

01174  
2  
201

**Universidad Nacional Autónoma de México**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**TESIS:**

**Análisis de Pruebas de Presión en Pozos de Gas y  
Condensado, considerando condiciones de Flujo de Alta  
Velocidad.**

**Que para obtener el grado de:  
MAESTRO EN INGENIERIA**

**P R E S E N T A**

**HECTOR HERNANDEZ GARCIA**

Directores de Tesis

**Dr. Fernando Samaniego Verduzco  
Dr. Rodolfo G. Camacho Velázquez**

*México D.F. Junio 1995.*

**FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Con todo mi amor a la compañera de mi vida:  
Rosa María.*

*Con mucho cariño a mis hijos:  
Héctor O.A., Jimena L.P. y Adriana I.*

*Con mi más profundo agradecimiento y con mucho  
amor para mis padres:  
Benito y Julia.*

*A mis hermanos (as) sus esposas (os) e hijos con  
mi más sincero cariño:  
Gloria, Benito, Emma, Germán y Erika.  
Jesús, María L, Rubén, Ma. Lourdes y Jorge L,  
Claudia, Omar, Jonathan, Benito III,  
Julia Ann, Rubén I, Laura, Rodrigo,  
Diana y Cecilia.*

---

## RECONOCIMIENTOS

---

*Durante el desarrollo del presente trabajo tuve la fortuna de contar con la dirección y asesoría de destacados profesionales a los cuales agradezco el tiempo y el esfuerzo dedicado tanto en mi formación como en la realización de este reporte. Por lo tanto deseo dejar constancia de mi agradecimiento a los doctores: Fernando Samaniego Verduzco y Rodolfo Camacho Velásquez ya que sus enseñanzas y consejos han sido fundamentales durante el desarrollo y finalización del presente trabajo. Además deseo agradecer a los doctores: Fernando Rodríguez de la Garza, Heber Cinco Ley y Luis Macías Chapa por los valiosos comentarios y sugerencias que surgieron durante la revisión de este trabajo.*

*También deseo agradecer tanto a las autoridades como a todos aquellos compañeros y amigos, del Instituto Mexicano del Petróleo y de la Universidad Nacional Autónoma de México, por las diferentes aportaciones que de una u otra forma contribuyeron a la realización del presente trabajo.*

*Un agradecimiento especial a los doctores: Alfredo Arriola Torres y Alma A. Porres Luna por las facilidades prestadas durante la culminación de este reporte.*

# CONTENIDO

<b>Resumen .....</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Tablas .....</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>vi</b>
<b>1.- Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>2.- Conceptos Generales .....</b>	<b>3</b>
2.1.- Clasificación de los fluidos del yacimiento .....	4
2.1.1.- Transferencia de masa de pruebas PVT convencionales. ....	7
2.2.- Métodos de balance de materia de composición variable. ....	10
2.2.1.- Modelos de tanque. ....	10
2.2.2.- El modelo radial 1-D. ....	12
<b>3.- El flujo a alta velocidad (No-Darcy) .....</b>	<b>13</b>
3.1.- La ecuación de Darcy .....	13
3.2.- La ecuación de Forchheimer .....	16
<b>4.- Desarrollo del modelo matemático. ....</b>	<b>20</b>
4.1.- El problema físico. ....	20
4.2.- Formulación Matemática. ....	22

## Contenido

4.3.- Incorporación de la ecuación de Forchheimer. ....	24
<b>5.- El modelo de flujo en diferencias finitas. ....</b>	<b>30</b>
<b>6.- Flujo en una fase. ....</b>	<b>40</b>
6.1.- Método de solución. ....	41
<b>7.- Flujo de dos fases (Bifásico). ....</b>	<b>47</b>
7.1.- Método de solución. ....	48
7.2.- Desarrollo de las ecuaciones para flujo en dos fa- ses. ....	49
7.3.- Cálculo de las derivadas de $IFT_m$ ....	51
Parcial de $IFT_m$ con respecto a presión. ....	51
Parcial de $IFT_m$ con respecto a composición. ....	55
<b>8.- Validación del Modelo. ....</b>	<b>58</b>
<b>9.- Discusión de Resultados. ....</b>	<b>65</b>
<b>10.- Conclusiones. ....</b>	<b>83</b>
<b>Nomenclatura. ....</b>	<b>86</b>
<b>Bibliografía. ....</b>	<b>88</b>
<b>Apéndice A.- Cálculo de las derivadas para el flujo en una fase. ....</b>	<b>93</b>
Desarrollo de las derivadas para flujo en una fase. ....	94

## Contenido

Desarrollo de la parcial por flujo a alta velocidad con respecto a presión .....	96
Cálculo de la parcial $iFT_{m+1}$ con respecto a $Q_j$ .....	98
Obtención de las parciales involucradas en las condiciones de frontera .....	100
<b>Apéndice B.- Desarrollo de las parciales de densidad y viscosidad con respecto a presión. ....</b>	<b>104</b>
Parcial de densidad con respecto a presión. ....	104
Cálculo de la viscosidad y de la parcial de viscosidad con respecto a presión .....	108
<b>Apéndice C.- La ecuación de flujo. ....</b>	<b>114</b>
Cálculo de las constantes para consistencia de unidades .....	114
Desarrollo de la expresión para $v_{rf}$ (velocidad radial para la fase f) .....	117
Aproximación en diferencias finitas en las fronteras de los nodos $m + 1/2$ y $m - 1/2$ al nivel de tiempo $n + 1$ . ....	121
Correlación para el cálculo del coeficiente de flujo No-Darcy .....	123
<b>Apéndice D.- Flujo de Gas y Condensado a alta velocidad en estado estacionario. ....</b>	<b>125</b>

---

## Resumen

---

En el presente trabajo se muestran los resultados obtenidos del estudio de la influencia del flujo a alta-velocidad en la interpretación de pruebas de presión en yacimientos de gas y condensado. Un modelo composicional radial de una dimensión al cual se le acopló la ecuación de Forchheimer, fué utilizado para la generación de los resultados presentados en este trabajo. Se simularon pruebas de decremento e incremento de presión. Debido a que en la literatura no se dispone de resultados para flujo de gas y condensado que consideren alta-velocidad, la verificación de los resultados obtenidos del simulador tuvo que efectuarse de forma cuidadosa. Para esto de acuerdo con el método de Camacho y cols., los resultados de flujo multifásico en alta-velocidad fueron graficados en términos de  $dp_{pVD}/d\ln t_D$  contra  $1/t_D^{1/2}$ , presentando una pendiente positiva, característica del flujo a alta velocidad, la cual extrapola correctamente al valor de 0.5 correspondiente a flujo Darcy. Se encontró que resultados de pruebas de decremento graficados en términos de la pseudopresión adimensional en el pozo contra  $t_D$  mostraron para tiempos largos la pendiente característica a una fase cuyo valor es 1.151. Como se espera, los efectos de flujo a alta-velocidad resultan en una aparición temprana de la fase líquida en el yacimiento.



## Lista de Tablas

<b>2.1.- Composiciones típicas de aceites de yacimiento. ....</b>	<b>7</b>
<b>8.1.- Composición a la presión de rocío. ....</b>	<b>61</b>
<b>9.1.- Resultados para pruebas de decremento e incremento de las figuras 9.6 a 9.9, utilizando pseudo- presión adimensional ecuación 9.9. ....</b>	<b>79</b>

## Lista de Figuras

<b>2.1.- Diagrama de fase presión temperatura típico de sistemas de hidrocarburos. ....</b>	<b>4</b>
<b>2.2.- Diagrama presión temperatura de diferentes sistemas de fluidos de yacimientos. ....</b>	<b>6</b>
<b>2.3.- Curva típica de gas en solución para un yacimiento de aceite negro. ....</b>	<b>8</b>
<b>2.4.- Curva típica de líquido retrógrado de los sistemas de gas y condensado. ....</b>	<b>9</b>
<b>2.5.- Comportamiento típico de los sistemas de aceite volátil. ....</b>	<b>9</b>
<b>4.1.- Volumen de control utilizado en la derivación de la ecuación de flujo para el componente i. ....</b>	<b>22</b>
<b>8.1.- Datos de permeabilidad relativa. ....</b>	<b>59</b>
<b>8.2.- Datos de expansión a composición constante.</b>	<b>60</b>

8.3.- Validación del modelo una fase. ....	62
8.4.- Respuesta de presión en el pozo. ....	63
8.5.- Comparación de resultados utilizando ambos lados de la ecuación D7. ....	64
9.1.- Efecto de la permeabilidad en la respuesta pa- ra flujo No-Darcy. ....	68
9.2.- Presión de fondo fluyendo y saturación de gas contra tiempo. ....	69
9.3.- Comportamiento de pseudopresión bajo condi- ciones de flujo laminar y no-laminar ( $s = 10$ ). ....	70
9.4.- Comportamiento de la derivada de pseudopre- sión contra $t_D$ , flujo no-laminar ( $s = 0$ ). ....	71
9.5.- Comportamiento de la derivada de pseudopre- sión contra $1/t_D^{0.5}$ , flujo no-laminar ( $s = 0$ ). ....	72
9.6.- Pseudopresión adimensional, comparación en- tre flujo laminar y no-laminar. ....	74

<b>9.7.- Derivada de pseudopresión contra <math>t_D</math>, flujo laminar y no-laminar (<math>s = 5</math>). . . . .</b>	<b>75</b>
<b>9.8.- Derivada de pseudopresión con respecto a <math>\ln t_D</math>, flujo laminar y no-laminar (<math>s = 5</math>). . . . .</b>	<b>76</b>
<b>9.9.- Pseudopresión al cierre, flujo laminar y no-laminar (<math>s = 5</math>). . . . .</b>	<b>77</b>
<b>9.10.- Comparación entre permeabilidad relativa calculada y obtenida del simulador. . . . .</b>	<b>80</b>
<b>9.11.- Comportamiento de presión al cierre para dos pruebas de incremento. . . . .</b>	<b>81</b>
<b>9.12.- Comportamiento de saturación en el pozo al cierre para dos pruebas de incremento. . . . .</b>	<b>82</b>

---

## 1.- Introducción

---

El estudio del comportamiento tanto de yacimientos de gas y condensado como de aceite volátil, requiere del uso de un modelo que considere el intercambio de masa entre las distintas fases. Este tipo de yacimientos se encuentran a presión inicial en una sola fase y conforme declina la presión alcanzan su punto de saturación, entrando a la región de dos fases, presentándose a partir de entonces una variación composicional, tanto del líquido como del gas, en el yacimiento conforme sigue declinando la presión.

Yacimientos de estas características se encuentran en el sureste de nuestro país en el área de Chiapas-Tabasco debido a lo cual es necesario el estudio de dichos yacimientos mediante el uso de simuladores que nos representen de manera adecuada el cambio composicional que se presenta durante su explotación.

Por otra parte se ha demostrado<sup>1</sup> que el flujo en pozos de gas y condensado que producen a altos gastos se aleja del comportamiento previsto por la Ley de Darcy (proporcionalidad del gasto con respecto al gradiente de potencial o de presión), presentándose flujo a alta velocidad, por lo cual debe considerarse

## Introducción

un modelo de flujo que tome en cuenta este fenómeno.

De los hechos anteriores se llegó a la conclusión de que se necesitan desarrollar modelos que consideren estos efectos, a fin de obtener una caracterización más confiable de los yacimientos que presenten estas características.

El modelo desarrollado en el presente trabajo contempla estos fenómenos a nivel de un pozo en un sistema radial de una dimensión. Los modelos de composición variable necesitan de una ecuación de estado que describa y reproduzca el comportamiento de las fases de los fluidos en el yacimiento y para esto, el modelo utiliza la ecuación de estado propuesta por Redlich-Kwong y modificada por Zudkevich-Jofee<sup>2</sup>. El desarrollo del simulador numérico utilizado en este trabajo se basó en el modelo presentado por Jones<sup>3</sup>.

Para considerar el flujo a altas velocidades se empleó la ecuación de Forchheimer<sup>4</sup>, la cual es una ecuación cuadrática en velocidad y que ha demostrado su aplicabilidad para este tipo de problemas de flujo.

---

## 2.- Conceptos Generales

---

En la simulación composicional la composición de las fases que constituyen la mezcla de hidrocarburos además de las presiones y saturaciones de cada fase, son tratadas como variables que entran en la solución del problema del comportamiento del yacimiento.

A fin de describir apropiadamente el método utilizado para la solución de este problema se revisarán en este capítulo algunos conceptos empleados en el planteamiento y solución del problema de simulación numérica de este tipo de yacimientos.

También se presenta una breve reseña de los modelos de tanque, que fueron empleados en los inicios del planteamiento del balance de materia composicional, y conceptos referentes al modelo radial 1-D que se empleó en la formulación del problema en este trabajo.

## 2.1.- Clasificación de los fluidos del yacimiento

Los fluidos de un yacimiento y aún los yacimientos mismos son generalmente clasificados<sup>5,6</sup> de acuerdo al comportamiento de fase que exhibe la mezcla de hidrocarburos que componen el fluido del yacimiento.

Esta clasificación comunmente se ilustra en un diagrama de fase presión-temperatura como se muestra en la siguiente figura.

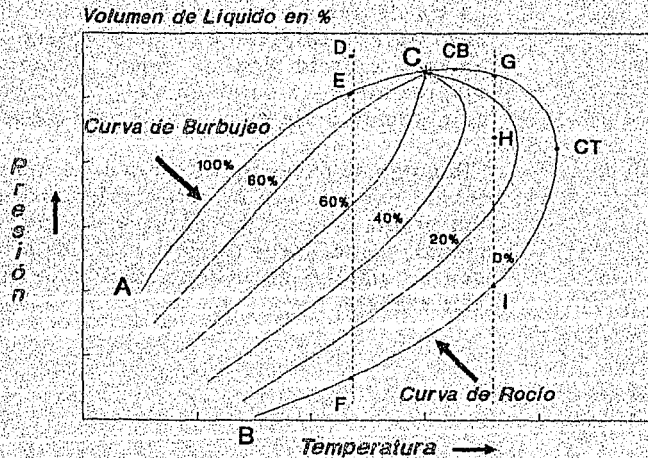


Figura 2.1.- Diagrama de fase presión temperatura típico de sistemas de hidrocarburos.



Esta figura presenta el comportamiento del fluido de un yacimiento hipotético. Aquí la línea continua ACB delimita la región de dos fases de la mezcla. Dentro de esta región se encuentran las curvas de calidad, las cuales representan el porcentaje en volumen líquido de la mezcla en dos fases. El punto C, que es el lugar donde convergen las líneas de calidad, se conoce como el punto crítico de la mezcla y está definido como aquel punto, sobre la envolvente de dos fases, donde desaparece cualquier distinción entre las fases líquida y vapor. Esto es, la composición, densidad, viscosidad, etc., de una fase es idéntica a la propiedad correspondiente de la otra fase.

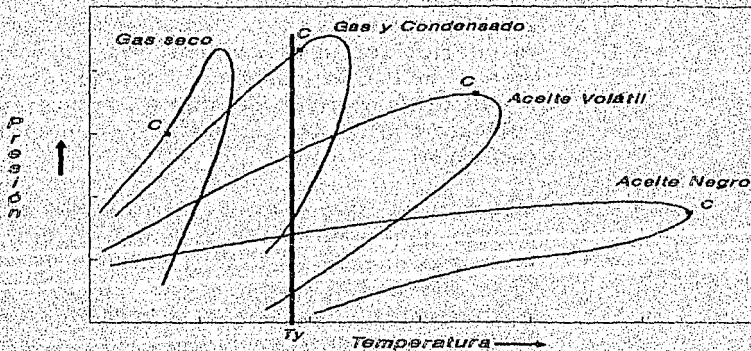
Las líneas de porcentaje en volumen son las fronteras de la región de dos fases. La línea correspondiente al 100% de líquido es la curva del punto de burbujeo y la línea de 0% de líquido corresponde a la curva del punto de rocío. La máxima presión a la cual puede existir una región de dos fases, es conocida como la Cricondenbara (CB) y la máxima temperatura es denominada la Cricodenterma (CT). En la figura 2.1, el punto crítico C se encuentra a una temperatura inferior que la Cricodenterma y a una presión menor que la Cricondenbara. Y aunque esto no es un requisito, la posición del punto crítico sobre la envolvente bifásica ayuda a definir el tipo de fluido del yacimiento.

Existen dos tipos básicos de procesos en el yacimiento que comprenden comportamiento bifásico, los cuales pueden ser descritos usando la figura 2.1. Si se inicia en el punto D, y se reduce la presión a una temperatura constante, la primera señal de una fase de vapor ocurre en la línea del punto de burbujeo, punto E. Reducciones posteriores en la presión resultan en la formación de porcentajes crecientes de vapor, hasta que la línea del punto de rocío es alcanzada en el punto F; una vez alcanzado este pun-

to, el fluido permanece íntegramente en la fase vapor.

Para un proceso similar de reducción de presión pero a una temperatura mayor que la temperatura crítica, el fenómeno observado es completamente diferente. Esto es ilustrado por la línea GHI en la figura 2.1, donde el primer encuentro con la envolvente bifásica ocurre en un punto de rocío (punto G), en lugar de un punto de burbujeo. Conforme la presión continúa disminuyendo, el contenido de líquido se incrementa hasta que alcanza el punto H. Reducciones posteriores en presión resultan en una revaporización del líquido hasta que se llega de nuevo a un punto de rocío (punto I). Este proceso de G a H es llamado condensación retrograda.

En la figura 2.2 se presentan diagramas P-T típicos de cuatro clasificaciones generales de fluidos de yacimientos; aceite negro, aceite volátil, gas y condensado y gas seco. Se observa que la temperatura del yacimiento es muy importante en la clasificación del fluido.



**Figura 2.2.- Diagramas presión temperatura de diferentes sistemas de fluidos de yacimientos.**

A su vez en la Tabla 2.1 se muestran composiciones típicas<sup>5,6</sup>, en por ciento mol, para cada uno de estos fluidos

**Tabla 2.1.- Composiciones típicas de aceites de Yacimiento.**

	<i>Metano</i> (% mol)	<i>Intermedios</i> (% mol)	<i>Heptano +</i> (% mol)
Aceite Negro	30	35	35
Aceite Volátil	55	30	15
Gas y Condensado	70	22	08
Gas Seco	90	09	01

La diferenciación entre este tipo de fluidos no siempre es clara y precisa y por lo tanto, las conclusiones acerca del comportamiento del yacimiento basadas únicamente en el tipo de fluidos presentes, deben considerarse como tentativas. Solamente un estudio detallado de la naturaleza del sistema de hidrocarburos y el proceso de agotamiento del yacimiento, pueden producir resultados correctos en relación al tipo de fluidos y de yacimiento con el que se está tratando.

### **2.1.1.- Transferencia de masa de pruebas PVT convencionales.**

Existe un número de pruebas<sup>5,6</sup> que se efectúan rutinariamente sobre muestras de fluido de yacimiento para determinar sus características presión-volumen-temperatura (PVT). Los resultados de estas pruebas son, por lo general, utilizados directamente en las técnicas de análisis del comportamiento del yacimiento.

Cuando el fluido del yacimiento puede caracterizarse como aceite negro, se efectúa una prueba de separación diferencial. En esta prueba la presión de la

muestra de fluido se reduce de acuerdo a ciertos decrementos de presión y, después de cada uno de ellos se remueve la fase de gas en su totalidad y se cuantifica su volumen. El resultado es una curva de gas en solución tal como se muestra en la figura 2.3. Esta curva representa la masa transferida de la fase aceite a la fase gas como función de la presión.

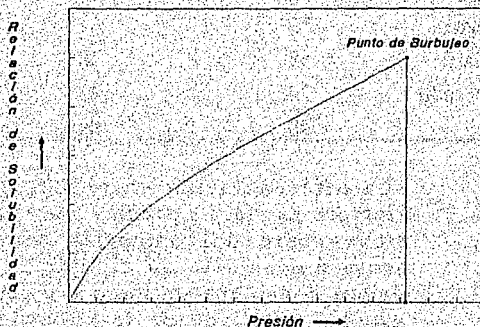
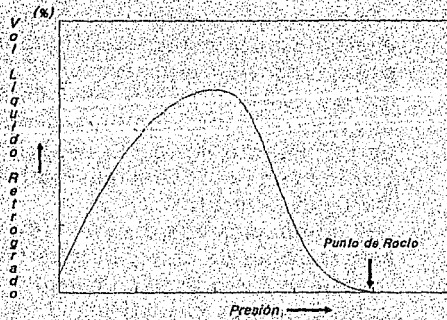


Figura 2.3.- Curva típica de gas en solución para un yacimiento de aceite negro.

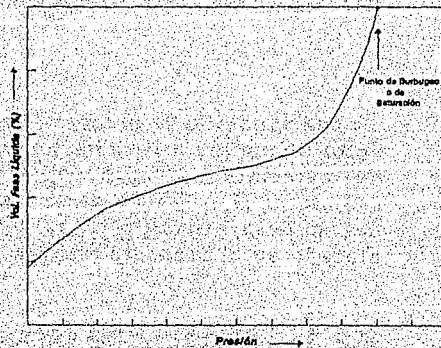
Para un sistema de gas y condensado, normalmente se efectúa una prueba de agotamiento a volumen constante<sup>5</sup>. Estas pruebas consisten en disminuir la presión en forma similar a la que se comentó para los aceites negros, removiendo después de cada decremento el gas del sistema sólo en la cantidad suficiente que permita regresar la muestra a su volumen original que se tenía al inicio de la prueba, la cual normalmente es la presión de rocío. La cantidad de líquido que se condensa de la fase vapor, se mide después de cada etapa, y con estos datos se construye la curva de porcentaje en volumen de líquido como se ilustra en la figura 2.4.

Para los sistemas de aceite volátil, se efectúa el mismo tipo de prueba y la curva de porcentaje en volumen de líquido obtenido se muestra en la figura 2.5.



**Figura 2.4.-** Curva típica de líquido retrogrado de los sistemas de gas y condensado.

Una de las características de los sistemas de aceite volátil es el rápido encogimiento del líquido cerca de su punto de burbujeo. En ambos casos, yacimientos de aceite volátil y de gas y condensado, la transferencia de masa que tiene efecto en el yacimiento esta dada por la curva de porcentaje en volumen de líquido como una función de la presión únicamente. Después de cada etapa de agotamiento se determina la composición de la fase vapor. La cual se utiliza normalmente para efectuar cálculos de separación superficial.



**Figura 2.5.-** Comportamiento típico de los sistemas de aceite volátil.

Cuando las funciones de transferencia de masa de cualquiera de estas tres pruebas (ya sea, curvas de gas en solución o porcentaje de volumen líquido) se utilizan para predecir el comportamiento del yacimiento, se supone que las composiciones del fluido de yacimiento muestran esencialmente la misma variación con la presión que la observada en el análisis PVT del laboratorio.

Si suponemos una distribución vertical uniforme de saturaciones de fase y la presión en el yacimiento se mantiene a una presión mayor a la presión de saturación, entonces se justifica el uso directo de la información PVT convencional, si cualquiera de las dos condiciones anteriores no se cumple, entonces nos encontramos con un problema donde el efecto de variación composicional puede ser importante y el uso directo de la información PVT convencional no puede ser suficiente para obtener una buena representación del fenómeno de transferencia de masa que tiene lugar en el yacimiento<sup>5,6</sup>.

## **2.2.- Métodos de balance de materia de composición variable.**

A continuación se presenta un resumen de los modelos de tanque utilizados en los cálculos de balance de materia y conceptos relacionados con modelos radiales 1-D, a fin de presentar un panorama claro del modelo utilizado en la solución del problema atacado en el presente trabajo.

### **2.2.1.- Modelos de tanque.**

Los métodos de balance de materia consideran al yacimiento como un tanque, y estos constituyeron las

primeras técnicas para la predicción del comportamiento de los yacimientos.

Jacoby y Berry<sup>7</sup> puntualizaron el hecho de que un proceso de vaporización predeterminado en laboratorio, no podía representar adecuadamente a todos los yacimientos. Ellos propusieron una modificación a los métodos de balance de materia convencionales, en los que el proceso de vaporización se determina por cálculos sucesivos de equilibrio vapor-líquido, basados en el comportamiento de presión del proceso de agotamiento del yacimiento. Las relaciones de equilibrio necesarias fueron obtenidas por ajuste de un conjunto de valores K, para aproximarlos con los datos PVT observados en forma experimental. Ellos presentaron su técnica específicamente para el caso de agotamiento de un yacimiento de aceite-volátil, pero hicieron hincapié en el hecho de que su método representa una generalización de los métodos PVT convencionales y, que por lo tanto puede ser aplicado también tanto para sistemas de aceite negro, como de gas y condensado.

Brinkman y Weinaug<sup>8</sup> presentaron un método similar para la predicción de yacimientos que producen por empuje de gas disuelto. Su técnica integró el aspecto "fase" al problema del cálculo del balance de materia. En esta técnica ellos obtuvieron los valores K directamente a partir de correlaciones publicadas, sin un intento aparente de ajustarlos con los datos experimentales. Doce años más tarde, Farley, Weinaug y Wolfe<sup>9</sup> describieron un método para predecir el comportamiento de agotamiento de fluidos de tipo gas y condensado, utilizando la ecuación de Benedict-Webb-Rubin para determinar las condiciones de equilibrio vapor-líquido.

La experiencia que se obtuvo en la formulación y el uso de modelos de balance de materia sirvió de base para el desarrollo de simuladores composicionales

## 2.2.2.- El modelo radial 1-D.

En ingeniería petrolera en estudios del flujo de fluidos hacia un pozo los yacimientos son a menudo idealizados considerándolos circulares y de espesor  $h$  constante, con un pozo abierto a producción en todo el espesor. Se considera que el flujo ocurre únicamente en la dirección radial, esto es, las líneas de flujo convergen hacia un punto central en cada plano y el área de la sección transversal el flujo decrece conforme se aproxima al centro. En ocasiones el flujo es dirigido hacia una línea axial común (central), referida como una línea-sumidero (o línea-fuente en el caso de un pozo de inyección). Este modelo de flujo es llamado modelo de flujo radial-cilíndrico, pero en la literatura petrolera es a menudo simplemente llamado flujo radial.

El modelo de flujo radial de una dimensión es útil para simular pruebas de formación y pruebas de incremento y decremento de presión, ya que los efectos que provoca la caída de presión en el pozo en el flujo de fluidos a lo largo de todo el yacimiento, no pueden simularse adecuadamente.

Para tomar en cuenta las caídas bruscas de presión que se tienen en la vecindad del pozo, se empleó un modelo de malla logarítmica radial para discretizar el yacimiento y así tener una densidad mayor de celdas en la parte más cercana al pozo y representar correctamente el flujo en esa región. El modelo de malla radial logarítmica utilizado se muestra con detalle en el Capítulo 5 de este trabajo.



---

## 3.- El flujo a alta velocidad (No-Darcy)

---

En este capítulo se presenta una discusión breve sobre la ecuación de flujo de Darcy, sus restricciones cuando se tiene flujo a altas velocidades y la utilización de una ecuación de flujo para representar el problema cuando se tiene flujo a altas velocidades. También se discute el uso de la ecuación de Forchheimer y la determinación del factor de corrección para la Ley de Darcy o coeficiente de flujo a alta velocidad, que interviene en la ecuación propuesta por Forchheimer<sup>4</sup>.

### 3.1.- La ecuación de Darcy

El flujo de fluidos del yacimiento hacia el pozo es causado por gradientes de presión a lo largo de la trayectoria de flujo y/o por drenaje gravitacional. Si suponemos flujo horizontal, no se consideran los efectos gravitacionales en el flujo. El perfil de presiones a lo largo de la trayectoria de flujo se caracteriza por una presión máxima en la frontera externa

y una presión mínima en la frontera interna, donde se localiza el pozo. Entre estos dos puntos la presión varía como una función de la distancia. La caída de presión en el yacimiento resulta de la disipación de energía mecánica o pérdida de momentum conforme el fluido fluye, debido a la resistencia natural del medio poroso. La trayectoria real de flujo es un sistema de canales pequeños e irregulares con una sección transversal muy variable. Esto hace impráctico el describir el flujo a lo largo de una trayectoria microscópica y tratar de tomar en cuenta en el régimen de flujo que se presente (laminar o turbulento), la distribución de velocidades, la superficie de contacto fluido-poro y así sucesivamente, todos los fenómenos que se presentan en flujo a nivel microscópico. En su lugar Darcy<sup>10</sup> eligió cuantificar el flujo de fluidos a través de medios porosos utilizando un modelo macroscópico.

En los experimentos llevados a cabo por Darcy, él estableció la relación empírica gasto-producción de flujo de fluidos a través de medios porosos, a la cual se le conoce como la ley de Darcy. La creación de una presión diferencial  $\Delta p$ , a través de un empacamiento de arena de longitud  $L$ , resulta en un gasto de flujo  $q$  constante dado por:

$$q = \left( \frac{CA \Delta p}{L} \right) \quad 3.1$$

donde  $A$  es el área de sección transversal del empacamiento de arena y  $C$  es una constante de proporcionalidad que indica tanto las características del fluido como del medio poroso. Las aproximaciones de Darcy en la cuantificación del fenómeno de flujo microscópico en términos de cantidades macroscópicas, es el fundamento de los cálculos de flujo de fluidos a través de medios porosos.

En 1934 Wycoff, Botset, Muskat y Meres<sup>11</sup> separaron la constante  $C$  en sus dos factores independientes, viscosidad  $\mu$  y permeabilidad  $k$ , expre-

sando independientemente los efectos del fluido y la roca. Ellos también fueron los primeros en introducir la unidad de permeabilidad, el darcy (D). Si escribimos la velocidad de flujo como la relación de gasto volumétrico al área de sección transversal perpendicular al flujo,  $v=q/A$ , la ecuación de Darcy puede ser expresada como:

$$v = \frac{k (p_2 - p_1)}{\mu L} \quad 3.2$$

donde la permeabilidad,  $k$ , es la facilidad con la cual un fluido fluye a través de un cierto medio poroso.

La ley de Darcy es aplicable a la gran mayoría de yacimientos de aceite y gas. La proporcionalidad entre la velocidad y la caída de presión es una interrelación simple, la cual permite que muchos problemas complicados de flujo puedan resolverse analíticamente. A altas velocidades de flujo, sin embargo, la Ley de Darcy deja de tener validez. Diversas observaciones han mostrado que a altas velocidades de flujo, deja de ser válida la proporcionalidad entre la velocidad de flujo y la caída de presión, aumentando esta última más rápidamente que lo que predice la Ley de Darcy. A bajas velocidades de flujo, la diferencia entre la caída de presión real y la calculada mediante la ley de Darcy es despreciable. Pero conforme la velocidad aumenta, la diferencia se vuelve significativa.

Varios modelos han sido desarrollados para representar el flujo a altas velocidades. El modelo más aceptado es la ecuación cuadrática propuesta por Forchheimer<sup>1</sup>.

## 3.2.- La ecuación de Forchheimer

Conforme la velocidad de flujo aumenta se presentan desviaciones de la ley de Darcy. Varios investigadores atribuyen esto a flujo turbulento (Fancher, Lewis y Barnes<sup>12</sup>, Elenbaas y Katz<sup>13</sup>, Cornell y Katz<sup>14</sup>) o a efectos inerciales (Hubbert<sup>15</sup>, Houpeurt<sup>16</sup>). La explicación generalmente aceptada (Wright<sup>17</sup>) es que, cuando la velocidad aumenta se presentan desviaciones debidas a efectos inerciales seguidos, a velocidades mayores, por efectos turbulentos.

Hubbert<sup>15</sup> notó desviaciones con respecto a la ley de Darcy a números de Reynolds mayores que 1 (basado en el diámetro de granos de medios porosos no-consolidados), mientras que la turbulencia no fué observada sino hasta que el número de Reynolds se aproximó a 600. Esta transición, más gradual que en el caso de flujo en tuberías, se debe al hecho de que en un medio poroso existe una distribución de tamaño de poros la cual es característica del medio poroso.

La ecuación de Forchheimer es la ecuación de flujo más utilizada para describir los efectos de flujo a altas velocidades en yacimientos petroleros. Esta ecuación parece ajustar en buena medida los resultados de laboratorio, incluyendo la transición gradual de flujo Darcy (laminar) a flujo no-lineal a altas velocidades.

La ecuación de Forchheimer agrega un segundo término de velocidad a la ecuación de Darcy y tiene la forma siguiente:

$$\frac{dp}{dr} = a v + b v^2 \quad 3.3$$

A velocidades de flujo pequeñas,  $bv^2$  es despreciable y la ley de Darcy puede ser aplicada. A velocidades altas,  $av$  es despreciable y la caída de presión es proporcional al cuadrado de la velocidad (análogamente al caso de flujo turbulento en tuberías). Durante el período de transición, de velocidades bajas a velocidades altas, los dos términos  $av$  y  $bv^2$  proporcionan la capacidad suficiente para ajustar el comportamiento obtenido del laboratorio. Los trabajos presentados por Green y Dewez<sup>18</sup> y Cornell y Katz<sup>14</sup> expresaron la ecuación de Forchheimer en términos de propiedades del medio poroso y de los fluidos, proporcionaron la forma necesaria para aplicar esta ecuación como una herramienta muy útil en los procesos de predicción del comportamiento de yacimientos. Estos autores concluyeron que la constante  $a$ , en la ecuación 3.3, es definida por la ley de Darcy como:

$$a = \frac{\mu}{k} \quad 3.4$$

y la constante  $b$  consiste de la densidad del fluido ( $\rho$ ) y de una constante empírica ( $\beta$ ), resultando en la siguiente expresión:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k} v + \beta \rho v^2 \quad 3.5$$

Donde el coeficiente  $\beta$  es llamado; coeficiente de velocidad, también a veces conocido como coeficiente de resistencia inercial, coeficiente de flujo No-Darcy o factor de turbulencia. La magnitud de  $\beta$  determina la desviación que se tiene de la ecuación de Darcy.

Para un sistema multifásico la ecuación 3.5 puede escribirse considerando las propiedades para cada fase. Entonces, para un sistema gas-líquido la ecuación

ción 3.5 puede expresarse con la viscosidad, densidad y velocidad de las fases líquida y gaseosa separadamente.

Los primeros datos de coeficientes de velocidad para varios medios porosos fueron publicados por Cornell y Katz<sup>14</sup>. Los coeficientes de velocidad fueron posteriormente correlacionados con la permeabilidad por Janicek y Katz<sup>19</sup> para varias lutitas, dolomitas y areniscas utilizando la porosidad como uno de sus parámetros de correlación. Ellos encontraron que  $\beta$  disminuye conforme se incrementa la permeabilidad y la porosidad.

Perez y Kelkar<sup>20</sup> en 1988, presentan una síntesis de los trabajos desarrollados sobre la estimación del coeficiente de flujo  $\beta$ . En su trabajo establecen que quizá la contribución más importante del trabajo de Wong<sup>21</sup>, al respecto, es la hipótesis de que el coeficiente de velocidad en dos fases puede calcularse a partir de correlaciones desarrolladas para el flujo en una fase reemplazando la permeabilidad absoluta por la permeabilidad efectiva.

A partir de esto se consideró el utilizar una de las correlaciones propuestas por Firoozabadi y Katz<sup>22</sup> para el cálculo del coeficiente de velocidad, en el planteamiento y solución del problema de esta tesis. La correlación elegida fué la representada por la ecuación 7 del trabajo de Firoozabadi y Katz<sup>22</sup>:

$$\ln \beta = m \ln k + b \quad 3.6$$

donde  $m$  y  $b$  adquieren los valores siguientes:

$$m = -1.201$$

y:

$$b = 23.83$$

Sustituyendo  $m$  y  $b$  en la ecuación 3.6 tenemos:

$$\ln \beta = -1.201 \ln(k) + 23.83 \quad 3.7$$

El desarrollo para expresar la ecuación 3.5 en función de la velocidad y propiedades de la fase se presenta en el Apéndice C de este trabajo. Así mismo se presenta en ese apéndice la expresión del coeficiente de velocidad en función de la permeabilidad efectiva.

---

## **4.- Desarrollo del modelo matemático.**

---

El planteamiento del problema desarrollado en el presente trabajo se abordará en dos etapas: primero presentando el problema físico que nos interesa resolver y a continuación la formulación matemática del problema, esto es, el empleo del principio de conservación de materia para obtener las ecuaciones diferenciales parciales que describen matemáticamente el problema físico:

### **4.1.- El problema físico.**

Uno de los principales objetivos de la ingeniería de yacimientos es el de representar y resolver de la manera más precisa posible, por medio de modelos matemáticos, los diferentes fenómenos que se presentan en el flujo de fluidos a través de medios porosos y hacia un pozo.



En el presente trabajo se muestra el desarrollo de un simulador numérico donde se considera un yacimiento cilíndrico cerrado, el cual es drenado por un pozo localizado en la parte central. El pozo penetra totalmente el yacimiento de espesor  $h$ . El yacimiento contiene inicialmente gas y condensado a una presión inicial,  $p_i$ , mayor que la presión de rocío,  $p_{dew}$ , del fluido.

La temperatura del yacimiento,  $T$ , es mayor que la Crincondenterma del fluido (ver Fig's 2.1 y 2.2). Así, conforme la presión del yacimiento disminuye por la extracción del pozo productor, se desarrolla una saturación de líquido retrogrado. Se supone que el flujo es puramente radial y que el yacimiento es homogéneo e isotrópico, excepto en una pequeña porción cercana al pozo, donde la permeabilidad es alterada para modelar una zona dañada.

También se supone que cualquier punto del yacimiento que se encuentre en dos fases, estas deben estar en equilibrio termodinámico. En el modelo además se desprecian los efectos gravitacionales y capilares, así como la presencia de una fase acuosa.

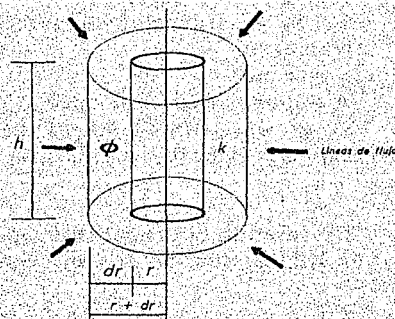
El modelo además de considerar el efecto de variación composicional toma en cuenta el efecto de flujo a altas velocidades, ocasionado por altos ritmos de producción de los pozos; este efecto es modelado utilizando la ecuación de flujo desarrollada por Forchheimer<sup>4</sup>, en lugar de ecuación de Darcy<sup>10</sup>.

La solución del problema así planteado es utilizada para el análisis de pruebas de presión de pozos que se encuentran en yacimientos de gas y condensado y aceite-volátil, que produzcan a altos ritmos de explotación.

## 4.2.- Formulación Matemática.

La solución del problema físico planteado anteriormente requiere de la utilización de un modelo matemático que represente de la forma más exacta posible, los fenómenos que se presenten dentro del yacimiento, al ocurrir el flujo de fluidos dentro del mismo hacia el pozo.

Para formular matemáticamente el problema, partimos del principio de conservación de materia, el cual aplicaremos a un elemento diferencial del yacimiento,  $dr$ , como se muestra en la figura 4.1.



**Figura 4.1.- Volumen de control utilizado en la derivación de la ecuación de flujo para el componente i.**

En este trabajo el fluido, gas y condensado, se trata como una mezcla de  $N_c$  componentes a partir de lo cual se obtiene la descripción matemática del flujo de cada componente.

Aplicando el principio de conservación de materia al volumen de control mostrado en la figura 4.1, para el flujo del componente  $i$  sobre el incremento de tiempo,  $dt$ , tenemos:

$$dt \left[ 2\pi r h (\rho_o v_o x_i + \rho_g v_g y_i) \right]_r - 2\pi (r + dr) h (\rho_o v_o x_i + \rho_g v_g y_i)_{r+dr} - 2\pi h \phi dr \left[ (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i)_{i+dt} - (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i)_i \right]$$

**4.1**

$$i = 1, 2, \dots, N_c$$

donde:

$N_c$  = número de componentes

$\rho_o, \rho_g$  = densidad molar de aceite y gas

$v_o, v_g$  = velocidad del aceite y gas

$S_o, S_g$  = saturación de las fases aceite y gas, respectivamente.

$h$  = espesor.

$\phi$  = porosidad de la roca.

$x_i, y_i$  = composición de las fases líquido y vapor respectivamente,  $i = 1, 2, \dots, N_c$ .

Dividiendo la ecuación 4.1 por  $(2\pi r h dr dt)$  y tomando límites cuando  $dr$  y  $dt$  tienden a cero tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (\rho_o v_o x_i + \rho_g v_g y_i) \right] = \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i)$$

**4.2**

$$i = 1, 2, \dots, N_c$$

$$r_w < r < r_e$$

$$t > 0$$

### 4.3.- Incorporación de la ecuación de Forchheimer.

Al considerar el flujo a alta velocidad la ecuación de Darcy deja de tener validez y en su lugar utilizaremos la expresión propuesta por Forchheimer<sup>4</sup>, la cual incorpora como se mostró en el Capítulo 3, efectos por flujo laminar, inercial y turbulento, ésta ecuación es de tipo cuadrático y tiene la forma siguiente para flujo radial multifásico<sup>1</sup> (Ver Apéndice C).

$$\frac{dp}{dr} = \left( \frac{\mu_f}{k_f} \right) v_{rf} + \beta_f \rho_f v_{rf}^2 \quad 4.3$$

donde:  $\beta_f$  = coeficiente de flujo No-Darcy para la fase f.

f = aceite(o), gas(g).

Rearreglando la ecuación 4.3:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu_f}{k_f} v_{rf} \left( 1 + \beta_f \rho_f v_{rf} \frac{k_f}{\mu_f} \right) \quad 4.4$$

Si consideramos:

$$\delta_f = \frac{1}{1 + \beta_f \rho_f v_{rf} \left( \frac{k_f}{\mu_f} \right)} \quad 4.5$$

para flujo No-Darcy:  $\beta > 1$  y  $\delta < 1$ , sustituyendo la ecuación 4.5 en la ecuación 4.4:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu_f}{k_f \delta_f} v_{rf} \quad 4.6$$

Despejando  $v_{rf}$  de la ecuación 4.6:

$$v_{rf} = \frac{k_f}{\mu_f} \delta_f \frac{dp}{dr} \quad 4.7$$

Donde  $k_f$  es la permeabilidad efectiva a la fase  $f$  (aceite o gas) y  $\mu_f$  es la viscosidad de la fase.

Dado que  $k_f$  es igual al producto de la permeabilidad absoluta del medio poroso ( $k$ ) por la permeabilidad relativa de la fase  $f$  ( $k_{rf}$ ), la cual es únicamente función de la saturación de la fase  $f$ , entonces:

$$k_f = k k_{rf} \quad 4.8$$

donde:  $k_{rf} = k_{rf}(S_i)$

Sustituyendo las ecuaciones 4.7 y 4.8 en la ecuación 4.2 tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{\rho_o}{\mu_o} k k_{ro} \delta_o x_i + \frac{\rho_g}{\mu_g} k k_{rg} \delta_g y_i \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i)$$

de donde, la ecuación de flujo para cada componente  $i$  es de la forma:

$$C_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ k \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o} \rho_o \delta_o x_i + \frac{k_{rg}}{\mu_g} \rho_g \delta_g y_i \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i) \quad 4.9$$

$$i = 1, 2, \dots, N_c$$

donde:

$C_1 = 0.00633$ , constante por conversión de unidades

$k$  = permeabilidad absoluta

$k_{ro}, k_{rg}$  = permeabilidad relativa al aceite y gas

$\mu_o, \mu_g$  = viscosidad del aceite y gas

$x_i$  = fracción mol en la fase gaseosa del componente  $i$

$y_i$  = fracción mol en la fase líquida del componente  $i$

$\delta_o, \delta_g$  = términos donde se considera el flujo a alta velocidad.

$\rho_o, \rho_g$  = densidad molar de aceite y gas

$S_o, S_g$  = saturación de aceite y gas

$N_c$  = número de componentes en la mezcla.

#### Condición inicial.

La condición inicial en la cual la presión en cualquier punto del yacimiento al tiempo cero es igual a la presión inicial (condiciones de equilibrio en presión), se expresa por medio de la siguiente ecuación:

$$p(r, 0) = p_i \quad 4.10$$

y para un yacimiento de gas y condensado con  $p_i > p_{dew}$  se tiene;

$$S_g(r, 0) = 1 \quad 4.10a$$

$$x_i(r, 0) = 0 \quad 4.10b$$

$$y_i(r, 0) = 1 \quad 4.10c$$

**Condición de frontera interior.**

Se considera que el gasto de producción molar del pozo,  $q_t$  es constante, lo cual se expresa mediante la siguiente expresión:

$$q_t = C_1 2\pi k h \left[ r \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g \right) \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r=r_w} \quad 4.11$$

o bien:

$$C_1 \frac{2\pi k h}{q_t} \left[ r \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g \right) \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r=r_w} = 1$$

**Condición de frontera exterior.**

En la frontera exterior ( $r = r_e$ ) se manejará la condición de frontera cerrada al flujo lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$C_1 2\pi k h \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r=r_e} = 0$$

lo que implica que:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_e} = 0 \quad 4.12$$

Las ecuaciones 4.9, conforman el esquema básico de ecuaciones diferenciales parciales que debemos resolver, sujetas a las condiciones iniciales y de fron-

tera expresadas en 4.10, 4.10a, 4.10b, 4.10c, 4.11 y 4.12.

Las densidades y viscosidades son función de la presión, temperatura y composición y para su obtención utilizaremos la ecuación de estado de Redlich-Kwong<sup>23</sup>, en su forma modificada por Zudkevich-Joffe<sup>23</sup> y la correlación de viscosidad de Lohrenz, Bray y Clark<sup>24</sup>.

Las permeabilidades relativas al aceite y gas se consideran función exclusiva de la saturación de la fase y en el modelo se manejarán en forma tabular, de la forma  $k_{ro}$  y  $k_{rg}$  en función de la saturación de aceite.

Entonces el problema consiste en obtener la solución en el dominio de espacio y tiempo del problema, de las incógnitas de presión, saturaciones y fracciones molé de las fases, es decir,  $p(r,t)$ ,  $S_o(r,t)$ ,  $S_g(r,t)$ ,  $x_i(r,t)$  y  $y_i(r,t)$  donde  $i = 1, 2, \dots, N_c$ .

El sistema planteado en la forma anterior consta por lo tanto de  $2N_c + 3$  variables pero hasta el momento solo contamos con  $N_c$  ecuaciones de flujo. Por lo que requerimos de ecuaciones adicionales a fin de estar en condiciones de resolver nuestro problema de flujo.

Las ecuaciones adicionales las obtendremos al considerar las definiciones de saturación y fracciones mol de donde tenemos que:

$$S_o + S_g = 1 \quad 4.13$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} x_i = 1 \quad 4.14$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} y_i = 1 \quad 4.15$$



Considerando estas 3 ecuaciones adicionales solo nos faltan  $N_c$  ecuaciones, las que obtendremos al establecer la condición de equilibrio termodinámico en el sistema; este equilibrio se tendrá si se cumple con la condición de que la fugacidad del componente  $i$  en la fase vapor,  $f_{i,v}$ , es igual a la fugacidad del componente  $i$  en la fase líquida,  $f_{i,l}$ . Las fugacidades se calcularán utilizando la ecuación de estado. Esta igualdad nos proporcionará las  $N_c$  ecuaciones restantes las cuales se establecen de la siguiente forma:

$$f_{i,v} = f_{i,l} \quad i=1,2,\dots, N_c \quad 4.16$$

Con las ecuaciones 4.9, 4.13, 4.14, 4.15 y 4.16 construiremos un conjunto de  $2N_c+3$  ecuaciones, el cual nos permite resolver las  $2N_c+3$  variables  $p(r,t)$ ,  $S_o(r,t)$ ,  $S_g(r,t)$ ,  $x_i(r,t)$  y  $y_i(r,t)$ .

---

## 5.- El modelo de flujo en diferencias finitas.

---

El conjunto de ecuaciones diferenciales planteado en el capítulo anterior es altamente no-lineal y no existe un método analítico general para su solución. Por lo tanto nos vemos en la necesidad de recurrir a una solución numérica. En este caso utilizaremos el esquema propuesto por Coats<sup>25</sup>.

El método de Coats consiste en la formulación de una aproximación en diferencias finitas para las ecuaciones de flujo y condiciones de frontera. Primeramente debemos representar el yacimiento de forma tal que estemos en posibilidad de asignar valores en puntos estratégicos del yacimiento en los cuales obtendremos la solución de presión, saturaciones y composiciones a diferentes tiempos conforme avanza la explotación del yacimiento.

El yacimiento será representado por medio de una malla de tipo logarítmico de bloque centrado en la dirección radial, calculando la localización radial de la celda  $m$ ,  $r_m$ , a partir de:

$$r_m = \alpha r_{m-1} \quad m = 1, 2, \dots, N \quad 5.1$$

donde tenemos que  $N$  es el número total de celdas que discretizan el yacimiento. El factor de distribución de los nodos,  $\alpha$  esta dado por:

$$\alpha = \left( \frac{r_e}{r_w} \right)^{\frac{1}{N}} \quad 5.2$$

y

$$r_1 = r_w \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) \ln \alpha \quad 5.3$$

se tiene además que

$$r_{1/2} = r_w \quad 5.4$$

y

$$r_{N+1/2} = r_e \quad 5.5$$

y las coordenadas de las fronteras de las celdas,  $r_{m+1/2}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N-1$ , se calculan como el promedio logarítmico de los nodos contiguos a las fronteras, esto es:

$$r_{m+1/2} = \frac{r_{m+1} - r_m}{\ln \left( \frac{r_{m+1}}{r_m} \right)} = \left( \frac{r_{m+1} - r_m}{\ln \alpha} \right)$$

o bien,

$$r_{m+1/2} = \alpha \cdot r_{m-1/2} \quad 5.6$$

El esquema de aproximación en diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales parciales y las condiciones de frontera, será planteado en términos de este modelo de malla radial logarítmica.

Aproximando el lado derecho de la ecuación 4.9 en el bloque de malla ( $m$ ), al nivel de tiempo ( $n+1$ )

para el componente (i), tenemos para la derivada en tiempo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i)_m^{n+1} &= \\ \frac{\phi}{\Delta t} \left[ (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i)_m^{n+1} - (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i)_m^n \right] & \\ = \frac{\phi}{\Delta t} \Delta t (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i)_m & \quad 5.7 \end{aligned}$$

La ecuación 5.7 representa el esquema en diferencias finitas regresivas en tiempo<sup>25</sup>.

El lado izquierdo de la ecuación 4.9 en el bloque de malla (m), al nivel de tiempo (n+1) y para el componente (i) tienen la siguiente forma:

$$C_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ k \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right]_m^{n+1} \quad 5.8$$

Si consideramos que:

$$\Delta r_m = r_{m+1/2} - r_{m-1/2} \quad 5.9$$

donde:

$$r_{m+1/2} = \left( \frac{r_{m+1} - r_m}{\ln \alpha} \right)$$

y:

$$r_{m-1/2} = \left( \frac{r_m - r_{m-1}}{\ln \alpha} \right)$$

entonces:

$$\Delta r_m = r_{m+1/2} - r_{m+1/2} = \left( \frac{r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}}{\ln \alpha} \right)$$

por lo que:

$$r_m \Delta r_m = r_m \left( \frac{r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}}{\ln \alpha} \right) \quad 5.10$$

tomando en cuenta esta ecuación en la ecuación 5.8:

$$C_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ k \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right]_m^{n+1} =$$

$$\frac{C_1}{r_m \Delta r_m} \left[ k \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{m+1/2}^{n+1} -$$

$$\frac{C_1}{r_m \Delta r_m} \left[ k \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{m-1/2}^{n+1}$$

5.11

De igual forma aproximamos las derivadas en presión de la ecuación 5.11:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m+1/2}^{n+1} = \left( \frac{p_{m+1} - p_m}{r_{m+1} - r_m} \right) \quad 5.12$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m-1/2}^{n+1} = \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \quad 5.13$$

Las aproximaciones en diferencias finitas de las ecuaciones 5.11, 5.12 y 5.13 nos conducen a una ecuación en diferencias centrales de segundo orden como sigue:

$$\begin{aligned}
 & C_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ k \left( \rho_0 \frac{k_{ro}}{\mu_0} \delta_0 x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right]_m^{n+1} = \\
 & \frac{C_1 \ln \alpha \, k_{m+1/2} \, r_{m+1/2}}{r_m (r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}) (r_{m+1} - r_m)} \times \\
 & \left[ \left( \rho_0 \frac{k_{ro}}{\mu_0} \delta_0 x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right)_{m+1/2} (p_{m+1} - p_m) \right]^{n+1} - \\
 & \frac{C_1 \ln \alpha \, k_{m-1/2} \, r_{m-1/2}}{r_m (r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}) (r_m - r_{m-1})} \times \\
 & \left[ \left( \rho_0 \frac{k_{ro}}{\mu_0} \delta_0 x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right)_{m-1/2} (p_m - p_{m-1}) \right]^{n+1}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Para propósitos de facilitar la expresión de la ecuación 5.14 se definen las siguientes variables:

$$\gamma_{m+1/2} = \frac{C_1 \ln \alpha \, k_{m+1/2} \, r_{m+1/2}}{r_m (r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}) (r_{m+1} - r_m)} \tag{5.15}$$

$$\gamma_{m-1/2} = \frac{C_1 \ln \alpha \, k_{m-1/2} \, r_{m-1/2}}{r_m (r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}) (r_m - r_{m-1})} \tag{5.16}$$

donde,  $k_{m+1/2}$  y  $k_{m-1/2}$  se toman como el promedio armónico<sup>25</sup> de las permeabilidades absolutas de los bloques corriente arriba y corriente abajo, lo cual queda expresado mediante las siguientes relaciones:

$$k_{m+1/2} = \left[ \frac{\ln \left( \frac{r_{m+1}}{r_m} \right)}{\frac{\ln \left( \frac{r_{m+1/2}}{r_m} \right)}{k_m} + \frac{\ln \left( \frac{r_{m+1}}{r_{m+1/2}} \right)}{k_{m+1}}} \right] \quad 5.17$$

y:

$$k_{m-1/2} = \left[ \frac{\ln \left( \frac{r_m}{r_{m-1}} \right)}{\frac{\ln \left( \frac{r_{m-1/2}}{r_{m-1}} \right)}{k_{m-1}} + \frac{\ln \left( \frac{r_m}{r_{m-1/2}} \right)}{k_m}} \right] \quad 5.18$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.15 y 5.16 en la ecuación 5.14 y el resultado de esta ecuación y la ecuación 5.7 en la ecuación 4.9, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \gamma_{m+1/2} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right)_{m+1/2} (p_{m+1} - p_m) \right]^{n+1} - \\ & \gamma_{m-1/2} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o x_i + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \right)_{m-1/2} (p_m - p_{m-1}) \right]^{n+1} = \\ & \frac{\phi}{\Delta t} \left[ \left( \rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i \right)_m^{n+1} - \left( \rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i \right)_m^n \right] \end{aligned} \quad 5.19$$

El flujo a alta velocidad (No-Darcy) se considera, como se expuso previamente, por medio de la inclusión de los términos  $\delta_o$  y  $\delta_g$ .

En el Apéndice C se muestra detalladamente la forma de obtener  $\delta_o|^{n+1}$ ,  $\delta_g|^{n+1}$  evaluados en  $m-1/2$  y la ecuación resultante es:

$$\delta_r \Big|_{m-1/2}^{n+1} = \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + 4 \left[ \left( \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \right)^2 \beta_f \rho_f \right]_{m-1/2} \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{1/2}} \right]^{n+1}$$

5.21

(con  $f = o$ ,  $g$  aceite o gas.)

donde el coeficiente de flujo No-Darcy  $\beta$  se evalúa por medio de la correlación de Firoozabadi y Katz<sup>21</sup>:

$$[\beta_f]_m^{n+1} = \left[ 2.234794036 \times 10^{10} (k_m k_{rfm})^{-1.201} \right]^{n+1}$$

5.22

El desarrollo para obtener la expresión 5.22 se presenta en el Apéndice C.

Para el problema de la condición de frontera interna a gasto constante, ecuación 4.10, se utiliza una aproximación en diferencias finitas de primer orden en espacio para la derivada de presión, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\frac{2\pi k_o h r_w}{q_i (r_1 - r_w)} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g \right)_i (p_1 - p_w) \right]^{n+1} = 1$$

5.23



donde, de nueva cuenta, evaluamos las propiedades de las fases y la permeabilidad relativa corriente arriba y además consideramos  $k_{1/2} = k_1$  en la ecuación 5.23.

Es importante notar que la ecuación 5.23 introduce la presión desconocida en la cara de la arena  $p(r_w, t) = p_1/2$  para la cual también debemos resolver el sistema ya que tenemos como condición la producción a gasto constante.

Las condiciones iniciales toman la forma:

$$p_m^0 = p_i$$

$$S_{gm}^0 = 0$$

$$x_{im}^0 = 0$$

$$y_{im}^0 = 1$$

donde:  $m = 1, 2, \dots, N$  e  $j = 1, 2, \dots, N_c$ .

La condición de frontera exterior cerrada al flujo se aproxima mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{p_{N+1}^{n+1} - p_N^{n+1}}{r_{N+1} - r_N} = 0 \quad 5.25$$

donde:  $N =$  número de nodos.

En la ecuación 5.25 se ha hecho uso del nodo ficticio ( $r_{N+1}$ ) en la malla radial. Esta ecuación representa una aproximación en diferencias finitas centrales<sup>25</sup> para la primer derivada en  $r = r_e$  de la ecuación 4.12; para nuestro problema reduciremos esta ecuación a la forma:

$$P_{N+1}^{n+1} = P_N^{n+1} \quad 5.26$$

De esta forma se incorpora la condición de frontera, cerrada al flujo en la frontera externa, en el sistema de ecuaciones diferenciales.

Las restricciones dadas por las ecuaciones 4.13, 4.14, 4.15 y 4.16 son expresadas en el nivel de tiempo  $n+1$  y en la celda  $m$  por:

$$S_{o,m}^{n+1} + S_{g,m}^{n+1} = 1 \quad 5.27$$

$$\sum_{i=1}^{Nc} x_{i,m}^{n+1} = 1 \quad 5.28$$

$$\sum_{i=1}^{Nc} y_{i,m}^{n+1} = 1 \quad 5.29$$

$$f_{i,v,m}^{n+1} = f_{i,l,m}^{n+1} \quad 5.30$$

donde:  $m = 1, 2, \dots, N$  e  $i = 1, 2, \dots, Nc$ .

Las ecuaciones 5.20, 5.23 y 5.26 a 5.30 representan las ecuaciones en diferencias finitas que aproximan a las ecuaciones 4.9 a 4.16. Las  $Nc$  ecuaciones de flujo, ecuaciones 5.20, y las  $Nc + 3$  ecuaciones de restricción, ecuaciones 5.27 a 5.30, forman un sistema de  $N(2Nc + 3)$  ecuaciones que deben ser resueltas para las  $N(2Nc + 3)$  variables en el vector  $Q$  definido en  $n+1$  por:

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_{1/2}) \quad 5.31$$

donde:

$$Q_m = (x_1, x_2, \dots, x_{Nc}, y_1, y_2, \dots, y_{Nc}, S_o, S_g, P)_m \quad 5.32$$

$$m = 1, 2, \dots, N$$

donde la función Q es un juego de variables primarias.

## 6.- Flujo en una fase.

En este capítulo se planteará el esquema de solución para el flujo en una fase, donde se considera un yacimiento que se encuentra a una presión inicial mayor que la presión de saturación y el cual es un caso particular que se presenta cuando la presión del yacimiento no cae por debajo de la presión de rocío del fluido contenido en el mismo.

Para el flujo en una fase la ecuación 5.19 puede simplificarse, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$\gamma_{m+1/2} \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \phi_g \right)_{m+1/2} (p_{m+1} - p_m) \right]^{n+1} - \gamma_{m-1/2} \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \phi_g \right)_{m-1/2} (p_m - p_{m-1}) \right]^{n+1} = \frac{\phi}{\Delta t} \left[ (\rho_g y_i)_m^{n+1} - (\rho_g y_i)_m^n \right] \quad 6.1$$

$$i = 1, 2, \dots, N_c.$$

La condición de frontera a gasto constante se reduce a:

$$\frac{2\pi k_{i/2} h}{q_t (r_1 - r_w)} \left[ \left( \frac{\rho_g \delta_g}{\mu_g} \right)_1 (p_1 - p_{1/2}) \right]^{n+1} = 1 \quad 6.2$$

Las demás condiciones de frontera permanecen sin cambio. Las restricciones de saturación y fugacidades no son aplicables ya que se tiene un sistema de una sola fase. La única ecuación remanente es la fracción mole para la fase considerada, la cual es:

$$\sum_{i=1}^{N_c} y_{i,m} = 1 \quad 6.3$$

Estas ecuaciones son no-lineales y deben ser resueltas empleando un método iterativo.

## 6.1.- Método de solución.

El método de solución empleado es el descrito por Coats<sup>25</sup>, y el cual menciona que podemos escribir cualquier cantidad F al nivel de tiempo (n+1) de la siguiente forma:

$$F^{n+1} \approx F^{l+1} = F^l + \delta F \quad 6.4$$

La ecuación 6.4 indica que para cualquier cantidad F, podemos aproximar el valor de F al nivel de tiempo (n+1) por el valor de F en la iteración (l+1). El valor de F en la iteración (l+1) se define entonces como el valor de F en la iteración (l) más el cambio en el valor de F en la iteración.

Si consideramos que:

$$\delta F = \sum_{j=1}^{N_v} \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \right)^I \delta Q_j \quad 6.5$$

donde  $Q_j \in Q$ ,  $N_v$  es el orden del conjunto  $Q$  y  $\delta Q_j$  es el cambio de  $Q_j$  en la iteración. Sustituyendo la ecuación 6.5 en 6.4 tenemos:

$$F^{n+1} \approx F^{l+1} = F^l + \sum_{j=1}^{N_v} \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \right)^I \delta Q_j \quad 6.6$$

La ecuación 6.6 es una expansión de la serie de Taylor de primer orden multidimensional para  $F^{l+1}$ , en términos de las variables  $Q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_v$ .

Para simplificar la notación definiremos las siguientes variables:

$$iFT_{m-1/2}^{n+1} = \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \delta_g \right)_{m-1/2} (p_m - p_{m-1}) \right]^{n+1} \quad 6.7a$$

$$iFT_{m+1/2}^{n+1} = \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \delta_g \right)_{m+1/2} (p_{m+1} - p_m) \right]^{n+1} \quad 6.7b$$

$$iST_m^{n+1} = \left( \rho_g y_i \right)_m^{n+1} \quad 6.7c$$

$$BT^{n+1} = \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_g \right)_1 (p_1 - p_{1/2}) \right]^{n+1} \quad 6.7d$$

Sustituyendo estas definiciones en las ecuaciones 6.1 y 6.2 obtenemos:

$$\gamma_{m+\frac{1}{2}} iFT_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} - \gamma_{m-\frac{1}{2}} iFT_{m-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{\phi}{\Delta t} (iST_m^{n+1} - iST_m^n) \quad 6.8$$

$$\frac{2\pi k_{v2} h}{q_t (r_1 - r_w)} BT^{n+1} = 1 \quad 6.9$$

Utilizaremos la ecuación 6.6 para cada uno de los términos al nivel de tiempo  $(n+1)$  en las ecuaciones 6.8 y 6.9. Sustituyendo y reorganizando las ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_v} \left[ \gamma_{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial iFT_{m+\frac{1}{2}}}{\partial Q_j} \right)^i - \gamma_{m-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial iFT_{m-\frac{1}{2}}}{\partial Q_j} \right)^i - \frac{\phi}{\Delta t} \left( \frac{\partial iST_m}{\partial Q_j} \right)^i \right] \delta Q_j \\ & = \gamma_{m-\frac{1}{2}} iFT_{m+\frac{1}{2}}^i - \gamma_{m+\frac{1}{2}} iFT_{m-\frac{1}{2}}^i + \frac{\phi}{\Delta t} iST_m^i - \frac{\phi}{\Delta t} iST_m^n \end{aligned} \quad 6.10$$

$m = 1, 2, \dots, N$  e  $i = 1, 2, \dots, N_c$ .

y:

$$\sum_{j=1}^{N_v} \Psi \left( \frac{\partial BT}{\partial Q_j} \right)^i \delta Q_j = 1 - \Psi BT^i \quad 6.11$$

donde:

$$\psi = \frac{2\pi k_{1/2} h}{q_t (r_1 - r_w)} \quad 6.12$$

Para producción a gasto constante, debemos estar en la posibilidad de asignar un valor a  $p_0$  en  $iFT^1_1$ . Para esto consideraremos  $p_0 = p_{1/2}$  y utilizaremos  $r_0 = r_{1/2}$  en la definición de  $\gamma_{1/2}$  en la ecuación 5.15.

Las condiciones de frontera externa también se incorporan directamente en la ecuación 6.7a usando la ecuación 5.26 para  $p_{N+1}$  en  $iFT_{N+1}$ .

$$p_{N+1}^{n+1} = p_N^{n+1} \quad 5.26$$

El procedimiento así planteado se aplica tanto para condiciones de flujo en una fase como para flujo en dos fases.

La restricción de la fracción mol, ecuación 6.3, se expande similarmente, pero ya que esta depende únicamente de  $y_{i,m}$ , para  $i=1,2,\dots,N_c$  en cualquier bloque  $m$ , la ecuación 6.4 puede usarse directamente para obtener:

$$\sum_{i=1}^{N_c} (y_{i,m} + \delta y_{i,m}) = 1$$

$$m = 1, 2, \dots, N \text{ e } i = 1, 2, \dots, N_c.$$

o bien:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \delta y_{i,m} = 1 - \sum_{i=1}^{N_c} y_{i,m} \quad 6.13$$

Las ecuaciones 6.10, 6.11 y 6.13 forman un sistema de  $N(N_c+1)+1$  ecuaciones con las variables  $\delta Q_j$ ,  $j=1,2,\dots,N_v$ . Sin embargo, como se mencionó, las



fracciones mol de la fase líquida y las saturaciones no son necesarias para el problema de flujo en una fase, resultando las derivadas con respecto a estas variables en las ecuaciones 6.10 y 6.11 igual a cero. Entonces resolvemos estas  $N(Nc+1)+1$  ecuaciones para obtener las  $N(Nc+1)+1$  variables  $\delta p_{1/2}$ ,  $\delta y_{i,m}$  y  $\delta p_m$ ,  $m=1,2,\dots,N$  e  $i=1,2,\dots,Nc$ .

Resolvemos este sistema representado por las ecuaciones 6.10, 6.11 y 6.13 de la siguiente forma. De la ecuación 6.13 se despeja  $\delta y_{Nc}$ :

$$\delta y_{Nc,m} = 1 - \sum_{i=1}^{Nc-1} y_{i,m} - \sum_{i=1}^{Nc-1} \delta y_{i,m} \quad 6.14$$

Esta ecuación se utiliza para eliminar  $\delta y_{Nc,m}$  de las ecuaciones 6.10 y 6.11 sustituyendo simplemente la ecuación 6.14 por  $\delta Q_j$ , cuando  $\delta Q_j = \delta y_{Nc,m}$ . Utilizando las ecuaciones 6.10 y 6.11 generamos el sistema matricial de la forma:

$$A \delta Q = R \quad 6.15$$

donde A es una matriz no-simétrica en bloques de  $(Nc \times Nc)$ , con un renglón y una columna adicional.

El vector  $\delta Q$  es definido por:

$$\delta Q = \left( \delta p_{1/2}, \delta y_{1,m}, \delta y_{2,m}, \dots, \delta y_{Nc-1,m}, \delta p_m \right)^T \quad 6.16$$

$$m=1,2,\dots,N$$

y el vector R contiene el lado derecho de las ecuaciones 6.10 y 6.11, evaluado apropiadamente. La ecuación 6.15 se resuelve utilizando el método de Yale<sup>28</sup> para sistemas de matrices dispersas no-simé-

tricas, obteniéndose de aquí el vector  $\delta Q$ . Los cambios iterativos en las primeras  $(N_c-1)$  fracciones mol en el bloque  $m$  se usan en la ecuación 6.14 para calcular  $\delta y_{N_c,m}$ ; entonces todos los elementos del conjunto  $Q$ , para el flujo en una fase, son actualizados utilizando:

$$Q^{i+1} = Q^i + \delta Q \quad 6.17$$

Esta secuencia, formando A y R de las ecuaciones 6.10 y 6.11 usando la eliminación de la ecuación 6.14, resolviendo 6.15 y utilizando la solución en la ecuación 6.14 para encontrar  $\delta y_{N_c,m}$  para  $m=1,2,\dots,N$  y entonces actualizar la ecuación 6.17, se lleva a cabo hasta que todos los cambios iterativos en valor absoluto son menores que una tolerancia especificada. Se utiliza una tolerancia de 0.01 para cambios iterativos en presión y 0.0001 para cambios iterativos en fracción mol. Además se utilizan los valores de las variables al nivel de tiempo  $n$  como estimación inicial de la solución, requerida en el proceso iterativo de solución de las incógnitas de  $n+1$ .

## 7.- Flujo de dos fases (Bifásico).

En este capítulo se presenta el esquema de solución para el flujo en dos fases donde, al igual que para flujo en una fase (capítulo 6), se considera un modelo radial de 1-D y los efectos por variación composicional y flujo a alta velocidad, tal y como se plantea en el capítulo 4 (4.1 El problema físico).

Para este caso se considera la ecuación 5.20 la cual fue desarrollada tomando en cuenta el flujo de dos fases (líquido vapor), reescribiéndose a continuación para fines de desarrollo de las ecuaciones precedentes:

$$\begin{aligned} & \gamma_{m+1/2} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} x_1 \delta_o + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} y_1 \delta_g \right)_{m+1/2} (p_{m+1} - p_m) \right]^{n+1} - \\ & \gamma_{m-1/2} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} x_1 \delta_o + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} y_1 \delta_g \right)_{m-1/2} (p_m - p_{m-1}) \right]^{n+1} = \\ & \frac{\phi}{\Delta t} \left[ \left( \rho_o S_o x_1 + \rho_g S_g y_1 \right)_m^{n+1} - \left( \rho_o S_o x_1 + \rho_g S_g y_1 \right)_m^n \right] \quad 7.1 \end{aligned}$$

Además de la ecuación anterior se requieren las ecuaciones para la condición inicial 5.24, para la condición de frontera exterior 5.26 y las restricciones dadas por las ecuaciones 5.27 a 5.30. Este con-

junto de ecuaciones es no lineal por lo cual deberá ser resuelto utilizando un método iterativo.

## 7.1.- Método de solución.

El método de solución empleado es el mismo que se utilizó para flujo en una fase, el cual se presentó en el capítulo 6 de este trabajo. Para el caso de flujo de dos fases el número de ecuaciones a resolver es igual a  $N(2N_c + 3) + 1$ , por lo que el conjunto  $Q$  de variables toma la forma dada por la ecuación 5.31:

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_{1/2})$$

$$Q_m = (x_1, x_2, \dots, x_{N_c}, y_1, y_2, \dots, y_{N_c}, S_o, S_g, p)_m$$

7.2

$$m = 1, 2, \dots, N$$

En el método descrito por Coats<sup>25</sup>, tenemos que podemos aproximar cualquier cantidad  $F$  al nivel de tiempo  $(n+1)$  de la siguiente forma:

$$F^{n+1} \approx F^{l+1} = F^l + \delta F$$

7.3

La ecuación 7.3 indica que para cualquier cantidad  $F$ , podemos aproximar el valor de  $F$  al nivel de tiempo  $(n+1)$  por el valor de  $F$  en la iteración  $(l+1)$ . El valor de  $F$  en la iteración  $(l+1)$  se define entonces como el valor de  $F$  en la iteración  $(l)$ , más el cambio en el valor de  $F$  en la iteración.

Si consideramos que:

$$\delta F = \sum_{j=1}^{N_v} \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \right)^1 \delta Q_j \quad 7.4$$

donde  $Q_j \in Q$ ,  $N_v$  es el orden del conjunto  $Q$  y  $\delta Q_j$  es el cambio de  $Q_j$  en la iteración. Sustituyendo la ecuación 7.4 en 7.3 tenemos:

$$F^{n+1} \approx F^{l+1} = F^l + \sum_{j=1}^{N_v} \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \right)^1 \delta Q_j \quad 7.5$$

La ecuación 7.5 es una expansión de la serie de Taylor de primer orden multidimensional para  $F^{l+1}$ , en términos de las variables  $Q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_v$ <sup>26</sup>.

## 7.2.- Desarrollo de las ecuaciones para flujo en dos fases

Para simplificar la notación definiremos las siguientes variables:

$$iFT_{m-1}^{n+1} = \left[ \left( \rho_o \frac{k_{T_o}}{\mu_o} x_i \delta_o + \rho_g \frac{k_{T_g}}{\mu_g} y_i \delta_g \right) (P_m - P_{m-1}) \right]_{m-1}^{n+1} \quad 7.6$$

$$iST_m^{n+1} = \left[ (\rho_o S_o x_i + \rho_g S_g y_i) \right]_m^{n+1} \quad 7.7$$

$$\mathbf{BT}^{n+1} = \left[ \left( \rho_o \frac{k_{r_o}}{\mu_o} \delta_o + \rho_g \frac{k_{r_g}}{\mu_g} \delta_g \right)_i (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_{1/2}) \right]^{n+1} \quad 7.8$$

Utilizando la aproximación dada por la ecuación 7.5, considerando las ecuaciones 7.6 a 7.8 en 7.5 obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_V} \left[ \gamma_{m+1/2} \left( \frac{\partial i\mathbf{FT}_{m+1/2}}{\partial \mathbf{Q}_j} \right)^l - \gamma_{m-1/2} \left( \frac{\partial i\mathbf{FT}_{m-1/2}}{\partial \mathbf{Q}_j} \right)^l - \frac{\phi}{\Delta t} \left( \frac{\partial i\mathbf{ST}_m}{\partial \mathbf{Q}_j} \right)^l \right] \Delta \mathbf{Q}_j \\ & = \gamma_{m-1/2} i\mathbf{FT}_{m-1/2}^l - \gamma_{m+1/2} i\mathbf{FT}_{m+1/2}^l + \frac{\phi}{\Delta t} i\mathbf{ST}_m^l - \frac{\phi}{\Delta t} i\mathbf{ST}_m^n \quad 7.9 \end{aligned}$$

y:

$$\sum_{j=1}^{N_V} \Psi \left( \frac{\partial \mathbf{BT}}{\partial \mathbf{Q}_j} \right)^l \Delta \mathbf{Q}_j = \mathbf{1} - \Psi \mathbf{BT}^l \quad 7.10$$

donde:

$$\Psi = \frac{2 \pi k_{1/2} h}{\mathbf{Q}_t (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_w)} \quad 7.11$$

Para producción a gasto constante, debemos estar en la posibilidad de asignar un valor a  $p_0$  en  $i\mathbf{FT}_1$ . Para esto consideraremos  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{1/2}$  y utilizaremos  $\mathbf{r}_o = \mathbf{r}_{1/2}$  en la definición de  $\gamma_{1/2}$  en la ecuación 5.15.

Las condiciones de frontera externa también se incorporan directamente en la ecuación 7.6, usando la ecuación 5.26 para  $\mathbf{p}_{N+1}$  en  $i\mathbf{FT}_{N+1}$ :

$$P_{N+1}^{n+1} = P_N^{n+1}$$

5.26

El procedimiento así planteado se aplica tanto para condiciones de flujo en una fase como para flujo en dos fases.

### 7.3.- Cálculo de las derivadas de $iFT_{m+1/2}$

A continuación se presenta el desarrollo de las parciales involucradas en la ecuación para flujo en dos fases, desarrollada en el punto anterior, ecuación 7.9.

#### Parcial de $iFT_m$ con respecto a presión

Si en la parcial de  $iFT_m$  con respecto a  $Q_j$  consideramos que  $Q_1 = p_m$  entonces:

$$\frac{\partial iFT_m}{\partial Q_1} = \frac{\partial iFT_m}{\partial p_m} \tag{7.12}$$

sustituyendo la ecuación 7.6 en la ecuación 7.12:

$$\frac{\partial iFT_m}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} x_i \delta_o + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} y_i \delta_g \right)_{m-1/2} (p_m - p_{m-1}) \right] \tag{7.13}$$

Desarrollando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i F T_m}{\partial p_m} = & \left[ k_{ro} x_i \left[ \rho_o \delta_o \frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{1}{\mu_o} \right) + \frac{\delta_o}{\mu_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial p_m} + \frac{\rho_o}{\mu_o} \frac{\partial \delta_o}{\partial p_m} \right] + \right. \\ & \left. k_{rg} y_i \left[ \rho_g \delta_g \frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{1}{\mu_g} \right) + \frac{\delta_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p_m} + \frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial \delta_g}{\partial p_m} \right] \right] (p_m - p_{m-1}) + \\ & \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} x_i \delta_o + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} y_i \delta_g \right) \right] \end{aligned} \quad 7.14$$

De la ecuación 7.14 tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{1}{\mu_o} \right) = - \frac{1}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_m} \quad 7.15$$

y:

$$\frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{1}{\mu_g} \right) = - \frac{1}{\mu_g^2} \frac{\partial \mu_g}{\partial p_m} \quad 7.16$$

Sustituyendo las ecuaciones 7.15 y 7.16 en la ecuación 7.14 y reorganizando la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i F T_m}{\partial p_m} = & \left[ \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \delta_o x_i \left[ - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_m} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial p_m} + \frac{1}{\delta_o} \frac{\partial \delta_o}{\partial p_m} \right] + \right. \\ & \left. \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \delta_g y_i \left[ - \frac{1}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial p_m} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p_m} + \frac{1}{\delta_g} \frac{\partial \delta_g}{\partial p_m} \right] \right] (p_m - p_{m-1}) + \\ & \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} x_i \delta_o + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} y_i \delta_g \right) \right] \end{aligned} \quad 7.17$$

En la ecuación 7.17 requerimos evaluar la parcial de  $\delta$  con respecto a presión, tanto para gas como para aceite, por lo que considerando la definición dada para el cálculo de  $\delta_f$  en la ecuación 5.21



$$\delta_f = \frac{2}{1 + \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \right)^2 \beta_f \rho_f \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{1/2}} \quad 7.18$$

Donde f = gas (g) o aceite (o). De la ecuación 7.18 tenemos que:

$$\frac{\partial \delta_f}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m} \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \right)^2 \beta_f \rho_f \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{1/2}} \right] \quad 7.19$$

Desarrollando la ecuación 7.19:

$$\frac{\partial \delta_f}{\partial p_m} = - \left[ \frac{2}{\left[ 1 + \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \right)^2 \beta_f \rho_f \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{1/2} \right]^2} \right]^*$$

$$\frac{\partial}{\partial p_m} \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \right)^2 \beta_f \rho_f \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{1/2} \quad 7.20$$

Considerando la siguiente definición:

$$\epsilon = \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \right)^2 \beta_f \rho_f \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{1/2} \quad 7.21$$

Sustituyendo 7.21 en 7.20 y desarrollando tenemos que:

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial p_m} = - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2} * \frac{\partial}{\partial p_m} \left[ C_1 \left( \frac{k k_r}{\mu_r} \right)^2 \beta_r \rho_r \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right] \quad 7.22$$

En la ecuación anterior desarrollando la parcial con respecto a  $p_m$  y considerando que:

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}}$$

tendremos:

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial p_m} = - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2} * \left[ C_1 \beta_r (k k_r)^2 * \left[ \rho_r \left( \frac{\Delta p}{\Delta r} \right) \frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{1}{\mu_r^2} \right) + \frac{1}{\mu_r^2} \left( \frac{\Delta p}{\Delta r} \right) \frac{\partial \rho_r}{\partial p_m} + \frac{1}{\mu_r^2} \left( \frac{1}{r_m - r_{m-1}} \right) \right] \right] \quad 7.23$$

En la ecuación anterior:

$$\frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{1}{\mu_r^2} \right) = - \frac{2}{\mu_r^3} \frac{\partial \mu_r}{\partial p_m} \quad 7.24$$

Considerando la ecuación 7.24 en la ecuación 7.23 y reorganizando la expresión resultante:

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial p_m} = - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2} * \left[ C_1 \beta_r \rho_r \left( \frac{k k_r}{\mu_r} \right)^2 \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) * \left[ - \frac{2}{\mu_r} \frac{\partial \mu_r}{\partial p_m} + \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \rho_r}{\partial p_m} + \left( \frac{1}{p_m - p_{m-1}} \right) \right] \right] \quad 7.25$$

## Parcial de iFTm con respecto a composición

Si en la parcial de iFTm con respecto a Qj consideramos que Qj = MF entonces:

$$\frac{\partial iFT_m}{\partial Q_j} = \frac{\partial iFT_m}{\partial MF} \quad 7.26$$

Sustituyendo la ecuación 7.6 en la ecuación 7.26:

$$\begin{aligned} \frac{\partial iFT}{\partial MF} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{r_o}}{\mu_o} x_i \delta_o \right) (p_m - p_{m-1}) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \left( \rho_g \frac{k_{r_g}}{\mu_g} y_i \delta_g \right) (p_m - p_{m-1}) \right] \end{aligned} \quad 7.27$$

Evaluando en la ecuación anterior la parcial con respecto a xi tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{r_o}}{\mu_o} x_i \delta_o \right) (p_m - p_{m-1}) \right] = \rho_o \frac{k_{r_o}}{\mu_o} x_i \delta_o (p_m - p_{m-1}) \times \\ \left[ \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x_i} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial x_i} + \frac{1}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\delta_o} \frac{\partial \delta_o}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad 7.28$$

en forma similar para yi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \left( \rho_g \frac{k_{r_g}}{\mu_g} y_i \delta_g \right) (p_m - p_{m-1}) \right] = \rho_g \frac{k_{r_g}}{\mu_g} y_i \delta_g (p_m - p_{m-1}) \times \\ \left[ \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial y_i} - \frac{1}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial y_i} + \frac{1}{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y_i} + \frac{1}{\delta_g} \frac{\partial \delta_g}{\partial y_i} \right] \end{aligned} \quad 7.29$$

En las ecuaciones 7.28 y 7.29 si i=j entonces las parciales de composición con respecto a si mismas son iguales a uno, en caso de que i sea diferente de j la parcial es igual a cero.

En la ecuación 7.28 se requiere evaluar la parcial de  $\delta_o$  con respecto a la composición de la fase líquida, para lo cual requerimos utilizar la ecuación 7.18, en la que se considera  $f=0$  (aceite); de donde obtenemos que:

$$\frac{\partial \delta_o}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{r_o}}{\mu_o} \right)^2 \beta_o \rho_o \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{1/2}} \right] \quad 7.30$$

Efectuando la parcial del lado derecho de la ecuación anterior tenemos que:

$$\frac{\partial \delta_o}{\partial x_i} = - \frac{\left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{r_o}}{\mu_o} \right)^2 \beta_o \rho_o \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{-1/2}}{\left[ 1 + \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{r_o}}{\mu_o} \right)^2 \beta_o \rho_o \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^{1/2} \right]^2} \times \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ C_1 \left( \frac{k k_{r_o}}{\mu_o} \right)^2 \beta_o \rho_o \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right] \quad 7.31$$

En la ecuación anterior si consideramos que:

$$\varepsilon = \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{r_o}}{\mu_o} \right)^2 \beta_o \rho_o \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right] \quad 7.32$$

Sustituyendo la ecuación 7.32 en la ecuación 7.31 y desarrollando la parcial con respecto a composición:

$$\frac{\partial \delta_o}{\partial x_1} = - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2} \left[ C_1 (k k_{r_o})^2 \beta_o \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \times \left[ \rho_o \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu_o^2} \right) + \frac{1}{\mu_o^2} \frac{\partial \rho_o}{\partial x_1} \right] \right] \quad 7.33$$

En la ecuación 7.33:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu_o^2} \right) = - \frac{2}{\mu_o^3} \left( \frac{\partial \mu_o}{\partial x_1} \right) \quad 7.34$$

Sustituyendo la ecuación 7.34 en la ecuación 7.33:

$$\frac{\partial \delta_o}{\partial x_1} = - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2} \left[ C_1 \left( \frac{k k_{r_o}}{\mu_o} \right)^2 \beta_o \rho_o \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \times \left[ - \frac{2}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x_1} \right] \right] \quad 7.35$$

De forma similar para la fase gas si consideramos:

$$\varepsilon_1 = \left[ 1 + C_1 \left( \frac{k k_{r_g}}{\mu_g} \right)^2 \beta_g \rho_g \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right] \quad 7.36$$

entonces:

$$\frac{\partial \delta_g}{\partial y_1} = - \frac{\varepsilon_1^{-1/2}}{(1 + \sqrt{\varepsilon_1})^2} \left[ C_1 \left( \frac{k k_{r_g}}{\mu_g} \right)^2 \beta_g \rho_g \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \times \left[ - \frac{2}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial y_1} \right] \right] \quad 7.37$$

Con la ecuación 7.37 se tiene todo el desarrollo de las ecuaciones necesarias para calcular el flujo en dos fases.

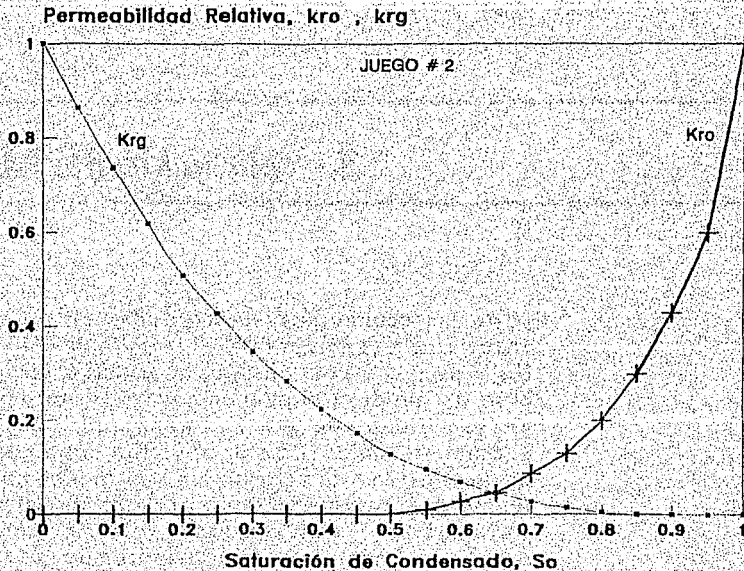
---

## 8.- Validación del Modelo.

---

Con las ecuaciones desarrolladas en los capítulos anteriores y considerando el trabajo de Jones<sup>3</sup>, para flujo de gas y condensado, se efectuó la programación del modelo el cual incluye flujo no-laminar en un yacimiento de gas y condensado, considerando geometría radial. Con lo anterior nos encontramos en posibilidad de reproducir fenómenos en los cuales se presenten efectos inerciales provocados por flujo de fluidos a altos gastos y variación composicional, la cual es típica en yacimientos de gas y condensado cuando se abate la presión de rocío.

Los datos de permeabilidad relativa utilizados en este trabajo para validar el modelo desarrollado, correspondieron principalmente al juego 2 tomado del trabajo de Jones y Raghavan<sup>29</sup>, tomado a su vez de la tabla 4 de Fussell y Fussell<sup>30</sup> los cuales representan un proceso de imbibición. La saturación crítica de condensado es de 0.50 como se muestra en la figura 8.1. Este juego de datos considera que la permeabilidad relativa al gas se reduce tan rápido como el líquido de la fase original de vapor se condensa.



**Figura 8. 1.- Datos de Permeabilidad Relativa.**

La mezcla de gas y condensado considerada corresponde a la No. 2 de las referencias 3 y 29. En la Tabla 8.1 y en la figura 8.2 se presentan la composición inicial y otros datos relativos a la mezcla y los resultados de la expansión a composición constante, los cuales fueron predichos a partir del cálculo de equilibrio de fases llevados a cabo con la ecuación de estado de Redlich-Kwong, modificada por Zudkevitch y Joffe<sup>2</sup>. Estos cálculos flash fueron ejecutados siguiendo el procedimiento de Fussell y Yanosik<sup>31</sup>

## Capítulo 8

Como se indica en la tabla 8.1, la mezcla de gas y condensado consiste de un sistema ternario compuesto por: metano, butano y decano. El paquete PVT usado en este estudio es esencialmente el descrito en las referencias 3 y 29.

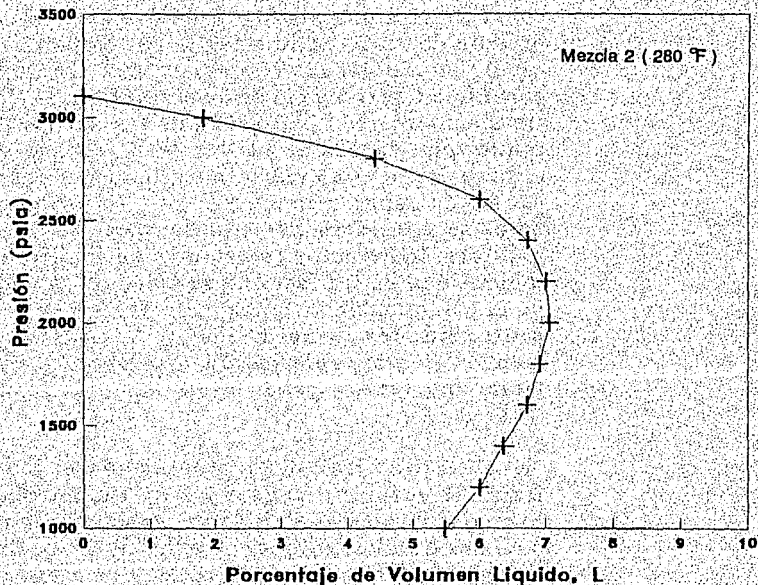


Figura 8. 2.- Datos de Expansión a Composición Constante.



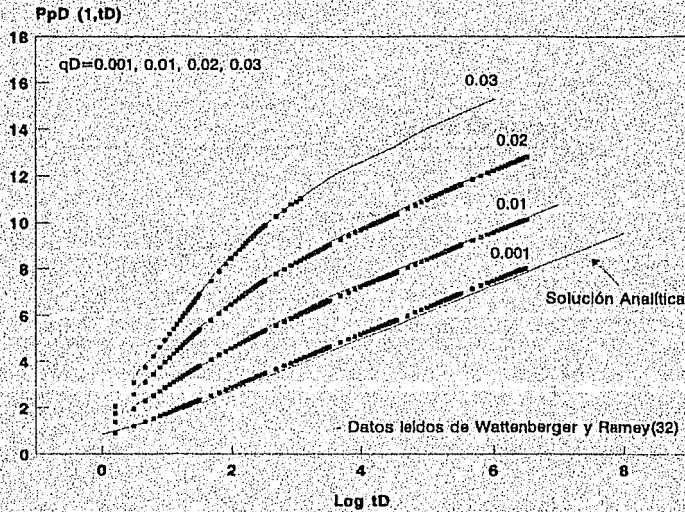
**Tabla 8.1.- Composición a la presión de rocío**

Mezcla	T (°R)	p <sub>i</sub> (psi)	Procio (psi)	L <sub>max</sub> (%)	Vapor		Líquido	
					C <sub>4</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>10</sub>
1	620	4500	3969.6	4.6	0.01800	0.02590	0.03618	0.24854
2	740	3400	3106.9	7.0	0.11305	0.04752	0.16350	0.24294

Todos los resultados presentados en este estudio consideraron una presión inicial igual o mayor a la presión de rocío de la mezcla. Por lo tanto, la saturación inicial del gas (vapor) es igual a 1.00, y no se considera la existencia de agua intersticial. Todas las simulaciones (con excepción de las hechas considerando zona dañada alrededor del pozo) suponen que el yacimiento es un medio poroso horizontal y homogéneo, de espesor constante. Los efectos gravitacionales se considera que son despreciables, en otras palabras, los efectos resultantes de la diferencia en la densidad de las fases no se consideran y el efecto de la columna hidrostática en la presión a diferentes profundidades es despreciado. Además se desprecian los efectos capilares. El pozo produce a un gasto molar constante y penetra totalmente la formación.

Una vez desarrollado y programado el modelo de flujo fué necesario validar los resultados obtenidos, lo cual se procedió a efectuar considerando tres etapas, dos de ellas caen dentro de los procedimientos estandar, las cuales se discuten a continuación:

1.- En el primer paso se consideraron condiciones de flujo en una sola fase, con el propósito de reproducir las soluciones de flujo para líquido presentados por van Everdingen y Hurst<sup>32</sup>, y posteriormente reproducir las soluciones para gas real considerando flujo Darcy y flujo a alta velocidad, propuestas por Wattenbarger y Ramey<sup>33</sup>. Los resultados de estas comparaciones son bastante aceptables y se presentan en forma gráfica en la figura 8.3.



BETA=8.855\*10<sup>-7</sup> (PIE-1), PI=5000 (PSIA)  
kh=100 md-ft

Figura 8.3.- Validación del Modelo una Fase.

Además para validar el flujo en una fase en un sistema de gas y condensado se utilizó el procedimiento desarrollado por Camacho et al<sup>34</sup>, el cual consiste en graficar la derivada semilogarítmica de la pseudo-presión de gas contra el inverso de la raíz cuadrada del tiempo.

2.- Como segundo paso se simuló el flujo multifásico laminar de gas y condensado y se reprodujeron algunos de los resultados presentados por Thompson

y  $Vo^{35}$ . La comparación entre los resultados de Thompson y  $Vo$  y los obtenidos con el modelo pueden observarse en la figura 8.4, y como puede apreciarse la comparación es bastante buena.

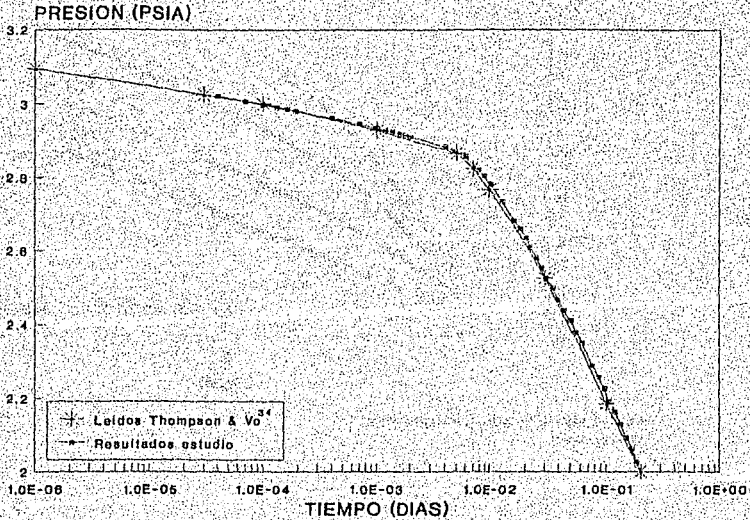


Figura 8. 4.- Respuesta de Presión en el Pozo.

3.- Por último la validación del flujo multifásico a alta velocidad presentó el problema principal debido a que las validaciones previas, puntos 1 y 2, únicamente aseguran la capacidad del simulador para predecir primero, flujo en una fase considerando alta velocidad y segundo, flujo multifásico pero considerando condiciones laminares (Flujo Darcy). Para ve-

rificar los resultados al considerar flujo a alta velocidad de gas y condensado no se dispone de métodos cuantitativos detallados, por lo que la validación del simulador en estas condiciones de flujo se efectuó de la siguiente manera.

De acuerdo a lo planteado por Jones y Raghavan<sup>29</sup>, se consideró el flujo estacionario de gas y condensado a alta velocidad, en un yacimiento en el cual la frontera externa se mantiene a presión constante, mayor a la presión de saturación (presión de rocío). En el apéndice D se presenta la formulación del modelo bajo estas condiciones de flujo y la solución de la ecuación diferencial resultante. De la ecuación D.7 (apéndice D) podemos concluir que una gráfica de la integral del lado derecho de esta ecuación contra  $r_D$  puede utilizarse para checar la validez de los resultados del simulador. La figura 8.5 presenta este tipo de gráfica para uno de los casos que se estudiaron, mostrando que la comparación entre lo simulado y los resultados teóricos es bastante buena.

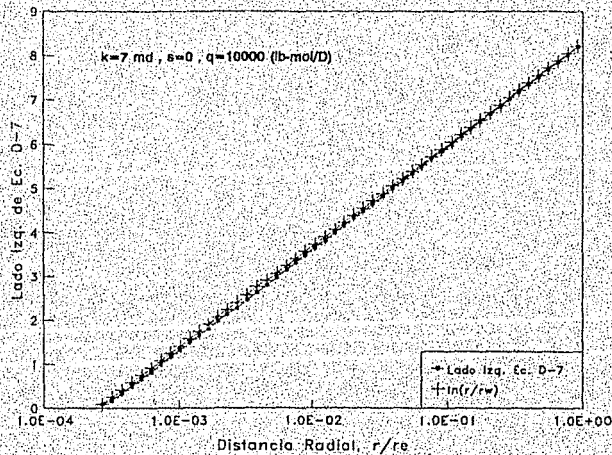


Figura 8. 5.- Comparación de Resultados Utilizando ambos lados de la Ecuación D7.

---

## 9.- Discusión de Resultados.

---

En esta sección se presentarán el método y las ecuaciones utilizadas durante el análisis de los resultados obtenidos del estudio sistemático de la influencia del flujo a alta velocidad, en la interpretación de pruebas de presión en yacimientos con flujo de gas y condensado.

Como primer paso se definen las ecuaciones que describen los parámetros y grupos adimensionales utilizados en esta discusión.

Pseudopresión de Al-Hussainy, Ramey y Crawford<sup>36</sup>,  $p_p(p)$

$$p_p(p) = 2 \int_{p_b}^p \frac{p'}{\mu Z} dp' \quad 9.1$$

Integral de pseudopresión en dos fases en la cara del pozo,  $p_{psf}(t)$ <sup>29</sup>

$$P_{psf}(t) = \int_0^t \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \right]_{r_w} dt \quad 9.2$$

Pseudopresión para dos fases en el yacimiento,  $p_{pr}(t)$ <sup>29</sup>

$$P_{pr}(t) = \int_{r_w}^{\infty} \left[ \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r_w} dr \quad 9.3$$

Tiempo adimensional,  $t_D$

$$t_D = \frac{0.0002637 k t}{\phi (\mu c_i)_i r_w^2} \quad 9.4$$

Pseudopresión adimensional de Al-Hussainy, Ramey y Crawford<sup>36</sup>,  $p_{pwb}$

$$P_{pwb} = \frac{\pi 0.00633 k h}{q_i T R} (p_p(p_i) - p_p(p_{wf})) \quad 9.5$$

Pseudopresión adimensional para dos fases en la cara del pozo,  $p_{psfd}$ <sup>29</sup>

$$P_{psfd}(r=r_w, t_D) = \frac{2\pi 0.00633 k h}{q_i} (P_{psr}(p_i) - P_{psr}(p_{wf})) \quad 9.6$$

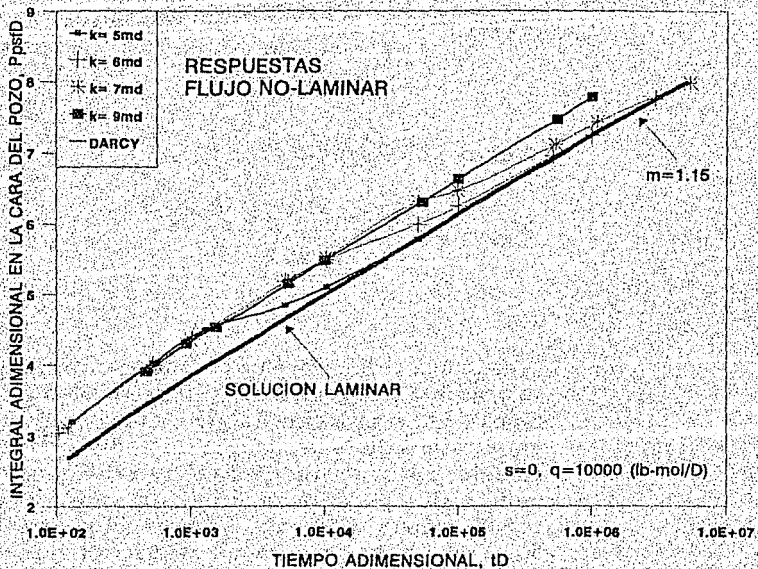
Pseudopresión adimensional en el yacimiento,  
 $p_{prD}^{29}$

$$p_{prD}(1, t_D) = \frac{2\pi \cdot 0.00633 \text{ k} \cdot h}{q_i} p_{pr}(t) \quad 9.7$$

Número de Reynolds<sup>34</sup>,  $N_{Re}$

$$N_{Re} = \frac{2.22 \times 10^{-15} \gamma_{fl} \text{ k} \beta_s q_p}{\mu_{fl} h r_w} \quad 9.8$$

Por lo que respecta a los resultados, en la figura 9.1 se presenta una gráfica semilogarítmica de los resultados de la simulación de una prueba de decremento en términos de la pseudopresión adimensional en la cara del pozo considerando flujo en dos fases,  $p_{psfb}$ , contra tiempo adimensional,  $t_D$ , para daño cero ( $s=0$ ), y para diferentes valores de permeabilidad; 5, 6, 7 y 9 md. La línea continua inferior representa la respuesta para flujo laminar (flujo Darcy) para este caso. En esta gráfica puede observarse, como se esperaba, que las respuestas para los casos donde se considera flujo a alta-velocidad y una presión inicial mayor a la presión de saturación del fluido, son mayores que la respuesta para flujo laminar y conforme disminuye la presión y el fluido cruza la presión de saturación pasando de una fase a dos fases, el flujo entra en una zona de transición el cual finaliza en el tiempo en el cual  $S_o(r_w) \approx S_{oc}$ . Este punto en tiempo corresponde al punto 4 de las figuras 5 y 6 de Jones y Raghavan<sup>29</sup>. Después de este tiempo el perfil de movilidad total, parece ser función exclusiva de presión durante todo el período transitorio de flujo.



**Figura 9. 1.- Efecto de la Permeabilidad en la respuesta para flujo No-Darcy.**

La figura 9.2 muestra los resultados para la mezcla 1 (ver tabla 8.1) de la presión de fondo fluyendo,  $p_{wf}$ , y la saturación de gas,  $S_g$ , en la cara del pozo, contra tiempo de producción,  $t$ . En esta gráfica puede notarse que el efecto de alta-velocidad resulta en una caída de presión mayor y, consecuentemente la presión de fondo fluyendo alcanza la presión de saturación de la mezcla a un tiempo más temprano que el que se presenta para el caso de flujo Darcy.



Resultados similares a los mostrados en la figura 9.1 se obtuvieron de simulaciones de pruebas de decrecimiento, considerando factores de daño de -2, 5 y 10, concluyendo que después de la aparición del condensado, el comportamiento de la presión considerando alta-velocidad entra en un período de transición, que tiende finalmente a la solución para flujo Darcy. La duración de la zona de transición disminuye conforme disminuye el valor del factor de daño.

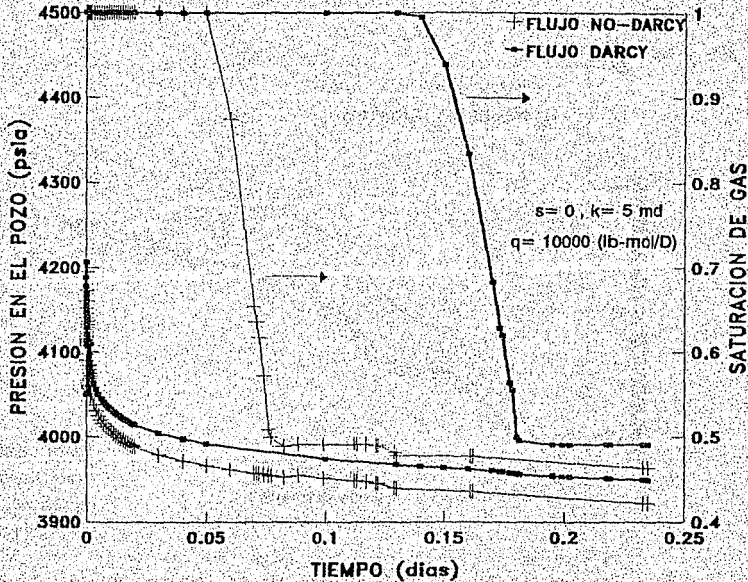


Figura 9. 2.- Presión de fondo fluyendo y saturación de gas contra tiempo.

En la figura 9.3 se muestra el caso de un pozo dañado ( $s = 10$ ), donde las líneas discontinuas representan condiciones de flujo laminar y las líneas continuas condiciones de flujo no-laminar, en esta mis-

En la figura se muestran la integral de yacimiento (Ec. 9.7), curva con símbolos, y la función de pseudopresión en la cara del pozo (Ec. 9.6), curva sin símbolos. Como puede observarse de esta gráfica, bajo condiciones de flujo viscoso las funciones de pseudopresión, de pozo y yacimiento, presentan una pendiente semilogarítmica de 1.151. Sin embargo, cuando se consideran efectos inerciales en la simulación se obtienen pendientes menores de 1.151. Es importante notar la presencia de un gran período de transición para este caso.

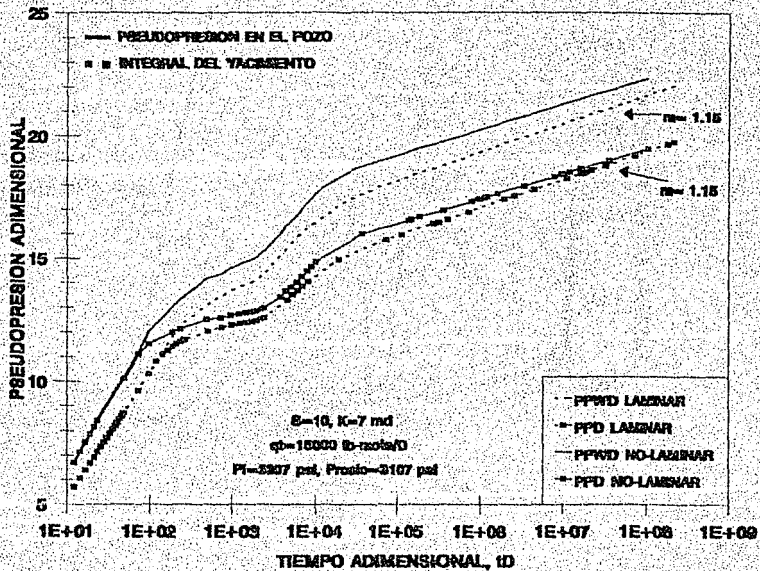


Figura 9. 3.- Comportamiento de pseudopresión bajo condiciones de flujo laminar y no-laminar ( $s=10$ ).

La figura 9.4 es una gráfica convencional de las derivadas de pseudopresión adimensional con res-

pecto al tiempo adimensional,  $t_D$ , para condiciones de flujo no-laminar y daño igual a cero. En esta gráfica se puede apreciar que a un tiempo  $t_D = 1000$ , se presenta el flujo de dos fases en el yacimiento.

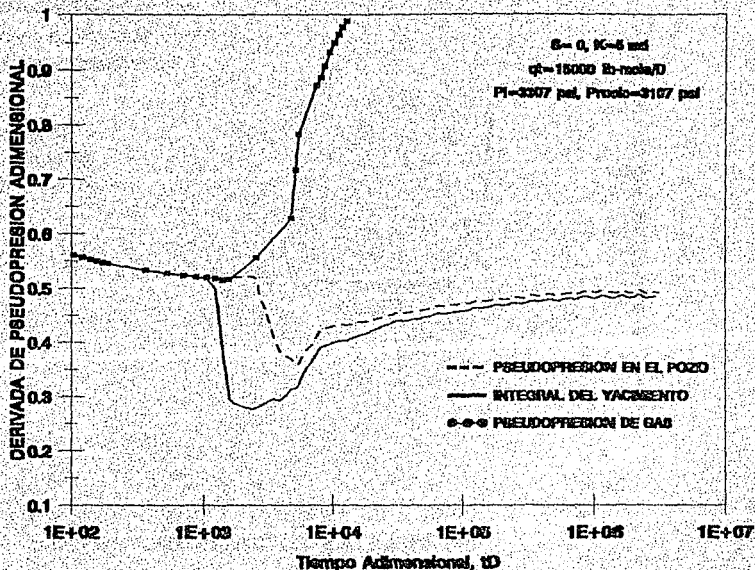


Figura 9. 4.- Comportamiento de la derivada de pseudopresión contra  $t_D$ , flujo no-laminar ( $s=0$ ).

Para checar la validez de los resultados de este estudio considerando flujo en una fase en un sistema de gas y condensado se utilizó el procedimiento de Camacho y cols.<sup>34</sup>, el cual consiste de la construcción de una gráfica de  $dpp_{wD}/d(\ln t_D)$  contra  $1/(t_D^{1/2})$ . En la figura 9.5 se presenta un caso para un factor de daño cero y permeabilidad de 5 md, mostrando el comportamiento de la derivada de las pseudopresiones (con respecto a  $t_D$ ) dadas por las ecuaciones 9.5,

9.6 y 9.7 representadas por las líneas discontinuas con círculos, discontinuas y continuas, respectivamente.

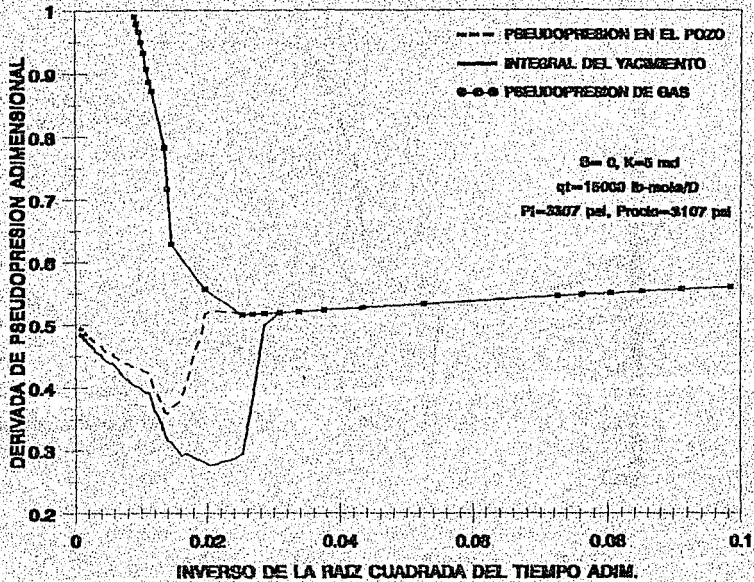


Figura 9. 5.- Comportamiento de la derivada de pseudopresión contra  $1/t^{0.5}$ , flujo no-laminar ( $s=0$ ).

Durante el flujo en una sola fase las funciones de derivada mostraron el comportamiento de la línea recta característico, con pendiente positiva para flujo a alta-velocidad, la cual se extrapola correctamente al valor de intercepción teórico de 0.5 que corresponde a flujo Darcy. A partir de esta ordenada al origen puede obtenerse el valor de permeabilidad absoluta, tal y como se describe en la referencia-34. Una vez que se inicia la caída de presión en la for-

mación, las derivadas para las tres funciones de pseudopresión se desvían de la línea recta. Para tiempos de producción grandes la derivada semilogarítmica tanto de  $p_{psD}$  como de  $p_{prD}$ , tienden al valor de 0.5, el cual concuerda con los resultados presentados en las figuras 9.1 y 9.3. La derivada de la pseudopresión de gas real (Ec. 9.5), siempre presenta una curvatura hacia arriba después del inicio de la caída de presión en la formación, lo cual se debe a la presencia de la fase de condensados, la cual no se considera en esta pseudopresión.

Es importante hacer notar que a fin de poder utilizar los resultados de la referencia 34, es necesario tener bien definido un período de flujo monofásico en el cual pueda ser ajustada una línea recta semilogarítmica. Este requerimiento es para garantizar la presencia de un comportamiento de línea recta en la gráfica cartesiana de la derivada semilogarítmica de la pseudopresión contra el inverso de la raíz cuadrada del tiempo. Las figuras 9.6 y 9.8 son utilizadas para ilustrar este punto. La gráfica 9.6 muestra el comportamiento de la pseudopresión adimensional,  $p_{pwD}$ , para un caso con un daño de cinco. Las condiciones de flujo viscoso se representan por la curva discontinua y la curva continua representa la condiciones de flujo no-Darcy. Durante el período de flujo monofásico, el cual termina en  $t_b \approx 4 \times 10^4$ , se ajustaron líneas rectas semilogarítmicas las cuales son acotadas con flechas verticales. Se puede notar que de acuerdo con la Ref. 34, únicamente para el caso laminar existe una verdadera línea recta (con  $m = 1.151$ ), sin embargo, para el caso no-laminar la derivada esta cambiando con el tiempo.

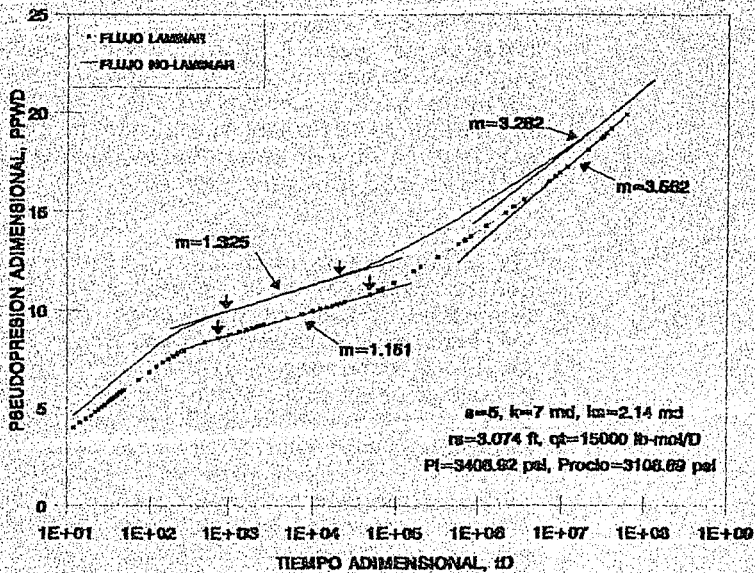


Figura 9. 6.- Pseudopresión adimensional, comparación entre flujo laminar y no-laminar.

En la figura 9.7 se presenta la gráfica de la derivada de pseudopresión adimensional con respecto al tiempo adimensional,  $t_D$ , para el caso mostrado en la figura 9.6. Para un rango en el cual  $400 < t_D < 100000$ , es en este rango en el cual se logró ajustar la pendiente de 1.151 para flujo laminar, observándose en este mismo intervalo de tiempo una pendiente de 1.325 para el caso de flujo no-laminar.

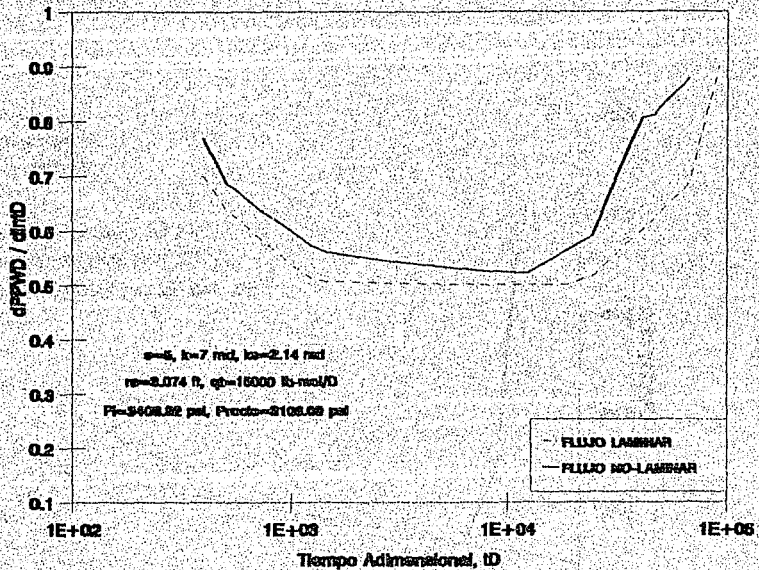


Figura 9. 7.- Derivada de pseudopresión contra  $t_D$ , flujo laminar y no-laminar ( $s=5$ ).

La derivada semilogarítmica correspondiente a la figura 9.6 se representa en la figura 9.8, de nuevo la curva continua representa el caso de flujo no-laminar y la curva discontinua el caso laminar. Durante el mismo intervalo de tiempo donde se ajustó la línea recta semilogarítmica en la figura 9.6, existe una línea recta cartesiana en la figura 9.8. Para el caso de flujo Darcy se obtiene un valor constante de 0.5 y para el caso de flujo no-Darcy se obtiene una línea recta con pendiente positiva e intersección al origen

de 0.5. Es necesario notar que durante el período donde la región dañada influye en la solución y cuando el líquido se condensa de la fase gaseosa, la derivada se desvía del comportamiento de línea recta.

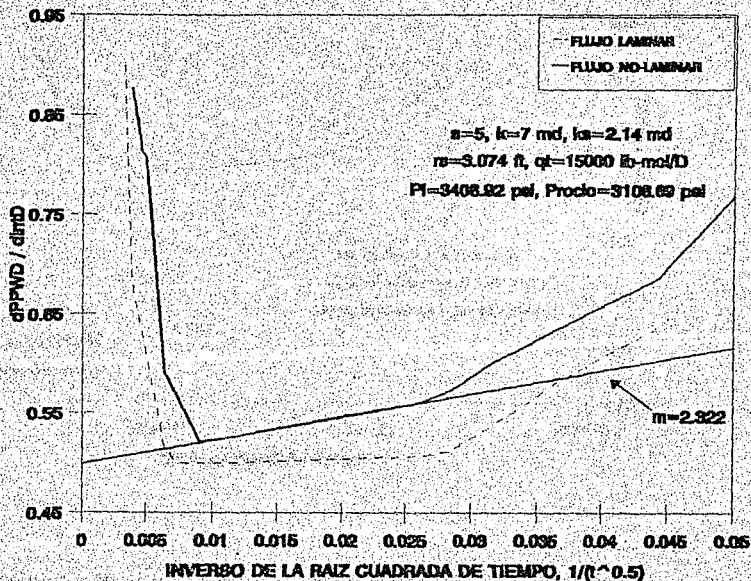


Figura 9. 8.- Derivada de pseudopresión con respecto a  $\ln t$ , flujo laminar y no-laminar ( $s=5$ ).

El método de análisis de Thompson y cols.<sup>37</sup> basado en la pseudopresión de gas real de Al-Hussainy y cols.<sup>36</sup>, también se empleó para analizar este problema de flujo de gas y condensado a alta-velocidad, encontrándose de nuevo una caída de pseudopresión mayor para estas condiciones, entrando después a un



período de transición para alcanzar posteriormente la solución para flujo Darcy

El método de la Ref. 37 requiere la combinación del análisis de una prueba de incremento y una de decremento para obtener los parámetros:  $k$ ,  $k_{rg}$ ,  $r_m$  y  $s$ , donde  $k_{rg}$  y  $r_m$  representan la permeabilidad relativa al gas en la cercanía del pozo y el radio de la saturación crítica de aceite en el momento del cierre. Para explicar la técnica anterior consideraremos de nuevo la figura 9.6. Se simularon dos pruebas de incremento tanto para condiciones de flujo laminar, como para condiciones de flujo no-laminar. El primer incremento se obtuvo después de un tiempo de producción  $t_D = 1.2 \times 10^6$ , y el segundo para  $t_D = 1.17 \times 10^8$ . El comportamiento de la pseudopresión adimensional, para estas pruebas de incremento es mostrado en la figura 9.9.

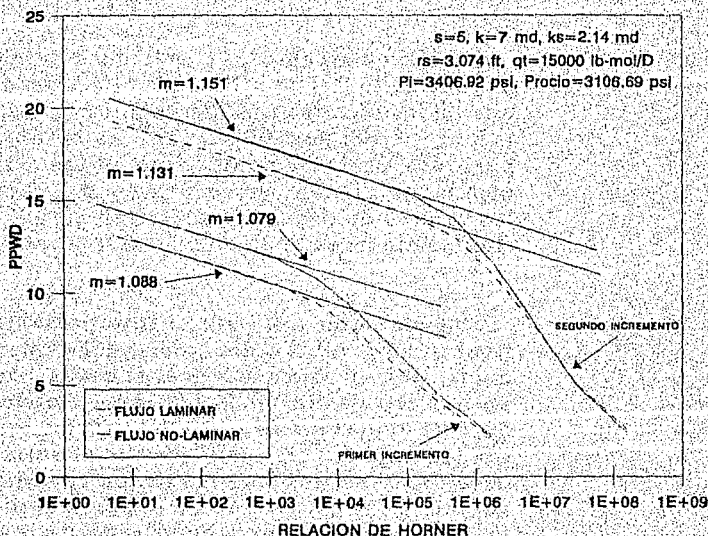


Figura 9. 9.- Pseudopresión al cierre, flujo laminar y no-laminar ( $s=5$ ).

La ecuación que describe el comportamiento de la pseudopresión al cierre está dada por la siguiente relación:

$$p_{pWD} = cte1 \int_{p_{wfs}}^{p_{ws}} \left( \rho_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} + \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \right) dp \quad 9.9$$

donde:

$$cte1 = 2\pi kh \frac{0.00633}{q_g} \quad 9.10$$

La tabla 9.1 resume los resultados obtenidos con el método de la Ref.34 utilizando el decremento y cada uno de los incrementos. Es importante notar que los valores de permeabilidad absoluta obtenidos de los períodos de incremento concuerdan aproximadamente con el valor correcto de 7 md. Sin embargo, los valores de daño mecánico, aún para los casos de flujo laminar, están lejos del valor correcto  $s = 5$ .

Se puede notar que para el caso presentado en las figuras 9.6 a 9.9 el valor inicial del número de Reynolds,  $NRE$ , es cercano a uno, el cual es considerado un número de Reynolds pequeño. Adicionalmente, durante el período de cierre los efectos inerciales no son tan importantes como durante el período de producción. Estos dos factores tienen una influencia favorable en la estimación de la permeabilidad calculada a partir de la curva de incremento, permitiendo obtener un valor más exacto para este parámetro.

**Tabla 9.1.- Resultados para pruebas de decremento e incremento de las figs. 9.6 a 9.9, utilizando la pseudopresión adimensional, ecuación 9.9.**

r <sub>e</sub> D = 20000, k = 7 md, s = 5, h = 100 ft				
q <sub>i</sub> = 15000 lb-mol/D, N <sub>RE</sub> = 0.998				
	Incremento #1		Incremento #2	
	Laminar	No-Laminar	Laminar	No-Laminar
Tiempo de Producción Adimensional	1.243x10 <sup>6</sup>	1.214x10 <sup>6</sup>	1.176x10 <sup>8</sup>	1.173x10 <sup>8</sup>
Pendiente Semilog. en Decremento Adim.	2.744	2.539	3.562	3.282
k <sub>rg</sub> de Decremento	0.4195	0.4530	0.3232	0.3507
Permeabilidad Absoluta de Incremento, md	7.467	7.411	7.125	7.002
s <sub>app</sub> de Incremento	6.127	7.578	10.376	11.562
Inicio de Línea Recta Semilog. días	0.0131	0.0131	0.0131	0.0131
r <sub>m</sub> calculado, ft	3.89	3.88	3.81	3.77
r <sub>m</sub> real, ft	0.50	0.62	0.92	1.16
S calculado	0.98	1.93	1.51	2.29

En la figura 9.10 se presenta una comparación de los perfiles de permeabilidad relativa al gas, obtenidos del simulador y las permeabilidades relativas al gas en la cercanía del pozo, calculadas con la pendiente de la curva de decremento, tal y como se sugiere en la Ref. 37, representados por los valores constantes (NL y L indican condiciones de flujo no-laminar y laminar, respectivamente). Las líneas continua y discontinua corresponden a condiciones de flujo no-Darcy y laminar, respectivamente. Podemos notar que existe una diferencia entre los valores reales y los predichos de permeabilidad relativa. Los valores reales de r<sub>m</sub>, presentados en la tabla 9.1, son

mayores que los calculados con el procedimiento de la Ref. 37.

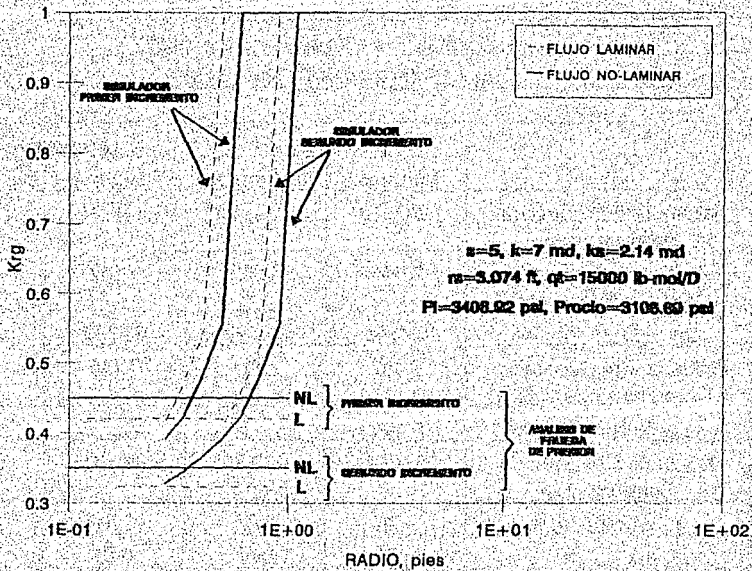


Figura 9. 10.- Comparación entre permeabilidad relativa calculada y obtenida del simulador.

Las figuras 9.11 y 9.12 presentan la variación de presión y saturación de gas en la cara del pozo, para condiciones de pozo cerrado, durante las dos pruebas de incremento de las figuras 9.9 y 9.10. Las líneas continuas corresponden a los casos de flujo no laminar y las líneas discontinuas a las condiciones de flujo laminar. Como se espera, las presiones en el pozo para ambas condiciones de flujo coinciden al cabo de cierto tiempo de cierre. Sin embargo, la diferencias de saturación de gas permanecen para

tiempos de cierre tan grandes como los mostrados en la figura 9.12.

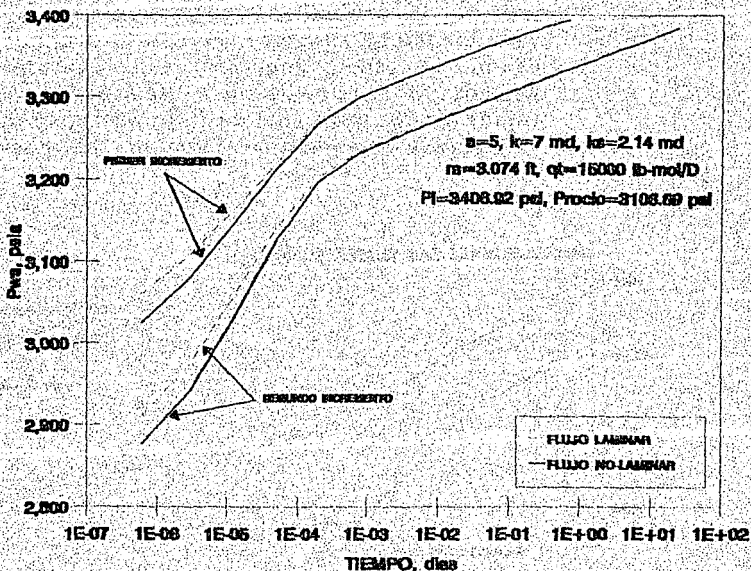


Figura 9. 11.- Comportamiento de presión al cierre para dos pruebas de incremento.

Para el caso en que únicamente contemos con una prueba de decremento, como se menciona en la Ref. 37, no es posible disponer de todos los parámetros requeridos por el método de Thompson y cols.<sup>37</sup>. Sin embargo, si en la prueba de decremento se detecta la presencia de un período semilogarítmico de flujo monofásico, entonces el procedimiento sugerido en la Ref.34 es aplicable.

El procedimiento de Jones y Raghavan<sup>29</sup> para estimar la movilidad total en la cara del pozo  $\lambda_l(r_w, t)$ ,

necesario para la estimación de la pseudopresión en dos fases  $p_p(p)$ , fue probado para las condiciones de flujo a alta-velocidad de este estudio. Se observó que a tiempos cortos la respuesta de la derivada es afectada por las propiedades de la región de daño, como ya se mencionó en la Ref. 38. Esta situación se agrava cuando los efectos inerciales son importantes en el yacimiento. Este resultado es de esperarse ya que la región con la presencia de flujo no-Darcy puede ser visualizada como una zona con un daño positivo.

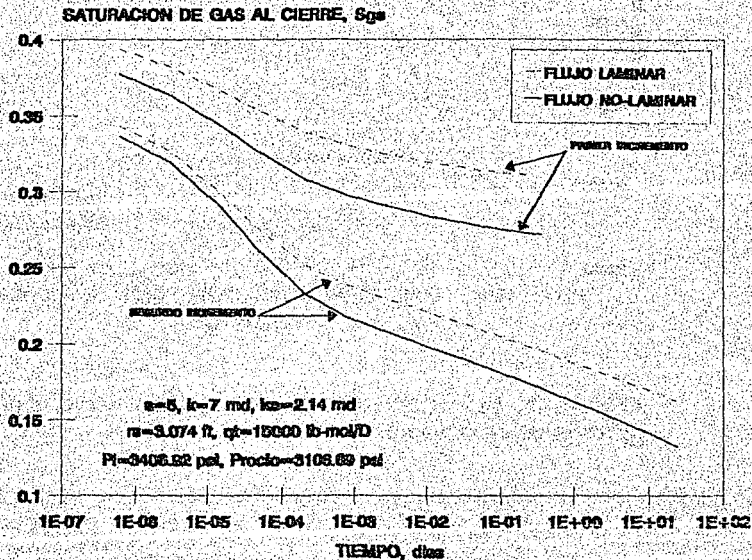


Figura 9.12.- Comportamiento de saturación en el pozo al cierre para dos pruebas de incremento.

---

## 10.- Conclusiones.

---

Los propósitos principales de este trabajo han sido el desarrollar un modelo radial para el flujo de gas y condensado, considerando condiciones de flujo de alta velocidad, además de presentar los resultados de un estudio sistemático de la influencia del flujo a alta-velocidad, en la interpretación de pruebas transitorias de presión en pozos de gas y condensado. La motivación para la realización de este estudio se deriva del análisis de pruebas de campo, algunas de ellas publicadas en la literatura<sup>39,40,41</sup>, las cuales muestran condiciones favorables para la presencia de este efecto (es decir, gastos altos de flujo, efectos del flujo a alta velocidad mayores en yacimientos carbonatados con microvúgulos y vúgulos, entre otros). Se ha mostrado en este trabajo que el comportamiento de la presión y la saturación de gas, en la cara del pozo, es afectado en forma muy importante por el efecto de la alta velocidad.

Con base a los resultados presentados en este trabajo, se pueden hacer las conclusiones siguientes:

- 1.- El comportamiento semilogarítmico de la pseudopresión adimensional del pozo para este problema

de flujo puede mostrar dos líneas aproximadamente rectas y paralelas, la primera correspondiente al flujo en una fase y la segunda a condiciones estabilizadas de flujo multifásico de gas y condensado, con una pendiente aproximada a 1.151, si su comportamiento es cercano al laminar, representada por  $S_0(r_s) \geq S_{0c}$ , respectivamente.

2.- El comportamiento aproximado de dos líneas rectas semilogarítmicas, conectadas por un período de transición recuerda de alguna forma el comportamiento, discutido extensivamente en la literatura, para yacimientos naturalmente fracturados.

3.- Los resultados para pruebas de decremento con daño diferente de cero ( $s \neq 0$ ) muestran un comportamiento similar al establecido por la conclusión 1 para daño igual a cero ( $s = 0$ ), con la excepción de que el primer período no logra distinguirse debido a la influencia de la región dañada cercana al pozo, presentándose además períodos de transición más largos.

4.- Con base a los casos estudiados en este trabajo, la interpretación del método de Thompson et al.<sup>37</sup> es útil para obtener un valor aproximado de permeabilidad relativa, sin embargo, para los valores de  $r_m$  y daño mecánico no se obtuvo una buena aproximación con los valores reales. Esta situación es más incierta cuando se presentan efectos inerciales en el yacimiento.

5.- El procedimiento de las Refs. 29 y 38 para la estimación de la movilidad total basados en la derivada de la presión en el pozo se ve afectada, como se mencionó en estas referencias, por la presencia de una región de daño positivo. Esta situación puede agravarse cuando los efectos inerciales son importantes en el yacimiento.



6.- Para el caso en que únicamente se disponga de una prueba de decremento, el procedimiento de la Ref. 34 podría utilizarse para evaluar la permeabilidad absoluta y el factor de daño mecánico. Esta técnica requiere que exista un período de flujo monofásico bien definido.

---

## Nomenclatura.

---

$C_1$	= constante de conversión
$h$	= espesor, ft [m]
$k$	= permeabilidad, [md]
$k_r$	= permeabilidad relativa
$p$	= presión, psi [kPa]
$p_p(p)$	= pseudopresión
$p_{psfD}$	= integral de pseudopresión en el pozo
$p_{prD}$	= integral de pseudopresión en el yacimiento
$p_{pwD}$	= Pseudopresión adimensional
$p_{wf}$	= Presión de fondo fluyendo, psi [kPa]
$p_{ws}$	= Presión al cierre, psi [kPa]
$q_i$	= Gasto total, lbm-mol/D [kmol/d]
$r$	= Coordenada radial, pies
$s$	= Factor de daño
$S$	= Saturación
$t$	= Tiempo, horas [días]
$t_D$	= Tiempo adimensional
$x_i$	= Fracción mol del componente $i$ en fase líquida
$y_i$	= Fracción mol del componente $i$ en fase vapor

Letras griegas utilizadas:

- $\beta$  = Coeficiente de resistencia inercial,  $\text{pie}^{-1}$   
 $[\text{m}^{-1}]$   
 $\lambda_i(\text{pwt})$  = Movilidad en el pozo,  $\text{lbm-mol}/\text{cp}$   
 $[\text{kmol-Pa.s}]$   
 $\delta$  = Factor de corrección L.I.T. (laminar, inercial y turbulento)  
 $\mu$  = Viscosidad,  $\text{cp}$   
 $\rho$  = Densidad molar,  $\text{lbm-mol}/\text{pie}^3$   $[\text{kmol}/\text{m}^3]$

Subíndices:

- $b$  = base  
 $c$  = crítico  
 $\text{rocío}$  = punto de rocío  
 $e$  = frontera externa  
 $g$  = gas  
 $i$  = condiciones iniciales; número de componentes  
 $L$  = líquido  
 $s$  = zona de daño  
 $t$  = total  
 $V$  = vapor  
 $w$  = pozo  
 $wf$  = presión fluyendo

---

## Bibliografía.

---

1. Golan M. y Whitson C.H.: " Well Performance." Ed. IHRDC, Boston MA. USA (1986), pp. 106, 127, 262-278.
2. Zudkevich D. y Joffe J. : " Correlation and Prediction of Vapor-Liquid Equilibria with Redlich-Kwong Equation of State," AIChE Journal (Enero. 1970) pp. 112-119.
3. Jones J.R. : " Computation and Analysis of Single wells Responses for Gas Condensate Systems," Tesis Doctoral, U. de Tulsa, Tulsa, Ok. (1985).
4. Forchheimer P. : " Wassenbewegung durch Boden," Zeitschrift Des Vereines Deutscher Ingenieure (Dic. 1901) 45, pp. 1781-1788.
- 5.- MacDonald R.C. : " Reservoir Simulation with Interphase Mass Transfer," Report #UT-71-a, Texas Petroleum Research Comitte, University of Texas at Austin (Dic. 15, 1971).
- 6.- Escobar Rosas F.G. : " Yacimientos de Gas-Condensado y Aceite Volátil," Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Petrolera, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM (1982).

## Bibliografía

7. Jacoby R.H. y Berry V.J. : " A Method of Predicting Performance of a Reservoir Producing Volatile Crude Oil," Trans. AIME (1957) pp. 210-227.
8. Brinkman F.H. y Weinaug C.F. : " Calculated Performance of a Dissolved Gas Drive Reservoir by a Phase Behavior Method," AIChE Journal (1957) 3,29.
9. Farley R.W., Weinaug C.F. y Wolfe J.F. : " Predicting Depletion Behavior of Condensates," SPEJ (1969) 9,43.
10. d'Arcy H. : " Les Fontaines Publiques de la Ville de Dyon," Victor Dalmont, 1856.
11. Wycoff R.D., Botset H.G., Muskat M. y Meres M.W. : "Flow of Gas-Liquid Mixtures through Sand," Physics (1936) 7, 325-345, 346-363; Trans AIME (1937) 123, 69-96.
12. Fancher G.H., Lewis J.A. y Barnes K.B. : " Some Physical Characteristics of Oil Sands," Bull. 12, Pennsylvania State C., Minerals Industries Experiment Station, University Park, MD (1933).
13. Elenbaas J.R. y Katz D.L. : " A Radial Turbulent Flow Formula," Trans. AIME (1948) 174, 25-40.
14. Cornell D. y Katz D.L. : " Flow of Gases through Consolidated Porous Media," Industrial and Engineering Chemistry (Oct. 1953) 45, 2145-2152.
15. King Hubbert M. : " Darcy's Law and the Field Equations of the flow of Underground Fluids," Trans. AIME, 207, 222-239.
16. Houpert A. : " Etude Analogique de L'Ecoulement Radial Circulaire Transitoire des Gas Dans les Millicux Poreux," Revue de l'Institute Francais du

## Bibliografía

Petrole et Annales des Combustibles Liquides (1953) VIII, 4,5,6.

17. Wriqth D.E. : "Non-Linear Flow through Granular Media," J. Hydraulics Division, Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs., (1968) 94, 851-872.

18. Green L. Jr. y Dewez P. : "Fluid Flow through Porous Media," Journal of Applied Mechanics (Marzo 1951) 39-45.

19. Janicek J.D. y Katz D.L. : "Applications of Unsteady State Gas Flow Calculations," presented at the 1955 Research Conference on Flow of Natural Gas from Reservoirs, University of Michigan, Junio 30-Julio 1.

20. Perez G. y Kelkar B.G. : "A New Method To Predict Two-Phase Pressure Drop Across Perforations," SPE 18248, (Oct. 1988) 659-666.

21. Wong S.W. : "Effect of Liquid Saturation on Turbulence Factors for Gas-Liquids Systems," J. Can. Pet. tech (Oct-Dic. 1970) 274-278.

22. Firoozabadi A. y Katz D.L. : "An Analysis of High-Velocity Gas Flow through Porous Media," JPT (Feb. 1979) 211-216.

23. Redlick O. y Kwong J.N.S. : "On the Thermodynamics of solutions V. An Equation of State. Fugacities of Gaseous Solutions," Chem. Rev. (1949) 44, 233.

24. Lohrenz J., Bray B.G., y Clark C.R. : "Calculating Viscosities of Reservoir Fluids from Their Composition," JPT (Oct. 1964) 1171-1176.

25. Coats K.H. : "An Equation of State Compositional Model," SPEJ (Oct. 1980) 363-376.

## Bibliografía

26. Aziz K. y Settari A. : " Petroleum Reservoir Simulation," Applied Science Publishers, Ltd., 1979, London.

27. Taylor A.E. y Mann R.W. : " Advanced Calculus", Second Edition, Xerox College Publishing, 1972, Lexington, Mass.

28. Eisenstat S., Gursky M., Shultz M. y Sherman A.H. : " Yale Sparse Matrix Package The non-symmetric Codes", Yale Research Report 114 (1977).

29. Jones, J.R. y Raghavan, R.: " Interpretation of flowing Well Response in Gas-Condensate Wells", SPEFE (Sept. 1988) 578-94.

30. Fusell, L.T. y Fusell, D.D.: " An Iterative Technique for Compositional Reservoir Models", Soc. Pet. Eng. J. (Agosto. 1979) 211-20.

31. Fusell, D.D. y Yanisik, J.L.: " An Iterative Sequence for Phase Equilibrium Calculations Incorporating the Redlich-Kwong Equation of State", Soc. Pet. Eng. J. (Junio 1978) 173-82.

32. van Everdingen, A.F. y Hurst, W.: " The Application of the Laplace Transformation to flow Problems in Reservoirs", Trans., AIME (1949) 186, 305-24.

33. Wattenbarger, R.A. y Ramey, H.J., Jr.: " Gas Well Testing With Turbulence, Damage and Wellbore Storage", J. Pet. Tech. (Agosto. 1968) 877-87, Trans., AIME, 243.

34. Camacho-Velázquez, R.G., Vásquez-Cruz, M.A., Roldán C. J. L., Samaniego V. F. y Macías Ch. L.: " New Results on Transient Test Analysis Considering Non-Laminar Flow in the Reservoir", artículo SPE 26180 presentado en el "1993 SPE Gas Technology Symposium", Calgary, Alta., Junio 28-30.

## Bibliografía

35. Thompson, L.G. y Vo, D.T.: " Drawdown Well Test Analysis for Multicomponent Hydrocarbon System", artículo SPE 18126 presentado en el "63rd the Annual Technical Conference and Exhibition", Houston, Tx, Oct. 2-5, 1988.

36. Al-Hussainy, R., Ramey, H.J., Jr., y Crawford, P.B.: " The Flow of Real Gases Through Porous Media", J. Pet. Tech. (Mayo, 1966) 624-36.

37. Thompson, L.G., Nin J.G., y Reynolds, A.C.: "Well Testing for Gas Condensate Reservoirs", artículo SPE 25371 presentado en el "1993 SPE Asia Pacific Oil & Gas Conference and Exhibition", Singapore, Feb 8-10.

38. Jones, J.R., Vo, D.T., y Raghavan, R.: "Interpretation of Pressure Buildup Responses in Gas Condensate Wells", SPEFE (Marzo 1989) 93-104.

39. Kniazeff, V.J. y Naville, N.A.: "Two-Phase Flow of Volatile Hydrocarbons", Soc. Pet.Eng. J. (Marzo 1965) 37-44.

40. Behrenbruch, P. y Kozma, G.: "Interpretation of Results from Well Testing Gas-Condensate Reservoirs: Comparison of Theory an Field Cases", artículo SPE 13185 presentado en el "59th Annual Technical Conference and Exhibition", Houston, Tx., Sept. 16-19, 1984.

41. Saleh, A.M. y Stewart, G.: "Interpretation of Gas Condensate Well Test with Field Examples", artículo SPE 24719 presentado en el "67th Annual Technical Conference and Exhibition", Washington, D.C., Oct. 4-7, 1992.



---

## Apéndice A.- Cálculo de las derivadas para el flujo en una fase

---

Con el fin de resolver el sistema de ecuaciones planteado en el Capítulo 6 es necesario evaluar las parciales que se presentan en la ecuación 6.10 así como también las derivadas que de éste procedimiento se obtengan.

En este apéndice se muestra el desarrollo analítico para la obtención de las derivadas necesarias para la solución del esquema en diferencias finitas planteado en el Capítulo 6, expresiones que intervienen en la construcción del Jacobiano, el cual nos representa en forma matricial el problema de flujo planteado en las ecuaciones 6.10 y 6.11.

## Desarrollo de las derivadas para flujo en una fase

El problema de flujo en una fase se reduce a resolver en forma iterativa la ecuación diferencial 6.10, la cual se reescribe a continuación:

$$\sum_{j=1}^{N_v} \left[ \gamma_{m+v_j} \left( \frac{\partial iFT_m}{\partial Q_j} \right)^1 - \gamma_{m-v_j} \left( \frac{\partial iFT_m}{\partial Q_j} \right)^1 - \frac{\phi}{\Delta t} \left( \frac{\partial iST_m}{\partial Q_j} \right)^1 \right] \delta Q_j =$$

$$\gamma_{m-v_j} iFT_m^1 - \gamma_{m+v_j} iFT_m^1 + \frac{\phi}{\Delta t} iST_m^1 - \frac{\phi}{\Delta t} iST_m^n \quad \text{A.1}$$

Esta ecuación se debe cumplir para:

$$m = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, \dots, N_c; \quad j = 1, 2, \dots, N_v$$

donde:

$N$  = número de nodos

$N_c$  = número de componentes

$N_v$  = número de variables

y las variables  $iFT$  e  $iST$  son aquellas definidas por:

$$iFT_m^{n+1} = \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \delta_g \right)_m (P_m - P_{m-1}) \right]^{n+1} \quad \text{A.2}$$

y:

$$iST_m^{n+1} = \left( \rho_g y_i \right)_m^{n+1} \quad \text{A.3}$$

## Apéndice A

De la ecuación A.1 tenemos que para el caso de flujo en una fase la ecuación 5.31 es igual a:

$$Q_m = (y_1, y_2, \dots, y_{N_c}, p)_m \quad \text{A.4}$$

Si consideramos que para  $j=1$ ,  $Q_1 = p_m$  entonces en la ecuación A.1 tenemos que:

$$\frac{\partial iF T_m}{\partial Q_1} = \frac{\partial iF T_m}{\partial p_m} \quad \text{A.5}$$

Sustituyendo la ecuación A.2 en la ecuación A.5:

$$\frac{\partial iF T_m}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m} \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \delta_g \right)_m (p_m - p_{m-1}) \right] \quad \text{A.6}$$

o bien:

$$\frac{\partial iF T_m}{\partial p_m} = \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \delta_g \right)_m + (p_m - p_{m-1}) \frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \delta_g \right)_m \quad \text{A.6}$$

Desarrollando la parcial con respecto a presión que se presenta en la ecuación A.6 tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} y_i \delta_g \right)_m = y_i \left[ \frac{\delta_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p_m} + \frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial \delta_g}{\partial p_m} - \frac{\rho_g}{\mu_g^2} \delta_g \frac{\partial \mu_g}{\partial p_m} \right] \quad \text{A.7}$$

Sustituyendo la ecuación A.7 en la ecuación A.6:

$$\frac{\partial i F T_m}{\partial p_m} = y_i \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_{\dot{r}_i} \right)_m + \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{\Gamma_m - \Gamma_{m-1}} \right)^* \right]$$

$$\left( \frac{\delta_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p_m} + \frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial \delta_g}{\partial p_m} - \frac{\rho_g}{\mu_g^2} \delta_g \frac{\partial \mu_g}{\partial p_m} \right)^{1/2} \quad A.8$$

La ecuación A.8 contiene las parciales de densidad, flujo por alta velocidad y viscosidad con respecto a presión. Las parciales de densidad y viscosidad con respecto a presión se presentarán en el Apéndice B de este trabajo y, el desarrollo de la parcial de flujo por alta velocidad con respecto a presión, se presenta a continuación.

## Desarrollo de la parcial por flujo a alta velocidad con respecto a presión

Para obtener la parcial de  $\delta_g$  con respecto a presión presente en la ecuación A.8 se utilizará la definición de  $\delta$  (el desarrollo de las ecuaciones para el cálculo de  $\delta$  se presentan en el Apéndice C de este trabajo), considerando al gas como la fase fluente, de donde obtenemos que:

$$\delta_{g_m}^1 = \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + \left( \frac{2k}{\mu_g} \right)_m^2 (\beta_g \rho_g)_m \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{\Gamma_m - \Gamma_{m-1}} \right) \right]^{1/2}} \right]^1 \quad A.9$$

## Apéndice A

Con el fin de facilitar la escritura de las ecuaciones siguientes se define la variable  $\varepsilon$  como:

$$\varepsilon = \left[ 1 + \left( \frac{2k}{\mu_g} \right)_m^2 (\beta_g \rho_g)_m \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^1 \quad \text{A.10}$$

Considerando las ecuaciones A.9 y A.10 tenemos que la parcial de  $\delta_g$  con respecto a presión puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \delta_g}{\partial p_m} = 2 \frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \right) \quad \text{A.11}$$

Efectuando la parcial de la ecuación anterior tenemos que:

$$\frac{\partial \delta_g}{\partial p_m} = - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_m} \right) \quad \text{A.12}$$

Al considerar el valor de  $\varepsilon$  dado por la ecuación A.10 en la ecuación A.12:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m} \left[ 1 + \left( \frac{2k}{\mu_g} \right)_m^2 (\beta_g \rho_g)_m \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right) \right]^1 \quad \text{A.13}$$

Desarrollando la ecuación A.13 llegamos a:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_m} = \left( \frac{2k}{\mu_g} \right)_m^2 (\beta_g \rho_g)_m \left( \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m - r_{m-1}} \right)^1 \times \left[ - \frac{2}{\mu_{gm}} \left( \frac{\partial \mu_{gm}}{\partial p_m} \right) + \frac{1}{\rho_{gm}} \left( \frac{\partial \rho_{gm}}{\partial p_m} \right) + \frac{1}{p_m - p_{m-1}} \right]^1 \quad \text{A.14}$$

Al substituir la ecuación A.14 y la definición de  $\varepsilon$  en la ecuación A.12 obtenemos la expresión para el

cálculo del factor por flujo a alta velocidad para la fase gas con respecto a presión.

Las parciales de densidad y viscosidad con respecto a presión se presentan en le Apéndice B de este trabajo.

## Cálculo de la parcial $iFT_{m+1/2}$ con respecto a $Q_j$

De manera similar a como se procedió anteriormente, se efectuará el desarrollo para calcular la parcial de  $iFT$  en  $m+1$  con respecto a  $Q_j$ , por lo que si consideramos que  $Q_1 = p_m$  entonces tenemos que:

$$\frac{\partial iFT_{m+1}}{\partial Q_j} = \frac{\partial iFT_{m+1}}{\partial p_m} \quad \text{A.15}$$

En donde:

$$iFT_{m+1} = \left[ \left( \rho_g \frac{y_l}{\mu_g} \delta_r \right)_m (p_{m+1} - p_m) \right]^{n+1} \quad \text{A.16}$$

Sustituyendo A.16 en A.15:

$$\frac{\partial iFT_{m+1}}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m} \left[ \left( \rho_g \frac{y_l}{\mu_g} \delta_r \right)_m (p_{m+1} - p_m) \right]^{n+1} \quad \text{A.17}$$

De manera semejante a como se obtuvo la solución para la ecuación A.3 se tiene:

$$\frac{\partial iFT_{m+1}}{\partial p_m} = y_l \left\{ \left( -\frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_r \right)_m + (p_{m+1} - p_m) \times \right.$$

## Apéndice A

$$\left( \frac{\delta_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p_m} + \frac{\delta_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p_m} - \frac{\rho_g}{\mu_g^2} \delta_g \frac{\partial \mu_g}{\partial p_m} \right) \} \quad \text{A.18}$$

La derivada de  $\delta_g$  con respecto a presión está representada por la ecuación A.12 y como se mencionó las derivadas de densidad y viscosidad se presentan en el Apéndice B.

Una vez definidas las ecuaciones anteriores sólo resta obtener la expresión para la parcial de  $iST_m$  para lo cual, si consideramos  $j = 1$ , entonces  $Q_1 = P_m$ , obteniéndose:

$$\frac{\partial iST_m}{\partial Q_1} = \frac{\partial iST_m}{\partial p_m} \quad \text{A.19}$$

y como:

$$iST_m = \left( \rho_g Y_i \right)_m \quad \text{A.20}$$

Entonces:

$$\frac{\partial iST_m}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m} \left( \rho_g Y_i \right)_m \quad \text{A.21}$$

O bien:

$$\frac{\partial iST_m}{\partial p_m} = Y_{im} \left( \frac{\partial \rho_g}{\partial p} \right)_m \quad \text{A.22}$$

## Obtención de las parciales involucradas en las condiciones de frontera.

La ecuación 6.11 representa la condición de frontera para flujo en una fase; ésta ecuación involucra además las ecuaciones 6.12 y 6.7c, las cuales se repiten a continuación con el fin de presentar las ecuaciones necesarias para representar las condiciones de frontera del problema:

$$\sum_{j=1}^{N_V} \Psi \left( \frac{\partial \mathbf{B} \mathbf{T}}{\partial Q_j} \right)^I \delta Q_j = \mathbf{1} - \Psi \mathbf{B} \mathbf{T}^I \quad 6.11$$

donde:

$$\Psi = \frac{2 \pi k_{V2} h}{q_t (r_1 - r_w)} \quad 6.12$$

y:

$$\mathbf{B} \mathbf{T}^{n+1} = \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_{g1} \right)_I (p_1 - p_{1/2}) \right]^{n+1} \quad 6.7c$$

En la ecuación 6.7c,  $\delta_{g1}$  se define como:

$$\delta_{g1} = \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + \left( \frac{2k}{\mu_g} \right)_I^2 (\beta_g \rho_g)_I \left( \frac{p_1 - p_{1/2}}{r_1 - r_{1/2}} \right) \right]^{1/2}} \right] \quad A.23$$



## Apéndice A

Si consideramos que  $j = 1$  y  $Q_1 = P_{1/2}$  en la ecuación 6.11, tendremos:

$$\frac{\partial \mathbf{BT}}{\partial Q_1} = \frac{\partial \mathbf{BT}}{\partial P_{1/2}} \quad \text{A.24}$$

donde tomando como base la ecuación 6.7c obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{BT}}{\partial P_{1/2}} = \frac{\partial}{\partial P_{1/2}} \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_g \right)_1 (P_1 - P_{1/2}) \right]$$

o bien:

$$\frac{\partial \mathbf{BT}}{\partial P_{1/2}} = \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_g \right)_1 \frac{\partial}{\partial P_{1/2}} (P_1 - P_{1/2}) \quad \text{A.25}$$

Resolviendo la parcial de la ecuación A.25:

$$\frac{\partial \mathbf{BT}}{\partial P_{1/2}} = - \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_g \right)_1 \quad \text{A.26}$$

De manera similar tenemos que cuando  $Q_j = P_1$  entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{BT}}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \left[ \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_g \right)_1 (P_1 - P_{1/2}) \right] \quad \text{A.27}$$

Efectuando la parcial con respecto a  $P_1$  en A.27:

$$\frac{\partial \mathbf{BT}}{\partial P_1} = \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_g \right)_1 + (P_1 - P_{1/2}) \frac{\partial}{\partial P_1} \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_g \right)_1 \quad \text{A.28}$$

Desarrollando las parciales de la ecuación A.28 obtenemos:

Apéndice A

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \delta_g \right)_1 = \left( \frac{\delta_g}{\mu_g} \right)_1 \frac{\partial \rho_g}{\partial p_1} + \left( \frac{\rho_g}{\mu_g} \right)_1 \frac{\partial \delta_g}{\partial p_1} - \left( \frac{\rho_g}{\mu_g^2} \delta_g \right)_1 \frac{\partial \mu_g}{\partial p_1} \quad \text{A.29}$$

Substituyendo la expresión A.29 en A.28 obtenemos la expresión para evaluar la parcial de BT con respecto a P1, la solución de ésta ecuación requiere de la evaluación de la parcial de  $\delta_g$  con respecto a presión, por lo que partiendo de la ecuación A.23, considerando la ecuación de  $\varepsilon$  dada por A.10 obtenemos:

$$\frac{\partial \delta_{g1}}{\partial p_1} = - \frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1} \right) \quad \text{A.30}$$

Considerando el valor de  $\varepsilon$  dado por la ecuación A.10:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \left[ 1 + \left( \frac{2k}{\mu_g} \right)_1^2 (\beta_g \rho_g)_1 \left( \frac{p_1 - p_{1/2}}{r_1 - r_{1/2}} \right) \right] \quad \text{A.31}$$

Desarrollando la ecuación A.31 llegamos a:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1} = \left( \frac{2k}{\mu_g} \right)_1^2 (\beta_g \rho_g)_1 \left( \frac{p_1 - p_{1/2}}{r_1 - r_{1/2}} \right) \times \left[ - \frac{2}{\mu_{g1}} \left( \frac{\partial \mu_g}{\partial p} \right)_1 + \frac{1}{\rho_{g1}} \left( \frac{\partial \rho_g}{\partial p} \right)_1 + \frac{1}{p_1 - p_{1/2}} \right] \quad \text{A.32}$$

Substituyendo la ecuación A.32 y la definición de  $\varepsilon$  en la ecuación A.30 obtenemos la expresión para el cálculo del factor por flujo a alta velocidad para la

**Apéndice A**

**fase gas con respecto a presión evaluado en la frontera interna del yacimiento.**

---

## Apéndice B.- Desarrollo de las parciales de densidad y viscosidad con respecto a presión.

---

La solución de las parciales desarrolladas en el Apéndice A requieren la evaluación de las parciales de densidad y viscosidad con respecto a presión, para lo cual en éste Apéndice se presentan las expresiones que nos permiten tal evaluación.

### Parcial de densidad molar con respecto a presión.

Para la evaluación de la parcial de la densidad con respecto a presión partiremos de la siguiente expresión:

$$\rho_r = \frac{p}{Z_r RT} \quad \text{B.1}$$

donde: f = gas o aceite (g.o)

Derivando la expresión B.1 con respecto a presión:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial p} = \frac{1}{Z_f RT} - \frac{p}{Z_f^2 RT} \left( \frac{\partial Z_f}{\partial p} \right) \quad \text{B.2}$$

Si consideramos flujo de gas únicamente, entonces la ecuación B.2 se puede escribir como:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial p} = \frac{1}{Z_g RT} - \frac{p}{Z_g^2 RT} \left( \frac{\partial Z_g}{\partial p} \right) \quad \text{B.3}$$

La evaluación de la parcial del factor de compresibilidad Z con respecto a presión, necesaria en la ecuación B.3, se tomó de la referencia 3, la ecuación de estado utilizada en este desarrollo es la modificación propuesta por Zúdkévich-Joffe<sup>2</sup> a la ecuación de Redlich-Kwong. A continuación se presenta una síntesis de este desarrollo.

Si consideramos que:

$$a_g = \sum_{i=1}^{Nc} \sum_{j=1}^{Nc} C_{i,g} C_{j,g} a_{ij} \quad \text{B.4}$$

y:

$$b_g = \sum_{i=1}^{Nc} C_{i,g} b_i \quad \text{B.5}$$

donde:

$$a_{ij} = (1 - C_{ij}) (a_i a_j)^{1/2} \quad \text{B.6}$$

$$b_i = \frac{\Omega_{bi} R^2 T_{ci}}{p_{ci}} \quad \text{B.7}$$

dónde los parámetros que intervienen en las ecuaciones B.6 y B.7 se evalúan mediante las expresiones siguientes:

$$a_i = \frac{\Omega_{ai} R^2 T_{ci}^{2.5}}{p_{ci}} \quad \text{B.8}$$

$$\Omega_{bi} = 0.0867 - 0.0125 \omega_i + 0.011 \omega_i^2 \quad \text{B.9}$$

$$\Omega_{ai} = \left( \frac{R T_{ci}}{V_{ci} - b_i} - p_{ci} \right) \left( \frac{p_{ci} V_{ci} (V_{ci} + b_i)}{(R T_{ci})^2} \right) \quad \text{B.10}$$

Teniendo las variables la siguiente nomenclatura:

- $T_{ci}$  = Temperatura crítica del componente i.
- $p_{ci}$  = Presión crítica del componente i.
- $V_{ci}$  = Volumen crítico del componente i.
- $R$  = Constante Universal de los Gases (= 10.73, para el sistema inglés de unidades).
- $C_{ij}$  = Coeficientes de interacción binaria.
- $\omega_i$  = Factor omega de componentes puros.
- $c_{i,g}$  = Fracción mol del componente i para la fase gas.
- $c_{j,g}$  = Fracción mol del componente j para la fase gas.

Definiendo las variables  $A_g$  y  $B_g$  como:

Apéndice B

$$A_R = \frac{a_R P}{R^2 T^{2.5}} \quad \text{B.11}$$

$$B_R = \frac{b_R P}{R T} \quad \text{B.12}$$

$$\frac{\partial A_R}{\partial P} = \frac{A_R}{P} \quad \text{B.13}$$

$$\frac{\partial B_R}{\partial P} = \frac{B_R}{P} \quad \text{B.14}$$

Podemos entonces escribir que:

$$\frac{\partial Z_R}{\partial P} = \frac{\partial Z_R}{\partial A_R} \frac{\partial A_R}{\partial P} + \frac{\partial Z_R}{\partial B_R} \frac{\partial B_R}{\partial P} \quad \text{B.15}$$

donde:

$$\frac{\partial Z_R}{\partial A_R} = \frac{B_R - Z_R}{(3 Z_R^2 - 2 Z_R + A_R - B_R^2 - B_R)} \quad \text{B.16}$$

y:

$$\frac{\partial Z_R}{\partial B_R} = \frac{(A_R + (2 B_R + 1) Z_R)}{(3 Z_R^2 - 2 Z_R + A_R - B_R^2 - B_R)} \quad \text{B.17}$$

Por lo que:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial p_m} = \left[ \frac{1}{Z_g RT} - \frac{p}{Z_g^2 RT} \left( \frac{\partial Z_g}{\partial A_g} \frac{\partial A_g}{\partial p} + \frac{\partial Z_g}{\partial B_g} \frac{\partial B_g}{\partial p} \right) \right]_m \quad \text{B.18}$$

o bien:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial p_m} = \left[ \frac{1}{Z_g RT} \left[ 1 - \frac{p}{Z_g} \left( \frac{\partial Z_g}{\partial A_g} \frac{\partial A_g}{\partial p} + \frac{\partial Z_g}{\partial B_g} \frac{\partial B_g}{\partial p} \right) \right] \right]_m \quad \text{B.19}$$

Substituyendo B.11 y B.12 en B.13 y B.14 respectivamente y considerando B.16 y B.17 en B.19 obtenemos la expresión que representa la parcial de densidad del gas con respecto a presión.

## Cálculo de la viscosidad y de la parcial de viscosidad con respecto a presión.

Las viscosidades de las fases aceite y gas se calculan, en el presente trabajo, considerando un método generalizado propuesto por Jossi, Stiel y Thodos y modificado por Lohrenz, Bray y Clark<sup>24</sup>.

La correlación de Jossi y cols. fué desarrollada para el cálculo de la viscosidad de componentes puros y tiene la forma siguiente:

$$\left[ (\mu - \mu^*) \varepsilon + 10^{-4} \right]^{1/4} = a_1 + a_2 \rho_r + a_3 \rho_r^2 + a_4 \rho_r^3 + a_5 \rho_r^4 \quad \text{B.20}$$

donde:

$$a_1 = 0.1023$$

$$a_2 = 0.023364$$



## Apéndice B

$$\begin{aligned}a_3 &= 0.058533 \\a_4 &= -0.040758 \\a_5 &= 0.0093324\end{aligned}$$

$\mu$  = Viscosidad de aceite o gas (cp).  
 $\mu^*$  = Viscosidad a baja presión (cp).  
 $\rho_r$  = Densidad de reducida del gas  
 $\epsilon$  = Parámetro de viscosidad de la mezcla.

Los parámetros anteriores se calculan a partir de las siguientes relaciones.

**Cálculo del parámetro de viscosidad de la mezcla:**

$$\epsilon = \frac{\left[ \sum_{j=1}^{N_c} (x_j T_{c_j}) \right]^{1/6}}{\left[ \sum_{j=1}^{N_c} (x_j M_j) \right]^{1/2} \left[ \sum_{j=1}^{N_c} (x_j p_{c_j}) \right]^{2/3}} \quad \text{B.21}$$

donde:

$x_j$  = fracción mol del componente j.  
 $T_{c_j}$  = Temperatura crítica del componente j ( $^{\circ}\text{R}$ ).  
 $p_{c_j}$  = Presión crítica del componente j (psia).  
 $M_j$  = Peso molecular del componente j.  
 $N_c$  = Número de componentes.

**Cálculo de la densidad reducida.**

$$\rho_r = \rho \left( \sum_{j=1}^{N_c} x_j V_{c_j} \right) \quad \text{B.22}$$

con:

## Apéndice B

$\rho$  = Densidad de la fase r.

$V_{c_j}$  = Volumen crítico de la fase r (ft<sup>3</sup>/lb-mol)

### Cálculo de la viscosidad a baja presión.

$$\mu^* = \frac{\sum_{j=1}^{N_c} (x_j \mu_j^* M_j^{1/2})}{\sum_{j=1}^{N_c} (x_j M_j)^{1/2}} \quad \text{B.23}$$

A fin de resolver la ecuación B.23 necesitamos:

$$\mu_j^* = \frac{3.4 \times 10^{-4} (T_{rj})^{0.94}}{\epsilon_j} \quad \text{B.24}$$

para  $T_{rj} \leq 1.5$

$$\mu_j^* = \frac{1.778 \times 10^{-4} (4.58 T_{rj} - 1.67)^{5/8}}{\epsilon_j} \quad \text{B.25}$$

para  $T_{rj} > 1.5$

En las ecuaciones B.24 y B.25:

$$T_{rj} = \frac{T}{T_{c_j}} \quad \text{B.26}$$

## Apéndice B

y:

$$\varepsilon_j = \frac{T_{e_j}^{1/6}}{M_j^{1/2} p_{e_j}^{2/3}} \quad \text{B.27}$$

Las ecuaciones anteriores nos permiten evaluar la viscosidad de la fase a diferentes presiones.

Para calcular la parcial de la viscosidad con respecto a presión reescribiremos la ecuación B.20 de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon} \left[ (a_1 + a_2 \rho_r + a_3 \rho_r^2 + a_4 \rho_r^3 + a_5 \rho_r^4)^4 - 1 \right] + \mu^* \quad \text{B.28}$$

si:

$$f(\rho_r) = a_1 + a_2 \rho_r + a_3 \rho_r^2 + a_4 \rho_r^3 + a_5 \rho_r^4 \quad \text{B.29}$$

substituyendo la ecuación B.29 en la ecuación B.28:

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon} \left[ f^4(\rho_r) - 1 \right] + \mu^* \quad \text{B.30}$$

Efectuando la parcial de la viscosidad con respecto a presión en la ecuación B.30 tenemos que:

$$\frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{\partial \mu^*}{\partial p} + \frac{4}{\varepsilon} f^3(\rho_r) \frac{\partial \rho_r}{\partial p} - \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ f^4(\rho_r) - 1 \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \quad \text{B.31}$$

pero como:

Apéndice B

$$\frac{\partial \mu^*}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \text{B.32}$$

y

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \text{B.33}$$

Considerando B.32 y B.33 en la ecuación B.31 tenemos que:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{p}} = \frac{4}{\varepsilon} \Gamma^{-3}(\rho_r) \frac{\partial \rho_r}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{B.34}$$

Como:

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_c} \quad \text{B.35}$$

donde

$$\rho_c = \text{Densidad Pseudoreducida de la Mezcla} \left( \frac{\text{lb-mol}}{\text{ft}^3} \right)$$

Entonces:

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{B.36}$$

y:

## Apéndice B

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{ZRT} - \frac{p}{Z^2 RT} \frac{\partial Z}{\partial p} \quad \text{B.37}$$

La parcial de Z con respecto a presión quedó definida por la ecuación B.15, por lo tanto:

$$\frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{4}{\epsilon} f^{-3}(\rho_r) \left[ -\frac{1}{\rho_c} \left( \frac{1}{ZRT} - \frac{p}{Z^2 RT} \frac{\partial Z}{\partial p} \right) \right]_m \quad \text{B.38}$$

Con lo cual damos por definida la parcial de viscosidad con respecto a la presión, para cada nodo m y a cualquier tiempo l.

---

## Apéndice C.- La ecuación de flujo

---

En el siguiente apéndice se presenta el cálculo de las constantes para consistencia de unidades, las expresiones para el cálculo de la velocidad de flujo (a partir de la ecuación de Forchheimer<sup>4</sup>), la aproximación en diferencias finitas de  $\delta r$  y la ecuación empleada para el cálculo del coeficiente de flujo No-Darcy ( $\beta$ ).

### Cálculo de las constantes para consistencia de unidades.

A continuación se presenta el procedimiento para el cálculo de las constantes que nos aseguran la consistencia de unidades en la ecuación de flujo de Forchheimer. La falta de estas constantes o su evaluación equivocada pueden provocar error en los cálculos en los cuales éstas se encuentren involucradas.

Partiendo de la ecuación de Forchheimer en la forma propuesta por Cornell y Katz<sup>14</sup> tenemos:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k} v + \beta \rho v^2 \quad 3.5$$

Empleando un sistema de unidades consistente como el cgs, tendremos que las variables de la ecuación 3.5 estarán dadas por:

presión-  $p$  (dinas/cm<sup>2</sup>)  
 radio-  $r$  (cm)  
 viscosidad-  $\mu$  (poise)  
 permeabilidad-  $k$  (cm<sup>2</sup>)  
 velocidad-  $v$  (cm/seg)  
 factor de alta velocidad-  $\beta$  (cm<sup>-1</sup>)  
 densidad-  $\rho$  (gr/cm<sup>3</sup>)

Se desea expresar el grupo de variables anterior en unidades del sistema inglés donde:

presión-  $p'$  (lb/pg<sup>2</sup>)  
 radio-  $r'$  (pie)  
 viscosidad-  $\mu'$  (cp)  
 permeabilidad-  $k'$  (md)  
 velocidad-  $v'$  (pie/día)  
 factor de alta velocidad-  $\beta'$  (pie<sup>-1</sup>)  
 densidad-  $\rho'$  (lb/pie<sup>3</sup>)

para lo cual se requiere efectuar las conversiones siguientes:

$$p \left( \frac{\text{lb}}{\text{pg}^2} \right) \frac{\frac{1 \text{ dina}}{\text{cm}^2}}{1.450377 \times 10^{-5} \left( \frac{\text{lb}}{\text{pg}^2} \right)} = 68947.59087 \quad \text{C.1}$$

$$r \left( \text{pie} \right) \frac{30.48 \text{ cm}}{1 \text{ pie}} = 30.48 \quad \text{C.2}$$

$$\mu \left( \text{cp} \right) \frac{1 \text{ poise}}{100 \text{ cp}} = 0.01 \quad \text{C.3}$$

$$k \left( \text{md} \right) \frac{9.86923 \times 10^{-12} \text{ cm}^2}{1 \text{ md}} = 9.86923 \times 10^{-12} \quad \text{C.4}$$

$$v \left( \frac{\text{pie}}{\text{dia}} \right) \frac{30.48 \text{ cm}}{1 \text{ pie}} \frac{1 \text{ dia}}{86400 \text{ seg}} = 3.5277778 \times 10^{-4} \quad \text{C.5}$$

$$\beta \left( \frac{1}{\text{pie}} \right) \frac{1 \text{ pie}}{30.48 \text{ cm}} = 0.03280839895 \quad \text{C.6}$$

$$\rho \left( \frac{\text{lb}}{\text{pie}^3} \right) \frac{1 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}}{62.42797 \left( \frac{\text{lb}}{\text{pie}^3} \right)} = 0.01601846096 \quad \text{C.7}$$

Sustituyendo las constantes dadas por las ecuaciones C.1 a C.7 en la ecuación 3.5 y simplificando:

$$2262.060068 \frac{dp}{dr} = 357452.1799 \frac{\mu}{k} v + 6.540459559 \times 10^{-11} \beta \rho v^2 \quad \text{C.8}$$

o bien:

$$\frac{dp}{dr} = 158.0206401 \frac{\mu}{k} v + 2.891373068 \times 10^{-14} \beta \rho v^2 \quad \text{C.9}$$

Si consideramos que:

$$C1 = 158.0206401$$

y:

$$C2 = 2.891373068 \times 10^{-14}$$



Entonces podemos escribir la ecuación C.9 de la siguiente forma:

$$\frac{dp}{dr} = C_1 \frac{\mu}{k} v + C_2 \beta \rho v^2 \quad \text{C.10}$$

donde C1 y C2 son las constantes por conversión de unidades.

## Desarrollo de la expresión para $v_{rf}$ (velocidad radial para la fase f)

Partiendo de la ecuación C.10 y expresándola en términos de la fase f (donde f puede ser gas o aceite) tenemos que:

$$\frac{dp}{dr} = C_1 \frac{\mu_f}{k_f} v_{rf} + C_2 \beta_f \rho_f v_{rf}^2 \quad \text{C.11}$$

Considerando la solución analítica para una ecuación de segundo grado:

$$y = a x^2 + b x + c \quad \text{C.12}$$

dada por:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \quad \text{C.13}$$

## Apéndice C

y escribiendo la ecuación C.11 como una ecuación de segundo grado de la forma:

$$C_2 \beta_f \rho_f v_{rf}^2 + C_1 \left( \frac{\mu_f}{k_f} \right) v_{rf} - \left( \frac{dp}{dr} \right) = 0 \quad \text{C.14}$$

Entonces por semejanza entre las ecuaciones C.12 y C.14 tenemos que:

$$a = C_2 \beta_f \rho_f$$

$$b = C_1 \left( \frac{\mu_f}{k_f} \right)$$

$$c = - \left( \frac{dp}{dr} \right)$$

Si aplicamos la expresión C.13 a la ecuación C.14 llegaremos a la siguiente expresión:

$$v_{rf1,2} = \frac{- C_1 \frac{\mu_f}{k_f} \pm \left[ \left( C_1 \frac{\mu_f}{k_f} \right)^2 + 4 C_2 \beta_f \rho_f \left( \frac{dp}{dr} \right) \right]^{1/2}}{2 C_2 \beta_f \rho_f} \quad \text{C.15}$$

Puesto que físicamente la velocidad debe ser positiva y las propiedades de viscosidad y permeabilidad son también positivas, desecharemos el argumento negativo de la ecuación C.15 por lo que tendremos:

$$v_{rf} = \frac{- C_1 \frac{\mu_f}{k_f} + \left[ \left( C_1 \frac{\mu_f}{k_f} \right)^2 + 4 C_2 \beta_f \rho_f \left( \frac{dp}{dr} \right) \right]^{1/2}}{2 C_2 \beta_f \rho_f} \quad \text{C.16}$$

Por otra parte la ecuación C.11 la podemos expresar como:

$$\frac{dp}{dr} = C_1 \frac{\mu_f}{k_f} v_{rf} \left[ 1 + \frac{C_2}{C_1} \beta_f \rho_f v_{rf} \left( \frac{k_f}{\mu_f} \right) \right] \quad \text{C.17}$$

definiendo la constante  $\delta_f$ , ecuación C.17 como:

$$\delta_f = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1} \beta_f \rho_f v_{rf} \left( \frac{k_f}{\mu_f} \right)} \quad \text{C.18}$$

y sustituyéndola en C.17 llegamos a:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu_f}{k_f} \left( \frac{v_{rf}}{\delta_f} \right) \quad \text{C.19}$$

Regresando a la ecuación C.16 definiremos, para facilitar la escritura de las ecuaciones siguientes la constante  $\mathcal{T}$  como:

$$\mathcal{T} = \left[ \left( C_1 \frac{\mu_f}{k_f} \right)^2 + 4 C_2 \beta_f \rho_f \left( \frac{dp}{dr} \right) \right]^{1/2} \quad \text{C.20}$$

Sustituyendo la ecuación C.16 en la ecuación C.18 y considerando la ecuación C.20 tenemos que:

$$\delta_f = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1} \beta_f \rho_f \left( \frac{k_f}{\mu_f} \right) \left[ \frac{-C_1 \left( \frac{\mu_f}{k_f} \right) + \mathcal{T}}{2 C_2 \beta_f \rho_f} \right]} \quad \text{C.21}$$

Simplificando la ecuación anterior:

$$\delta_r = \frac{2}{1 + \left( \frac{k_r}{C_1 \mu_r} \right) \tau} \quad \text{C.22}$$

rearrreglando la expresión C.20:

$$\tau = \left( C_1 \frac{\mu_r}{k_r} \right) \times \left[ 1 + 4 C_2 \left( \frac{k_r}{C_1 \mu_r} \right)^2 \beta_r \rho_r \left( \frac{dp}{dr} \right) \right]^{1/2} \quad \text{C.23}$$

Sustituyendo la ecuación C.23 en la ecuación C.22 y simplificando tenemos:

$$\delta_r = \frac{2}{1 + \left[ 1 + \left( \frac{4 C_2}{C_1^2} \right) \left( \frac{k_r}{\mu_r} \right)^2 \beta_r \rho_r \left( \frac{dp}{dr} \right) \right]^{1/2}} \quad \text{C.24}$$

Considerando los valores de las constantes C1 y C2 dados anteriormente llegamos a:

$$\delta_r = \frac{2}{1 + \left[ 1 + \left( 4.631658059 \times 10^{-18} \right) \left( \frac{k_r}{\mu_r} \right)^2 \beta_r \rho_r \left( \frac{dp}{dr} \right) \right]^{1/2}} \quad \text{C.25}$$

En la ecuación C.25 se puede observar que si el coeficiente de flujo No-Darcy ( $\beta$ ) es igual a cero entonces:

$$\delta_r = 1 \quad \text{C.26}$$

por lo que si sustituimos este valor en la ecuación C.19 tendremos la ecuación de Darcy en la siguiente forma:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu_r}{k_r} v_{r,r} \quad \text{C.27}$$

### Aproximación en diferencias finitas en las fronteras de los nodos $m + 1/2$ y $m-1/2$ al nivel de tiempo $n + 1$ .

Partiendo de la ecuación C.24 y aplicándole a esta ecuación el esquema de diferencias finitas en el nodo  $m + 1/2$  al nivel de tiempo  $n + 1$  tendremos que:

$$\delta_r \Big|_{m+1/2}^{n+1} = \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + \left( \frac{4C_{r,2}}{C_{r,2}} \right) \left( \frac{k_r^2}{\mu_r^2} \beta_r \rho_r \right) \left( \frac{\Delta p}{\Delta r} \right) \right]^{1/2}} \right]^{n+1} \quad \text{C.28}$$

donde:

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = \left( \frac{p_{m+1} - p_m}{r_{m+1} - r_m} \right)$$

Para flujo en dos fases consideraremos la relación entre la permeabilidad absoluta y la efectiva dada por:

$$k_r = k_{kr} \quad \text{C.29}$$

Considerando las observaciones de Wong<sup>21</sup>, se sustituye la ecuación C.29 en la ecuación C.28, y se obtiene la siguiente ecuación para flujo en dos fases:

$$\delta_r \Big|_{m+1/2}^{n+1} = \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + \left( \frac{4C_2}{C_1^2} \right) \left( \frac{k^2 k_{kr}^2}{\mu^2} \beta_r \rho_r \right) \right]^{1/2}} \right]^{n+1} \quad \text{C.30}$$

En la ecuación C.30 la permeabilidad absoluta se calcula en  $m+1/2$  como el promedio armónico dado por la ecuación 5.17 y las demás propiedades ( $\rho_r$ ,  $k_{kr}$ ,  $\mu_r$  y  $\beta_r$ ) las evaluamos corriente arriba, de donde reescribiendo la ecuación C.30 tenemos:

$$\delta_r \Big|_{m+1}^{n+1} = \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + \left( \frac{4C_2}{C_1^2} \right) k_{m+1/2}^2 \left( \frac{k_{kr}^2}{\mu^2} \beta_r \rho_r \right) \right]^{1/2}} \right]^{n+1} \quad \text{C.31}$$

donde:

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = \left( \frac{p_{m+1} - p_m}{r_{m+1} - r_m} \right)$$

De manera similar al considerar la ecuación 5.18 para el cálculo de  $k_{m-1/2}$ , tenemos lo siguiente:

$$\delta_r \left| \frac{m}{m} \right|^{n+1} = \left[ \frac{2}{1 + \left[ 1 + \left( \frac{4C_2}{C_1^2} \right) k_{m-1/2} \left( \frac{k_{r1}^2}{\mu_{r1}^2} \beta_r \rho_r \right) \right] \left( \frac{\Delta p}{\Delta r} \right)} \right]^{n+1} \quad \text{C.32}$$

donde:

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = \left( \frac{p_{m-1} - p_{m-2}}{r_{m-1} - r_{m-2}} \right)$$

## Correlación para el cálculo del coeficiente de flujo No-Darcy.

Como se planteó en el Capítulo 3 se utiliza la correlación propuesta por Firoozabadi y Katz<sup>22</sup> para el cálculo del coeficiente de flujo No-Darcy ( $\beta$ ), si partimos de la ecuación 3.6 tenemos que:

$$\ln \beta = m \ln k + b \quad \text{C.33}$$

donde:

$$m = -1.201$$

$$b = 23.83$$

Despejando  $\beta$  de la ecuación C.33:

$$e^{\ln \beta} = e^{m \ln k} e^b$$

por lo que:

$$\beta = k^m e^b \quad \text{C.34}$$

Para flujo multifásico Wong<sup>21</sup> propone substituir la permeabilidad absoluta ( $k$ ) por la permeabilidad efectiva ( $k_r$ ), considerando esto en la ecuación C.34:

$$\beta_f = k_r^m e^b \quad \text{C.35}$$

Substituyendo la ecuación C.29 en la ecuación C.35 obtenemos:

$$\beta_f = (k k_r)^m e^b \quad \text{C.36}$$

Considerando los valores de  $m$  y  $b$ , de la correlación de Firoozabadi y Katz, en la ecuación C.35 llegamos a que:

$$\beta_f = 2.234794036 \times 10^{-10} (k k_r)^{-1.201} \quad \text{C.37}$$

La ecuación C.37 es la ecuación utilizada para el cálculo del coeficiente de flujo No-Darcy dentro del esquema de solución planteado, tanto para flujo en una fase como para flujo en dos fases.



## Apéndice D.- Flujo de gas y condensado a alta velocidad en estado estacionario.

El propósito de este apéndice es considerar el flujo radial de gas y condensado a alta velocidad en estado estacionario. Todas las suposiciones son exactamente las mismas a aquellas que presentan Jones y Raghavan<sup>29</sup> en su Apéndice B. En resumen: a) efecto de daño igual a cero,  $s=0$ ; b) gasto molar constante; c) presión en la frontera externa constante,  $p_i > p_{ro}$ ; d) la composición en la frontera externa también se considera constante,  $Z_i$ ,  $1 \leq i \leq N_c$ . Considerando estas suposiciones, podemos escribir para cada componente:

$$0.00633 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \left( \frac{\rho_o k_{ro} \delta_o x_i}{\mu_o} + \frac{\rho_g k_{rg} \delta_g y_i}{\mu_g} \right) \frac{dp}{dr} \right] = 0$$

D.1

Integrando la ecuación D.1 obtenemos

$$r \left( \frac{\rho_o k_{ro} \delta_o x_i}{\mu_o} + \frac{\rho_g k_{rg} \delta_g y_i}{\mu_g} \right) \frac{dp}{dr} = C_i \quad \text{D.2}$$

donde  $C_i$  es la constante de integración. Efectuando la sumatoria para todos los componentes

$$r \left( \frac{\rho_o k_{ro} \delta_o x_i}{\mu_o} + \frac{\rho_g k_{rg} \delta_g y_i}{\mu_g} \right) \frac{dp}{dr} = C \quad \text{D.3}$$

donde

$$C = \sum_{i=1}^{N_c} C_i \quad \text{D.4}$$

Tomando en cuenta la condición de frontera en el pozo

$$\frac{2\pi k h 0.00633}{q_i} \left[ r \left( \frac{\rho_o k_{ro} \delta_o x_i}{\mu_o} + \frac{\rho_g k_{rg} \delta_g y_i}{\mu_g} \right) \frac{dp}{dr} \right]_{r=r_w} = 1 \quad \text{D.5}$$

la ecuación D.3 puede ser reescrita como:

$$r \left( \frac{\rho_o k_{ro} \delta_o x_i}{\mu_o} + \frac{\rho_g k_{rg} \delta_g y_i}{\mu_g} \right) \frac{dp}{dr} = \frac{q_f}{2 \pi k h (0.00633)}$$

D.6

De la integración de la ecuación D.6, desde el radio de pozo y a través del yacimiento, resulta la siguiente expresión:

$$\frac{2 \pi k h 0.00633}{q_f} \int_{p_{wf}}^p \left( \frac{\rho_o k_{ro} \delta_o x_i}{\mu_o} + \frac{\rho_g k_{rg} \delta_g y_i}{\mu_g} \right) dp = \ln \left( \frac{r}{r_w} \right)$$

D.7

Esta ecuación indica que una gráfica del lado derecho de la ecuación D.7 contra  $\ln(rD)$  seguiría una línea recta, dentro de la exactitud de la integración numérica de los valores del integrando, para los diferentes nodos de la malla radial en el simulador. Esta expresión fue usada como un buen indicador de la validez de las nuevas soluciones de este estudio.

Una derivación similar a la aquí presentada puede ser efectuada para el caso de factor de daño diferente de cero ( $s \neq 0$ ).