200 W/m², la diferencia de temperaturas entre la cara interior de la pared superior y el fluido es del orden de 1°C, y la longitud L de la placa es de 6.5 m. Entonces, los número de Rayleigh característicos para los casos en que la temperatura de pared es constante y el flujo de calor es constante son, 5.32×10^9 y 2.72×10^{15} , respectivamente.

Por otro lado, en la revisión bibliográfica se ha encontrado reportado por Al-Arabi y Sakr [34] para flujo en capa límite en placas isotérmicas, que el régimen de flujo varía con el ángulo de inclinación, de modo que el rango de transición comienza en un número de Rayleigh crítico local de $6.3 \times 10^8 e^{-4.95\gamma}$ y termina en $1.6 \times 10^9 e^{-3.6\gamma}$, mientras que Vliet [33]

reporta para placas con flujo de calor constante que el número de Rayleigh local para el rango medio de transición, que marca la mitad entre el comienzo y final del régimen, varía también con el ángulo de inclinación de acuerdo a $Ra=3 \times 10^6 e^{10.31\gamma}$ (dado γ en radianes en ambos casos), de modo que al sustituir las propiedades del aire para 10° de inclinación, el rango medio de transición se tiene en números de Rayleigh de 5.60×10^8 y 1.81×10^7 , respectivamente, lo cual significa que los números de Rayleigh característicos del problema sobrepasan el régimen laminar, ubicándose en el régimen turbulento.

Sin embargo, puesto que no se ha desarrollado completamente el problema, y para cumplir con los objetivos establecidos, que consisten principalmente en entender el fenómeno de la convección natural en el canal, se plantea en régimen laminar para establecer un punto de partida.

De ésta manera, para cubrir los rangos establecidos del número de Rayleigh en régimen laminar, se cambiará la longitud característica para cada grado de inclinación hasta la terminación del régimen.

Las inclinaciones utilizadas son de 10, 30, 45, 60 y 90 grados, de modo que, para el caso en que la temperatura de pared es constante, se establece el límite del número de Rayleigh en $Ra/sen\gamma=10^8$ y se obtienen longitudes características de 1, 0.7, 0.6, 0.55 y 0.5 m, respectivamente, mientras que en el caso en que el flujo de calor es constante, para cubrir el régimen laminar establecido por Vliet [33], se eligen longitudes características de 0.25, 0.6, 1.2, 2.4 y 9.2 m, respectivamente.

4.3 Solución Numérica

En esta sección se presenta el método numérico para obtener una solución aproximada del sistema de ecuaciones (4.14) a (4.16) que rigen el comportamiento del fluido.

Debido a que la geometría es simple, se plantea una discretización en diferencias finitas donde el espacio adimensional se selecciona de un tamaño X_{max} , Y_{max} . Este tamaño se divide en $m \times n$ porciones finitas rectangulares y regulares de tamaño adimensional $\Delta X \times \Delta Y$, formandose una red con m divisiones en el eje x ($\Delta X = X_{max}/m$) y n en el eje y ($\Delta Y = Y_{max}/n$).

De esta manera, al discretizar las ecuaciones (4.14) a (4.16) en la formulación explícita de diferencias finitas, que permite una solución directa de las variables y genera una ecuación algebraica con una sola incógnita, se obtienen:

Energía:

$$\frac{\theta_{i,j}^{k+1} - \theta_{i,j}^k}{\Delta \tau} + U_{i,j}^k \frac{\theta_{i,j}^k - \theta_{i-1,j}^k}{\Delta X} + V_{i,j}^k \frac{\theta_{i,j+1}^k - \theta_{i,j}^k}{\Delta Y} = \frac{\theta_{i,j+1}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i,j-1}^k}{\Delta Y^2} \quad (4.18)$$

Momentum:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta \tau} + U_{i,j}^k \frac{U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k}{\Delta X} + V_{i,j}^k \frac{U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k}{\Delta Y} \\ = \text{Pr} \left(\frac{U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{\Delta Y^2} \right) + \text{Pr} \theta_{i,j}^{k+1} \text{sen } \gamma \end{aligned} \quad (4.19)$$

Continuidad:

$$\frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta X} + \frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j}^{k+1}}{\Delta Y} = 0 \quad (4.20)$$

Despejando θ_j^{k+1} de (4.18), $U_{i,j}^{k+1}$ de (4.19) y $V_{i,j}^{k+1}$ de (4.20), que representan las variables para el siguiente paso de tiempo $k+1$, y reorganizando términos se obtienen:

$$\theta_{i,j}^{k+1} = \theta_{i,j}^k - \frac{\Delta\tau}{\Delta X} U_{i,j}^k (\theta_{i,j}^k - \theta_{i-1,j}^k) - \frac{\Delta\tau}{\Delta Y} V_{i,j}^k (\theta_{i,j+1}^k - \theta_{i,j}^k) + \frac{\Delta\tau}{\Delta Y^2} (\theta_{i,j+1}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i,j-1}^k) \quad (4.21)$$

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k - \frac{\Delta\tau}{\Delta X} U_{i,j}^k (U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k) - \frac{\Delta\tau}{\Delta Y} V_{i,j}^k (U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k) + \frac{\text{Pr} \Delta\tau}{\Delta Y^2} (U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k) + \Delta\tau \text{Pr} \theta_{i,j}^{k+1} \text{sen } \gamma \quad (4.22)$$

$$V_{i,j}^{k+1} = V_{i,j+1}^k - \frac{\Delta Y}{\Delta X} (U_{i,j}^{k+1} - U_{i-1,j}^{k+1}) \quad (4.23)$$

Cada una de estas ecuaciones representa una ecuación algebraica, con una sola incógnita, que se resolverá iterativamente siguiendo la secuencia mostrada anteriormente, obteniéndose θ_{ij} , U_{ij} , y V_{ij} para el nuevo paso de tiempo $k+1$.

La ecuación (4.23) de continuidad es universalmente estable, sin embargo, la condición de estabilidad y convergencia para la ecuación de momentum (4.22) y de energía (4.21) es, respectivamente [39]:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta Y^2} \leq 1 \quad (4.24)$$

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta Y^2} \leq \frac{\text{Pr}}{2}$$

De manera que para el aire, con $\text{Pr}=0.71$, la segunda condición es suficiente para la estabilidad y convergencia del sistema de ecuaciones.

La condición de frontera tipo Neumann, para el caso en que el flujo de calor es constante, puede expresarse representando la variación de temperatura por medio de una diferencia finita de tres puntos de segundo orden para cada paso de tiempo como [39]:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} = \frac{3\theta_{i,1} - 4\theta_{i,2} + \theta_{i,3}}{2\Delta Y} = -(Gr^* Pr)^{-1/4} \quad (4.25)$$

de modo que al despejar $\theta_{i,1}$ se obtiene:

$$\theta_{i,1} = \frac{4}{3}\theta_{i,2} - \frac{1}{3}\theta_{i,3} - \frac{2}{3}\Delta Y (Gr^* Pr)^{-1/4} \quad (4.26)$$

Por otro lado, con el fin de tener un parámetro de comparación, se calculan los números de Nusselt en el estado permanente aplicando la definición:

$$Nu_x = -\frac{x}{T - T_w} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

que en función de las variables adimensionales, para temperatura de pared constante se escribe como:

$$Nu_x = \frac{X Ra^{1/4} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}}{1 - \theta_w} = \frac{X Ra^{1/4} \left(\frac{3\theta_{i+1,1} - 2\theta_{i+1,2} + \theta_{i+1,3}}{2\Delta Y} \right)}{1 - \theta_w} \quad (4.27)$$

y para flujo de calor constante como:

$$Nu_x^* = -\frac{X (Ra^*)^{1/4} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}}{\theta_0 - \theta_w} = \frac{X}{\theta_0 - \theta_w} \quad (4.28)$$

siendo θ_0 la temperatura adimensional local de la placa y θ_m la temperatura adimensional local media del fluido calculada mediante la regla de Simpson [40] de:

$$\theta_m = \frac{\int_0^{\partial Ra^{1/4}/L} U \theta dY}{\int_0^{\partial Ra^{1/4}/L} U dY} \quad (4.29)$$

La velocidad local media se calcula también integrando, mediante la regla de Simpson, por la expresión:

$$U_m = \frac{L}{\partial Ra^{1/4}} \int_0^{\partial Ra^{1/4}/L} U dY \quad (4.30)$$

Y el número de Nusselt medio como:

$$Nu_m = \int_0^1 Nu_x dx \quad (4.31)$$

4.4 Procedimiento de Solución

Para resolver las ecuaciones en diferencias finitas (4.21) a (4.23) y calcular los parámetros adimensionales (4.27) a (4.31), se elaboró el software *PLATES* seleccionando un tamaño adimensional de la región del fluido donde se desarrollará la capa límite. Dicho software se encuentra esquematizado en el diagrama de flujo de la figura 4.2. Para obtener un tamaño óptimo de la región de la capa límite se seleccionó inicialmente una relación de aspecto adimensional, del tamaño de la región de fluido, de 1, esto es, $(X_{max} Y_{max})=1$. Al obtener los campos de velocidad y temperatura, y observar el desarrollo y tamaño de la capa límite, se seleccionó otro tamaño hasta lograr una relación de aspecto de 5 para los dos casos en estudio, temperatura constante y flujo de calor constante.

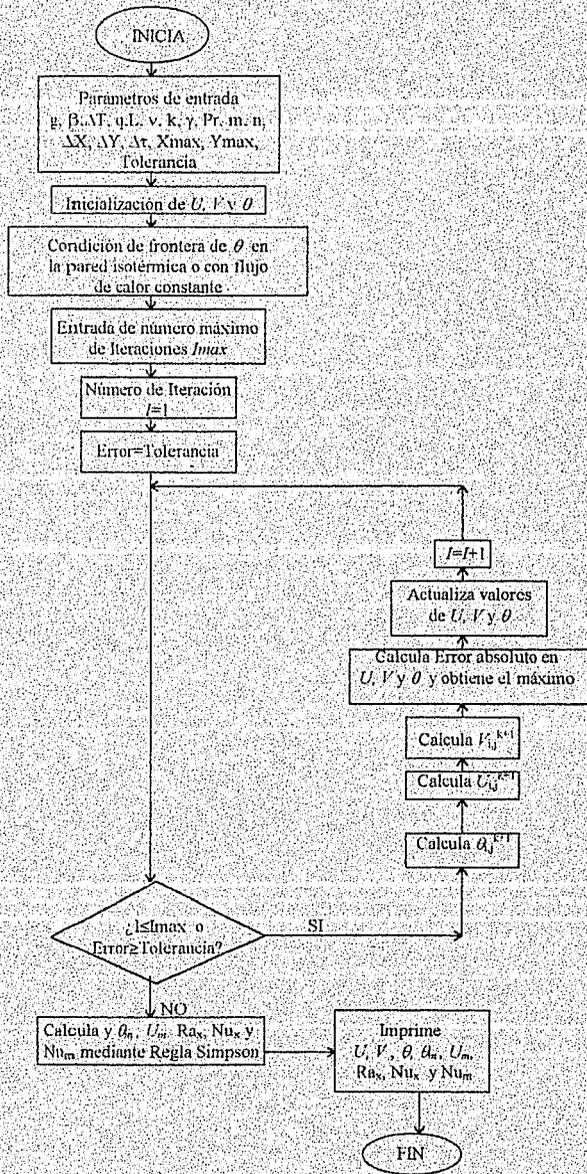


Fig. 4.2 Diagrama de Flujo del Programa PLATES

En la figura 4.2 se muestra como, iterativamente, se calculan los campos de velocidad y temperatura para cada nuevo paso de tiempo adimensional, partiendo de un valor inicial en $\tau=0$. El cálculo continúa hasta un número determinado de iteraciones o hasta llegar al estado permanente bajo una tolerancia determinada. Para ello, se calcula el error máximo absoluto en cada iteración, entre la variable del nuevo paso de tiempo y del paso de tiempo anterior, y se compara con la tolerancia indicada hasta alcanzarla. Se elaboró una subrutina para calcular la temperatura, cada componente de velocidad, y el error en cada iteración. Debido a que la diferencia entre las temperaturas adimensionales de los dos casos en estudio es del orden de 10^{-2} , se eligió una tolerancia de 0.0001 para el caso en que la temperatura de pared es constante, y de 0.00001 para el caso en que el flujo de calor es constante.

Al converger al estado permanente y terminar las iteraciones, se calculan mediante otra subrutina los demás parámetros adimensionales de transferencia de calor como Grashoff, Rayleigh y Nusselt, para lo cual se calcula la temperatura media del fluido en otra subrutina previa. Finalmente, se construyen subrutinas para obtener los resultados de velocidad y temperatura en un archivo con formato para el postprocesador gráfico DISPLAY-POST de NISA-DISPLAY [41-43].

4.5 Independencia de Malla

La influencia del tamaño de la malla se determinó examinando el problema para distintos espaciados entre nodos de acuerdo a los tamaños establecidos de la región del flujo.

Las figuras 4.3 a 4.5 y 4.6 a 4.8 muestran la variación del error relativo porcentual, con la distancia adimensional Y , entre los tamaños de malla de 10×10 , 15×15 , 20×20 , 25×25 y 30×30 subdivisiones, y distancias adimensionales X de 20, 60, y 100. Para lograr la convergencia en todos los casos, se estableció el incremento de tiempo adimensional $\Delta\tau=0.2$.

Como puede observarse, el error entre cada tamaño de malla se obtiene en $X=20$, de modo que el máximo error entre los tamaños 25×25 y 30×30 es menor al 25% en el caso de temperatura de pared constante y menor al 5% en el caso de flujo de calor constante. De esta manera, para predecir perfiles razonables de temperatura y velocidad, se estableció el tamaño adimensional en 30×30 para el caso en que la temperatura de pared es constante, con un incremento de tiempo de 0.2, mientras que para el caso en que el flujo de calor es constante se estableció en 20×20 con un incremento de tiempo de 0.5.

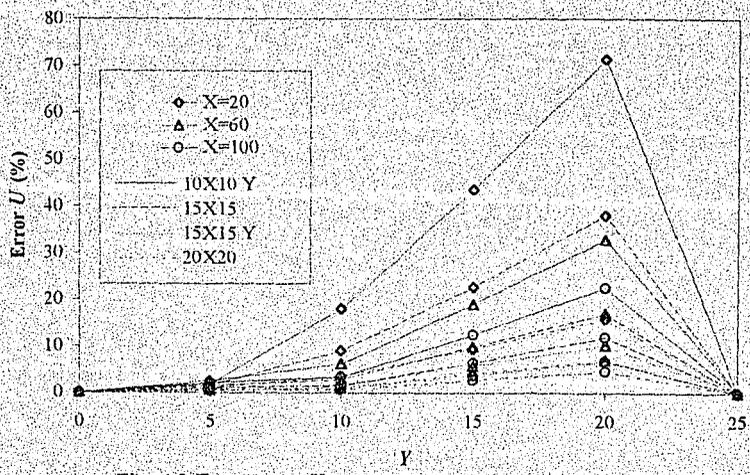


Fig. 4.3 Errores en U entre los distintos espaciados de malla cuando θ de pared es constante

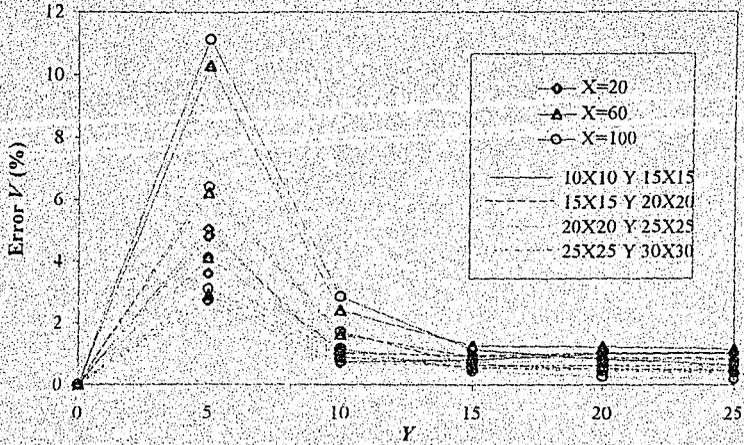


Fig. 4.4 Errores en V entre los distintos espaciados de malla cuando θ de pared es constante

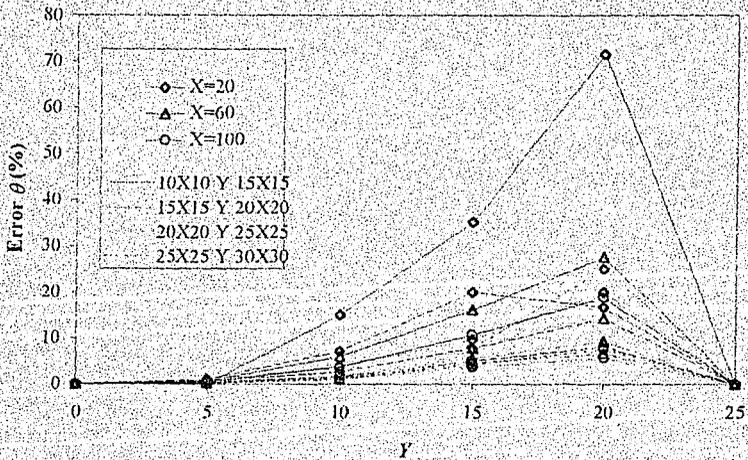


Fig. 4.5 Errores en θ entre los distintos espaciados de malla cuando θ de pared es constante

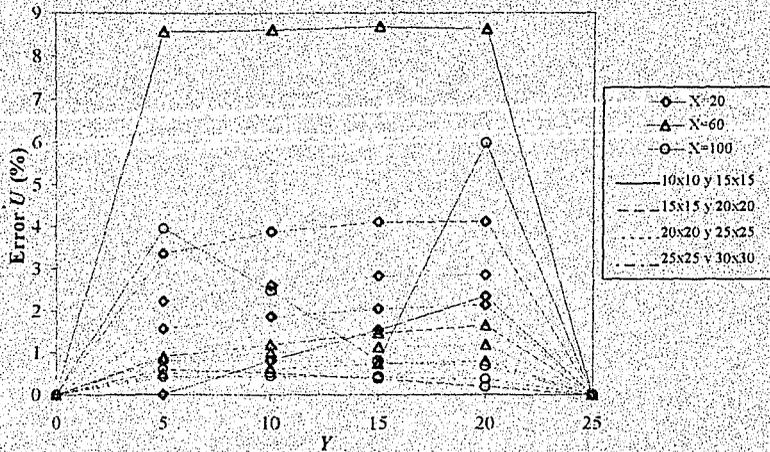


Fig. 4.6 Errores en U para los distintos espaciados de malla cuando el flujo de calor es constante

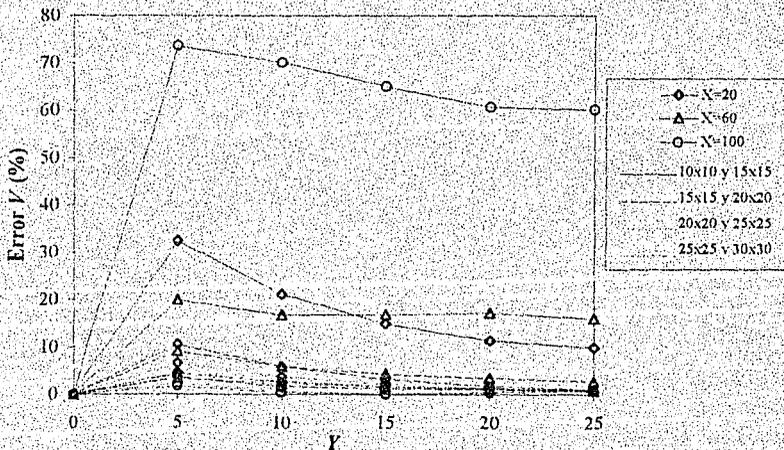


Fig. 4.7 Errores en V entre los distintos espaciados de malla cuando el flujo de calor es constante

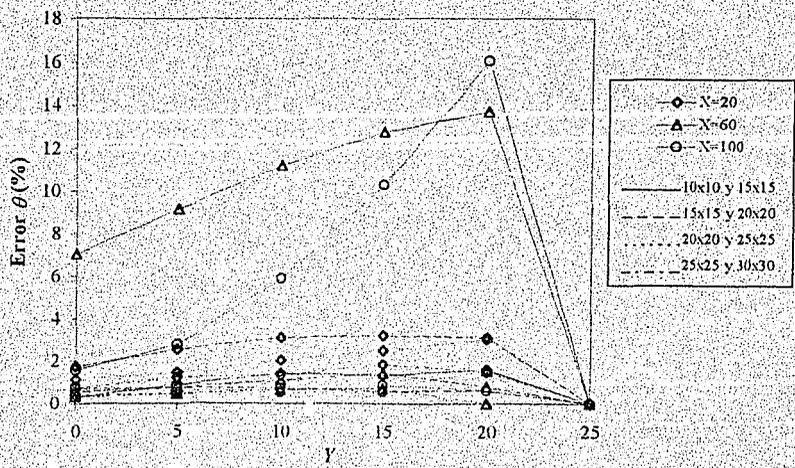


Fig. 4.8 Errores en θ para los distintos espaciados de malla cuando el flujo de calor es constante

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se presentan y discuten los resultados de la solución a las ecuaciones que se desarrollaron en el capítulo anterior que rigen el fenómeno en estudio. Inicialmente se presenta los campos de velocidad y temperatura. Después, se comparan los resultados de velocidad media y temperatura media del modelo bidimensional con los resultados de los modelos unidimensionales. Posteriormente se presentan los parámetros adimensionales calculados, que son relevantes al fenómeno, como Nusselt y Rayleigh. Finalmente se comparan los resultados del caso en que la temperatura de pared es constante con resultados experimentales obtenidos por Al-Arabi y Sakr [34] para placas inclinadas. Así mismo, se comparan los resultados para el caso en que el flujo de calor es constante con las mediciones experimentales realizadas por Vliet [33] para placas inclinadas y con resultados experimentales realizados por Morillón [36] en el caso vertical. Finalmente, se obtiene el coeficiente convectivo local y promedio de transferencia de calor que presenta con buena aproximación el intercambio de calor con el fluido.

5.1 Resultados del Modelo con Temperatura de Pared Constante

Al resolver las ecuaciones descritas en el capítulo anterior, del modelo en capa límite con temperatura de pared constante, para un espacio adimensional de 100×25 unidades y con un tamaño de malla de 30×30 subdivisiones (961 nodos), se obtiene el campo de velocidad y temperatura en estado permanente, con la tolerancia descrita, en $\tau=61.6$ (308 iteraciones) para el incremento de tiempo de 0.2.

Las figuras 5.1 y 5.2 muestran la evolución de los resultados de velocidad y temperatura en una placa vertical (90° de inclinación), donde puede apreciarse como incrementa el espesor de las capas límites hidrodinámica y térmica, hasta alcanzar el estado permanente. El perfil de velocidades muestra como la fuerza cortante disminuye, desde la frontera en contacto con la placa, mientras aumenta la fuerza de flotación, hasta llegar a un máximo de velocidad donde la fuerza de flotación también es máxima. A partir de ahí tanto la fuerza cortante como la fuerza de flotación disminuyen a cero hasta la frontera donde termina la capa límite.

En la figura 5.1(j) puede observarse como, en el estado permanente, el perfil de velocidades crece con la distancia adimensional X debido al calentamiento. Así mismo, en la figura 5.2(j) se muestra, en rango de colores, como crece el espesor de las isotermas características con la distancia adimensional X en el estado permanente.

En las figuras 5.3 y 5.4 se muestra la evolución con el tiempo de las capas límites hidrodinámica y térmica para 90 grados de inclinación en $X=100$. En ellas puede notarse como, debido al calentamiento, crecen ambos perfiles y el espesor de las capas límites con el tiempo. Por otro lado, la figura 5.5 muestra como también crece el perfil de temperaturas con la longitud adimensional X en el estado permanente.

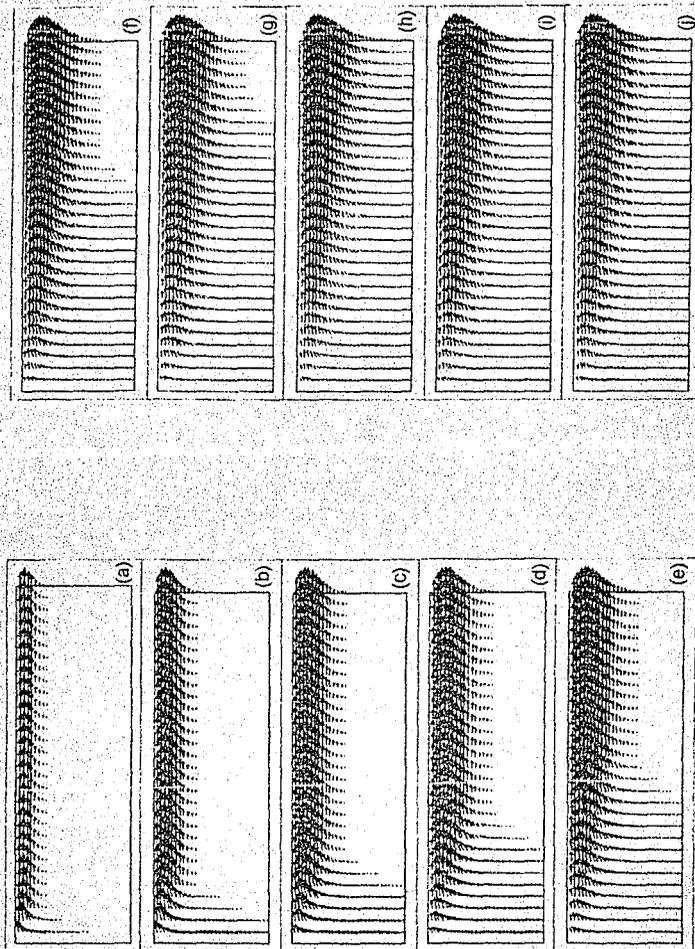


Fig. 5.1. Patrón de flujo en una placa con 90 grados de inclinación para (a) $\tau=4$, (b) $\tau=8$, (c) $\tau=12$, (d) $\tau=16$, (e) $\tau=20$, (f) $\tau=24$, (g) $\tau=28$, (h) $\tau=36$, (i) $\tau=48$, y (j) $\tau=61.6$

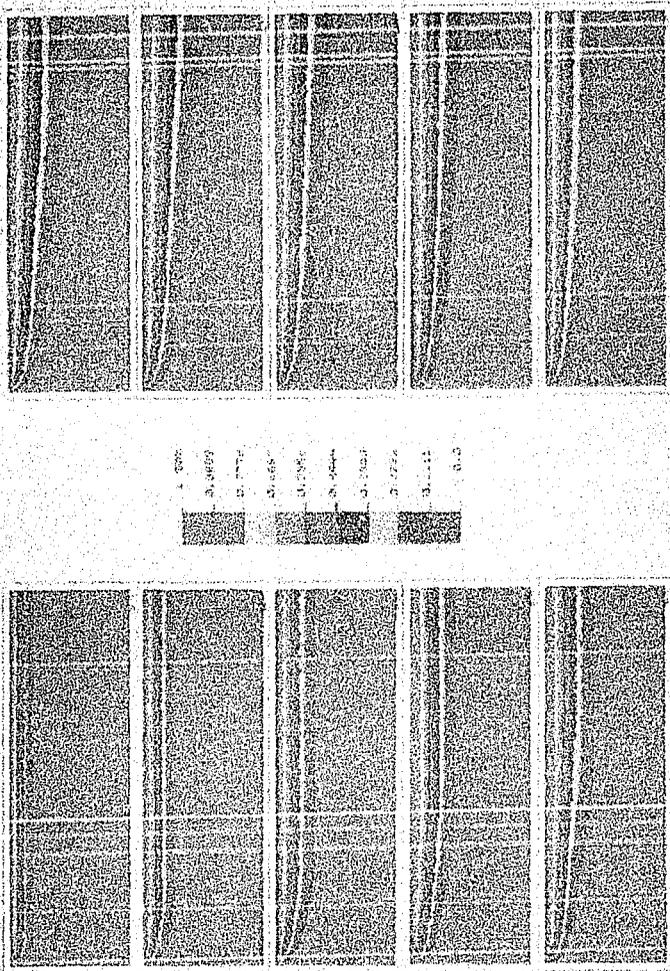


Fig. 5.2 Iso térmicas en una placa con 90 grados de inclinación para (a) $\tau=4$, (b) $\tau=8$, (c) $\tau=12$, (d) $\tau=16$, (e) $\tau=20$, (f) $\tau=24$, (g) $\tau=28$, (h) $\tau=36$, (i) $\tau=48$, y (j) $\tau=61.6$

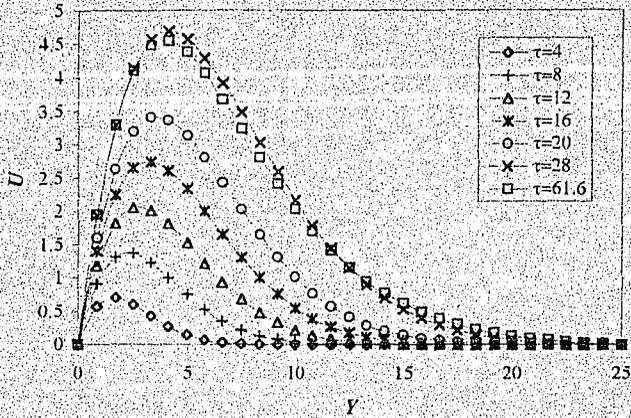


Fig. 5.3 Perfil de velocidades para distintos tiempos adimensionales, con 90° de inclinación, en $X=100$

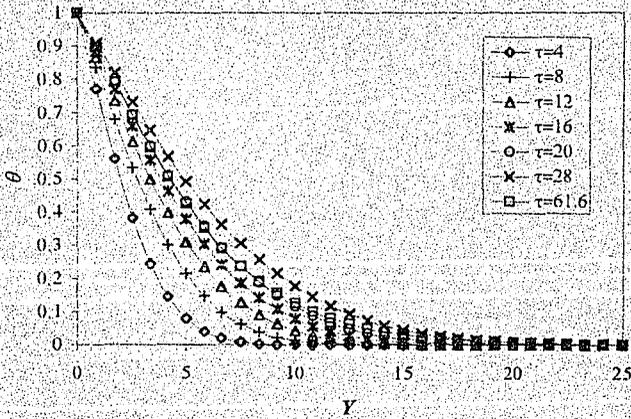


Fig. 5.4 Perfil de temperaturas para distintos tiempos adimensionales, con 90° de inclinación, en $X=100$

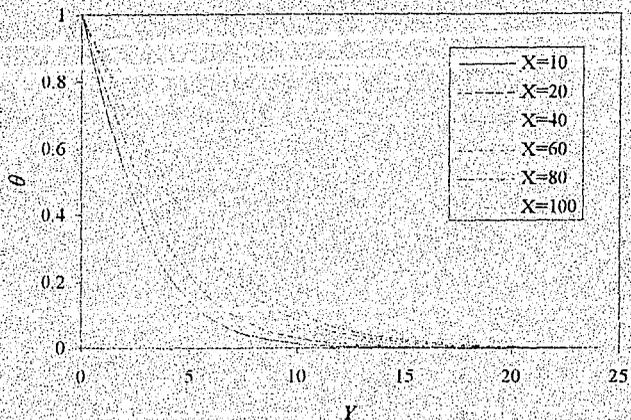


Fig. 5.5 Perfil de temperaturas para distintas longitudes X , con 90° de inclinación, en estado permanente.

La figura 5.6 muestra la dependencia del componente U de velocidad con el ángulo de inclinación para la distancia adimensional $X=100$, donde puede notarse como se acrecienta el movimiento con la inclinación de la placa. Esto se debe a que al aumentar la inclinación, aumenta la componente vertical de la fuerza de flotación. Sin embargo, en la figura 5.7 puede apreciarse como, al dividir la velocidad adimensional entre $\text{sen}^{1/2}\gamma$, el perfil coincide en la misma curva para todas las inclinaciones, lo cual indica que el problema puede generalizarse con la solución para placa vertical.

La figura 5.8 muestra la variación local de la velocidad media a lo largo de la longitud adimensional X para los distintos ángulos de inclinación, donde puede apreciarse como crece el movimiento con la longitud X y con el ángulo de inclinación. La figura 5.9 muestra también como coincide en la misma curva, para todas las inclinaciones, la velocidad local media cuando se divide entre $\text{sen}^{1/2}\gamma$.

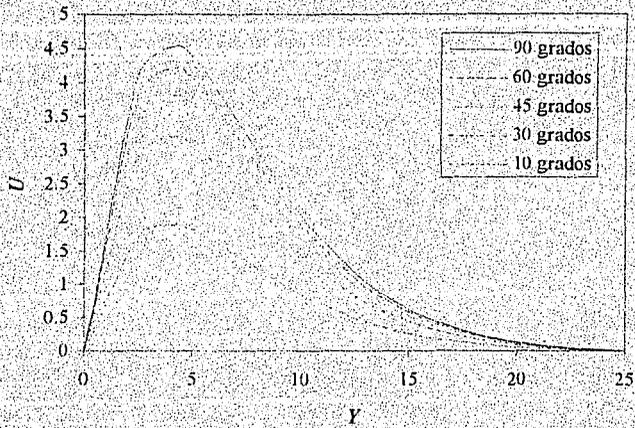


Fig. 5.6 Perfil de velocidades para distintas inclinaciones en $X=100$

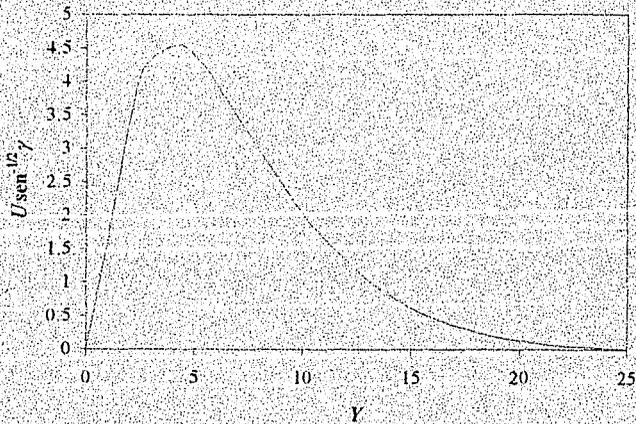


Fig 5.7 Perfil de Velocidades para todas las inclinaciones en $X=100$

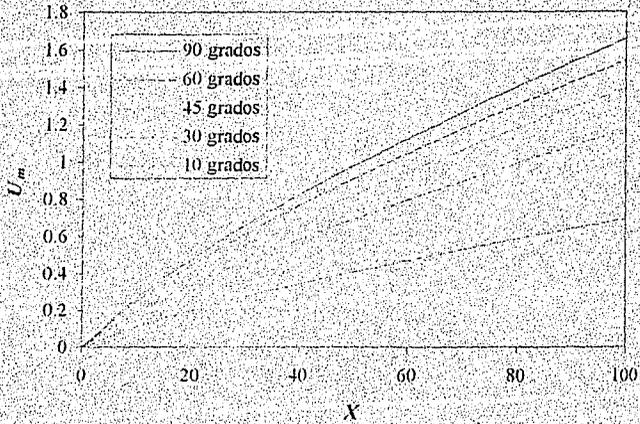


Fig. 5.8 Velocidad local media para distintas inclinaciones.

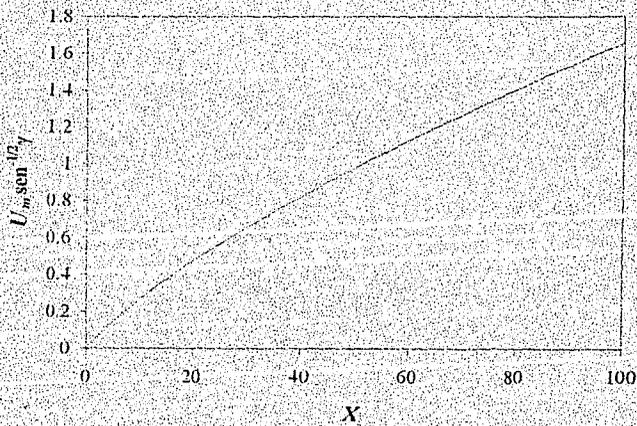


Fig. 5.9 Velocidad local media para todas las inclinaciones.

Al obtener los resultados de temperaturas se observa que el perfil coincide para todas las inclinaciones, de modo que los resultados para todas las inclinaciones quedan representados en las mismas gráficas 5.2, 5.4 y 5.5 para una placa vertical. De igual manera, la figura 5.10 muestra que la variación local de la temperatura media adimensional del fluido coincide para todas las inclinaciones. Esto era predecible debido a que la ecuación de energía adimensional no muestra dependencia de la temperatura con el ángulo de inclinación. En esta figura, puede apreciarse como la temperatura media crece asintóticamente hacia una temperatura adimensional de 0.4.

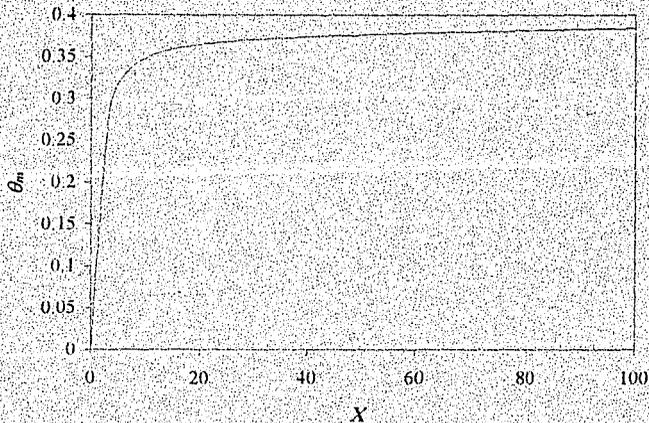


Fig. 5.10 Temperatura local media para todas las inclinaciones.

Si se compara la variación local de la temperatura del fluido del modelo simplificado unidimensional y el modelo bidimensional con 10° de inclinación, mostrados en la figura 5.11, puede notarse una diferencia considerable entre ambas debido a que el modelo unidimensional solo considera el término convectivo en la dirección del flujo y no toma en cuenta la variación en la dirección perpendicular, ni la difusión de calor. Por ello la temperatura del fluido converge más rápidamente a $\theta=1$, mientras que en el modelo bidimensional solo alcanza a llegar a $\theta=0.4$.

Al obtener los resultados de temperaturas se observa que el perfil coincide para todas las inclinaciones, de modo que los resultados para todas las inclinaciones quedan representados en las mismas gráficas 5.2, 5.4 y 5.5 para una placa vertical. De igual manera, la figura 5.10 muestra que la variación local de la temperatura media adimensional del fluido coincide para todas las inclinaciones. Esto era predecible debido a que la ecuación de energía adimensional no muestra dependencia de la temperatura con el ángulo de inclinación. En ésta figura, puede apreciarse como la temperatura media crece asintóticamente hacia una temperatura adimensional de 0.4.

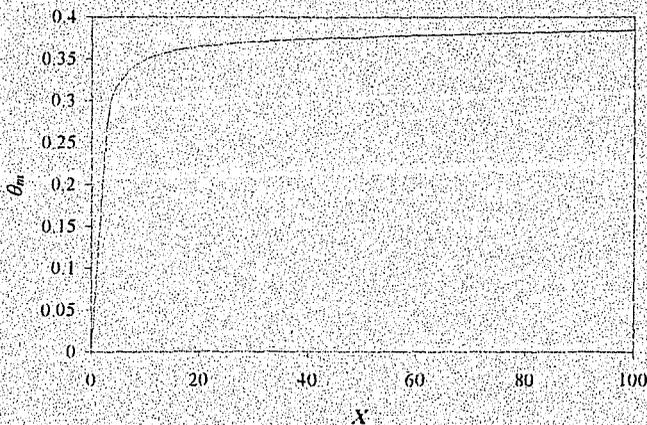


Fig. 5.10 Temperatura local media para todas las inclinaciones.

Si se compara la variación local de la temperatura del fluido del modelo simplificado unidimensional y el modelo bidimensional con 10° de inclinación, mostrados en la figura 5.11, puede notarse una diferencia considerable entre ambas debido a que el modelo unidimensional solo considera el término convectivo en la dirección del flujo y no toma en cuenta la variación en la dirección perpendicular, ni la difusión de calor. Por ello la temperatura del fluido converge más rápidamente a $\theta=1$, mientras que en el modelo bidimensional solo alcanza a llegar a $\theta=0.4$.

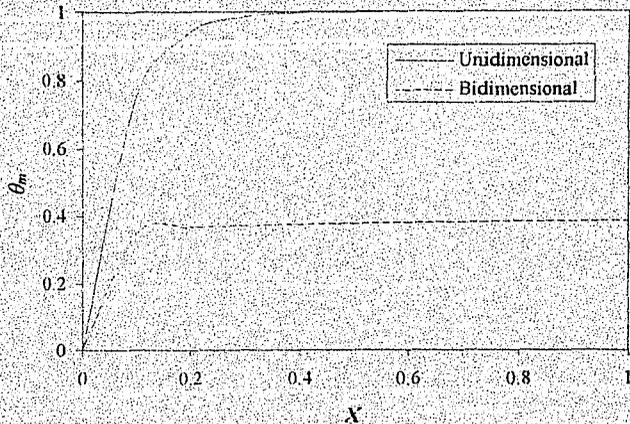


Fig. 5.11 Comparación de la temperatura local media del fluido entre los modelos bidimensional y unidimensional

Por otro lado, las figuras 5.12 y 5.13 muestran la variación local de los números adimensionales de Nusselt y Rayleigh, respectivamente, donde puede apreciarse como ambos parámetros crecen exponencialmente con la longitud y al disminuir el ángulo de inclinación.

La figura 5.14 muestra la variación de ambos parámetros comparados con la correlación obtenida experimentalmente por Al-Arabi y Sakr [34] dada por $Nu_x = 0.39(Ra_x \sin \gamma)^{1/4}$ la cual es válida para números de Rayleigh entre 2×10^4 y $2 \times 10^9 / e^{2.94\gamma}$, siendo γ el ángulo de inclinación en radianes. En esta figura puede apreciarse que los resultados numéricos obtenidos varían de los resultados experimentales, sobre todo en la región de entrada, debido principalmente al tamaño elegido de la malla pues en las pruebas de independencia de malla, los errores mayores, 25% aproximadamente, se encuentran en esa región. Esto acarrea el error al calcular el parámetro adimensional de Nusselt. Sin embargo, aunque éstos resultados numéricos se desvían en la región de entrada, no tenemos un parámetro de

comparación para números menores a 10^4 de modo que, dentro del rango establecido por la correlación mencionada, tenemos errores menores al 12%.

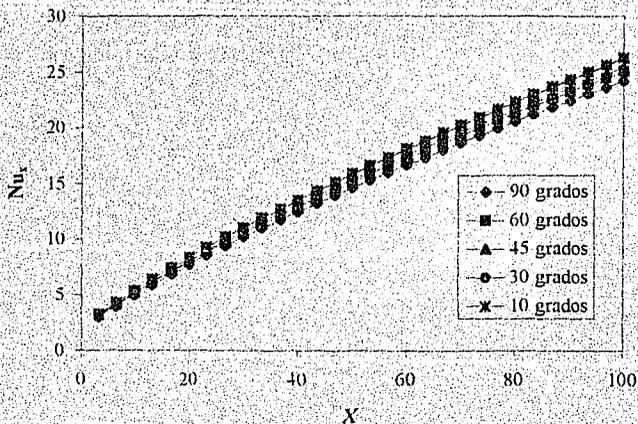


Fig. 5.12 Número de Nusselt local para las distintas inclinaciones

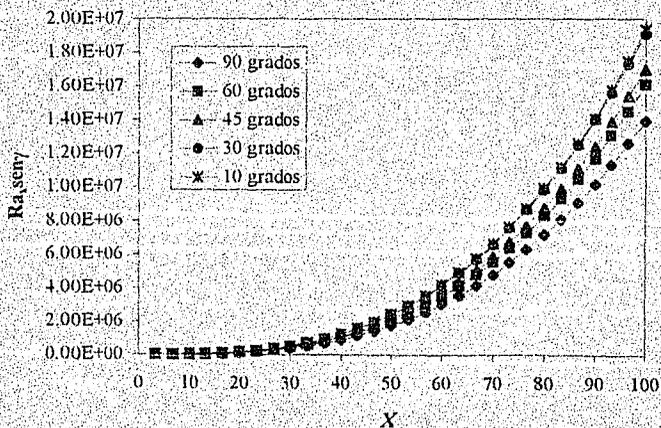


Fig. 5.13 Número de Rayleigh local para las distintas inclinaciones

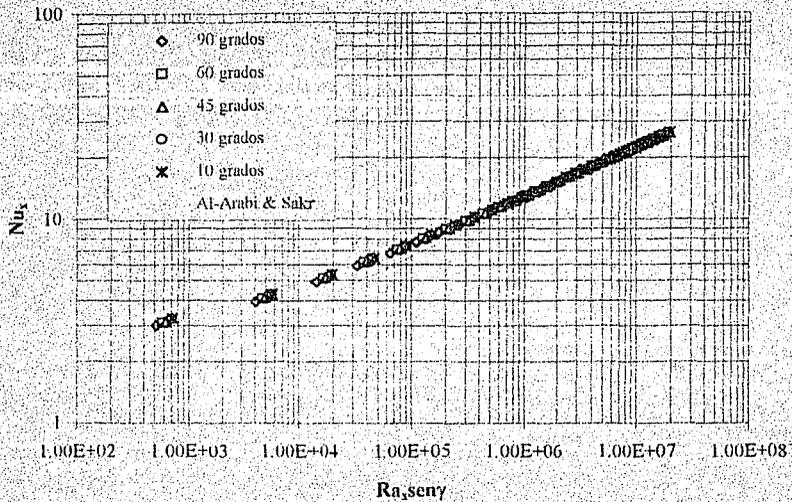


Fig. 5.14 Variación local de Nusselt con Rayleigh

De los resultados obtenidos de los números de Nusselt y Rayleigh locales, se obtiene la siguiente correlación para $4 \times 10^2 \leq Ra_x \leq 2 \times 10^7$

$$Nu_x = 0.63(Ra_x \text{ sen } \gamma)^{0.22} \quad (5.1)$$

Por otro lado, la figura 5.15 muestra la variación del número de Nusselt medio con el número de Rayleigh global, donde puede apreciarse la misma dependencia exponencial de los parámetros locales, de modo que al correlacionarlos se obtiene, para $1.40 \times 10^7 \leq Ra_L \leq 1.94 \times 10^7$, la curva mostrada en dicha gráfica con la ecuación siguiente:

$$Nu_m = 0.23(Ra_L \text{ sen } \gamma)^{0.25} \quad (5.2)$$

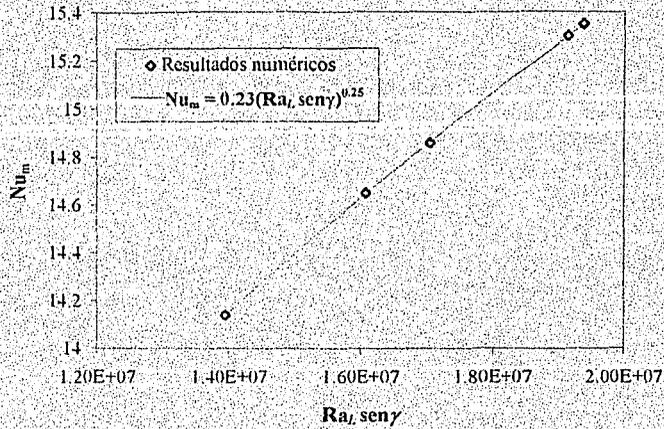


Fig. 5.15 Variación del número de Nusselt medio con Rayleigh global

Los resultados numéricos de éste modelo, no pueden compararse con los resultados experimentales, en estado periódico, obtenidos por Morillón [36] en el caso vertical, debido a que la temperatura de la placa, en el modelo experimental, no es constante.

5.2 Resultados del Modelo con Flujo de Calor Constante

Cuando el flujo de calor en la pared es constante, el tamaño del espacio adimensional es el mismo que en el caso en que la temperatura en la pared es constante, sin embargo, debido a la condición tipo Neumann del flujo de calor, la convergencia es más lenta, alcanzándose el estado permanente, para la tolerancia descrita, en $\tau=292$ (584 iteraciones) con incrementos de tiempo de 0.5 y un tamaño de malla de 20×20 subdivisiones (441 nodos).

La evolución transitoria de las capas límites, hidrodinámica y térmica, en una placa vertical puede apreciarse en las figuras 5.16.1 a 5.16.3 y 5.17.1 a 5.17.3, donde se muestra como aumenta el espesor de ambas capas límites hasta alcanzar el estado permanente. Puede notarse también que las capas límites se desarrollan más rápido que en el caso en que la

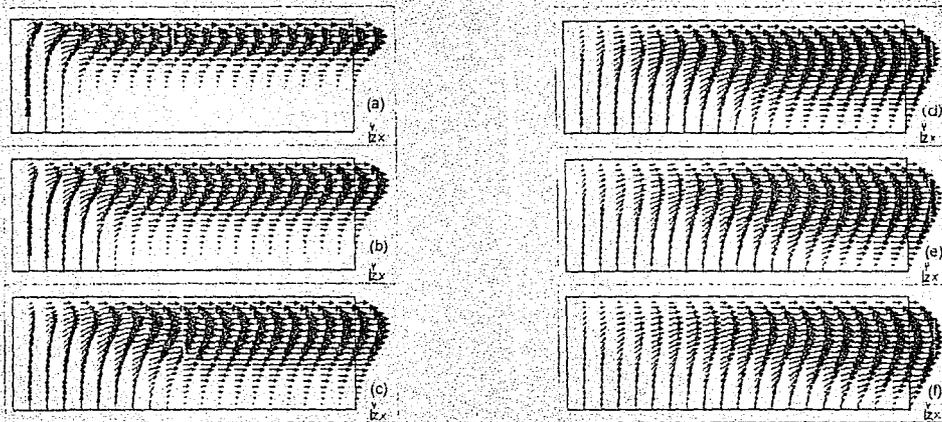


Fig. 5.16.1 Patrón de flujo en una placa con 90 grados de inclinación para (a) $\tau=15$, (b) $\tau=30$, (c) $\tau=45$, (d) $\tau=60$, (e) $\tau=75$ y (f) $\tau=90$

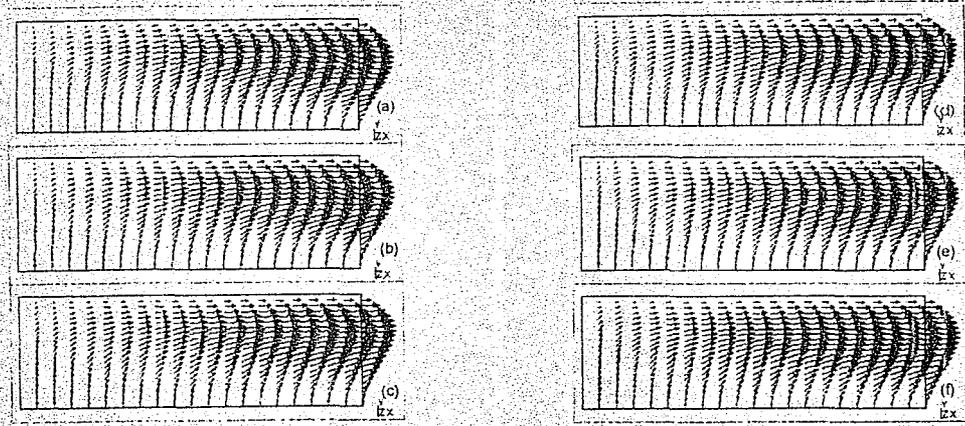


Fig. 5.16.2 Patr3n de flujo en una placa con 90 grados de inclinaci3n para (a) $\tau=105$, (b) $\tau=120$, (c) $\tau=135$, (d) $\tau=150$, (e) $\tau=165$ y (f) $\tau=210$

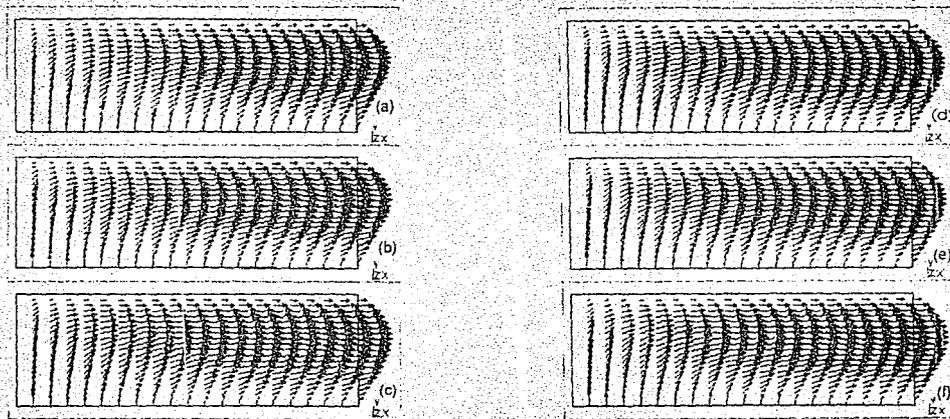


Fig. 5.16.3 Patrón de flujo en una placa con 90 grados de inclinación para (a) $\tau=270$, (b) $\tau=330$, (c) $\tau=450$, (d) $\tau=495$, (e) $\tau=510$ y (f) $\tau=516$

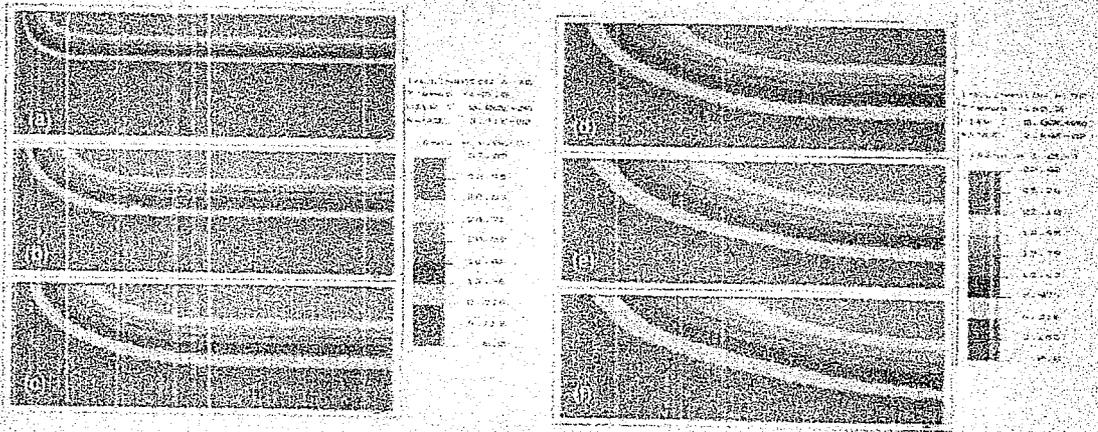


Fig. 5.17.1 Isotérmicas en una placa con 90 grados de inclinación para (a) $\tau=15$, (b) $\tau=30$,
(c) $\tau=45$, (d) $\tau=60$, (e) $\tau=75$ y (f) $\tau=90$

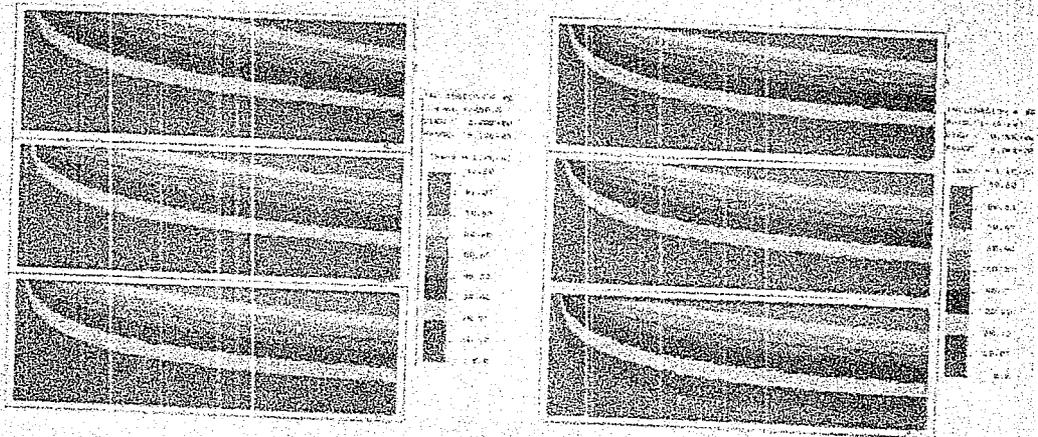


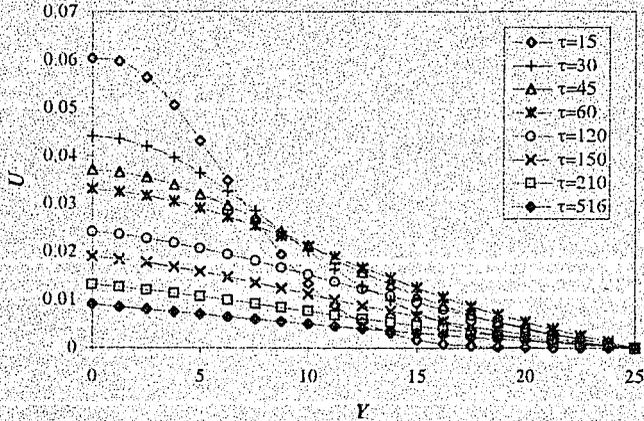
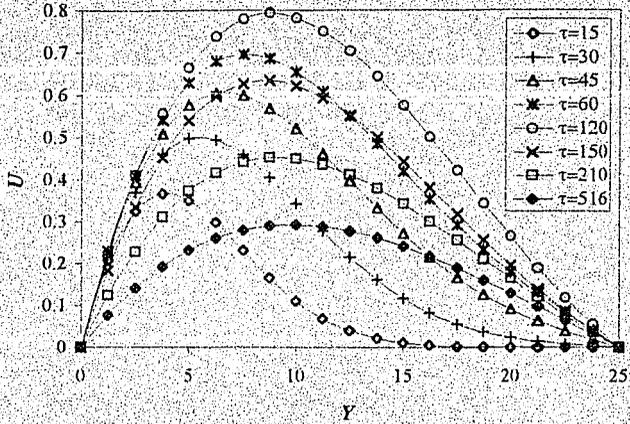
Fig. 5.17.3 Isotérmias en una placa con 90 grados de inclinación para (a) $\tau=270$, (b) $\tau=330$,
 (c) $\tau=450$, (d) $\tau=495$, (e) $\tau=510$ y (f) $\tau=516$

temperatura en la pared es constante, es decir, las longitudes de entrada hidrodinámica y térmica son más pequeñas. En éstas figuras, el comportamiento del perfil de velocidades es similar al caso en que la temperatura de pared es constante donde la fuerza cortante disminuye mientras crece la fuerza de flotación hasta un máximo, y a partir de ahí disminuyen a cero. Sin embargo puede notarse como, a diferencia del caso en que la temperatura en la pared es constante, la temperatura en la pared de la placa cambia.

En la figura 5.16.3(f) puede notarse como, en el estado permanente, el perfil de velocidades crece con la longitud adimensional X debido al calentamiento constante. Así mismo, la figura 5.17.3(f) muestra las isotermas características del modelo en el estado permanente, donde puede apreciarse también como crece el espesor de la capa límite térmica con la longitud adimensional X .

Las figuras 5.18 y 5.19 muestran la evolución con el tiempo de los perfiles de velocidad y temperatura para una placa vertical en $X=100$, hasta el estado permanente en $\tau=516$. En ellas puede apreciarse como crecen los perfiles y espesores de las capas límites debido al calentamiento continuo. En el estado permanente, como puede apreciarse en dichas figuras, los perfiles de velocidad y temperatura son similares a los perfiles en flujo completamente desarrollado, discutidos en el capítulo 3, para un canal inclinado, lo cual indica que ambas capas límites alcanzan este régimen de flujo y se desarrollan más rápido que el caso en que la temperatura en la pared es constante.

Por otro lado, el perfil de temperaturas a distintas longitudes adimensionales X y en el estado permanente puede apreciarse en la figura 5.20, donde se muestra como crece con dicha longitud.



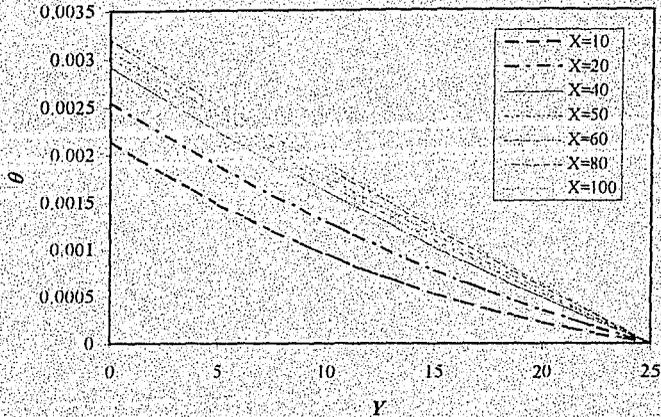


Fig. 5.20 Perfil de temperaturas en estado permanente para distintas X , con 90° de inclinación, cuando el flujo de calor es constante

La dependencia de la velocidad y la temperatura con el ángulo de inclinación es mostrada en las figuras 5.21 y 5.22 para $X=100$ donde se muestra, contrario a lo esperado, como decrecen los perfiles al incrementar el ángulo de inclinación. Esto es debido a la adimensionalización de las variables. La velocidad adimensional depende del número de Grashoff global que es distinto para cada inclinación, y la temperatura adimensional depende de la longitud característica L que también es distinta para cada inclinación, de modo que al obtener ambas variables dimensionalmente, se obtiene que el perfil crece con la inclinación, como se esperaba.

Así mismo, la figura 5.23 muestra la variación local de la velocidad media del fluido para las distintas inclinaciones donde puede apreciarse como crece con la longitud X y decrece, adimensionalmente, con el ángulo de inclinación. Las figuras 5.24 y 5.25 muestran la misma dependencia en las temperaturas locales medias, del fluido y la pared, con la longitud X y la inclinación de la placa, donde también puede apreciarse la diferencia entre ambas temperaturas.

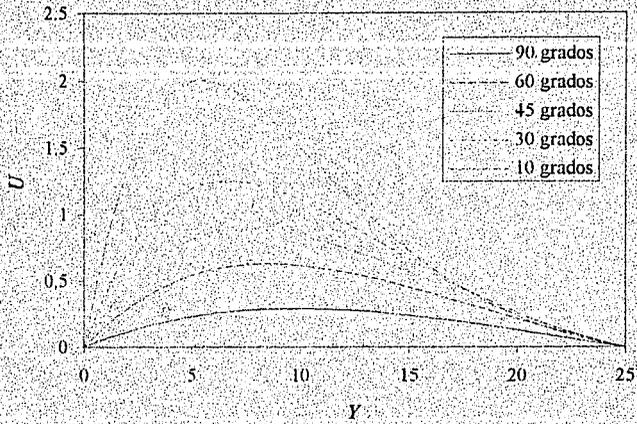


Fig. 5.21 Perfil de velocidades para distintas inclinaciones en $X=100$ cuando el flujo de calor en la pared es constante

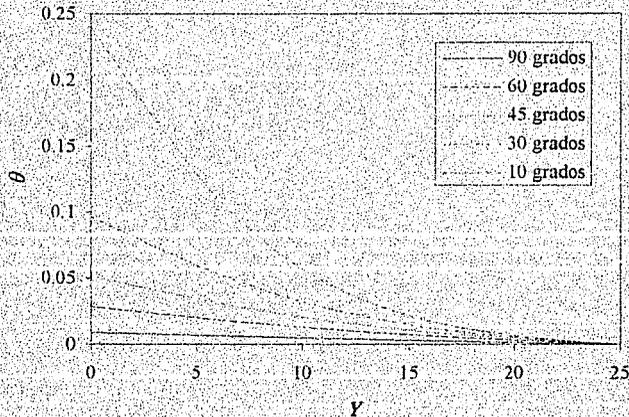


Fig. 5.22 Perfil de temperaturas para distintas inclinaciones en $X=100$ cuando el flujo de calor en la pared es constante

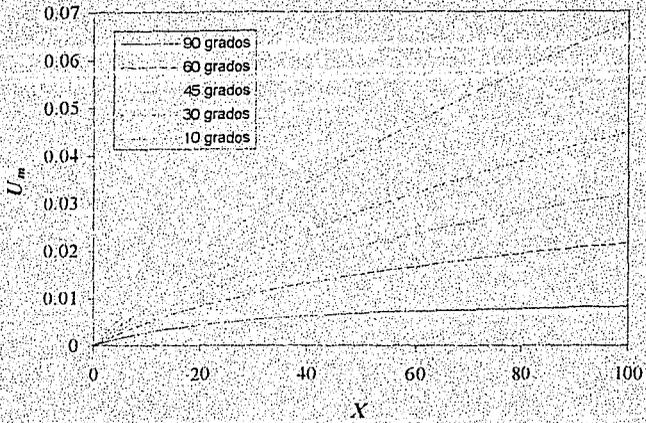


Fig. 5.23 Velocidad local media del fluido, para distintas inclinaciones, cuando el flujo de calor en la pared es constante

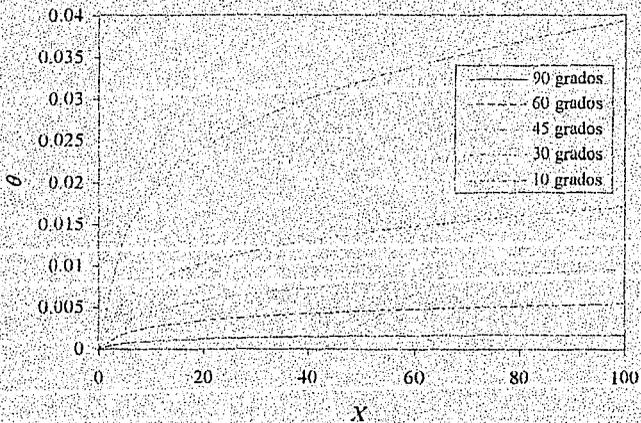


Fig. 5.24 Temperatura local media del fluido, para distintas inclinaciones, cuando el flujo de calor en la pared es constante

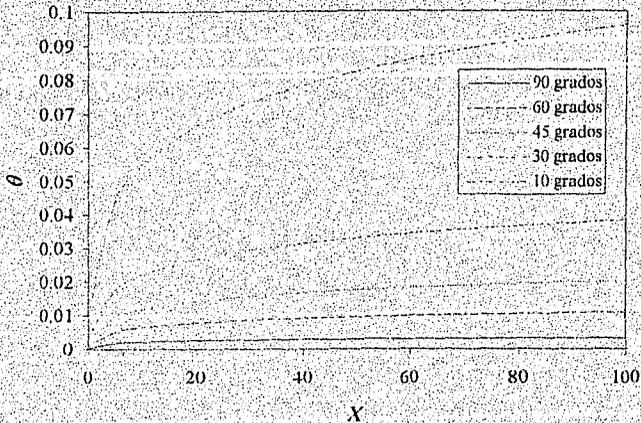


Fig. 5.25 Temperatura local de la pared, para distintas inclinaciones, cuando el flujo de calor en la pared es constante

La comparación entre las temperaturas locales medias del fluido de los modelos unidimensional y bidimensional, para una placa inclinada a 10 grados, se muestra en la figura 5.26. En el modelo unidimensional se observa una dependencia lineal mientras que en el modelo bidimensional se observa una dependencia exponencial donde la temperatura crece asintóticamente. Esto se debe a que el modelo unidimensional no considera, en el balance de fuerzas, los términos de fuerzas de inercia en ambas direcciones ni fuerza viscosa en dirección perpendicular al flujo. Por otro lado, tampoco considera, en el balance de energía, el término convectivo en dirección perpendicular al flujo ni la difusión de calor.

Las figuras 5.27 y 5.28 muestran la variación local de los parámetros adimensionales de Nusselt y Rayleigh, respectivamente, donde puede apreciarse como crecen con la longitud X y con el ángulo de inclinación. Por otro lado, la figura 5.29 muestra ambos parámetros comparados con la correlación obtenida experimentalmente por Vliet [33] para placas inclinadas, dada por $Nu_x = 0.6(Ra_x \sin \gamma)^{1/5}$ y válida para $10^7 \leq Ra_x \leq 3 \times 10^7 e^{10.31 \gamma}$, con γ en

radianes. La diferencia máxima entre ambos trabajos es menor al 11%, lo cual valida la solución.

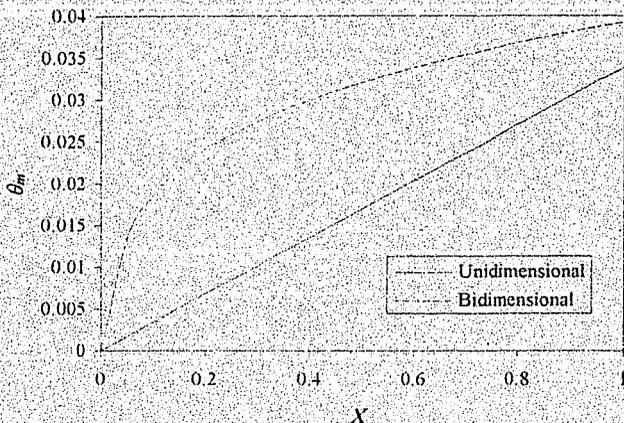


Fig. 5.26 Comparación de la temperatura local media del fluido entre los modelos bidimensional y unidimensional

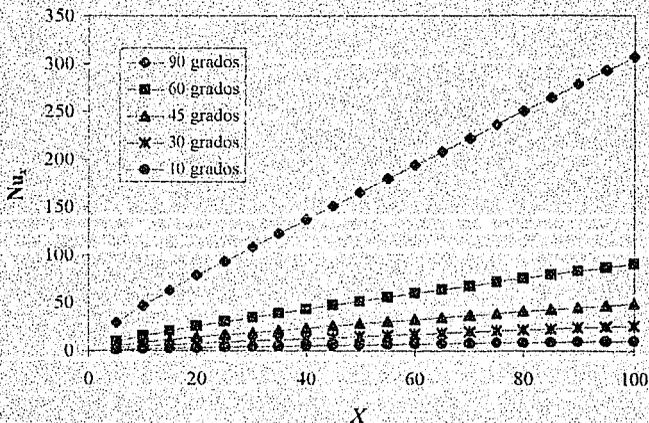


Fig. 5.27 Número de Nusselt local para las distintas inclinaciones, cuando el flujo de calor en la pared es constante

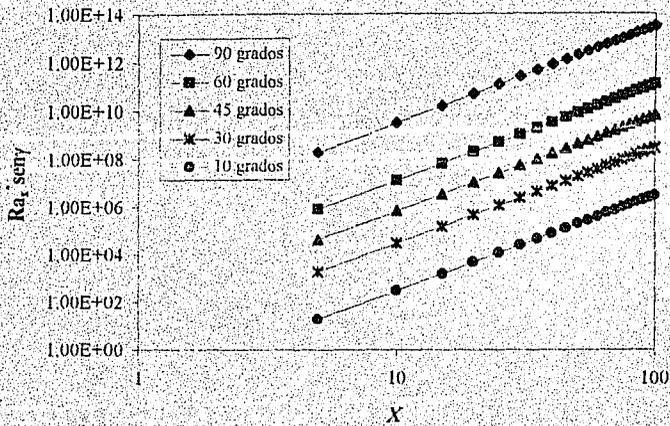


Fig. 5.28 Número de Rayleigh local para las distintas inclinaciones, cuando el flujo de calor en la pared es constante

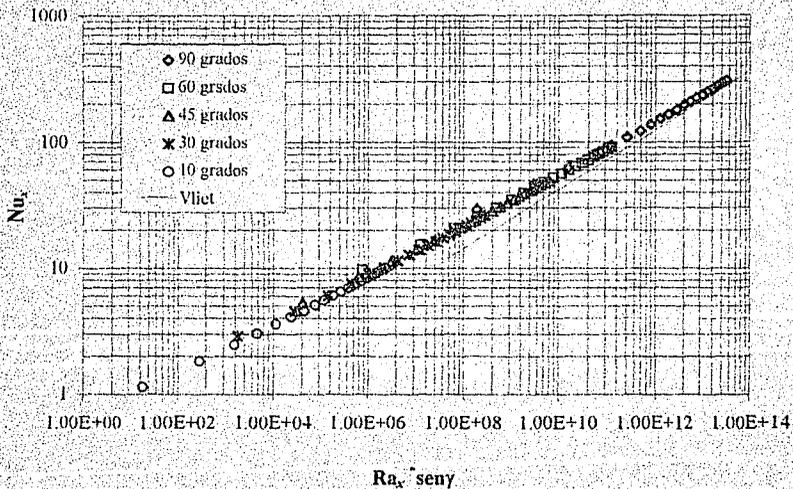


Fig. 5.29 Variación local de Nusselt con Rayleigh, cuando el flujo de calor en la pared es constante

De este modo, si correlacionamos, mediante un ajuste por regresión lineal, los números de Nusselt y Rayleigh locales, se obtiene la siguiente expresión para $10^2 \leq Ra_x^* \text{sen } \gamma \leq 1.2 \times 10^{13}$

$$Nu_x = 0.57(Ra_x^* \text{sen } \gamma)^{0.20} \quad (5.3)$$

Así mismo, si correlacionamos el número de Nusselt medio con el número de Rayleigh global, mostrados en la figura 5.30, se obtiene la siguiente expresión para $3 \times 10^6 \leq Ra_L \text{sen } \gamma \leq 3.1 \times 10^{13}$

$$Nu_m = 0.29(Ra_L^* \text{sen } \gamma)^{0.20} \quad (5.4)$$

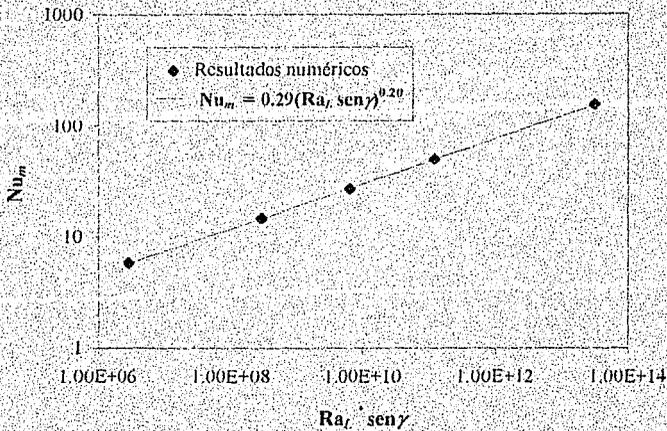


Fig. 5.30 Variación de Nusselt medio con Rayleigh global, cuando el flujo de calor en la pared es constante

Finalmente, la figura 5.31 muestra la comparación de los resultados numéricos con los resultados obtenidos experimentalmente por Morillón [36] para un canal vertical con condiciones de calor y temperatura periódicos. En ella podemos observar que los resultados numéricos concuerdan con los experimentales, obteniéndose errores menores al 5%. Esto

implica que el modelo real de los techos escudo donde las temperaturas de las paredes dependen del tiempo, es posible aproximarlos al modelo de capa límite con flujo de calor constante.

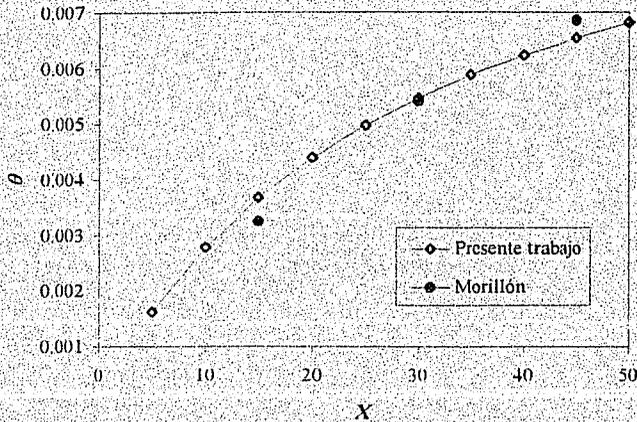


Fig. 5.31 Comparación entre resultados numéricos del presente trabajo con los experimentales de otro autor

Capítulo 6

Conclusiones

El presente trabajo muestra un primer acercamiento al problema de los techos y paredes escudo a la radiación solar y permite conocer y entender el fenómeno de la convección natural en canales y paredes inclinados.

Inicialmente se planteó un modelo unidimensional que permitió un primer acercamiento al problema donde se contempla el movimiento del fluido en zonas alejadas de la entrada con variaciones de velocidad y temperatura en dirección perpendicular al flujo. Se pudo conocer la variación de la velocidad del fluido respecto al ángulo de inclinación del canal, donde puede apreciarse menor movimiento en inclinaciones cercanas a la posición horizontal, de manera que se acrecienta al acercarse a la posición vertical. Esto se debe a la influencia del término de la fuerza de flotación, pues en la posición vertical tiene mayor libertad para el movimiento ascendente, lo cual se rige por el componente vertical de la aceleración de la gravedad.

También se resolvieron dos modelos unidimensionales, donde pudo conocerse también la variación de la temperatura del fluido como respuesta a las condiciones de temperatura constante y flujo de calor constante en la frontera en contacto con la pared superior.

En el primer modelo, con temperatura de pared constante, se conoció el flujo de calor hacia el fluido, mientras que el segundo caso nos permitió conocer la temperatura en la pared. Ambos casos consideran una velocidad del fluido constante a lo largo de toda la longitud de el canal, de manera que se obtienen las variaciones locales en la temperatura considerando solo movimiento convectivo en la dirección del movimiento.

El problema bidimensional en capa límite nos permitió conocer mejor el movimiento del fluido en regiones cercanas a la pared superior del canal, debido a un gradiente pequeño entre la temperatura de la pared y el fluido. Para ello se consideraron también los casos en que la temperatura de pared es constante y el flujo de calor hacia el fluido es constante.

El comportamiento local del problema en que la temperatura de pared es constante es similar al modelo unidimensional. En éste problema puede apreciarse como el ángulo de inclinación influye en el movimiento del fluido debido al componente vertical de la aceleración gravitacional, de modo que el movimiento es mas lento para ángulos de inclinación cercanos a la posición horizontal, acrecentándose en posiciones cercanas a la vertical. Esto implica también que mientras mas lento es el movimiento del fluido, el espesor de la capa límite es menor.

En los resultados puede notarse también que el problema puede reducirse al de capa límite en una placa vertical si en las variables adimensionales el número de Grashoff es elegido como un número de Grashoff modificado que incluye la función seno del ángulo. Los resultados de temperatura no se ven afectados por el ángulo de inclinación. Sin embargo, los demás resultados sí son afectados de modo que si se resuelve el problema para una placa vertical, la velocidad y espesor de capa límite deberán multiplicarse por $\sin^{1/2}$. Los parámetros adimensionales Rayleigh y Nusselt son afectados también por el ángulo de

inclinación de modo que en la correlación entre ambos debe ir el número de Rayleigh modificado. Estos resultados no pueden compararse sin embargo, al problema real donde tanto el flujo de calor como la temperatura varían de forma periódica de modo que la temperatura en la pared del fluido también varía con la longitud y en el tiempo. Por ello se planteó el modelo en que el flujo de calor es constante.

En el modelo en que el flujo de calor es constante, la temperatura de la pared varía con la longitud de la placa, lo cual asemeja más el problema al caso real. En este problema, tanto la velocidad como la temperatura se ven mayormente afectados por el ángulo de inclinación debido a que la condición de frontera establece esta dependencia en la ecuación de energía.

Puede observarse que aunque adimensionalmente el comportamiento del fluido con el ángulo de inclinación no es el esperado -los perfiles de velocidades y temperaturas decrecen al aumentar el ángulo de inclinación-, dimensionalmente se invierte el comportamiento, es decir, el perfil de velocidades y temperaturas crece con la inclinación.

Como se muestra en los resultados, la temperatura en la placa puede compararse con los resultados experimentales, con flujo laminar en estado periódico, obtenidos por Morillón [36] que se asemejan mejor al caso real. Al comparar ambos resultados, se obtiene una variación máxima del 5%, por lo cual, el problema real puede aproximarse al caso de capa límite laminar bidimensional con flujo de calor constante.

En los dos casos de capa límite anteriores, los resultados son validados por resultados experimentales obtenidos por otros autores para placas verticales e inclinadas obteniendo errores menores al 12%, de modo que es válido usar las correlaciones obtenidas para el número adimensional de Nusselt.

Derivado de todo lo anterior, el problema de capa límite laminar bidimensional puede ser útil para modelar el flujo en un canal inclinado que funcione como techo escudo. Sin embargo, al usar las correlaciones del coeficiente convectivo como parámetro para el diseño térmico de

edificios, el sistema pasivo funcionaría óptimamente en condiciones climáticas cercanas al valor promediado de los resultados periódicos. Esto significa que los resultados del presente trabajo engloban los resultados del estado periódico.

Para obtener resultados instantáneos de la variación de la temperatura del fluido, el flujo de calor, o los parámetros de transmisión de calor a lo largo de un periodo, se sugiere resolver el problema con variación periódica de la temperatura ambiente y de el flujo de calor como consecuencia de la radiación solar.

Por otro lado, de acuerdo a las dimensiones de los techos escudo ubicados en el LES, en Temixco Mor., el número de Rayleigh se encuentra dentro del régimen turbulento, por lo cual se sugiere, en estudios posteriores, resolver el problema en este régimen de flujo.

Sin embargo, el problema presentado es útil como primera aproximación, de modo que pueden utilizarse las correlaciones obtenidas para el diseño térmico de edificaciones tendientes a la máxima eficiencia energética con este tipo de estructuras.

Bibliografía

1. Sámano, T., D. A., "Conducción de Calor Bidimensional Conjugada en Estado Periódico en Muros Verticales", Tesis Doctoral DEPMI-UNAM, México, 1989.
2. Sámano, T., D. A., "El Empleo de Elementos Aglomerados con Cemento en la Climatización Natural de Edificios", Revista de IMCYC, Vol. 25, No. 199, pp.41-54, México, 1987.
3. Sámano, T., D. A. y B. Vazquez, "Evaluación de las Casas Sonntlan-Mexicali, Aspectos Térmicos", Reporte Final del Proyecto, Preparado para el I SEDUE bajo contrato No. 85-COO-115-A.2-UH IADE-AE-15.1.3, 273 páginas, Lab. de Energía Solar, I.I.M.-U.N.A.M., Temixco, Mor., 1987.
4. Sámano, T., D. A., B. Vazquez y D. Morales, "Estudio para la Incorporación de Sistemas Pasivos en el Edificio de Gobierno del Instituto Nacional de la Salud", Reporte Final, Desarrollado bajo contrato con COES de la Secretaría de Salud, Lab de Energía Solar I.I.M.-U.N.A.M., 171 páginas, Temixco, Mor., 1988.

5. Lee, T. S., P. G. Parikh, A. Acrivos, and D. Bershader, "Natural Convection in a Vertical Channel with Opposing Buoyancy Forces", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, No. 4, pp. 499-511, 1982.
6. Bar-Cohen A., and Roshenow W. M., "Thermally Optimum Spacing of Vertical, Natural Convection Cooled, Parallel Plates", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 116-123, 1984.
7. Azevedo, L. F. A., and E. M. Sparrow, "Natural Convection in Open-Ended Inclined Channels", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 893-901, 1985.
8. Yamada, Y., "Combined Radiation and Free Convection Heat Transfer in a Vertical Channel with Arbitrary Wall Emissivities", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, No. 2, pp. 429-440., 1988.
9. Hung Y. H. and Shiau W. M., "Local Steady-State Natural Convection Heat Transfer in Vertical Parallel Plates with a Two-dimensional Rectangular Rib", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, No. 6, pp. 1279-1288, 1988.
10. Naito E. and Nagano Y., "The Effect of Bouyancy on Downward and Upward Laminar-Flow Convection in Entrance Region between Inclined-Parallel Plates", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, No. 5, pp. 811-823, 1989.
11. Nelson D. J. and Wood B. D., "Fully Developed Combined Heat and Mass Transfer Natural Convection between Parallel Plates with Asymmetric Boundary Conditions", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, No. 9, pp. 1789-1792, 1989.
12. Ramanathan S. and Kumar R., "Correlations for Natural Convection Between Heated Vertical Plates", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 97-107, 1991.

13. Naylor D., Floryan J. M., and Tarasuk J. D., "A Numerical Study of Developing Free Convection Between Isothermal Vertical Plates", *Trans ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 620-626, 1991.
14. Martin L., Raithby G. D., and Yovanovich M. M., "On the Low Rayleigh Number Asymptote for Natural Convection Through an Isothermal, Parallel-Plate Channel", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 899-905, 1991.
15. Anand N. K., Kim S. H., and Fletcher L. S., "The Effect of Plate Spacing on Free Convection Between Heated Parallel Plates", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 515-518, 1992.
16. Wang C. Y., "Free Convection Between Vertical Plates With Periodic Heat Input", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 508-511, 1988.
17. Yung S. C., and Oetting R. B., "Free-Convection Heat Transfer From an Inclined Heated Flat Plate in Air", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp. 192-194, 1969.
18. Lloyd J. R. and Sparrow E. M., "On the Instability of Natural Convection Flow on Inclined Plates", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 42, Part. 3, pp. 465-470, 1970.
19. Fujii T. and Imura H., "Natural-Convection Heat Transfer From a Plate with Arbitrary Inclination", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 755-767, 1972.
20. Churchill S. W. and Ozoe H., "A Correlation for Laminar Free Convection From a Vertical Plate", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 95, pp. 540-541, 1973.
21. Warneford I. P. and Fussey D. E., "Natural Convection From a Constant-Heat-Flux Inclined Flat Plate", *Fifth International Heat Transfer Conference*, Vol. III, pp. 30-33, Tokyo 1974.

22. Black W. Z. and Norris J. K., "The Thermal Structure of Free Convection Turbulence from Inclined Isothermal Surfaces and its Influence on Heat Transfer", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 43-50, 1975.
23. Shaukatullah H. and Gebhart B., "An Experimental Investigation of Natural Convection Flow on an Inclined Surface", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 1481-1490, 1978.
24. Siebers D. L., Moffatt R. F., and Schwind R. G., "Experimental, Variable Properties Natural Convection From a Large, Vertical, Flat Surface", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 124-132, 1985.
25. Jaluria Y., "Interaction of Natural Convection Wakes Arising From Thermal Sources on a Vertical Surface", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 883-892, 1985.
26. Poulidakos D., "Interaction Between Film Condensation on One Side of a Vertical Wall and Natural Convection on the Other Side", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 560-566, 1986.
27. Chen T. S., Tien H. C., Armaly B. F., "Natural Convection on Horizontal, Inclined, and Vertical Plates with Variable Surface Temperature or Heat Flux", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 1465-1477, 1986.
28. Arnold J. N., Catton I., and Edwards D. K., "Experimental Investigation of Natural Convection in Inclined Rectangular Regions of Differing Aspect Ratios", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 88, pp. 67-71, 1976.
29. Hollands K. G. T., Unny T. E., Raithby G. D., and Konicek L., "Free Convective Heat Transfer Across Inclined Air Layers", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 98, pp. 189-193, 1976.

30. Raithby G. D., Hollands K. G. T., and Unny T. E., "Analysis of Heat Transfer by Natural Convection Across Vertical Fluid Layers", Trans. ASME, J. Heat Transfer, Vol. 99, pp. 287-293, 1977.
31. ElSherbiny S. M., Raithby G. D., and Hollands K. G. T., "Heat Transfer by Natural Convection Across Vertical and Inclined Air Layers", Trans. ASME, J. Heat Transfer, Vol. 104, pp. 96-102, 1982.
32. Schlichting H., "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill Book Company, Seventh Edition, USA, pp. 315-320, 1979.
33. Vliet G. C., "Natural Convection Local Heat Transfer on Constant-Heat-Flux Inclined Surfaces", Trans. ASME, J. Heat Transfer, Vol. 91, pp. 511-516, 1969.
34. Al-Arabi M., and Sakr B., "Natural Convection Heat Transfer from Inclined Isothermal Plates", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, No. 3, pp. 559-566, 1988.
35. Morales D., "Análisis de la Transferencia de Calor por Convección Natural en los Techos Escudo", Tesis Doctoral, Facultad de Arquitectura, UNAM, 1990.
36. Morillón G. D., "Estudio de la Convección Natural Acoplada a un Muro Almacenador de Calor, en Flujo Transitorio", Tesis Doctoral, DEPFI-UNAM, México 1995.
37. Roshenow W. M. and Hartnet J. P. "Handbook of Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, USA, 1973.
38. ASHRAE Handbook, Fundamentals. American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, New York, 1977.

39. Smith G. D., "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods", Second Edition, Oxford University Press, 1978.
40. Swokowski E. W., "Cálculo con Geometría Analítica", Wadsworth Internacional Iberoamérica, pp. 259-261, 1982.
41. EMRC, DISPLAY III, User's Manual, Engineering Mechanics Research Corporation, Michigan, USA, 1991.
42. EMRC, NISA/3D-FLUID, User's Manual, Engineering Mechanics Research Corporation, Michigan, USA, 1991.
43. EMRC, DISPLAY II, DISPLAY-POST User's Manual, Engineering Mechanics Research Corporation, Michigan, USA, 1991.