

00382

5
2EJ



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

EFFECTO DE GUIA DE ONDA EN CELDAS
CON NUCLEOS LIQUIDO CRISTALINOS

FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A :
JUAN ADRIAN REYES CERVANTES



DIRECTOR DE TESIS:

DR. ROSALIO FERNANDO RODRIGUEZ ZEPEDA

1995



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis fué realizada en el Instituto de Física de la UNAM bajo la dirección del Dr. Rosalío Rodríguez de quien expreso mis mayores agradecimientos por su dedicación y apoyo en mi formación académica durante el posgrado. Agradezco también, a los Drs Tim Minzoni y Gerardo Carmona, que formaron parte del comité tutorial de doctorado, por sus indicaciones y sugerencias. Asimismo a los investigadores miembros del jurado de revisión de esta tesis: Drs Rufino Díaz, Víctor Romero, Rosa María Velasco y Ana María Cetto por sus acertados comentarios. Agradezco finalmente al CONACYT por las becas otorgadas durante mi estancia en el posgrado.

A EDAHÍ

**A todos mis amigos y a todas las personas que contribuyeron para mi
formación**

WAVE GUIDING EFFECT IN CELL WITH NEMATIC LIQUID CRYSTALS CORES

A model for the propagation of an optical field in a nematic cell in a planar configuration is proposed. The hydrodynamic coupling due to backflows and to externally induced flows is explicitly taken into account. By using a perturbative analysis in powers of the nematic's dielectric anisotropy, we show that the liquid crystal distortion induced by the field produces an index-gradient which generates a wave guiding effect that concentrates the electromagnetic field in the central part of the cell. It is also shown that this exists in the optical limit by calculating the ray trajectories for a low intensity beam from the corresponding eikonal equation. On the other hand, in both, the perturbative analysis and the WKB limit the existence of the effect is exhibited by calculating the spatial distribution of electromagnetic energy density within the cell. In the WKB and optical limits there exist caustics whose position is determined by the angle of incidence and the material parameters. When an external stationary planar Couette flow is imposed, the effect still exists and the ray trajectories and the energy density are confined in several stripes parallel to the axis cell. Finally, we study both, the electromagnetic dynamically equation and the orientational equation in nonlinear regimes. That is, for a wave optical packet propagating through a quiescent nematic, we show that its envelope is governed by the nonlinear Schrodinger equation whose propagating parameters are determined by the dispersion relation and the elastic energy density of the nematic. We also show, from a modal analysis of the orientational equation, that the dominant mode is governed by the Nagano equation and calculate the velocity dependence of the electromagnetic order mode and the material parameters.

INDICE

Introducción	3
I. Propagación de ondas electromagnéticas en celdas nemáticas	9
I.1 Modelo y ecuaciones básicas	9
I.1.1. Dinámica del campo electromagnético	10
I.1.2. Dinámica reorientacional	11
I.2 Efecto de guía de onda: cálculo perturbativo	15
I.2.1 Dinámica reorientacional acoplada	16
I.2.2. Modos perturbados del campo óptico	18
I.2.3 Densidad de energía electromagnética	20
II. Efecto de guía de onda en límite óptico	22
II.1 Trayectorias de rayo	23
II.2 Regímenes débil y fuerte	26
III. Efecto de guía de onda en el límite WKB	27
III.1 Los modos TM en la aproximación WKB	27
III.1.1 Régimen débil	32
III.1.2 Régimen fuerte	34
III.2. Densidad de energía electromagnética (WKB)	36
III.3. Configuración orientacional	39
Apéndice A	43
Apéndice B	44
Apéndice C	46
IV. Propagación de haces ópticos en celdas nemáticas con flujo hidrodinámico	48
IV.1 Ecuaciones para los campos de orientación y velocidad	48
IV.1.1 Dinámica acoplada	53
IV.1.2. Configuración para el estado estacionario	55
IV.2 Efecto de guía de onda: teoría de perturbaciones	57
IV.2.1 Relaciones de dispersión	59
IV.2.2. Modos perturbados del campo óptico	62

IV.2.3 Densidad de energía electromagnética	63
IV.3. Efecto de guía de onda: límites óptico y WKB	64
IV.3.1 Trayectorias de rayo	65
IV.3.2 Los modos TM en la aproximación WKB	65
IV.3.2a Régimen débil	66
IV.3.2b Régimen fuerte	66
IV.3.3. Densidad de energía electromagnética (WKB)	68
Apéndice D	71
Apéndice E	72
Apéndice F	74
V. Solitones ópticos en celdas nemáticas	76
V.1 Régimen no lineal de los modos TM	76
V.2 Ecuación para la envolvente	79
V.3 Ecuación de Schrödinger no lineal para una guía de onda nemática	84
Apéndice G	89
VI. Propagación de solitones orientacionales	93
VI.1 Régimen lineal y óptico de los modos TM	93
VI.2 Dinámica del campo de reorientación	96
VI.2.1 Régimen lineal	99
VI.2.2 Régimen no lineal	102
VI.3. Ecuación de Naguno para el modo dominante	104
Conclusiones	107
Referencias	111

INTRODUCCION

El descubrimiento de los primeros fenómenos ópticos no lineales se inicia después de la creación del láser (1960), pues así se dispuso de una fuente de radiación coherente y capaz de concentrar altas intensidades de energía en regiones pequeñas (10^{18} Watts/cm²). Desde entonces se han realizado una gran cantidad de experimentos algunos de los cuales han consistido en hacer incidir uno o más haces láser sobre cristales sólidos fotorrefractivos. Esto ha dado origen a la observación de numerosos fenómenos ópticos no lineales en estos materiales como son, por ejemplo, la generación del segundo armónico, conjugación de fase, mezclado de ondas, etc.

En años recientes los estudios básicos y de aplicación tecnológica se han avocado tanto al desarrollo de láseres muy intensos y pulsados, como al descubrimiento de nuevos materiales que exhiban una mejor respuesta óptica no lineal que los empleados originalmente (cristales sólidos). Entre estos nuevos materiales utilizados durante la última década para observar fenómenos ópticos no lineales, destacan los cristales líquidos. Estos materiales se caracterizan por que en ellos se producen fenómenos ópticos no lineales con campos ópticos de mucho menor intensidad que los necesarios para producir los mismos en cristales sólidos. Por esta razón son llamados materiales "suaves".

Uno de los fenómenos más representativos del comportamiento óptico no lineal en los cristales líquidos es la Transición de Freedericksz Óptica (TFO), que fué observada por primera vez en 1980 [1]. Este fenómeno consiste en la reorientación de las moléculas anisotrópicas de un cristal líquido, por efecto de un haz láser polarizado (linealmente) que incide sobre la muestra. Tanto el láser como la fuerzas elásticas producidas por el mismo medio, ejercen torcas sobre las moléculas del nemático. Cuando la intensidad del campo óptico sobrepasa cierto valor crítico, las torcas eléctricas vencen a las elásticas y las moléculas del nemático se alinean, en promedio, en la dirección del campo eléctrico.

Este fenómeno y algunos otros fenómenos no lineales en nemáticos, como son el autoenfocamiento [2], la conjugación de fase [3], y la biestabilidad óptica [4], se han estudiado extensamente en la literatura reciente y son la

causa de que los cristales líquidos se empleen en el diseño y la construcción de dispositivos electro-ópticos nuevos y diversos que se utilizan ampliamente tanto en comunicaciones como en tecnología digital de computadoras. Algunos ejemplos de estos dispositivos son interruptores ópticos [5]; acopladores de guías de onda [6], moduladores de fase [7], selectores de modos transversos [8], etc.

Particularmente, en los últimos años se ha prestado especial atención a la posibilidad de producir un efecto de guía de onda en fibras ópticas con núcleos líquido-cristalinos [9,10,11]. La idea básica consiste en aprovechar las propiedades fotorrefractivas del cristal líquido para producir dicho efecto sin tener que acudir al mecanismo usual basado en la reflexión total interna. Así por ejemplo, Palfy et al [11] desarrollaron un modelo de guía de onda para una geometría cilíndrica en donde se analiza principalmente la configuración orientacional del cristal líquido y su dependencia con un parámetro de orden en su fase nemática. Los autores muestran que una configuración orientacional anisotrópica e inhomogénea es la más estable del sistema. En trabajos posteriores [12,13,14] estos autores calculan numéricamente mas no en forma analítica, la amplitud y la fase de algunos modos transversos de la misma guía; asimismo, calculan en forma iterativa y numérica la dependencia del parámetro de propagación con la potencia.

Por otro lado, también se ha realizado investigación concerniente a la construcción y el análisis de diversas guías de onda no lineales cuyos núcleos son cristales líquidos, pero sólo en sus fases isotrópicas [15,16,17]. Debido a que en la fase isotrópica o desordenada de un cristal líquido las propiedades anisotrópicas desaparecen, el principal mecanismo no lineal de estas guías de onda se reduce al acoplamiento entre la densidad y temperatura del nemático, y la intensidad del campo óptico. En algunos trabajos muy recientes [18,19], con este tipo de guías se ha encontrado que por arriba de cierta intensidad umbral, la guía deja de conducir y refleja la mayor parte de la radiación del láser que sobre ella incide.

El cálculo numérico de algunos modos transversos en guías de onda planares con núcleos líquido-cristalinos en fase nemática y con condiciones de frontera mixtas también ha sido realizado [20]. Sin embargo, es preciso señalar que el análisis teórico de estos trabajos es exclusivamente numérico. No sólo tienen las limitaciones mismas de un modelo numérico, sino que además

están restringidos al régimen lineal de propagación de los modos.

De los comentarios en los párrafos anteriores resulta claro que la idea de utilizar un cristal líquido como núcleo de una guía de onda ya ha sido contemplada en la literatura en años recientes [11-13]; sin embargo, en este trabajo se consideran por primera vez aspectos nuevos de esta misma idea, como son los siguientes. Se considera una geometría más simple, i.e., planar, con placas metálicas, a diferencia de la geometría cilíndrica con fronteras dieléctricas de las referencias [14]. Por otra parte, es importante señalar que mientras que en otros modelos [20] el análisis es exclusivamente numérico, en este trabajo todo el tratamiento es analítico. También, hasta donde se ha podido comprobar en la literatura, en el modelo propuesto se toman en cuenta por primera vez en la descripción de la dinámica orientacional, la presencia de los flujos hidrodinámicos internos que inevitablemente aparecen acoplados con el proceso de reorientación, así como flujos aplicados externamente sobre la celda nemática. Otro aspecto importante de la descripción aquí presentada y hasta donde se ha podido comprobar en la literatura, es la primera vez que se considera en modelos de efecto de guía de onda en cristales líquidos, es el acoplamiento no lineal entre el campo óptico y el nemático. Esto permite describir la propagación de paquetes de ondas en la celda cuya envolvente se rige por la ecuación de Schrödinger no lineal. Por último, no obstante que la ecuación de Nagumo se ha empleado en unos cuantos casos para describir la dinámica orientacional en presencia de campos estático [23], nunca se ha empleado en presencia de campos ópticos. Mas aún, su deducción por medio de un análisis modal completo en base a la eliminación adiabática de los modos estables tampoco se ha realizado en la literatura.

Así pues, el objetivo esencial de este trabajo es proponer y estudiar el desempeño de un nuevo tipo de guía de onda planar, que consiste básicamente de una capa delgada de cristal líquido en su fase nemática contenida entre dos placas metálicas paralelas, con un gradiente en su índice de refracción; producido por el proceso de reorientación inducido por un haz láser. Se considerará que el estado configuracional inicial del nemático es inhomogéneo y con condiciones de frontera planares. Este estado se puede obtener, por ejemplo, aplicando un campo electrostático adecuado (efecto flexoelectrico inverso) [21], o bien, induciéndolo mecánicamente.

El cristal líquido contenido entre las placas es un medio inhomogéneo, anisotrópico y no lineal cuyas propiedades dieléctricas gobernarán la propagación de las ondas electromagnéticas dentro de la celda. Para un haz láser que incide oblicuamente respecto al campo director del nemático, se muestra analíticamente que la TFO fotoinducida origina un efecto de guía de onda que concentra el campo eléctrico y la densidad de energía electromagnética en la parte central de la celda. Esto se muestra de dos formas distintas. Primero, usando teoría de perturbaciones independientes del tiempo, se desarrollan los modos de los campos en potencias de la anisotropía dieléctrica. Después, efectuando un análisis global (no perturbativo) en los límites óptico y WKB para haces de intensidad baja, se calculan tanto las trayectorias de rayo, a partir de la ecuación de la eikonal, como la distribución espacial de la densidad de energía electromagnética dentro de la celda.

En este trabajo, se toma en cuenta explícitamente la presencia de los flujos hidrodinámicos, tanto internos como externos, inevitablemente asociados al proceso de reorientación. Los efectos hidrodinámicos internos son aquellos inducidos por la reorientación de las moléculas, que a su vez es inducida por el campo óptico. Los efectos externos se pueden incorporar imponiendo al cristal líquido un gradiente de presiones externo. Debe mencionarse que este tipo de efectos hidrodinámicos usualmente no se toman en cuenta en la mayoría de los trabajos en la literatura y, como se verá, pueden originar cambios significativos en el comportamiento del nemático y por ende en el funcionamiento de la guía.

Los análisis realizados en las primeras partes de este trabajo se restringen a considerar la dinámica lineal de las ondas electromagnéticas. Es decir, sólo describen la propagación de haces ópticos poco intensos para los cuales la dinámica del campo electromagnético se halla prácticamente desacoplada de la reorientación del nemático. En la siguiente parte se estudian tanto las dinámicas no lineales de los modos electromagnéticos como del campo de orientaciones del nemático.

Para el campo óptico, se muestra que la envolvente de un paquete angosto de ondas electromagnéticas que se propaga en la guía, construido a partir de los modos TM lineales, está gobernada por una ecuación de Schrödinger no lineal; la cual como es bien conocido [22], admite soluciones tipo solitón.

Debido a que los solitones son soluciones muy estables, en la cuales la no linealidad del medio se equilibra con la dispersión del mismo, este resultado ratifica el buen funcionamiento de la guía para este tipo de trenes de ondas. Se calcula también analíticamente la dependencia de los parámetros del solitón con el parámetro de propagación de la guía, y se muestra que existe una dirección de incidencia del tren de ondas para la cual se requiere menor potencia del pulso para engendrar un solitón. Es importante mencionar que debido a que el solitón fué construido a partir de los modos TM, éste en sí mismo también presenta el efecto de guía de onda descrito para los modos puros.

Finalmente, mediante un análisis modal del campo de orientaciones se muestra que, en presencia de un modo electromagnético que se propaga, el modo dominante del campo de orientaciones, que originalmente se acopla con los demás, está descrito por una ecuación de Nagumo. Esta ecuación se ha estudiado extensamente en la literatura [23,24], y está bien establecido que tiene soluciones tipo solitón (pliegue "ink"). Se calcula tanto la velocidad como la amplitud de estos solitones como función del orden del modo electromagnético presente y se muestra que la velocidad de éstos es máxima para los modos más altos mientras que su amplitud es mínima.

Clerto tipo de fenómenos que se han observado recientemente en guías de ondas, como la autolimitación [18], que consiste en una reflexión casi total del haz óptico incidente en la celda, podría explicarse mediante la interacción de un solitón orientacional con la onda electromagnética. Es por ello que resulta de interés considerar este tipo de solitones para posteriormente poder establecer bajo qué condiciones la guía puede dejar de conducir.

Para desarrollar los puntos mencionados anteriormente se ha organizado este trabajo de la siguiente manera.

En el primer capítulo se define el modelo a estudiar y se deducen las ecuaciones básicas que describen las dinámicas tanto del campo electromagnético como del cristal líquido nemático en configuración planar. Se considera primero el caso simple en el que la anisotropía dieléctrica del nemático es muy pequeña y se muestra la existencia del efecto de guía de onda calculando la distribución espacial de la densidad de energía

electromagnética.

En el capítulo II se adopta un análisis global (no perturbativo) y se calculan en el límite óptico a partir de la ecuación de la eikonal, las trayectorias de rayo que sigue un haz óptico de baja intensidad.

En el capítulo III se relaja la restricción de frecuencia muy grande que el límite óptico implica, para calcular las componentes de los campos y la densidad de energía electromagnética en el límite WKB. Se muestra que en este caso la densidad de energía se concentra en la parte central de la guía, con lo que se muestra la existencia de un efecto de guía de onda.

En el capítulo IV se incluyen en el modelo efectos hidrodinámicos imponiendo a la celda un gradiente de presión externo. Se toman en cuenta tanto estos efectos hidrodinámicos externos, como los provenientes de los contraflujos originados por la reorientación del nemático. Para ello se parte del formalismo de De Gennes que toma en cuenta el acoplamiento entre la velocidad y el campo de orientaciones del nemático. Se calcula la distribución espacial de la densidad de energía electromagnética mediante teoría de perturbaciones, en los límites óptico y WKB. Se muestra que ésta se concentra en varias franjas paralelas al eje de la guía, exhibiendo así una variante del efecto de guía de onda.

En el capítulo V se analiza la dinámica no lineal del campo electromagnético en la celda, construyendo la ecuación que rige a la envolvente de un paquete de ondas muy angosto que incide oblicuamente y tiene una frecuencia media definida. Se muestra que la ecuación de la envolvente es la ecuación de Schrödinger no lineal, lo cual a su vez muestra que ciertos paquetes de ondas forman solitones, por lo que se propagan de manera estable.

En el capítulo VI se estudia la dinámica no lineal del campo de orientaciones construyendo una ecuación para describir el modo dominante del mismo. Se muestra que esta ecuación se puede reducir a la de Nagumo la cual tiene por soluciones solitones tipo pliegue, las cuales, bajo ciertas condiciones, interactúan con el haz óptico para dar lugar a una autolimitación (reflexión) del haz óptico.

Finalmente, en las conclusiones se discuten críticamente las limitaciones, alcances y perspectivas de este trabajo.

CAPITULO I

PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN CELDAS NEMATICAS

En este capítulo se construye un modelo para la propagación de ondas electromagnéticas en una celda planar que contiene un cristal líquido nemático en reposo. Se establecen las ecuaciones que describen la dinámica acoplada del ángulo de orientación del nemático y del campo óptico del haz incidente, despreciando totalmente el flujo hidrodinámico del nemático inducido por la onda (contraflujo).

Se muestra que existe un efecto de guía de onda inducido por la reorientación del nemático, mediante el cual se concentra la densidad de energía electromagnética en la parte central de la celda. En este capítulo se muestra la existencia de este efecto para nemáticos con anisotropía dieléctrica pequeña, $\epsilon_a/\epsilon \ll 1$. Se utiliza la teoría de perturbaciones para calcular los eigenvalores y eigenmodos perturbados que se propagan en la celda a primer orden en ϵ_a/ϵ . Utilizando los eigenmodos se calcula a su vez la distribución espacial de la densidad de energía electromagnética asociada a cada modo y se muestra que el efecto de la asimetría dieléctrica es aumentar la densidad de energía en la parte central de la celda.

1.1 Modelo y ecuaciones básicas

Considérese un capa de cristal líquido nemático de espesor l (50-100 μm) entre un par de placas planas conductoras (metálicas), que son perpendiculares al eje z , como se muestra en la Fig.1. Las dimensiones transversales en las direcciones x, y de las placas son muy grandes comparadas con l , pero de tal forma que la celda tenga un volumen finito $V = L^2 l$. Se supondrá que en las placas, el nemático satisface condiciones de frontera de anclaje fuerte que están dadas por $\vec{n}^{\pm 0}(z = \pm l/2) = (0, 0, 1)$, en donde $\vec{n}^{\pm 0}$ es el vector director inicial del nemático.

Bajo estas condiciones la configuración orientacional inicial más común es la homogénea, para la cual el vector director \vec{n} es paralelo en todos los puntos de la celda a las placas, sin embargo se considerará que el nemático

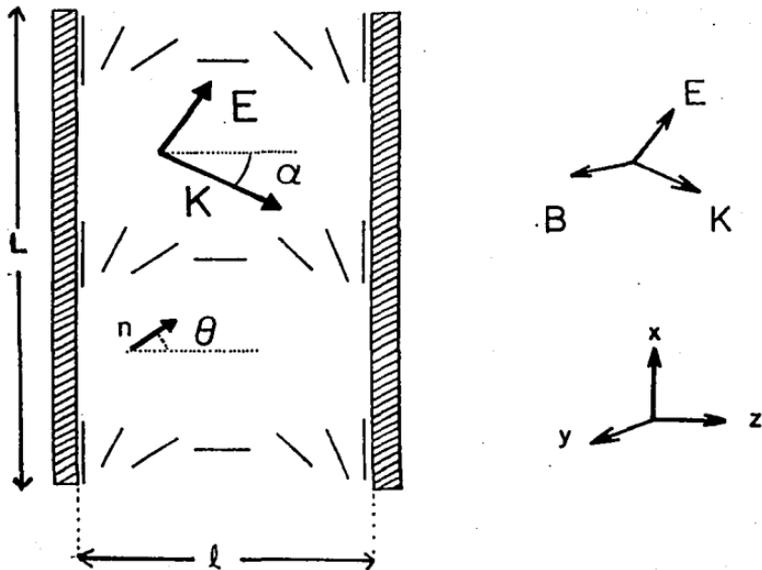


Fig.1 Diagrama esquemático de un haz laser linealmente polarizado propagándose a través de una capa de cristal líquido en reposo con orientación inicial planar.

presenta una configuración inicialmente distorsionada en la cual \vec{n} puede depender de la coordenada z . Esta configuración inicial se podría inducir en la celda aplicando un campo externo estático apropiado, es decir empleando el efecto flexoelectrico inverso [25], o bien deformando una configuración planar inicialmente homogénea. Asimismo, se supondrá que en ausencia de campo óptico el nemático retendrá su configuración inicial, pero si dicho campo es aplicado en forma oblicua en el plano x - z , la orientación del director en el interior de la celda cambiará con la posición y el tiempo; i.e. $\vec{n}(\vec{r}, t)$. Si la polarización del haz se mantiene en el plano de incidencia, en ausencia de contraflujos es razonable suponer que la reorientación de \vec{n} se mantendrá también en el plano x - z , ésto es

$$\vec{n} = [\text{sen } \theta(x, z, t), 0, \text{cos } \theta(x, z, t)], \quad (1.1)$$

en donde θ es el ángulo de reorientación definido con respecto al eje z . Mas aún, por simplicidad se supondrá homogeneidad espacial en la dirección x , es decir $\vec{n} = \vec{n}(z, t)$.

1.1.1. Dinámica del campo electromagnético

Las ecuaciones que gobiernan la propagación de las ondas electromagnéticas a través del nemático se obtienen a partir de las bien conocidas ecuaciones de Maxwell sin fuentes [28]. Siguiendo el procedimiento usual, a partir de estas ecuaciones se obtiene

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - (1/c^2) \partial^2 \vec{E} / \partial t^2 = 0 \quad (1.2a)$$

y

$$\nabla^2 \vec{B} - (1/c^2) \partial^2 \vec{B} / \partial t^2 = 0. \quad (1.2b)$$

en donde c es la rapidez de la luz en el vacío.

La relación entre la densidad de flujo magnético \vec{B} y el campo magnético \vec{H} está dada por $\vec{B} = \mu \vec{H}$, en donde se supondrá que la permeabilidad magnética μ del cristal líquido es la del vacío, ésto es, $\mu = \mu_0 = 1$. Lo cual es equivalente a considerar que el cristal líquido es no magnético. Esta es una suposición razonable ya que la susceptibilidad magnética de muchos nemáticos

es usualmente mucho más pequeña que la susceptibilidad dieléctrica [29].

El vector de desplazamiento y el vector de campo eléctrico \vec{E} están relacionados por

$$\vec{D} = \underline{\epsilon} [\theta(z)] \cdot \vec{E}, \quad (1.3)$$

en donde ϵ_{ij} es el tensor de permitividad dieléctrico que para un nemático uniaxial está dado por

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{\perp} \delta_{ij} + \epsilon_a n_i n_j, \quad (1.4)$$

Si se supone que la onda incidente es monocromática y como lo sugiere la geometría de la celda, se mueve libremente en la dirección x con una amplitud que depende sólo de z ; las componentes eléctricas y magnéticas de ésta onda toman la forma

$$E_j(x, z, t) = E_j(z) \exp [i(\beta x - \omega t)], \quad (1.5a)$$

$$H_j(x, z, t) = H_j(z) \exp [i(\beta x - \omega t)], \quad j = x, y, z. \quad (1.5b)$$

β es la constante de propagación y ω es la frecuencia angular óptica de la onda. Para cada valor de β hay una distribución específica del campo descrita por $E_j(z)$ o $H_j(z)$. La naturaleza de estas distribuciones permanece invariante con la propagación de la ondas a lo largo de la guía y son conocidas como los modos de la guía. Al sustituir la forma de los campos dada por las Ec. (1.9) en las Ecs. (1.6), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para las componentes de los modos transversos eléctricos (TE) y de los modos transversos magnéticos (TM) del campo electromagnético en el interior de la celda. Es conveniente utilizar esta representación ya que como está bien establecido, dicho modos proporcionan una representación completa del campo. Para los modos TM se encuentra

$$\epsilon_{zz} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + p k_0^2 [21k_0^2 \epsilon_{xx} - [p/(\epsilon_{zz} - p^2)] \frac{d\epsilon_{zz}}{dz}] \frac{dE_x}{dz} +$$

$$k_0^2 [k_0^2 (c_{xx} - p^2) + ip (dc_{xx}/d\zeta - [c_{xx}/(c_{xx} - p^2)] dc_{xx}/d\zeta)] E_x = 0, \quad (1.6a)$$

$$E_x = - (1/(c_{xx} - p^2)) [c_{xx} E_x - (ip/k_0) dE_x/d\zeta], \quad (1.6b)$$

$$H_y = -p E_x + (1/k_0) dE_x/d\zeta, \quad (1.6c)$$

y para los modos TE se tiene

$$d^2 H_x/d\zeta^2 + (k_0^2) [c_{xx} - p^2] H_x = 0, \quad (1.7a)$$

$$H_x = (1/(c_{xx} - p^2)) (ip/k_0) dH_x/d\zeta, \quad (1.7b)$$

$$E_y = -p H_x + (1/k_0) dH_x/d\zeta. \quad (1.7c)$$

Para escribir estas ecuaciones en forma adimensional se ha introducido el parámetro $p = \beta/k_0$, en donde $k_0 = \omega/c$ es el vector de onda en el espacio libre. El primer conjunto de ecuaciones, Ec.(1.10), corresponde a valores de E_x , E_y y H_z distintos de cero con $H_x = 0$ en todo punto de la celda y $E_x|_{z=\pm 1/2} = 0$ en sus fronteras. Las condiciones anteriores definen los modos transversos magnéticos (TM), ya que la única componente no nula del campo magnético es transversal. Similarmente, el segundo conjunto, Ecs.(1.7), para E_y , H_x y H_z distintos de cero, con $E_x = 0$ para todo punto en la celda y $(\partial H/\partial z)|_{z=\pm 1/2} = 0$ en las fronteras representa a los modos transversos eléctricos (TE) ya que la única componente no nula del campo eléctrico es transversal. A continuación se describirá la propagación de las ondas en la celda en términos de los modos TE y TM [30,31].

I.1.2 Dinámica Reorientacional

De las Ecs. (1.6) y (1.7) es claro que para determinar la dinámica del campo óptico es necesario conocer la dinámica de θ . El exceso de densidad de energía libre de Helmholtz de un cristal líquido nemático debida a las deformaciones locales elásticas está dada por la energía de distorsión de Oseen-Frank [26]

$$f_{\text{el}} = K_{11} (\nabla \cdot \vec{n})^2 + K_{22} (\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{n}))^2 + K_{33} (\vec{n} \times (\nabla \times \vec{n}))^2. \quad (1.8)$$

Las tres constantes elásticas K_{11} , K_{22} y K_{33} están asociadas, respectivamente, con las deformaciones despliegue (splay), torsión (twist) y encorvadura (bend).

La contribución electromagnética a la densidad de energía libre [27,28] está dada por

$$f_{\text{em}} = -(1/8\pi) (\vec{D} \cdot \vec{E} - \vec{H} \cdot \vec{H}). \quad (1.9)$$

Debido a que para una gran cantidad de cristales líquidos las constantes elásticas son del mismo orden de magnitud (10^{-6} dinas) es razonable suponer que son iguales, $K_{11} = K_{22} = K_{33} = K$. Por lo tanto la densidad de energía libre para la geometría considerada toma la forma

$$F = \int dv \left[(1/2)K (d\theta/dz)^2 - (1/8\pi) \left\{ c_{\perp} |\vec{E}|^2 + c_{\parallel} (|E_x|^2 \sin^2 \theta + (E_x^* E_x + E_x E_x^*) \sin \theta \cos \theta + |E_z|^2 \cos^2 \theta) + |\vec{H}|^2 \right\} \right]. \quad (1.10)$$

en donde $*$ indica complejo conjugado. Aquí $c_{\parallel} = c_{\parallel} - c_{\perp}$ mide la anisotropía dieléctrica y c_{\parallel} , c_{\perp} denotan las constantes dieléctricas paralela y perpendicular al eje largo de las moléculas respectivamente.

La configuración estacionaria se debe determinar minimizando esta densidad de energía libre bajo la restricción de que $|\vec{n}| = 1$. Sin embargo como la Ec.(1.4) está expresada en términos de θ , ya satisface la restricción $|\vec{n}| = 1$ y por lo tanto, basta con aplicar las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange, para obtener la ecuación que determina la configuración de equilibrio, éste es

$$d^2\theta/dz^2 + q \{ \sin 2\theta (|\vec{E}_x|^2 - |\vec{E}_z|^2) - 2\vec{E}_x \vec{E}_z \cos 2\theta \} = 0. \quad (1.11)$$

Se ha escrito esta ecuación en forma adimensional introduciendo las variables $\zeta = z/l$, $\vec{E}_x = E_x/E_0$ y $\vec{E}_z = E_z/E_0$, así como el parámetro $q = c_{\parallel} E_0^2 l^2 / K$. Aquí E_0^2 representa la intensidad del campo óptico incidente. Nótese que el parámetro

q es proporcional a la razón entre la densidad de energía eléctrica del haz incidente, $E_0^2/8\pi$, y la densidad de energía elástica, KL/l^2L . Esto es q , es el parámetro que mide la intensidad de acoplamiento entre el campo de orientaciones configuracionales y el campo electromagnético, por lo que resulta natural escoger a q como una cantidad pequeña para ir tomando en cuenta de forma gradual el acoplamiento entre estos campos.

Antes de seguir adelante, es importante señalar que, como se puede ver de la Ec. (1.11), los modos TE (E_y , H_x y H_z) definidos en la subsección anterior, no afectan la dinámica reorientacional de \vec{n} ; por lo cual en lo que sigue no se tomarán en cuenta.

1.2. Efecto de guía de onda: cálculo perturbativo

A continuación se efectuará un análisis detallado de los modos transversos introducidos arriba. Este puede realizarse analíticamente si se restringe a considerar nemáticos con anisotropía dieléctrica pequeña, $\epsilon_a/\epsilon \ll 1$, en donde $\epsilon = (\epsilon_\perp + \epsilon_\parallel)/2$; lo cual equivale a aproximar el cristal líquido como un líquido isotrópico y homogéneo. A orden cero en dicho parámetro obtenemos

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_\perp \delta_{ij}, \quad (1.12)$$

por lo que la Ec. (1.10a) se reduce a

$$d^2 E_x^0/d\zeta^2 + (k_0 l)^2 (\epsilon - p^2) E_x^0 = 0, \quad (1.13)$$

en donde el superíndice ⁽⁰⁾ indica que E_x se calcula a orden cero en ϵ_a/ϵ . La solución de esta ecuación que satisface las condiciones de frontera mencionadas arriba está dada por [32]

$$E_x^0(\zeta, n) = -i E_0 (n\pi/k_0 l p_n^{(0)}) \text{sen} [n\pi(\zeta - 1/2)], \quad (1.14)$$

en donde E_0 es la amplitud del modo y el parámetro p se expresa como $p_n^{(0)} = (\epsilon - (n\pi/k_0 l)^2)^{1/2}$ con $n = 1, 2, \dots$. A partir de las Ecs. (1.10b) y (1.10c) se obtiene que

$$E_x^0(\zeta, n) = E_0 \cos [n\pi(\zeta-1/2)], \quad (1.15)$$

$$H_y^0(\zeta, n) = (cE_0/p_n^{(0)}) \cos [n\pi(\zeta-1/2)]. \quad (1.16)$$

Las ecuaciones (1.14)-(1.16) representan los modos TM a orden cero en ϵ_0/c . El índice discreto n identifica cada modo y su dirección de propagación. De hecho es fácil mostrar [32], sustituyendo la Ec.(1.15) en la Ec.(1.9a) que $E_x(x, z, t)$ se puede expresar como la suma de dos ondas planas que se propagan en las direcciones $(\beta_n, 0, \pm n\pi/l)$; por lo que el ángulo de propagación α (ver Fig.1) está dado en términos de n como sigue

$$\tan \alpha_n = k_x / k_z = (p_n^{(0)} \omega l) / (n\pi c). \quad (1.17)$$

Es importante señalar que las Ecs.(1.9) indican que para que los modos se puedan propagar en la celda es necesario que $p_n^{(0)}$ sea real, ésto es,

$$n < \epsilon(\omega l/c\pi)^2; \quad (1.18)$$

lo cual implica que el número máximo de modos está determinado por los parámetros ϵ , ω y l . Por otro lado, para un modo dado n , la Ec.(1.18) proporciona una frecuencia de corte ω_c

$$\omega_c = (n/c)^{1/2} (c\pi/l), \quad (1.19)$$

tal que para $\omega > \omega_c$, p es real y los modos se propagan.

1.2.1 Dinámica reorientacional acoplada

A continuación se describirá la forma en que la configuración orientacional del nemático es distorsionada por el campo. Considérese una onda plana incidente cuyo vector de polarización forma un ángulo α_n con el eje z . Sustituyendo los modos TM dados por las Ecs. (1.14)-(1.16), en la Ec.(1.11) se obtiene

$$d^2\theta/d\zeta^2 = q \left\{ \cos 2\alpha_n \sin 2\theta + (1/2)(1 - \sin 2\alpha_n) \sin [2(\theta - n\pi(\zeta-1/2))] \right\}$$

$$+ (1/2)(1 + \text{sen}2\alpha_n) \text{sen}[2(\theta + \pi(\zeta - 1/2))] \} \quad (1.20)$$

con q definido arriba. De donde, a orden cero en c_e/c ($q = 0$) el miembro derecho de la Ec.(1.20) se anula y la solución general de la Ec.(1.20) resulta ser

$$\theta^{(0)}(\zeta) = c_1 \zeta + c_2, \quad (1.21)$$

en donde las constantes c_1 y c_2 deben determinarse mediante las condiciones de frontera para θ en $\zeta = \pm 1/2$. Esta es la configuración orientacional de referencia que el nemático adopta cuando no hay campo externo óptico, que como se mencionó al principio, presenta una distorsión inicial. Esta configuración inicial se puede inducir en la celda aplicando un campo externo estático o bien deformando una configuración planar inicialmente homogénea, como se indicó al inicio de este capítulo. Si ahora se sustituye la Ec.(1.21) en el miembro derecho de la Ec.(1.20) y se resuelve la ecuación resultante imponiendo condiciones de frontera para $\theta \pm \pi/2$ en $\zeta = \pm 1/2$, se obtiene la siguiente expresión para el ángulo de reorientación a primer orden en c_e/c ,

$$\begin{aligned} \theta^{(1)}(\zeta, n) = & \pi\zeta + (q/4\pi^2) \left\{ \text{os}2\alpha_n \text{sen}[2\pi\zeta] \right. \\ & + (-1)^n (1/2(n-1)^2) (1 - \text{sen}2\alpha_n) \text{sen}[2(n-1)\pi\zeta] \\ & \left. + (-1)^n (1/2(n+1)^2) (1 + \text{sen}2\alpha_n) \text{sen}[2(n+1)\pi\zeta] \right\}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Para mostrar que esta nueva configuración orientacional ya sugiere la existencia del efecto de guía de onda, en las Figs. 2a - 2b se ha graficado $\theta^{(1)}$ como función de ζ para MBBA, escogiendo una longitud de onda del haz tal que $k_0 l = 6$. Para esta selección de parámetros, sólo los modos $n = 1, 2, 3$ y 4 están permitidos y se propagan con los correspondientes ángulos de propagación $\alpha_1 = 76^\circ$, $\alpha_2 = 62^\circ$, $\alpha_3 = 45^\circ$ y $\alpha_4 = 20^\circ$. En las Figs. 2a y 2b, sólo se muestran las curvas que corresponden a los dos primeros modos. Nótese que $\theta^{(1)}$, para un valor dado de ζ , es menor que su valor en la configuración de referencia que se obtiene tomando $q = 0$ en la Ec.(1.22) y está representada en las figuras por líneas rectas. Esto implica que la polarización del campo está más alineada con \vec{n} en la parte central de la

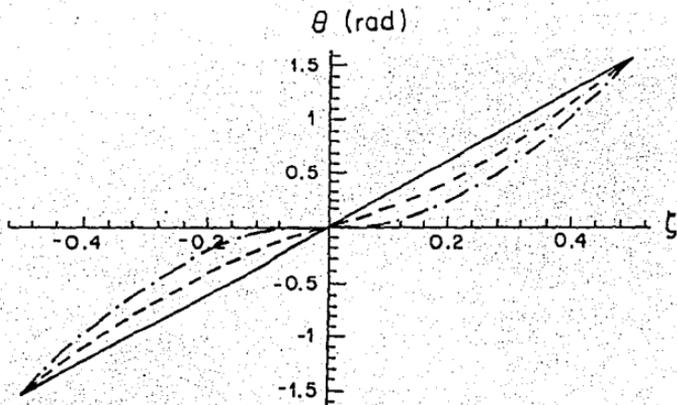


Fig. 2a. Angulo de reorientación θ como función de ζ para MBBA y el modo $n = 1$ con $\alpha_1 = 76^\circ$. La longitud de onda λ y l son tales que $k_0 l = 6$. El trazo (—) denota al caso isotrópico ($q = 0$) y las curvas (- -) y (-.-) corresponden, respectivamente, a $q = 0.1$ y $q=0.2$.

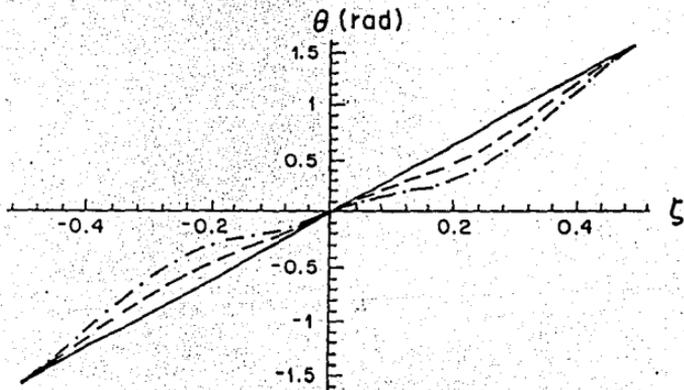


Fig. 2b. Lo mismo que en la Fig. 2a para el modo $n = 2$ y $\alpha_2 = 62^\circ$.

celda que junto a las placas, lo cual a su vez indica que el vector de propagación (\vec{k}) se encuentra más alineado con el eje x. Por lo tanto, esta configuración induce a los modos a propagarse por la parte central de la celda lo cual sugiere la existencia de un efecto de guía de onda. Para los modos $n = 3$ y $n = 4$ esta tendencia es menos notable. Con el objeto de mostrar que el efecto de guía de onda realmente existe, es conveniente analizar los modos del campo a primer orden en c_a/c .

1.2.2. Modos perturbados del campo óptico

A primer orden en c_a/c las Eqs. (1.7) se reducen a

$$d^2 E_x / d\zeta^2 + (c_a/c) \hat{A} E_x = (k_0 l)^2 (p_n^2 - c) E_x, \quad (1.23a)$$

$$E_x = \{1 p_n / k_0 l (c - p_n^2)\} dE_x / d\zeta, \quad (1.23b)$$

$$H_y = -p_n E_x + (1/k_0 l) dE_x / d\zeta, \quad (1.23c)$$

en donde

$$\begin{aligned} \hat{A} = & k_0 l p_n^{(0)} \{1 + \{p_n^{(0)} \pi / k_0 l (c - p_n^{(0)2})\}\} \text{sen}[2\pi\zeta] d/d\zeta \\ & + (k_0 l)^2 \{p_n^{(0)2} - c/2 + 1 p_n^{(0)} \pi / k_0 l\} \cos[2\pi\zeta]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nótese que la Ec. (1.23a) es una ecuación de eigenvalores para el operador $d^2/d\zeta^2 + (c_a/c) \hat{A}$ con eigenvalores $(k_0 l)^2 (p_n^2 - c)$. A este orden, el operador \hat{A} está determinado únicamente por la parte elástica de la densidad de energía libre.

Ahora, de acuerdo con la teoría de perturbaciones independiente del tiempo [33,34] las correcciones de primer orden a las eigenfunciones y a los eigenvalores del operador no perturbado $d^2/d\zeta^2$ están dadas en términos de los elementos de matriz de \hat{A} ,

$$\begin{aligned} A_{m,n} = & \langle E_x^0(n) | \hat{A} | E_x^0(m) \rangle \\ = & k_0 l m p_n^{(0)} \{1 - \{p_n^{(0)} \pi / k_0 l (c - p_n^{(0)2})\}\} \{\delta_{m-n,2} + \delta_{m+n,2}\} / 2 \end{aligned}$$

$$+ (k_0 l)^2 (p_n^{(0)2} - c/2 + ip_n^{(0)} \pi/k_0 l) (\delta_{n-n,2} - \delta_{n+n,2})/2, \quad (1.25)$$

en donde $E_x^{(0)}(n)$ está dado por la Ec.(1.14). De manera similar, las correcciones a primer orden de los eigenvalores ($p_n^2 - c$) se expresan en términos de los elementos diagonales de A_{nn} . De hecho, nótese que debido a la regla de selección $\delta_{n,1}$ en Eq.(1.25), solamente el primer eigenvalor ($n = 1$) es afectado a este orden. Por tanto,

$$c - p_n^{(1)2} = (\pi/k_0 l)^2 + (c_a/2c) [(\pi/k_0 l)^2 p_n^{(0)2} / (c - p_n^{(0)2}) + c/2 - p_n^{(0)2}]. \quad (1.26)$$

A partir de esta ecuación se puede obtener la relación de dispersión para el primer modo perturbado. Si se recuerda que $p^{(1)} = \beta^{(1)}/k_0$ y que $k_0 = \omega/c$, se sigue que

$$\beta^{(1)} = \{ (c + c_a/4)(\omega/c)^2 - (\pi/l)^2 \}^{1/2}. \quad (1.27)$$

Esta relación implica que la frecuencia de corte para este modo es ligeramente más pequeña que la correspondiente a el modo no perturbado (isotrópico) dado por la Ec.(1.19). Esto es,

$$\Delta\omega = (c_a/8c) \omega_c. \quad (1.28)$$

Por otro lado, los elementos no diagonales de $A_{m,n}$ proporcionan las correcciones a las eigenfunciones de la Ec.(1.26a). De esta manera las amplitudes de los campos perturbados están dados por

$$E_x^{(1)}(\zeta, n) = E_0 \left[\text{sen}[n\pi(\zeta-1/2)] - (c_a(k_0 l)^2/4c\pi^2(n+1)) \right. \\ \left. \{ 1\pi(n-1)[c - (n\pi/k_0 l)^2]^{1/2}/k_0 l + (n-2)[c - (n\pi/k_0 l)^2]/n^2 \pi \right. \\ \left. + c/2 - (n\pi/k_0 l)^2 \text{sen}[(n+2)\pi(\zeta-1/2)] \right]. \quad (1.29)$$

Tomando la parte real de esta expresión se obtiene todos los modos electromagnéticos en la celda a primer orden en c_a/c para $n = 1, 2, 3 \dots$. Las restantes componentes de primer orden $E_z^{(1)}(\zeta, n)$ y $H_y^{(1)}(\zeta, n)$ de los modos TM

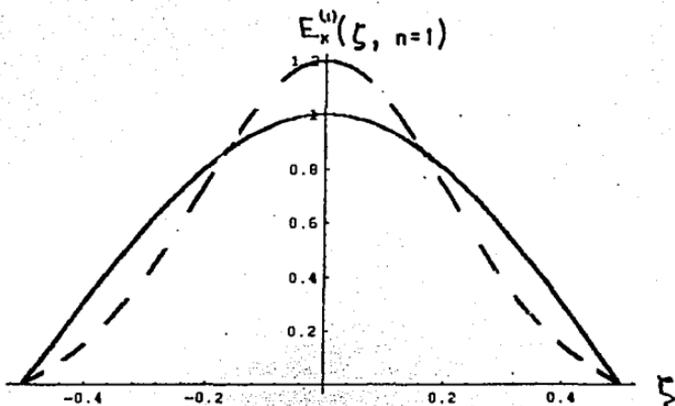


Fig. 3a. Primer modo ($n = 1$), dado por la Ec. (1.29), para MBBA y $\alpha_1 = 76^\circ$. La longitud de onda λ y l son tales que $k_0 l = 6$. El trazo (—) denota al caso isotrópico ($q = 0$) y la curva (---) corresponde a $q = 0.1$.

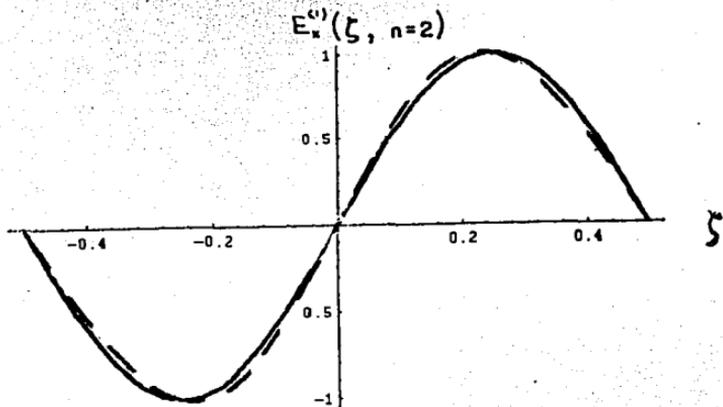


Fig. 3b. Lo mismo que en la Fig. 3a para el modo $n = 2$ y $\alpha_2 = 62^\circ$.

se calculan sustituyendo la Ec. (1.29) en las Eqs. (1.23b) y (1.23c).

En las Figs 3a-3b se muestran tanto los dos primeros modos normales no perturbados, $E_x^0(n)$, como los modos perturbados a primer orden en ϵ_a/ϵ . Para estas gráficas se han tomado los mismos parámetros que en la figuras 2. De las gráficas se observa que la intensidad de los campos perturbados para configuración planar involucrada en este modelo, $E_x^p(n)$, aumenta en la parte central de la celda y disminuye cerca de las placas, en comparación con los campos sin corrección $E_x^0(n)$. Esta tendencia de concentrar el campo en la sección central de la celda es la característica que define a una guía de ondas.

Aunque estas gráficas de $E_x^{(1)}(\zeta, n)$ en función de ζ muestran efectivamente la tendencia del campo a concentrarse en la parte central de la celda, este comportamiento y el consecuente efecto de guía de onda se muestra de forma más clara en términos de la distribución espacial de la densidad de energía electromagnética. Esta cantidad se calculará en la siguiente sección.

1.2.3 Densidad de energía electromagnética

La densidad de energía electromagnética se define en general como [27]

$$u_{em} = (1/8\pi)(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H}^2). \quad (1.30a)$$

Para los modos TM a primer orden ésta se reduce a

$$u_{em} = \left[\epsilon_{\perp} \{ (E_x^{(1)})^2 + (E_z^{(1)})^2 \} + \epsilon_a (n \cdot E^{(1)})^2 + (H_y^{(1)})^2 \right]. \quad (1.30b)$$

Sustituyendo los modos $E_x^{(1)}(\zeta, n)$, $E_z^{(1)}(\zeta, n)$ y $H_y^{(1)}(\zeta, n)$ calculados en las secciones previas, en la Ec. (1.30b) se obtiene

$$\begin{aligned} u_{em}^{(1)}(\zeta, n) = & u_{em}^{(0)}(\zeta, n) + \left\{ \epsilon_a (k_0^1)^2 / 4\epsilon\pi^2 (n+1) \right\} \left[\left\{ (n-2) \left[\epsilon - (n\pi/k_0^1)^2 \right] / n^2\pi \right. \right. \\ & + \left. \left. \epsilon/2 - (n\pi/k_0^1)^2 \right\} \left[1 + \left\{ (k_0^1)^2 / (n\pi)^2 \right\} \left(p_n^{(0)2} (n+2)\pi + \right. \right. \\ & \left. \left. \epsilon^2 \right) \cos[2\pi\zeta] + (-1)^n \left\{ 1 - \left\{ (k_0^1)^2 / (n\pi)^2 \right\} \left(p_n^{(0)2} (n+2)\pi + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \epsilon^2 \right) \cos[2\pi(n+1)\zeta] \right] \right\}. \quad (1.31a) \end{aligned}$$

en donde $u_{\text{em}}^{(0)}(\zeta, n)$ denota la densidad de energía no perturbada y está dada por

$$u_{\text{em}}^{(0)}(\zeta, n) = (E_0^2/8\pi) \left\{ e_{xx}(\pi\zeta) \text{sen}^2[2\pi n(\zeta-1/2)] + (p_n^{(0)})^2 e_{zz}(\pi\zeta) \cdot c^2 \cos^2[2\pi n(\zeta-1/2)] \right\}. \quad (1.31b)$$

Nótese que $u_{\text{em}}^{(1)}(\zeta, n)$ es una función par en ζ y que el término de corrección en la Ec. (1.31a) es proporcional a $c_n(k_0 l)^2$. Esta corrección se expresa en términos de los armónicos $\cos 2\pi(n+1)\zeta$ y $\cos 2\pi\zeta$. De hecho, es interesante notar que éste último armónico, que es el mismo para todos los modos es proporcional a la energía requerida para reorientar un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme.

En las Figs. 4a and 4b se muestra la distribución espacial a primer orden de la densidad de energía $u_{\text{em}}^{(1)}(\zeta, n)$ dada por la Ec. (1.31a), para los modos $n = 1$ y 2. Se da como referencia la correspondiente densidad de energía isotrópica $u_{\text{em}}^{(0)}(\zeta, n)$ y se toman los mismos parámetros empleados en las Figs. 2. Estas curvas muestran que, efectivamente, la densidad de energía es mayor en la parte central de la celda. Por lo tanto, el cálculo a primer orden muestra esta tendencia y sugiere la existencia del efecto de guía de onda. Como se puede observar de las Figs. 4a y 4b, este efecto es más notable para los dos primeros modos, los cuales corresponden a las direcciones de propagación del haz más cercanas al eje x .

Aunque en las gráficas anteriores se observa que la densidad de energía electromagnética es mayor en la parte central de la celda para los modos perturbados que para los no perturbados, es conveniente verificar esto de una forma cuantitativa. Para ello se calcula la varianza de $u_{\text{em}}^{(1)}(\zeta, n)$ cuya expresión explícita es

$$\begin{aligned} \text{Var } u_{\text{em}}^1 &= \langle (u_{\text{em}}^1)^2 \rangle - \langle u_{\text{em}}^1 \rangle^2 = E_0^2 (l/2)^2 (k_0 l/n\pi)^2 / 8\pi \left[1/3 + 1/(n\pi)^2 \right. \\ &\quad - 1/c(k_0 l)^2 - \{c_n(k_0 l)^2 / 2c\pi^2 (n+1)\} \{ (n-2)(c - (n\pi/k_0 l)^2) / n^2 \pi \\ &\quad + c/2 - (n\pi/k_0 l)^2 \} \{ 1 + 1/n + ((k_0 l)^2 / n^3 \pi) (p_n^{(0)})^2 (n+2)\pi + c^2 \\ &\quad \left. (1 - 1/(n\pi)^2) \right] \}. \quad (1.32) \end{aligned}$$

$$\bar{U}_{em}^{(1)}(\zeta, n=1)$$

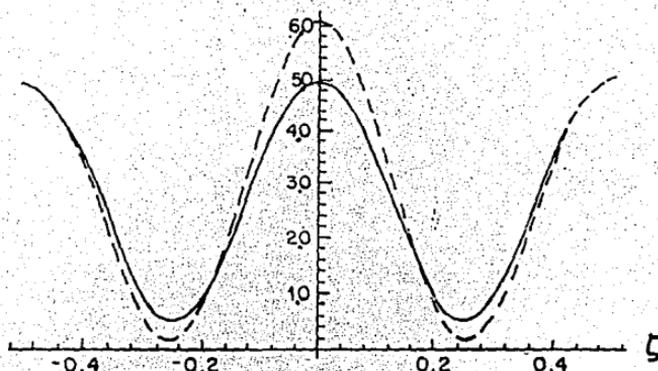


Fig. 4a. Densidad de energía electromagnética para MBBA dada por la Ec. (1.31a) para el modo $n = 1$ y $\alpha_1 = 76^\circ$. La longitud de onda λ y l son tales que $k_0 l = 6$. (—) denota el caso isotrópico $\epsilon_a = 0$.

$$\bar{U}_{em}^{(1)}(\zeta, n=2)$$

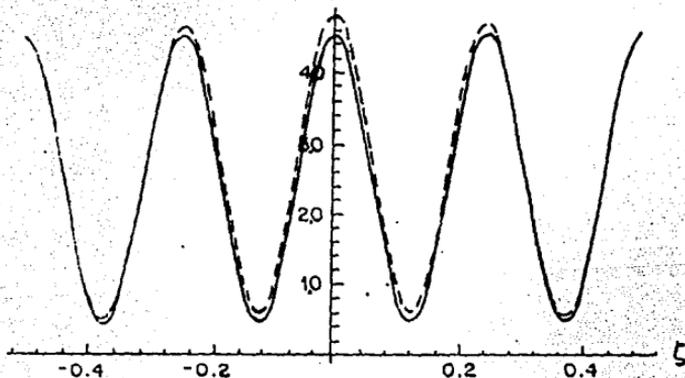


Fig. 4b. Lo mismo que en la Fig. 3a para el modo $n = 2$ y $\alpha_2 = 62^\circ$.

De esta expresión se deduce que la varianza de los modos perturbados es menor que para los modos no perturbados, es decir, la energía de los modos perturbados está más concentrada en la parte central, o bien menos dispersa.

En este capítulo se ha mostrado, de tres maneras distintas, que en una celda nemática en configuración planar es posible producir un efecto de guía de onda mediante un mecanismo físico diferente al usual (reflexión total interna). Primero, a través del comportamiento de las configuraciones del nemático que son mostradas en la Fig.2. Después, mediante las Figs. 3 que muestran el comportamiento de dos modos normales del campo eléctrico a primer orden en c_a/c , los cuales exhiben la tendencia a que el campo se concentre en la parte central de la celda. La densidad de energía electromagnética u_{em} muestra la misma tendencia, según se ve en las Figs. 4. Sin embargo, es importante enfatizar que este análisis sólo es válido para nemáticos poco anisotrópicos, i.e., hasta primer orden en la anisotropía dieléctrica ϵ_a/ϵ . Esto no constituye una limitación severa pues existen numerosos nemáticos para los cuales esta anisotropía es menor de un 10% [30], pero es necesario mostrar que el efecto existe globalmente, o sea, a todos los órdenes en ϵ_a/ϵ . Este será el objetivo del siguiente capítulo.

CAPITULO II

EFFECTO DE GUIA DE ONDA EN EL LIMITE DE LA OPTICA GEOMETRICA¹

Aquí se considerarán nemáticos con asimetría dieléctrica arbitraria, pero se imponen restricciones a la intensidad y a la frecuencia del haz incidente. Esto es, se exige que la intensidad del haz incidente sea mucho menor que la densidad de energía elástica del nemático y que su frecuencia sea mucho mayor que la frecuencia característica de la celda dada por c/l . Empleando estas hipótesis se obtiene la ecuación de la eikonal para los rayos ópticos y se calculan sus trayectorias analíticamente. Se muestra que éstas se desvían hacia la parte central de la celda lo cual implica que el campo es más intenso en dicha región exhibiendo así el efecto de guía de onda.

II.1 Trayectorias de rayo

En esta sección se calcularán las trayectorias de rayo de un haz incidente de intensidad baja, ésto es, de un haz cuya intensidad sea menor que la densidad de energía elástica del nemático,

$$q \ll 1. \quad (2.1)$$

Con esta suposición la discusión se restringe al caso en el cual la dinámica del campo está completamente desacoplada de la dinámica orientacional, como se puede ver de la Ec.(1.11). Asimismo se considerará que la frecuencia del haz incidente es tan grande que satisface el límite óptico $k_0 l \gg 1$.

Siguiendo el procedimiento usual de la óptica geométrica [36,37] supondremos que los modos TM, Ecs.(1.6), se pueden escribir de una forma similar a las ecuaciones (1.5), ésto es

$$E_j(r, t) = E_{0j}(r) \exp [i(k_0 l W(r) - \omega t)], \quad j = x, z, \quad (2.2a)$$

¹ El contenido de este capítulo está en la referencia [35]

$$H_y(\mathbf{r}, t) = H_{0j}(\mathbf{r}) \exp [i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}) - \omega t)]. \quad (2.2b)$$

Aquí $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ es la función característica de Hamilton y, como es bien conocido [38], representa la diferencia entre caminos ópticos de un rayo que se propaga entre dos puntos de la celda. Las amplitudes $E_{0j}(\mathbf{r})$ y $H_{0j}(\mathbf{r})$ en general son funciones complejas de la posición. Sustituyendo las Ecs. (2.2) en las ecuaciones (1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} & c_{zz} (\partial W / \partial \zeta)^2 + 2 c_{xz} (\partial W / \partial \zeta) (\partial W / \partial \chi) + c_{xx} (\partial W / \partial \chi)^2 - c_{\parallel} c_{\perp} = \\ & (1/k_0) \left[c_{zz} \partial^2 W / \partial \zeta^2 + c_{xx} \partial^2 W / \partial \chi^2 + (\partial c_{zz} / \partial \zeta) (\partial W / \partial \zeta) + \right. \\ & \left. (\partial c_{xx} / \partial \chi) (\partial W / \partial \chi) + (\partial W / \partial \chi) (\partial c_{xz} / \partial \zeta) \right], \quad (2.3a) \end{aligned}$$

en donde $\chi = x/l$. Ahora bien, tomando el límite óptico en esta ecuación, se obtiene la condición que debe satisfacer $W(\mathbf{r})$, que es conocida como la ecuación de la eikonal (Hamilton-Jacobi), la cual está dada por

$$c_{xx} (\partial W / \partial \chi)^2 + c_{zz} (\partial W / \partial \zeta)^2 + 2c_{xz} (\partial W / \partial \chi) (\partial W / \partial \zeta) = c_{\parallel} c_{\perp}. \quad (2.3b)$$

Nótese que $W(\chi, \zeta)$ depende de ángulo de reorientación θ a través de las componentes de c_{ij} dadas explícitamente en la Ec. (1.4).

La ecuación de la eikonal se puede resolver empleando la siguiente transformación canónica

$$W(\zeta, \chi) = p\chi + S(\zeta). \quad (2.4)$$

Aquí el parámetro $p = \beta/k_0$, definido en las Ecs. (1.6), es la componente de rayo a lo largo de el eje x . Sin embargo, en contraste a el caso considerado en la sección previa en donde p podía tomar solamente valores discretos, en el límite óptico éste puede variar continuamente. Al sustituir la Ec. (2.4) en la Ec. (2.3b) se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria para S

$$c_{zz} [dS(\zeta)/d\zeta]^2 + 2pc_{xz} dS(\zeta)/d\zeta + p^2 c_{xx} - c_{\parallel} c_{\perp} = 0, \quad (2.5)$$

su solución general toma la forma

$$S_{\pm}^{(0)}(\zeta) = \pm \int_0^{\zeta} d\zeta' [pc_{xz} \pm (c_{\parallel}c_{\perp}(c_{zz} - p^2))^{1/2}] / c_{zz} + S_0^{\pm} \quad (2.6)$$

en donde S_0^{\pm} son constantes de integración. Si ahora se utiliza la Ec.(2.4), resulta que $W(\zeta, \chi)$ está dado por

$$W(\zeta, \chi) = p\chi \pm \int_0^{\zeta} d\zeta' [pc_{xz} \pm (c_{\parallel}c_{\perp}(c_{zz} - p^2))^{1/2}] / c_{zz} + S_0^{\pm} \quad (2.7)$$

Ahora bien, de la teoría general de la ecuación de Hamilton-Jacobi [39], se sabe que $W(\zeta, \chi)$ satisface las siguientes identidades

$$\gamma = \partial W(\zeta, \chi) / \partial p, \quad (2.8a)$$

$$P_x = \partial W(\zeta, \chi) / \partial \chi, \quad (2.8b)$$

$$P_z = \partial W(\zeta, \chi) / \partial \zeta. \quad (2.8c)$$

Aquí γ es la coordenada conjugada invariante generalizada a p . P_x y P_z denotan, respectivamente, las componentes de rayo a lo largo de los ejes χ y ζ . A partir de las Ecs.(2.7) y (2.8b) se sigue que $P_x = p$, lo cual es consistente con la definición del parámetro p dada previamente. Por otro lado, de las Ecs. (2.7) y (2.8c) se encuentra que P_z sólo es función de ζ .

La Ec. (2.8a) conduce a la siguiente trayectoria de rayo

$$\gamma = \chi - \int_0^{\zeta} d\eta [c_{xz} \pm p(c_{\parallel}c_{\perp}(c_{zz} - p^2))^{1/2}] / c_{zz}. \quad (2.9)$$

El parámetro p de dominio continuo se puede expresar en términos del ángulo de propagación α , que fué definido por la Ec.(1.17) como un ángulo discreto, evaluando $d\chi/d\zeta$ en $\zeta = 0$ mediante la Ec.(2.9). Resulta

$$p = (c_{\parallel})^{1/2} / [1 + (c_{\perp}/c_{\parallel}) \cot^2 \alpha]^{1/2}. \quad (2.10)$$

Es importante señalar que el cálculo explícito de las trayectorias, Ec.(2.9), requiere conocer explícitamente los coeficientes $\epsilon_{ij}(\theta)$. En esta sección sólo se considerará el caso para el cual la dinámica del campo está completamente desacoplada de la dinámica orientacional, lo cual equivale a tomar $q = 0$ en la Ec.(1.11). En este límite la Ec.(1.5) se reduce a

$$d^2\theta/dz^2 = 0. \quad (2.11)$$

Si se resuelve esta ecuación para las condiciones de frontera $\theta(\zeta = \pm 1/2) = \pm \pi/2$ y se sustituye esta solución en la Ec.(2.9), la trayectoria de rayo resulta ser

$$\begin{aligned} (\epsilon_{\parallel} - p^2)^{1/2} [x - \gamma + (2/\pi) \ln(\epsilon + (\epsilon_{\perp}/2) \cos 2\theta)] \\ = \pm (2p/\pi) (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel})^{1/2} \Pi(\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}/(\epsilon_{\parallel} - p^2), \pi \zeta), \end{aligned} \quad (2.12)$$

en donde $\Pi(s, b, w)$ es la integral elíptica incompleta de tercera clase definida como [40]

$$\Pi(s, b, w) = \int_0^w d\theta / [(1 - s \sin^2 \theta)(1 - b \sin^2 \theta)^{1/2}]. \quad (2.13)$$

Los argumentos de Π se han identificado como $s = \epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}$, $w = \pi \zeta$ y $b = \epsilon_{\perp}/(\epsilon_{\parallel} - p^2)$.

II.2 Régimen débil y fuerte

Nótese que de la Ec.(2.12) se infiere que p está en el intervalo que va de 0 a ϵ_{\parallel} , debido a que α se halla en el intervalo $0 < \alpha < \pi/2$. Las características de las trayectorias se pueden describir de manera conveniente en los siguientes subintervalos de p^2 : $0 < p^2 < \epsilon_{\perp}$ y $\epsilon_{\perp} < p^2 < \epsilon_{\parallel}$, que se llamarán respectivamente régimen débil y régimen fuerte. Aquí, como se verá a continuación, el término débil indica que el efecto no siempre existe en el primer caso mientras que es más intenso en el segundo. A continuación se describirán separadamente ambos regímenes.

Considérese primero el régimen débil, $0 < p^2 < \epsilon_{\perp}$, para el cual la trayectoria de rayo, Ec.(2.12), está bien definida para todo ζ . Debido a que

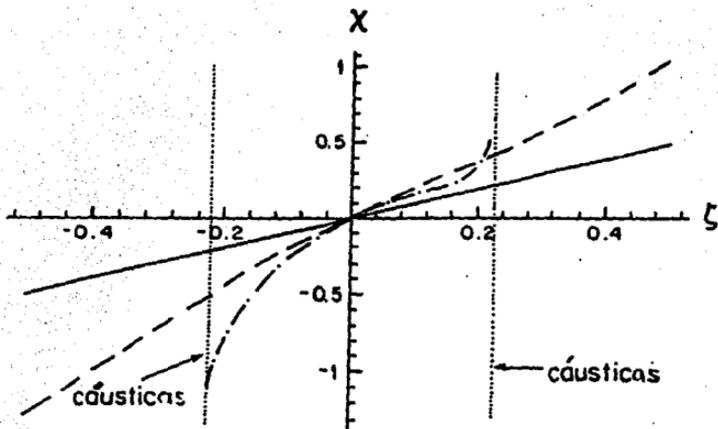


Fig. 5a. Trayectorias de rayo para $\alpha = 45^\circ$. (—) nemático isotrópico; (- -) MBBA y (- · -) 5CB. En ambos casos $T = 25^\circ\text{C}$.

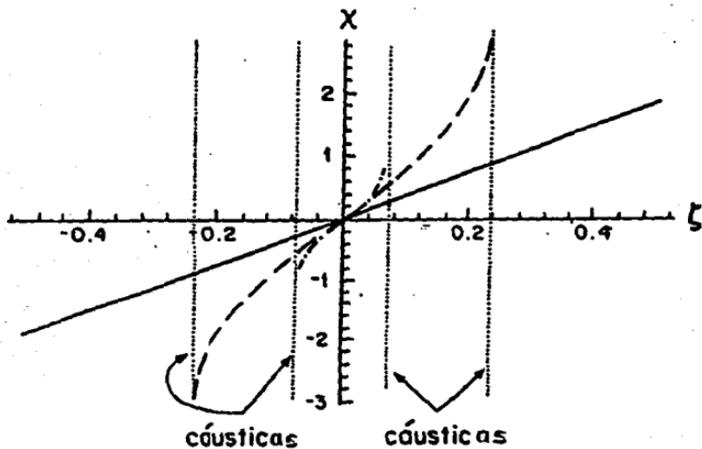


Fig. 5b. Lo mismo que en la Fig.5a para $\alpha = 75^\circ$

$\Pi(s, b, w)$ es una función monótona creciente de ζ (véase referencia 39) la trayectoria tenderá a doblarse hacia la parte central. Mas aún, la dependencia de Π con p es tal que la trayectoria se desvía más hacia la parte central de la celda para valores de p cercanos a 0, que para cuando p está más cerca de c_{\perp} .

Para el régimen fuerte, $c_{\perp} < p^2 < c_{\parallel}$, las trayectorias dadas por la Ec. (2.12) no están definidas para todo ζ en la celda, de hecho se confinan al intervalo $|\zeta| < (1/\pi) \arccos[(p^2 - c_{\perp})/c_{\perp}]$. Es fácil mostrar que para valores de ζ que se hallan fuera de este intervalo, la Ec. (2.12) proporciona valores complejos y que cuando $\zeta \rightarrow \pm (1/\pi) \arccos[(p^2 - c_{\perp})/c_{\perp}]$, entonces $x \rightarrow \pm \infty$; ésto es, el rayo se confina a una región más estrecha en torno a la parte central de la celda. Esta condición define las asintotas de la trayectoria o cáusticas (puntos de retorno). El ancho de esta región varía con p y tiende a cero cuando $p \rightarrow \sqrt{c_{\parallel}}$. En consecuencia el tamaño de esta región depende del nemático específico.

Estos comportamientos se ilustran en las Figs.5 para MBBA [40] ($c_{\perp} = 0.7$) y 5CB [41] ($c_{\perp} = 11.3$), en donde se presentan diferentes trayectorias para diferentes ángulos de propagación α y para $\gamma = 0$. Las trayectorias se obtuvieron escogiendo el signo negativo del segundo término del miembro derecho de la Ec. (2.12). Se muestran como referencia las trayectorias de rayo para un nemático homogéneo e isotrópico, así como las cáusticas correspondientes. En la Fig.5a se muestran las trayectorias para $\alpha = 45^{\circ}$. La curva dibujada con el trazo (- -) es para MBBA y por el trazo (---) es para 5CB; como se puede apreciar dichas curvas en efecto se doblan hacia la parte central de la celda si se comparan con la curva de trazo(—), la cual representa el caso isotrópico. Estos comportamientos muestran claramente la existencia del efecto de guía de onda en el límite óptico.

Mas aún, estas curvas muestran también que el efecto es más notable para nemáticos con mayor anisotropía dieléctrica como 5CB, trazo (---). Este comportamiento se observa de manera más clara en la Fig.5b para $\alpha = 75^{\circ}$, en donde el parámetro p para ambos nemáticos, (- -) y (---) se encuentra en el régimen fuerte. En dicha figura se observa que la región en donde se confina la trayectoria para 5CB es más estrecha que para MBBA.

Es necesario señalar que las gráficas para las trayectorias con el signo positivo en el segundo término del miembro derecho de la Ec. (2.12), se obtienen tomando la inversión de las curvas de la Fig.5 con respecto al origen.

CAPITULO III

EFFECTO DE GUIA DE ONDA EN EL LIMITE WKB¹

De la misma manera que en el capítulo II, en este capítulo se considerarán nemáticos de asimetría dieléctrica arbitraria, pero exigiendo que la intensidad del haz incidente sea mucho menor que la densidad de energía elástica del nemático. Sin embargo, a diferencia del capítulo II, se relajará la restricción sobre la frecuencia del haz para tomar en cuenta frecuencias menores. Se muestra que para ciertas direcciones de incidencia de haz óptico el efecto de guía de onda persiste, exhibiendo que la densidad de energía electromagnética asociada a los modos TM se concentra entre un par de caústicas en torno a la parte central de la celda.

III.1 Los Modos TM en la aproximación WKB

Es importante enfatizar que límite óptico, $\omega/c \gg 1$, estudiado en el capítulo anterior, sólo es válido para frecuencias del campo muy grandes. Por esta razón sería interesante discernir si este efecto de guía de onda persiste para frecuencias más bajas ($\lambda \approx 500 \text{ \AA}$), tales como las correspondientes a láseres He-Ne que emiten en el visible y tienen potencias bajas (1 mW) [43]. Esta motivación se refuerza en base a que los fenómenos no lineales que se han observado en cristales líquidos nemáticos son de hecho producidos con esta clase de haces láser [44,45].

Para considerar frecuencias más bajas, se deben calcular los modos TM a primer orden en el parámetro $1/k_0 l$, en contraste con el límite óptico en donde todos los términos de este orden se desprecian. Como se mostrará más adelante, este orden sucesivo que va más allá que el límite óptico, permite calcular todos los modos del campo electromagnético en la celda, a diferencia de lo que ocurre con el límite WKB en mecánica cuántica. En aquel contexto,

¹ El contenido de este capítulo se halla en la referencia [42].

de lo que ocurre con el límite WKB en mecánica cuántica. En aquel contexto, este límite es una aproximación que sólo permite calcular la función de onda para los estados de energía grande. El límite WKB que se ha definido aquí, $\omega/c > 1$, sólo impone una restricción a la frecuencia del haz incidente y deja libres a las componentes del número de onda. Por lo tanto, este límite no es una limitación sobre la envolvente espacial del haz sino sobre el comportamiento temporal del haz.

A continuación se calcularán los modos TM dados en general por las Ecs.(1.6), a primer orden en el parámetro $1/k_0 l$. Como es bien conocido esta condición define el límite WKB [46,47], que corresponde a tomar la siguiente aproximación sucesiva a el límite óptico considerado en el capítulo anterior en donde éste fué definido por la condición $k_0 l \gg 1$. Para este fin se supondrá que las amplitudes de los modos TM $E_x(\zeta, k_0)$, $E_z(\zeta, k_0)$ y $H_y(\zeta, k_0)$, son de la forma

$$E_j(\zeta, k_0) = E_j \exp [ik_0 l S(\zeta)], \quad j = x, z, \quad (3.1a)$$

$$H_y(\zeta, k_0) = H_y \exp [ik_0 l S(\zeta)], \quad (3.1b)$$

en donde $S(\zeta)$ está relacionada con $W(r)$ mediante la Ec.(2.4), y satisface la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & c_{zz} [dS(\zeta)/d\zeta]^2 + 2 p c_{xz} [dS(\zeta)/d\zeta] + p^2 c_{xx} - c_{\parallel} c_{\perp} = \\ & = (1/k_0 l) \left[c_{zz} d^2 S(\zeta)/d\zeta^2 + (dc_{zz}/d\zeta) (dS(\zeta)/d\zeta) + p (dc_{xz}/d\zeta) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

que se obtiene sustituyendo la Ec.(2.4) en la Ec.(2.3a). Para resolver esta ecuación a primer orden en $1/k_0 l$, se supone que $S = S_{\pm}^{(0)} + S^{(1)}$, en donde $S_{\pm}^{(0)}$ denota a las soluciones de la Ec.(3.2) a orden cero en $1/k_0 l$, las cuales fueron obtenidas explícitamente en el capítulo anterior y están dadas en la Ec.(1.37). Si se sustituye $S = S_{\pm}^{(0)} + S^{(1)}$ en la Ec.(2.6) se obtiene una ecuación para $S^{(1)}$ en términos de $S_{\pm}^{(0)}$, ésto es,

$$dS^{(1)}(\zeta)/d\zeta = \pm (1/2k_0 l) \left[\epsilon_{zz} d^2 S_{\pm}^{(0)}(\zeta)/d\zeta^2 + (dc_{zz}/d\zeta) (dS_{\pm}^{(0)}(\zeta)/d\zeta) + p (dc_{zz}/d\zeta) \right] / (\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} (c_{zz} - p^2))^{1/2}. \quad (3.3)$$

La solución general de esta ecuación se puede obtener fácilmente efectuando la sustitución

$$\Omega = \epsilon_{zz} dS_{\pm}^{(0)}(\zeta)/d\zeta + p c_{zz} = (\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} (c_{zz} - p^2))^{1/2}, \quad (3.4)$$

la cual conduce a la expresión

$$S(\zeta) = S_{\pm}^{(0)}(\zeta) + (1/2k_0 l) \ln(\Omega) + C_{\pm}. \quad (3.5)$$

C_{\pm} son constantes de integración que se determinarán mas adelante, a partir de las condiciones de frontera. Sustituyendo la Ec.(3.5) en la expresión general (3.1b) se obtienen las siguientes expresiones para $H_y(\zeta, k_0)$

$$H_y(\zeta, k_0) = (\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} / (c_{zz} - p^2))^{1/4} \exp(-ipk_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta c_{zz} / c_{zz}) \left[H_{0y+} \exp(-ik_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0)) + H_{0y-} \exp(-ik_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0)) \right], \quad (3.6)$$

en donde

$$f(\zeta, k_0) = (\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} (c_{zz} - p^2))^{1/2} / c_{zz}. \quad (3.7)$$

En el capítulo anterior se mostró que las características de las trayectorias de rayo se pueden describir convenientemente en términos de dos regiones en el intervalo permitido de p^2 , a saber, régimen débil para $0 < p^2 <$

ϵ_1 y régimen fuerte para $\epsilon_1 < p^2 < \epsilon_{||}$. Aquí el término débil indica que el efecto no siempre existe en el primer caso, mientras que si existe es más fuerte en el segundo. De hecho, se mostró que en el régimen débil no hay asíntotas o caústicas para las trayectorias de rayo, mientras que en el fuerte se encontraron dos caústicas que confinan al rayo a propagarse por la parte central de la celda. A continuación se considerarán ambos regímenes separadamente.

III.1.1 Régimen débil $0 < p^2 < \epsilon_1$

Antes que nada, en este caso es fácil verificar que $H_y(\zeta, k_0)$ es finito para todo ζ en el interior de la celda, sustituyendo directamente en (3.6) las expresiones para ϵ_{xz} y ϵ_{zx} dadas por la Ec.(1.4). Una vez conocido lo anterior, es necesario determinar tanto las amplitudes $H_{0y\pm} = \exp(-ik_0(C_{\pm} + S_{\pm}^+))$ como la fase $\int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0)$ del campo, las cuales se encuentran mediante las condiciones de frontera para los modos TM que fueron discutidas en la parte final de la subsección I.1.2. Si dichas condiciones se imponen a la expresión (3.6) se encuentra, por un lado, que $H_{0y+} = H_{0y-} = E_0/2$, en donde E_0^2 es la intensidad del campo incidente y por otro, que los valores de p_n que determinan la fase están dados por la siguiente ecuación trascendental

$$2 \int_0^{1/2} d\zeta \{[\epsilon_{||}\epsilon_1(\epsilon_{zz} - p_n^2)]^{1/2}/\epsilon_{zz}\} = n\pi/k_0 l, \quad (3.8)$$

en donde n es un entero positivo. Nótese que en la expresión anterior, la cantidad entre paréntesis rectangulares es la componente de rayo a lo largo de la dirección z definida en la Ec.(2.8c). Cuando dicha componente se integra sobre la coordenada z ($\zeta = z/l$), se obtiene una expresión que tiene la estructura de una integral de acción en el espacio fase correspondiente y por tanto es análoga a la condición de cuantización.

La Ec.(3.8) se puede reescribir en términos de los ángulos de propagación permitidos α_n sustituyendo la Ec.(2.10) en la Ec.(3.8). La ecuación resultante se puede expresar en términos de integrales elípticas completas de primera y tercera clase [38], las cuales están definidas, respectivamente, como

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} d\theta / (1 - a \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad (3.9a)$$

$$\Pi(s, b, w) = \int_0^{\pi/2} d\theta / [(1 - s \sin^2 \theta)(1 - b \sin^2 \theta)^{1/2}]. \quad (3.9b)$$

De esta manera la Ec. (3.8) toma la forma

$$2(c_{\parallel} \tan^2 \alpha_n + c_{\perp})^{1/2} \left\{ K[c_n (\tan^2 \alpha_n / c_{\perp} + 1/c_{\parallel})] - \right. \\ \left. \Pi[c_n / c_{\parallel}, c_n (\tan^2 \alpha_n / c_{\perp} + 1/c_{\parallel}) / (1 + (c_{\perp} / c_{\parallel}) \cot^2 \alpha_n)] \right\} \\ = n\pi / k_0 l. \quad (3.10)$$

Empleando los parámetros materiales para MBBA y SCB, se puede resolver gráficamente la Ec. (3.10). En las Fig. 6 se muestra n como función de α ; en estas gráficas los valores permitidos de α son aquellos para los cuales el valor de n es entero, a su vez, los valores permitidos de p_n se obtienen de la Ec. (2.10).

Una expresión explícita para $H_y(\zeta, k_0)$ se puede obtener insertando $H_{0y} = H_{0y} = E_0/2$, en donde $E_0^2/8\pi$ es densidad de energía de la haz incidente; y los valores permitidos de p_n (o α_n) en la Ec. (3.6). De esta forma se encuentra que

$$H_y(\zeta, k_0) = E_0 (c_{zz} - p_n^2)^{-1/4} \exp(-ip_n k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} \epsilon_{zz} / c_{zz} d\eta) \\ \cos[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0)]. \quad (3.11a)$$

Las expresiones correspondientes para las componentes restantes de los modos TM, $E_x(\zeta, k_0)$ y $E_z(\zeta, k_0)$, se obtienen sustituyendo la Ec. (3.11a) en las Ecs. (1.6). Esto conduce a las siguientes expresiones

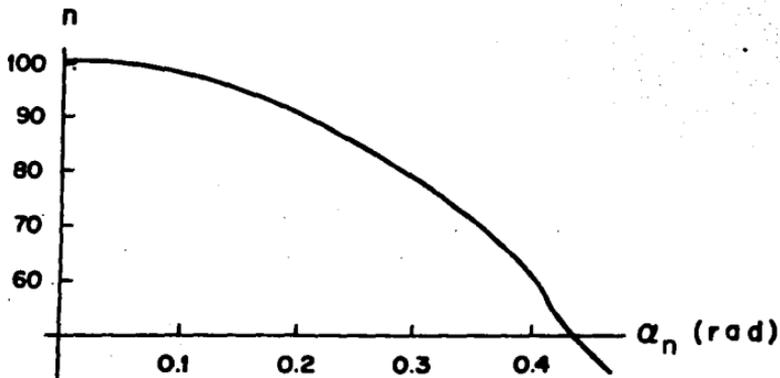


Fig. 6a. Modo n como función del ángulo de incidencia α_n para MBBA (régimen débil)

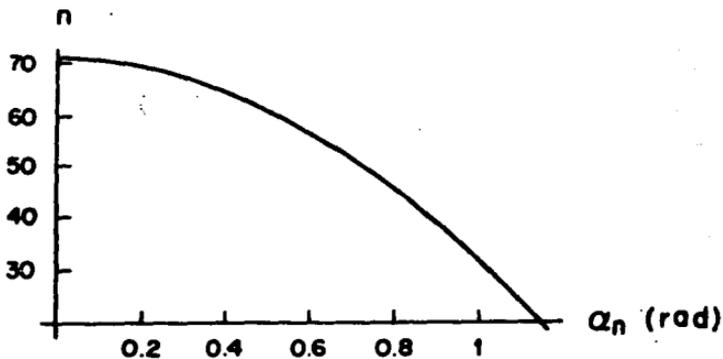


Fig. 6b. Lo mismo que en la Fig. 2a. para SCB.

$$E_x(\zeta, k_0) = iE_0 (c_{zz} - p_n^2)^{1/2} \exp(-ip_n k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta c_{xz}/c_{zz})$$

$$\text{sen}[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0)] \quad (3.11b)$$

y

$$E_z(\zeta, k_0) = E_0 [(c_{zz} - p_n^2)^{1/4}/c_{zz}] \exp[-ip_n k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta c_{xz}/c_{zz}]$$

$$\left\{ p_n \cos[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0)] + i c_{xz} [(c_{zz} - p_n^2)/c_{\parallel} c_{\perp}]^{1/2} \right.$$

$$\left. \text{sen}[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0)] \right\}. \quad (3.11c)$$

Un resultado importante que se infiere de la Ec.(3.8) es la frecuencia de corte, ω_c , de la guía de onda en consideración. ω_c está definida por la condición de que β , que es la componente x del vector de onda, sea nula. Puesto que $\beta = p k_0$, basta tomar $p = 0$ en la Ec.(3.8) para obtener dicha frecuencia, ésto es

$$\omega_c = \frac{n\pi}{lc |p_{\perp}|^{1/2}} \left(K(c_{\parallel}/c_{\parallel}) \right)^{-1}. \quad (3.12)$$

III.1.2 Régimen fuerte $c_{\perp} < p^2 < c_{\parallel}$

Como se mostró en el capítulo anterior, para este régimen las trayectorias de rayo se confinan entre el par de cáusticas localizadas en

$$\zeta = \pm a = \pm (1/\pi) \arccos[\sqrt{(p^2 - c_{\perp})/c_{\perp}}]. \quad (3.13)$$

Está bien establecido que en la vecindad de una cáustica la expresión (3.11a) ya no es válida [48], y que en su lugar se deben emplear las reglas de conexión en la aproximación semiclásica, válidas en la vecindad de un punto

de retorno [23]. Estas están dadas por

$$(1/\sqrt{\Gamma}) \operatorname{sen} \left[\int_{\zeta}^a \Gamma(\zeta') d\zeta' + \pi/4 \right] \longrightarrow (1/2\sqrt{\Gamma}) \exp \left[- \int_{\zeta}^a f(\zeta') d\zeta' \right], \quad (3.14a)$$

$$(1/\sqrt{\Gamma}) \operatorname{cos} \left[\int_{\zeta}^a \Gamma(\zeta') d\zeta' + \pi/4 \right] \longrightarrow - (1/2\sqrt{\Gamma}) \exp \left[\int_{\zeta}^a f(\zeta') d\zeta' \right], \quad (3.14b)$$

en donde se ha definido

$$\Gamma(\zeta, k_0) = (c_{\parallel} c_{\perp} (p_n^2 - c_{zz}^2))^{1/2} / c_{zz}. \quad (3.15)$$

Si al igual que antes, se coloca al sistema de coordenadas en el centro de la celda, y se emplean las reglas de conexión junto con las condiciones de frontera para los modos TM, es posible determinar la forma de $H_y(\zeta, k_0)$, que para el intervalo $-1/2 < \zeta < -a$ toma la forma

$$H_y(\zeta, k_0) = [E_0 / (p_n^2 - c_{zz}^2)^{1/4}] \exp(-ip_n k_0 \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta c_{zz} / c_{zz}) \operatorname{cosh} \left[k_0 \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \Gamma(\eta, k_0) \right]. \quad (3.16a)$$

Para el intervalo $-a < \zeta < a$, $H_y(\zeta, k_0)$ está dado por

$$H_y(\zeta, k_0) = - [E_0 / (c_{zz}^2 - p_n^2)^{1/4}] \exp(-ip_n k_0 \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta c_{zz} / c_{zz}) \left\{ \exp[-k_0 \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_0)] \operatorname{cos} \left[k_0 \int_a^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0) - \pi/4 \right] - \exp[k_0 \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_0)] \operatorname{sen} \left[k_0 \int_a^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0) - \pi/4 \right] \right\}, \quad (3.16b)$$

y, finalmente, en el intervalo $a < \zeta < 1/2$ se tiene que

$$H_y(\zeta, k_0) = [E_0 / (p_n^2 - c_{zz}^2)^{1/4}] \exp(-ip_n k_0 l \int_{\zeta}^{1/2} d\eta c_{zz} / c_{zz})$$

$$\cosh[k_0 l \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \Gamma(\zeta, k_0)] \quad (3.16c)$$

Para el régimen fuerte, la expresión análoga a la Ec. (3.8) toma la forma

$$\tan[k_0 l \int_{-a}^a d\eta (c_{\parallel\perp} c_{zz} (c_{zz} - p_n^2))^{1/2} / c_{zz}] =$$

$$= \sinh[2k_0 l \int_a^{1/2} d\eta (c_{\parallel\perp} c_{zz} (p_n^2 - c_{zz}))^{1/2} / c_{zz}] \quad (3.17)$$

De manera similar a como se manejó la condición análoga a esta ecuación para el régimen débil, los valores de α_n o p_n se pueden calcular sustituyendo la Ec. (2.10) en esta ecuación y empleando las definiciones dadas en (3.9). Esto nos lleva a una ecuación trascendental para α_n , cuya expresión explícita es demasiado larga para incluirla en el texto principal por lo que se da en el apéndice A. El punto importante que debe enfatizarse, es que la solución gráfica de dicha ecuación determina los valores permitidos de α_n en el régimen fuerte. Estos valores se muestran en la Fig.7 para los nemáticos MBBA y SCB, y están dados por medio de las intersecciones de las curvas $\tan(x)$ and $\sinh(y)$ definidas en el apéndice A.

Una observación importante que se puede inferir de las expresiones (3.8) y (3.17) es que la última adquiere una forma similar a la primera cuando n es grande. Para mostrar esto, debe recordarse, por una parte, que $k_0 l \gg 1$ en dicha ecuación, puesto que ésta es válida en el límite WKB. Por otra parte, que debido a que el límite de integración "a" es una función de p_n^2 , dada por la Ec. (3.13), y es tal que cuando $p_n^2 \rightarrow c_{\parallel\perp}$, que equivale a considerar modos de orden bajo, el intervalo de integración del miembro izquierdo de la Ec. (3.17) tiende a cero. Por lo tanto, el miembro derecho de la misma ecuación tiende a un límite finito. Sin embargo, si el valor de p_n^2 no es tan cercano a $c_{\parallel\perp}$, pero todavía se encuentra dentro del régimen fuerte, el miembro derecho de la ecuación (3.17) es muy grande debido a que $k_0 l \gg 1$. Esto implica que $\tan(x)$ es igual a un número muy grande por lo que la Ec. (3.17) se puede aproximar por

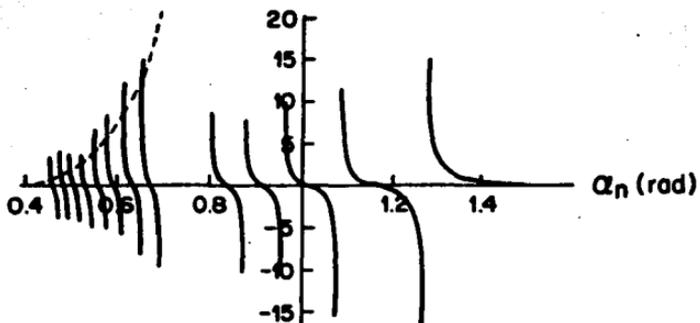


Fig. 7a. Solución gráfica de la Ec. (A.1) para MBBA en el régimen fuerte. Las intersecciones de las curvas (—) $\tan x$ and (---) senhy , representan los valores permitidos de α_n .

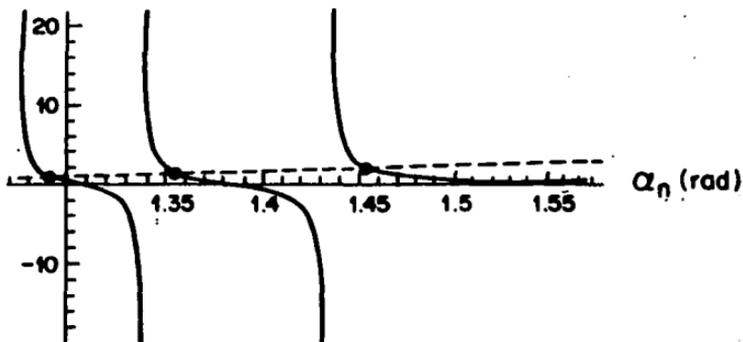


Fig. 7b. Lo mismo que en la Fig.7a. para SCB.

$$k_0 \int_{-a}^a d\eta \{c_{\parallel} c_{\perp} (c_{zz} - p_n^2)\}^{1/2} / c_{zz} = n\pi, \quad (3.18)$$

en donde n es un entero positivo. Nótese que esta expresión tiene la misma estructura que la Ec.(3.8), la única diferencia es que la longitud del intervalo de integración se ha reducido a la región en la cual las trayectorias de rayo existen, es decir de $-a$ hasta a . De la misma manera que en el régimen débil, las componentes restantes de los modos $TM_x(\zeta, k_0)$ y $E_x(\zeta, k_0)$ se obtienen sustituyendo las Ec.(3.16) en las expresiones (1.6). Las expresiones resultantes para las mismas regiones dentro de la celda están dadas en el apéndice B.

Antes de considerar el efecto de guía de onda, es importante señalar la manera en que los valores de n están relacionados con los regímenes débil y fuerte. Esto ya se podía observar desde la Ec.(3.8). En efecto, puesto que c_{zz} es una cantidad positiva definida y los límites de integración no dependen de p_n^2 , el lado izquierdo de dicha ecuación es mayor conforme p_n^2 es más cercano a cero; es decir, se tienen modos altos. Complementariamente, si $p_n^2 \rightarrow c_{\perp}$, el valor de la integral (3.8) decrece y por lo tanto el valor de n . De esta manera podemos decir que el régimen débil contiene los números de modo más grandes de la guía. Por otra parte, nótese que la Ec.(3.17) para el régimen fuerte tiene el mismo integrando que la Ec.(3.8), sin embargo, en esta última los límites de integración dependen de p_n^2 a través de a . Entonces, conforme $p_n^2 \rightarrow c_{\parallel}$ el intervalo de integración decrece y tiende a cero, de donde necesariamente n toma valores enteros pequeños. Puede concluirse que los valores más grandes de n , éstos es los modos altos, se encuentran en el régimen débil, mientras que los modos más bajos asociados con valores pequeños de n corresponden en régimen fuerte.

III.2. Densidad de energía electromagnética en el límite WKB

Los resultados de las secciones previas ya sugieren la existencia de un efecto de guía de onda en la celda. De hecho, nótese que las expresiones analíticas para $H_y(\zeta, k_0)$, dadas en las Ecs.(3.16), dependen de tal forma de ζ , que $H_y(\zeta, k_0)$ oscila en la región central $-a < \zeta < a$, y decae exponencialmente en los intervalos $-1/2 < \zeta < -a$ y $a < \zeta < 1/2$, mismos que se localizan cerca de las placas. Este hecho indica que los modos TM se concentran en la parte central de la celda, lo cual sugiere un comportamiento

de guía de onda. Sin embargo, esto sólo se puede exhibir de manera precisa analizando el comportamiento de la correspondiente densidad de energía electromagnética $u_{em}(\zeta, k_0)$ como función de ζ . Esta cantidad se definió en general en la Ec. (1.30a). Considérese primero el régimen débil $0 < p^2 < c_{\perp}^2$. En este caso los modos TM están dados por las Ecs. (3.11), que al sustituirse en la Ec. (1.30a) se obtiene

$$u_{em}(\zeta, k_0) = (E_0^2/8\pi) A(\zeta, k_0) \left\{ 1 + (p^2/c_{zz}) \cos[2k_0 \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0)] \right\}, \quad (3.19a)$$

con

$$A(\zeta, k_0) = (c_{\parallel} c_{\perp} / (c_{zz} - p^2))^{1/2}. \quad (3.19b)$$

Nótese que como $c_{zz} = c_{\perp}^2 + c_a^2 \cos^2 \pi \zeta$, $A(\zeta, k_0)$ es mayor en las placas ($\zeta = \pm 1/2$) que en la parte central de la celda, ($\zeta = 0$). Esto implica que para el régimen débil el valor de la densidad de energía es mayor cerca de las placas. Este comportamiento se muestra en la Fig. 8, en donde se grafica $u_{em}(\zeta, k)$ como función de ζ para diferentes ángulos de incidencia α_n , tanto para MBBA como para SCB. Estas curvas muestran que en el régimen débil no existe efecto de guía de onda en la celda.

A continuación se analizará el régimen fuerte $c_{\perp}^2 < p^2 < c_{\parallel}^2$. Si se sustituyen las expresiones para los campos $H_y(\zeta, k_0)$, $E_z(\zeta, k_0)$ y $E_x(\zeta, k_0)$ en el límite WKB dadas respectivamente, por las Ecs. (3.16) y las Ecs. (B.1)-(B.2), se obtiene

$$u_{em}(\zeta, k_0) = (E_0^2/8\pi) (c_{\parallel} c_{\perp} / (p^2 - c_{zz}))^{1/2} \left[(p^2/c_{zz}) + \cosh[2k_0 \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0)] \right], \quad (3.20a)$$

para $-1/2 < \zeta < -a$, y

$$u_{em}(\zeta, k_0) = (E_0^2/8\pi) (c_{\parallel} c_{\perp} / (c_{zz} - p^2))^{1/2} \left[\beta^2 + \sigma^2 - (p^2/c_{zz}) \right]$$

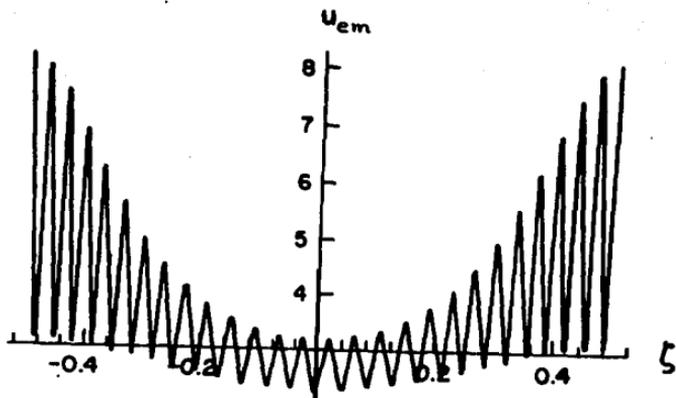


Fig. 8a. Densidad de energía electromagnética para un ángulo de incidencia $\alpha_{21} = 18.3^\circ$ para MBBA en el régimen débil.

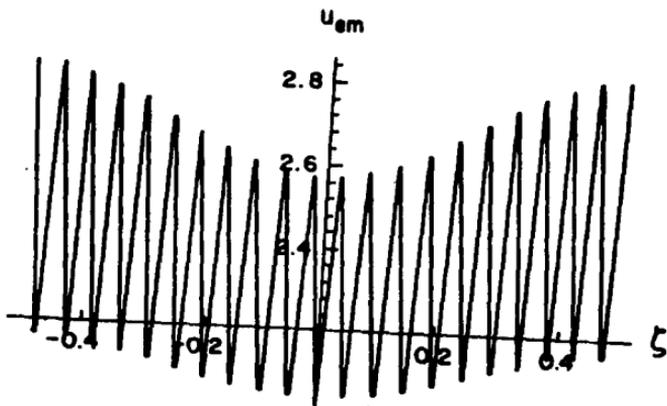


Fig. 8b. Lo mismo que en la Fig. 8a para $\alpha_{27} = 14.5^\circ$ y SCB.

$$(\beta^2 - \sigma^2) \text{sen}[2k_0 \int_{-a}^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0)] + (2p^2/c_{zz}) \cos[2k_0 \int_{-a}^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0)] \quad (3.20b)$$

cuando $-a < \zeta < a$. Finalmente

$$u_{\text{om}}(\zeta, k_0) = (E_0^2/8\pi) (c_{\parallel} c_{\perp} / (p^2 - c_{zz}))^{1/2} \left[(p^2/c_{zz}) + \cosh[2k_0 \int_{\zeta}^{1/2} d\eta f(\eta, k_0)] \right] \quad (3.20c)$$

para el intervalo $a < \zeta < 1/2$. En estas ecuaciones se ha empleado la abreviatura

$$\beta = 1/\sigma = \exp[-k_0 \int_a^{1/2} d\eta f(\eta, k_0)] \quad (3.21)$$

Las gráficas de estas expresiones para MBBA y SCB se presentan en la Fig.9 para valores distintos del ángulo de incidencia. Primeramente, nótese que en contraste con el régimen débil, cerca de las placas, ($\zeta = \pm 1/2$), $u_{\text{om}}(\zeta, k_0)$ es prácticamente cero para todos los casos. Mas aún, la energía contenida en la región entre ambas caústicas es mucho mayor que la energía fuera de ellas. Esto se puede mostrar fácilmente integrando las Ecs.(3.20) en estas dos regiones, ésto es

$$\int_a^{1/2} d\zeta u_{\text{om}}(\zeta, k_0) = (E_0^2/8\pi) (c_{\parallel} c_{\perp})^{1/2} \exp[2k_0 \int_a^{1/2} d\eta f(\eta, k_0)] / \{2k_0 (p^2 - c_{\parallel})\} \quad (3.22a)$$

y

$$\int_0^a d\zeta u_{\text{om}}(\zeta, k_0) = (E_0^2/8\pi) (c_{\parallel} c_{\perp})^{1/2} K[c_a / (c_{\parallel} - p^2), \pi a] \exp[2k_0 \int_a^{1/2} d\eta f(\eta, k_0)] \quad (3.22b)$$

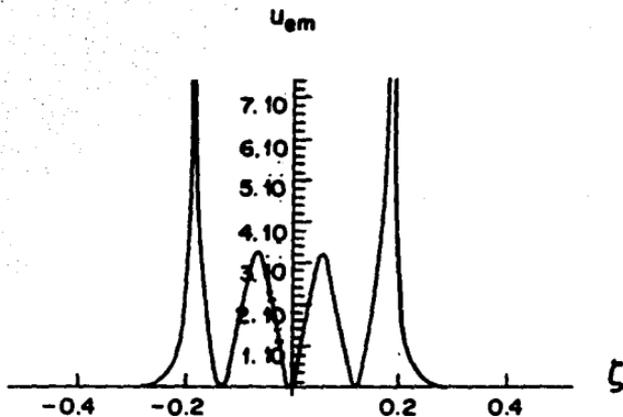


Fig. 9a. Densidad de energía electromagnética para un ángulo de incidencia $\alpha_2 = 77.5^\circ$ para MBBA en el régimen fuerte.

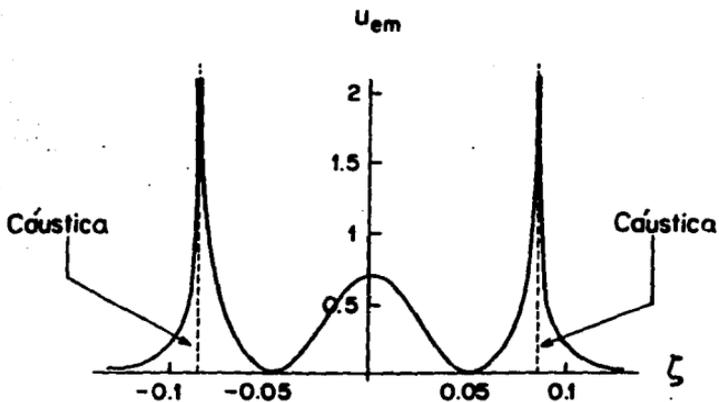


Fig. 9b. Lo mismo que en la Fig. 9a. para $\alpha_1 = 70^\circ$ y SCB.

El cociente de las expresiones anteriores, a orden dominante en $k_0 l$ resulta ser

$$\int_0^a d\zeta u_{em}(\zeta, k_0) / \int_a^{l/2} d\zeta u_{em}(\zeta, k_0) \approx k_0 l. \quad (3.23)$$

Puesto que en el límite WKB $k_0 l > 1$, se concluye entonces que la energía contenida entre ambas caústicas es mucho mayor que la energía fuera de ellas. En consecuencia, este comportamiento para $u_{em}(\zeta, k_0)$ muestra que en el límite WKB aún existe un efecto de guía de onda que concentra la densidad de energía electromagnética en la parte central de la celda. De hecho, como se puede observar de la escala del eje ζ en la Fig.9, este efecto es mucho más intenso para los modos de orden bajo ($n = 1$).

En esta sección se mostró que el efecto de guía de ondas estudiado en el capítulo I, por medio de un análisis perturbativo en ϵ_0/c , existe a cualquier orden en ϵ_0/c . Esto se mostró calculando la distribución espacial de la densidad de energía electromagnética u_{em} válida en el límite WKB para los regímenes débil y fuerte, respectivamente. Por una parte las Fig.8 muestran que el efecto de guía de onda se pierde en el régimen débil, mientras que las Fig.9 muestran que éste se hace más intenso en el régimen fuerte. De hecho la presencia de un par de caústicas en este último régimen hace que la energía se concentre entre ellas.

Mas aún, se mostró también que la intensidad del efecto aumenta con la magnitud de la anisotropía dieléctrica. Sin embargo, se debe enfatizar que las limitaciones de este modelo radican, sobre todo, en las características de la señal electromagnética, la cual debe ser débil ($q \ll 1$) y de frecuencia grande, es decir, $\omega > c/l$.

III.3. Configuración orientacional

Hasta aquí, sólo se ha considerado la dinámica de las ondas electromagnéticas en el interior de la celda. Ahora se enfocará este análisis en el ángulo de orientación θ del nemático. La orientación configuracional estacionaria final, $\theta_{\square}(\zeta, k_0)$, está dada por la Ec. (1.11). Nótese que, como se comentó arriba, dicha ecuación no lineal para θ_{\square} muestra explícitamente que

la dinámica orientacional del nemático está acoplada con la del campo. La magnitud de este acoplamiento se puede medir mediante el parámetro adimensional $q = E_0^2 l^2 / 8\pi K$, cuyo valor representa la razón entre la densidad de energía del haz incidente y la densidad de energía elástica.

En el análisis siguiente se calculará la configuración orientacional θ del nemático en el límite WKB ($k_0 l > 1$) y a primer orden en la magnitud del acoplamiento q . Consistentemente con esta hipótesis, se supondrá que $\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}$, en donde $\theta^{(0)} = \pi\zeta$ denota la solución de la Ec.(1.11) a orden cero en q , la cual se empleó en la subsección previa para calcular los modos TM. De esta manera, sustituyendo $\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}$ en la Ec.(1.5), se obtiene una ecuación para $\theta^{(1)}$ en términos de $\theta^{(0)}$,

$$\theta^{(1)}(\zeta, k_0) = -q \int_0^\zeta d\eta \int_0^\eta d\zeta' \left[\sin[2\theta^{(0)}] (|\bar{E}_x|^2 - |\bar{E}_z|^2) + \cos[2\theta^{(0)}] (\bar{E}_x \bar{E}_z^* + \bar{E}_z \bar{E}_x^*) \right] \quad (3.24)$$

Aquí \bar{E}_x y \bar{E}_z son las componentes del campo eléctrico válidas en el límite WKB y a orden cero en q , las cuales fueron calculadas en la subsección anterior. Considérese primero el régimen fuerte, $c_\perp < p^2 < c_\parallel$, en la parte central de la celda, $-a < \zeta < a$. Sustituyendo \bar{E}_x y \bar{E}_z dados por las Ecs.(B.1) y (B.2) en la Ec.(3.24) se obtiene

$$\theta^{(1)}(\zeta, k_0) = -q \int_0^\zeta d\eta \int_0^\eta d\zeta' \left[\sin 2\pi\zeta' (c_{zz} - p^2)^{1/2} \cos^2[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0)] + \left(\sin 2\pi\zeta' (c_{zz} - p^2) \left(1 + (c_{xz}/c_{zz})^2 (c_{zz} - p^2)^{1/2} / c_\parallel c_\perp \right) + \cos 2\pi\zeta' c_{xz} c_{zz} (c_{zz} - p^2)^{5/4} \right) \sin^2[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0)] \right] \sqrt{K[c_\perp / (c_\parallel - p^2)]} \pi a \quad (3.25)$$

Nótese que el parámetro $k_0 l$ sólo aparece en los argumentos de $\cos^2[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0)]$ y $\sin^2[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0)]$. Por lo tanto, empleando identidades trigonométricas elementales, se puede escribir el primer término

de la Ec. (3.25) como

$$\int_0^\eta d\zeta' g(\zeta') \cos^2 \left[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0) \right] = 1/2 \left(\int_0^\eta d\zeta' g(\zeta') \right. \\ \left. + \int_0^\eta d\zeta' g(\zeta') \cos[2k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0)] \right), \quad (3.26)$$

en donde $g(\zeta)$ es una función independiente de $k_0 l$. Puesto que en el límite WKB $k_0 l > 1$, entonces $\cos[2k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0)]$ es una función que oscila rápidamente con su argumento entonces el segundo término del miembro derecho de la Ec. (3.26) se puede aproximar como

$$\int_0^\eta d\zeta' g(\zeta') \cos[2k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0)] \approx \\ g(\zeta_0) \text{sen}[2k_0 l \int_{-1/2}^\eta d\sigma f(\sigma, k_0)] / [k_0 l f(\eta, k_0)], \quad (3.27)$$

en donde $g(\zeta_0)$ es el valor medio de $g(\zeta)$ entre 0 y η . Por lo tanto, a orden dominante en $1/k_0 l$ podemos aproximar la Ec. (3.25) por el primer término de la ecuación (3.26) solamente. El mismo análisis es válido para el segundo término del miembro derecho de la Ec. (3.25) por lo que dicha ecuación puede aproximarse como

$$\theta_{\parallel}^{(1)}(\zeta, k_0) = - (q/2) \int_0^\zeta d\eta \int_0^\eta d\zeta' \left(\text{sen} 2\pi \zeta' (c_{zz} - p^2)^{1/2} + \right. \\ \left. \text{sen} 2\pi \zeta' (c_{zz} - p^2) \left\{ 1 + (c_{xz}/c_{zz})^2 (c_{zz} - p^2)^{1/2} / c_{\parallel} c_{\perp} \right\} + \right. \\ \left. \cos 2\pi \zeta' c_{xz} (c_{zz} - p^2)^{5/4} / c_{zz} \right). \quad (3.28)$$

Siguiendo un procedimiento similar, es posible evaluar $\theta_{\parallel}^{(1)}(\zeta, k_0)$ en las regiones restantes de la celda, i.e. para $-1/2 < \zeta < -a$ y $a < \zeta < 1/2$. Esto es, sustituyendo las Ecs. (B.1) y (B.2) en la Eq. (3.25) se obtienen términos proporcionales a $1/k_0 l$, los cuales son nulos en el límite WKB. Esto implica que

$$\theta^{(1)} = 0,$$

(3.29)

La Ec.(3.28) se puede evaluar exactamente en términos de integrales elípticas incompletas de primera, segunda y tercera clase, su forma explícita está dada en el apéndice C. En la Fig.10 se grafica la Ec.(3.28) como función de ζ para MBBA y 5CB para algunos valores del ángulo de incidencia. Estas curvas muestran que el ángulo de incidencia está más alineado con el campo en la región entre las caústicas que cerca de las placas lo cual refuerza la interpretación del efecto de guía de onda. Es importante anotar que, en la Fig.10b, las correcciones de $\theta^{(1)}$ respecto a $\theta^{(0)}$ son grandes, lo cual muestra que la hipótesis $q \ll 1$ puede ser insuficiente para mantener la consistencia de la aproximación cuando ϵ_a es grande, asimetría.

Consideremos por último el régimen débil $0 < p^2 < c_1$. Si se sustituyen los modos TM dados por la Ec.(3.11) en la Ec.(3.25) y se sigue un procedimiento similar al empleado para obtener la Ec.(3.26) se puede mostrar que $\theta_a^{(1)}(\zeta, k_0)$ está dado por la misma expresión que la Ec.(3.28), con la única diferencia de que en este caso es válida para la celda completa, esto es para $-1/2 < \zeta < 1/2$.

Es importante señalar que, de manera similar a la que ocurrió para la densidad de energía electromagnética, la reorientación es mayor en la parte central de la celda para el régimen fuerte. Esto muestra que a primer orden en q el nemático también induce el efecto de guía de onda puesto que tiende a alinear al campo eléctrico en la parte central de la celda con el eje de la guía.

En la Fig.11 se grafica la Ec.(3.28) para valores de p en el intervalo $0 < p^2 < c_1$. En contraste con el régimen débil, estas gráficas muestran que en este caso el alineamiento del nemático no se concentra en la parte central de la celda sino que se esparce en toda la celda, debilitando el efecto de guía de onda.

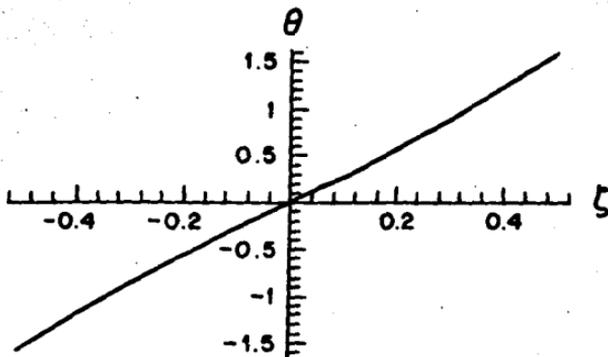


Fig. 10a. Angulo de reorientación $\theta_a^{(1)}(\zeta, k_0)$ en función de ζ para $\alpha_{21} = 18.3^\circ$ en MBBA (régimen débil)

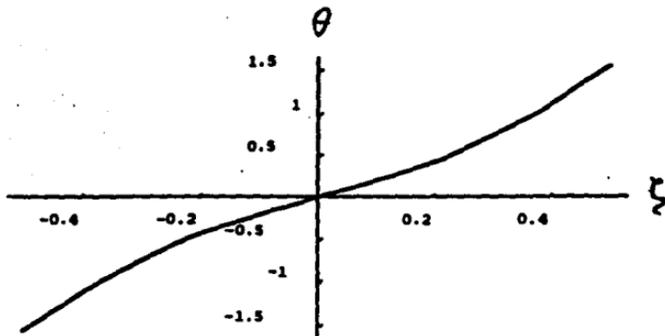


Fig. 10b. Lo mismo que en la Fig. 10a. para SCB.

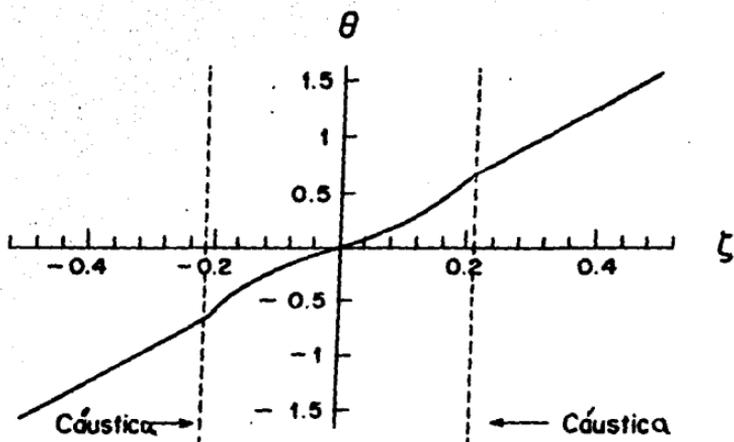


Fig. 11a. Lo mismo que para Fig. 10a for $\alpha_2 = 77.5^\circ$ (régimen fuerte).

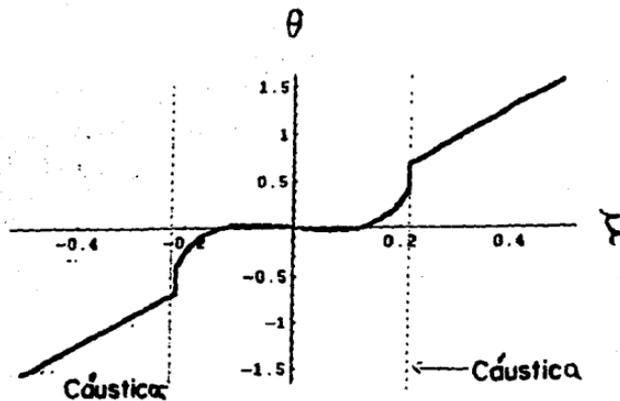


Fig. 11b. Lo mismo que en la Fig. 11a. para SCB.

Apéndice A

La ecuación trascendental para los ángulos permitidos α_n en el régimen fuerte ($\epsilon_{\perp} < p^2 < \epsilon_{\parallel}$), se obtiene sustituyendo la Ec.(2.10) en la Ec.(3.17), así como empleando la definición (3.9). Esto permite obtener una ecuación de la forma

$$\tan x = \sinh y, \quad (\text{A.1})$$

en donde x e y están dados por

$$x = 2k_0 l (\epsilon_{\parallel} \tan^2[\alpha] + \epsilon_{\perp})^{1/2} \\ \left\{ K[\epsilon_{\perp} (\tan^2[\alpha]/\epsilon_{\perp} + 1/\epsilon_{\parallel}), \text{Arcsen}\sqrt{\epsilon_{\perp} (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel} + \tan^2[\alpha])}] - \right. \\ \left. \Pi[\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp} (\tan^2[\alpha]/\epsilon_{\perp} + 1/\epsilon_{\parallel}), \text{Arcsen}\sqrt{\epsilon_{\perp} (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel} + \tan^2[\alpha])}] \right. \\ \left. / (1 + (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}) \cot^2[\alpha]) \right\} \quad (\text{A.2})$$

y

$$y = k_0 l (\epsilon_{\parallel} \tan^2[\alpha] + \epsilon_{\perp})^{1/2} \text{Im} \left\{ K[\epsilon_{\perp} (\tan^2[\alpha]/\epsilon_{\perp} + 1/\epsilon_{\parallel})] - \right. \\ \left. \Pi[\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp} (\tan^2[\alpha]/\epsilon_{\perp} + 1/\epsilon_{\parallel})] / (1 + (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}) \cot^2[\alpha]) - \right. \\ \left. K[\epsilon_{\perp} (\tan^2[\alpha]/\epsilon_{\perp} + 1/\epsilon_{\parallel}), \text{Arcsen}\sqrt{\epsilon_{\perp} (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel} + \tan^2[\alpha])}] + \right. \\ \left. \Pi[\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp} (\tan^2[\alpha]/\epsilon_{\perp} + 1/\epsilon_{\parallel}), \text{Arcsen}\sqrt{\epsilon_{\perp} (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel} + \tan^2[\alpha])}] \right. \\ \left. / (1 + (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}) \cot^2[\alpha]) \right\}, \quad (\text{A.3})$$

en donde Im denota la parte imaginaria de la cantidad encerrada entre llaves ().

Apéndice B

En este apéndice se dan las expresiones analíticas para los modos TM $E_x(\zeta, k_0)$ y $E_z(\zeta, k_0)$ para cada una de las diferentes regiones de la celda, en el régimen fuerte. La componente del campo eléctrico $E_x(\zeta, k_0)$ se obtiene sustituyendo la Ec. (3.16) en la Ec. (1.6a). Para $-1/2 < \zeta < -a$, se obtiene

$$E_x(\zeta, k_0) = iE_0 (c_{zz} - p_n^2)^{1/2} \exp[-ip_n k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \frac{c_{xz}}{c_{zz}} \cdot \text{sen}[k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \Gamma(\zeta, k_0)] \quad (\text{B.1a})$$

Similarmente, para el intervalo $-a < \zeta < a$, $E_x(\zeta, k_0)$ toma la forma

$$E_x(\zeta, k_0) = -iE_0 (c_{zz} - p_n^2)^{1/2} \exp(-ip_n k_0) \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \frac{c_{xz}}{c_{zz}} \cdot \left(\exp[-k_0] \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_0)] \text{sen}[k_0] \int_{-a}^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0) - \pi/4] + \exp[k_0] \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_0)] \cos[k_0] \int_{-a}^{\zeta} d\eta f(\eta, k_0) - \pi/4] \right) \quad (\text{B.1b})$$

y finalmente para la región $a < \zeta < 1/2$ $E_x(\zeta, k_0)$ resulta ser

$$E_x(\zeta, k_0) = iE_0 (c_{zz} - p_n^2)^{1/2} \exp(-ip_n k_0) \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \frac{c_{xz}}{c_{zz}} \cdot \text{senh}[k_0] \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \Gamma(\zeta, k_0)] \quad (\text{B.1c})$$

Si ahora se sustituye la Ec. (3.16) en la Ec. (1.6c), se obtiene la expresión para la componente del campo eléctrico $E_z(\zeta, k_0)$. Para $-1/2 < \zeta < -a$, la cual está dada por

$$E_z(\zeta, k_0) = E_0 [(c_{zz} - p_n^2)^{1/4} / c_{zz}] \exp[-ip_n k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \frac{c_{xz}}{c_{zz}}$$

$$\left\{ p_n \cosh[k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \Gamma(\zeta, k_0) \right\} + i c_{xz} [(c_{zz} - p_n^2)/c_{\parallel} c_{\perp}]^{1/2} \sinh[k_0] \int d\eta \Gamma(\zeta, k_0) \left. \right\}. \quad (\text{B.2a})$$

y si $-a < \zeta < a$, $E_z(\zeta, k_0)$ toma la forma

$$E_z(\zeta, k_0) = E_0 [(c_{zz} - p_n^2)^{1/4}/c_{zz}] \exp[-ip_n k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta c_{xz}/c_{zz} \left\{ \exp[-k_0] \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_0) \right\} \left\{ p_n \cos[k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0) - \pi/4 \right\} + i c_{xz} [(c_{zz} - p_n^2)/c_{\parallel} c_{\perp}]^{1/2} \operatorname{sen}[k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0) - \pi/4 \left. \right\} + \exp[k_0] \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta, k_0) \left\{ p_n \cos[k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0) - \pi/4 \right\} - i c_{xz} [(c_{zz} - p_n^2)/c_{\parallel} c_{\perp}]^{1/2} \operatorname{sen}[k_0] \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta f(\zeta, k_0) - \pi/4 \left. \right\} \quad (\text{B.2b})$$

finalmente, para el intervalo $a < \zeta < 1/2$ $E_z(\zeta, k_0)$ es igual a

$$E_z(\zeta, k_0) = E_0 [(c_{zz} - p_n^2)^{1/4}/c_{zz}] \exp[-ip_n k_0] \int_{\zeta}^{1/2} d\eta c_{xz}/c_{zz} \left\{ p_n \cosh[k_0] \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \Gamma(\zeta, k_0) \right\} + i c_{xz} [(c_{zz} - p_n^2)/c_{\parallel} c_{\perp}]^{1/2} \sinh[k_0] \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \Gamma(\zeta, k_0) \left. \right\}. \quad (\text{B.2c})$$

Apéndice C

Aquí se indicará la forma en que las integrales del miembro derecho de la Ec.(3.25) se pueden evaluar. La integral sobre ζ' se calcula en términos de funciones elementales. Si en las expresiones resultantes se emplean las definiciones de las integrales elípticas y de primera y tercera clases definidas, respectivamente en las Ec.(3.9a) y Ec.(3.9b), así como de la integral elíptica de segunda clase definida como

$$E(\alpha, \phi) = \int_0^\phi d\theta (1 - \alpha \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad (C.1)$$

y finalmente utilizando las funciones

$$K_{3/4}(\alpha, \phi) = \int_0^\phi d\theta / (1 - \alpha \sin^2 \theta)^{3/4}, \quad (C.2)$$

$$E_{1/4}(\alpha, \phi) = \int_0^\phi d\theta (1 - \alpha \sin^2 \theta)^{1/4}, \quad (C.3)$$

se puede mostrar que $\theta_n^{(1)}(\zeta, k_0)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \theta_n^{(1)}(\zeta, k_0) = & C_k \{ K(e_n / (e_{\parallel} - p_n^2), \pi\zeta) - (\zeta/a) K(e_n / (e_{\parallel} - p_n^2)) \} + \\ & C_p \{ \Pi(e_n / e_{\parallel}, ea / (e_{\parallel} - p_n^2), \pi\zeta) - (\zeta/a) \Pi(e_n / e_{\parallel}, ea / (e_{\parallel} - p_n^2)) \} + \\ & C_o \{ E(e_n / (e_{\parallel} - p_n^2), \pi\zeta) - (\zeta/a) E(e_n / (e_{\parallel} - p_n^2)) \} + \\ & C_t \left\{ \int_0^{\zeta} d\zeta' \tan^{-1}(e_{zz} - p_n^2)^{1/2} - (\zeta/a) \int_0^{\zeta} d\zeta' \tan^{-1}(e_{zz} - p_n^2)^{1/2} \right\} + \\ & (e - p_n^2 + e/a/8) \sin 2\pi\zeta + (4/5\pi) \sin^2 \pi\zeta e_{xz} (e_{zz} - p_n^2)^{1/2} + \\ & C_a e_{xz} (e_{zz} - p_n^2)^{1/2} + C_{k3} \{ K_{3/4}(e_n / (e_{\parallel} - p_n^2), \pi\zeta) - (\zeta/a) K_{3/4}(e_n / (e_{\parallel} - p_n^2)) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{03} \{E_{1/4}(c_a/(c_{\parallel} - p^2), \kappa \zeta) - (\zeta/a)E_{1/4}(c_a/(c_{\parallel} - p^2))\} - \\
& (8(c_{\parallel} - p^2)/91c_a^2)c_{xx} (c_{xx} - p_n^2)^{5/4} + C_{03} c_{xx} (c_{xx} - p_n^2)^{1/4} - \\
& \frac{c(c - p^2)p^{1/2}}{2c_a} \left\{ \int_0^{\zeta} d\zeta' \tan^{-1} \left\{ \frac{(2p)^{1/2} (c_{xx} - p_n^2)^{1/4}}{(c_{xx} - p_n^2)^{1/2} - p_n} \right\} \right. \\
& \left. (\zeta/a) \int_0^a d\zeta' \tan^{-1} \left\{ \frac{(2p)^{1/2} (c_{xx} - p_n^2)^{1/4}}{(c_{xx} - p_n^2)^{1/2} - p_n} \right\} \right\} - \\
& \frac{c(c - p^2)p^{1/2}}{2c_a} \left\{ \int_0^{\zeta} d\zeta' \ln \left\{ \frac{(c_{xx} - p_n^2)^{1/2} + (2p)^{1/2}(c_{xx} - p_n^2)^{1/4} + p_n}{(c_{xx} - p_n^2)^{1/2} - (2p)^{1/2}(c_{xx} - p_n^2)^{1/4} + p_n} \right\} \right. \\
& \left. \int_0^a d\zeta' \ln \left\{ \frac{(c_{xx} - p_n^2)^{1/2} + (2p)^{1/2}(c_{xx} - p_n^2)^{1/4} + p_n}{(c_{xx} - p_n^2)^{1/2} - (2p)^{1/2}(c_{xx} - p_n^2)^{1/4} + p_n} \right\} \right\}, \quad (C.4)
\end{aligned}$$

Aquí los coeficientes C_k , C_p , C_o , C_t , C_a , C_{k3} y C_{03} están dados por

$$\begin{aligned}
C_k = & (1/(c_a c_{\perp} c_{\parallel} (c_{\parallel} - p_n^2)^{1/2})) \{ p_n^2 (2c_{\perp} c_{\parallel} - 4c^2 + c_a^2/3) - (16/125)(c_a + 2c_{\parallel} - 2p_n^2) \\
& (c_a + 11(c_{\parallel} - p_n^2)/4) - (4(18)/5)(c_{\parallel} - p_n^2) - (4c/3)(c_{\parallel} - p_n^2)(c_{\perp} - p_n^2) \}, \quad (C.5)
\end{aligned}$$

$$C_p = (p^4/(c_a c_{\parallel} (c_{\parallel} - p_n^2)^{1/2})) \{ 1 + c_a^2/(3c_{\perp} c_{\parallel}) \}, \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned}
C_o = & ((c_{\parallel} - p_n^2)^{1/2}/c_a c_{\perp} c_{\parallel}) \{ c_a^2/3 + 4c^2 - 3c_a^2/2c + 8cc_a/3 + 4cp_n^2 - \\
& (8/5) \{ 9(c_{\parallel} - p_n^2)^2 + (4/3)(c_a + c_{\parallel} - p_n^2)(c_a + (11/4)(c_{\parallel} - p_n^2)) \} -
\end{aligned}$$

$$(16/3)c(e_{\parallel} - p_n^2), \quad (C.7)$$

$$C_t = (p/e_{\perp} e_{\parallel}) (e_{\perp} e_{\parallel} + 3e_a^2 + 8e^2 + 4p_n^2), \quad (C.8)$$

$$C_a = (4/e_a^2 e_{\perp} e_{\parallel}) \{ (11/15)e_a^2 (e_{\parallel} - p_n^2 - 4e_a/11) - c(e_{\parallel} - p_n^2)^2/3 \}, \quad (C.9)$$

$$C_{k3} = (4/e_a) (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/4} (e_{\perp} - p_n^2) \{ 14/810 (2(e_{\parallel} - p_n^2) - e_a) - e/50 \}, \quad (C.10)$$

y

$$C_{e3} = -(4/e_a) \{ (84/90)(e - p_n^2) + 5/9 - 6e/50 \} (e - p_n^2) (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/4} + 5c(e - p_n^2). \quad (C.11)$$

CAPITULO IV¹

PROPAGACION DE HACES OPTICOS EN CELDAS CON NEMATICOS CON

FLUJO HIDRODINAMICO

En este capítulo se generaliza el modelo propuesto en el capítulo I para tomar en cuenta la posibilidad de que el cristal líquido fluya. Se tomará en cuenta tanto un flujo hidrodinámico impuesto externamente mediante un gradiente de presión a lo largo de la celda que hace fluir de manera permanente al cristal líquido, como los contraflujos internos inducidos por la reorientación del nemático. Debido al acoplamiento entre \vec{n} y \vec{v} , es de esperarse que estos flujos distorsionen la configuración orientacional del nemático, la cual a su vez modificará la propagación de las ondas electromagnéticas en el nemático influyendo de esta manera sobre el efecto de guía de onda.

En la primera parte se establecen las ecuaciones que describen la dinámica acoplada del campo de orientaciones y el campo de velocidades del nemático en presencia del campo electromagnético y se calcula la configuración orientacional en presencia del flujo externo. Después se consideran, primero nemáticos de anisotropía dieléctrica pequeña y, haciendo uso del esquema perturbativo desarrollado en el capítulo I, se calculan los eigenmodos y eigenvalores perturbados, de donde a su vez se calcula la distribución espacial de la densidad de energía electromagnética. Se muestra que la intensidad del efecto de guía de onda varía con la intensidad y el sentido del flujo, y que la frecuencia de corte de la guía y la longitud típica de amortiguamiento de las ondas por absorción dependen también de la intensidad y el sentido del flujo; por lo tanto, controlando éste se puede modificar el ancho de banda de la guía.

En la siguiente parte del capítulo se consideran nemáticos con asimetría dieléctrica arbitraria pero se restringen las características del haz incidente. De la misma forma que se hizo en los capítulos II y III, se calculan tanto las trayectorias de rayo en el límite óptico como la

¹ El contenido de este capítulo se encuentra en la referencia [50].

distribución espacial de la densidad de energía electromagnética en el límite WKB y se muestra que el efecto de guía de onda persiste y se refuerza en el siguiente sentido: aparecen más regiones en donde la densidad de energía se concentra; es decir, la celda se fragmenta en varias guías de onda paralelas.

IV.1 Ecuaciones para los campos de orientación y velocidad

Considérese la misma capa de cristal líquido nemático, contenida entre dos placas conductoras paralelas, sobre la cual se hace incidir un haz óptico linealmente polarizado en el plano x-z tal como se consideró en el capítulo anterior. Solo que aquí, a diferencia de lo que se hizo, en dicho capítulo, se tomará en cuenta explícitamente que el nemático puede fluir. En algunos estudios en la literatura [51] se ha mostrado que la respuesta orientacional del nemático a un campo electromagnético se halla comúnmente acoplada con efectos de contraflujos intensos en los cuales la resistencia a la rotación produce flujos de corte caracterizados por viscosidades efectivas menores que aquellas en donde sólo se consideran rotaciones puras. Aquí, además de tomar en cuenta dichos efectos, se considerará también la acción de un flujo hidrodinámico externo estacionario producido por un gradiente de presión constante impuesto a lo largo del eje x (véase Fig.12). Ya que las dimensiones transversales x-y de la celda son mucho mayores que l, se espera que el flujo hidrodinámico resultante producido tanto por los contraflujos orientacionalmente inducidos como por el gradiente de presión externamente impuesto, sea de la forma

$$\vec{v}(z,t) = [v_x(z,t), 0, 0]. \quad (4.1)$$

Se supondrá que este flujo satisface condiciones de adhesión sobre las placas, ésto es $v_x(z=0, t) = 0$. Para la configuración orientacional, al igual que en el capítulo I, se considerará que el flujo ocurre en el plano de incidencia del haz, ésto es, que satisface la Ec.(1.1). Si el nemático termotrópico se halla lejos del punto crítico nemático-istrópico, es razonable describir su dinámica en términos de las variables de estado $\vec{n}(z,t)$ y $\vec{v}(z,t)$ únicamente. Utilizando la formulación general de las ecuaciones de la nematodinámica [52], las ecuaciones generales para estas variables de estado son de la forma

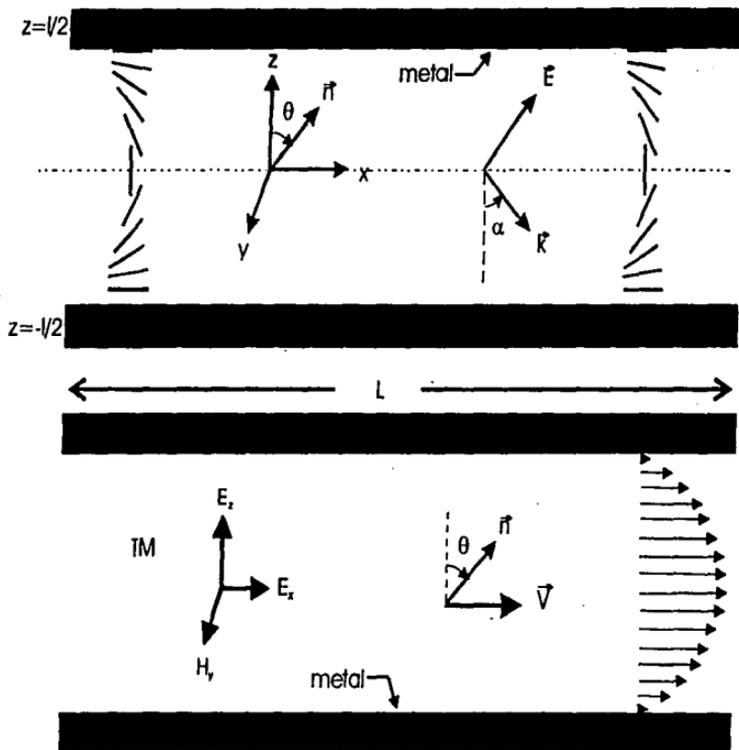


Fig. 12. Diagrama esquemático de un haz láser linealmente polarizado propagándose a través de una capa de cristal líquido en flujo de corte permanente, con orientación inicial planar.

$$d_t n_\beta = - \frac{1}{\gamma_1} \frac{\delta F}{\delta n_\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}(n) \frac{\delta F}{\delta v_\gamma} \quad (4.2)$$

$$d_t v_\beta = L_{\beta\gamma}(n) \frac{\delta F}{\delta v_\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^+(n) \frac{\delta F}{\delta n_\gamma} + \frac{\partial p}{\partial v_\beta} \quad (4.3)$$

Aquí $d_t = d/dt$ denota la derivada material usual. F es la funcional de energía libre de Helmholtz dada por

$$F = 1/2 \int_V dr K_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta n_\alpha \partial_\delta n_\gamma - 1/2 \int_V dr \vec{D} \cdot \vec{E} + 1/2 \int_V dr \rho v^2 \quad (4.4)$$

en donde V es el volumen ocupado por el nemático y los símbolos $\delta F/\delta n_\beta$ y $\delta F/\delta v_\beta$ denotan las derivadas funcionales de F . El primer término proporciona la energía libre de distorsión de Oseen-Frank en términos de las constantes elásticas despliegue (splay) K_{11} , torsión (twist) K_{22} y encorvadura (bend) K_{33} . El tensor $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ está definido como

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = K_{11} (\delta_{\alpha\delta} - n_\alpha n_\delta) (\delta_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma) + K_{22} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\delta\mu} n_\mu n_\nu + K_{33} (\delta_{\alpha\gamma} - n_\alpha n_\gamma) n_\beta n_\delta \quad (4.5)$$

en donde $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita y los operadores cinéticos $\Gamma_{\beta\gamma}(n)$ y $L_{\beta\gamma}(n)$ están dados por

$$\Gamma_{\beta\gamma}(n) = (1/2\rho)(\lambda+1)n_\alpha \partial_\alpha \delta_{\beta\gamma} + (\lambda-1)n_\alpha \partial_\beta \delta_{\alpha\gamma} \quad (4.6)$$

$$L_{\beta\gamma}(n) = \partial_\alpha M_{\alpha\beta\gamma\delta}(n) \delta_\delta \quad (4.7)$$

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(n) = (1/\rho)2(\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3)n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta + \nu_2 (\delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + (\nu_3 - \nu_2)(n_\alpha n_\gamma \delta_{\beta\delta} + n_\alpha n_\delta \delta_{\beta\gamma} + n_\beta n_\gamma \delta_{\delta\alpha} + n_\beta n_\delta \delta_{\alpha\gamma}) \quad (4.8)$$

Aquí $\lambda = -\gamma_1/\gamma_2$, γ_1 , γ_2 , ν_1 , ν_2 y ν_3 denotan diferentes coeficientes de viscosidad y $\rho(\vec{r}, t)$ es la densidad de masa local.

El segundo término de la Ec.(4.4) es la energía libre electromagnética dada en términos del vector de desplazamiento \vec{D} . Debe enfatizarse que al escribir esta ecuación se ha supuesto, al igual que en el capítulo I, que la

susceptibilidad magnética del nemático es mucho más pequeña que su susceptibilidad eléctrica, lo cual es un resultado experimental válido para una gran cantidad de nemáticos. La relación entre el nemático y el campo óptico se da a través de la relación constitutiva (1.3) que expresa el vector \vec{D} en términos de vector \vec{E} .

El tercer término de la Ec.(4.4) proporciona la contribución hidrodinámica a la energía libre.

IV.1.1 Dinámica Acoplada de \vec{v} y \vec{n}

A continuación se reescribirán las Ecs.(4.2) y (4.3) para la geometría particular de nuestro modelo. Para este fin se introducirá una aproximación denominada de mínimo acoplamiento [52] en la cual la dependencia en \vec{n} de los operadores $\Gamma_{\beta\gamma}(\vec{n})$ y $L_{\beta\gamma}(\vec{n})$ es aproximada sustituyendo \vec{n} por su valor en la orientación inicial \vec{n}^0 . Es necesario señalar que mediante este procedimiento se retiene solamente el acoplamiento inicial entre \vec{n} y \vec{v} , pero se mantiene la no linealidad completa de la dinámica de \vec{n} presente en los términos disipativos $\delta F/\delta \vec{n}$, en la Ec.(4.2). Por simplicidad, al igual que en capítulo I, se suponen constantes elásticas iguales, $K = K_1 = K_2 = K_3$. Con estas aproximaciones la densidad de energía libre es

$$F = \int_V dv \left\{ (1/2)K (d\theta/dz)^2 + (1/8\pi)[c_1|E|^2 + c_2(|E_x|^2 \sin^2\theta + (E_x^* E_z + E_x E_z^*) \sin\theta \cos\theta + |E_z|^2 \cos^2\theta)] + H_y^2 + (1/2)\rho v_x(z)^2 \right\}, \quad (4.9)$$

en donde * denota conjugación compleja. A partir de la Ec.(4.9) se evalúan las derivadas funcionales $\delta F/\delta \theta$ y $\delta F/\delta v_x$, que resultan ser

$$\delta F/\delta \theta = K_{11} (d^2\theta/dz^2) - (c_2/8\pi) \left[(|E_x|^2 - |E_z|^2) \sin 2\theta - (E_x^* E_z + E_x E_z^*) \cos 2\theta \right], \quad (4.10a)$$

$$\delta F/\delta v_x = \rho v_x(z). \quad (4.10b)$$

Si además se calculan los operadores $\Gamma_{\beta\gamma}(\vec{n}^0)$ y $L_{\beta\gamma}(\vec{n}^0)$ con la aproximación de mínimo acoplamiento mencionada arriba y haciendo uso de la Ec.(4.1), las ecuaciones dinámicas (4.2) y (4.3) toman la forma

$$d_t \theta = - (2/\gamma_1) \delta F / \delta \theta - (\lambda - 1) \cos \theta \, dv_x / dz, \quad (4.11a)$$

$$d_t v_x = \frac{v_3}{\rho} \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{\lambda - 1}{2\rho} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\delta F}{\delta \theta} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (4.11b)$$

Es importante señalar que en la Ec. (4.11b) se ha agregado el término extra $\delta p / \delta v_x$ para tomar en cuenta flujos producidos por gradientes de presión externos, los cuales no pueden ser descritos por los términos obtenidos a partir de F , ya que esta energía libre solo determina la dinámica interna del fluido. Cabe apuntar, que esta dinámica interna, se toma en cuenta el acoplamiento entre n_β y v_β , así como el acoplamiento de n_β con el campo electromagnético.

Las ecuaciones (4.11) que están acopladas describen la evolución temporal del estado orientacional del nemático en presencia de flujo.

En lo que sigue, solo se considerará el estado final estacionario definido por las condiciones $d_t \theta = d_t v_x = 0$. En este caso las ecuaciones (4.11) se desacoplan y conducen a la siguiente ecuación para el campo de velocidades.

$$v_3 \frac{d^2 v_x}{dz^2} = \Delta p / L - \frac{(\lambda - 1)^2}{4} \gamma_1 \frac{d^2 v_x}{dz^2}. \quad (4.12)$$

en donde se ha tomado $dp/dx = \Delta p / L$, en donde L es la longitud de la celda a lo largo del eje x . Resolviendo esta ecuación para las condiciones de frontera de adhesión que hemos supuesto, se obtiene

$$v_x(\zeta) = 6 \bar{v}_x \left((1/2)^2 - \zeta^2 \right). \quad (4.13)$$

Nótese que esta ecuación describe el bien conocido perfil de velocidades en fluidos isotrópicos denominado flujo de Couette plano [53, 54]. Para escribir esta ecuación se ha introducido tanto la variable adimensional $\zeta = z/l$ con la velocidad media definida en general como $\bar{v}_x = Q/\rho l L$, en donde Q es el gasto y la barra superior denota un promedio sobre la sección transversal de la celda. Para nuestro caso particular \bar{v}_x está dada por

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta p l^2}{2L \left(\nu_3 + \frac{(\lambda-1)^2 \gamma_1}{4} \right)} \quad (4.14)$$

Sustituyendo la Ec.(4.13) en la Ec.(4.11a) se obtiene una ecuación cerrada para configuración orientacional estacionaria final, la cual en forma adimensional está dada por

$$\frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + q \left[(|\bar{E}_z|^2 - |\bar{E}_x|^2) \operatorname{sen} 2\theta + (\bar{E}_x \bar{E}_z^* + \bar{E}_x^* \bar{E}_z) \cos 2\theta \right] + 6 N \zeta \cos \theta = 0. \quad (4.15)$$

Aquí $\bar{E}_z = E_z/E_0$ y $\bar{E}_x = E_x/E_0$, en donde E_0^2 es la intensidad del haz óptico incidente. Los parámetros q y N están definidos como

$$q = \epsilon_a E_0^2 / 8\pi K_1, \quad (4.16a)$$

$$N = 6 (\lambda-1) \gamma \bar{v}_x l / K_1. \quad (4.16b)$$

Como se discutió en el capítulo I, q es proporcional a la razón de la densidad de energía eléctrica del haz óptico y la densidad de energía elástica del nemático. En este sentido q mide el acoplamiento entre el campo óptico y la configuración orientacional inducida. Por otro lado, N se puede expresar en términos del número de Reynolds $R = \rho \bar{v}_x l / \nu_3$ del flujo hidrodinámico y de parámetros materiales, es decir

$$N = 6 R \nu_3 (\lambda-1) \gamma / K_1 \rho. \quad (4.16c)$$

Por lo tanto, N es una medida del acoplamiento entre la configuración orientacional y el flujo de nemático.

IV.1.2. Configuración para el estado estacionario

Considérese a continuación la solución de la Ec.(4.15) a orden cero en q . Nótese que aún en este caso, la ecuación es no lineal y no se puede

resolver exactamente; sin embargo, se puede conocer su comportamiento cerca de $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. En dichas regiones la Ec.(4.15) tiene por soluciones aproximadas polinomios en ζ de tercer y primer orden, respectivamente. El siguiente paso en un tratamiento más cuidadoso sería imponer las condiciones de frontera sobre θ dadas por $\theta(\zeta = \pm 1/2) = \pm 1/2$ y determinar los coeficientes restantes de los polinomios en ζ mediante un acoplamiento asintótico [55], válido en la región entre 0 y $\pi/2$. Sin embargo, en lugar de hacer lo anterior se ajustará un polinomio cúbico en ζ para todo el dominio de ζ , que va de $-1/2$ a $1/2$, que satisfaga las condiciones de frontera sobre θ y que tenga la misma paridad que la solución $\theta = \pi\zeta$ válida en ausencia de flujo, ésto es,

$$\theta(\zeta) = C\zeta(\zeta^2 - 1/4) + \pi\zeta. \quad (4.17)$$

Es importante señalar que al aproximar θ por la Ec.(4.17) en todo el dominio se está ignorando las posibles variaciones periódicas en la concavidad de la solución a orden cero en q de la Ec.(4.15) que la presencia de la función $\cos \theta$ señala.

Ahora bien, para determinar C se construirá una funcional que mida el error global, en todo el dominio, de tomar como solución de la Ec.(4.15) la función dada en (4.17) y se minimizará respecto a C . Dicha funcional está dada por

$$G(C) = \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta [L\theta(\zeta, C)]^2, \quad (4.18)$$

en donde el operador L se construye a partir de la ecuación diferencial (4.15), es decir

$$L\theta = \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + 6N\zeta \cos \theta. \quad (4.19)$$

Nótese que la funcional (4.18) está construida de tal forma que su integrando es una cantidad definida positiva y de esta manera todas las contribuciones proporcionadas por $L\theta$ se suman para integrar el error.

Sustituyendo (4.17) en (4.18), derivando la expresión resultante con respecto a C e igualando a cero se obtiene la siguiente ecuación trascendental para C :

$$\int_{-1/2}^{1/2} d\zeta \left\{ C\zeta^2 + N\zeta^2 \cos[C\zeta(\zeta^2-1/4) + \pi\zeta] - CN\zeta^3(\zeta^2-1/4) \operatorname{sen}[C\zeta(\zeta^2-1/4) + \pi\zeta] - (N^2/2)\zeta^3(\zeta^2-1/4) \operatorname{sen}[2C\zeta(\zeta^2-1/4) + 2\pi\zeta] \right\} = 0. \quad (4.20)$$

Es fácil mostrar a partir de la Ec. (4.20), como se puede ver en el apéndice D, que tanto para $C \gg 1$ como para $C < 1$ se obtienen los valores $C \approx -N/3$ y $C \approx -2N/3$ respectivamente. Sustituyendo alguno de estos valores de C , según sea el caso, se determina completamente la configuración orientacional en presencia de flujo como una función de ζ . Así por ejemplo, para $C < 1$ se obtiene

$$\theta(\zeta) = -(2N/3)\zeta(\zeta^2-1/4) + \pi\zeta + O(q). \quad (4.21)$$

Es importante recalcar que el parámetro N , como se discutió antes, depende tanto del número de Reynolds como de un cociente de parámetros materiales.

La Fig. 13a muestra las configuraciones orientacionales en presencia de flujo a orden cero en q y como función de ζ . En la misma gráfica se muestra la configuración orientacional en ausencia de flujo, esto es con $N = 0$. Nótese al comparar las configuraciones con y sin flujo, que las configuraciones con flujo presentan máximos y mínimos a diferencia de la configuración sin flujo. Otra característica que hay que señalar es que cuando $N > 0$, lo cual significa que el haz óptico se propaga en la dirección en que se mueve el flujo, la región en torno a $\theta = 0$ en donde el nemático se alinea más con el campo eléctrico, se estrecha. Pero cuando $N < 0$ aparecen dos regiones adicionales en donde el nemático toma la orientación $\theta = 0$ y por tanto se alinea con el campo eléctrico también. Estas gráficas son impares respecto al centro de la guía.

Este comportamiento para la orientación del nemático sugiere que la densidad de energía electromagnética cuando $N > 0$ se concentra en una región más estrecha del centro de la celda, mientras que si $N < 0$ se concentra adicionalmente en dos regiones colocadas simétricamente a los costados de la celda. Esto es, la configuración que adopta el nemático en presencia de flujo, sugiere que el efecto de guía de onda se intensifica de tal forma que



Fig. 13. Configuración orientacional en presencia de flujo para varios valores de N .

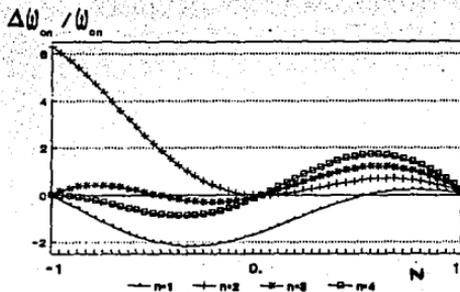


Fig.14 Cambio de la frecuencia $\Delta\omega$ como función de N para diversos valores de n .

la energía se concentra aún más que en el caso sin flujo, y que además pueden aparecer regiones adicionales al centro de la celda en donde la energía también se concentre.

En la siguiente sección se empleará la configuración orientacional aquí calculada y mediante un esquema perturbativo en la asimetría dieléctrica, se calcularán los modos normales del campo electromagnético perturbados a primer orden. Una vez obtenidos los modos perturbados, se calculará con ellos la densidad de energía electromagnética perturbada a primer orden, para discernir si su distribución en la celda es tal que se concentra en la parte central de la celda y por tanto presenta el efecto de guía de onda.

IV.2 Efecto de guía de onda: teoría de perturbaciones

A continuación, y siguiendo el mismo método que en I, se calcularán los modos transversales magnéticos del campo y los factores de propagación utilizando nuevamente un esquema perturbativo y a primer orden en el parámetro que representa la asimetría dieléctrica ϵ_a/c . Para ello se partirá la Ec. (4.21) válida a orden cero en q y $N < 1$.

Es importante hacer notar que aunque el parámetro q definido en la Ec. (4.16a) se puede hacer pequeño escogiendo la densidad de energía electromagnética del haz incidente menor que la densidad energía elástica del nemático, éste se puede hacer pequeño también escogiendo ϵ_a/c pequeño sin suponer nada con respecto a el haz incidente y a la densidad de energía elástica del nemático. De esta manera la Ec. (4.21) válida a orden cero en q es también válida a orden cero en ϵ_a/c y se puede emplear de forma consistente en este esquema perturbativo.

Por otra parte, la Ec. (1.23a) es la ecuación dinámica para la componente E_x a primer orden en ϵ_a/c , y está dada por

$$d^2 E_x / d\zeta^2 + (\epsilon_a/c) \hat{A}^R E_x = (k_0 l)^2 (p^2 - c) E_x \quad (4.22)$$

en donde, para este caso, el operador \hat{A}^R está definido como

$$\begin{aligned} \hat{A}^R \equiv & k_0 l p_n^{(0)} \{ [1 + (p_n^{(0)} (\pi - N) / k_0 l (c - p_n^{(0)2}))] \sin [2(\pi - N)\zeta] d/d\zeta \\ & + (p_n^{(0)2} - c/2 + 1 p_n^{(0)} (\pi - N) / k_0 l) \cos [2(\pi - N)\zeta] \} \end{aligned} \quad (4.23)$$

y $p_n^{(0)} = \{c - (n\pi/k_0)^2\}^{1/2}$. Para obtener la Ec.(4.23) se ha sustituido la Ec.(4.21) en la Ec.(1.23b). Aquí adicionalmente se supondrá que $N/\pi < 1$, lo cual es consistente con el hecho de que $N < 1$. Las funciones propias no perturbadas $E_n^0(n)$ de la Ec.(1.23) que satisfacen las condiciones de frontera de placas perfectamente conductoras, están dadas en la Ec.(1.14). Ahora bien, consistentemente con la teoría de perturbaciones [56], las primeras correcciones tanto a las funciones propias de la Ec.(1.23) como a los valores propios $(k_0)^2(c - p^2)$, se obtienen a partir de los elementos de matriz de A^R , los cuales están dados por

$$A_{m,n}^R = \langle E_m^0(n) | A^R | E_n^0(m) \rangle = \left[(m\pi p_n^{(0)}/k_0) \left\{ 1 + (p_n^{(0)}(\pi-N)/k_0) (c - p_n^{(0)2}) \right\} \int_{1/2}^{-1/2} d\zeta \operatorname{sen}[n\pi(\zeta-1/2)] \cos[m\pi(\zeta-1/2)] \operatorname{sen}[2(\pi-N)\zeta] + (p_n^{(0)2} - c/2 + 1p_n^{(0)}(\pi-N)/k_0) \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta \operatorname{sen}[m\pi(\zeta-1/2)] \operatorname{sen}[n\pi(\zeta-1/2)] \cos[2\pi(\pi-N)\zeta] \right] \quad (4.24)$$

Evaluando estas integrales se obtienen los siguientes resultados, válidos para cualquier m, n enteros positivos. Si $m+n$ es impar

$$A_{m,n}^R = \left[(m\pi p_n^{(0)}/k_0) \left\{ 1 - (p_n^{(0)}(\pi-N)/k_0) (c - p_n^{(0)2}) \right\} \left\{ (n+2)\pi - 2N \right\} \operatorname{sen} N / \left[((n+2)\pi - 2N)^2 - (m\pi)^2 \right] + \left\{ p_n^{(0)2} - c/2 + 1p_n^{(0)}(\pi-N)/k_0 \right\} m\pi \operatorname{sen} N / \left[((n+2)\pi - 2N)^2 - (m\pi)^2 \right] \right] \quad (4.25a)$$

y si $m+n$ es par

$$A_{m,n}^R = \left[(m\pi p_n^{(0)}/k_0) \left\{ 1 - (p_n^{(0)}(\pi-N)/k_0) (c - p_n^{(0)2}) \right\} \left\{ (n-2)\pi - 2N \right\} \operatorname{sen} N / \left[((n-2)\pi - 2N)^2 - (m\pi)^2 \right] + \left\{ p_n^{(0)2} - c/2 + 1p_n^{(0)}(\pi-N)/k_0 \right\} m\pi \operatorname{sen} N / \left[((n-2)\pi - 2N)^2 - (m\pi)^2 \right] \right] \quad (4.25b)$$

IV.2.1 Relaciones de dispersión

Los elementos diagonales de $A_{n,n}^R$ proporcionan la corrección de los eigenvalores de la Ec.(4.22). De acuerdo con la ecuación (4.25a), a primer orden en c_a/c éstos resultan ser:

$$A_{n,n}^R = (n\pi \text{sen } N/((n-1)\pi+N)) \left[(p_n^{(0)}/k_0) \left\{ 1 - (p_n^{(0)}(\pi-N)/k_0) (c - p_n^{(0)2}) \right\} \right] ((n-2)\pi-2N) + \left[p_n^{(0)2} - c/2 + 1 p_n^{(0)}(\pi-N)/k_0 \right]. \quad (4.26)$$

Entonces, a primer orden en c_a/c , la expresión para el valor propio $p_n^{(1)}$ está dada por

$$c - p_n^{(1)2} = (n\pi/k_0)^2 - \left[c_a n\pi \text{sen } N/4c((n-1)\pi+N) \right] \left[1 p_n^{(0)}((n-1)\pi + N)/k_0 + p_n^{(0)2} \{ ((n-2)\pi + 2N)/(n\pi)^2 + 1 \} - c/2 \right]. \quad (4.27)$$

Obsérvese que $p_n^{(1)2}$ es un número complejo, por lo cual se separará en sus partes real e imaginaria. Es bien conocido [57] que si $w_1 + iw_2 = (x+iy)^{1/2}$ y $x \gg y$, entonces w_1 y w_2 están dados en términos de x y y por las expresiones

$$w_1 = [(\{x^2 + y^2\}^{1/2} + x)/2]^{1/2} = x^{1/2} + y^2/(8 y^{3/2}), \quad (4.28a)$$

$$w_2 = [(\{x^2 + y^2\}^{1/2} - x)/2]^{1/2} = y/(2 y^{1/2}). \quad (4.28b)$$

Considérese primero la parte real de $p_n^{(1)}$ de la cual se obtiene

$$\text{Re}[p_n^{(1)}] =$$

$$\left[(c - (n\pi/k_0)^2) \left\{ 1 + c_a n\pi \text{sen } N \{ ((n-2)\pi + 2N)/(n\pi)^2 + 1 \} / (4c((n-1)\pi+N)(N-\pi)) \right\} - c_a n\pi \text{sen } N / [8((n-1)\pi+N)(N-\pi)] \right]^{1/2}, \quad (4.29a)$$

Recordando que $p_n^{(1)} = \beta_n^{(1)}/k_0$ y $k_0 = \omega/c$, la ecuación (4.29a) proporciona la relación de dispersión entre β y ω . Nótese que esta ecuación es de la misma forma que la de las guías de ondas cuyos núcleos son dieléctricos isotrópicos [58], solo que en este caso la frecuencia de corte está dada por

$$\omega_{cn} = \omega_{cn}^{(0)} \left[1 + \epsilon_a n\pi \operatorname{sen} N / [8\epsilon^2 \{(n-1)\pi + N\}(N-\pi)] \right. \\ \left. [c/2 - \{(n-2)\pi + 2N\}/(n\pi)^2 - 1] \right], \quad (4.29b)$$

en donde $\omega_{cn}^{(0)}$ es la frecuencia de corte asociada a un núcleo isotrópico de permitividad ϵ . Nótese de la ecuación (4.29b) que el incremento en la frecuencia de corte $\Delta\omega_{cn} = \omega_{cn} - \omega_{cn}^{(0)}$ es una función de N , de hecho se puede expresar como el producto de la función $\operatorname{sen} [N/((n-1)\pi + N)(N-\pi)]$ por un polinomio cuadrático de N . Esta última función sólo contribuye a las características de $\Delta\omega_{cn}$ por medio del cero del seno en $N = 0$, ya que las singularidades de tal función están fuera del intervalo de validez de la Ec. (4.29b) ($N < 1$). Sin embargo, el polinomio cuadrático puede presentar hasta dos ceros dependiendo del orden del modo y de ϵ . De hecho los ceros de dicho polinomio están dados por

$$4N/\pi = -(n-4) \pm n(9-4\epsilon)^{1/2}. \quad (4.30)$$

Esta expresión permite afirmar que el polinomio solo tendrá cero si $\epsilon < 9/4$, lo cual origina que $\Delta\omega_{cn}$ sea una función monótona creciente de N para $n > 1$, si tal condición no se satisface. Pero si la condición se cumple, $\Delta\omega_{cn}$ puede valer cero para dos valores más de N aparte de $N = 0$. En la Fig. 14 se grafica $\Delta\omega_{cn}$ para los primeros cuatro modos para el caso en donde $\epsilon < 9/4$. En esta figura se observa que en general $\Delta\omega_{cn}$ oscila hasta tres veces en el intervalo graficado. Estos resultados nos muestran, que al variar N , por ejemplo cambiando el número de Reynolds, el ancho de banda de la guía se modifica ligeramente ya que la frecuencia de corte cambia con N . Asimismo dependiendo del valor de ϵ , la forma en que depende $\Delta\omega_{cn}$ con N cambia ya que al ser mayor que $9/4$ incrementará monotonamente con N , mientras que si es menor oscilará con N . Se puede decir que el sistema presenta un cambio de régimen en $\epsilon = 9/4$. En conclusión, se puede aumentar o disminuir el valor de la frecuencia de corte para los primeros modos de la guía controlando la "intensidad" del flujo impuesto exteriormente.

Por otro lado, la parte imaginaria de $p_n^{(1)}$ nos conduce a

$$\text{Im}[p_n^{(1)}] = c_a n \pi p_n^{(0)} \text{sen } N / (8c(N-\pi)k_0 l). \quad (4.31a)$$

Esta ecuación permite calcular la longitud típica de amortiguamiento h_a , debida a la absorción de la onda electromagnética, a lo largo del eje x , la cual está dada por

$$h_a = 8c(N-\pi)k_0 l / (c_a n \pi \text{sen } N). \quad (4.31b)$$

Es importante resaltar el hecho de que en este modelo, en donde se han tomado en cuenta las propiedades hidrodinámicas del nemático, se obtiene una longitud típica de amortiguamiento para la señal electromagnética; mientras que en el capítulo I tal parámetro no fué necesario. De hecho la Ec. (4.31b) es consistente con I ya que al tomar N tendiendo a cero h_a diverge, de donde el amortiguamiento desaparece. Finalmente, es importante enfatizar las características que h_a presenta: es independiente de la frecuencia ω , es mayor para los modos más bajos y es inversamente proporcional a la asimetría dieléctrica del nemático.

IV.2.2 Modos perturbados del campo óptico

Por otra parte, de los elementos no diagonales ($n \neq m$) de $A_{m,n}^R$ se obtienen las correcciones a las funciones propias de la ecuación (3.2), esto es:

$$E_x^1(n) = E_x^0(n) + (c_a/c) \sum_{n \neq m} E_x^0(m) A_{m,n}^R / [(c-p_n^{(0)2}) - (c-p_m^{(0)2})], \quad (4.32)$$

en donde $E_x^0(n)$ está dado por la Ec. (1.14). Sustituyendo el valor de $p_n^{(0)}$ se obtiene la siguiente expresión para la amplitud de $E_x^1(n)$

$$E_x^1(n) = E_0 [\text{sen}[n\pi(\zeta-1/2)] - \{c_a(k_0 l)^2 / c\pi^2\} \sum_{n \neq m} A_{m,n}^R \text{sen} [(n+2)\pi(\zeta-1/2)], \quad (4.33a)$$

en donde $A_{m,n}^R = A_{m,n}^R / (n+1)$. Esta expresión proporciona los modos de la guía de

ondas a primer orden en c_a/c para $n = 1, 2$. Es importante destacar que $A_{a,n}^R$ es diferente de cero para todo m y n por lo que, a diferencia de lo obtenido en el capítulo I, la suma de la Ec. (4.33a) contiene más de un término; sin embargo debe recordarse que el número máximo de modos que se propagan en la celda está limitado por la frecuencia ω de tal modo que (4.33a) sólo contiene un número finito de sumandos.

Debe enfatizarse que en general la amplitud E_x^1 es compleja y que es necesario tomar la parte real de la Ec. (1.5a) para obtener los campos. En efecto, sustituyendo la Ec. (4.33a) en la Ec. (1.5a) y tomando la parte real de la ecuación resultante se obtiene:

$$E_x^1(n) = E_0 \left[\cos[k_0 p_n x] \left\{ \text{sen}[n\pi(\zeta-1/2)] - (c_a(k_0 l)^2/c\pi^2) \text{Re}[A_{a,n}^R] \text{sen}[(n+2)\pi(\zeta-1/2)] \right\} + \text{Im}[A_{a,n}^R] \text{sen}[k_0 p_n x] \text{sen}[(n+2)\pi(\zeta-1/2)] \right]. \quad (4.33b)$$

Obsérvese que esta primera corrección tiene la misma paridad que $E_x^0(n)$ respecto la parte central de la celda ($z = 0$).

Aunque una gráfica de la amplitud de los campos perturbados mostraría que ésta aumenta en la parte central de la celda y disminuye cerca de las placas, es preferible calcular primero la densidad de energía electromagnética para tener la certeza de que el efecto de guía de onda persiste.

IV.2.3 Densidad de energía electromagnética

Con el objeto de mostrar con más claridad el efecto de guía de onda mencionado en la sección anterior, se calcula la densidad de energía electromagnética u_{em} como función de z la cual está definida en la Ec. (1.30a). Si en esta expresión se sustituye la componente de modo $E_x^1(n)$, así como los campos correspondientes $E_x^1(n)$ y $H_y^1(n)$ que se obtienen al sustituir la Ec. (1.6b) y (1.6c) en la ecuación (4.33a), se obtiene la siguiente expresión:

$$u_{em}^1 = (E_0^2/8\pi) \left[c_{xx}(\omega z/l) \text{sen}^2[2\pi(\zeta-1/2)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left(p_n^{(0)2} \epsilon_{xx} (\pi z/l) + \epsilon^2 \right) \cos^2 [2\pi(\zeta - 1/2)] + \\
& (\epsilon_a (k_0 l)^2 / \epsilon \pi^2) \sum_{n \neq m} \operatorname{Re} \{ A_{m,n}^R \} \left\{ \right. \\
& \left. \left[1 + (m(k_0 l)^2 / n^2 \pi) (p_n^{(0)2} m \pi \cdot \epsilon^2) \right] \cos[(m-n)\pi\zeta] \right. \\
& \left. - \left[1 - ((k_0 l)^2 / (n\pi)^2) (p_n^{(0)2} m \pi \cdot \epsilon^2) \right] \cos[(n+m)\pi\zeta] \right\} \left. \right\}, \quad (4.34)
\end{aligned}$$

en donde los coeficientes $A_{m,n}^R$ ya se han definido y ϵ_{xx} , ϵ_{zz} están definidos en la Ec. (1.4). Como se puede observar de esta expresión, la densidad de energía electromagnética u_{em}^1 a primera orden en ϵ_a/ϵ , es una función par de su argumento, tal y como lo era cuando no se tomaba en cuenta el nemático. Nótese también que al igual que para el campo $E_x^1(n)$, la primera corrección a u_{em}^0 es proporcional a $\epsilon_a (k_0 l)^2$, y está constituida por la superposición de los armónicos $\cos[(n+m)\pi\zeta]$ y $\cos[(n-m)\pi\zeta]$.

En las Figs. 15b - 15b se muestra la densidad de energía u_{em}^1 , Ec. (4.34), asociada con cada uno de los 2 primeros modos TM, para el caso en el que el nemático adopta la configuración planar y para cuatro valores distintos de N. En la misma gráfica se muestra, como referencia, la densidad de energía asociada a un dieléctrico isotrópico de constante dieléctrica ϵ . Nótese que la densidad para el primer modo (Fig. 6) es mayor en la parte central de la celda respecto a el caso homogéneo u^0 para valores positivos de N mientras que disminuye cerca de las placas respecto al valor de u^0 . Para valores negativos de N la densidad de energía también disminuye cerca de las placas pero en este caso no es mayor en el centro sino que en torno a los puntos $\zeta = \pm 1/4$. La densidad de energía para los otros modos se concentra en la parte central de la celda para cualquier valor de N, pero para valores positivos de N el efecto es más intenso.

Una descripción cuantitativa de este comportamiento se expresa en términos de la varianza de u_{em}^1 , la cual está dada por

$$\operatorname{Var} u_{em}^1 = E_0^2 (1/2)^2 (k_0 l / n\pi)^2 / 8\pi \left[1/3 + 1/(n\pi)^2 - 1/\epsilon (k_0 l)^2 \right]$$

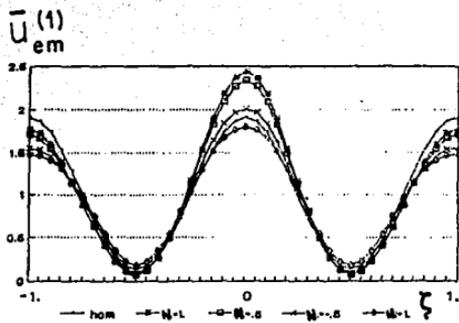


Fig. 15a. Densidad de energía electromagnética asociada a el modo $n = 1$, a primer orden en q .

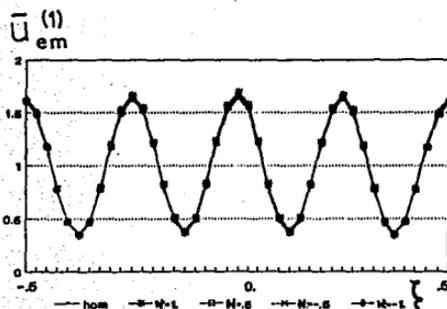


Fig. 15b. Lo mismo que en la Fig 15a. para el modo $n = 2$.

$$- \left\{ \frac{c_a (k_0 l)^2}{2c\pi^2 (n+1)} \sum_{n^*m} A_{m,n}^R \right. \\ \left. \left[1 + 1/n + \left((k_0 l)^2 / n^3 \pi \right) \left(p_n^{(0)2} (n+2) \pi + c^2 \right) \left(1 - 1/(n\pi)^2 \right) \right] \right\}. \quad (4.35a)$$

De esta expresión se sigue que la varianza de la distribución de energía asociada a los modos perturbados es menor que la correspondiente al modo no perturbado y disminuye al aumentar el orden del modo perturbado. La varianza relativa de la distribución de energía de los modos perturbados respecto a los modos no perturbados está dada por

$$\left(\text{Var } u_{om}^1 \right)_{r=1} = 1 - \left(\frac{c_a (k_0 l)^2}{2c\pi^2} \right) \left[\left(\frac{1}{3} + 1/(n\pi)^2 - 1/c (k_0 l)^2 \right) (n+1) \right] \\ \sum_{m,n} A_{m,n}^R \left[1 + 1/n + \left((k_0 l)^2 / n^3 \pi \right) \left(p_n^{(0)2} (n+2) \pi + c^2 \right) \left(1 - 1/(n\pi)^2 \right) \right]. \quad (4.36)$$

IV.3 Efecto de guía de onda: límites óptico y WKB

Hasta ahora se ha mostrado la existencia del efecto de guía de onda sólo para nemáticos en flujo permanente, de anisotropía dieléctrica pequeña, utilizando una aproximación perturbativa a primer orden. En esta sección se retomará el enfoque adoptado en el capítulo II para evitar la limitación de la anisotropía pequeña. Es decir, primero se supondrá que el haz óptico incidente es de intensidad baja de tal forma que $q \ll 1$, así como que la frecuencia de éste es tal que satisface el límite óptico $k_0 l \gg 1$. Después se relajará esta restricción para tomar en cuenta haces con frecuencias tales que el límite WKB $k_0 l > 1$ sea válido.

IV.3.1 Trayectorias de Rayo

En la subsección I.3.1 se calculó la trayectoria de rayo que sigue una onda electromagnética de frecuencia ω muy grande comparada con la frecuencia típica de la celda dada por c/l , e intensidad baja, $q \ll 1$, al propagarse por una celda nemática. La Ec.(2.9) proporciona esta trayectoria en función del ángulo de orientación, por lo que sustituyendo en ésta la Ec.(2.9) la integral resultante queda expresada sólo en términos de la variable ζ . La expresión resultante no se puede escribir en términos de funciones comunes, pero es fácil analizar su comportamiento.

Al igual que en los capítulos II y III se dividirá para su análisis el intervalo de p en los subintervalos $0 < p^2 < \epsilon_{\perp}$ y $\epsilon_{\perp} < p^2 < \epsilon_{\parallel}$ que fueron denominados como régimen débil y régimen fuerte, respectivamente.

IV.3.1A. Régimen débil $0 < p^2 < \epsilon_{\perp}$

Como se mostró en el capítulo II, en el régimen débil la Ec. (2.9) es real para todo ζ , independientemente de la orientación configuracional involucrada. Por esta razón, no obstante que la Ec. (4.17) para el ángulo de orientación ya no es más una función monótona de la coordenada ζ , como en el caso sin flujo según se muestra en la Fig. 16a, no originará cambios significativos en la trayectoria de rayo.

Otra característica importante de la Ec. (4.17) es que dicha función puede tomar valores superiores o inferiores a $\pm \pi/2$. Más aún, dependiendo del valor de N , $\theta(\zeta)$ puede alcanzar valores superiores en múltiplos enteros a $\pi/2$ como se muestra en la Fig. 13b. Esto origina que las componentes del tensor dieléctrico $\epsilon_{xx} = \epsilon \sin^2 \theta$ y $\epsilon_{zz} = \epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta$, incluidas en el integrando de la Ec. (4.36a), oscilen varias veces en el intervalo de integración; sin embargo, dentro del régimen débil este comportamiento no causa cambios apreciables en las trayectorias de rayo.

En la Figs. 16a se presenta la trayectoria de rayo para MBBA dadas por las ecuaciones (4.17) y (2.9) tomando la solución asociada al signo menos para el ángulo de propagación del haz $\alpha = 45^{\circ}$. Las gráficas de las trayectorias dadas por la Ec. (2.9) con el signo positivo, se obtienen invirtiendo la figura 15 respecto al origen de coordenadas, por lo que se omite su gráfica.

En resumen, se puede decir que para el régimen débil no existen cambios notorios originados por el flujo externo sobre las trayectorias de rayo.

IV.3.1B. Régimen fuerte $\epsilon_{\perp} < p^2 < \epsilon_{\parallel}$

En el capítulo II se mostró que en el régimen fuerte la Ec. (2.9) proporciona valores reales sólo en ciertas zonas del interior de la celda. De hecho, es fácil mostrar que las Ec. (4.17) y (2.9) proporcionan valores reales sólo cuando $|\theta \pm (2m+1)\pi/2| < \pm (1/\pi) \arccos[(p^2 - \epsilon_{\perp})/\epsilon_{\parallel}]$, con m entero.

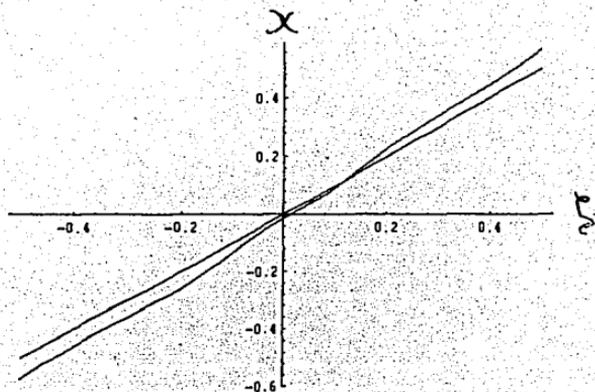


Fig. 16a. Trayectorias de rayo en presencia de flujo para MBBA con $R = 10^{-2}$ y ángulo de incidencia $\alpha = 45^\circ$ (régimen débil)

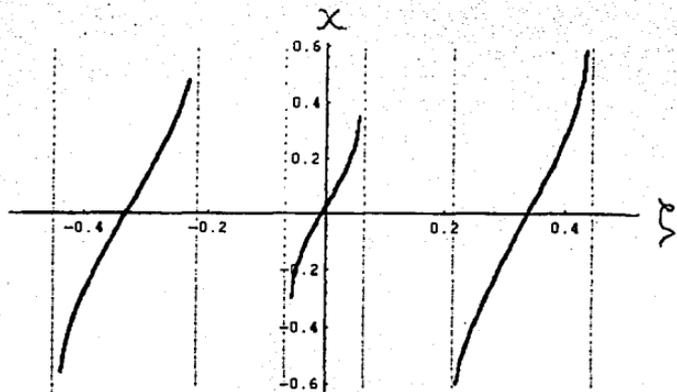


Fig. 16b. Lo mismo que en la Fig.15a para $\alpha = 75^\circ$ (régimen fuerte)

Nótese que dicha condición puede representar más de una región, a diferencia de III en donde sólo la región central estaba permitida. Esto debido a que como se comentó más arriba, θ ya no es una función monótona de z como ocurría cuando no había flujo; lo cual se muestra en la Fig. 13a.

La posición de las cáusticas se puede determinar a partir de los valores de los ángulos θ_0 que indeterminan la expresión (2.9), es decir, que anulan la expresión $c_{zz} - p^2$. Estos valores están dados en términos del ángulo de incidencia α por

$$\theta_0 = \arcsen \frac{c_{\perp}}{1 + (c_{\perp}/c_{\parallel}) \cot^2 \alpha} \quad (4.37)$$

Por lo tanto, si se sustituyen los valores $\theta_0 \pm (2m+1)\pi/2$, con m entero en la ecuación (4.17) se pueden determinar la posición de las cáusticas recordando que la celda está localizada entre $\zeta = -1/2$ y $\zeta = 1/2$. Para el caso particular de $N = 40$, se tienen únicamente las siguientes ecuaciones para las cáusticas

$$-(N/3)\zeta^3 + (\pi + N/12)\zeta \pm \theta_0 = 0, \quad (4.38a)$$

$$-(N/3)\zeta^3 + (\pi + N/12)\zeta \pm (\theta_0 - \pi/2) = 0. \quad (4.38b)$$

Las partes marcadas del eje z de la Figs 13b representan las regiones en las cuales los rayos pueden propagarse. Como es fácil comprobar, para este valor de N , resultan ser tres las regiones de conducción que aparecen en el interior de la celda. De esta manera se puede decir que en el límite óptico, la celda se comporta como un dispositivo que contiene tres guías de ondas que pueden conducir simultáneamente sin interferirse. En la Fig. 16b se muestra las trayectorias de rayo asociadas a una configuración orientacional con $N = 40$. Obsérvese que, como se había indicado, los rayos se propagan independientemente en cada región y se desvían hacia el eje de la celda justo cuando se acercan a las cáusticas de las regiones.

Finalmente, es importante señalar que el número de regiones en las cuales se puede propagar el haz aumentan conforme el flujo se intensifica. En efecto, es fácil mostrar, partiendo de la periodicidad de las funciones c_{xz} y c_{zz} , que existen $2m+1$ regiones de conducción en la celda siempre que el

ángulo máximo de orientación θ_m se halle en el intervalo

$$|\theta_m - m\pi/2| < \pi/2 - \theta_0, \quad m \text{ par}, \quad (4.39a)$$

$$|\theta_m - m\pi/2| < \theta_0, \quad m \text{ impar}, \quad (4.39b)$$

en donde

$$\theta_m = \pm (2/3) \{ (N/4 - \pi)^3 / 3N \}^{1/2}. \quad (4.40)$$

De esta manera al aumentar N , es decir, al intensificarse el flujo, aumenta el número de regiones de conducción.

Es importante señalar que las trayectorias de rayo calculadas aquí son válidas cuando la frecuencia del haz incidente es muy grande comparada con la frecuencia típica de la celda dada por c/λ . Con el objeto de analizar el comportamiento de la densidad de energía para condiciones menos restrictivas para la frecuencia del haz incidente se generalizará el análisis para considerar el límite WKB en el cual se deben incluir términos de primer orden en el parámetro $(c/\omega\lambda)$, lo cual se discutirá en la siguiente sección.

IV.3.2 Los Modos TM en la aproximación WKB

La forma general de los campos electromagnéticos en el límite WKB fué desarrollada en la subsección I.3.2a, aquí se emplearán dichos resultados junto con la configuración en presencia de flujo, Ec.(4.17), para calcular así la densidad de energía electromagnética en la celda.

IV.3.2 A. Regimén débil $0 < p^2 < \epsilon_1$

Para calcular la densidad de energía electromagnética, primero se deben conocer los ángulos de propagación α_n permitidos en la celda. Para ello se sustituye la Ec. (4.17) para el ángulo de orientación en la Ec.(3.8), la cual está dada por

$$2 \int_0^{1/2} d\eta [c_{\parallel} \epsilon_1 (c_{zz} - c_{\parallel}) / (1 + (\epsilon_1/c_{\parallel}) \cot^2 \alpha_n)]^{1/2} / \epsilon_{zz} = n\pi/k_0 l. \quad (4.41)$$

De esta forma se obtiene la ecuación trascendental que satisfacen los valores permitidos del ángulo α_n . Sin embargo, a diferencia del capítulo III, en este caso la ecuación trascendental resultante no se puede expresar en

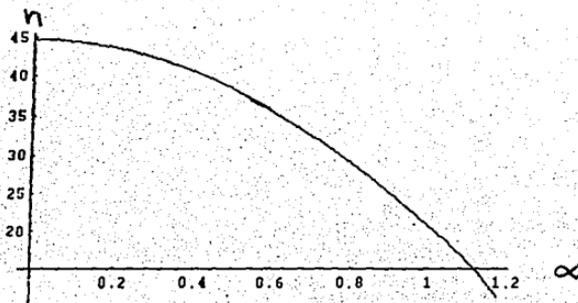


Fig.17a .Modo n como función del ángulo de incidencia α_n para MBBA con $N = 40$ (régimen débil)

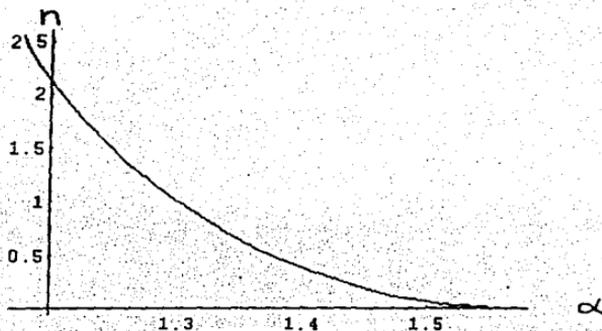


Fig.17b .Modo n como función del ángulo de incidencia α_n para MBBA con $N = 40$ (régimen fuerte)

términos de funciones conocidas. En la Fig.17a se muestra n como función de α_n ; los valores permitidos de α son aquellos para los cuales n es un entero.

Por otro lado, la frecuencia de corte está dada por la Ec.(3.12), es decir

$$\omega_c = \frac{n\pi}{lc(c_{\parallel}c_{\perp})^{1/2}} \left(\int_0^{\pi} \frac{d\eta}{(c_{zz})^{1/2}} \right)^{-1}. \quad (4.42)$$

Finalmente, la densidad de energía electromagnética para la celda está dada por la Ec.(3.19a), la cual resulta ser

$$u_{em} = (E_0^2/8\pi) (c_{\parallel}c_{\perp}/(c_{zz}-p^2))^{1/2} \left[1 + (p^2/c_{zz}) \cos(2k_0 l f_1) \right], \quad (4.43a)$$

en donde

$$f_1 = \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta [c_{\parallel}c_{\perp}(c_{zz}-p^2)]^{1/2}/c_{zz}. \quad (4.43b)$$

En la Fig. 18a se muestra las densidades de energía dadas por la Ec.(4.43a) para $\alpha = 42^\circ$. En dicha gráfica se observa cómo, al igual que en el capítulo I, el efecto de guía de onda se pierde en este régimen, porque aunque la densidad de energía presenta dos máximos cerca del centro de la celda, ésta también es grande cerca de las placas. Esta gráfica muestra que para el régimen débil el flujo hidrodinámico aporta diferencias cualitativas respecto al caso sin flujo que no inducen el efecto de guía de onda.

IV.3.2 B. Régimen fuerte $c_{\perp} < p^2 < c_{\parallel}$

A diferencia de la subsección anterior, aquí no se pueden emplear directamente los resultados del capítulo III para calcular los ángulos de propagación permitidos α ni la densidad de energía electromagnética. En efecto, de la Fig.16b se observa que escogiendo $N = 40$ en el régimen fuerte para MBBA, aparecen 6 caústicas en el interior de la celda en contraste con las dos caústicas que se tienen cuando no hay flujo. Debido a esta diferencia se deben calcular nuevamente las expresiones para los campos ya que en torno a cada caústica se deben de satisfacer las reglas de conexión dadas en la Ecs.(3.19). Imponiendo estas reglas de conexión así como las condiciones de

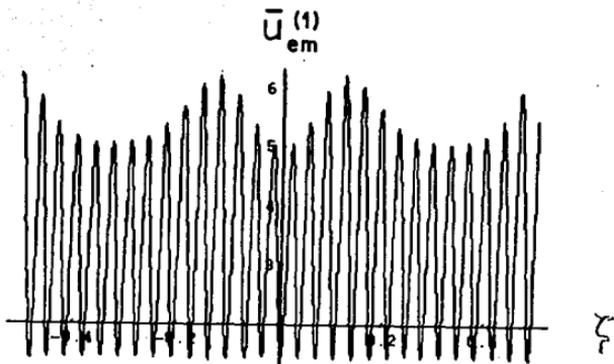


Fig. 18a Densidad de energía electromagnética en presencia de flujo para MBBA con $R = 10^{-2}$ y ángulo de incidencia $\alpha = 45^\circ$ (régimen débil)

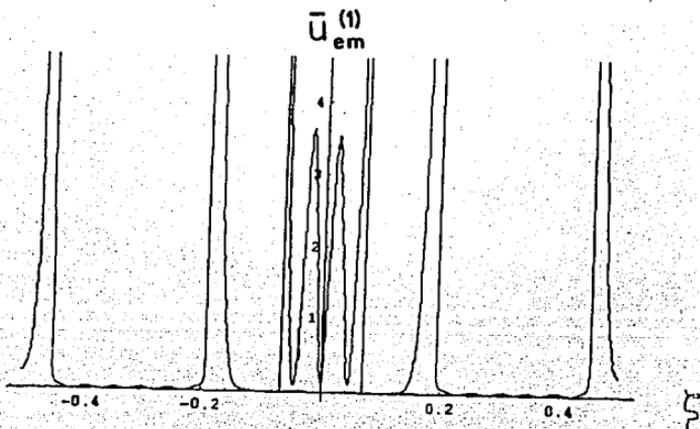


Fig. 18b. Lo mismo que en la Fig. 17 para $\alpha = 75^\circ$ (régimen fuerte)

frontera de conductor perfecto en las placas, dadas en la sección I.1.2; se encuentra la componente H_y para cada una de las siete regiones en que las caústicas dividen a la celda, cuyas expresiones explícitas están dadas en el apéndice E.

Por otra parte, tanto las reglas de conexión en torno a las caústicas como las condiciones de frontera para $H_y(\zeta)$ (véase apéndice E), también implican que

$$k_0 \int_{-c}^c d\eta \kappa(\eta) = (n+1/2)\pi, \quad (4.46a)$$

en donde n es un entero positivo. Esta es la ecuación trascendental a partir de la cual se determinan los valores de p , y es la ecuación análoga a la Ec. (4.41) en el régimen fuerte. Es importante resaltar que la diferencia entre las ecuaciones (4.41) y (4.46a) sólo es la longitud del intervalo de integración, el cual se ha reducido para este caso al intervalo entre $-c$ y c , que corresponde a las zonas en donde existe la trayectoria. La expresión resultante de sustituir la Ec. (2.10) en la Ec. (4.46a) tampoco se puede expresar en términos de funciones conocidas, pero su solución gráfica se presenta en la figura 17b para el nemático MBBA y $N = 40$.

Para calcular finalmente la densidad de energía u_{em} , resta calcular las componentes del campo eléctrico las cuales se obtienen a partir de las Ecs. (D.1)-(D.7) y de las ecuaciones (1.6a) y (1.6b). Efectuando lo anterior y sustituyendo en la ecuación para u_{em} en cada una de las mismas regiones en las cuales se proporcionó $H_y(\zeta)$ se obtiene la expresión explícita de u_{em} que está dada en el apéndice C, debido a que su expresión es muy compleja.

La gráfica de esta densidad de energía se presenta en la Fig. 18b como función de la coordenada transversal. Se puede observar que la densidad de energía en el centro de la celda es comparativamente mayor que en el resto de la celda. Esta gráfica muestra para este modo TM, el efecto de guía de onda que persiste en la parte central de la celda en presencia del flujo externo.

Apéndice D

Aquí se calculará el valor de C proporcionado por la ecuación trascendental Ec. (4.20), para los casos extremos para los cuales $|C| \ll 1$ y $|C| \gg 1$.

Considérese primero el caso para el cual $|C| \gg 1$. En este caso es conveniente integrar por partes iteradamente la Ec. (4.20) para reducirla a

$$\begin{aligned} C/12 + N \left[2/3C + (1/3)(1 + \pi/C)IC(C) \right] - CN \left[2/C - (8/3)(1 + \pi/C)IC(C) + \right. \\ \left. (2/9)(1 + \pi/C)^2 IS(C) \right] - (N^2/2) \left[1/C - (8/3)(1 + \pi/2C)IC(2C) + \right. \\ \left. (2/9)(1 + \pi/2C)^2 IS(2C) \right] = 0, \end{aligned} \quad (D.1)$$

en donde IS(C) y IC(C) están dadas por

$$IS(C) = \int_0^{1/2} d\zeta \cos[C\zeta(\zeta^2 - 1/4) + \pi\zeta], \quad (D.1a)$$

$$IC(C) = \int_0^{1/2} d\zeta \zeta \sin[C\zeta(\zeta^2 - 1/4) + \pi\zeta]. \quad (D.2b)$$

Las integrales (D.2) no se pueden calcular en forma exacta, sin embargo, su valor se puede aproximar para valores de $C \gg 1$ por medio del método de fase estacionaria [59], ya que como es fácil mostrar, la función $\zeta(\zeta^2 - 1/4)$ tiene un máximo dentro del intervalo de integración. Aproximando ambas integrales por este método se obtienen las siguientes expresiones:

$$IS(C) \approx (\pi/12C\sqrt{3})^{1/2} 0.07 \sin(C/12\sqrt{3} - \pi/2\sqrt{3}), \quad (D.3a)$$

$$IC(C) \approx -(\pi/C\sqrt{3})^{1/2} 0.07 \cos(C/12\sqrt{3} - \pi/2\sqrt{3}). \quad (D.3b)$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (D.1) y recordando que $|C| \gg 1$, se obtiene que $C \approx -2N/3$.

Por otro lado, si $|C| \ll 1$, la Ec. (4.20) se reduce a

$$\int_{-1/2}^{1/2} d\zeta \left\{ C \zeta^2 (1 - 2N\zeta(\zeta^2 - 1/4) \operatorname{sen} \pi\zeta - N^2\zeta(\zeta^2 - 1/4)^2) \right.$$

$$\left. \cos 2\pi\zeta + N\zeta^2 \cos \pi\zeta - (N^2/2)\zeta^3(\zeta^2 - 1/4) \operatorname{sen} 2\pi\zeta \right\} = 0$$

Apéndice E

En este apéndice se calculan las expresiones explícitas para la componente H_y de los modos TM en el régimen fuerte para MBBA con flujo y $N = 40$. Para ello se imponen las reglas de conexión dadas por las Ecs. (3.19) así como las condiciones de frontera de conductor perfecto en las placas, dadas en la sección I.1.2. Entonces, la componente H_y para cada una de las siete regiones en que las seis cáusticas cuyas posiciones están dadas por $\pm a$, $\pm b$ y $\pm c$ con $a > b > c > 0$; dividen a la celda, resulta ser

para $-1/2 < \zeta < -a$

$$H_y(\zeta) = [E_0 / (p^2 - \epsilon_{zz}^{-2})^{1/4}] \exp(-1pk_0 l f_0) \cosh[k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \Gamma(\eta)], \quad (E.1a)$$

para $-a < \zeta < -b$

$$H_y(\zeta) = [E_0 / (\epsilon_{zz} - p^2)^{1/4}] \exp(-1pk_0 l f_0) \left(u_1 \cos[k_0 l \int_{\zeta}^{-b} d\eta \kappa(\eta) - \pi/4] - w_1 \sin[k_0 l \int_{\zeta}^{-b} d\eta \kappa(\eta) - \pi/4] \right), \quad (E.1b)$$

para $-b < \zeta < -c$

$$H_y(\zeta) = [E_0 / (p^2 - \epsilon_{zz}^{-2})^{1/4}] \exp(-1pk_0 l f_0) \left(u_2 \cosh[k_0 l \int_{\zeta}^{-c} d\eta \Gamma(\eta)] + w_2 \sinh[k_0 l \int_{\zeta}^{-c} d\eta \Gamma(\eta)] \right), \quad (E.1c)$$

para $-c < \zeta < c$

$$H_y(\zeta) = -[E_0 / (\epsilon_{zz} - p^2)^{1/4}] \exp(-1pk_0 l f_0) \left(u_3 \cos[k_0 l \int_{\zeta}^c d\eta \kappa(\eta) - \pi/4] - w_3 \sin[k_0 l \int_{\zeta}^c d\eta \kappa(\eta) - \pi/4] \right), \quad (E.1d)$$

para $c < \zeta < b$

$$H_y(\zeta) = [E_0 / (p^2 - \epsilon_{zz})^{1/4}] \exp(-ipk_0 l f_0) \left(u_2 \cosh[k_0 l \int_c^\zeta d\eta \Gamma(\eta)] + w_2 \sinh[k_0 l \int_c^\zeta d\eta \Gamma(\eta)] \right), \quad (E.1e)$$

para $b < \zeta < a$

$$H_y(\zeta) = [E_0 / (\epsilon_{zz} - p^2)^{1/4}] \exp(-ipk_0 l f_0) \left(u_1 \cos[k_0 l \int_b^\zeta d\eta \kappa(\eta) - \pi/4] - w_1 \sin[k_0 l \int_b^\zeta d\eta \kappa(\eta) - \pi/4] \right), \quad (E.1f)$$

y finalmente cuando $a < \zeta < 1/2$

$$H_y(\zeta) = [E_0 / (p^2 - \epsilon_{zz})^{1/4}] \exp(-ipk_0 l f_0) \cosh[k_0 l \int_a^\zeta d\eta \Gamma(\eta)], \quad (E.1g)$$

en donde se ha definido

$$u_1 = \left(\exp[-k_0 l \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta)] \cos[k_0 l \int_b^a d\eta \kappa(\eta)] - \exp[k_0 l \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta)] \sin[k_0 l \int_b^a d\eta \kappa(\eta)] \right), \quad (E.2a)$$

$$w_1 = \left(\exp[-k_0 l \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta)] \sin[k_0 l \int_b^a d\eta \kappa(\eta)] + \exp[k_0 l \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta)] \cos[k_0 l \int_b^a d\eta \kappa(\eta)] \right), \quad (E.2b)$$

$$u_2 = \exp[k_0 l \int_b^c d\eta \Gamma(\eta)] u_1 + \exp[-k_0 l \int_b^c d\eta \Gamma(\eta)] w_1, \quad (E.2c)$$

$$w_2 = \exp[k_0 \int_b^c d\eta \Gamma(\eta)] u_1 - \exp[-k_0 \int_b^c d\eta \Gamma(\eta)] w_1, \quad (\text{E.2d})$$

$$u_3 = -u_2 \operatorname{sen}[k_0 \int_{-c}^c d\eta \kappa(\eta)] + w_2 \cos[k_0 \int_{-c}^c d\eta \kappa(\eta)], \quad (\text{E.2e})$$

$$w_3 = u_2 \cos[k_0 \int_{-c}^c d\eta \kappa(\eta)] + w_2 \operatorname{sen}[k_0 \int_{-c}^c d\eta \kappa(\eta)]. \quad (\text{E.2f})$$

con

$$f_0 = \int_{-1/2}^{\zeta} \frac{c}{xx} / c_{xx} \quad (\text{E.3a})$$

$$\kappa(\zeta) = (c_{11} c_{11} (c_{xx} - p^2))^{1/2} / c_{xx} \quad (\text{E.3b})$$

$$\Gamma(\zeta) = (c_{11} c_{11} (p^2 - c_{xx}))^{1/2} / c_{xx} \quad (\text{E.3c})$$

y

$$\frac{\operatorname{sen}[k_0 \int_{-c}^c d\eta \kappa(\eta)] + 1}{\cos[k_0 \int_{-c}^c d\eta \kappa(\eta)]} \exp[2k_0 \int_b^c d\eta \Gamma(\eta)]$$

$$= \frac{1 + \exp[2k_0 \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta)] \tan[k_0 \int_b^a d\eta \kappa(\eta)]}{1 - \exp[2k_0 \int_a^{1/2} d\eta \Gamma(\eta)] \tan[k_0 \int_b^a d\eta \kappa(\eta)]} \quad (\text{E.4})$$

Apéndice F

En este apéndice se dan las expresiones explícitas para la densidad de energía electromagnética de los modos TM en el régimen fuerte para MBBA con flujo y $N = 40$. Sustituyendo tanto la componente H_y de las Ecs. (E.1) como las componentes E_x y E_z que se obtienen por medio de las Ecs. (1.6a) y (1.6b), en la Ec. (1.30a) se obtiene la densidad de energía electromagnética para cada una de las mismas siete regiones en que se definió el campo H_y , éste es para $-1/2 < \zeta < -a$

$$u_{em} = (E_0^2/8\pi) (e_{\parallel} e_{\perp} / (p^2 - e_{zz}))^{1/2} [(p^2/e_{zz}) + \cosh[2k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta} d\eta \Gamma(\eta)], \quad (F.1a)$$

para $-a < \zeta < -b$

$$u_{em} = (E_0^2/8\pi) (e_{\parallel} e_{\perp} / (e_{zz} - p^2))^{1/2} [u_1^2 + w_1^2 - (p^2/e_{zz})(u_1^2 - w_1^2) \operatorname{sen}(2k_0 l \int_{\zeta}^{-b} d\eta \kappa(\eta)) + (2p^2/e_{zz})u_1 w_1 \cos(2k_0 l \int_{\zeta}^{-b} d\eta \kappa(\eta))], \quad (F.1b)$$

para $-b < \zeta < -c$

$$u_{em} = (E_0^2/8\pi) (e_{\parallel} e_{\perp} / (e_{zz} - p^2))^{1/2} [(p^2/e_{zz})(u_2^2 - w_2^2) + (u_2^2 + w_2^2) \cosh(2k_0 l \int_{\zeta}^{-b} d\eta \Gamma(\eta)) + u_2 w_2 \operatorname{senh}(2k_0 l \int_{\zeta}^{-b} d\eta \Gamma(\eta))], \quad (F.1c)$$

para $-c < \zeta < c$

$$\begin{aligned}
u_{\text{on}} = & (E_0^2/8\pi) (e_{\parallel} e_{\perp} / (e_{zz} - p^2))^{1/2} [u_3^2 + w_3^2 - \\
& (p^2/e_{zz})(u_3^2 - w_3^2) \text{sen}(2k_0 l \int_{\zeta}^c d\eta \kappa(\eta)) + \\
& (2p^2/e_{zz}) u_3 w_3 \text{cos}(2k_0 l \int_{\zeta}^c d\eta \kappa(\eta))], \quad (\text{F.1d})
\end{aligned}$$

para $c < \zeta < b$

$$\begin{aligned}
u_{\text{on}} = & (E_0^2/8\pi) (e_{\parallel} e_{\perp} / (e_{zz} - p^2))^{1/2} [(p^2/e_{zz})(u_2^2 - w_2^2) + \\
& (u_2^2 + w_2^2) \text{cosh}(2k_0 l \int_b^{\zeta} d\eta \Gamma(\eta)) + \\
& u_2 w_2 \text{senh}(2k_0 l \int_b^{\zeta} d\eta \Gamma(\eta))], \quad (\text{F.1e})
\end{aligned}$$

para $b < \zeta < a$

$$\begin{aligned}
u_{\text{on}} = & (E_0^2/8\pi) (e_{\parallel} e_{\perp} / (e_{zz} - p^2))^{1/2} [u_1^2 + w_1^2 - \\
& (p^2/e_{zz})(u_1^2 - w_1^2) \text{sen}(2k_0 l \int_b^{\zeta} d\eta \kappa(\eta)) + \\
& (2p^2/e_{zz}) u_1 w_1 \text{cos}(2k_0 l \int_b^{\zeta} d\eta \kappa(\eta))], \quad (\text{F.1f})
\end{aligned}$$

y finalmente, para $a < z < 1/2$

$$\begin{aligned}
u_{\text{on}} = & (E_0^2/8\pi) (e_{\parallel} e_{\perp} / (p^2 - e_{zz}))^{1/2} [(p^2/e_{zz}) + \\
& \text{cosh}(2k_0 l \int_{\zeta}^{1/2} d\eta \Gamma(\eta))] \quad (\text{F.1g})
\end{aligned}$$

CAPITULO V

SOLITONES OPTICOS EN CELDAS NEMATICAS

En los capítulos anteriores se mostró que en una celda plana nemática con fronteras perfectamente conductoras, existe un efecto de guía de onda que concentra la densidad de energía electromagnética en la parte central de la celda. Sin embargo, en dichos capítulos el análisis se efectuó en el régimen lineal de las ecuaciones dinámicas del campo electromagnético. El propósito fundamental de este capítulo es el de considerar la primera corrección no lineal de la dinámica del campo electromagnético. Específicamente, se mostrará que en una celda que contiene un nemático en reposo, pueden propagarse solitones asociados al campo electromagnético gobernados por la ecuación de Schrodinger no lineal (ESNL), cuyos parámetros de propagación están determinados por la relación de dispersión y la densidad de energía elástica del nemático.

V.1 Régimen no lineal de los modos TM

En esta sección se mostrará que la ecuación dinámica no lineal para la componente H_y de los modos TM, se puede separar de forma explícita en dos partes, una lineal en H_y y la otra no lineal. A partir de las Ecs.(1.6a)-(1.6c) es fácil mostrar que H_y satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$c_{zz} \frac{d^2 H_y}{d\zeta^2} + 2ipk_0 \epsilon_{zz} \frac{dH_y}{d\zeta} + (k_0^2) [c_{\parallel} c_{\perp} - p^2 c_{zz}] H_y = 0, \quad (5.1)$$

en donde las componentes c_{zz} , c_{\parallel} y c_{\perp} dependen explícitamente del ángulo de orientación θ , el cual a su vez se acopla con el campo eléctrico través de la Ec.(1.11). Como se discutió en la sección 1.1.1, la magnitud de dicho acoplamiento se mide por medio del parámetro q que aparece en la Ec.(1.11). Es importante resaltar que en los capítulos anteriores fueron calculados los

campos electromagnéticos a orden cero en este parámetro, mientras que aquí se calcularán a primer orden en el mismo parámetro. Es decir, en este caso la intensidad del haz incidente será comparable con la densidad de energía elástica del nemático a diferencia de lo supuesto en los capítulos II, III y IV en donde la intensidad del haz se consideró despreciable comparada con ésta última.

Sustituyendo la expresión de θ a primer orden en q , dada por la Ec.(3.24), consistente con las condiciones de frontera planares, en la Ec.(5.1) y despreciando términos de orden superior en q , se obtiene la ecuación dinámica para H_y , que es de la forma

$$L H_y = F H_y, \quad (5.2)$$

en donde

$$L(d/d\zeta, ik, ip) = \epsilon_{zz}^0 \frac{d^2}{d\zeta^2} + 2ipk\epsilon_{xz}^0 \frac{d}{d\zeta} + (kl)^2 [\epsilon_{yy}^0 \epsilon_{xx}^0 - p^2 \epsilon_{xx}^0], \quad (5.3a)$$

y

$$F = -(q/2)\theta_a^{(1)}(H_y) \{2ipk[\epsilon_{xz}^1 - \epsilon_{xz}^1 \epsilon_{xx}^0 / \epsilon_{zz}^0] \frac{d}{d\zeta} - (kl)^2 p^2 [\epsilon_{xx}^1 - \epsilon_{xx}^1 \epsilon_{xx}^0 / \epsilon_{zz}^0]\}. \quad (5.3b)$$

Aquí se ha empleado la siguiente notación:

$$\epsilon_{zz}^0 = \epsilon_a + \epsilon_a \sin^2 \pi\zeta, \quad (5.4a)$$

$$\epsilon_{xx}^0 = \epsilon_a \sin\zeta \cos \pi\zeta, \quad (5.4b)$$

$$\epsilon_{xz}^0 = \epsilon_a + \epsilon_a \cos^2 \pi\zeta, \quad (5.4c)$$

$$\epsilon_{xx}^1 = -\epsilon_a^1 = \sin 2\pi\zeta, \quad (5.4d)$$

$$\epsilon_{xz}^1 = \cos 2\pi\zeta \quad (5.4e)$$

y

$$e_y^{(1)}(H_y) = \int_0^{\zeta} d\zeta' \int_0^{\zeta'} d\eta \left\{ (|E_x|^2 - |E_z|^2) \cos 2\pi\eta + |E_x| |E_z| \sin 2\pi\eta \right\}. \quad (5.4f)$$

Como es claro de las Ecs. (5.3b) y (5.4f), el operador F es no lineal en H_y , ya que las componentes E_x y E_z en una guía de ondas dependen de H_y . En cambio, el operador L es lineal en H_y , puesto que sólo depende de ζ , según se observa de las ecuaciones (5.3a) y (5.4a)-(5.4c).

V.2. Ecuación para la envolvente de un paquete de ondas

A continuación se mostrará que la envolvente de un paquete de ondas electromagnéticas que se propagan en una celda plana de cubiertas metálicas cuyo núcleo es un cristal líquido nemático satisface la ESNL.

Hasta este punto sólo se ha estudiado la propagación de modos TM monocromáticos con frecuencia ω_0 bien definida. En este capítulo se extenderá el análisis para tomar en cuenta paquetes de ondas. El estudio de la dinámica de paquetes de ondas es una extensión natural a considerar ya que representan casos más realistas que las ondas planas. Una motivación adicional es la tendencia reciente de la tecnología de comunicaciones es transmitir la información de forma digitalizada, es decir, en paquetes o unidades (bits) de información [60, 61].

Considérese primero la transformada de Fourier, en el tiempo, de un modo puro TM, $H_y(x, z, t)$, como el dado en la Ec. (1.5b); la cual se denotará por $H'_y(x, z, t)$ y está dada por

$$H'_y(x, z, \omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{ik(\omega_0)x} H_y(z, \omega_0) + c.c., \quad (5.5)$$

en donde c.c. es el complejo conjugado y $\delta(\omega - \omega_0)$ es la delta de Dirac. La Ec. (5.5) exhibe claramente que la distribución espectral de este campo está concentrada en una sola frecuencia. De manera distinta, un paquete de modos, en el mismo espacio espectral, se puede expresar como

$$H_y(x, z, \omega) = \bar{A}(\omega - \omega_0, z) e^{ik(\omega_0)x} H_y(z, \omega_0) + c.c., \quad (5.6)$$

en donde $\bar{A}(\omega - \omega_0, z)$ es la distribución que caracteriza al espectro de frecuencias. Si se considera que esta distribución es muy angosta, es decir que es distinta de cero sólo en un intervalo pequeño en torno a $\omega - \omega_0 = 0$ y de grueso $q = \sqrt{q} = (\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$, se puede aproximar la Ec. (5.6) desarrollando $H_y(z, \omega_0)$ en serie de Taylor en torno a $\omega = \omega_0$. Si se toma la transformada inversa de Fourier de (5.6) así como la aproximación antes mencionada se obtiene

$$H_y^{(0)}(x, y, t) = \sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n H_y}{d\omega^n} \frac{1}{2\pi} f(\omega - \omega_0)^n \bar{A}(\omega - \omega_0, z) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0) \times e^{ik(\omega_0)x - i(\omega_0)t} + c.c. \quad (5.7)$$

Finalmente, empleando la siguiente identidad

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n A(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int (\omega - \omega_0)^n \bar{A}(\omega - \omega_0, z) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

se puede escribir la expresión (5.7) de forma compacta como

$$H_y^{(0)}(x, z, t) = e^{ik(\omega_0)x - i(\omega_0)t} H_y \left(z, \omega_0 + i \frac{\partial}{\partial T} \right) A(X, T) + c.c. \quad (5.9)$$

en donde $A(X, T)$ es la transformada de Fourier de la distribución espectral de frecuencia y es una función que depende suavemente de sus variables $X = qx$ y $T = qt$. Esto implica que en el espacio de configuración, la amplitud del campo varía lentamente tanto con x como con t .

Nótese que en la definición de este paquete de ondas se ha incluido a $H_y(z, \omega_0)$ que es la amplitud del modo lineal TM que se calculó explícitamente en el capítulo III y que se mostró, a través de la distribución espacial de la densidad de energía electromagnética, que presentaba el efecto de guía de onda. Esto implica, que por construcción, el paquete dado por la Ec. (5.9) presenta también el efecto de guía de onda.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

El paquete de modos representado por la Ec.(5.9) tendrá correcciones de órdenes superiores en q que provienen de los subsiguientes armónicos inducidos, los cuales representaremos por $H_y^{(1)}$, $H_y^{(2)}$, etc. De esta manera, la expresión más general para el campo H_y está dada por

$$H_y = q H_y^{(0)} + q^2 H_y^{(1)} + q^3 H_y^{(2)} + \dots, \quad (5.10)$$

en donde $H_y^{(0)}$ está dado por la Ec.(1.5b). Es importante recordar que cada una de estas componentes $H_y^{(0)}$, $H_y^{(1)}$, $H_y^{(2)}$, ..., se expresan en términos de los modos lineales de la guía por lo que H_y presentará también el efecto de guía de onda.

En consistencia con el desarrollo anterior, se debe desarrollar el operador $L(d/d\xi, ik, ip)$ respecto de sus dos últimos argumentos y en torno a $\omega = \omega_0$, $k = k_0$, de la misma forma en que se desarrolló $H_y(z, \omega_0)$. De esta manera la Ec.(5.2) se puede expresar en forma simbólica como

$$\begin{aligned} & L\left(\frac{d}{d\xi}, ik_0 + q \frac{\partial}{\partial X_1} + q^2 \frac{\partial}{\partial X_2}, i\omega_0 + q \frac{\partial}{\partial T}\right) q \\ & e^{ik(\omega_0)x - i\omega_0 t} H_y^{(0)} \left\{ z, \omega_0 + iq \frac{\partial}{\partial T} \right\} A(X, T) + q^2 H_y^{(1)} + q^3 H_y^{(2)} + \dots \\ & = q^3 F H_y^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

en donde $X_2 = q X_1 = q^2 X$ y $T = q t$. Aquí se ha empleado el desarrollo de H_y dado por la Ec.(5.10); asimismo, se ha indicado adicionalmente que las derivadas respecto a las variables x y t se calculan utilizando el método de múltiples escalas [62], el cual es válido cuando la función a desarrollar depende de forma lenta con sus variables. Cada una de las múltiples escalas de tiempo, en esta técnica, representan a los distintos periodos de tiempo asociados a cada uno de los múltiplos de ω_0 .

Efectuando los desarrollos en serie indicados en la Ec.(5.11) y agrupando los términos del mismo orden en q , se obtiene a órdenes consecutivos en q las siguientes ecuaciones

$$q: L(d/d\zeta, ik_0, ip_0) H_y^{(0)}(\zeta, \omega_0) = 0, \quad (5.12a)$$

$$q^2: \left[L_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} + L_3 \frac{\partial A}{\partial T} \right] H_y^{(0)} + iL \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial T} = -L H_y^{(1)}, \quad (5.12b)$$

$$q^3: \left[L_2 \frac{\partial A}{\partial X_2} + (1/2)L_{22} \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} + (1/2)L_{33} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + L_{23} \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1 \partial T} \right] H_y^{(0)} + \left[L_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} + L_3 \frac{\partial A}{\partial T} \right] \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial T} - (1/2)L \frac{\partial^2 H_y^{(0)}}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = L H_y^{(2)} + \theta^{(1)}(H_y^{(0)}) \hat{O} H_y^{(0)} A^3, \quad (5.12c)$$

en donde el operador \hat{O} está dado por

$$\hat{O} = \{1pk_1(c \cos 2\pi\zeta + c/2) \frac{d}{d\zeta} - (k_1)^2 p^2 c \text{ sen } 2\pi\zeta\}. \quad (5.13)$$

En las ecuaciones (5.12) los subíndices 2 y 3 indican las derivadas parciales del operador L respecto a sus segundo y tercer argumento; dichas derivadas deben ser evaluadas en $\omega = \omega_0$ y $k = k_0$. La ecuación (5.12a) muestra la consistencia del tratamiento a orden q con el tratamiento a orden cero. Por otro lado, la Ec.(5.12b) se puede simplificar si se emplea la siguiente identidad

$$L \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} - iL_2 H_y^{(0)} + i \frac{dk}{d\omega} L_3 H_y^{(0)} = 0, \quad (5.14)$$

la cual se puede deducir derivando la expresión $LH_y^{(0)} = 0$ con respecto a ω . Sustituyendo la Ec.(5.14) en la Ec.(5.12b) se obtiene

$$L H_y^{(1)} = -L_2 H_y^{(0)} \left(\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{dk}{d\omega} \frac{\partial A}{\partial T} \right) H_y^{(0)}. \quad (5.15)$$

Para asegurar que la Ec.(5.15), que es una ecuación inhomogénea, tenga una solución $H_y^{(1)}$, es necesario pedir que satisfaga la condición alternativa de Fredholm [63]. Las hipótesis que requiere dicha condición para aplicarse son, por una parte que el operador L sea un operador singular, es decir, que exista una función $H_y^{(0)}$ tal que $LH_y^{(0)} = 0$ y por otra, que la solución $|H_y^{(1)}| \rightarrow 0$ conforme $|x| \rightarrow \infty$. Esto es, la condición alternativa de Fredholm exige que el miembro inhomogéneo G de la Ec.(5.15) sea ortogonal a la solución $H_y^{(0)}$ de la ecuación homogénea asociada. Esto es

$$\langle G, H_y^{(0)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz G(z) H_y^{(0)}(z) = 0. \quad (5.16)$$

La condición (5.16) para el caso particular de la Ec.(5.15) toma la forma

$$\langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \left(\frac{\partial A}{\partial K} + \frac{dk}{d\omega} \frac{\partial A}{\partial T} \right) = 0. \quad (5.17)$$

Ahora bien, calculando L_2 a partir de la ecuación (5.1) y haciendo uso de las Ecs.(1.6), se obtiene

$$\langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle = -2(k_0^1)^2 \int_{-1/2}^{1/2} E_z^{(0)} \cdot H_y^{(0)} dz = S_x, \quad (5.18)$$

en donde S_x es la componente del vector de Poynting a lo largo del eje de la celda. Es fácil mostrar que S_x es distinto de cero aún en el caso en el que $p = 0$, lo cual permite afirmar que la única forma para satisfacer la condición (5.17) es pidiendo que

$$\frac{\partial A}{\partial K} + \frac{dk}{d\omega} \frac{\partial A}{\partial T} = 0. \quad (5.19)$$

Finalmente la Ec.(5.12c) se puede simplificar empleando la condición (5.22) Junto con la siguiente identidad H_y

$$L \frac{\partial^2 H_y^{(0)}}{\partial \omega^2} = -2l \frac{dk}{d\omega} L_2 \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} + 2ll_3 \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial \omega} - l \frac{d^2 k}{d\omega^2} L_2 H_y^{(0)} + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^2 L_{22} H_y^{(0)}$$

$$- 2 \frac{dk}{d\omega} L_{23} H_y^{(0)} + L_{33} H_y^{(0)} \quad (5.20)$$

la cual resulta de derivar la ecuación (5.14) respecto ω . De esta manera la Ec. (5.15c) se transforma en

$$L H_y^{(2)} = - L_2 H_y^{(0)} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 k}{d\omega^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T^2} \right) - 3 \frac{\omega_0^2}{c^2} \theta_n^{(1)} (H_y^{(0)}) \delta H_y^{(0)} \Lambda^2 \Lambda^* \quad (5.21)$$

Esta ecuación es una ecuación inhomogénea para $H_y^{(2)}$, al igual que la ecuación (5.15). Para garantizar que tenga solución, se exige nuevamente que satisfaga la condición alternativa de Fredholm dada por la Ec. (5.16). Dicha condición para el caso de la Ec. (5.21) toma la forma

$$\begin{aligned} \langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \frac{\partial \Lambda}{\partial X} + \frac{1}{2} \langle L_2 H_y^{(0)} \frac{d^2 k}{d\omega^2} H_y^{(0)} \rangle \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial T^2} \\ - \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{c^2} \langle \theta_n^{(1)} (H_y^{(0)}) \delta H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \Lambda^2 \Lambda^* = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Puede sustituirse la variable X_2 por X y T a través de la expresión aproximada $q\partial\Lambda/\partial X_2 = \partial\Lambda/\partial X + dk/d\omega \partial\Lambda/\partial T$; asimismo, efectuando el cambio de variables definido por $\tau = q(t - dk/d\omega x)$, $\chi = qX$, la Ec. (5.22) se transforma en

$$\begin{aligned} \langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \frac{\partial \Lambda}{\partial \chi} + \frac{1}{2} \langle L_2 H_y^{(0)} \frac{d^2 k}{d\omega^2} H_y^{(0)} \rangle \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau^2} \\ - \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{c^2} \langle \theta_n^{(1)} (H_y^{(0)}) \delta H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \Lambda^2 \Lambda^* = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

que es la Ecuación de Schrödinger no lineal para la envolvente de un tren de ondas de ancho y amplitud q que se propaga por una celda cuyo núcleo es un

cristal líquido nemático. La relevancia de este resultado radica en que desde hace dos décadas se sugirió que las soluciones tipo solitón de la ESNL es la unidad "bit" ideal para transmitir información digitalmente en fibras ópticas [65]. Su primera ventaja es que el autoenfocamiento no lineal puede equilibrarse con la dispersión, que muchas veces limita el uso de pulsos cortos en el régimen lineal. Una segunda ventaja es que la ESNL es una ecuación integrable exactamente. Por lo tanto, no solo describe pulsos robustos y solitarios sino que además estos pulsos son solitones y tienen la característica de que para pulsos con distintas frecuencias portadoras se tienen distintas velocidades de propagación, por lo que se atrevisan uno a el otro sin distorsión. En consecuencia, se podrían enviar varios trenes de solitones que representarían bits de información a lo largo de una sola guía. Cada tren contendría solitones moviéndose a velocidades ligeramente distintas, por lo que la guía transmitiría en varios canales de información simultáneamente.

Es importante resaltar que para obtener la ecuación (5.23) tan sólo se ha supuesto que $H_y^{(0)}$ satisface la Ec.(5.12a), por lo que el formalismo es consistente para cualquier orden de modo TM tanto en los regímenes fuerte y débil. Mas aún esta ecuación es válida, aunque a nivel formal, en presencia de flujo hidrodinámico externo como el considerado en el capítulo anterior, solo se debe sustituir el valor de $H_y^{(0)}$ en ausencia de flujo por su valor en presencia de éste.

En la siguiente sección se calcula la forma cómo dependen los parámetros de estos solitones con las propiedades materiales del nemático y con el parámetro de propagación de la guía, cuando el nemático está en reposo.

V.3 ESNL para una guía de onda nemática

El cálculo de los primeros coeficientes de la Ec.(5.23) es inmediato. En efecto, sustituyendo las ecuaciones (3.16) y (B.1)-(B.2) en la Ec.(5.23) se obtiene

$$\langle L_2 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle = \int_0^{1/2} d\zeta / c_{zz}^0 = 1 / (2\sqrt{c_{\parallel} c_{\perp}}) \quad (5.24a)$$

y

$$\langle L_2 H_y^{(0)} \frac{d^2 k}{d\omega^2} H_y^{(0)} \rangle = \frac{\sigma^2 k_{\parallel}^2 \epsilon_{\parallel}^0}{d\omega^2} \int_0^{1/2} d\zeta / \epsilon_{zz}^0 (\epsilon_{xx}^0)^{1/2} =$$

$$\frac{\sigma^2 k_{\parallel}^2 \epsilon_{\parallel}^0}{d\omega^2} \Pi(-c_{\parallel} / c_{\perp}, c_{\parallel} / c_{\parallel}) / \sqrt{\epsilon_{\parallel}^0}. \quad (5.24b)$$

Por otro lado, para calcular el tercer término se requiere conocer tanto $\theta_{\parallel}^{(1)}(H_y^{(0)})$ como $\theta_{\perp} H_y^{(0)}$, pero este último ya se calculó en el apéndice C. Luego, para calcular $\theta_{\parallel} H_y^{(0)}$, se aplica θ definido en la Ec. (5.16), al campo $H_y^{(0)}$ dado por la Ec. (3.16), de donde se obtiene n_2 , el coeficiente del término no lineal de la Ec. (5.23).

$$n_2 = (c_{\perp}^2 / K) \langle \theta_{\parallel}^{(1)}(H_y^{(0)}) \theta_{\perp} H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle = - \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta' (1/c_{zz}^0) \theta_{\parallel}^{(1)}(H_y^{(0)})$$

$$\left\{ (k_1)^2 (c \cos 2\pi\zeta + c_{\parallel} / 2) \left[1/p \sqrt{\epsilon_{\parallel}^0} \sqrt{c_{zz}^0 - p^2} \sin[2k_1 \zeta] \int_{-1/2}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] + \right.$$

$$p^2 (c_{xz}^0 / c_{zz}^0) \cos^2[2k_1 \zeta] \int_{-1/2}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \left. \right] \sqrt{c_{zz}^0 - p^2} -$$

$$c(pk_1)^2 \sin[2\pi\zeta] \cos^2[2k_1 \zeta] \int_{-1/2}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \sqrt{c_{zz}^0 - p^2} \left. \right\}. \quad (5.25)$$

Nótese que el parámetro k_0 sólo aparece en los argumentos de $\cos^2[k_0 \zeta]$ $\int_{-1/2}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta', k_0)$ y $\sin[2k_0 \zeta] \int_{-1/2}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta', k_0)$. Por lo tanto, empleando identidades trigonométricas elementales, se pueden escribir los dos últimos términos de la Ec. (5.25) como

$$\int_{-1/2}^{1/2} d\zeta' g(\zeta') \cos^2[k_0 \zeta] \int_{-1/2}^{\zeta} d\sigma f(\sigma, k_0) = 1/2 \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta' g(\zeta') \right.$$

$$\left. + \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta' g(\zeta') \cos[2k_0 \zeta] \int_{-1/2}^{\zeta} d\sigma f(\sigma, k_0) \right\}, \quad (5.26)$$

en donde $g(\zeta)$ es una función independiente de k_0 . Puesto que en el límite WKB $k_0 > 1$, entonces $\cos[2k_0 \zeta] \int_{-1/2}^{\zeta} d\sigma f(\sigma, k_0)$ es una función que oscila

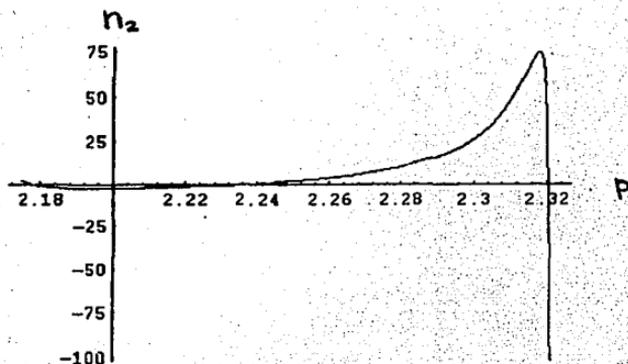


Fig. 20. Índice de refracción no lineal n_2 como función de la constante de propagación p para el régimen fuerte en MBBA.

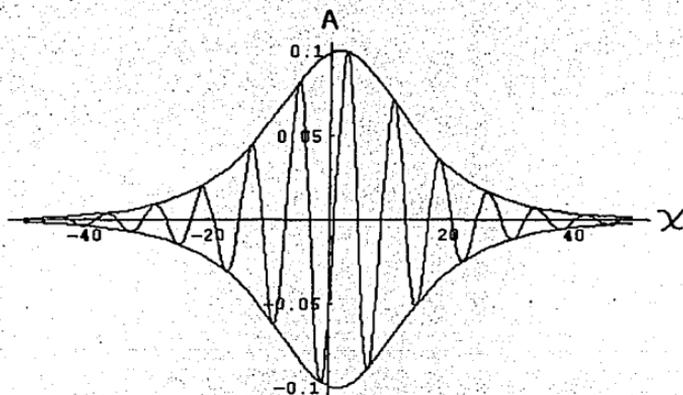


Fig. 19. Perfil de un solitón descrito por la ecuación de Schrödinger No lineal. Se muestra tanto la envolvente del solitón como la parte real de éste.

rápidamente con su argumento, de donde los dos últimos términos del miembro derecho de la Ec. (5.28) se puede aproximar como

$$\int_{-1/2}^{1/2} d\zeta' g(\zeta') \cos[2k_0 l \int_{-1/2}^{\zeta'} d\sigma f(\sigma, k_0)] \approx g(\zeta_0) \sin[2k_0 l \int_{-1/2}^{1/2} d\sigma f(\sigma, k_0)] / (k_0 l f(\eta, k_0)) \quad (5.27)$$

en donde $g(\zeta_0)$ es el valor medio de $g(\zeta)$ entre $-1/2$ y $1/2$. Entonces, a orden dominante en $1/k_0 l$ se puede aproximar la Ec. (5.26) por su primer término solamente. Aplicando el mismo análisis a todos los términos de la Ec. (5.25), dicha ecuación puede aproximarse como

$$\langle \theta_n^{(1)}(H_y^{(0)}) \delta H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle = (1/2)(pk_0 l)^2 e_{\eta} e_{\zeta} \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta \left((1/c_{zz}^0)^2 \sqrt{c_{zz}^0 - p^2} \right) \theta_n^{(1)}(H_y^{(0)}) \sin 2\pi\zeta \quad (5.28)$$

Esta expresión se puede calcular también analíticamente en términos de integrales elípticas completas de primera, segunda y tercera clase; su forma explícita se da en el apéndice G.

Por otro lado, como es bien conocido [64], La solución tipo solitón de la ESNL, Ec. (5.23), está dada por

$$A(\tau, \zeta) = 2 \eta \operatorname{sech}(\tau/t_0) e^{i(\zeta/x_0 - \tau/k\lambda)} \quad (5.29)$$

en donde

$$t_0 = (1/2\eta) \left[\langle L_2 H_y^{(0)} \frac{d^2 k}{d\omega^2} H_y^{(0)} \rangle / n \langle \theta_n^{(1)}(H_y^{(0)}) \delta H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle \right]^{1/2} \quad (5.30a)$$

y

$$x_0 = (1/2\eta^2) \langle (1/n \langle \theta_n^{(1)}(H_y^{(0)}) \delta H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle) \rangle \quad (5.30b)$$

Aquí η es la amplitud del paquete y n es el índice de refracción del medio. Note que t_0 proporciona el tiempo necesario para que la envolvente del

paquete de ondas, que se desplaza a la velocidad de grupo $dk/d\omega$ del nemático y cuyo perfil es una secante hiperbólica, atraviese un punto fijo en la celda. Asimismo, x_0 proporciona la diferencia entre la longitud de onda de la fase de $\Lambda(\tau, z)$ y el largo de la envolvente del paquete de ondas. En la Fig.19 se muestra el perfil descrito por la Ec.(5.29) para algunos valores de t_0 y z_0 . En dicha gráfica se muestra tanto la parte real de la Ec.(5.29) como la envolvente de la misma.

Nótese que tanto t_0 como x_0 dependen de p como se puede ver de la Ecs.(5.30), el cual a su vez depende de la dirección de incidencia media del paquete. En la Fig.20 se muestra el coeficiente no lineal n_2 dado por la Ec.(5.28) como función del parámetro de propagación p de los modos TM en el régimen fuerte. En dicha gráfica se observa que dicho coeficiente es negativo y pequeño para valores de p cercanos a $\sqrt{c_{||}}$, se anula en $p = 2.23$ y crece rápidamente para valores mayores de p hasta que toma su máximo en $p = 2.3175$ a partir de donde vuelve a decrecer. Es importante señalar que en la región en donde n_2 es positiva se pueden generar solitones "brillantes", es decir para los cuales la intensidad de energía electromagnética se concentra; mientras que en las regiones con n_2 negativo se pueden generar solitones "oscuros" para los cuales el haz óptico se desenfoca y la energía densidad electromagnética disminuye [66]. El punto importante a destacar es que n_2 toma sus valores positivos más grandes para valores de p cercanos a $\sqrt{c_{||}}$, es decir para aquellos trenes de ondas cuya dirección de incidencia esté cercana al eje de la celda; por lo que en dicha región los pulsos cortos, t_0 pequeño, generarán solitones brillantes.

Una cantidad importante a estimar de estos solitones es la potencia que ellos transportan o bien la potencia que se debe suministrar a un pulso óptico para generar un solitón [66]

$$P = 4 c A \lambda \frac{\partial^2 k \sqrt{c_{||}} \epsilon_1}{d\omega^2} / (2\pi n_2 t_0^2). \quad (5.31)$$

Sustituyendo valores específicos correspondientes a un haz laser con $\lambda = 1.27 \mu\text{m}$ con pulsado típico de $t_0 = 10^{-9}$ s que se propaga por una celda de area transversal $A = 20 \mu\text{m}^2$, cuyo núcleo es el nemático MBBA [66], ésto es el coeficiente $n_2 = (\epsilon_a^{-1} / K) \langle \sigma_y^{(1)} (H_y^{(0)}) \rangle \text{O} \langle H_y^{(0)} (H_y^{(0)}) \rangle = (.4783)(20\mu\text{m}^2) / 3.3 \cdot 10^{-12}$

N)(75) a 22°C y la segunda derivada de la relación de dispersión [67] para esta longitud de onda es $\lambda d^2k\sqrt{\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}}/d\omega^2 = 6.38926 \text{ s}^2$; de donde se obtiene el valor $P = 10^{-4}$ Watts. Como es bien conocido este valor es del orden de magnitud de los láseres menos intensos.

En este capítulo se mostró que a primer orden en q , o a tercer orden en la amplitud de las componentes de los modos TM, la envolvente de un paquete de ondas angosto que se propaga por la celda nemática, está gobernada por la ESNL, la cual admite soluciones tipo solitón. Se calculó también la dependencia de los parámetros t_0 y x_0 del solitón con el parámetro p de propagación de la guía y se mostró que toman sus valores mínimos para una dirección de incidencia muy cercana al eje de la guía.

El hecho de que para la primera corrección no lineal en la dinámica de los modos TM, se pueda construir una ESNL para la envolvente de un paquete de ondas angosto implica que la celda nemática no solo presenta el efecto de guía de onda discutido en los capítulos anteriores, sino que además la no linealidad es capaz de compensar la dispersión para permitir propagar pulsos de manera estable. Esto se puede ver de manera más clara en la Ec.(5.5) en donde se muestra que, por construcción, la dependencia transversal espacial (dirección z) es la misma que la de un modo TM lineal, sólo que ahora no es una onda plana extendida a lo largo de toda la guía sino que la mayor parte de la radiación está localizada en una región que se desplaza según indica la Ec.(5.29).

Apéndice G

En este apéndice se indicará la forma en que se calculó la integral dada en la Ec.(5.31). Para ello nótese que la función que multiplica a $\theta_n^{(1)}(H_y^{(0)})$ en el integrando de la Ec.(3.28) se puede calcular analíticamente en términos de funciones elementales, ésto es

$$g(\zeta) = \int^{\zeta} d\zeta' (1/\epsilon_{zz}^0)^2 \sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2} \sin 2\pi\zeta' = (1/p^2 \pi \epsilon_n) \sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2} / \epsilon_{zz}^0 + (2/p_n^3 \pi \epsilon_n) \tan^{-1}[\sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2} / p]. \quad (G.1)$$

El cálculo se limitará al intervalo de p denominado régimen fuerte en el capítulo 2 y que está definido por $\epsilon_{\perp} < p^2 < \epsilon_{\parallel}$. Esto debido a que solo en este intervalo se puede asegurar que el efecto de guía de onda persiste. Es fácil mostrar que en dicho intervalo $\sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2} / p < 1$, por lo cual se puede desarrollar la $\tan^{-1}(x)$ como una serie de potencias de este argumento. Esto conduce a la siguiente expresión para $g(\zeta)$

$$g(\zeta) \approx (1/p^2 \pi \epsilon_n) \sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2} / \epsilon_{zz}^0 + (2/p_n^3 \pi \epsilon_n) \sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2} - (2/3p^3 \pi \epsilon_n) (\sqrt{\epsilon_{zz}^0 - p^2} / p)^3. \quad (G.2)$$

En consecuencia, la integral (5.31) se puede integrar por partes para conducir a la expresión

$$\langle \theta_n^{(1)}(H_y^{(0)}) | \theta_n^{(0)}(H_y^{(0)}) \rangle = (1/2) (pk_1)^2 \epsilon_{\parallel} \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta g(\zeta) d\theta_n^{(1)}(H_y^{(0)}) / d\zeta. \quad (G.3)$$

La ventaja de transformar la Ec.(5.31) en la Ec.(G.3) es que $d\theta_n^{(1)}(H_y^{(0)}) / d\zeta$ se expresa sólo en términos de funciones elementales como se puede verificar directamente derivando la Ec.(C.6) que está dada en términos de las definiciones (C.1)-(C.5). Mas aún, la integral (G.3) se puede calcular analíticamente expresándola en términos de las funciones definidas en las

Ecs. (C.1)-(C.5) así como de las funciones definidas a continuación [67]

$$K_{1/4}(\alpha, \phi) = \int_0^\phi d\theta / (1 - a \sin^2 \theta)^{1/4}, \quad (G.4)$$

$$E_{3/4}(\alpha, \phi) = \int_0^\phi d\theta (1 - a \sin^2 \theta)^{3/4}, \quad (G.5)$$

$$\Pi_{1/4}(\phi, b, w) = \int_0^\phi d\theta / [(1 - s \sin^2 \theta)(1 - b \sin^2 \theta)^{1/4}], \quad (G.6)$$

$$\Pi_{3/4}(\phi, b, w) = \int_0^\phi d\theta / [(1 - s \sin^2 \theta)(1 - b \sin^2 \theta)^{3/4}]. \quad (G.7)$$

Entonces, $\langle \theta_a^{(1)}(H_y^{(0)})_0 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle$ está dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \langle \theta_a^{(1)}(H_y^{(0)})_0 H_y^{(0)}, H_y^{(0)} \rangle = & D_t \tan^{-1} \{ [(1 - p_n^2/c_{\parallel}) / (1 - p_n^2/c_{\perp})]^{1/2} \\ & + D_c \cos^{-1} \{ (p_n^2 - c_{\perp}) / c_{\parallel} \}^{1/2} + D_r \{ (c_{\parallel} - p_n^2) (p_n^2 - c_{\perp}) \}^{1/2} \\ & + D_k K(w, \kappa_a) + D_p \Pi(b, w, \kappa_a) + D_o E(w, \kappa_a) - c_{\perp} c_{\parallel} / 4 \kappa_p^2 + p_n^2 / \kappa_a \\ & - \sin p_n / \kappa_a + D_{p1} \Pi_{1/4}(b, w, \kappa_a) + D_{k1} K_{1/4}(w, \kappa_a) + D_{o3} E_{3/4}(w, \kappa_a) \\ & + D_{o1} E_{1/4}(w, \kappa_a) + D_{k3} K_{3/4}(w, \kappa_a) + D_{p3} \Pi_{3/4}(b, w, \kappa_a), \end{aligned} \quad (G.8)$$

en donde los coeficientes $a, D_t, D_c, D_r, D_k, D_p, D_o, D_{p1}, D_{k1}, D_{o3}, D_{o1}, D_{k3}$ y D_{p3} están dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} D_t = & -C_k (c_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / (\pi^2 p_n^2 c_{\parallel} \sqrt{c_{\parallel} c_{\perp}}) + C_o / \pi^2 c_{\parallel} (c_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} + \\ & 2c_{\perp} C_t (c_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / (\pi^2 p_n^2 c_{\parallel} c_{\perp} (\sqrt{c_{\parallel} c_{\perp}})^3) + 32c / 5 \pi \sqrt{c_{\parallel} c_{\perp}} + 4c / \sqrt{c_{\parallel} c_{\perp}} + \\ & 2c c_{\parallel} / (\sqrt{c_{\parallel} c_{\perp}})^3 - 8c / c_{\parallel} - 2 / (\pi^2 p_n^4 c_{\parallel}) - (p_n / 2c_{\perp} c_{\parallel})^{1/2} (1/6c_{\parallel}), \end{aligned} \quad (G.9)$$

$$D_o = -2C_k (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / (\pi^2 p_n^4 e_{\perp}) - C_o / (\pi^2 p_n^4 (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} e_{\perp}) - 8/\pi e_{\perp} \quad (G.10)$$

$$D_r = C_o / (\pi^2 p_n^2 (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} e_{\perp}^2) - 2C_l (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / (\pi^2 p_n^4 e_{\perp} (\sqrt{e_{\perp} e_{\perp}})^2) - \\ - 8e_{\perp} / 5\pi^2 p_n^2 - C_{\perp} e_{\perp} / (4e_{\perp} e_{\parallel} p_n^2) + 2\sqrt{2}(e_{\perp} - p_n^2) / 3\pi e_{\perp} p_n^{11/2} + \\ \sqrt{2}e_{\perp} / 12\pi^2 p_n^{7/2} + 14\sqrt{2}/e_{\perp} p_n^{7/2} \quad (G.11)$$

$$D_k = ((e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / 2\pi^2 e_{\perp}^2) \{1 + (e_{\perp} / e_{\parallel})^2 \{ (e_{\parallel} - p_n^2) / 3e_{\perp} - (2/3) \} \{ (e_{\parallel} - p_n^2) / e_{\perp} \}^2 \\ - 2(e_{\parallel} - p_n^2) / e_{\perp} + 1\} - 2C_l (e_{\parallel} - p_n^2) (p_n^2 - e_{\perp}) / \pi e_{\perp} p_n \quad (G.12)$$

$$D_p = (1/2\pi^2 e_{\perp}) (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} (1 - 2e_{\perp} / e_{\parallel}) + 7e_{\perp} / e_{\parallel} + C_p \quad (G.13)$$

$$D_o = (1/3\pi^2 e_{\perp} (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2}) (e_{\perp} / e_{\parallel})^2 \{ (e_{\perp} / e_{\parallel}) (e_{\perp} - p_n^2) / (e_{\parallel} - p_n^2) - 3\} + C_o + \\ 2C_l (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / \pi p_n e_{\perp} - 4C_l (e_{\parallel} - p_n^2)^2 [2 - e_{\perp} / (e_{\parallel} - p_n^2)] (1 / (9\pi^2 p_n^4 e_{\perp})) \quad (G.14)$$

$$D_{pl} = C_{k3} (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / (\pi p_n^2 e_{\perp}^2) - C_{o3} / (\pi e_{\perp} e_{\parallel} (e_{\parallel} - p_n^2)^{1/2}) + \\ (2 / (e_{\parallel} - p_n^2)^2) \{1 + p_n^2 / (e_{\parallel} - p_n^2)\} - e (e_{\parallel} - p_n^2)^{3/4} / (p e_{\perp}^2) + \\ e_{\perp}^2 p_n^4 / (e_{\parallel} (e_{\parallel} - p_n^2))^2 + (3/4) (e_{\perp} / e_{\parallel})^2 (p_n^2 - e_{\perp}) / (e_{\parallel} - p_n^2)^2 \quad (G.15)$$

$$D_{k1} = C_{k3} (e_{\parallel} - p_n^2) / (\pi e_{\perp} p_n^4) + C_{o3} / (p_n^2 (e_{\parallel} - p_n^2) \pi e_{\perp}) + (4(e_{\parallel} - p_n^2)^{7/4} / 31\pi e_{\perp}^2) \\ \times \{ (e_{\parallel} / (e_{\parallel} - p_n^2))^2 + p_n^2 e_{\perp}^2 (e_{\perp} - 2p_n^2) (e_{\perp} - e_{\perp}) / [3e_{\parallel} (p_n^2 - e_{\perp}) (e_{\parallel} - p_n^2)^3] + \\ p_n^2 e_{\perp}^3 (e_{\parallel} - 2p_n^2) / (7(e_{\parallel} - p_n^2)^4) + (e_{\perp} / e_{\parallel})^2 p_n^4 / (e_{\parallel} - p_n^2)^2 +$$

$$(3/4) (\epsilon_a / \epsilon_{\parallel})^2 (p_n^2 - \epsilon_1) / (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^2 - \epsilon(\epsilon - p_n^2) / (2\epsilon_a^2 p_n^2 (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^{1/4}) \quad (G.16)$$

$$D_{\sigma 3} = -(2/3) C_{k3} (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^2 / (\pi \epsilon_a p_n^6) + C_{\sigma 3} (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / (\pi \epsilon_a p_n^5) +$$

$$5\epsilon_a^2 p_n^2 (\epsilon_{\parallel} - 2p_n^2) (\epsilon_1 - \epsilon_a) / (\epsilon_{\parallel} (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^4) + 2(\epsilon_a / \epsilon_{\parallel}) p_n^2 / (\epsilon_{\parallel} - p_n^2) +$$

$$(3/7) (\epsilon_a / \epsilon_{\parallel})^2 (2 - \epsilon_a / (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)) + (10/3) \epsilon(\epsilon - p_n^2) (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^{1/4} / (\epsilon_a p_n^2)^2$$

$$- (2/3) \epsilon(\epsilon - p_n^2)^{3/4} / \epsilon_a p_n \quad (G.17)$$

$$D_{\sigma 1} = (10/3) \epsilon(\epsilon - p_n^2) (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / (\pi \epsilon_a^2 p_n^3) - 4(\epsilon / \epsilon_a)^2 (\epsilon - p_n^2) / p_n^{15/4} +$$

$$C_{\sigma 3} + 2\epsilon \sqrt{p_n} (\epsilon - p_n^2) (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^{1/2} / \epsilon_a + 2(\epsilon / \epsilon_a) (\epsilon - p_n^2) (\epsilon_{\parallel} - p_n^2) \quad (G.18)$$

$$D_{k3} = 10\sqrt{2} / (3\epsilon_a \pi p_n^{3/2} (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^{3/4}) + C_{k3} \quad (G.19)$$

y

$$D_{p3} = 10\sqrt{2} / 3\epsilon_a \pi p_n^{3/2} (\epsilon_{\parallel} - p_n^2)^{3/4} \quad (G.20)$$

CAPITULO VI

SOLITONES ORIENTACIONALES EN CRISTALES LIQUIDOS NEMATICOS

En los capítulos anteriores se estudió un modelo que consiste de una celda con núcleo líquido cristalino, con fronteras perfectamente conductoras y un estado inicialmente distorsionado con condiciones de frontera planares. Asimismo en el capítulo V se mostró que se pueden propagar solitones en el campo óptico dentro de la celda nemática. En este capítulo, a diferencia del anterior se considerará el régimen lineal del campo electromagnético manteniendo el límite óptico y se describirá la dinámica no lineal de la reorientación del campo director del nemático. A diferencia de los capítulos anteriores se modificará el modelo para considerar una configuración orientacional inicialmente homogénea. Esto con el objeto de obtener una ecuación dinámica para la reorientación con coeficientes espacialmente homogéneos. A partir de esta dinámica se mostrará que pueden existir solitones orientacionales en la celda.

V.1. Régimen lineal y óptico del campo

En esta sección se retomará la dinámica lineal en el límite óptico de los modos TM analizada en los capítulos anteriores para generalizarla al caso en el que $\theta(z,t)$ depende también de x . Esta extensión es pertinente debido a que en este capítulo se describirá la propagación de una perturbación longitudinal que se desplazará a lo largo de la guía.

De la ecuación de la eikonal (2.3b) se puede observar que la función característica $W(\zeta, \chi)$ depende del ángulo de reorientación θ a través de c_{xx} , c_{xz} , c_{zz} y éste, a su vez, depende de χ y ζ . Para encontrar la solución formal de la Ec.(2.3b) se diagonaliza el miembro izquierdo de ésta por medio del procedimiento usual que consiste en calcular sus eigenvalores y eigenvectores. Esto permite escribir las derivadas parciales de W como

$$\partial W / \partial \chi = p'_x \cos \theta - p'_z \sin \theta, \quad (6.1a)$$

$$\partial W / \partial \zeta = p'_x \sin \theta + p'_z \cos \theta, \quad (6.1b)$$

en donde p'_x y p'_y satisfacen la condición

$$(p'_x)^2 / c_{\parallel}^2 + (p'_z)^2 / c_{\perp}^2 = 1, \quad (6.2)$$

y se determinan a partir de las condiciones a la frontera para el campo dadas en la sección 1.1.2.

Las ecuaciones (6.1) muestran claramente cómo el nemático dobla al rayo por un ángulo θ cuando se propaga a través de la celda. La solución explícita del sistema de ecuaciones (6.1) no es inmediata porque el valor de $\theta(\xi, \chi)$ sólo se conoce a través de una ecuación diferencial parcial, como veremos en la siguiente sección. Sin embargo las Ecs.(6.1) permiten calcular directamente cantidades como el cociente entre las componentes del campo eléctrico que se emplearán en la siguiente sección para expresar en forma cerrada la ecuación para θ . De hecho, este cociente se determina directamente sustituyendo las Ecs.(2.2) en las ecuaciones (1.2a) y conduce a la siguiente expresión

$$E_x = -2 E_x [c_{xx} c_{zz} - 2 p'_x p'_z \sin 2\theta + \{(p'_x)^2 - (p'_z)^2\} \cos 2\theta] \\ \left[2c_{\parallel} - \{(p'_x)^2 + (p'_z)^2\} + \{c_{\perp} + (p'_x)^2 - (p'_z)^2\} \cos 2\theta - 2 p'_x p'_z \sin 2\theta \right]^{-1}. \quad (6.3)$$

Sin embargo, aunque las Ec.(6.3) permiten conocer la relación entre E_x y E_x , será necesario conocer explícitamente alguna de estas componentes. Debido tanto a que es complicado resolver el sistema (6.1), como a que nuestro interés principal en este capítulo es describir la dinámica orientacional, se aproximará la componente E_x por el valor que esta adopta cuando el medio es isotrópico y homogéneo. En el capítulo I se mostró que para $c_{\perp} = 0$, la componente E_x que satisface las condiciones de frontera de conductor perfecto, $E_x(\zeta = \pm 1/2) = 0$, está dado por

$$E_{xm}(\xi, \chi, t) = E_{0xm}(\chi) \sin[p_z(\zeta - 1/2) \exp[ik_0 l(p_x - \omega t)]], \quad (6.4)$$

en donde $p_z = n\pi/k_0 l$ con n un entero positivo. Debido a que sobre θ supondremos anclaje fuerte con condiciones de frontera planares $\theta(\zeta = \pm 1/2) = 0$, se tiene de las Ecs. (6.1) que $p_z = p'_z$ y $p_x = p'_x$. De esta manera las constantes p'_z y p'_x que aparecen en la Ec. (6.1) quedan también determinadas.

V.2. Dinámica del campo de orientaciones

Debe señalarse que mediante las ecuaciones (6.3) y (6.4) se han expresado las componentes del campo eléctrico en términos del ángulo θ ; sin embargo, para que éste sistema de ecuaciones sea cerrado, es necesario conocer la dinámica de θ . La ecuación dinámica para el ángulo de reorientación $\theta(\zeta, x, t)$, se obtienen a partir del siguiente modelo de relajación para la variable de reorientación θ ,

$$\partial\theta/\partial t = (1/\gamma) \delta F(\theta)/\delta\theta, \quad (6.5)$$

en donde γ es una constante cuyo valor representa un tiempo típico de relajación y F es la funcional de densidad de energía libre dada por la Ec. (1.10). Sustituyendo la expresión (6.3) en la ecuación (1.11) y a su vez ésta en la Ec. (6.5), se obtiene la siguiente ecuación para θ ,

$$\begin{aligned} \gamma\partial\theta/\partial t = & K_{11} (\partial^2\theta/\partial x^2 + \partial^2\theta/\partial z^2) - (c_a |E_x(z,x)|^2/4\pi) \{ \\ & (c_a - (c_{\parallel} + c_{\perp})\cos 2\phi) \sin 4\theta + \sqrt{c_{\parallel}c_{\perp}} \sin 2\phi \cos 4\theta \} \\ & / \{ 2c_a + c_a \cos 2\phi - 2(c_{\parallel} + c_{\perp})\cos 2\phi \cos 2\theta - \sqrt{c_{\parallel}c_{\perp}} \sin 2\phi \sin 4\theta \}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

en donde

$$\phi = \arcsen(n\pi/k_0 l \sqrt{c_{\parallel}}) \quad (6.7)$$

La Ec. (6.6) es la ecuación dinámica no lineal que gobierna el proceso de

reorientación del nemático. Debido a que la dependencia de esta ecuación con θ es complicada se aproximarán los términos entre llaves de la ecuación (6.6) por un polinomio de tercer grado en θ , ésto es

$$\begin{aligned} \partial\theta/\partial\tau = & \partial^2\theta/\partial\chi^2 + \partial^2\theta/\partial\zeta^2 \\ & + (c_a E_{0za}^2 1^2 / 16\pi K_{11}) \text{sen}^2[m\pi(\zeta-1/2)] \left\{ d + a\theta + b\theta^2 + c\theta^3 \right. \\ & \left. + O(\theta^4) \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

en donde se ha identificado

$$d = (2p/c_1) [(c_1 - p^2)/(c_{\parallel} - p^2)], \quad (6.9a)$$

$$\begin{aligned} a = & 2 \left\{ 1 - (p^2/c_1) [(c_1 - p^2)/(c_{\parallel} - p^2)]^2 - \right. \\ & \left. (c_a p/c_1) [(c_1 - p^2)^{3/2}/(c_{\parallel} - p^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (6.9b)$$

$$\begin{aligned} b = & (2c_a p/c_1^2) [(c_1 - p^2)/(c_{\parallel} - p^2)] \left\{ 2p[(c_1 - p^2)^{3/2}/(c_{\parallel} - p^2)] + \right. \\ & \left. p^2/(c_1 - p^2) + c_1/(c_{\parallel} - p^2) \right\}, \end{aligned} \quad (6.9c)$$

$$\begin{aligned} c = & -(2/3) \left\{ 1 - (p^2/c_1) [(c_1 - p^2)/(c_{\parallel} - p^2)]^2 - \right. \\ & c_a^2/c_1 [(c_1 - p^2)^{1/2}/(c_{\parallel} - p^2)] [2/3(p^2 - c_1 - c_a/4) + p^2/c_1 + \\ & \left. (c_1 - p^2)/(c_{\parallel} - p^2) - 4(c_1 - p^2)^{3/2}] \right\}. \end{aligned} \quad (6.9d)$$

En la Ec. (6.8) se ha introducido el tiempo adimensional $\tau = K_{11} t/\gamma l^2$. Con esta aproximación se restringe el análisis a variaciones pequeñas del ángulo, pero lo suficientemente grandes como para que su ecuación dinámica siga siendo no

lineal.

Para proseguir se efectuará un desarrollo de $\theta(\zeta, \chi, \tau)$ en series de Fourier

$$\theta(\zeta, \chi, \tau) = \sum_n \text{sen} [n\pi (\zeta-1/2)] \bar{\theta}_n(\chi, \tau), \quad (6.10)$$

que se ha definido de forma que sea compatible con las condiciones de frontera de la configuración planar, las cuales están dadas por

$$\theta(\zeta \pm 1/2, \chi, \tau) = 0. \quad (6.11)$$

Sustituyendo la expresión (6.10) en la ecuación (6.8) y multiplicando la ecuación resultante por $\text{sen}[n\pi(\zeta-1/2)]$ y empleando las bien conocidas propiedades de ortogonalidad de estas funciones, se obtiene la siguiente ecuación de amplitud

$$\partial \bar{\theta}_n / \partial \tau - \partial^2 \bar{\theta}_n / \partial \chi^2 = D_n + A_{n,j}^m \bar{\theta}_j + B_{n,j}^m \bar{\theta}_j \bar{\theta}_1 + C_{n,j}^m \bar{\theta}_j \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_\alpha + O(\bar{\theta}^4), \quad (6.12)$$

en donde

$$A_{n,j}^m = \Omega_n \delta_{n,j} + a_1 (\delta_{j,n-2n} - \delta_{j,n+2n}), \quad (6.13a)$$

$$B_{n,j}^m = b_1 \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta \text{sen}^2 m\pi(\zeta-1/2) \text{sen} n\pi(\zeta-1/2) \text{sen} j\pi(\zeta-1/2) \text{sen} l\pi(\zeta-1/2)$$

$$= b_1 (1 - (-1)^{j+n+1}) \left\{ \frac{n l j}{(j-n-1)(j+n+1)(j-n+1)(j+n-1)} \right.$$

$$\left. + \frac{2n(n^2 - (j-1)^2 - 4m^2)}{((n-j+1)^2 - 4m^2)((n+j-1)^2 - 4m^2)} \right\}$$

$$\left. \frac{2n(n^2 - (j+1)^2 - 4m^2)}{((n+j+1)^2 - 4m^2)((n+j+1)^2 - 4n^2)} \right) \quad (6.13b)$$

$$C_{nj|\alpha}^m = c_1 \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta \operatorname{sen}^2 m\pi(\zeta-1/2) \operatorname{senn}\pi(\zeta-1/2) \operatorname{sen} j\pi(\zeta-1/2) \times$$

$$\operatorname{sen} l\pi(\zeta-1/2) \operatorname{sen} \alpha\pi(\zeta-1/2) = c_1 \left(\delta_{n-1, j-\alpha} - \delta_{n+1, j-\alpha} - \right.$$

$$\delta_{n-1, j+\alpha} + \delta_{n+1, j+\alpha} + 1/2(\delta_{2m, n-1+\alpha-j} + \delta_{2m, n-1+j-\alpha}$$

$$- \delta_{2m, n+1-j+\alpha} - \delta_{2m, n+1+j+\alpha} - \delta_{2m, n-1-j-\alpha} - \delta_{2m, n-1+j+\alpha}$$

$$\left. + \delta_{2m, n+1-j-\alpha} + \delta_{2m, n+1-j-\alpha} \right) \quad (6.13c)$$

y

$$D_n^m = -d_1 \delta_{n, 2m} \quad (6.13d)$$

Los coeficientes Ω_n , a_1 , b_1 , c_1 y d_1 están definidos como

$$\Omega_n = qa\gamma + (n\pi)^2, \quad (6.14a)$$

$$a_1 = qa, \quad (6.14b)$$

$$b_1 = qb, \quad (6.14c)$$

$$c_1 = qc, \quad (6.14d)$$

$$d_1 = qd. \quad (6.14e)$$

V.2.1 Régimen lineal

Antes de estudiar la dinámica no lineal y acoplada de las amplitudes $\bar{\theta}_n(\chi, \tau)$ se analizará la Ec. (6.12) en su régimen lineal, esto es se aproximará la Ec. (6.12) por

$$\frac{\partial \bar{\theta}_n(\chi, t)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n(\chi, t)}{\partial \chi^2} + A_{n,j}^m \bar{\theta}_j(\chi, t) = 0. \quad (6.15)$$

Nótese que el tensor $A_{n,j}^m$ no es diagonal y por tanto acopla distintos modos. Para diagonalizar $A_{n,j}^m$ se debe calcular sus eigenvalores. Se ilustrará el procedimiento para encontrar los eigenvalores tomando como ejemplo el valor $m = 2$. En este caso el operador (6.13) se expresa como

$$A_{n,j}^2 = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & a & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Omega_2 + a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & 0 & \Omega_3 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_4 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_5 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Los eigenvalores de esta matriz se obtienen a partir de la ecuación secular

$$\det (A_{n,j}^2 - \lambda \delta_{n,j}) = 0. \quad (6.17)$$

en donde λ es el eigenvalor a determinar. Para calcular este determinante es útil emplear la siguiente propiedad [68]. Si A y B son dos submatrices cuadradas entonces

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B, \quad (6.18)$$

en donde 0 denota a una matriz de ceros que en general no es cuadrada. Nótese que la matriz (6.16) tiene la estructura del miembro izquierdo de la ecuación

(6.18). Mas aún, el determinante de la Ec.(3.15) se puede calcular empleando (3.16), porque al restar $\lambda \delta_{n,j}$ a $A_{n,j}^2$ sólo se modifican aquellos elementos situados en la diagonal principal de $A_{n,j}^2$. Por lo tanto la Ec.(6.17) se transforma en

$$\det \begin{vmatrix} \Omega_1 & 0 & a \\ 0 & \Omega_2 + a & 0 \\ a & 0 & \Omega \end{vmatrix} \det \begin{vmatrix} \Omega_4 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & \dots \\ 0 & \Omega_5 & 0 & 0 & 0 & -a & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (6.19)$$

Finalmente, con la ayuda de la propiedad de las matrices diagonales que afirma que su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal principal, se obtiene

$$((\Omega_1 - \lambda)(\Omega_3 - \lambda) - a^2)(\Omega_2 + a - \lambda)(\Omega_4 - \lambda)(\Omega_5 - \lambda)(\Omega_6 - \lambda) \dots = 0 \quad (6.20)$$

La Ec.(6.20) muestra que cuando $m = 2$, sólo los primeros dos eigenvalores se modifican por influencia del campo. Es fácil mostrar que en general $A_{n,j}^m$ tiene la estructura requerida por (6.19) por lo que la ecuación secular se puede escribir de forma similar a la Ec.(6.20). Por esta razón la ecuación que determina los eigenvalores para m arbitraria está dada por

$$((\Omega_1 - \lambda)(\Omega_{2m-1} - \lambda) - a^2) ((\Omega_2 - \lambda)(\Omega_{2m-2} - \lambda) - a^2) \dots$$

$$(\Omega_m + a - \lambda)(\Omega_{2m+1} - \lambda)(\Omega_{2m+2} - \lambda) \dots = 0 \quad (6.21)$$

de donde sólo los primeros $2n-1$ eigenvalores se modifican por efecto del campo. Los primeros $2n-1$ eigenvalores dados por (6.21) se pueden escribir en forma genérica como:

$$\lambda_j^m = \begin{cases} (\Omega_j + \Omega_{2m-j} - \sqrt{(\Omega_{2m-j} - \Omega_j)^2 + 4a^2})/2, & j = 1, 2, \dots, m-1 \\ \Omega_m + a & j = m \\ (\Omega_j + \Omega_{2m-j} + \sqrt{(\Omega_{2m-j} - \Omega_j)^2 + 4a^2})/2, & j = m+1, \dots, 2m-1 \end{cases} \quad (6.22)$$

En términos de los eigenvalores, la soluciones de la ecuación (3.13) para los eigenvectores $\bar{\theta}_j^{mv}(x, \tau)$ están dadas por

$$\bar{\theta}_j^{mv}(x, \tau) = \theta_0 \exp[iQx - (Q^2 + \lambda_j^m)\tau] \quad (6.23)$$

en donde Q es una constante arbitraria y θ_0 es la amplitud inicial. Con el objeto de simplificar el siguiente análisis considérese por el momento $Q = 0$, nótese que conforme λ_j^m es mayor la solución dada por la Ec.(6.23) es aun más estable. De hecho derivando la Ec.(6.22) es fácil mostrar que λ_j^m toma su valor máximo justo en $j = m-1$. λ_{m-1}^m es el eigenvalor asociado al modo dominante; ya que éste decrece con el tiempo más rápido que los otros modos. Es importante señalar que si Q no es cero el análisis anterior sigue siendo válido puesto que en la Ec.(6.23) sólo se agrega un término constante al coeficiente de τ .

Para hallar los eigenvectores se sigue el procedimiento usual que consiste en sustituir cada eigenvalor en la Ec.(6.17) sin tomar el determinante, de tal forma que se obtiene un sistema de ecuaciones, a partir del cual se determina cada eigenvector hasta una constante multiplicativa. De esta manera el eigenvector asociado a cada λ_j^m se puede escribir como

$$\bar{\theta}_j^{mv}(x, \tau) = \Lambda_{j1}^m \bar{\theta}_1(x, \tau), \quad (6.24)$$

en donde

$$\Lambda_{j1}^m = \delta_{1,j} - \frac{a}{\rho_1 - \lambda_j^m} \delta_{1,2m-j}. \quad (6.25)$$

V.2.2 Régimen no lineal

Ahora se considera el problema original de resolver (3.10) en el régimen no lineal de θ . Para ello se expresa dicha ecuación en términos de los eigenvalores $\bar{\theta}_j^{mv}$ de la ecuación linealizada (3.13). Efectuando transformaciones de semejanza sobre cada uno de los tensores de la Ec.(3.10) se obtienen las siguientes ecuaciones para las amplitudes $\bar{\theta}_j^{mv}$.

$$\partial_n^{\text{mv}} / \partial \tau - \partial^2 \partial_n^{\text{mv}} / \partial x^2 = D_n' + \lambda \partial_n^{\text{mv}} + B_{njl}' \partial_j^{\text{mv}} \partial_l^{\text{mv}} + C_{njl\alpha}' \partial_j^{\text{mv}} \partial_l^{\text{mv}} \partial_\alpha^{\text{mv}}, \quad (6.26)$$

en donde

$$B_{njl}' = \Lambda_{n\mu} B_{\mu\gamma\beta}^{\text{m}} \Lambda_{\gamma j}^{-1} \Lambda_{\beta l}^{-1}, \quad (6.27a)$$

$$C_{njl\alpha}' = \Lambda_{n\mu} C_{njl\alpha}^{\text{m}} \Lambda_{\gamma j}^{-1} \Lambda_{\beta l}^{-1} \Lambda_{\alpha\gamma}^{-1}, \quad (6.27b)$$

$$D_n' = \Lambda_{n\mu} D_{\mu n}^{\text{m}}. \quad (6.27c)$$

En estas ecuaciones los superíndices $^{-1}$ denotan el inverso del tensor. Como se señaló en la sección anterior el modo ∂_1^{mv} es el modo más inestable y por tanto el modo dominante de la base de eigenvectores. Para enfatizar la diferencia entre este modo y los otros se denotará al modo más inestable por u y a los restantes por S_j [69], ésto es

$$u = \partial_1^{\text{mv}}, \quad (6.28a)$$

$$S_j = \partial_n^{\text{mv}}, j > 1. \quad (6.29b)$$

Debido a que el modo dominante u crece con el tiempo mucho más rápido que S_j , al menos en un orden de magnitud de diferencia, se puede simplificar considerablemente las ecuaciones (6.26). En efecto, en la ecuación para u los términos del tipo $s^2, u^2 s$ y s^3 son despreciables con respecto a u^3 . De esta manera, el acoplamiento con los modos estables en la ecuación para u se da a través de los términos del tipo us . De la misma manera, en la ecuación para s , los términos del tipo $us, u^3, s^3, u^2 s, us^2$ y s^3 son despreciables respecto a u^2 . Las expresiones resultantes y simplificadas de la Ec.(6.26) toman la forma

$$\partial u / \partial \tau - \partial^2 u / \partial \chi^2 = D_1' + \lambda_1^m u + B_{111}^m u^2 + C_{1111}^m u^3 + B_{111}^m u S_n, \quad (6.30a)$$

$$\partial S_n / \partial \tau - \partial^2 S_n / \partial \chi^2 = D_n' + \lambda_n^m S_n + B_{n11}^m u^2, \quad (6.30b)$$

Con el objeto desacoplar el sistema de ecuaciones (6.30) se invoca el principio de eliminación adiabática [70] basado en las escalas diferentes de tiempo determinadas por λ_1^m y λ_n^m ; esto permite tomar $\partial S_n / \partial \tau = 0$. Por otra parte, debido a que al relajar las amplitudes S_n las inhomogeneidades espaciales también desaparecen según se puede ver de la Ec. (6.23); entonces también se puede tomar $\partial^2 S_n / \partial \chi^2 = 0$. De esta manera se pueden expresar los modos S_n en términos de u a través de la Ec. (6.30b), lo cual permite escribir la siguiente ecuación para u

$$\partial u / \partial \tau - \partial^2 u / \partial \chi^2 = a_2 u + b_2 u^2 + c_2 u^3, \quad (6.31)$$

en donde

$$a_2 = \lambda_1^m + d_1 / \Omega_{2m}, \quad (6.32a)$$

$$b_2 = B_{111}^m, \quad (6.32b)$$

$$c_2 = C_{1111}^m - \sum_n B_{n11}^m B_{11n}^m / \lambda_n^m, \quad (6.32c)$$

Aquí la prima sobre la suma indica que sólo se deben incluir términos impares. La ecuación (6.31) es una ecuación del tipo δ^4 amortiguada (Naguno) y está bien establecido que tiene soluciones tipo solitón cuando el miembro derecho de la misma tenga ceros reales distintos [71]. Obsérvese que los valores de los ceros dependen del parámetro p_m , es decir, del modo TM que se propague. La ecuación (6.31) se puede escribir como

$$\partial u / \partial \tau - \partial^2 u / \partial \chi^2 = c_2 u(u-a_)(u-a_+), \quad (6.33)$$

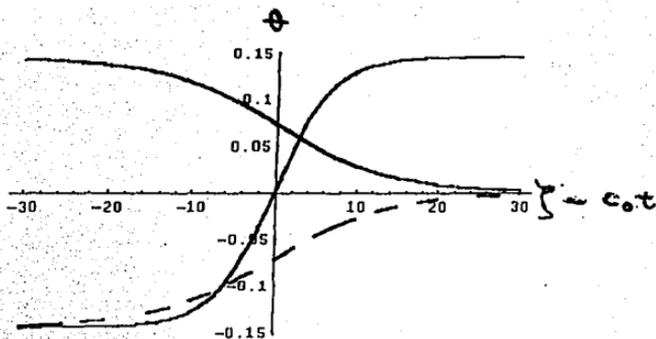


Fig.21. Se muestran los tres tipos de solitones de Nagano que se pueden propagar en la celda nemática.

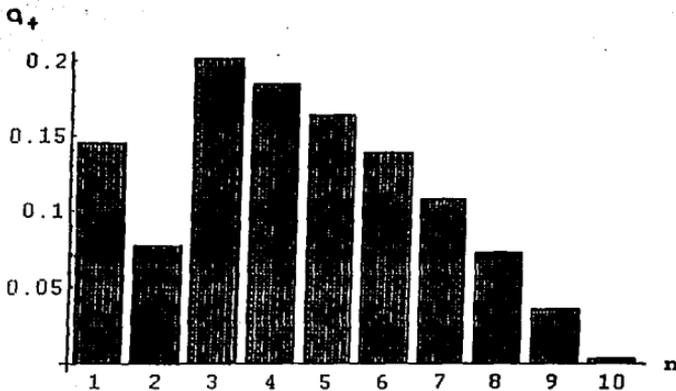


Fig.22a. Se muestra la amplitud a_n como función del número de modo TM para NBDA y $k_0 l = 20$.

en donde

$$a_{\pm} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2 c_2}}{2 c_2} \quad (6.34)$$

De esta manera la Ec.(6.33) tiene las siguientes soluciones tipo solitón:

$$\bar{\theta} = \frac{a_-}{1 + \exp[-\nu a_- (\xi + c_0 \tau - x_0)]} \quad (6.35a)$$

$$\bar{\theta} = \frac{-a_+}{1 + \exp[\nu a_+ (\xi + c_0 \tau - x_0)]} + a_+ \quad (6.35b)$$

$$\bar{\theta} = \frac{a_- - a_+}{1 + \exp[\nu(a_+ - a_-) (\xi + c_0 \tau - x_0)]} + a_+ \quad (6.35c)$$

en donde $\nu = \pm 1$. Los solitones descritos por las ecuaciones (6.35) son conocidos como "pliegues" debido a la forma en que depende el ángulo de reorientación θ con $\xi - c_0 \tau$. En la Fig. 21 se muestran los tres tipos de solitones dados en las Ecs.(6.35) y se indican con líneas punteadas los valores $a_{-,0}$ y a_+ . En la Figs. 22a y 22b se muestran a_- y a_+ como función del número de modo TM para NBBA y $k_0 l = 20$. En dichas gráficas se observa que estas amplitudes son mayores para los primeros modos con respecto a los modos altos. Esto se debe a que la componente principal del modo dominante $u = \bar{\theta}_1^{mv}$ es el primer modo de donde los modos bajos tendrán mayor amplitud que los modos altos.

Dos parámetros importantes que caracterizan el comportamiento de los solitones (6.35) son los siguientes:

$$c_0 = 2 (\theta_2 - \theta_1) (\theta_3 - \theta_2) \quad (6.36a)$$

y

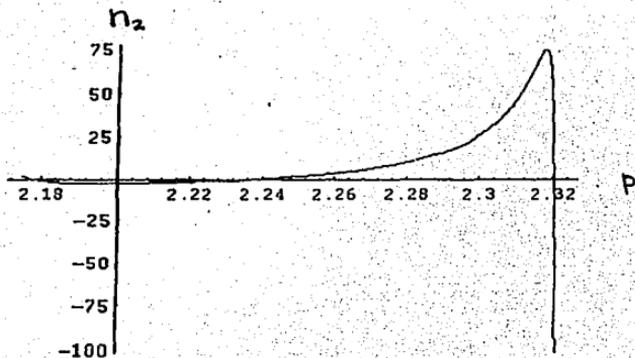


Fig. 20. Índice de refracción no lineal n_2 como función de la constante de propagación p para el régimen fuerte en MBBA.

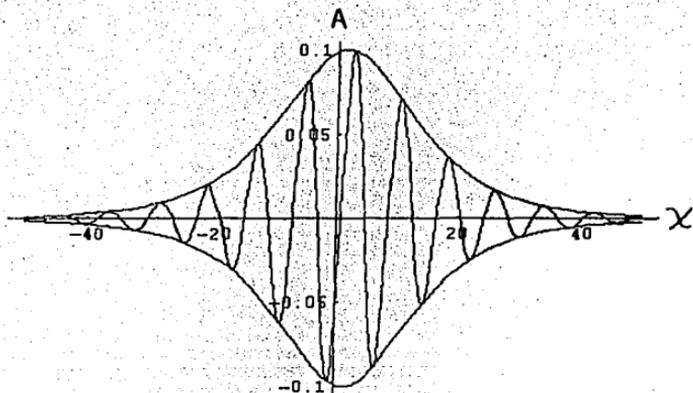


Fig. 19. Perfil de un solitón descrito por la ecuación de Schrödinger No lineal. Se muestra tanto la envolvente del solitón como la parte real de éste.

$$c_1 = 2^{-1/2} (\theta_1 + \theta_3 - 2\theta_2). \quad (6.36b)$$

Para el caso particular que analizó, éstos toman la forma

$$c_0 = a_2/c_2 = \frac{\lambda_1^m + d_1 \Omega_{2m}}{C_{111}^m - \sum_n B_n^m B_{n1}^m / \lambda_n^m}, \quad (6.37a)$$

y

$$c_1 = 2^{-1/2} (b_2/c_2). \quad (6.37b)$$

Nótese que al tomar $\lambda_1^m = -d_1 \Omega_{2m}$ se anula c_0 por lo que el solitón descrito por la Ec.(6.35) se vuelve "estático".

Dependiendo de los valores relativos de c_0 y c_1 , los solitones dados por las Ecs (6.35) presentarán o no oscilaciones en su estela [72]. El criterio para determinar si esto ocurre es el siguiente: si $c_0 > c_1$, los solitones presentan oscilaciones. Este criterio se traduce en la condición

$$\lambda_1^m + d_1 \Omega_{2m} > -B_{111}^m. \quad (6.38)$$

Es fácil mostrar, que a primer orden en q , la condición se satisface para cualquier orden del modo m del campo electromagnético.

Es importante mencionar que la expresión (6.36a) proporciona la velocidad adimensional de lo solitones, es decir $c_0 = v / (K_{11} / \gamma l)$, en donde v es la velocidad. La Fig. 22 muestra a c_0 como función de m , el orden del modo de campo electromagnético, a primer orden en q .

Un punto que resta comentar es la estabilidad de estos solitones. Es un resultado bien establecido [73,74] que las soluciones del tipo onda para ecuaciones diferenciales parabólicas de la forma dada por la Ec.(6.33), que satisfacen condiciones de frontera de la forma

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \theta(x, t) = \theta_{\pm}, \quad (6.39)$$

tienen soluciones estables siempre que no sean periódicas. De esta manera las

soluciones dadas en las Ecs.(6.35) son estables siempre que la condición (6.38) se satisfaga; es decir la densidad de energía electromagnética sea menor que la densidad de energía elástica para que los solitones que se propaguen sean estables.

Es importante mencionar que para que se genere un solitón orientacional en la celda nemática no es suficiente que la ecuación dinámica presente una solución de este tipo que sea estable, sino que además se requiere de un mecanismo experimental para inducirlo. Los solitones en el ángulo de reorientación de cristales líquidos se crean generando un perfil orientacional inicial mediante perturbaciones mecánicas, el cual posteriormente evoluciona en uno o varios solitones que se propagan en el medio [73]. Las técnicas tanto para generar como para observar este tipo de solitones se describen en algunas referencias [75,76].

Es posible, generar también un solitón orientacional al hacer incidir un perturbación electromagnético muy abrupta como la de un haz láser pulsado y muy intenso. Si adicionalmente, la dirección y la intensidad del haz incidente son tales que la velocidad c_0 se anule y la amplitud a supere el ángulo crítico a partir del cual aparecen cáusticas en la celda, entonces el haz óptico será reflejado por el solitón estático orientacional que éste mismo indujo. Este tipo de fenómenos están reportados en la literatura [19] y se conocen como autolimitación (self-limiting). Es importante aclarar que aún cuando los resultados de este capítulo sugieren que bajo ciertas condiciones se puede dar la autolimitación, éstos no tienen implicación directa, en la celda que se ha considerado en los primeros cinco capítulos ya que como se indicó antes, en este capítulo se utilizó un modelo ligeramente distinto. En efecto, con el objeto de simplificar la ecuación dinámica orientacional se consideró un estado de referencia inicial homogéneo a diferencia del estado de referencia distorsionado analizado en los capítulos previos.

Conclusiones

En este trabajo se mostró la existencia de un efecto de guía de onda producido por el proceso de reorientación inducido por un campo óptico sobre un cristal líquido nemático contenido en una celda planar. Este efecto se mostró tanto en ausencia de flujo, como en presencia tanto de flujos impuestos externamente como de flujos internos o contraflujos. Debido a que para este último caso la configuración espacial que adopta la celda nemática depende de la frecuencia de la señal incidente, ésta pudiera servir como selector en una guía multicanal (multiplexor).

Es importante enfatizar que en los primeros cuatro capítulos de este trabajo, la dinámica de los modos TM sólo se consideró en su aproximación lineal, ya que se describió la propagación de haces de baja intensidad para los cuales la dinámica de los modos TM está prácticamente desacoplada de la dinámica del nemático. Sin embargo, como se mostró en el capítulo V, el análisis puede generalizarse al caso no lineal. Asimismo se mostró que la envolvente de un paquete de ondas, construido a partir de los modos TM lineales, satisface la ecuación de Schrödinger no lineal. Debido a que esta ecuación tiene soluciones tipo solitón, este resultado muestra que los paquetes de onda se propagan en la guía de un onda sin sufrir dispersión. Mas aún, esto abre la posibilidad de emplear a la celda como una guía de onda múltiple, ya que la velocidad de los solitones es función de la frecuencia portadora de los mismos. De esta manera se podría distinguir entre varios trenes de solitones sintonizados a distintas frecuencias, ya que éstos se traslapan sin deformación remanente. Es importante señalar también que se encontró cómo los parámetros del solitón dependen explícitamente de los parámetros de propagación de la guía, y se mostró que existe una dirección de incidencia del tren de ondas para la cual se requiere menor potencia del pulso para engendrar un solitón.

Debe enfatizarse que debido a que los solitones se construyeron en base a los modos TM, entonces los solitones presentan también el efecto de guía de onda exhibido y analizado para los modos TM puros.

Finalmente, mediante un análisis modal del campo de orientaciones se mostró que, en presencia de un modo electromagnético que se propaga, el modo dominante del campo de orientaciones, que originalmente se acopla con los demás, está descrito por una ecuación de Naguno la cual admite soluciones tipo solitón pliegue. Se calculó tanto la velocidad como la amplitud de los solitones como función del orden del modo electromagnético presente, y se mostró que la velocidad de éstos es máxima para los modos más altos mientras que su amplitud es mínima. La importancia de considerar este tipo de solitones radica en la posible interacción de éstos con el haz óptico y poder de esta manera explicar fenómenos de autolimitación en guías de onda, que se han observado recientemente [18]. Sin embargo, esto no se ha realizado en este trabajo.

En contraste con otros modelos [51], es importante puntualizar que el presente análisis no está restringido a las fases iniciales de reorientación de la TFO. De hecho, en este modelo se supone que el estado estacionario final, conducido por la dinámica acoplada del nemático y del campo óptico, se ha alcanzado.

Por otro lado, ya que cerca de una transición de fase se espera que las fluctuaciones térmicas crezcan y sean anómalamente grandes, sería interesante investigar cómo la presencia de éstas cambiaría el estado estacionario final y cómo las características del efecto de guía de onda serán modificadas por efecto de éstas. En relación con este punto, es importante hacer notar que la descripción dinámica hecha en este trabajo en términos de las variables n y v sólo es válida lejos de un punto crítico. Para implementar una descripción que sea válida cerca de un punto crítico será necesario agregar a la descripción otras variables como el parámetro de orden y en este caso las fluctuaciones podrían llegar a ser importantes.

Otro punto importante a considerar son los efectos disipativos causados tanto por la absorción del nemático como de las placas conductoras. Una cantidad importante relacionada con este aspecto sería el coeficiente de difusión de los solitones por efecto de la disipación o bien una longitud típica de amortiguamiento de las ondas electromagnéticas a lo largo de la guía. En este trabajo sólo se estudió la propagación de solitones ópticos y

orientacionales, que son ejemplos de los efectos ópticos no lineales de tercer orden, pero existen muchos otros efectos interesantes de este tipo como el mezclado de tres o cuatro ondas, la conjugación de fase y autoconjugación, que han sido observado en nemáticos y que sería importante analizar. Aunque este tipo de fenómenos no se han realizado en celdas o guías de onda, sería interesante considerarlos porque, al menos para materiales sólidos, se ha observado que la guía de onda permite acoplar o "sintonizar" de manera más precisa los haces ópticos.

Aunque en principio los fenómenos ópticos no lineales de segundo orden, parecen estar descartados en los nemáticos, debido a su simetría de centro, éstos pueden ocurrir. Esto es debido a que bajo el efecto de una distorsión elástica el nemático produce un campo estático (efecto flexoeléctrico), que puede interactuar con el haz óptico incidente y dar origen a efectos de segundo orden como la generación del segundo armónico [66]. Así también el estudio de estos efectos dentro del modelo considerado aquí sería interesante de realizar. Un análisis preliminar de este tipo de efectos está en proceso [77].

Referencias

- [1] B. Y. Zel'dovich, N. V. Tabiryan and Y. S. Chilingaryan, Sov. Phys. JETP, 54, 32 (1981)
- [2] S. M. Arakelian and Y. S. Chilingaryan, IEEE, J. Quantum Electron, QE-22, 1276 (1986)
- [3] I. C. Khoo, G. H. Finn, R. R. Michael and T. H. Liu, Opt. Lett., 11, 227 (1986)
- [4] S. D. Durbin, S. M. Arakelian and Y. R. Shen, Opt. Lett., 1, 145 (1982)
- [5] H. M. Gibbs, P. Mandel, N. Peyghambaryan and S. D. Smith, Optical Bistability (Springer Verlag, New York, 1986)
- [6] E. S. Goldburt and P. S. J. Russell, Appl. Phys. Lett., 46, 338 (1985)
- [7] J. G. Pasko, J. Tracy and W. Elser, SPIE, Proc., 202, 82 (1979)
- [8] S. T. Wu, U. Efron, J. Grinberg, L. D. Hess and H.S. Welkosky, SPIE, Proc., 572, 94 (1985)
- [9] E. Santamoto, G. Abatte, P. Maddalena and L. Marrucci, Phys. Rev. Lett., 64, 1377 (1990)
- [10] P. V. Vidakovic, M. Coquilay and F. Salin, J. Opt. Soc. Am. B, 4, 988 (1987)
- [11] H. Lin, P. Palffy-Muhoray and M. A. Lee, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 204, 189 (1991)
- [12] H. Lin and P. Palffy-Muhoray, Opt. Lett., 17, 722 (1992)
- [13] H. Lin and P. Palffy-Muhoray, Liq. Cryst., 14, 1978 (1993)
- [14] H. Lin and P. Palffy-Muhoray, Opt. Lett., 19, 436 (1994)
- [15] R.H. Stolen and H. W. K. Tom, Opt. Lett., 12, 57 (1987)
- [16] Y. Aoki and K. Tajima, J. Opt. Soc. Am. B, 5, 358 (1988)
- [17] I. N. Duling III, Opt. Lett., 16, 539 (1991)
- [18] I. C. Khoo, H. Li, P. G. LoPresti and Y. Liang, Opt. Soc. Am., 94, 530 (1994)
- [19] I.C. Khoo, H. Li, Appl. Phys. B, 59, 573 (1994)
- [20] H. Lin, D. S. Moroi and P. Palffy-Muhoray, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 223, 241 (1992)
- [21] W. Helfrich, Phys. Lett. A 35, 393 (1971).
- [22] P. G. Drazin and R. S. Johnson, Solitons: An Introduction, (Cambridge University Press, 1989)

- [23] L. Lam, J. Prost, Solitons in Liquid Crystals, (Springer Verlag, New York, 1992)
- [24] I. C. Khoo, H. Li, Appl. Phys. B, 59, 573 (1994)
- [25] W. Helfrich, Phys. Lett. A 35, 393 (1971).
- [26] F. C. Frank, Faraday Soc. Disc. 25 19 (1958).
- [27] L. D. Landau, E. M. Lifshits and L. P. Pitaevskii, Electrodynamics of Continuous Media, (Pergamon Press, New York, 1984)
- [28] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics (J. Wiley, New York, 1986) 2a. edición
- [29] H. Kelker and R. Hatz, Handbook of Liquid Crystals (Verlag Chemie, Weinheim, 1980) Cap. 4.
- [30] J. A. Kong, Electromagnetic Wave Theory (Wiley, New York, 1986)
- [31] J. D. Marcuse, Theory of Dielectric Optical Waveguides (Academic Press, New York, 1974)
- [32] A. K. Ghatak and K. Thyagarajan, Optical Electronics, (Cambridge University Press, New York, 1989)
- [33] M. Bender, B. F. Arzog, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers (Mc Graw Hill, New York, 1978)
- [34] J. Krekorian and J. D. Coles, Perturbation Methods in Applied Mathematics, (Springer-Verlag, New York, 1991)
- [35] J. A. Reyes and R. F. Rodríguez, J. Nonlin. Opt. Prop. Mat., 4, xxx (1995)
- [36] M. Born y E. Wolf, Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1975)
- [37] R. Lunenburg, Mathematical Theory of Optics, (University of California Press, Berkeley, 1964)
- [38] H. Goldstein, Classical Mechanics (Adisson Wesley, New York, 1986)
- [39] M. Abramowitz, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1965)
- [40] W. H. Jeu, W. A. P. Claassen, A. M. J. Spruist, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 37, 269, (1976)
- [41] B. R. Ratna, R. Shashidar, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 42, 113 (1977)
- [42] J. A. Reyes and R. F. Rodríguez, Wave guiding effect in cells with a liquid crystalline core II. WKB limit, 1995 (enviado a Int. J. Nonlin. Opt. Phys.)
- [43] I. C. Khoo, R. R. Michael and S. T. Wu, Optics and Nonlinear Optics of liquid Crystals (Word Scientific, Singapore, 1993).
- [44] B. Y. Zel'dovich, N. F. Pilipotskii, A. V. Sulchov and N. V. Tabiryan,

JETP Lett., 31, 363 (1980)

- [45] N. Y. Tabiryán, A. V. Sukhov and B. Ya Zel'dovich, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 136, 1 (1986)
- [46] S. D. Durbin, S. M. Arakellán and Y. R. Shen, Phys. Rev. Lett., 47, 1411 (1981)
- [47] D. Zwillinger, Handbook of Differential Equations, (Academic Press, New York, 1989)
- [48] M. El Sawi, J. Math. Phys., 28, 566 (1987)
- [49] E. Merzbacher, Quantum Mechanics, (J. Wiley, New York, 1979)
- [50] R. F. Rodríguez and J. A. Reyes, Propagation of optical fields in planar liquid wave guide, (por publicarse en Mol. Cryst. Liq. Cryst., 1995)
- [51] R. F. Rodríguez, M. San Miguel and F. Sagués, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 199, 393 (1991); R. F. Rodríguez and P. Ortega, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 222, 45 (1992) ; R. F. Rodríguez, P. Ortega and R. Díaz-Urbe (enviado Physica A 1995)
- [52] M. San Miguel and F. Saguez, Phys. Rev. A, 36, 1883 (1987).
- [53] I. G. Currie, Fundamental Fluid Mechanics, (Mc Graw Hill Company, New York, 1974)
- [54] G. K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, (Cambridge University Press, Cambridge, 1967)
- [55] C. M. Bender and M. C. Arszog, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers (Mc Graw Hill, New York, 1978)
- [56] J. Krekovic and J. D. Coles, Perturbation Methods in Applied Mathematics, (Springer-Verlag, New York, 1991)
- [57] R. Marsden, Basic Complex Analysis, (Freeman and Company, San Francisco, 1973)
- [58] J. D. Marcuse, Theory of Dielectric Optical Waveguides (Academic Press, New York, 1974)
- [59] G. Arfken, Mathematical Method for physicist, (Academic Press, New York, 1970)
- [60] G. P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics, (Academic Press, London, 1989)
- [61] G. L. Lamb, Elements of Solitons Theory, (Jhon Wiley and sons, New York, 1980)
- [62] D. Zwillinger, Handbook of Diferential Equations, (Academic Press, Inc, New York, 1989)
- [63] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck and J. D. Gibbon, Solitons and Nonlinear Wave

- Equations, (Academic Press, London, 1984)
- [64] J. V. Moloney and A. C. Newell, *Physica D* **44**, 1 (1990)
- [65] A. C. Moloney and J. V. Newell, Nonlinear Optics, Addison Wesley Company, 1992)
- [66] O. Y. Zhong-can and X. Y. Zhang, *Phys. Rev. A*, **32**, 1189 (1985)
- [67] F. Calogero and E. Degasperis, Spectral Transform and Solitons, (North-Holland, New York, 1982), Vol 2
- [68] I. N. Herstein, Topics in Algebra (Blaisdell, Reading, 1966)
- [69] M. Aguado, R. F. Rodríguez and M. San Miguel, *Phys. Rev. A*, **39**, 59 (1989)
- [70] L. Arnold, W. Hosrtemke and S. Lefever, *R. Z. Physik B*, **29**, 367 (1978)
- [71] P. L. Schdev, Nonlinear Diffusive Waves (Cambridge University Press, Cambridge, 1987)
- [72] L. Lam, J. Prost, Solitons in Liquid Crystals, (Springer Verlag, New York, 1992)
- [73] P. Hagan, *Stud. Appl. Math.*, **64**, 57 (1981)
- [74] P. Hagan, *SIAM J. Math. Anal.*, **13**, 717 (1982)
- [75] F. Marquis, P. Meyestre, and E. M. Wright, *Phys. Rev. A*, **36**, 875 (1987)
- [76] J. T. Gleeson, P. Palfy-Muhoray and W. Van Saarloos, *Phys. Rev. A*, **44**, 2588, (1991)
- [77] R. F. Rodríguez and J. A. Reyes, *Generación de segundos armónicos en guías de onda nemáticas*, 1995 (en preparación).