

00365



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**  
División de Estudios de Posgrado

**Bifurcaciones de Familias Versales de Matrices**

**T E S I S**

Que para obtener el grado Académico de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

**( MATEMATICAS )**

**p r e s e n t a**

**JOSE MATIAS NAVARRO SOZA**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS**

FALLA DE ORIGEN

1995



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la memoria de mi Padre,*

*A mi Madre,*

*A mis Hermanos,*

*A Alicia.*

Expreso aquí mi agradecimiento con mis sinodales, Dr. Santiago López de Medrano, Dr. Fernando Brambila Paz, Dr. Marcelo Aguilar Gonzalez, Dr. Héctor Sánchez Morgado, Dr. Guillermo Sienra Loera y M.C. Manuel Falconi Magaña, por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis, en especial al Dr. Fernando Brambila, por todo el apoyo y confianza que siempre me ha brindado.

Quiero agradecer también al Dr. Eugenio Garnica por sus comentarios y sugerencias tan esclarecedoras y útiles.

A mi Director de Tesis, Dr. Federico Sánchez Bringas, agradezco profundamente su asesoría y dirección, que han resultado invaluable para mi formación. Gracias también por su confianza en mí, y por toda su ayuda administrativa y de apoyo institucional.

Agradezco también a quienes me dieron los primeros cursos de maestría en Mérida, Yuc., Dr. Jesús Muciño, Dr. Omegar Calvo, Dr. Ernesto Rosales, M.C. Ana Irene Ramírez, Dr. Oscar Palma y a Alexis, así como al M.C. Antonio Gómez Ortega por todo el apoyo recibido en esta etapa.

A la Dra. Lilia del Riego, mi eterno agradecimiento por haberme iniciado en la Geometría Diferencial.

Finalmente, doy las gracias al Departamento de Intercambio Académico de la U.N.A.M., pues parte de este trabajo lo hice siendo becario del mismo.

**Bifurcaciones de Familias Versales de Matrices****J. Matías Navarro S.**

## INTRODUCCION

En el estudio de familias de objetos matemáticos que dependen de varios parámetros, se observa que la topología, o el aspecto cualitativo del objeto puede alterarse al cambiar el valor de los parámetros.

Entonces surge lo que se llama una bifurcación. En muchos casos se encuentra que todas las posibles familias ( o deformaciones ) pueden ser obtenidas de una sola, en cierto sentido la más general, que da origen esencialmente a las distintas bifurcaciones del objeto. Esta es llamada una deformación versal.

En [Ar 1], [Ar 2], Arnol'd trata el caso de familias de matrices y encuentra una forma normal a la cual puede reducirse una familia dada. Esta forma normal resulta estable respecto a los parámetros de que depende la matriz, lo que no sucede con la forma normal de Jordan. Además aplica las fórmulas obtenidas en la investigación de los diagramas de bifurcación de familias de matrices genéricas.

En esta tesis desarrollamos en detalle el estudio de las deformaciones versales de matrices y sus diagramas de bifurcación según la línea planteada en [Ar 1]. Explicamos la prueba del Teorema de la Versalidad, el cual establece la equivalencia entre los conceptos de versalidad y transversalidad a la órbita de la matriz, lo que nos permite encontrar fórmulas para deformaciones versales de matrices, así como describir los diagramas de bifurcación correspondientes.

En [Ar 4], Arnol'd establece que una órbita regular ( la cual consiste de todas las matrices que tienen el mismo polinomio característico sin raíces múltiples ) puede equiparse con una estructura simpléctica real natural y plantea, el siguiente problema: ¿Se pueden escoger estructuras simplécticas en las órbitas regulares de manera que la monodromía de la fibración resultante sea simpléctica?

Nosotros abordamos este problema y lo resolvemos para un caso especial ( Ver Sánchez, [Sa] ).

La tesis se compone de 3 capítulos y un apéndice.

En el primer capítulo estudiamos la acción adjunta de un grupo de Lie sobre su álgebra de Lie. Definimos deformación versal y damos ejemplos de familias versales de

matrices. La relación entre el corchete de Lie y la diferencial de la acción adjunta nos permite demostrar el Teorema de la Versalidad.

En el capítulo 2 vemos, como una aplicación a las ecuaciones diferenciales lineales, que la familia de Sylvester es versal.

Determinamos la ortogonalidad a la órbita de una matriz en función del corchete de Lie. Vemos que el complemento ortogonal de la órbita de una matriz es el adjunto de su centralizador.

Esto nos da una fórmula para calcular la codimensión de la órbita de una matriz, que resulta ser igual a la dimensión de una deformación miniversal. Un teorema bien conocido sobre matrices que conmutan y esta fórmula nos permiten construir formas normales de matrices que son deformaciones versales y por lo tanto estables respecto a los parámetros de que depende la matriz.

Concluimos el capítulo con una aplicación de las fórmulas obtenidas para las deformaciones versales en la descripción de los diagramas de bifurcación de familias genéricas de matrices. En el último capítulo se plantea el problema de la monodromía simpléctica y se resuelve para el caso del grupo lineal especial.

En el apéndice presentamos los resultados de la teoría de singularidades y de geometría simpléctica que son útiles en el desarrollo de esta tesis.

## INDICE

## CAPITULO 1. VERSALIDAD Y TRANSVERSALIDAD

- 1.1. Orbitas en el espacio de matrices. 7
- 1.2. Deformaciones versales de matrices. 11
- 1.3. El Teorema de la Versalidad. 16

## CAPITULO 2. LA FORMA NORMAL DE JORDAN-ARNOL'D

- 2.1. La familia de Sylvester. 25
- 2.2. La construcción de deformaciones versales. 32
- 2.3. Diagramas de bifurcación. 42

## CAPITULO 3. EL PROBLEMA DE LA MONODROMIA SIMPLECTICA

- 3.1. La representación coadjunta. 58
- 3.2. La fibración de las órbitas regulares. 60
- 3.3. Monodromía simpléctica de las órbitas regulares. 63

Apéndice 68

Bibliografía 81

## CAPÍTULO 1

## VERSALIDAD Y TRANSVERSALIDAD

En este capítulo se estudia la acción adjunta del grupo lineal general complejo sobre la variedad de las matrices complejas de orden  $n$ . Se define y ejemplifica la versalidad de una familia de matrices y se demuestra la equivalencia entre éste concepto y la transversalidad a las órbitas bajo la acción adjunta.

## 1.1. Órbitas en el espacio de matrices.

Consideremos el conjunto  $M_n(\mathbb{C})$  de todas las matrices  $n \times n$  sobre  $\mathbb{C}$ .  $M_n(\mathbb{C})$  adquiere estructura de variedad diferenciable al identificarla con  $\mathbb{C}^{n^2}$ .

Sea  $GL(n, \mathbb{C})$  el subconjunto de  $M_n(\mathbb{C})$  que consiste de todas las matrices no singulares. Como la función determinante,  $Det: \mathbb{C}^{n^2} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua,  $GL(n, \mathbb{C})$  es el subconjunto abierto de  $\mathbb{C}^{n^2}$ ,  $U = Det^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Por lo tanto  $GL(n, \mathbb{C})$  es una subvariedad de  $M_n(\mathbb{C})$  y como la multiplicación de matrices,  $(X, Y) \rightarrow XY$  y la inversión  $A \rightarrow A^{-1}$  son aplicaciones  $C^\infty$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$  es un grupo de Lie. Se le llama el *grupo lineal general complejo*.

En lo sucesivo denotaremos  $GL(n, \mathbb{C})$  simplemente por  $G$ . Dadas  $a, b \in G$ , las traslaciones izquierda y derecha son las aplicaciones  $C^\infty$  de  $G$  en  $G$  definidas por  $L_a(x) = ax$  y  $R_b(x) = xb$  respectivamente. Tienen inversas  $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ ,  $R_b^{-1} = R_{b^{-1}}$ . Entonces son difeomorfismos que inducen las aplicaciones lineales  $L_{a*}$  y  $R_{b*}$ . En lo que sigue usamos resultados de la Teoría de Grupos de Lie, los cuales se pueden ver, por ejemplo, en Warner [W].

El espacio  $M_n(\mathbb{C})$  con la operación  $[X, Y] = XY - YX$  es isomorfo al espacio  $\mathfrak{g}$  de todos los campos vectoriales invariantes izquierdos de  $G$ , es decir,  $X \in \mathfrak{g}$  implica  $L_{a*}X = X$ .  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie de  $G$  y se denota por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .

Dadas  $a, b \in G$ , la ley asociativa en  $G$  implica que las traslaciones izquierda y derecha conmutan. De esto deducimos que si  $X \in \mathfrak{g}$ , entonces  $R_{b*}X \in \mathfrak{g}$ , pues  $X \in \mathfrak{g}$

implica  $L_{a_n} X = X$ . Por lo tanto

$$L_{a_n}(R_{b_n} X) = L_{a_n} \circ R_{b_n}(X) = R_{b_n} \circ L_{a_n}(X) = R_{b_n} X.$$

Similarmente,  $L_{a_n} R_{a_n^{-1}} X = R_{a_n^{-1}} L_{a_n} X = R_{a_n^{-1}} X \in g$  para toda  $X \in g$ , lo cual nos dice que la aplicación  $I_a : G \rightarrow G$  definida por  $I_a(x) = L_a \circ R_{a^{-1}}(x) = axa^{-1}$  induce la aplicación lineal  $I_{a_n} : G \rightarrow G$ .  $I_{a_n}$  es entonces un automorfismo de  $g$ . Como  $I_{ab} = I_a \circ I_b$  se tiene que  $I_{ab_n} = I_{a_n} \circ I_{b_n}$ .

Entonces la aplicación  $\sigma \mapsto I_{\sigma}$  de  $G$  en  $Aut(g)$  es un homomorfismo.

Se denota  $I_{\sigma}$  por  $Ad_{\sigma}$ . Esto define una representación

$$Ad : G \rightarrow Aut(g), \quad (Ad)(\sigma) = Ad_{\sigma},$$

llamada la representación adjunta de  $G$ .

Como la identidad del grupo  $e$  es un punto fijo de  $I_{\sigma}$ , resulta que  $I_{\sigma}$  transforma el espacio tangente a la identidad,  $T_e G$ , en sí mismo. Esto concuerda con el hecho de ser  $g$  y  $T_e G$  isomorfos.

Además, por ser  $I_{\sigma}$  homomorfismo, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{I_{\sigma}} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ g & \xrightarrow{I_{\sigma_n}} & g \end{array}$$

Recordemos que la aplicación exponencial,  $\exp : g \rightarrow G$ , se define como sigue. Dada  $X \in g$ , sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$  el único homomorfismo  $C^{\infty}$  con  $\frac{d\phi}{dt} \Big|_{t=0} = X$ . Entonces  $\exp(X) = \phi(1)$ .

De (1.1) vemos que para cada  $X \in g$ ,

$$\exp(I_{\sigma_n} X) = \exp(Ad_{\sigma} X) = I_{\sigma}(\exp X) = L_{\sigma} R_{\sigma^{-1}}(\exp X) = \sigma(\exp X) \sigma^{-1}.$$

Para  $X \in g$ ,  $\exp(X) \in GL(n, \mathbb{C})$  está dada por

$$(1.2) \quad \exp(x) = id + X + \frac{1}{2!} X^2 + \dots$$

de manera que

$$\exp(Ad_{\sigma} X) = \sigma \left( id + X + \frac{1}{2!} X^2 + \dots \right) \sigma^{-1}$$

y así,

$$id + Ad_\sigma X + \dots = id + \sigma X \sigma^{-1} + \dots$$

por lo tanto,

$$(1.3) \quad Ad_\sigma X = \sigma X \sigma^{-1} \quad \forall \sigma \in G, X \in \mathfrak{g}.$$

Esto nos define la acción adjunta,  $Ad: G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  por

$$Ad(\sigma, X) = \sigma X \sigma^{-1}.$$

(Hemos hecho abuso de notación con la representación adjunta,  $Ad: G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$ ).

Así,  $Ad(\sigma, X) = Ad_\sigma X$  define dos restricciones:

- 1)  $Ad(\sigma, \cdot): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , que es nuestra anterior  $Ad_\sigma$ .
- 2)  $Ad(\cdot, X): G \rightarrow \mathfrak{g}$ , la cual denotamos por  $(Ad X): G \rightarrow \mathfrak{g}$ ,  $(Ad X)(\sigma) = Ad_\sigma X$ .

Hacemos notar que la imagen de  $G$  bajo esta transformación es

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (Ad X)(G) &= \{Ad_\sigma X \in \mathfrak{g} \mid \sigma \in G\} \\ &= \{\sigma X \sigma^{-1} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \sigma \in G\}, \end{aligned}$$

la clase de las matrices similares a  $X$  en  $M_n(\mathbb{C})$ .

Esta clase de  $M_n(\mathbb{C})$  es la *órbita* de  $X$  bajo la acción adjunta y se denota por  $\mathcal{O}_X$ .

Como  $(Ad X)(e) = X$ , entonces,

$$(1.5) \quad d(Ad X)_e: T_e G \rightarrow T_X \mathcal{O}_X \subset T_X M_n(\mathbb{C}).$$

Notación:

$$d(Ad X)_e(Y) = d(Ad_Y X)_e = ad_Y X.$$

Ahora, si  $Y \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $tY \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\exp(tY) \in G$ , de modo que la composición  $t \mapsto \exp(tY)$  es una función de  $\mathbb{R}$  en  $G$ .

Entonces  $(Ad X)(\exp(tY))$  es una aplicación de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{O}_X$  para toda  $X \in M_n(\mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow G \rightarrow \mathcal{O}_X \subset M_n(\mathbb{C}), \\ t &\mapsto \exp(tY) \mapsto (Ad X)(\exp(tY)), \end{aligned}$$

y como

$$\exp(tY) = id + tY + \frac{1}{2}t^2Y^2 + \dots$$

se tiene que

$$\exp(tY)|_{t=0} = id.$$

Así, bajo estas transformaciones,  $0 \mapsto id \mapsto X$ , de modo que  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tY)) \in T_{id}G$ , y

$$d(Ad X)_{id} \left( \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tY) \right) \in T_xO_x.$$

Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} d(Ad X)_{id} \left( \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tY) \right) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (Ad X) \circ (\exp(tY)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (Ad_{\exp(tY)} X) \end{aligned}$$

y como  $\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tY) = Y$ , resulta que

$$d(Ad X)_{id}(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (Ad_{\exp(tY)} X).$$

Por lo tanto,

$$(1.6) \quad ad_Y X = \frac{d}{dt}|_{t=0} (Ad_{\exp(tY)} X).$$

Esto nos permite probar lo siguiente.

**1.1.1. Proposición.** Para toda  $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$  se tiene que

$$(1.7) \quad ad_Y X = [Y, X].$$

*Prueba:* De (1.3) vemos que

$$\begin{aligned} Ad_{\exp(tY)} X &= (\exp(tY)) X (\exp(tY))^{-1} \\ &= e^{tY} X e^{-tY} \\ &= (id + tY + \dots) X (id - tY + \dots) \\ &= (x + tYX + \dots)(id - tY + \dots) \\ &= (x + tYX + \dots) + (-tXY - t^2YXY - \dots) + o(t^2) \\ &= x + t(YX - XY) + o(t^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (1.6) obtenemos

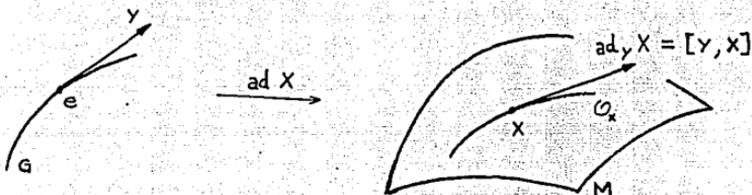
$$\text{ad}_Y X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Ad_{\exp(tY)} X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X + t(YX - XY) + o(t^2))$$

y de ahí que

$$\text{ad}_Y X = YX - XY = [Y, X].$$

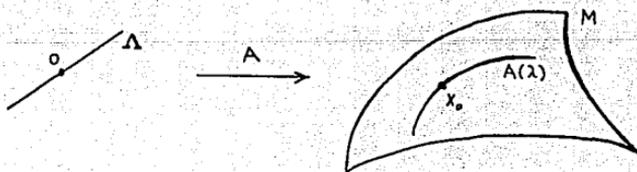
□

Podemos ver entonces que  $[Y, X]$  es, por (1.5), un vector tangente a la órbita de  $X$  "anclado" en  $X$  para cada  $Y \in \mathfrak{g}$ :



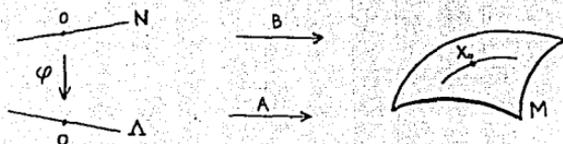
## 1.2. Deformaciones versales de matrices.

**1.2.1. Definición.** Sea  $\Lambda$  una vecindad del origen en  $\mathbb{R}^k$  o  $\mathbb{C}^k$ . Una aplicación diferenciable  $C^\infty$  de  $\Lambda$  en una variedad  $M$ ,  $A : \Lambda \rightarrow M$  será llamada una *familia con espacio base* (o *espacio de parámetros*)  $\Lambda$ . Sea  $X_0 \in M$  fija. Una deformación de  $X_0$  es un germen (ver el apéndice) de una familia  $A : (\Lambda, 0) \rightarrow (M, X_0)$ , con  $A(0) = X_0$ . Denotaremos dicha deformación por  $A(\lambda)$ .



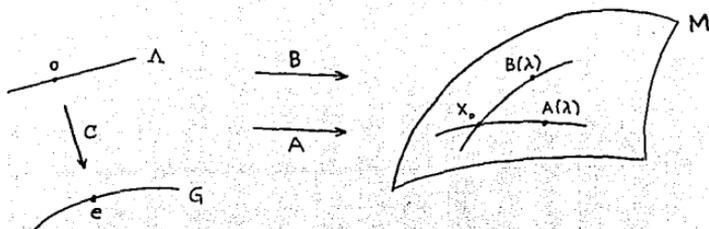
Cuando  $M = \mathbb{C}^n$  y  $\Lambda$  es una vecindad del origen en  $\mathbb{C}^k$ , hablaremos de *familias de matrices*  $A : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^k$ , y de deformaciones  $A(\lambda)$  de una matriz  $A_0 = A(0)$ .

Se dice que la deformación  $B : (N, 0) \rightarrow (M, X_0)$  es *inducida* de la deformación  $A : (\Lambda, 0) \rightarrow (M, X_0)$  por una aplicación suave  $\varphi : (N, 0) \rightarrow (\Lambda, 0)$  si  $B = A \circ \varphi$ :



La aplicación  $\varphi$  se denomina *cambio de base* o *cambio de parámetros*.

Si  $G$  es un grupo de Lie actuando en una variedad  $M$ , decimos que dos deformaciones  $B : (\Lambda, 0) \rightarrow (M, X_0)$  y  $A : (\Lambda, 0) \rightarrow (M, X_0)$  son *equivalentes* si existe una deformación de la identidad  $C : (\Lambda, 0) \rightarrow (G, e)$  tal que " la acción de  $C$  lleva  $A$  en  $B$ ":  $B(\lambda) = C(\lambda)A(\lambda)$ .



**1.2.2. Ejemplo.** Cuando  $G$  es el grupo  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $M = \mathbb{C}^n$ , y la acción es la definida en (1.3) de la sección 1.1 por

$$Ad_{\sigma}X = \sigma X \sigma^{-1} \quad \forall \sigma \in G, m \in M,$$

tenemos que dos deformaciones  $B(\lambda)$  y  $A(\lambda)$  de la matriz  $A_0$  son *equivalentes* si existe una deformación de la identidad  $C : (\Lambda, 0) \rightarrow (G, I)$  tal que

$$B(\lambda) = Ad_{C(\lambda)} A(\lambda)$$

esto es,

$$(2.1) \quad B(\lambda) = C(\lambda) A(\lambda) C^{-1}(\lambda).$$

**1.2.3. Definición.** Decimos que una deformación  $A(\lambda, 0) \rightarrow (M, X_0)$  de  $X_0 \in M$  es *versal* si cualquier otra deformación de  $X_0$  es equivalente a una deformación inducida de  $A$  por un cambio de parámetros  $\varphi$  adecuado.

En nuestro ejemplo 1.2.2, vemos que una deformación  $A(\lambda)$  de una matriz  $A_0 \in \mathbf{C}^{n^2}$  es *versal* si para cualquier otra deformación  $B(\mu)$  de  $A_0$  existe una deformación de la identidad  $C: N \rightarrow G$  tal que  $B(\mu)$  es equivalente a una deformación inducida de  $A(\lambda)$  por un cambio de parámetros  $\varphi$  adecuado:

$$(2.2) \quad B(\mu) = C(\mu) A(\varphi(\mu)) C^{-1}(\mu),$$

Una deformación versal  $A(\lambda)$  se dice *universal* si el cambio de parámetros  $\varphi$  está determinado de manera única por la deformación  $B(\mu)$ .

Si la dimensión del espacio base es la más pequeña posible para una deformación versal, entonces se dice que es una deformación *miniversal*.

**Ejemplo 1.** La deformación  $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$  de  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  es versal.

Tenemos que  $A: \Lambda = \mathbf{C}^4 \rightarrow M = \mathbf{C}^4$  es la identidad en  $\mathbf{C}^4$ . Sea  $B: N \subset \mathbf{C}^k \rightarrow M = \mathbf{C}^4$ , cualquier otra deformación de  $A_0$  definida por

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} \beta_1(\mu) & \beta_2(\mu) \\ \beta_3(\mu) & \beta_4(\mu) \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbf{C}^k.$$

p.d.: existe una deformación de la identidad  $C: N \rightarrow G$  tal que

$$B(\mu) = C(\mu) A(\varphi(\mu)) C^{-1}(\mu)$$

para algún cambio de parámetros adecuado  $\varphi : N \rightarrow \Lambda$ .

Con  $C(\mu) = I$  y  $\varphi(\mu) = (\beta_1(\mu), \dots, \beta_4(\mu)) \quad \forall \mu \in N$ , se obtiene el resultado.

**Ejemplo 2.** La deformación  $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$  de  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  no es versal.

Sea

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$$

otra deformación de  $A_0$ . Si  $A$  fuera versal, existiría una deformación de la identidad  $C$  tal que  $B(\mu) = C(\mu)A(\varphi(\mu))C^{-1}(\mu)$  para algún cambio de base  $\varphi$ .

Escribiendo

$$C(\mu) = \begin{bmatrix} c_1(\mu) & c_2(\mu) \\ c_3(\mu) & c_4(\mu) \end{bmatrix},$$

lo anterior quedaría de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

donde  $\lambda_i$  depende de  $\mu$ .

De esta ecuación matricial se obtienen las ecuaciones:

- (1)  $c_3 = c_1 \lambda_1$
- (2)  $c_1 \mu = c_3 \lambda_1$
- (3)  $c_4 = c_1(1 + \lambda_2) + c_2 \lambda_3$
- (4)  $c_2 \mu = c_3(1 + \lambda_2) + c_4 \lambda_4$

y de ahí que

$$(5) \quad c_3^2 = c_1^2 \mu.$$

Por otro lado,  $c_3(\mu)$  es deformación del 0, de modo que  $c_3(\mu) = k_1 \mu + k_2 \mu^2 + \dots$  para algunas constantes  $k_i$ . Esto implica que  $c_3^2$  debe ser de la forma  $k_1^2 \mu^2 + \dots$ . Pero como  $c_1 = 1 + \dots$  resulta de (5) que  $c_3^2 = (1 + \dots)^2 \mu = \mu + \dots$ , lo cual contradice lo anterior.

**Ejemplo 3.** La deformación  $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  de  $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  es universal.

En efecto, sea

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} 1 + \beta_1(\mu) & \beta_2(\mu) \\ \beta_3(\mu) & \beta_4(\mu) \end{bmatrix}$$

cualquier otra deformación de  $A_0$ .

Entonces  $\beta_i(0) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Veamos que existen  $C(\mu)$  deformación de la identidad y un cambio de parámetros  $\varphi : N \rightarrow \Lambda$ ,  $\varphi(\mu) = (\lambda_1, \lambda_2)$ , con  $\varphi(0) = 0$  determinado de manera única por  $B(\mu)$  tales que

$$(2.3) \quad B(\mu) = C(\mu) A(\varphi(\mu)) C^{-1}(\mu).$$

Si escribimos  $\varphi(\mu) = (\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu))$ , es decir,  $\lambda_1 = \varphi_1(\mu)$ ,  $\lambda_2 = \varphi_2(\mu)$ , y

$$C(\mu) = \begin{bmatrix} 1 + c_1(\mu) & c_2(\mu) \\ c_3(\mu) & 1 + c_4(\mu) \end{bmatrix},$$

la ecuación (2.3) se traduce en

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + c_1 & c_2 \\ c_3 & 1 + c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + c_1 & c_2 \\ c_3 & 1 + c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix},$$

de donde obtenemos las ecuaciones:

$$(1) \quad (1 + \beta_1)(1 + c_1) + \beta_2 c_3 = (1 + c_1)(1 + \varphi_1)$$

$$(2) \quad (1 + \beta_1)c_2 + \beta_2(1 + c_4) = c_2\varphi_2$$

$$(3) \quad \beta_3(1 + c_1) + \beta_4 c_3 = c_3(1 + \varphi_1)$$

$$(4) \quad \beta_3 c_2 + \beta_4(1 + c_4) = (1 + c_4)\varphi_2.$$

Ahora, eliminando  $c_3$  y  $c_1$  de las ecuaciones (1) y (3) se obtiene una ecuación cuadrática para  $\varphi_1$ :

$$(5) \quad \varphi_1^2 + (1 - \beta_4 - \beta_1)\varphi_1 + (\beta_1 - \beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_4) = 0.$$

la cual tiene dos soluciones para  $\varphi_1$  en términos de  $B(\mu)$ . Pero como debemos tener  $\varphi_1(0) = 0$  y esto sólo pasa al tomar la primera raíz de (5), resulta que existe una tal  $\varphi_1$  determinada de manera única por

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \left[ \beta_1 + \beta_4 - 1 + \sqrt{(1 - \beta_1 - \beta_4)^2 - 4(\beta_1 - \beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_4)} \right].$$

Así mismo, de las ecuaciones (2) y (4) al eliminar  $c_2$  y  $c_4$  se encuentra una ecuación cuadrática para  $\varphi_2$  en términos de las antradas de  $B(\mu)$ :

$$(6) \quad \varphi_2^2 - (1 + \beta_1 + \beta_4)\varphi_2 + (\beta_4 + \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3) = 0.$$

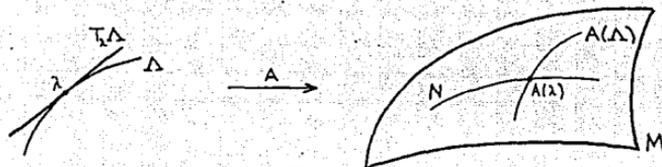
y para tener  $\varphi_2(0) = 0$ , tomamos la segunda raíz de (6), lo cual nos determina  $\varphi_2$  mediante

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \beta_1 + \beta_4 - \sqrt{(1 + \beta_1 + \beta_4) - 4(\beta_4 + \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3)} \right].$$

### 1.3. El Teorema de la Versalidad.

Sean  $N$  una subvariedad de una variedad  $M$  y  $A : \Lambda \rightarrow M$  una función suave de otra variedad  $\Lambda$  en  $M$ , con  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $A(\lambda) \in N$ . La aplicación  $A$  se dice que es *transversal* a  $N$  en  $\lambda$  si el espacio tangente a  $M$  en  $A(\lambda)$  es la suma

$$(3.1) \quad T_{A(\lambda)}M = A_*(T_\lambda\Lambda) + T_{A(\lambda)}N.$$



En lo que sigue denotaremos  $M_n(\mathbb{C})$ , el espacio de las matrices  $n \times n$  sobre  $\mathbb{C}$  simplemente por  $M$ . Como hemos visto,  $M \cong \mathbb{C}^{n^2}$ . Hasta ahora solamente contamos con la definición para ver la versalidad de una familia de matrices. Nuestro siguiente objetivo es probar el teorema de la versalidad, el cual establece una equivalencia entre los conceptos de versalidad y transversalidad a las órbitas de la acción adjunta.

Esto nos permitirá en el caso de la familia de Silvester ver la versalidad de la familia a través de la transversalidad, así como también nos resultará una herramienta útil en la construcción de deformaciones versales de familias de matrices, lo que nos provee de una forma normal para matrices que resulta estable respecto a los parámetros de que depende la matriz, lo que no ocurre con la forma normal clásica de Jordan.

Para esto vemos primero que si una deformación es versal entonces es transversal.

**1.3.1. Proposición.** *Si una deformación  $A(\lambda)$  de la matriz  $A_0$  es versal, entonces la aplicación  $A : \Lambda \rightarrow M$  es transversal a la órbita de  $A_0$  en  $\lambda = 0$ .*

*Prueba:* Sean  $A : \Lambda \subset \mathbb{C}^l \rightarrow M$  una deformación versal, y  $B : N \subset \mathbb{C}^m \rightarrow M$  cualquier otra deformación de  $A_0$ , que denotamos por  $A(\lambda)$  y  $B(\mu)$  respectivamente.

Entonces existen  $\varphi : N \rightarrow \Lambda$  un cambio de parámetros con  $\varphi(0) = 0$  y  $C : N \rightarrow G = GL(n, \mathbb{C}) \subset M$  deformación de la identidad  $I$  de  $M$  tales que

$$B(\mu) = C(\mu) A(\varphi(\mu)) C^{-1}(\mu).$$

De aquí, aplicando las reglas de Leibnitz y de la cadena,

$$B_*(\mu) = C_*(\mu) A(\varphi(\mu)) C^{-1}(\mu) + C(\mu) A_*(\varphi(\mu)) \varphi_*(\mu) C^{-1}(\mu) + C(\mu) A(\varphi(\mu)) C_*^{-1}(\mu),$$

y evaluando en  $\mu = 0$ , obtenemos

$$B_*(0) = C_*(0) A(0) C^{-1}(0) + C(0) A_*(0) \varphi_*(0) C^{-1}(0) + C(0) A(0) C_*^{-1}(0),$$

y como  $C(0) = I$ ,

$$B_{*0} = C_{*0} A_0 + A_{*0} \varphi_{*0} + A_0 C_{*0}^{-1}.$$

Por otro lado,  $C_{*0}^{-1} = -C_{*0}$ , pues como  $C(\mu) C^{-1}(\mu) = I$ , se tiene que

$$C_*(\mu) C^{-1}(\mu) + C(\mu) C_*^{-1}(\mu) = 0, \text{ esto es,}$$

$$C_*(\mu) [C^{-1}(0) + o(\mu)] + [C(0) + o(\mu)] C_*^{-1}(\mu) = 0,$$

$$C_*(\mu) + C_*^{-1}(\mu) + o(\mu) = 0,$$

$$C_*^{-1}(\mu) = -C_*(\mu) + o(\mu).$$

Entonces  $B_{*0} = A_{*0} \varphi_{*0} + C_{*0} A_0 - A_0 C_{*0}$ , por lo tanto

$$(3.2) \quad B_{*0} = A_{*0} \varphi_{*0} + [C_{*0}, A_0].$$

Analicemos ahora las transformaciones involucradas en (3.2).  $B : N \rightarrow M$ , tiene la diferencial  $B_{*0} : T_0 N \rightarrow T_{A_0} M$  de modo que para cualquier vector tangente  $\xi \in T_0 N$ ;  $B_{*0} \xi$  es un vector tangente a  $M$  en  $A_0$ , y es arbitrario, pues  $B(\mu)$  es cualquier deformación de  $A_0$ .

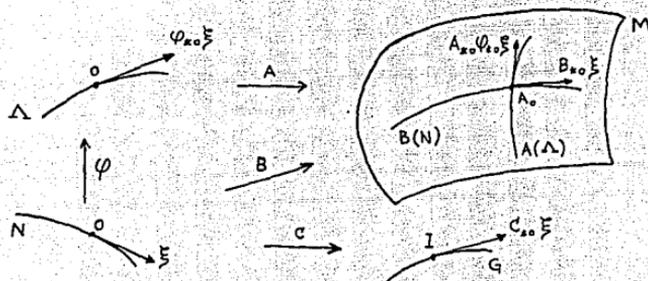
Además,  $A : \Lambda \rightarrow M$  tiene la diferencial  $A_{*0} : T_0\Lambda \rightarrow T_{A_0}M$ , y  $\varphi : N \rightarrow \Lambda$  manda el 0 en el 0, de modo que  $\varphi_{*0}$  transforma  $T_0N$  en  $T_0\Lambda$ . Entonces  $A_{*0}\varphi_{*0}\xi$  es un vector de  $A_*(T_0\Lambda)$ .

Ahora, de la ec. (3.2), vemos que  $\forall \xi \in T_0N$ ,  $B_{*0}\xi = A_{*0}\varphi_{*0}\xi + [C_{*0}, A_0]\xi$ .

De ahí que cualquier vector tangente de  $T_{A_0}M$  es la suma de un vector en  $A_*(T_0\Lambda)$  mas un vector de la forma  $[C_{*0}, A_0]\xi$ .

Para obtener la transversalidad de la aplicación  $A$  a la órbita de  $A_0$  resta ver que  $[C_{*0}, A_0]\xi$  es un vector del espacio tangente a la órbita,  $T_{A_0}\mathcal{O}_{A_0}$ .

Con esto en la mira puntualizamos que, como  $C(\mu)$  es deformación de la identidad y tiene inversa, resulta ser una aplicación del espacio de parámetros  $N$  en el grupo  $G$ . De manera que la diferencial  $C_{*0}$  transforma  $T_0N$  en  $T_1G$ . Por lo tanto, para todo  $\xi \in T_0N$ ,  $C_{*0}\xi \in T_1G \simeq g$ .



Por la proposición 1.1.1,  $[C_{*0}\xi, A_0] = ad_{C_{*0}\xi}A_0$  es un vector tangente a la órbita de  $A_0$ , en  $A_0$ . Ahora, al aplicar  $[C_{*0}, A_0]$  al vector  $\xi \in T_0N$ , se tiene que, según veremos enseguida,  $[C_{*0}, A_0]\xi = [C_{*0}\xi, A_0]$ .

La composición  $N \rightarrow G \rightarrow \mathcal{O}_{A_0}$  definida por  $\mu \mapsto C(\mu) \mapsto Ad_{C(\mu)}A_0$  se puede escribir  $(Ad A_0) \circ C : N \rightarrow \mathcal{O}_{A_0}$ , pues  $(Ad A_0) \circ C(\mu) = Ad_{C(\mu)}A_0$ .

Por otra parte,  $C(0) = I$ , y  $Ad_{C(0)}A_0 = A_0$ , así que la diferencial  $d[(Ad A_0) \circ C]_0$  transforma  $T_0N$  en  $T_{A_0}\mathcal{O}_{A_0}$ .

Ahora,

$$\begin{aligned}
 [C_{\infty}, A_0]\xi &= (ad_{C_{\infty}A_0})(\xi) \\
 &= (d(Ad_{C_{\infty}A_0}))(\xi) \\
 &= [d(Ad A_0)_I(C_{\infty})](\xi) \\
 &= d(Ad A_0)_I(C_{\infty}\xi) \\
 &= d(Ad_{C_{\infty}\xi}A_0)_I \\
 &= ad_{C_{\infty}\xi}A_0 \\
 &= [C_{\infty}\xi, A_0]. \quad \square
 \end{aligned}$$

Veamos ahora que transversalidad implica versalidad.

**1.3.2. Proposición.** *Si la aplicación  $A: \Lambda \rightarrow M$  es transversal a la órbita de  $A_0$  en  $\lambda = 0$ , entonces la deformación  $A(\lambda)$  es versal.*

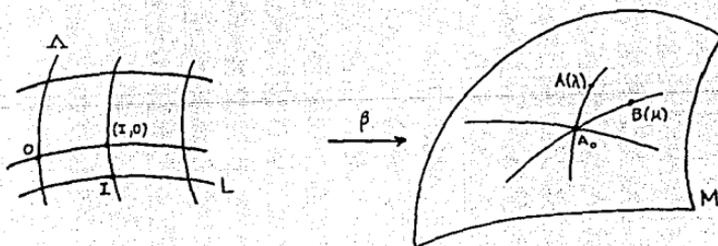
La idea de la prueba es la siguiente. Ver que existe una vecindad de  $A_0$  en  $M$  difeomorfa a una vecindad del producto  $L \times \Lambda$ , donde  $\Lambda$  es la base de la deformación  $A(\lambda)$  y  $L$  será una subvariedad de  $G$  transversal al subgrupo estabilizador  $H$  de  $A_0$  (es decir, el subgrupo formado por los elementos del grupo que dejan invariante  $A_0$  bajo la conjugación:  $g^{-1}A_0g = A_0$ ). El difeomorfismo estará definido mediante la acción adjunta:

$$\beta: L \times \Lambda \rightarrow M, \quad \beta(l, \lambda) = Ad_l A(\lambda).$$

Así, toda deformación  $B(\mu)$ , para  $\mu$  suficientemente pequeño, tendrá una representación única bajo este difeomorfismo de la forma

$$B(\mu) = Ad_{C(\mu)} A(\varphi(\mu)),$$

y de ahí la versalidad.



Sea  $H$  el subgrupo estabilizador de  $A_o$  :

$$(3.3) \quad H = \{g \in G \mid gA_o = A_o g\}.$$

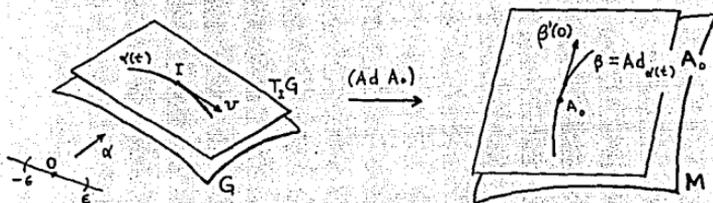
Para todo  $g \in H$  se tiene que  $Ad_g A_o = A_o$ , esto es,  $Ad_H A_o = \{A_o\}$ .

Para probar la proposición 1.3.2 necesitamos el siguiente lema.

1.3.3. Lema. El Kernel de  $d(Ad A_o)_I$  es el espacio tangente  $T_I H$ .

Prueba: Sean  $v \in T_I H$  y  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow H$  una curva con  $\alpha(0) = I$ ,  $\alpha'(0) = v$ .

Sea  $\beta = (Ad A_o) \circ \alpha$ .



Entonces

$$d(Ad A_o)_I(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \beta(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Ad_{\alpha(t)} A_o = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha(t) A_o [\alpha(t)]^{-1},$$

pero  $\alpha(t) \in H$ , por lo tanto  $d(Ad A_o)_I(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A_o = 0$ .

Así,  $v \in \text{Ker } d(Ad A_o)_I$ .

Tomamos ahora  $v \in \text{Ker } d(Ad A_o)_I$ . Como  $v \in T_I G$ , existe  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$  tal que  $\alpha(0) = I$ ,  $\alpha'(0) = v$ .

Sea  $\beta = (Ad A_o) \circ \alpha$ . Tenemos que  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \beta(t) = d(Ad A_o)_I(v)$ , de modo que  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \beta(t) = 0$ . De ahí que  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Ad_{\alpha(t)} A_o = 0$ , lo cual implica que  $Ad_{\alpha(t)} A_o$  es constante.

Como  $Ad_{\alpha(0)} A_o = Ad_I A_o = A_o$ , resulta que  $Ad_{\alpha(t)} A_o = A_o$  para toda  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , esto es,  $\alpha(t) A_o [\alpha(t)]^{-1} = A_o$ . De donde vemos que  $\alpha(t) \in H$ ,  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Entonces  $\alpha'(0) = v \in T_I H$ .  $\square$

El conjunto de todas las matrices de  $M$  que conmutan con  $A_o$  es llamado el centralizador de  $A_o$  y se denota por

$$(3.4) \quad Z_{A_o} = \{X \in M \mid X A_o = A_o X\}.$$

Entonces,  $Z_{A_0} = T_1 H$ , pues  $X \in Z_{A_0}$  ssi  $X A_0 = A_0 X$  ssi  $[X, A_0] = 0$  ssi  $ad_X A_0 = 0$  ssi  $d(Ad A_0)_1(X) = 0$  ssi  $X \in Ker d(Ad A_0)_1$ .

Ahora, como  $\dim G = \dim T_1 G$  y  $T_1 G \simeq \mathfrak{g} = M$ , entonces  $\dim G = \dim M$ .

Así,  $\dim T_1 G = \dim T_{A_0} M$ .

Puesto que  $\dim T_1 H = \dim Ker d(Ad A_0)_1$ , resulta que

$$\dim T_{A_0} M = \dim T_1 H + \dim T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0},$$

por lo tanto,

$$\dim M - \dim \mathcal{O}_{A_0} = \dim Z_{A_0},$$

esto es,  $\text{co dim } \mathcal{O}_{A_0} = \dim Z_{A_0}$ .

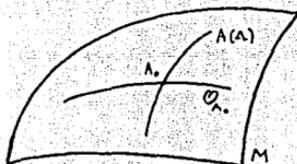
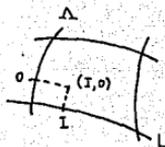
Enunciamos esto en el siguiente

**1.3.4. Corolario.** *La codimensión de la órbita de  $A_0$  es igual a la dimensión de su centralizador.*

Construyamos ahora el difeomorfismo  $\beta$ . Como la codimensión de la órbita de  $A_0$  es igual a la dimensión del espacio  $T_1 H$ , tenemos que  $\text{co dim } \mathcal{O}_{A_0} = \dim H$ .

Sea  $L$  una subvariedad de  $G$  transversal a  $H$ , con  $I \in L$  y de dimensión complementaria, esto es,  $\dim L = \dim \mathcal{O}_{A_0}$ , y  $A : \Lambda \rightarrow M$  una deformación de  $A_0$  transversal a la órbita de  $A_0$ , esto es,

$$T_{A_0} M = A_*(T_0 \Lambda) + T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0}.$$

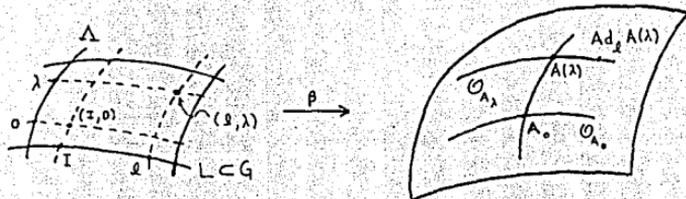


Como  $\dim T_0 \Lambda = \dim Ker (A_{*0}) + \dim A_*(T_0 \Lambda)$ , vemos que  $\dim \Lambda \geq \dim A_*(T_0 \Lambda)$ , de modo que la *mínima* dimensión que puede tener el espacio base  $\Lambda$  de una deformación transversal  $A(\lambda)$  de  $A_0$  es la codimensión de la órbita de  $A_0$ .

Supongamos que  $\dim \Lambda = \text{codim } \mathcal{O}_{A_0}$ . Si fuera  $\dim \Lambda > \text{codim } \mathcal{O}_{A_0}$ , reemplazamos  $\Lambda$  por un subespacio  $\Lambda'$  tal que  $\dim \Lambda' = \text{codim } \mathcal{O}_{A_0}$  y tal que la restricción de  $\Lambda$  a  $\Lambda'$  sea transversal a  $\mathcal{O}_{A_0}$ .

Sea  $\beta : L \times \Lambda \rightarrow M$  definida por

$$(3.5) \quad \beta(I, \lambda) = \text{Ad}_I A(\lambda).$$



Entonces  $\beta(I, 0) = A_0$ ,  $\beta(I, \Lambda) = A(\Lambda)$ ,  $\beta(L, 0) = \text{Ad}_L A_0 \subset \mathcal{O}_{A_0}$ .  $\beta(L, \Lambda) = \text{Ad}_L A(\Lambda) \subset \mathcal{O}_{A(\Lambda)}$ .

Además, como  $\dim L = \dim \mathcal{O}_{A_0}$  y  $\dim \Lambda = \text{codim } \mathcal{O}_{A_0}$ , resulta que

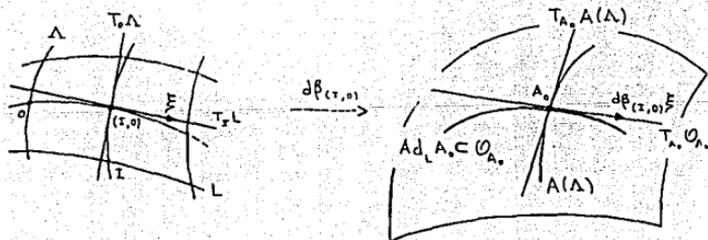
$$\dim(L \times \Lambda) = \dim \mathcal{O}_{A_0} + \text{codim } \mathcal{O}_{A_0} = \dim M.$$

Veamos que la diferencial  $d\beta$  en el punto  $(I, 0)$  es no singular.

Como  $d\beta_{(I,0)}$  transforma  $T_{(I,0)}(L \times \Lambda)$  en  $T_{A_0}M$ , subdividiremos el problema de la inyectividad a cada una de las restricciones de esta transformación lineal a los subespacios

$$T_{(I,0)}(L \times \{0\}) \text{ y } T_{(I,0)}(\{I\} \times \Lambda)$$

que identificamos con  $T_I L$  y  $T_I \Lambda$  respectivamente.



Sea  $\xi \in T_1 L$  tal que  $d\beta_{(1,0)}(\xi) = 0$ . Entonces, como

$$d\beta_{(1,0)}|_{T_1 L} = d(Ad A_0)_1,$$

resulta que  $d(Ad A_0)_1(\xi) = 0$ , y por el lema 1.3.3,  $\xi \in T_1 H$ . Así,  $\xi \in T_1 L \cap T_1 H$ .

Por la forma como elegimos a  $L$  (transversal a  $H$  y de dimensión complementaria), la intersección  $T_1 L \cap T_1 H$  consta solamente del cero, de modo que  $\xi$  es el cero del espacio  $T_1 L$  y por lo tanto,  $Ker(d\beta_{(1,0)}|_{T_1 L})$  consta solamente del cero de  $T_1 L$  de ahí que  $d\beta_{(1,0)}|_{T_1 L}$  sea inyectiva.

La otra restricción,  $d\beta_{(1,0)}|_{T_{\sigma} \Lambda}$  coincide con  $A_{\sigma} : T_{\sigma} \Lambda \rightarrow T_{A_{\sigma}} A(\Lambda)$ , que satisface lo siguiente:

$$\dim T_{\sigma} \Lambda = \dim Ker A_{\sigma} + \dim A_{\sigma}(T_{\sigma} \Lambda).$$

Por la forma como elegimos  $\Lambda$ ,  $\dim A_{\sigma}(T_{\sigma} \Lambda) = \text{codim } \mathcal{O}_{A_{\sigma}} = \dim \Lambda$ .

Entonces,

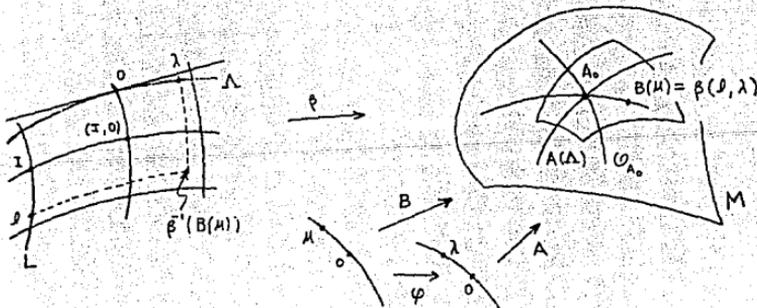
$$\dim Ker A_{\sigma} = \dim T_{\sigma} \Lambda - \dim \Lambda = 0,$$

de manera que  $Ker(d\beta_{(1,0)}|_{T_{\sigma} \Lambda})$  consta solamente del cero también, y por lo tanto  $d\beta_{(1,0)}$  es un isomorfismo.

Por el Teorema de la Función Inversa,  $\beta$  es un difeomorfismo local.

Estamos ya en posición de probar la prop. 1.3.2, esto es, que transversalidad implica versalidad.

*Prueba de la prop. 1.3.2:* Sea  $A(\lambda)$  una deformación de  $A_0$  transversal a la órbita de  $A_0$ .



Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la dimensión del espacio base  $\Lambda$  es igual a la codimensión de la órbita de  $A_0$ . Veamos que  $A(\lambda)$  es versal.

Sea  $B(\mu)$  una deformación arbitraria de  $A_0$ . Para  $\mu$  suficientemente cercano a 0,  $B(\mu)$  tiene una representación única bajo el difeomorfismo  $\beta$  construido arriba de la forma

$$B(\mu) = \beta(l, \lambda) \text{ para algún } (l, \lambda) \in L \times \Lambda.$$

Si  $\pi_1 : L \times \Lambda \rightarrow L$  y  $\pi_2 : L \times \Lambda \rightarrow \Lambda$  son las proyecciones canónicas, tomamos

$$\varphi = \pi_2 \circ \beta^{-1} \circ B \text{ y } C = \pi_1 \circ \beta^{-1} \circ B.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \pi_2(\beta^{-1}(B(\mu))) = \lambda, \\ C(\mu) &= \pi_1(\beta^{-1}(B(\mu))) = l. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} B(\mu) &= \beta(C(\mu), \varphi(\mu)) \\ &= Ad_{C(\mu)} A(\varphi(\mu)) \\ &= C(\mu) A(\varphi(\mu)) C^{-1}(\mu). \end{aligned}$$

□

Con las proposiciones 1.3.1 y 1.3.2 hemos probado el

**1.3.5. Teorema de la Versalidad.** *Una deformación  $A(\lambda)$  de la matriz  $A_0$  es versal si y sólo si la aplicación  $A : \Lambda \rightarrow M$  es transversal a la órbita de  $A_0$  en  $\lambda = 0$ .*

En la prueba de este teorema no es esencial que la variedad  $M$  conste de matrices, ni de que  $G$  sea un grupo de matrices. El hecho importante es que un grupo de Lie  $G$  actúe en una variedad  $M$ . (Ver Arnol'd [Ar 1], [Ar 2]).

## C A P I T U L O 2

## LA FORMA NORMAL DE JORDAN-ARNOLD

Aquí se aplica el Teorema de la Versalidad para la familia de Sylvester y en la construcción de una forma normal para matrices estable respecto a los parámetros de la matriz. Las fórmulas obtenidas para esta forma normal se aplican en la descripción de los diagramas de bifurcación de familias genéricas de matrices.

## 2.1. La familia de Sylvester.

Consideremos la familia de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$(1.1) \quad y^{(n)}(t) - \alpha_n y^{(n-1)}(t) - \dots - \alpha_2 y'(t) - \alpha_1 y(t) = 0.$$

Si hacemos

$$\begin{aligned} x_1 &= y(t) \\ x_2 &= \dot{x}_1 = y'(t) \\ x_3 &= \dot{x}_2 = y''(t) \\ &\vdots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

resulta  $\dot{x}_n = y^{(n)}(t) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ , de modo que la familia (1.1) puede escribirse como el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde aparece la familia  $n$ -paramétrica de matrices  $n \times n$

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

llamada la *Familia de Sylvester*.

Sabemos, por el corolario 1.3.4, que la dimensión del centralizador es igual a la codimensión de la órbita. A continuación calculamos directamente el centralizador de la Familia de Sylvester, lo que nos permite conocer su dimensión. Con esta información vemos que la aplicación  $A : \Lambda = \mathbb{R}^n \rightarrow M = \mathbb{R}^{n^2}$  definida por  $A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = A(\alpha)$ , es transversal a la órbita de cada una de sus matrices. El Teorema de la Versalidad nos garantizará de este modo que la familia  $A(\alpha)$  es versal.

Para esto, veamos primero cómo caracterizar a las matrices ortogonales a la órbita. Definimos en  $M = \mathbb{C}^{n^2}$  el producto

$$\langle A, B \rangle = \text{Traza}(AB^*),$$

donde  $B^*$  es la matriz adjunta de  $B$ . Las propiedades de la traza y de la operación adjunta hacen de éste un producto Hermitiano definido positivo. Tenemos el siguiente

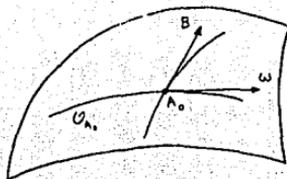
**2.1.1. Lema.** *El vector  $B \in T_{A_0}M$  es ortogonal a la órbita de la matriz  $A_0$  (perpendicular a su tangente) si y sólo si  $\{B^*, A_0\} = 0$ .*

*Prueba:* Sean  $B \in T_{A_0}M$ ,  $w \in T_{A_0}O_{A_0}$ . Debemos ver que

$$\langle w, B \rangle = 0 \text{ ssi } \{B^*, A_0\} = 0.$$

Por la observación hecha después de la prueba de la prop. 1.1.1, vemos que un vector tangente a la órbita de  $A_0$  puede representarse en la forma  $\{C, A_0\}$  para alguna matriz

C.



Inversamente,  $[C, A_0] \in T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0}$  para toda matriz  $C$ .

Supongamos ahora que  $B$  es ortogonal a la órbita de  $A_0$ , esto es, que para cualquier matriz  $C$  se tiene

$$\langle [C, A_0], B \rangle = 0.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr}([C, A_0] B^*) \\ &= \text{Tr}(C A_0 B^* - A_0 C B^*) \\ &= \text{Tr}(C A_0 B^*) - \text{Tr}(A_0 C B^*) \\ &= \text{Tr}(A_0 B^* C) - \text{Tr}(B^* A_0 C) \\ &= \text{Tr}([A_0, B^*] C) \\ &= \langle [A_0, B^*], C^* \rangle \end{aligned}$$

para toda matriz  $C$ , de modo que, como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es definido positivo, tenemos que  $[B^*, A_0] = 0$ .

Todos los pasos son reversibles y por lo tanto el lema queda probado.  $\square$

La condición  $[B^*, A_0] = 0$  nos dice que  $B \in Z_{A_0}^*$ , puesto que

$$Z_{A_0}^* = \{C \in M \mid [C^*, A_0] = 0\},$$

y podemos enunciar entonces el lema 2.2.1 como sigue.

**2.1.2. Corolario.** El complemento ortogonal de la órbita de  $A_0$  es el adjunto de su centralizador:  $(T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0})^\perp = Z_{A_0}^*$ .

Veamos ahora cuál es el centralizador de  $A_0 = A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ .

Una matriz  $X = (x_{ij})$  está en el centralizador de  $A_0$  ssi  $XA_0 = A_0X$ , esto es,

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n-1} \\ 0 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

de donde se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{21} = 0, & x_{22} = x_{11}, & x_{23} = x_{12}, & \cdots & \cdots & x_{2,n-1} = x_{1,n-2}, & x_{2n} = x_{1,n-1} \\ x_{31} = 0, & x_{32} = x_{21}, & x_{33} = x_{22}, & \cdots & \cdots & \cdots & x_{3n} = x_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ x_{n-2,1} = 0, & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} = 0, & x_{n-1,2} = x_{n-2,1}, & \cdots & \cdots & \cdots & x_{n-1,n-1} = x_{n-2,n-2}, & \vdots \\ x_{n1} = 0, & x_{n2} = 0, & x_{n3} = 0, & \cdots & \cdots & x_{n,n-1} = 0, & x_{nn} = x_{n-1,n-1} \end{array}$$

Obsérvese que los movimientos de "alfil. \", dan entradas iguales.

Esto implica que la matriz  $X \in Z_{A_0}$  es de la forma

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1,n-1} \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_{11} \end{bmatrix}$$

De ahí vemos que  $X$  sólo tiene en realidad,  $n$  variables independientes. Entonces  $\dim Z_{A_0} = n$ , lo cual implica, por el corolario 1.3.4, que  $\text{codim } \mathcal{O}_{A_0} = n$ . Por lo tanto,  $\dim \mathcal{O}_{A_0} = n^2 - n$ , ya que la  $\dim M = n^2$ .

Además,  $\dim Z_{A_0} = n$ . Entonces el corolario 2.1.2 nos dice que  $\dim (T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0})^\perp = n$  y  $(T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0})^\perp = Z_{A_0}$ . Así que una matriz del complemento ortogonal a la órbita es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} x_{11}^* & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{12}^* & x_{11}^* & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & x_{12}^* & x_{11}^* & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & x_{12}^* & \cdots & 0 & \vdots \\ x_{1,n-1}^* & \vdots & \vdots & \cdots & x_{11}^* & 0 \\ x_{1n}^* & x_{1,n-1}^* & \cdots & \cdots & x_{12}^* & x_{11}^* \end{bmatrix}$$

Por otra parte, como  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  está definida por

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 1, 0, \dots, 1, \dots, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

resulta que su diferencial viene dada por

$$A_{*0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,  $\forall \xi \in T_o\Lambda \simeq T_o\mathbb{R}^n$ ,  $\xi = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , tenemos:

$$(1.2) \quad A_{o_o}(\xi) = A_{o_o} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} n^2 - n \\ \\ \\ n \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

por lo tanto  $\dim A_{o_o}(T_o\Lambda) = n$ .

Ahora, si  $Y \in T_{A_o}\mathcal{O}_{A_o}$ , entonces  $\langle Y, X \rangle = 0$  para toda  $X \in (T_{A_o}\mathcal{O}_{A_o})^\perp$ , esto es,  $\text{Tr}(YX^*) = 0$ .

Encontremos el producto de una matriz del espacio tangente a la órbita,  $Y = (y_{ij})$  con cualquier  $X \in (T_{A_o}\mathcal{O}_{A_o})^\perp$ . Como ya vimos,  $X$  puede escribirse en la forma

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}^* & 0 & \cdots & 0 \\ x_{12}^* & x_{11}^* & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{1n}^* & \cdots & x_{12}^* & x_{11}^* \end{bmatrix}$$

Así,

$$YX^* = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & \cdots & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,n-1} & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & x_{11} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x_{12} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_{11} \end{bmatrix}$$

de ahí que

$$\text{Tr}(YX^*) = (y_{11}x_{11}) + (y_{21}x_{12} + y_{22}x_{11}) + (y_{31}x_{13} + y_{32}x_{12} + y_{33}x_{11}) + \cdots \\ \cdots + (y_{n1}x_{1n} + y_{n2}x_{1,n-1} + \cdots + y_{n,n-1}x_{12} + y_{nn}x_{11})$$

para toda  $n$ -ada  $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ .

Entonces

$$x_{11}(y_{11} + y_{22} + y_{33} + \cdots + y_{nn}) + x_{12}(y_{21} + y_{32} + \cdots + y_{n,n-1}) + \cdots \\ \cdots + x_{1,n-1}(y_{n-1,1} + y_{n2}) + x_{1n}(y_{n1}) = 0$$

para toda  $n$ -ada  $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ .

De modo que el sistema de ecuaciones independientes del espacio tangente a la órbita de  $A_0$  es

$$\begin{aligned} y_{11} + y_{22} + y_{33} + \dots + y_{nn} &= 0 \\ y_{21} + y_{32} + \dots + y_{n,n-1} &= 0 \\ &\vdots \\ y_{n-1,1} + y_{n2} &= 0 \\ y_{n1} &= 0 \end{aligned}$$

Así, una matriz  $Y \in T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0}$  es de la forma

$$(1.3) \quad \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \dots & \dots & y_{2n} \\ \vdots & y_{32} & y_{33} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ y_{n-1,1} & \dots & \dots & y_{n,n-1} & y_{n-1,n-1} & y_{n-1,n} \\ 0 & -y_{n-1,1} & \dots & \dots & -\sum_{k=2}^n y_{k,k-1} & -\sum_{k=1}^{n-1} y_{kk} \end{bmatrix},$$

de donde vemos que cada una de las entradas en la última fila es el negativo de la suma de las entradas superiores en la diagonal correspondiente. Entonces  $\dim T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0} = n^2 - n$ , y como  $\dim A_*(T_0 \Lambda) = n$ , es claro que

$$\dim T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0} + \dim A_*(T_0 \Lambda) = \dim T_{A_0} M.$$

Además, de (1.2) y (1.3) resulta que

$$T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0} \cap A_*(T_0 \Lambda) = \{0\},$$

por lo tanto son transversales:

$$T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0} + A_*(T_0 \Lambda) = T_{A_0} M,$$

de manera que la familia de Sylvester  $A(\alpha)$  es transversal a la órbita de  $A_0$ , y por el Teorema de la Versalidad, es una deformación versal de  $A_0$ .

## 2.2. La construcción de deformaciones versales.

Como ya vimos en el corolario 2.1.2, el complemento ortogonal de la órbita de una matriz es el adjunto de su centralizador, lo que resulta útil en la determinación de familias transversales a las órbitas.

En esta sección veremos cómo construir deformaciones versales de matrices reducidas a su forma normal de Jordan.

No es difícil calcular los centralizadores de matrices reducidas a formas normales de Jordan. Por ejemplo, si

$$A_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

el centralizador de  $A_0$  consiste de las matrices  $A = (a_{ij})$  tales que  $A_0 A = A A_0$ , esto es,

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos las ecuaciones:

$$a_{23} = a_{12}, \quad a_{33} = a_{22} = a_{11}, \quad a_{13} \text{ sin restricciones.}$$

y todas las demás entradas iguales a cero. Así, una matriz del centralizador de  $A_0$  es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{11} & a_{12} \\ & & a_{11} \end{bmatrix}$$

Seguendo a Arnold ([Ar 1]) representamos esta forma esquemáticamente por

$$\left[ \begin{array}{ccc} & & / \\ & & / \\ & & / \\ & & / \\ & & / \end{array} \right],$$

donde se entiende que en cada segmento oblicuo hay entradas iguales, y en los espacios en blanco hay ceros. Si la matriz tiene un bloque de Jordan de orden 2, tal como

$$A_o = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

un cálculo similar nos muestra que las matrices del centralizador son de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

con 5 parámetros independientes y que representamos como

Para una matriz  $A_o$  con forma normal de Jordan

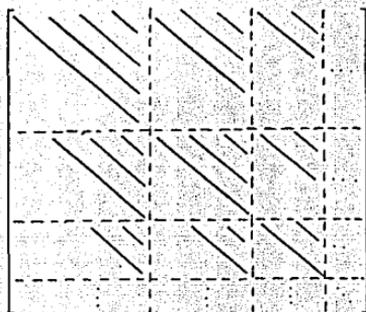
$$A_o = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & \\ 0 & 0 & \lambda & & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & 0 & \lambda & \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

( $A_o$  tiene una sucesión de bloques de Jordan de órdenes  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 1$ ) el centralizador tiene la forma

(y  $n_1 + 3n_2 + 5n_3 = 14$  parámetros independientes).

En general se tiene el siguiente

**2.2.1. Lema.** Si la matriz  $A_0$  tiene un sólo eigenvalor con forma normal de Jordan una sucesión de bloques superiores de Jordan de órdenes  $n_1 \geq n_2 \geq \dots$ , entonces las matrices que conmutan con  $A_0$ , esto es, el centralizador de  $A_0$  tiene la forma



Una prueba se puede ver en: Gantmakher [Ga], pág. 199-207.

De modo que el número de parámetros independientes del centralizador de  $A_0$  es

$$d = n_1 + 3n_2 + 5n_3 + \dots = \dim Z_{A_0}$$

y por el corolario 1.3.4, tenemos que la codimensión de la órbita de  $A_0$  está dada por esta misma fórmula. Además como ya observamos en la construcción para la prueba de la prop. 1.3.2, ésta es también la mínima dimensión para una deformación versal ( que entonces se dice miniversal ).

Ahora, si la matriz  $A_0$  tiene forma de Jordan con varios eigenvalores distintos, la dividimos en bloques correspondientes a estos eigenvalores. Entonces, las matrices del centralizador de  $A_0$  son diagonales por bloques, con cada bloque correspondiendo a cada eigenvalor  $\lambda$  de la forma descrita antes.

De este modo, para cada eigenvalor  $\lambda_i$  el número de parámetros independientes es

$$d_i = n_1(\lambda_i) + 3n_2(\lambda_i) + 5n_3(\lambda_i) + \dots$$

donde  $n_k(\lambda_i)$  es el orden del bloque de Jordan respectivo del eigenvalor  $\lambda_i$ .



Por otro lado, la diferencial de la aplicación

$$A = A_0 + B : \Lambda \rightarrow M, \quad A(\lambda) \mapsto A_0 + B(\lambda)$$

es  $(A_0 + B)_* = B_*$  y  $A(0) = A_0$ . Además, si  $[B^*, A_0] = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} [B_*^*, A_0] &= B_*^* A_0 - A_0 B_*^* = (B^* A_0)_* - (A_0 B^*)_* \\ &= (B^* A_0 - A_0 B^*)_* = [B^*, A_0]_* = 0, \end{aligned}$$

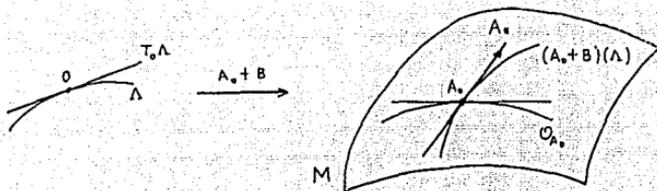
de manera que si  $B \in Z_{A_0}^*$ , también  $B_* \in Z_{A_0}^*$ .

Así,  $A_* = B_* \in Z_{A_0}^*$ , es decir, es ortogonal a la órbita de la matriz  $A_0$ .

Esto implica que

$$A_*(T_0\Lambda) + T_{A_0}\mathcal{O}_{A_0} = T_{A_0}M,$$

lo cual nos dice que  $A(\lambda)$  es transversal a la órbita.



Entonces  $A_0 + B$  es una deformación versal de  $A_0$  y además con el mínimo número de parámetros, así que  $A_0 + B$  es deformación miniversal de  $A_0$ , lo cual nos garantiza la estabilidad respecto a los parámetros, puesto que una deformación versal es una función holomorfa (en particular es continua), y además cualquier otra deformación puede llevarse de manera diferenciable a esta deformación versal mediante la acción adjunta.

La forma de las matrices  $B$  tienen muchas entradas diferentes de cero. Podemos sugerir otra forma para la familia versal  $A_0 + B$  con el mínimo número de entradas diferentes de cero, e igual al número de parámetros.

Haremos esto del siguiente modo. A partir de la condición de ortogonalidad a la órbita obtenemos una forma para las matrices del espacio tangente a la órbita. Esto nos permitirá encontrar una forma para las matrices  $B$  con menos entradas diferentes de cero.

Comenzamos escribiendo  $B$  del siguiente modo.

$$B = \begin{bmatrix} \diagup & & \\ & \vdots & \\ \diagdown & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & t_3 \\ t_4 & 0 & t_5 \end{bmatrix}$$

Entonces, si  $X \in T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0}$ , la condición de ortogonalidad nos dice que para toda  $B \in (T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0})^\perp$ ,  $\text{Tr}(XB^*) = 0$ .

Encontremos el producto  $XB^*$ .

$$XB^* = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t}_1 & \bar{t}_2 & \bar{t}_4 \\ & \bar{t}_1 & \\ & \bar{t}_3 & \bar{t}_5 \end{bmatrix} =$$

de modo que

$$\text{Tr}(XB^*) = x_1 \bar{t}_1 + (y_1 \bar{t}_2 + y_2 \bar{t}_1 + y_3 \bar{t}_3) + (z_1 \bar{t}_4 + z_3 \bar{t}_5) = 0,$$

así,

$$\bar{t}_1(x_1 + y_2) + \bar{t}_2 y_1 + \bar{t}_3 y_3 + \bar{t}_4 z_1 + \bar{t}_5 z_3 = 0 \quad \forall t_1, t_2, t_3, t_4, t_5,$$

luego el sistema de ecuaciones independientes del espacio tangente a la órbita de  $A_0$  es

$$x_1 + y_2 = 0, \quad y_1 = y_3 = z_1 = z_3 = 0,$$

y la forma de  $X$  en  $T_{A_0} \mathcal{O}_{A_0}$  es:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

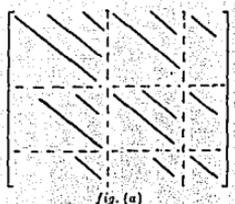
Entonces, para una familia  $A_0 + B$  transversal a la órbita es suficiente tomar para  $B$  la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & t_3 \\ t_4 & 0 & t_5 \end{bmatrix},$$

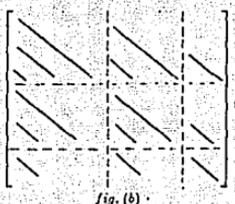
Así, la nueva forma para la matriz  $B$  tiene el mismo número de parámetros y la representamos por

$$\begin{bmatrix} \diagup & & \\ & \vdots & \\ \diagdown & & \end{bmatrix}.$$

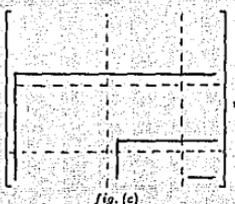
Para mayores dimensiones, una matriz del centralizador tiene la forma



una matriz ortogonal a la órbita tiene la forma



y una familia versal con menos entradas no nulas puede ser de la forma



En resumen, dada una matriz  $A_0$  en su forma normal de Jordan, hemos visto que una matriz del centralizador de  $A_0$  tiene la forma descrita en la fig.(a). Por el corolario 2.2.2, la dimensión del centralizador de  $A_0$  es

$$d = \sum_i [n_1(\lambda_i) + 3n_2(\lambda_i) + \dots],$$

donde  $n_1(\lambda_i) \geq n_2(\lambda_i) \geq \dots$  son los órdenes de los bloques de Jordan correspondientes al eigenvalor  $\lambda_i$ , y ésta es la mínima dimensión para una deformación versal. Entonces, la dimensión del adjunto del centralizador es  $d$ . Por el corolario 2.1.2, una matriz ortogonal

a la órbita de  $A_0$  es una matriz del adjunto de su centralizador, y por lo tanto tiene la forma descrita en la fig.(b).

Como ya vimos, también puede tener la forma de la fig.(c). Además, la familia  $A_0 + B$ , con  $B$  en el complemento ortogonal de la órbita, es transversal a la órbita de  $A_0$ .

Por el teorema de la versalidad, la familia  $A_0 + B$  descrita antes es versal. Como  $\dim(A_0 + B) = d$ , y esta es la mínima dimensión para una deformación versal, resulta que  $A_0 + B$  es deformación miniversal de  $A_0$ .

Enunciamos estos resultados en el siguiente teorema.

**2.2.3. Teorema.** *Cada matriz  $A_0$  tiene una deformación versal, con el número de parámetros igual a la codimensión de la órbita y a la dimensión del centralizador de  $A_0$ .*

*Este número es igual a*

$$d = \sum_i [n_1(\lambda_i) + 3n_2(\lambda_i) + 5n_3(\lambda_i) + \dots]$$

donde  $n_1(\lambda_1) \geq n_2(\lambda_2) \geq \dots$  son los órdenes de los bloques de Jordan correspondientes al eigenvalor  $\lambda_i$ . Una deformación versal con menos parámetros no existe. Si  $A_0$  está en su forma normal de Jordan, entonces una forma normal con el mínimo número de parámetros y que sea deformación versal de  $A_0$  está dada por  $A_0 + B$ , donde  $B$  tiene la forma descrita en la fig. (b), o (c).

**2.2.4. Definición.** La forma normal descrita en el teorema anterior se llama la *forma normal de Jordan-Arnold*.

**Ejemplo 1.** Si todos los eigenvalores de  $A_0$  son distintos, entonces  $d = n$  y nuestra

forma normal es diagonal:

$$A_o = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad d = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} \quad \text{y } A_o + B \text{ es diagonal}$$

**Ejemplo 2.** Si  $A_o$  es la matriz nula,  $d = n^2$  y nuestra deformación versal es simplemente la familia de todas las matrices:

$$A_o = 0 \text{ implica que para toda } X \in M, A_o X = X A_o.$$

por lo tanto,  $Z_{A_o} = M$ , de ahí que:  $Z_{A_o}^* = M$ ,  $d = \dim M = n^2$ , y  $A_o + B \in A_o + M = M$ .

**Ejemplo 3.** Si  $A_o$  consiste de un bloque de Jordan, entonces  $d = n$  y nuestra forma normal, por el teorema 2.2.5, (fig. c) es la forma de Silvester:

$$A_o = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix},$$

$$A_o + B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix} = \lambda I + S,$$

donde  $S$  es una matriz de Silvester.

o si usamos la forma versal de la fig.(b) del teorema 5.5, nos queda

$$A_\alpha + B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & & \\ b & c & \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 4.** Las matrices con distintos bloques de Jordan serán denotadas por el producto de los determinantes de sus bloques. Por ejemplo,  $\alpha^3\alpha^2$  denota la matriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} \alpha & 1 & 0 & & \\ 0 & \alpha & 1 & & \\ 0 & 0 & \alpha & & \\ \hline & & & \alpha & 1 \\ & & & 0 & \alpha \end{array} \right]$$

y la matriz  $\alpha^2\alpha\beta^2$  es

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} \alpha & 1 & & & \\ 0 & \alpha & & & \\ & & & & \\ \hline & & & \alpha & \\ & & & & \\ & & & & \beta & 1 \\ & & & & 0 & \beta \end{array} \right]$$

Por el teorema 2.2.3, fig.(c) podemos elegir deformaciones miniversales de las matrices  $\alpha^3\alpha^2$  y  $\alpha^2\beta^2$  del siguiente modo:

$$A_\alpha + B = \left[ \begin{array}{ccc|cc} \alpha & 1 & 0 & & \\ 0 & \alpha & 1 & & \\ 0 & 0 & \alpha & & \\ \hline & & & \alpha & 1 \\ & & & 0 & \alpha \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc|cc} & & & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ & & & \lambda_6 & & & & \\ & & & \lambda_7 & & & \lambda_8 & \lambda_9 \end{array} \right]$$

$$d = n_1 + 3n_2 = 3 + 3(2) = 9.$$

Para  $\alpha^2\beta^2$  nuestra forma versal queda

$$A_0 + B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ 0 & \alpha & & \\ & & \beta & 1 \\ & & 0 & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \\ & & & \\ & & & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$d = n_1(\alpha) + n_1(\beta) = 2 + 2 = 4.$$

### 2.3. Diagramas de bifurcación.

Los resultados obtenidos anteriormente para las familias versales de matrices de endomorfismos junto con los teoremas de transversalidad ( Ver el apéndice ) nos permiten describir los diagramas de bifurcación de familias de matrices genéricas.

2.3.1. Definición. Un *diagrama de bifurcación* de una familia de matrices

$$A : \Lambda \subset \mathbb{C}^l \rightarrow M = \mathbb{C}^{n^2}$$

es una partición del espacio de parámetros  $\Lambda$  de acuerdo a los tipos de Jordan de matrices

En esta partición agrupamos las matrices cuyas formas normales de Jordan difieren solamente por sus eigenvalores, pero para las cuales los órdenes de los bloques de Jordan son los mismos.

Por ejemplo, todas las matrices con forma normal de Jordan diagonal con eigenvalores simples forman una clase.

Otra clase es la de las matrices del tipo de Jordan  $\alpha^2\alpha\beta^2$ :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \beta & 1 \\ & & & 0 & \beta \end{bmatrix}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Correspondiendo a la partición del espacio de parámetros, el espacio  $\mathbb{C}^{n^2}$  se descompone también en una partición. Esta partición de  $\mathbb{C}^{n^2}$  forma una estratificación, esto es, una

unión finita de subvariedades mutuamente ajenas ( los estratos ). Cada estrato está determinado por el conjunto de colecciones  $n_1(\lambda_i) \geq n_2(\lambda_i) \geq \dots$  de dimensiones de bloques de Jordan correspondientes a  $\nu$  eigenvalores distintos ( $i = 1, \dots, \nu$ ).

Las familias de matrices que son transversales a todos los estratos se dice que están en *posición general* o que son *genéricas*. En una familia en posición general casi todas las matrices tienen eigenvalores simples.

**2.3.2. Lema.** *La codimensión  $c$  de un estrato en el espacio de matrices  $\mathbf{C}^{n^2}$  está dada por*

$$c = d - \nu = \sum_{i=1}^{\nu} [n_1(\lambda_i) + 3n_3(\lambda_i) + \dots - 1]$$

donde  $d$  es la codimensión de la órbita de cualquier matriz del estrato.

*Prueba:* La dimensión de cada estrato en  $\mathbf{C}^{n^2}$  es  $\dim \mathcal{O}_A + \nu$ , ya que en cada estrato las órbitas tienen la misma dimensión, donde  $A$  es una matriz del estrato y  $\nu$  es el número de eigenvalores distintos de  $A$ .

Por lo tanto, la codimensión del estrato es

$$\begin{aligned} c &= \dim \mathbf{C}^{n^2} - (\dim \mathcal{O}_A + \nu) \\ &= (\dim \mathbf{C}^{n^2} - \dim \mathcal{O}_A) - \nu = \text{codim } \mathcal{O}_A - \nu = d - \nu. \end{aligned}$$

□

**Nota:** Los eigenvalores simples no contribuyen a la codimensión de cada estrato, pues para  $\lambda_i$  simple,  $n_1(\lambda_i) = 1$ , y  $n_2(\lambda_i) = n_3(\lambda_i) = \dots = 0$ . La codimensión de un estrato no depende del orden  $n$  de la matriz, sino solamente de los órdenes de los bloques de Jordan correspondientes a eigenvalores múltiples.

Codimensión cero corresponde al estrato de las matrices diagonales,  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$  :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{bmatrix},$$

lo cual resulta natural al observar que cualquier perturbación pequeña de una matriz de este tipo sigue siendo de este tipo.



Los teoremas de transversalidad nos dicen que las familias genéricas de matrices forman un conjunto denso en el espacio de todas las familias de matrices de  $n \times n$ .

Esto implica que si podemos describir los diagramas de bifurcación de las familias transversales a todos los estratos, habremos descrito en esencia los diagramas de bifurcación de cualquier familia de matrices, ya que si una familia tiene matrices más complicadas o si el diagrama de bifurcación es más intrincado, esto puede ser eliminado con una perturbación arbitrariamente pequeña de la familia debido a la densidad de las familias en posición general (o genéricas).

Nuestro siguiente paso es encontrar fórmulas para las familias transversales a todos los estratos.

Como cada estrato está formado por órbitas de matrices bajo la acción adjunta, el Teorema de la Versalidad nos dice que debemos buscar entre las familias versales de matrices.

Como ya se vió en el corolario 2.2.2, la mínima dimensión para una deformación versal es igual a la codimensión de la órbita. Y por el lema 2.3.2, la codimensión de un estrato es menor que la dimensión de una deformación versal, además disminuye un número igual al de eigenvalores distintos:

$$\begin{aligned} c &= d - \nu \\ &= \text{codim } \mathcal{O}_A - \nu \\ &= \dim A(\lambda) - \nu \end{aligned}$$

Podemos entonces considerar familias  $A(\lambda)$  con menos parámetros transversales al estrato pero no a la órbita. Tales deformaciones son, por ejemplo, las subfamilias  $c$ -paramétricas de las familias versales  $A_0 + B$  del Teorema 2.2.3, que se obtienen si uno de los parámetros diagonales de  $B$  se anula para cada eigenvalor de  $A_0$ .

Por ejemplo, como ya se vió en la sección 2.2, una deformación versal de  $\alpha^3$  es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

entonces, una familia 2-paramétrica transversal al estrato  $\alpha^3$  es:

$$A(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \alpha & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Para el caso  $\alpha^2$  una familia 1-paramétrica transversal al estrato está dada por

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ \lambda & \alpha & & & \\ \hline & & \beta_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \beta_r \end{bmatrix}$$

Ahora, para ver el diagrama de bifurcación de una familia  $c$ -paramétrica transversal a todos los estratos, necesitamos ver para qué valores de los parámetros se tienen eigenvalores múltiples en cada bloque de Jordan deformado.

Así, dado un caso, como por ejemplo el  $\alpha^3$  mencionado arriba, la pregunta es ¿para qué valores de los parámetros  $\lambda_1, \lambda_2$  la matriz  $A(\lambda_1, \lambda_2)$  tiene eigenvalores múltiples?

Es claro que ésto lo determina el polinomio característico  $p(z)$  de la matriz  $A(\lambda_1, \lambda_2)$ . El problema se traduce en encontrar los valores de los parámetros  $\lambda_i$  para los cuales  $p(z)$  tiene raíces múltiples.

En el caso mencionado esto significa ver para cuáles  $\lambda_1, \lambda_2$  tiene raíces múltiples el polinomio

$$p(z) = \det(A(\lambda_1, \lambda_2) - zI) = (\alpha - z)^3 - 2\lambda_1(\alpha - z) + \lambda_2.$$

Para contestar esta pregunta en general hacemos las siguientes consideraciones.

Mediante una transformación lineal adecuada, el coeficiente del término de grado  $n - 1$  de un polinomio de grado  $n$  puede ser eliminado. Por ejemplo, el polinomio general de grado 3,

$$z^3 + az^2 + bz + c$$

puede ser reducido sustituyendo  $z$  por  $z - \frac{1}{3}a$  a la forma

$$z^3 + a_1z + a_2.$$

Esto nos permite escribir el polinomio general  $p(z)$  de grado  $k+1$  como

$$z^{k+1} + a_1 z^{k-1} + \dots + a_{k-1} z + a_k.$$

Este polinomio puede ser identificado con las coordenadas  $(a_1, \dots, a_k)$  de  $\mathbb{C}^k$ . La función

$$F: \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$F(z, a_1, \dots, a_k) = z^{k+1} + a_1 z^{k-1} + \dots + a_{k-1} z + a_k$$

nos será útil para discriminar, en el espacio de polinomios (o espacio de coeficientes) los que corresponden a los diferentes tipos de raíces (simples, múltiples) con ayuda del discriminante de la función  $F$ , el cual se define por  $\Delta_F = 0$ , donde

$$\Delta_F = \{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k \mid \exists z \in \mathbb{C} \text{ con } F(z, a_1, \dots, a_k) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, a_1, \dots, a_k) = 0\}.$$

Como se sabe (Brieskorn [B], o Bruce/Giblin [BG]), el polinomio

$$p(z) = z^{k+1} + a_1 z^{k-1} + \dots + a_{k-1} z + a_k$$

tiene raíces múltiples solamente para los valores de  $a_1, \dots, a_k$  que cumplen  $\Delta_F = 0$ .

**Ejemplo 1.** Consideremos el polinomio con coeficientes reales  $p(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ .

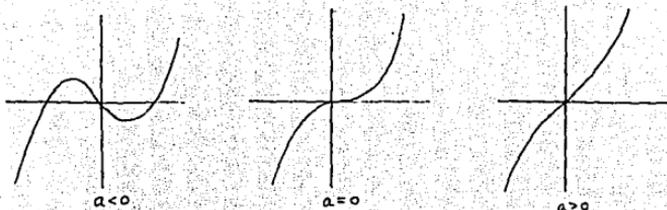
Sustituyendo  $x$  por  $x - \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0}$  se reduce a la forma  $x^2 + b$ .

Entonces podemos considerar  $p(x) = x^2 + b$ . Esto implica que nuestra  $F$  es  $F(x, b) = x^2 + b$ , de donde vemos que  $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$  se anula solamente en  $x = 0$  que sustituida en  $F$  nos da el discriminante  $b = 0$ .

**Ejemplo 2.** Sea  $p(x) = x^3 + ax + b$ . Nuestra  $F$  es  $F(x, a, b) = x^3 + ax + b$ , de donde obtenemos  $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + a$ . De  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  encontramos que, para  $a < 0$ ,  $x = (-a/3)^{1/2}$ , y sustituyendo esto en  $F = 0$  resulta el discriminante (una parábola semicúbica)

$$\Delta_F = 27b^2 + 4a^3 = 0.$$

Para ver el comportamiento de las raíces, consideramos las gráficas de  $y = x^3 + ax$ . Existen tres casos:



Consideremos ahora las raíces de  $x^3 + ax + b$ . En el caso  $a > 0$  hay exactamente una raíz real. Para  $a = 0$  tenemos exactamente una raíz real si  $b \neq 0$  y una raíz triple si  $b = 0$ .

En el caso  $a < 0$  hay varias posibilidades. Si  $b$  está entre el máximo y el mínimo de  $y = x^3 + ax$  hay tres raíces reales. De otro modo hay sólo una raíz real. Si  $b$  es igual a uno de los extremos, dos de las raíces se convierten en una doble.

La condición para que  $b$  esté entre los extremos es  $27b^2 + 4a^3 < 0$ .

Así, vemos que el discriminante  $\Delta_F = 27b^2 + 4a^3 = 0$  divide el plano en dos regiones:

$G_1$ , donde  $\Delta_F < 0$  y

$G_2$ , donde  $\Delta_F > 0$ .

Para  $(a, b) \in G_1$ ,  $x^3 + ax + b$  tiene tres raíces reales, (digamos:  $\alpha, \beta, \gamma$ ).

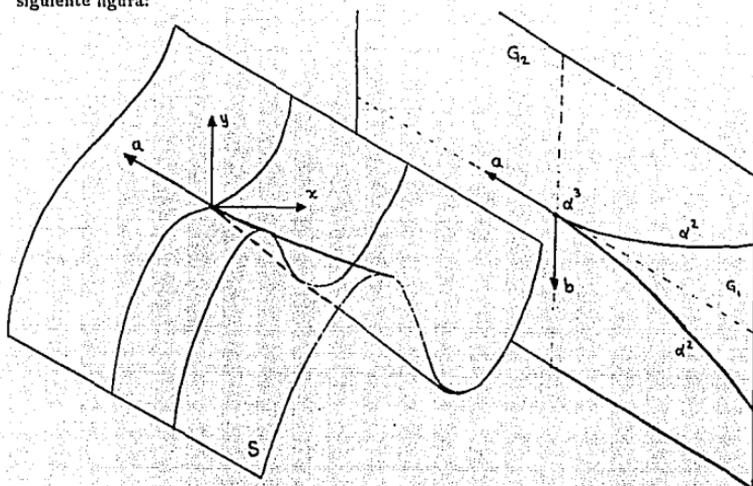
Para  $(a, b) \in G_2$ , tiene sólo una ( $\alpha$ ).

A lo largo de la curva discriminante  $\Delta_F = 0$  hay raíces múltiples (de multiplicidad 3 para  $a = b = 0$ , la que representamos por  $a^3$  y de multiplicidad 2 en el resto de la curva, que representamos por  $a^2$ ).

Para ver ésto geoméricamente hacemos la siguiente construcción.

Sea  $S$  la superficie en  $\mathbb{R}^3$  definida por la ecuación  $F(x, a, -y) = 0$ , es decir,  $x^3 + ax - y = 0$ , ( $b = -y$ ). proyectando paralelamente al eje  $x$ , se obtiene la partición del plano de coeficientes  $a, b$ , de acuerdo a los diferentes tipos de raíces, como se ve en la

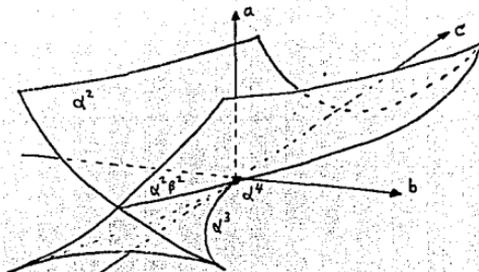
siguiente figura:



**Ejemplo 3.** Cálculos similares con el polinomio  $p(x) = x^4 + cx^2 + bx + a$  nos dan el discriminante

$$\Delta_F = \frac{1}{27} \left[ 4(c^2 + 12a)^3 - (2c^3 - 72ac + 27b^2)^2 \right],$$

(Ver Brieskorn [B], p.186). La superficie  $\Delta_F = 0$  ( *swallow-tail* ) se muestra a continuación.



En donde hemos distribuido las diferentes multiplicidades de las raíces con la notación del ejemplo 2. (Ver [B], p. 190).

En general, se le llama *swallow-tail* de dimensión  $k-1$  a la hipersuperficie en  $\mathbb{C}^k$  dada por la ecuación  $\Delta_F = 0$ , donde  $\Delta_F$  es el discriminante del polinomio

$$p(z) = z^{k+1} + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k.$$

Una *swallow-tail* de dimensión 1 es una parábola semicúbica, una bi-dimensional es la mostrada en el ejemplo 3. (En realidad son las partes reales de dichas superficies).

Estamos ya en posición de investigar los diagramas de bifurcación de familias c-paramétricas de matrices.

### 2.3.4. Ejemplos de diagramas de bifurcación.

#### 1. Familias a un parámetro.

De  $c = 1$  se deduce que la matriz tiene sólo un bloque de Jordan de  $2 \times 2$ , el estrato

$\alpha^2$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|ccc} \alpha & 1 & & & \\ 0 & \alpha & & & \\ \hline & & \beta_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \beta_r \end{array} \right]$$

una familia transversal al estrato  $\alpha^2$  es, como ya vimos antes,  $A : \Lambda = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$  dada por

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ \lambda & \alpha & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \beta_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_r \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico del bloque que nos interesa es

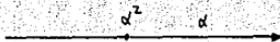
$$p(z) = \det \begin{bmatrix} \alpha - z & 1 \\ \lambda & \alpha - z \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} p(z) &= (\alpha - z)^2 - \lambda \\ &= z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 - \lambda \end{aligned}$$

que después de la transformación  $z \mapsto z + \alpha$  queda como

$$p(z) = z^2 - \lambda$$

cuyo discriminante es  $\lambda = 0$ . luego el diagrama de bifurcación es el sigte.:



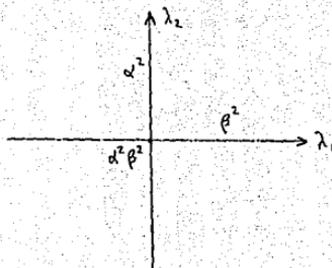
## 2. Familias a dos parámetros.

Los estratos de codimensión 2 son  $\alpha^3$  y  $\alpha^2\beta^2$ . Para  $\alpha^3$  tenemos  $A : \Lambda = \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$  definida por

$$A(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & & & \\ \lambda_2 & \alpha & 1 & & & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \alpha & & & \\ & & & \beta_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_r \end{bmatrix}.$$



Como los discriminantes son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 0$ , el diagrama de bifurcación es un par de rectas que se intersectan:



### 3. Familias a tres parámetros.

Los estratos de codimensión  $c = 3$  son  $\alpha^4$ ,  $\alpha\alpha$ ,  $\alpha^3\beta^2$ , y  $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ . Para el primer caso se tiene la familia transversal

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \alpha & 1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \alpha & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Polinomio asociado:

$$p(z) = z^4 - 4\alpha z^3 + (6\alpha^2 - 3\lambda_1)z^2 + (6\alpha\lambda_1 - 4\alpha^3 - 2\lambda_2)z + (\alpha^4 - 3\alpha^2\lambda_1 + 2\alpha\lambda_2 + \lambda_1^2 - \lambda_3)$$

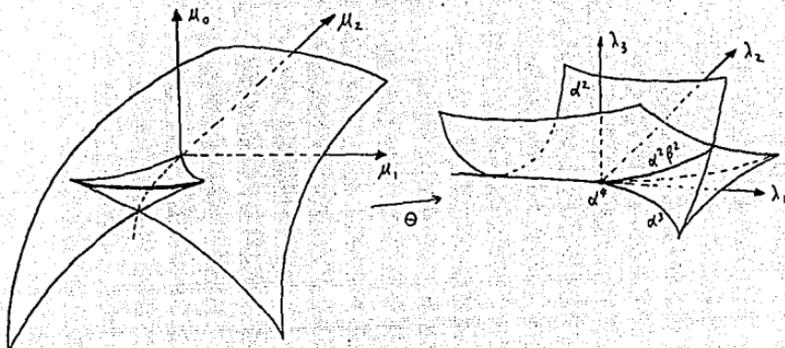
Si hacemos el cambio  $z \mapsto z + \alpha$  el polinomio se transforma en

$$p(z) = z^4 - 3\lambda_1 z^2 - 2\lambda_2 z + \lambda_1^2 - \lambda_3.$$

Sean ahora  $\mu_0 = \lambda_1^2 - \lambda_3$ ,  $\mu_1 = -2\lambda_2$ ,  $\mu_2 = -3\lambda_1$  las ecuaciones que definen el cambio de parámetros  $\lambda = \theta(\mu)$ . Tenemos  $\theta(0) = 0$  y

$$\frac{\partial(\mu_0, \mu_1, \mu_2)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \begin{vmatrix} 2\lambda_1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Entonces,  $\theta: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  es un difeomorfismo y el discriminante de  $p(z)$  se muestra en la siguiente figura.



**Nota:** Con la forma versal del teorema 2.2.3, fig.(c) es más fácil verificar los anteriores resultados, pues  $\mu_0$  también resulta una función lineal de las  $\lambda_i$ .

Para el estrato  $\alpha\alpha$  tenemos

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \alpha & \lambda_2 & & & & \\ \lambda_1 & \alpha + \lambda_3 & & & & \\ & & \beta_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \beta_r \end{bmatrix},$$

polinomio asociado:

$$p(z) = z^2 - (2\alpha + \lambda_3)z + (\alpha^2 + \alpha\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2),$$

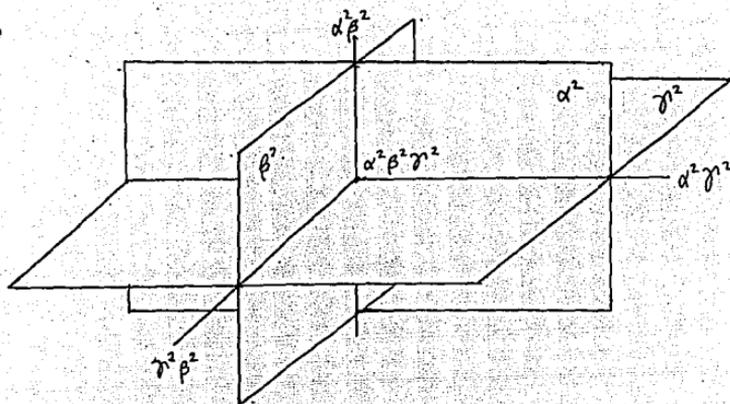
$z \mapsto z + \alpha + \frac{1}{2}\lambda_3$  lo transforma en  $p(z) = z^2 - \left(\frac{1}{4}\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2\right)$  cuyo discriminante

es





Diagrama de bifurcación:



A los estratos cuyas matrices tienen solamente un eigenvalor múltiple los llamaremos *elementales*.

Todos los demás estratos son esencialmente intersecciones transversales de los elementales.

En particular, la codimensión de una singularidad no elemental es igual a la suma de las codimensiones de sus componentes elementales. Por ejemplo,

$$co \dim (\alpha^2 \beta^2 \gamma^2) = co \dim (\alpha^2) + co \dim (\beta^2) + co \dim (\gamma^2) = 3.$$

## CAPITULO 3

## EL PROBLEMA DE LA MONODROMIA SIMPLECTICA

En este capítulo damos el planteamiento de un problema sobre monodromía simpléctica ( Ver Arnol'd [Ar 4] ) relacionado con las órbitas regulares de la representación coadjunta del grupo lineal especial  $A_n = SL(n+1, \mathbf{C})$  y presentamos una solución para el caso  $A_1$  según la línea expuesta por Sánchez en [Sa].

## 3.1. La representación coadjunta.

Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. Consideremos el espacio dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$ . Como  $\mathfrak{g} \simeq T_e G$ ,  $\mathfrak{g}^*$  es isomorfo al espacio cotangente del grupo  $G$  en la identidad,  $T_e^* G$ . Recordemos que las traslaciones izquierda y derecha de  $G$  en  $G$ ,

$$L_g x = gx \quad , \quad R_g x = xg$$

inducen las aplicaciones lineales entre los espacios tangentes

$$L_{g*} : T_x G \rightarrow T_{gx} G \quad , \quad R_{g*} : T_x G \rightarrow T_{xg} G$$

para toda  $x \in G$ . Estas aplicaciones inducen a su vez las transformaciones en los espacios cotangentes

$$L_g^* : T_{gx}^* G \rightarrow T_x^* G \quad , \quad R_g^* : T_{xg}^* G \rightarrow T_x^* G$$

que para toda  $\eta \in T_x G$ ,  $\xi \in T_x^* G$  se definen por

$$L_g^* \xi (\eta) = \xi (L_{g*} \eta) \quad , \quad R_g^* \xi (\eta) = \xi (R_{g*} \eta).$$

Para toda  $g \in G$ , el operador  $Ad_g^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  que a cada  $\omega \in \mathfrak{g}^*$  le asocia el funcional  $Ad_g^* \omega : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{C}$  definido por

$$Ad_g^* \omega (X) = \omega (Ad_{g^{-1}} X)$$

es un automorfismo de  $g^*$ . Además, la aplicación  $Ad^* : G \rightarrow Aut(g^*)$  definida por  $Ad^*(g) = Ad_g^*$  satisface la relación  $Ad_{gh}^* = Ad_h^* \circ Ad_g^*$ , pues si  $\omega \in g^*$ ,  $X \in g$ , entonces

$$\begin{aligned} Ad_{gh}^* \omega(X) &= \omega(Ad_{(gh)^{-1}} X) \\ &= \omega(Ad_{h^{-1}g^{-1}} X) \\ &= \omega(h^{-1}g^{-1} X gh) \\ &= \omega(Ad_{h^{-1}} \circ Ad_{g^{-1}} X) \\ &= Ad_h^* (\omega(Ad_{g^{-1}} X)) \\ &= Ad_h^* \circ Ad_g^* \omega(X), \end{aligned}$$

de modo que  $Ad^* : G \rightarrow Aut(g^*)$  es una representación del grupo de Lie  $G$ .

Esta es llamada la *representación coadjunta* del grupo  $G$ . Las órbitas de esta representación pueden definirse por analogía con la representación adjunta del siguiente modo.

Considerando la acción coadjunta

$$\begin{aligned} Ad^* : G \times g^* &\rightarrow g^* \\ (g, \omega) &\mapsto Ad_g^* \omega \end{aligned}$$

definida por

$$Ad_g^* \omega(X) = \omega(Ad_{g^{-1}} X) \quad \forall X \in g.$$

Dejemos fija  $\omega \in g^*$ ,  $\omega = \omega_o$  variando  $g \in G$ .

Entonces la órbita de  $\omega_o \in g^*$  bajo la acción coadjunta es

$$\mathcal{O}_{\omega_o} = Ad_G^* \omega_o = \{Ad_g^* \omega_o \mid g \in G\} \subset g^*.$$

Para el grupo lineal especial  $A_n = SL(n+1, \mathbb{C})$  formado por las matrices con determinante 1, resulta que el álgebra de Lie es isomorfa a su espacio dual. En efecto, sea

$$\varphi : sl(n+1, \mathbb{C}) \rightarrow sl^*(n+1, \mathbb{C})$$

tal que a cada  $M \in sl(n+1, \mathbb{C})$  le asocia el funcional  $\varphi(M) : sl(n+1) \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\varphi(M) X = \langle M, X \rangle = tr(MX^*),$$

donde  $X^*$  es la transpuesta conjugada de  $X \in \mathfrak{sl}(n+1)$ .

Veamos que  $\varphi$  es un homomorfismo.

Para cada  $X \in \mathfrak{sl}(n+1)$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(M_1 + M_2)X &= \langle M_1 + M_2, X^* \rangle \\ &= \langle M_1, X^* \rangle + \langle M_2, X^* \rangle \\ &= \varphi(M_1)X + \varphi(M_2)X \\ &= (\varphi(M_1) + \varphi(M_2))X,\end{aligned}$$

y si  $k \in \mathbf{C}$ ,  $\varphi(kM)X = \langle kM, X^* \rangle = k \langle M, X^* \rangle = k\varphi(M)X$ .

Además,

$$\begin{aligned}\text{Ker } \varphi &= \{M \in \mathfrak{sl}(n+1) \mid \varphi(M) \text{ es el funcional nulo}\} \\ &= \{M \in \mathfrak{sl}(n+1) \mid \langle M, X^* \rangle = 0 \ \forall X \in \mathfrak{sl}(n+1)\},\end{aligned}$$

y como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es no degenerado, el kernel de  $\varphi$  consta solamente de la matriz cero, de modo que  $\varphi$  es, de hecho, un isomorfismo.

Esto nos permite considerar la acción coadjunta  $Ad^* : G \times g^* \rightarrow g^*$  como la acción adjunta  $Ad : G \times g \rightarrow g$  para el caso del grupo lineal especial  $G = SL(n+1, \mathbf{C})$  con álgebra de Lie  $g = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$  formada por las matrices de traza cero. Y como el isomorfismo conmuta con la acción, las órbitas de la representación coadjunta del álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$  pueden considerarse como las órbitas de la representación adjunta.

Así, dada  $X$  en el álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$ , la órbita de  $X$  bajo la acción coadjunta puede considerarse como

$$\mathcal{O}_X = \{Ad_g X \mid g \in G\} = \{gXg^{-1} \mid g \in G\},$$

donde  $G = A_n = SL(n+1, \mathbf{C})$ .

### 3.2. La fibración de las órbitas regulares.

Sean  $E$ ,  $B$ , y  $F$  variedades diferenciables y  $\pi : E \rightarrow B$  una aplicación  $C^\infty$ . Recordemos que el triplete  $(\pi, E, B)$  es una *fibración* (o *haz fibrado*) con fibra  $F$ , base  $B$ , y espacio total  $E$  si:

i)  $\pi$  es sobreyectiva

ii) Existe una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $B$ , y difeomorfismos

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$$

tales que  $h_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times F$  para  $x \in U_i$ .

Existe una manera natural de asociarle una fibración con singularidad aislada a las órbitas regulares de la representación coadjunta del grupo de Lie complejo  $A_1 = SL(2, \mathbb{C})$ .

Una *órbita regular* consiste de todas las matrices con polinomio característico fijo sin raíces múltiples.

Como las matrices del álgebra de Lie  $sl(2, \mathbb{C})$  tienen traza cero, pueden escribirse como

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es  $p(\lambda) = \lambda^2 - (x^2 + yz)$ .

Así, una órbita regular de la acción

$$Ad : SL(2) \times sl(2) \rightarrow sl(2)$$

está formada por las matrices  $X$  cuyo polinomio característico  $p(\lambda)$  no tiene raíces múltiples.

Como sabemos,  $p(\lambda)$  tiene raíces múltiples solamente en el discriminante, que en este caso es la cuádrice de  $\mathbb{C}^3$  definida por la ecuación  $x^2 + yz = 0$ , que después de transformaciones elementales puede escribirse como  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ .

Esto nos lleva a la función de Morse  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

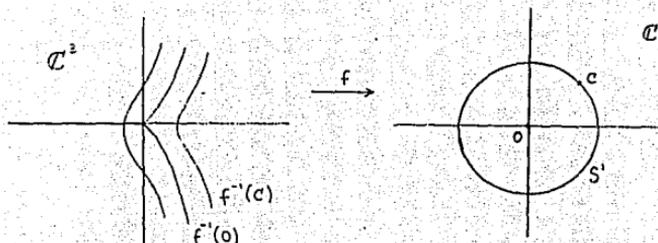
Cada órbita regular coincide con la superficie de nivel  $f^{-1}(c)$  para algún  $c \neq 0$ .

Así, la fibración de las superficies de nivel de la función  $f$  coincide con la fibración de las órbitas regulares de la representación coadjunta de  $A_1$ .

La fibra singular es la imagen inversa  $f^{-1}(0)$ . Las fibras no singulares,

$$F_c = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid f(z) = c \neq 0\}$$

son subvariedades complejas de  $\mathbb{C}^3$ . La base de esta fibrición es  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  cuyo grupo fundamental es isomorfo a  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ .



Consideremos el siguiente problema (Arnol'd, [Ar 4]). ¿Existen estructuras simplécticas en las órbitas regulares de manera que la monodromía de la fibrición resultante sea simpléctica?

Más precisamente, el problema de la monodromía simpléctica para una fibrición con fibras simplécticas consiste en lo siguiente.

Sea  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , un lazo en el espacio base de la fibrición con punto inicial y final  $c_0 = \gamma(0) = \gamma(t_0)$  tal que  $\gamma(t)$  defina un generador del grupo fundamental de la base.

El problema es ver si existe una familia de difeomorfismos  $\{\varphi_t\}$  de la fibra inicial  $f^{-1}(c_0)$  en la fibra  $f^{-1}(c_t)$  con la siguiente propiedad:  $\varphi_{t_0}$  es un generador de la representación inducida del grupo fundamental de la base en el grupo de difeomorfismos de la fibra inicial en sí misma.

Una familia  $\{\varphi_t\}$  que cumple con estas propiedades se dice que es un representante de la monodromía.

Este representante es simpléctico si además de cumplir con la propiedad mencionada, preserva la estructura simpléctica de las fibras.

El problema es pues, encontrar un representante simpléctico de la monodromía.

En la siguiente sección presentamos una solución a este problema para el caso  $A_1 = SL(2, \mathbb{C})$ ; (Ver Sánchez, [Sa]).

### 3.3. Monodromía simpléctica de las órbitas regulares.

Por lo visto en la sección 3.2, la fibración de las órbitas regulares de la representación coadjunta del grupo de Lie  $A_1 = SL(2, \mathbb{C})$  coincide con la fibración de las superficies de nivel regulares de la función de Morse  $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

donde  $x, y, z$  son coordenadas adecuadas en el espacio dual del álgebra de Lie de las matrices complejas de  $2 \times 2$  con traza cero.

Consideremos la versión compleja en  $\mathbb{C}^n$  de la fibración de Milnor ([Mil], p.53):

**Teorema.** Sea  $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  una función analítica con una singularidad aislada en el origen. Sean  $\Delta_\nu = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \nu\}$ ,  $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < \varepsilon\}$  y  $B_\varepsilon^\nu = f^{-1}(\Delta_\nu) \cap B_\varepsilon$ . Entonces existen  $\varepsilon, \nu > 0$  tales que  $(f, B_\varepsilon^\nu \setminus f^{-1}(0), \Delta_\nu \setminus \{0\})$  es una fibración suave sobre  $\Delta_\nu \setminus \{0\}$ .

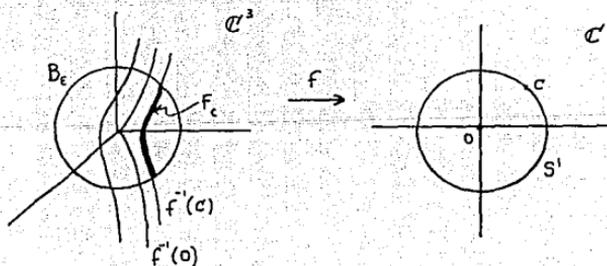
Para la función  $f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ , las fibras de Milnor,

$$f^{-1}(c) = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid f(z) = c \neq 0\}$$

tienen una estructura simpléctica natural cuya construcción mostramos enseguida.

La correspondencia  $z_j = x_j + iy_j$  nos permite identificar  $\mathbb{C}^3$  con  $\mathbb{R}^6$  asociando  $(z_1, z_2, z_3)$  con  $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ .

Sea  $\Omega = \sum_j dx_j \wedge dy_j$  la estructura simpléctica estándar de  $\mathbb{R}^6$ . Consideremos la restricción de  $\Omega$  a  $F_c = f^{-1}(c) \cap B_\varepsilon$  para toda  $c \in \Delta_\nu \setminus \{0\}$ . Esto es,  $\omega = i^* \Omega$ , donde



$i: F_c - \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$  es la inclusión,  $i^*\Omega = \Omega \circ i$ .

$$\begin{array}{ccc} T_x F_c & \xrightarrow{i_*} & T_x \mathbb{R}^6 \\ & \searrow \omega & \downarrow \Omega \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Claramente  $\omega$  es cerrada. Veamos que es no degenerada.

Dada  $z \in F_c$  debemos ver que para toda  $\eta \neq 0$  en  $T_x F_c$  existe un vector  $\mu \in T_x F_c$  tal que  $\omega(\eta, \mu) \neq 0$ .

Consideremos la estructura compleja estándar de  $\mathbb{R}^6$ ,  $J: T_x F_c \rightarrow T_x F_c$  definida por

$$J \left( \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \left( -y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Sea  $\mu = J(\eta) \in T_x F_c$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \omega(\eta, \mu) &= \omega(\eta, J(\eta)) \\ &= \sum_i dx_i \wedge dy_i(\eta, J(\eta)) \\ &= \sum_{i=1}^3 dx_i \wedge dy_i \left( \sum_{j=1}^3 \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \sum_{j=1}^3 \left( -y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right) \\ &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 \\ &= \sum_{j=1}^3 (x_j^2 + y_j^2) \\ &= |\eta|^2 > 0, \end{aligned}$$

de modo que  $\omega$  es una 2-forma simpléctica en  $F_c$ .

La idea es ver que esta forma simpléctica es preservada por una familia de difeomorfismos de la fibra de Milnor en sí misma, siendo esta familia un representante de la monodromía.

Para esto consideramos la acción de  $S^1$  en  $\mathbb{R}^6$  definida por

$$\sigma: S^1 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad \sigma(e^{2\pi i t}, z) = e^{2\pi i t} z$$

que desarrollando en coordenadas resulta

$$\begin{aligned} \sigma(t, z) &= (e^{2\pi i t} z_1, e^{2\pi i t} z_2, e^{2\pi i t} z_3) \\ &= (e^{2\pi i t} (x_1 + iy_1), e^{2\pi i t} (x_2 + iy_2), e^{2\pi i t} (x_3 + iy_3)). \end{aligned}$$

Esta acción define el campo vectorial

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma(t, z) = 2\pi e^{2\pi i t} (-y_1 + ix_1, -y_2 + ix_2, -y_3 + ix_3)$$

que evaluado en  $t = 0$  es

$$\frac{\partial}{\partial t} |_{t=0} \sigma(t, z) = 2\pi(-y_1 + ix_1, -y_2 + ix_2, -y_3 + ix_3)$$

el cual escribimos como

$$X_\sigma(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = 2\pi \sum_{j=1}^3 \left( -y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

o bien,

$$X_\sigma(z) = 2\pi \sum_{j=1}^3 J \left( z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right).$$

Este campo es hamiltoniano en  $(\mathbb{R}^6, \Omega)$  con función hamiltoniana

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \pi \sum_{j=1}^3 (x_j^2 + y_j^2) = \pi \sum_{j=1}^3 |z_j|^2,$$

ya que  $\forall \eta \in T_x \mathbb{R}^6$ ,  $dF(\eta) = \Omega(\eta, X_\sigma)$ .

Consideremos el flujo del campo vectorial  $X_\sigma$ ,  $\varphi_\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ . Como  $X_\sigma$  es hamiltoniano,  $\varphi_\sigma$  preserva la forma simpléctica  $\Omega$ , y por ser  $\omega$  la restricción de  $\Omega$  a la fibra, resulta que la restricción del flujo  $\varphi_\sigma(t_\sigma, \cdot)$  a la fibra  $F_\sigma$ , que denotamos por  $\tilde{\varphi}_\sigma(t_\sigma, \cdot)$  preserva la forma  $\omega$ .

Veamos ahora que  $\tilde{\varphi}_\sigma(t_\sigma, \cdot)$  es un representante de la monodromía.

Para esto, hacemos las siguientes consideraciones. Identificando  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  podemos ver a la función  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$  como la función de  $\mathbb{R}^6$  en  $\mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = (f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + if_2(x).$$

Desarrollando en coordenadas,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, y_3) &= (x_1 + iy_1)^2 + (x_2 + iy_2)^2 + (x_3 + iy_3)^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 (x_i^2 - y_i^2) + 2i \sum_{i=1}^3 x_i y_i. \end{aligned}$$

Así,

$$Df(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2y_1 & 2x_2 & -2y_2 & 2x_3 & -2y_3 \\ 2y_1 & 2x_1 & 2y_2 & 2x_2 & 2y_3 & 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Aplicando  $Df(z)$  al campo  $X_\sigma(z) = 2\pi \sum_{j=1}^3 \left( -y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$  obtenemos

$$\begin{aligned} Df(z)(X_\sigma(z)) &= 2\pi Df(z)(-y_1, x_1, -y_2, x_2, -y_3, x_3)^T \\ &= 4\pi \begin{bmatrix} -2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \\ x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 - y_3^2 \end{bmatrix} = 4\pi \begin{bmatrix} -f_2(z) \\ f_1(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esto nos dice que  $Df(z)(X_\sigma(z))$  es el mismo para toda  $z$  en la fibra

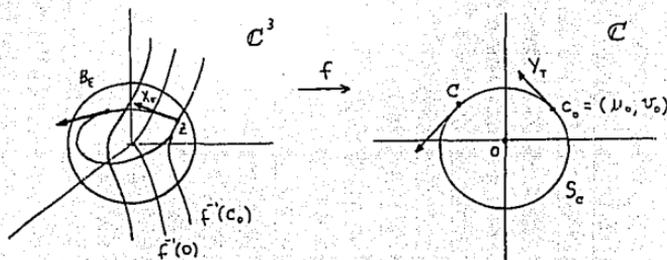
$$F_c = f^{-1}(c) \cap B_\epsilon.$$

Además, si consideramos el círculo  $S_c$  de  $\mathbb{R}^2$  con centro en el origen y radio la norma de  $c$ , tenemos que para cualquier  $c_o = (u_o, v_o) \in S_c$ , y  $z$  en la fibra correspondiente a este punto del círculo,  $F_{c_o}$ ,

$$Df(z)(X_\sigma(z)) = 4\pi(-f_2(z), f_1(z)) = 4\pi(-v_o, u_o).$$

Como  $(-v_o, u_o)$  es un vector ortogonal a  $(u_o, v_o)$ , resulta que  $Df(z)(X_\sigma(z))$  es un vector en el espacio tangente al círculo  $T_{c_o} S_c$ .

Entonces el campo hamiltoniano  $X_\sigma(z)$  es proyectado en un campo vectorial diferenciable  $Y_T(c)$  tangente al círculo  $S_c$  con norma constante  $4\pi|c|$ .



Sea  $\varphi_T: \mathbb{R} \times S_c \rightarrow S_c$  el flujo del campo  $Y_T(c)$ .

Este flujo está definido por  $\varphi_T(t, c) = e^{4\pi i t} c$ , mientras que el flujo determinado por el campo  $X_\sigma(z)$  es

$$\varphi_\sigma(t, z) = e^{2\pi i t} z = \left( e^{2\pi i t} z_1, e^{2\pi i t} z_2, e^{2\pi i t} z_3 \right).$$

Entonces, para toda  $z \in F_c$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(\varphi_\sigma(t, z)) &= f(e^{2\pi it} z_1, e^{2\pi it} z_2, e^{2\pi it} z_3) \\ &= e^{4\pi it} (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \\ &= e^{4\pi it} f(z) \\ &= \varphi_T(t, f(z)), \end{aligned}$$

de donde vemos que  $f$  conmuta con los difeomorfismos.

Para  $t = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi_T\left(\frac{1}{2}, c\right) = e^{2\pi i} c = e^{2\pi i} (u + iv) = u + iv = c$ , y no existe un número real positivo más pequeño  $t_0$  tal que  $\varphi_T(t_0, c) = c$ , por lo que este lazo define un generador del grupo fundamental de la base,  $C^*$ . Veamos cual es su levantamiento por  $f$ .

Para  $t = \frac{1}{2}$  se tiene que  $f\left(\varphi_\sigma\left(\frac{1}{2}, z\right)\right) = \varphi_T\left(\frac{1}{2}, f(z)\right)$  para toda  $z \in F_c$ , por lo tanto  $f\left(\varphi_\sigma\left(\frac{1}{2}, z\right)\right) = c$ .

Esto implica que  $\varphi_\sigma\left(\frac{1}{2}, z\right) \in f^{-1}(c) \forall z \in F_c$ . Entonces  $\varphi_\sigma\left(\frac{1}{2}, F_c\right) = F_c$ .

De modo que al recorrer el círculo  $S_c$  por

$$\gamma(t) = (u \cos 4\pi t - v \sin 4\pi t, u \sin 4\pi t + v \cos 4\pi t),$$

tenemos que  $\gamma(0) = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (u, v)$  y la función  $f$  manda

$$u(t) = (e^{2\pi it} z_1, e^{2\pi it} z_2, e^{2\pi it} z_3)$$

en  $\gamma(t)$ .

Así,  $\varphi_\sigma\left(\frac{1}{2}, \cdot\right)$  es un representante de la monodromía de  $f$  tal que para toda  $z \in F_c$ ,  $\varphi_\sigma\left(\frac{1}{2}, z\right) = e^{\pi i} z = -z$ .

## APENDICE

### El anillo de los gérmenes

**Definición.** Sean  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones holomorfas donde  $U, V$  son abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y  $0 \in U \cap V$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son *equivalentes* ssi existe un abierto  $W \subset U \cap V$ , conteniendo al 0, tal que  $f = g$  en  $W$ .

Es claro que esta es una relación de equivalencia.

**Definición.** Un *germen* de una función holomorfa en el origen de  $\mathbb{R}^n$  es una clase de equivalencia definida por la relación anterior.

Tales gérmenes en el origen se denotan por  $[f] : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  o simplemente por  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ .

El conjunto de los gérmenes de funciones holomorfas en el origen forma un *anillo conmutativo con unitario* bajo las operaciones de suma y producto heredadas:

$$[f] + [g] = [f + g], \quad [f] \cdot [g] = [f \cdot g].$$

Como el conjunto de los gérmenes también se puede ver como espacio vectorial real, la multiplicación definida arriba lo convierte, además, en un *álgebra sobre  $\mathbb{R}$* .

**Nota 1:** Si un germen cumple que  $f(0) \neq 0$  entonces, por continuidad,  $f(x) \neq 0$  en una vecindad del 0 y así, existe  $1/f(x)$  en el espacio de gérmenes y por lo tanto  $f$  es invertible (como elemento del anillo) en este espacio.

### El ideal maximal y sus potencias

Sea  $M_1$  el conjunto de los gérmenes de  $E_n$  que cumplen  $f(0) = 0$ . Entonces  $M_1$  es subgrupo aditivo de  $E_n$  y además  $g \in E_n$ ,  $f \in M_1$  implica  $gf \in M_1$ , de modo que  $M_1 \subset E_n$  es un *ideal* de  $E_n$ . Decimos que  $M_1$  es el ideal de los gérmenes 0-planos en 0.

Las derivadas parciales de un germen  $[f]$  son también gérmenes  $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$  bien definidos de  $E_n$ . Sea  $M_2$  el conjunto de los gérmenes de  $E_n$  que cumplen  $f(0) = 0$  y todas las primeras derivadas parciales de  $f$  se anulan en el origen:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $M_2$  es subgrupo aditivo de  $E_n$  por la regla para derivar sumas y si  $g \in E_n$ ,  $f \in M_2$  entonces  $(gf)(0) = 0$  y  $\frac{\partial}{\partial x_i}(gf)(0) = \frac{\partial g(0)}{\partial x_i} f(0) + g(0) \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} = 0$ , de modo que  $gf \in M_2$  y así,  $M_2$  es también un ideal de  $E_n$ . Es claro que  $M_2 \subset M_1$ . Llamamos a  $M_2$  el ideal de los gérmenes 1-planos en 0.

En general,  $M_{k+1}$  será el ideal de los gérmenes  $k$ -planos en 0, esto es,  $M_{k+1}$  es el conjunto de los gérmenes de  $E_n$  tales que  $f(0) = 0$  y todas las derivadas parciales de  $f$  de orden menor o igual a  $k$  también se anulan en el 0.

Que los  $M_k$  son todos ideales se sigue de las reglas de derivación de sumas y productos. Hemos construido así una sucesión de ideales  $M_k$  que satisfacen

$$E_n \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_k \supset M_{k+1} \supset \dots$$

### Ejemplos

1. Las proyecciones canónicas (o funciones coordenadas)  $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$  son elementos de  $M_1$ .
2. El monomio  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ , donde  $i_k$  es un entero no negativo con  $i_1 + i_2 + \dots + i_n = k$ , pertenece a  $M_k$ .
3. La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

cumple:  $f(0) = 0$ ,

$$f'(0) = \begin{cases} (2x^{-3}) \exp(-x^{-2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

$f \in M^\infty = \bigcap_{k=1}^\infty M_k$ .

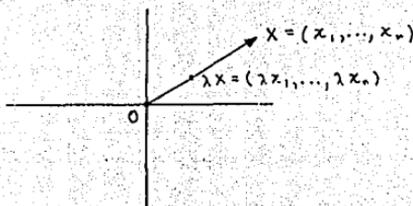
**Proposición.** (a)  $M_1$  está generado por las funciones coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

(b)  $M_k = M_k^k$  para toda  $k \geq 1$ .

Notación:  $M_1 = M$ , lo que transforma (b) en  $M_k = M^k$ .

*Prueba:* (a) Sea  $[f]$  un germen de  $E_n$ . Entonces si  $[0, x]$  es la línea que va del 0 a un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $df$  es la diferencial de  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty$ , entonces

$$\int_{[0, x]} df = f(x) - f(0)$$



Si parametrizamos  $[0, x]$  por  $\gamma(\lambda) = \lambda x$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , y hacemos  $\mu_i = \lambda x_i$ , podemos escribir

$$f(\gamma(\lambda)) = f(\lambda x) = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = f(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

y así,

$$\begin{aligned} (1): \quad f(x) - f(0) &= \int_\gamma df(\gamma(\lambda)) \\ &= \int_\gamma df(\mu_1, \dots, \mu_n) = \int_\gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \mu_i} d\mu_i \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\lambda x) \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda} d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i \frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\lambda x) d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\lambda x) d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n x_i h_i(x) \end{aligned}$$

donde  $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\lambda x) d\lambda$ .

Entonces la ec. (1) queda

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i h_i(x).$$

Ahora, las funciones  $h_i(x)$  son  $C^\infty$  y como  $f(0) = 0$  si  $f \in M_1$ , la ec. (1) prueba (a).

También prueba (b), pues si  $f \in M_k$ ,  $k > 1$ , entonces  $h_i \in M_{k-1}$ . Así, como  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i h_i(x)$ , se ve que  $f \in M \cdot M_{k-1}$ . Por lo tanto,

$$(*) \quad M_k \subset M \cdot M_{k-1}.$$

De modo que  $M_2 \subset M \cdot M_1 = M^2$ ,  $M_3 \subset M \cdot M_2$  pero  $M_2 \subset M^2$  implica  $M \cdot M_2 \subset M \cdot M^2$

y así,  $M_3 \subset M \cdot M^2 = M^3$ , etc...

Supongamos que  $M_{k-1} \subset M^{k-1}$ . Entonces  $M \cdot M_{k-1} \subset M \cdot M^{k-1}$  y por (\*), vemos que  $M_k \subset M \cdot M^{k-1} = M^k$ . Por inducción tenemos que  $M_k \subset M^k$  para todo entero  $k$ .

Por otro lado, es claro que  $M^k \subset M_k$ .  $\square$

Veamos ahora que  $M$  es el único ideal maximal propio de  $E_n$  ( $\neq E_n$ ).

Supongamos que  $I \subset E_n$  es un ideal con  $M \subset I \subset E_n$ ,  $M \neq I$ .

Entonces existe  $f \in I$  con  $f(0) \neq 0$ ,  $f$  es invertible por la nota 1. Como  $I$  es ideal,  $1 = f \cdot f^{-1} \in I$ , y así todo  $g \in E_n$  cumple que  $g = 1 \cdot g \in I$ , de modo que  $I = E_n$ .

Se sigue de ahí que  $M$  es maximal. Supongamos que existe otro ideal maximal  $N$  de  $E_n$  con  $M \neq N$ . El mismo argumento de arriba se aplica para obtener  $N = E_n$ , de modo que la unicidad queda establecida.

### El álgebra de los jets

Denotemos el álgebra cociente  $E_n/M^{k+1}$  por  $J^k(\mathbb{R}^n, 0)$ , o simplemente por  $J_n^k$ .

El producto en el álgebra de los polinomios se define por la multiplicación usual de polinomios, truncando todos los términos de grado  $> k$ .

Veamos cómo son los elementos de  $E_n/M^{k+1}$ .

Sabemos que son las clases laterales  $f + M^{k+1}$ , con  $f \in E_n$ . Dos górmes  $f, g$  de  $E_n$  están en la misma clase ssi  $(f - g) \in M^{k+1}$ .

Como  $f$  y  $g \in C^\infty$ , tienen desarrollos en serie de Taylor alrededor del cero. Esto nos permite escribir

$$f(x) = f(0) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) x_i + \frac{1}{2!} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j + \dots$$

$$g(x) = g(0) + \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(0) x_i + \frac{1}{2!} \sum \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j + \dots$$

De modo que

$$(f-g)(x) = (a_0 - b_0) + \sum (a_i - b_i) x_i + \frac{1}{1!} \sum (a_{ij} - b_{ij}) x_i x_j + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{k!} \sum (a_{i_1 \dots i_k} - b_{i_1 \dots i_k}) x_{i_1}^{i_1} \dots x_{i_k}^{i_k} + \dots$$

donde  $i_1 + \dots + i_k = k$ ,  $a_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0)$ ,  $b_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0)$ , etc...

Así,

$$\frac{\partial(f-g)(x)}{\partial x_i} = \sum (a_i - b_i) + \sum (a_{ij} - b_{ij}) x_j + \dots$$

$$\frac{\partial^k(f-g)(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = \sum (a_{i_1 \dots i_k} - b_{i_1 \dots i_k}) + \dots$$

De modo que  $(f-g) \in M^{k+1}$ , esto es, que  $(f-g)$  y todas sus derivadas parciales de orden  $\leq k$  se anulan en 0, si y sólo si

$$a_0 = b_0, \quad a_i = b_i, \quad \dots, \quad a_{i_1 \dots i_k} = b_{i_1 \dots i_k}.$$

Entonces,

$$f(x) = a_0 + \sum \alpha_i x_i + \dots + \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} x_{i_1}^{i_1} \dots x_{i_k}^{i_k} + p(x)$$

$$g(x) = a_0 + \sum \alpha_i x_i + \dots + \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} x_{i_1}^{i_1} \dots x_{i_k}^{i_k} + q(x)$$

donde  $a_0 = a_0 = b_0$ ,  $\alpha_i = a_i = b_i$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_{i_1 \dots i_k} = a_{i_1 \dots i_k} = b_{i_1 \dots i_k}$

y  $p(x), q(x) \in M^{k+1}$ . Esto nos dice que las clases de equivalencia en  $E_n/M^{k+1} = J_n^k$  son de la forma

$$\left( a_0 + \sum \alpha_i x_i + \dots + \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} x_{i_1}^{i_1} \dots x_{i_k}^{i_k} \right) + M^{k+1}, \quad \text{con } i_1 + \dots + i_k = k.$$

**Proposición.**  $J_n^k$  es isomorfo al álgebra de los polinomios en  $n$  variables cuyo grado es menor o igual a  $k$ .

*Prueba:* Sea  $\varphi: J_n^k \rightarrow \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$  definida por  $f + M^{k+1} \rightarrow f$ , donde  $f$  es un polinomio en  $n$  variables de orden  $\leq k$ . Veamos que  $\varphi$  es un isomorfismo.

Si  $f + M^{k+1}, g + M^{k+1} \in J_n^k$ , entonces

$$\begin{aligned} \varphi\left((f + M^{k+1}) + (g + M^{k+1})\right) &= \varphi\left((f+g) + M^{k+1}\right) \\ &= f+g = \varphi\left(f + M^{k+1}\right) + \varphi\left(g + M^{k+1}\right), \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \varphi\left((f + M^{k+1})(g + M^{k+1})\right) &= \varphi\left(fg + M^{k+1}\right) = fg \\ &= \varphi\left(f + M^{k+1}\right)\varphi\left(g + M^{k+1}\right). \end{aligned}$$

Además, si  $\varphi(f + M^{k+1}) = 0$ , entonces  $f = 0$  de modo que el kernel de  $\varphi$  consta solamente de  $M^{k+1}$ , que es el cero de  $J_n^k$ .  $\square$

Esta álgebra es llamada el *álgebra de los k-jets* de funciones  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $f \in E_n$ , su proyección en  $J_n^k$  puede considerarse como su polinomio de Taylor de orden  $k$  en cero. Denotamos esta proyección por

$$j^k : E_n \rightarrow J_n^k.$$

Similarmente, el espacio cociente  $M^k/M^{k+1}$  puede ser canónicamente identificado con el espacio vectorial real de los polinomios homogéneos en  $n$  variables de grado  $k$ .

En efecto, si  $f, g \in M^k$ ,  $(f - g) \in M^{k+1}$ ,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= a_{i_1 \dots i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} + a_{i_1 \dots i_{k+1}} x_1^{i_1} \dots x_{k+1}^{i_{k+1}} + \dots \\ g(x_1, \dots, x_n) &= b_{i_1 \dots i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} + b_{i_1 \dots i_{k+1}} x_1^{i_1} \dots x_{k+1}^{i_{k+1}} + \dots \\ (f - g)(x_1, \dots, x_n) &= (a_{i_1 \dots i_k} - b_{i_1 \dots i_k}) x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} + (a_{i_1 \dots i_{k+1}} - b_{i_1 \dots i_{k+1}}) x_1^{i_1} \dots x_{k+1}^{i_{k+1}} + \dots \\ &\quad (\text{si } i_1 + \dots + i_l = l) \end{aligned}$$

Entonces, todas las derivadas parciales de  $(f - g)$  de orden  $\leq k - 1$  claramente se anulan en  $(0, \dots, 0)$ . Ahora, para que también se anulen las derivadas parciales de orden  $k$ , es necesario que  $a_{i_1 \dots i_k} = b_{i_1 \dots i_k}$ , igual a, digamos,  $\alpha_k$ .

Así,  $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_k x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} + p(x_1, \dots, x_n)$  y  $g(x_1, \dots, x_n) = \alpha_k x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} + q(x_1, \dots, x_n)$ , donde  $p$  y  $q \in M^{k+1}$ .

Entonces,  $f, g \in (\alpha_k x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}) + M^{k+1}$ , de modo que las clases de equivalencia en  $M^k/M^{k+1}$  son de la forma  $(\alpha_k x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}) + M^{k+1}$ .

De ahí que existe un isomorfismo entre  $M^k/M^{k+1}$  y el espacio vectorial real de los polinomios homogéneos en  $n$  variables de grado  $k$ .

Para un mayor desarrollo remitimos al lector a Martinet, [M].

## Teoremas de transversalidad

Dadas  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y  $S$  una subvariedad de  $N$ , una función  $f: M \rightarrow N$  se dice *transversal a  $S$  en un punto  $x \in M$*  si  $f(x) \notin S$  o si  $f_*(T_x M) + T_{f(x)} S = T_{f(x)} N$ .



La función  $f: M \rightarrow N$  es *transversal a  $S$*  (denotado por  $f \pitchfork S$ ), si es transversal a  $S$  en  $x$  para todo  $x \in M$ .

Si  $f: M \rightarrow N$  es transversal a  $S$ , entonces la preimagen de  $S$  en  $M$  es una subvariedad de  $M$  y su codimensión en  $M$  es igual a la codimensión de  $S$  en  $N$ .

Algunas veces es de interés el caso cuando  $S$  no es una subvariedad diferenciable de  $N$ , sino más bien una subvariedad con singularidades, como sucede con las subvariedades estratificadas.

**Definición.** Una *subvariedad estratificada* de una variedad diferenciable es una unión finita de subvariedades diferenciables mutuamente ajenas (los *estratos*), tales que la cerradura de cada estrato consiste del estrato mismo y de una unión finita de estratos de dimensiones menores.

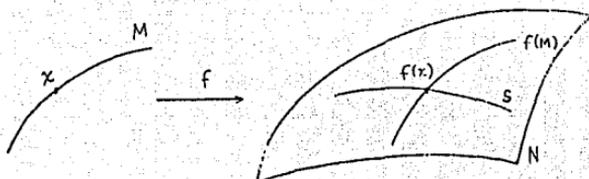
#### Ejemplo.

Sea  $S$  la unión de dos planos que se intersectan en una línea recta en  $\mathbb{R}^3$ . La estratificación es la partición formada por la línea recta y cuatro medios-planos.

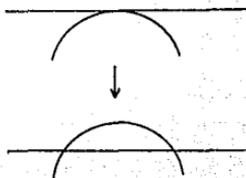
Transversalidad a  $S$  significa transversalidad a cada uno de los planos y transversalidad a la línea de intersección. Por ejemplo, una curva transversal a la subvariedad estratificada  $S$  no intersecta la línea recta de las singularidades de  $S$ .

**Teorema.** Sean  $M$  una variedad compacta y  $S$  una subvariedad compacta de una variedad  $N$ . Las funciones  $f: M \rightarrow N$  que son transversales a  $S$  forman un conjunto abierto y denso en el espacio de funciones diferenciables  $C^r(M, N)$ . (Aquí, la cercanía de funciones se define como la cercanía de las funciones y de sus derivadas hasta de un orden

suficientemente grande  $r$  ).



Este es el llamado teorema de transversalidad débil. Nos dice que la transversalidad es una propiedad genérica ( las funciones transversales forman un conjunto abierto y denso ), o de otra manera, el teorema afirma que si una aplicación no es transversal a una subvariedad dada, entonces puede hacerse transversal por una pequeña perturbación.



Si, por otra parte, una aplicación ya es transversal, esto se preserva bajo pequeñas perturbaciones.

El teorema de transversalidad puede extenderse al caso de subvariedades estratificadas. Sin embargo, en este caso, el teorema garantiza que las aplicaciones transversales forman solamente una intersección densa de un conjunto numerable de abiertos, mas que un abierto y denso.

Para que las funciones transversales a una subvariedad estratificada formen un abierto y denso es suficiente que la estratificación satisfaga la siguiente condición: toda inmersión transversal a un estrato de dimensión menor es transversal a todos los estratos contiguos de dimensión mayor en alguna vecindad del estrato de dimensión menor.

Por ejemplo, en el espacio de todas las matrices se tiene la estratificación que lo particiona de acuerdo a las distintas formas de Jordan. En esta partición se agrupan las matrices con las mismas dimensiones de bloques de Jordan, diferenciándose solamente en

los eigenvalores.

Aplicando el teorema de transversalidad débil ( Ver Arnold, [Ar 3] ), se tiene el

**Corolario.** *En el espacio de familias  $A : \Lambda \subset \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^n$ , de matrices de orden  $n$ , las familias transversales a la estratificación en tipos de Jordan constituyen un conjunto denso.*

La generalización del teorema de transversalidad débil es el Teorema de Transversalidad de Thom, en el cual la subvariedad  $S$  es una subvariedad de un espacio de jets.

Así como hablamos de jets de funciones, podemos hablar también de jets de gérmenes de funciones. Consideremos el conjunto de todos los  $k$ -jets de gérmenes de funciones  $C^\infty(M, N)$  de una variedad  $M$  en una variedad  $N$  :

$$J^k(M, N) = \text{espacio de } k\text{-jets de funciones de } M \text{ en } N.$$

**Teorema.** *Sea  $S$  una subvariedad del espacio de los  $k$ -jets  $J^k(M, N)$ . El conjunto de funciones  $f : M \rightarrow N$  cuyos  $k$ -jets son transversales a  $S$  forman una intersección numerable densa de abiertos en el espacio de todas las funciones  $C^\infty(M, N)$ .*

Este teorema significa que una función diferenciable puede llevarse a la posición general por una pequeña perturbación, no solamente respecto a cualquier subvariedad en el espacio imagen, sino también respecto a cualquier condición impuesta sobre las derivadas de cualquier orden finito.

### Variedades simplécticas

**Definición.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión par. Una *estructura simpléctica* en  $M$  es una 2-forma  $\omega$  diferenciable, cerrada y no degenerada en  $M$ :

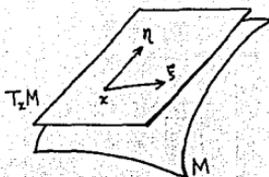
$$d\omega = 0 \text{ y } \forall \xi \neq 0 \exists \eta \text{ tal que } \omega(\xi, \eta) \neq 0 \quad (\xi, \eta \in T_x M).$$

El par  $(M, \omega)$  es llamado una *variedad diferenciable simpléctica*.

Por ejemplo, el espacio  $\mathbb{R}^{2n}$  con coordenadas  $(p_i, q_i)$  tiene la estructura simpléctica  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ .

**Definición.** A cada vector  $\xi$  tangente a una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  en el punto  $x \in M$  le asociamos una 1-forma  $\omega_\xi$  en  $T_x M$  mediante la fórmula

$$\omega_\xi(\eta) = \omega(\eta, \xi) \quad \forall \eta \in T_x M.$$



La correspondencia  $\xi \rightarrow \omega_\xi$  es un isomorfismo entre el espacio tangente  $T_x M$  y el espacio cotangente  $T_x^* M$ . Sea  $I : T_x^* M \rightarrow T_x M$  tal isomorfismo.

Ahora, sea  $H$  una función real valuada en una variedad simpléctica  $M$ . Entonces  $dH$  es una 1-forma diferencial en  $M$ , y en cada punto  $x \in M$  existe un vector tangente  $\xi \in T_x M$  asociado a esta 1-forma mediante el isomorfismo  $I$ .

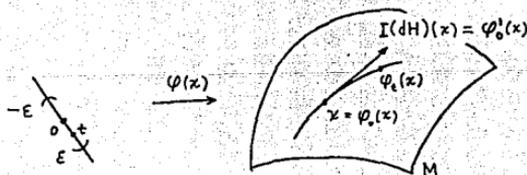
De esta forma obtenemos un campo vectorial  $I(dH)$  en  $M$ .

**Definición.** El campo vectorial  $I(dH)$  es llamado un *campo vectorial hamiltoniano* y  $H$  es su *función hamiltoniana*.

En otras palabras, un campo vectorial  $X$  es hamiltoniano si existe una función  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  en la variedad simpléctica  $(M, \omega)$  tal que  $\forall \eta \in T_x M, dH(\eta) = \omega(\eta, X)$ .

**Definición.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Supongamos que el campo vectorial  $I(dH)$  correspondiente a  $H$  da origen al grupo 1-paramétrico de difeomorfismos  $\varphi_t : M \rightarrow M$ :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t(x) = I(dH)(X).$$



La familia de difeomorfismos  $\{\varphi_t\}$  es llamada el *flujo hamiltoniano* de la función hamiltoniana  $H$ .

**Teorema.** *Un flujo hamiltoniano preserva la estructura simpléctica:*

$$\varphi_t^* (\omega) = \omega.$$

( Ver Arnol'd, [Ar 5] p. 204 ).

Esto significa que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{(\varphi_t)_*} & T_{\varphi_t(x)} M \\ \omega_x \searrow & & \downarrow \omega_x \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

esto es, que  $\forall \eta \in T_x M$ , si  $\varphi_t$  es el flujo del campo hamiltoniano  $X$ , entonces

$$\omega_X (\eta) = \varphi_t^* (\omega_X (\eta)) = \omega_X ((\varphi_t)_* (\eta)).$$

En el caso  $n = 1$ ,  $M = \mathbb{R}^2$ , este teorema nos dice que el flujo  $\varphi_t$  preserva el área (Teorema de Liouville).

Llamamos a la 2-forma  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$  en  $\mathbb{R}^{2n}$  la *forma simpléctica estándar*.

**Teorema de Darboux.** *Sea  $\omega$  una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada en una vecindad de  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ . Entonces, en alguna vecindad de  $x$  se puede elegir un sistema de coordenadas  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  tal que  $\omega$  tenga la forma estándar*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Para mayores detalles ver [Ar 5].

¿Qué se puede decir cuando la dimensión de la variedad es impar?

En una variedad de dimensión impar no existe estructura simpléctica. Sin embargo, existe una estructura interesante llamada estructura de contacto.

Un elemento de contacto de una variedad diferenciable de dimensión  $n$  en un punto de la variedad es un subespacio vectorial de dimensión  $n - 1$  del espacio tangente a la variedad en ese punto.

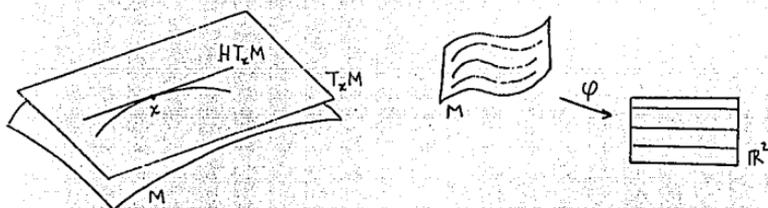
El conjunto de todos los elementos de contacto de una variedad de dimensión  $n$  es una variedad de dimensión  $2n - 1$ , donde existe una estructura de contacto.

Un elemento de contacto también es llamado un hiperplano tangente. Sobre un campo de hiperplanos tangentes puede definirse una condición de no degenerabilidad que

depende de una cierta forma diferencial definida en la variedad. Esta forma está relacionada con la integrabilidad de un campo de planos.

Una estructura de contacto en una variedad diferenciable es un campo suave de hiperplanos tangentes no degenerado.

Por ejemplo, si la dimensión de la variedad es  $n = 2$ , un campo suave de hiperplanos tangentes a la variedad es un campo de rectas en los planos tangentes. Un teorema básico de ecuaciones diferenciales ordinarias nos asegura que podemos cambiar un campo suave de líneas tangentes en una variedad en un campo de tangentes a una familia de líneas rectas en  $\mathbb{R}^2$  usando un difeomorfismo en una vecindad de un punto de la superficie. Este es el Teorema del Flujo Tubular:



Sea  $X$  un campo vectorial  $C^r$  en la variedad  $M$  y sea  $p \in M$  un punto regular de  $X$  ( $X(p) \neq 0$ ). Sean  $C = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^i| < 1\}$  y  $X_c$  un campo en  $C$  definido por  $X_c(x) = (1, 0, \dots, 0)$ . Entonces existe un difeomorfismo de clase  $C^r$ ,  $h : V_p \rightarrow C$ , donde  $V_p$  es vecindad de  $p \in M$ , llevando trayectorias de  $X$  en trayectorias de  $X_c$ .

(Ver Palis, [Pa], p. 40).

Si la dimensión de la variedad  $M$  es mayor o igual a 3, un hiperplano tangente tendrá dimensión mayor o igual a 2, y la situación ya no es tan simple.

Por ejemplo, existen campos de planos en  $\mathbb{R}^3$  que no son integrables como se muestra en el siguiente

**Ejemplo.** Si  $\omega$  es una 1-forma en  $\mathbb{R}^3$  y para  $v \in T_p \mathbb{R}^3$ ,  $\omega(v) = 0$ , entonces si  $(v_1, v_2, v_3)$  son las coordenadas locales de  $v$ , tenemos que

$$\omega \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) = 0,$$

de ahí que

$$v_1 \omega \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + v_2 \omega \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) + v_3 \omega \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) = 0,$$

esto es,

$$v \cdot N_p = 0, \text{ donde } N_p = \left( \omega \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), \omega \left( \frac{\partial}{\partial y} \right), \omega \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right).$$

De modo que el kernel de la 1-forma  $\omega$  es una familia de planos de  $\mathbf{R}^3$  cuyo campo normal tiene coordenadas locales  $\left( \omega \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), \omega \left( \frac{\partial}{\partial y} \right), \omega \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right)$ .

Consideremos la 1-forma  $\omega = x dy + dz$  de  $\mathbf{R}^3$ . El campo de planos definido por el kernel de  $\omega$  tiene vector normal local  $N_p = (0, x, 1)$ .

Veamos que esta familia de planos no es integrable. Esto es, no existe una superficie que sea tangente a la familia en la vecindad de un punto.

Supongamos que existe una superficie integral  $S$  en una vecindad del origen de coordenadas  $(0, 0, 0)$ . Entonces  $S$  es la gráfica de una función  $z = f(x, y)$ , con  $(x, y)$  en una vecindad del  $(0, 0)$ .

Como el campo de planos es independiente de  $y$ ,  $f(x, y) = f(x, 0)$ , de modo que  $z$  debe ser una función de  $x$  solamente, digamos  $z = g(x)$ .

Así, el valor de  $z$  es constante a lo largo de cualquier recta paralela al eje  $y$ , digamos  $x = x_0 \neq 0$  con  $|x_0| < \varepsilon$ , de modo que

$$(A.1) \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Sin embargo, si  $S$  es superficie integral, debe ser tangente a la recta en el plano paralelo al plano  $xy$  y que pasa por  $(x_0, 0, 0)$  con dirección perpendicular a  $N = (0, x_0, 1)$ , de modo que

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, 0) = -\frac{1}{m},$$

donde  $m$  es la pendiente de la recta que pasa por  $x_0$  con dirección  $N$ , es decir,  $m = \frac{1}{x_0}$ , luego debería ser  $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, 0) = -x_0 \neq 0$ , lo cual contradice (A.1). Por lo tanto no existe tal superficie integral.

## BIBLIOGRAFIA

- [Ar 1] V.I. Arnol'd, *On matrices depending on parameters*, Russian Math. Surveys, **26:2**(1971), 29 – 43.
- [Ar 2] V.I. Arnol'd, *Lectures on bifurcations and versal families*, Russian Math. Surveys, **27**(1972), 54 – 123.
- [Ar 3] V.I. Arnol'd, *Geometrical Methods in the theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [Ar 4] V.I. Arnol'd, *Some remarks on symplectic monodromy of Milnor fibrations*, A. Floer memorial volume, preprint.
- [Ar 5] V.I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, (1989).
- [AGV] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Birkhäuser, Boston, Vol. I : 1985, Vol. II : 1988.
- [AN] V.I. Arnol'd, S.P. Novikov (Eds.), *Dynamical Systems IV, Symplectic Geometry and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin (1990).
- [B] Brieskorn/Knörrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser (1986).
- [BG] Bruce/Giblin, *Curves and Singularities*, Cambridge University Press London.
- [DFN] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern Geometry-Methods and Applications, Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 104, Springer-Verlag, New York, (1985).
- [Ga] F.R. Gantmakher, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York (1969).
- [Ma] J. Martinet, *Singularities of Smooth Functions and maps*, London Mathematical Society Lecture Note Series 58, Cambridge University Press (1982).
- [Mil] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Studies, 61, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [OV] A.L. Onislichik, E.B. Vinberg, *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).
- [Pa] J. Palis, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- [Sa] F. Sánchez-Bringas, *A symplectic monodromy of wighted homogeneous*

*polynomials with isolated singularity*, Aportaciones Matemáticas,  
Comunicaciones 12 (1993) . 117 – 122.

[W] Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate  
Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag, New York, (1983).