

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

01162
14
2ej

*"Desarrollo y aplicación de un modelo matemático para simular
el movimiento en el suelo del agua infiltrada desde un canal"*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA (HIDRÁULICA)

PRESENTA:

ROMERO GÓMEZ NICOLÁS

1995



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

RECIBI COPIA DE: () TRABAJO ESCRITO
(XXXX) TESIS

DESARROLLADO POR EL ALUMNO: NICOLAS ROMERO GOMEZ

PARA PRESENTAR EXAMEN:

() DE ESPECIALIZACION
(XX) DE GRADO

EN INGENIERIA: HIDRAULICA

	FIRMA	FECHA
PRESIDENTE:	DR. JESUS GRACIA SANCHEZ	7 - JUL - 95
VOCAL:	M EN I. OSCAR FUENTES MARILES	07 JUL 95
SECRETARIO	DR. CARLOS FUENTES RUIZ	07/07/95
SUPLENTE:	M EN I. ERNESTO VAZQUEZ FERNANDEZ	10/07/95
SUPLENTE:	M EN I. VICTOR FRANCO	

APROBACION DEL TRABAJO O DE TESIS POR EL DEPARTAMENTO _____

HIDRAULICA *Rodriguez*

PROMEDIO EN CREDITOS 10 (DIEZ)

NEUM*BJS*jac.

RESUMEN

En este trabajo se propone, desarrolla y aplica, un esquema numérico explícito en diferencias finitas, que da solución a la ecuación de Richards (1931), para las direcciones de flujo horizontal y vertical; sobre secciones de canal rectangulares. Se determinan las condiciones que limitan su aplicación y se justifica claramente cada una de las consideraciones hechas sobre el esquema geométrico propuesto.

Como un sustento técnico para lograr la solución numérica antes mencionada, es utilizada la ecuación propuesta por Van Genuchten (1980), modificada por Fuentes R. C. (1985), con la combinación de la ecuación de Brooks y Corey (1964).

Se elabora un programa de cómputo llamado ICRINRE (Infiltración en Canales de Riego No REvestidos), que calcula los perfiles del frente de humedecimiento sobre secciones transversales de canales rectangulares.

Los resultados obtenidos por medio de este programa, fueron comparados con los reportados por Healy y Warrick (1988), encontrándose buenas aproximaciones del fenómeno estudiado.

Se concluye que la solución dada por el modelo ICRINRE, puede ser utilizada para describir el fenómeno del movimiento de agua en suelos saturados y parcialmente saturados para dos y tres direcciones de flujo.

ABSTRACT

In this study is proposed, developed and used a explicit numerical method in finite differences, for solve the Richards equation (1931), in vertical and horizontal directions of flow on rectangular channel sections. The conditions what limit their application are determinated and is justified cleary every regard make on the proposed geometric escheme.

How a technical support for obtain the numerical solution above mentioned, is used the proposal equation for Van Genuchten (1980), modified by Fuentes R. C. (1985) with combination of Brooks and Corey's equation.

Also is elaborated a computer program called ICRINRE (Infiltración en Canales de Riego No REvestidos), this calculate the profiles of wetting front on transversal sections of rectangular channels.

The results obtained through this program were compared with reported by Healy and Warrick (1988), good approximations are obtained of studied phenomenon.

The solution obtained with the ICRINRE model, can be utilized for describe the flow of water in saturated and unsaturated soils for two and three flow directions.

EL CANAL DE DIJON

"Castelli había apuntado que piedras, malezas y otras excrescencias del fondo del cauce retardan el curso del agua. Pero se trataba de protuberancias grandes: de ser muy pequeñas, ¿las notaría la corriente?. Allá por el año de 1800, se le ocurrió a Coulomb un experimento nuevo: tomó un péndulo, lo sumergió en agua quieta y lo hizo oscilar. El roce del disco del péndulo con el agua iba amortiguando poco a poco la amplitud de la oscilación; y la magnitud de esta reducción progresiva constituía un índice de la intensidad del esfuerzo cortante, o sea, del esfuerzo ejercido tangencialmente entre el agua y el disco. Luego Coulomb untó con grasa el disco para hacerlo más liso, y repitió el experimento; pegó arena en la grasa para hacerlo más rugoso, y volvió a ensayar: en ningún caso halló diferencias apreciables en el refrenamiento del péndulo. El resultado era imprevisto; ¿cómo explicarlo? Coulomb sugirió que las partículas de agua en contacto con la superficie del disco se adhirieran a ésta, y entonces se muevan con su misma velocidad; que las partículas algo más lejanas adquieran, por efecto viscoso, también una velocidad, pero menor; y así sucesivamente hasta que, a dos o tres milímetros de distancia de la pared, ya no hay desplazamiento. En otros términos, el agua en movimiento relativo sí siente el frotamiento, pero no tanto con la pared misma cuanto con una delgada capa líquida que se le pega y ahoga su rugosidad si ésta es fina.

Este resultado hizo que durante varias décadas se supusiera que la naturaleza de la pared, mientras ésta fuera lisa o casi lisa no debería de influir en el escurrimiento, porque la película fluida adherida taparía las pequeñas diferencias superficiales

entre un material y otro. Entonces en tales condiciones, sería correcta la idea de Chézy de que la velocidad media de una corriente depende de la pendiente y geometría de la sección del cauce y nada más. Pero se empezó a observar un hecho que contradecía la creencia mencionada: ciertas tuberías de fierro llevaban un gasto mayor cuando eran totalmente nuevas que poco tiempo después, al empezar a oxidarse; asimismo, a medida que la oxidación, y con ella su rugosidad interior, iba creciendo, la capacidad del conducto se reducía más y más.

Quien sintió la urgencia de aclarar de una vez el efecto de la calidad y edad del tubo sobre la velocidad de la corriente fue Henri Darcy, encargado de las obras hidráulicas de Dijón. Esta pintoresca población, antigua capital de Carlos el Temerario, puede llamarse una ciudad de aguas: edificada en la confluencia de dos ríos, el Suzón y el Ouché, se asoma al canal de Borgoña, el cual permite a los barcos cruzar del valle del Ródano al del Sena, comunicando así por vía fluvial el Mediterráneo con el Atlántico. El nuevo sistema de distribución de aguas potables de Dijón, proyectado y construido por Darcy, no tardó en hacerse célebre entre los hidráulicos de mediados del siglo XIX; entre otras cosas, por haber requerido estudios de infiltración, que habían llevado a Darcy a descubrir que la pérdida de carga a través de un lecho filtrante es proporcional a la velocidad de la corriente y no a su raíz cuadrada, como pretendían los que querían aplicar ciegamente la ley de Torricelli a todo.

Era tiempo del segundo imperio en Francia, con Napoleón III quien, precisado a exhibir sus tendencias liberales, estaba fomentando ciencia y tecnología. Así, en 1852 no le fue difícil a Darcy conseguir un buen subsidio del gobierno para un análisis experimental exhaustivo, con toda una serie de tuberías de diferentes materiales, en varias fases de deterioro: hierro forjado, asfalto y de fundición, plomo y vidrio, con diámetros que

iban de 3 a 45 cm. Estos estudios lo llevaron a reconocer la necesidad de perfeccionar la fórmula de Chézy, transformandola en

$$RS = \left(a + \frac{b}{R} \right) V^2$$

donde R es el radio de la tubería; S, su "pendiente hidráulica". o sea, la pérdida de carga (de nivel de presión) del líquido, dividida entre la distancia recorrida; V, la velocidad media; a, b, dos coeficientes que hay que cambiar según el tipo de tubería, es decir, que depende de las características de la superficie interior del conducto. Esta dependencia comprobaba por fin que la rugosidad de las paredes sí afecta al escurrimiento, por lo menos en el caso de tuberías. ¿Sería lo mismo para los canales?

Así como Humphreys hallará unos años más tarde un apoyo sustancial en el joven Abbot, Darcy cuenta con un joven, excelente colaborador: Henri Bazin, quien en 1854 se había presentado suplicándole que le permitiera trabajar con él, y de inmediato se había revelado como investigador nato: perpicaz, ingenioso y cuidadoso hasta del mínimo detalle. Darcy y Bazin planean esmeradamente sus investigaciones: hacen que se excave, derivándolo del canal de Borgoña, un canal de ensayo de un metro de profundidad, dos de ancho y casi seiscientos de longitud; luego lo revisten sucesivamente de cemento pulido, cemento mezclado con una tercera parte de arena, tabloncillos de madera cepillada y sin cepillar, mampostería de piedra y de ladrillo, y concreto rugoso, con grava fina y gruesa. hasta llegan a clavar en las paredes tablitas transversales paralelas, a diferentes distancias entre sí; además cambian pendientes, y en todas las condiciones miden la velocidad media del flujo uniforme que, gracias a la longitud del canal, logra establecerse. Las modificaciones del cauce y número de ensayos que hay que realizar en cada caso son tantos que se requieren años de trabajo. En 1858 Darcy fallece a los 55 años de edad, y Bazin se encarga de continuar el colosal programa de

experimentos, que concluye al publicar en 1865 la clásica memoria *Recherches hydrauliques entreprises par Henri Darcy, continuées par Henri Bazin*, memoria dividida en dos partes: la primera dedicada al escurrimiento del agua en canales abiertos; la segunda, a remansos y propagación de ondas."

ENZO LEVI

México D.F. 1989

AGRADECIMIENTOS

Al M. en I. Oscar A. Fuentes Mariles, por haber revisado y corregido cada una de las versiones previas a la impresión final de esta tesis, por su amable aceptación para llevar la dirección y por la participación que tuvo como vocal en el jurado examinador de la misma.

Al Dr. Jesús Gracia Sánchez, por las observaciones, correcciones y sugerencias hechas al contenido de la tesis, la orientación académica brindada y por haber participado como presidente del jurado examinador.

Al Dr. Carlos Fuentes Ruiz, por su valiosa disponibilidad en el asesoramiento continuo durante el desarrollo y terminación de la tesis, la revisión detallada, las correcciones hechas al contenido de la misma y por su participación como secretario en el jurado examinador.

Al M. en I. Ernesto Vázquez Fernández, de quien recibí sugerencias para validar y calibrar el modelo de cómputo generado y por las correcciones y observaciones realizadas al contenido de esta tesis.

Al M. en I. Víctor Franco, por la inmediata respuesta dada a la revisión de esta tesis, lo que ayudó a continuar con los trámites administrativos requeridos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, la División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ingeniería y a la sección de Hidráulica, por la formación académica recibida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología e Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, por el apoyo económico brindado durante la realización de mis estudios.

A todos mis Amigos, por su amistad.

DEDICATORIA

A mi esposa Cira, quien es partícipe de los triunfos que he logrado, porque con su apoyo y entusiasmo me dá confianza en las decisiones que tomo y los actos que realizo.

A mis padres: Pascual y Carmen, con el afán de que vean alcanzadas parte de las metas que se han impuesto, que es lograr darle una formación académica a todos sus hijos.

A mis hermanos: Sergio, Gerardo, Laura Margarita, Bernarda Carolina y Pedro de Jesús, por el apoyo moral que me han brindado para alcanzar mis metas.

Los mejores deseos para que dios nos mantenga unidos como hasta ahora, durante el resto de nuestras vidas.

SIMBOLOGIA

$C(h)$, Capacidad específica, 1/m.
$C(h)_x$, Capacidad específica en el sentido de flujo x , 1/m.
$C(h)_z$, Capacidad específica en el sentido de flujo z , 1/m.
$C(h)_T$, Capacidad específica total, 1/m.
θ	, Contenido de humedad, cm^3/cm^3 .
θ_i	, Contenido de humedad inicial, cm^3/cm^3 .
θ_r	, Contenido volumétrico de humedad residual, cm^3/cm^3 .
θ_s	, Contenido volumétrico de humedad a saturación, cm^3/cm^3 .
$K(h)$, Conductividad hidráulica, m/s.
K_s	, Conductividad hidráulica a saturación, m/s.
x	, Coordenadas cartesianas x , adimensional.
z	, Coordenadas cartesianas z , adimensional.
r	, Coordenadas cilíndricas r , adimensional.
δ_x	, Densidad en x , kg/m^3 .
δ_{x+dx}	, Densidad en $x+dx$, kg/m^3 .
δ_b	, Densidad aparente del suelo, kg/m^3 .
$D(\theta)$, Difusividad hidráulica, m^2/s .
$DT1..DT4$, Diferencial de tiempo, s.
$DDT1..DDT4$, Duración del diferencial de tiempo, min.
ϑ	, Factor peso, adimensional.
$\phi(h)$, Función que representa el comportamiento de la conductividad hidráulica, adimensional.
L	, Longitud de la columna de suelo, m.
M_a	, Masa de aire, kg.
M_w	, Masa de agua, kg.
M_x	, Masa de fluido en x , kg.
M_{x+dx}	, Masa de fluido en $x+dx$, kg.
M_s	, Masa de sólidos, kg.

continua...

n , parámetro empírico, adimensional.
 α , Parámetro empírico alfa, m.
 z , Potencial gravitacional, m.
 h , Potencial de presión correspondiente al contenido de humedad θ , m.
 h_{cr} , Potencial de presión crítica, m.
 \dot{M}_x , Variación de la masa por unidad de tiempo y unidad de volumen, kg m³/s.
 V , Vector de velocidad (u,v,w), adimensional.
 h_g , Valor empírico, m.
 u_x , Velocidad en x, m/s.
 u_{x+dx} , Velocidad en x+dx, m/s.
 V_a , Volumen de aire, m³.
 V_w , Volumen de agua, m³.
 F , Volumen de fluido, m³.
 V_f , Volumen de poros, m³.
 V_s , Volumen de sólidos, m³.
 V_t , Volumen total, m³.

CONTENIDO

	PAGINA
RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
EL CANAL DE DIJON	iii
1.- INTRODUCCION	1
2.- ANTECEDENTES	5
3.- ECUACIONES FUNDAMENTALES	17
3.1.- ECUACIONES DE BASE	17
3.1.1.- ECUACION DE CONSERVACION DE LA MASA.	17
3.1.2.- LA LEY DE DARCY.	21
3.1.3.- LA ECUACION DE RICHARDS L. A.	22
3.2.- CARACTERISTICAS HIDRODINAMICAS DEL SUELO	26
3.2.1.- CURVA CARACTERISTICA DE HUMEDAD.	28
3.2.2.- CAPACIDAD ESPECIFICA	32
3.2.3.- CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA	32
4.- SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES.	37
4.1.- CONCEPTOS BASICOS.	37
4.1.1.- CLASIFICACION DE LA ECUACION DE RICHARDS	39
4.2.- DESARROLLO DEL MODELO NUMERICO	40
4.3.- PUNTOS CONSIDERADOS EN EL ESQUEMA NUMERICO	47
4.4.- CONDICIONES DE FRONTERA.	48

4.5.- APLICACION DEL MODELO MATEMATICO Y CONDICIONES DE FRONTERA, A LOS DIFERENTES ELEMENTOS GENERADOS POR EL ESQUEMA GEOMETRICO PROPUESTO	57
4.6.- CONSIDERACIONES GENERALES PARA APLICAR EL MODELO NUMERICO.	57
4.6.1.- GEOMETRICAS Y DE DIMENSIONES	57
4.6.2.- EDAFOLOGICAS	59
4.6.3.- HIDRODINAMICAS	59
4.7.- ANALISIS DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA	60
4.7.1.- CONVERGENCIA	66
4.7.2.- ANALISIS DE ESTABILIDAD.	71
5.- METODO DE COMPUTO.	78
5.1.- METODO DE COMPUTO.	79
5.1.1.- ENTRADA DE DATOS AL MODELO ICRINRE	79
5.1.1.1.- CONTENIDO DE HUMEDAD INICIAL	79
5.1.1.2.- CONTENIDO DE HUMEDAD A SATURACION.	80
5.1.1.3.- CONTENIDO DE HUMEDAD RESIDUAL.	80
5.1.1.4.- CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA DE SATURACION	80
5.1.1.5.- VALOR EMPIRICO α	80
5.1.1.6.- VALOR EMPIRICO n	81
5.1.1.7.- FACTOR DE PESO	81
5.1.1.8.- DIFERENCIAL DE TIEMPO DT	82
5.1.1.9.- DURACION DE DIFERENCIAL DE TIEMPO.	82
5.1.2.- SECUENCIA DE EJECUCION DEL MODELO ICRINRE.	83
5.2.- EL EXPERIMENTO DE CLOTHIER Y SCOTTER	93
6.- EJEMPLOS DE APLICACION Y RESULTADOS.	95

	PAGINA
6.1.- EJEMPLOS DE APLICACION	95
6.2.- RESULTADOS	104
7.- DISCUSIONES Y CONCLUSIONES	106
7.1.- DISCUSIONES.	106
7.2.- CONCLUSIONES	110
8.- BIBLIOGRAFIA	112

INDICE DE ANEXOS

A.- MODELO ICRINRE .EXE Y .PAS (DISKETTE)

INDICE DE FIGURAS

	PAGINA
3.1.- ESQUEMA PARA LA DEDUCCION DE LA ECUACION DE CONSERVACION DE LA MASA.	27
3.2.- ESQUEMA DE LAS TRES FASES DEL SUELO.	27
4.1.- ESQUEMA GEOMETRICO DE LOS DIFERENCIALES QUE PARTICIPAN EN EL CALCULO DEL POTENCIAL DE PRESION EN EL SUELO (h), PARA EL ELEMENTO CENTRAL DE ELLOS ($h_{1,1}$).	48
4.2.- REGION SIMPLEMENTE CONEXA ACOTADA POR UNA CURVA SIMPLE CERRADA C	50
4.3.- COMPORTAMIENTO DE LA CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA $K(h)$, CON RESPECTO A LA TENSION DE HUMEDAD DEL SUELO.	51
4.4.- CONDICIONES DE FRONTERA SOBRE EL ESQUEMA GEOMETRICO PROPUESTO	52
4.5.- DIFERENCIALES GEOMETRICOS ANALIZADOS, DENTRO DEL ESQUEMA PROPUESTO.	53
4.6a.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 1 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	54
4.6b.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 2 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	54

4.6c.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 3 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	54
4.6d.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 4 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	54
4.6e.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 5 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	55
4.6f.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 6 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	55
4.6g.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 7 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	55
4.6h.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 8 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	55
4.6i.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 9 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	56
4.6j.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 10 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	56
4.6k.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 11 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	56
4.6l.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 12 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	56

4.6m.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 13 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	57
4.6n.- DIFERENCIAL GEOMETRICO No. 14 EN EL ESQUEMA PROPUESTO.	57
4.7.- EJES CARTESIANOS SOBRE LA SECCION ANALIZADA.	58
4.8.- LONGITUD MAXIMA DE ANALISIS SOBRE LOS EJES CARTESIANOS.	59
5.1.- DIVISION DEL ESQUEMA GEOMETRICO ANALIZADO, EN DIVERSAS ZONAS DE ESTUDIO.	82

INDICE DE GRAFICAS

3.1.- CURVA CARACTERISTICA DE HUMEDAD ($\theta-h$), PARA TRES DIFERENTES TEXTURAS DE SUELO.	31
3.2.- CAPACIDAD ESPECIFICA $C(h)$ PARA TRES DIFERENTES TEXTURAS DE SUELO	33
3.3.- CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA $K(\theta)$, PARA TRES DIFERENTES TEXTURAS DE SUELO	36
5.1.- CARACTERISTICAS HIDRODINAMICAS Y FISICAS DEL SUELO, SOLICITADAS POR ICRINRE	84

5.2.-	DATOS REFERENTES AL TIEMPO, SOLICITADOS POR ICRINRE.	85
5.3.-	OPCION AFIRMATIVA O NEGATIVA PARA SOLICITUD DE IMPRESION A ICRINRE	87
5.4.-	SELECCION DE OPCION PARA LA IMPRESION DE RESULTADOS, SOLICITADA POR ICRINRE	88
5.5.-	MENSAJE DE ERROR ENVIADO POR ICRINRE, CUANDO EXISTE UN ERROR EN LAS OPERACIONES POR UNA MALA DESIGNACION DE DATOS.	89
5.6.-	COMPARACION DE RESULTADOS OBTENIDOS PARA DESCRIBIR EL FRENTE DE HUMEDECIMIENTO EN UN SUELO POR DISTINTOS METODOS.	94
6.1.-	CURVAS DE ISOCONTENIDOS DE HUMEDAD PARA DIFERENTES TIEMPOS ACUMULADOS DE INFILTRACION DE UN SUELO LIMO ARENOSO	96
6.2.-	CURVAS DE ISOCONTENIDOS DE HUMEDAD PARA DIFERENTES TIEMPOS ACUMULADOS DE INFILTRACION DE UN SUELO ARCILLOSO.	100
6.3.-	CURVAS DE ISOCONTENIDOS DE HUMEDAD PARA DIFERENTES TIEMPOS ACUMULADOS DE INFILTRACION DE UN SUELO ARENOSO.	106

7.1.-	COMPARACION DE DATOS REALES DE UN EXPERIMENTO CON TRES DIFERENTES MODELOS DE APROXIMACION.	108
7.2.-	VOLUMENES DE AGUA CONSUMIDOS POR TRES DIFERENTES TEXTURAS DE SUELO	109

INDICE DE TABLAS

5.1.-	CARACTERISTICAS HIDRODINAMICAS DE ALGUNOS SUELOS	90
5.2.-	CONTENIDO DE HUMEDAD RESIDUAL (θ_r) PARA DIFERENTES SUELOS.	92
5.3.-	CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA A SATURACION (K_s) PARA DIFERENTES SUELOS	93

1.- INTRODUCCION

La interacción armónica entre los recursos agua-suelo-planta, depende básicamente de las condiciones del medio ambiente en donde se desarrollen. Durante mucho tiempo (quizás siglos), se ha tratado de interpretar cada una de las leyes que explican los fenómenos presentes en estas interrelaciones; en muchos casos, se han dado aproximaciones que ayudan a representar casi idénticamente a dichos fenómenos; pero en algunos otros, existe una gran variedad de posibilidades que se adaptan a condiciones específicas de ellos, y por lo tanto no hay una explicación única para los mismos. Tal es el caso de la Ingeniería de Riego, la cual cuenta con un acervo de aplicaciones muy amplio, y los fenómenos que en ella se estudian, pueden ser explicados por medio de distintas técnicas que finalmente llevan a una representación aproximada de ellos.

Particularmente el fenómeno de movimiento del agua en suelos

saturados y no saturados ha sido un tema ampliamente estudiado desde 1856 (Henri Darcy), y con el transcurso de los años, se han venido desarrollando e implantando teorías y técnicas para su explicación, y en la actualidad aun no se han resuelto totalmente estos problemas.

Con la interpretación adecuada del papel que juega cada uno de los factores presentes en el fenómeno de movimiento del agua en suelos saturados y no saturados, puede llegar a predecirse de manera casi exacta una representación simulada de tal movimiento.

Esto puede ser de gran utilidad porque para el caso específico del riego, ya sea por gravedad o presurizado, pueden predecirse los volúmenes de agua por aplicar y los tiempos para el suministro de ellos. Es claro que para ésto, se hace necesario contar con una caracterización adecuada de la hidrodinámica de los suelos, así como la aplicación de avanzadas técnicas matemáticas de apoyo.

En el presente estudio se desarrolla un modelo matemático que simula el movimiento del agua en suelos saturados y no saturados para dos direcciones de flujo.

Con la propuesta y desarrollo de este documento, no se pretende dar a conocer nuevas técnicas de apoyo para lograr una administración adecuada del recurso agua, simplemente se expone otra forma claramente justificada que podría ser utilizada con estos fines.

Los objetivos principales que se han planteado en la presente tesis son los siguientes:

A.- Desarrollar un modelo matemático que dé solución a la ecuación que rige el movimiento del agua en suelos saturados y

parcialmente saturados para dos direcciones de flujo (Richards, 1931).

B.- Obtener las limitaciones teóricas a las que está sujeta la aplicación del modelo matemático por desarrollar.

C.- Aplicar el modelo matemático desarrollado, al caso específico de un canal rectangular, cuyo eje X esté localizado sobre la plantilla de él, y el eje Z divida en dos secciones simétricas a dicho canal; es decir, que se localice al centro del mismo.

D.- Elaborar un programa de cómputo, en el que se aplique el esquema numérico desarrollado, al caso específico del canal rectangular.

E.- Obtener los perfiles de humedecimiento para comparar el movimiento del agua en los sentidos X y Z.

Las hipótesis formuladas son:

A.- La aplicación de métodos numéricos para dar solución a la ecuación de Richards (1931); que rige el movimiento del agua en suelos saturados y no saturados, ayudan a simular y predecir tal movimiento.

B.- El cambio de humedad en el eje horizontal (X), se manifiesta lentamente en comparación con el eje vertical (Z), esto depende de la relación de promedios pesados que se utilice en el esquema numérico por desarrollar.

C.- La aplicación de algunas formas simplificadas para la obtención de características hidrodinámicas de los suelos, ayudan a dar solución rápida a la ecuación de Richards.

D.- La aplicación del esquema numérico desarrollado, al caso específico de un canal de sección rectangular, ayuda a diferenciar y evaluar claramente los cambios del potencial de humedad en el sentido de los ejes X y Z, lo que permite conocer las líneas de isocontenidos de humedad para cualquier sección geométrica de canal.

En el capítulo dos de esta tesis se presenta una reseña histórica de los trabajos realizados sobre el tema.

El capítulo tres contiene la deducción de las ecuaciones fundamentales para obtener la ecuación de Richards, así como las características hidrodinámicas del suelo que serán utilizadas como apoyo en el desarrollo del esquema numérico.

Después de haber obtenido la ecuación por resolver, en el capítulo cuatro se da solución numérica a las ecuaciones fundamentales; dando la justificación de cada criterio aplicado.

En el capítulo cinco se mencionan los materiales utilizados durante el desarrollo de la tesis, y se describe también la metodología a seguir para la designación de datos de entrada al programa de computo; así como la secuencia de ejecución del mismo.

Se presentan ejemplos de aplicación para tres diferentes texturas de suelo en el capítulo seis, donde se mencionan otros resultados obtenidos durante el desarrollo y conclusión de la tesis.

Finalmente en el capítulo siete se exponen algunas discusiones y conclusiones del trabajo realizado, destacando las ideas principales del mismo.

2.- ANTECEDENTES

El estudio del movimiento del agua en los suelos, tomó especial interés a mediados del siglo XIX con Henri Darcy, quién realizó estudios de infiltración, los cuales fueron requeridos para las obras hidráulicas de Dijón (Levi, 1989).

Tiempo después, Richards (1931), propone las ecuaciones para calcular el cambio del potencial de humedad en dos direcciones de flujo para suelos saturados y parcialmente saturados, las cuales son diferenciales parciales de orden superior y carecen de una solución analítica exacta.

Kostiakov (1932) desarrolla una metodología para calcular la lámina de infiltración acumulada en cualquier instante, para una gran variedad de suelos. El cambio de potencial analizado incluye las direcciones de flujo en un plano vertical X y Z, pero no se marcan las diferencias entre uno y otro.

Rubin (1968), realiza un análisis teórico del flujo de agua en suelos no saturados y parcialmente saturados, para dos dimensiones; mediante la solución de las ecuaciones del flujo transitorio de Darcy (1856). Dichas ecuaciones fueron resueltas numéricamente con la ayuda de métodos implícitos (ADI) para las dos direcciones en forma alternante.

Se propusieron dos opciones de solución. La primera considera que predomina la infiltración horizontal y la segunda, el drenaje por grietas; los resultados obtenidos para el proceso de infiltración horizontal, indican que éste incluye los componentes del flujo de salida, los cuales se deben principalmente a la variación gravitacional inducida en la conductividad hidráulica a lo largo del plano por donde penetra el flujo. Estos componentes pueden materialmente afectar el curso de la infiltración, especialmente durante sus primeras etapas. Los resultados para el caso del drenaje por grietas, demuestran que el flujo de agua transitorio dentro de la zona no saturada y el flujo de salida de la zona de infiltración, pueden afectar significativamente los procesos de nivel freático y los rangos totales del flujo de salida.

Ruats (1970), realiza un análisis de la infiltración estacionaria para un arreglo de igual espaciamiento en surcos, en la superficie de un perfil de suelo semi-infinito. Sus discusiones están basadas en la consideración de que la conductividad hidráulica es una función exponencial de la carga de presión; además demuestra que bajo esta consideración, la función de corriente para flujos en el plano, satisface a alguna ecuación diferencial parcial. Se obtienen expresiones explícitas para las funciones de corriente, el flujo, el potencial matricial, la carga de presión y la carga total.

Brandt et al (1971), exponen consideraciones teóricas y

matemáticas que son utilizadas para analizar la infiltración transitoria multidimensional del riego por goteo. Fueron considerados dos modelos matemáticos, el primero es un modelo de flujo sobre el plano, que considera las coordenadas cartesianas X y Z; el segundo corresponde a un modelo de flujo cilíndrico, descrito por las coordenadas cilíndricas r y z. La ecuación de flujo de agua para la difusión en suelos no saturados, fue resuelta numéricamente por una aproximación que combina los procedimientos no iterativos ADI con el método iterativo de Newton Raphson.

Los resultados numéricos fueron comparados con la simulación de Wooding para la infiltración estacionaria en una sección circular con solución unidimensional simple. Las comparaciones indican que el método es confiable y puede ser utilizado con la seguridad de que los resultados obtenidos se encuentran muy próximos a los valores reales. Resultados típicos demuestran la presencia del efecto de la descarga por goteo, en el contenido de agua en campo, la zona saturada de entrada de agua y el flujo de agua sobre la superficie del suelo.

Youngs (1972), obtiene la tasa de infiltración estacionaria (Infiltración básica) para tiempos largos de riego en canales de fondo plano y sección transversal semicircular, mediante experimentación a nivel laboratorio con suelos de textura arenosa.

Se obtuvieron resultados muy próximos a los encontrados con la teoría relacionada, la cual acepta que el flujo fue confinado a una región límite, saturada por una superficie capilar que es uniforme y vertical a grandes profundidades verticales.

La tasa de infiltración estacionaria para tiempos largos, fue también obtenida en laboratorio mediante experimentos con tanques infiltrómetros en suelos de textura arenosa para los casos en tres

dimensiones de infiltración en tanques circulares superficiales con fuentes hemisféricas. Los resultados concuerdan con las relaciones obtenidas utilizando un tanque electrolítico con aproximación a las condiciones de frontera de la región de flujo. Un método de análisis para tiempos largos de infiltración en canales de riego y cilindros infiltrómetros es propuesto, en el que la conductividad hidráulica y la carga de presión se determinan para el frente de humedecimiento de experimentos con diferentes tamaños de canales o cilindros infiltrómetros.

Van Genuchten (1980), propone una ecuación para predecir la conductividad hidráulica en suelos no saturados, la cual está encaminada a representar la curva que relaciona el Contenido de Humedad (θ), con la Carga de Presión (h).

La característica particular de la ecuación, es que puede tener una derivada exacta para la expresión analítica de la Conductividad Hidráulica relativa K_r , cuando es sustituida en los modelos predictivos de la conductividad hidráulica de Burdine o Mualem.

Las expresiones resultantes para K_r , tienen tres parámetros independientes, los cuales pueden ser obtenidos por modelos de retención de humedad que analizan y procesan datos experimentales. Los resultados obtenidos con la forma exacta de la expresión analítica basada en la teoría de Mualem, fue comparada con datos de conductividad hidráulica observada para cinco suelos con un amplio rango de propiedades hidráulicas.

La conductividad hidráulica no saturada fue muy próxima en cuatro de los cinco casos mencionados anteriormente, y se encontró que una explicación razonable de la curva de retención de humedad en contenidos de humedad bajos, es importante para una acertada predicción de la conductividad hidráulica en suelos no saturados.

Fuentes (1985), propone que el contenido de humedad residual (θ_r), que interviene en la ecuación que describe la curva característica de humedad de Van Genuchten (1980), sea igual a cero; por lo que existe una simplificación en ella, permitiendo la reducción de parámetros.

Davidson (1985), determina la infiltración en dos dimensiones de flujo, para un suelo que contenía regularmente espacios de grietas verticales llenos de agua, mediante una solución numérica en diferencias finitas a las ecuaciones de flujo para condiciones saturadas y no saturadas, esto para características hidráulicas de suelo elegidas.

El modelo de Green y Ampt dá resultados próximos a los obtenidos con la solución en diferencias finitas. Los valores de la infiltración acumulada y la tasa de infiltración (velocidad de infiltración) varían en un 4% para los resultados correspondientes a cada modelo.

Cuando el radio del agujero agrietado y la magnitud del potencial de humedad en el frente de humedecimiento son pequeños, los cálculos predicen que el movimiento del frente de humedecimiento de grietas adyacentes interactúan temporalmente en bloques adjuntos no húmedos para diferentes eventos, coincidiendo con una repentina caída en la tasa de infiltración (velocidad de infiltración) y con la desigualdad de los datos correspondientes al modelo de Green y Ampt.

Kool et al (1985), realizan una evaluación de la factibilidad numérica para determinar las funciones de retención de humedad y conductividad hidráulica, ambas simultáneamente para la etapa experimental de la presión del flujo en suelos, por medio de un método de estimación de parámetros.

Las propiedades hidráulicas del suelo se asume que están representadas por la expresión de Van Genuchten, que involucra tres parámetros: Contenido de humedad residual y los parámetros α y n . Estos parámetros son evaluados por ecuaciones no lineales encontradas de la predicción de observar el flujo acumulativo con el tiempo. Experimentos numéricos fueron planteados para dos suelos hipotéticos, para evaluar las limitaciones del método impuesto por obligación de errores únicos y de sensibilidad. Los resultados indican que una acertada solución de parámetros de identificación del problema pueden ser obtenidos si:

i).- El dato de entrada incluye volúmenes de flujo acumulado en el tiempo, correspondiente a una parte mínima del flujo inicial y adicionalmente al volumen del flujo final.

ii).- El flujo acumulativo corresponde a una fracción mayor (mayor a 0.5) del total de agua entre el contenido de humedad a saturación y residual.

iii).- El error experimental en la medición del flujo de salida es bajo.

iv).- La estimación de parámetros iniciales están razonablemente próximos a sus valores verdaderos.

Kool *et al* (1985), realizan una evaluación de las propiedades hidráulicas no saturadas de cuatro suelos, mediante la determinación de los cinco parámetros que intervienen en el modelo hidráulico de Van Genuchten (1980). La conductividad hidráulica a saturación (K_s) y el contenido de humedad a saturación (θ_s) fueron directamente medidos y evaluados del contenido de humedad residual (θ_r) y los parámetros α y n fueron evaluados por un método de inversión no lineal que minimiza varias funciones objetivo.

El método I utiliza una función objetivo que incluye sumas y derivadas cuadradas entre mediciones de flujo de salida acumulado con el tiempo $Q(t)$, para la etapa uno, la desorción de la presión y la simulación numérica del flujo de salida de saturación para una carga de presión final $h = -10$ m.

El método II complementa los datos $Q(t)$ con la medición equilibrada del contenido de humedad θ y $h = -150$ m, mientras el método III emplea solamente el equilibrio de los datos $\theta(h)$.

El método I proporciona la descripción más exacta para $Q(t)$ y la difusividad hidráulica $D(\theta)$, determinada independientemente. Una descripción adecuada de $\theta(h)$ se obtiene con el rango de la primera etapa del experimento pero las predicciones del contenido de humedad (θ) son menos confiables especialmente para suelos con textura fina. El método II amplía el rango de validación del $\theta(h)$ precedido para bajos contenidos de humedad θ , con efectos generalmente pequeños en la predicción de $D(\theta)$ y $Q(t)$. El método III da la mejor descripción de $\theta(h)$ y del caudal exacto para $Q(t)$ y $D(\theta)$. También son discutidas las implicaciones para la rutina de evaluación de las distintas propiedades.

Healy y Warrick (1988), proponen un método para estimar la variación en el tiempo, del límite para el frente de humedecimiento y el contenido de humedad que se obtiene en el suelo como respuesta a la infiltración de un punto fuente. El método está basado en una solución numérica en diferencias finitas de una forma adimensional de las ecuaciones de Richards, para flujo axialmente simétricos. La solución generalizada se obtiene a partir de ecuaciones empíricas, coeficientes de tablas para una gran variedad de suelos y diferentes fuentes de información.

Los resultados para puntos específicos son obtenidos por la aplicación de factores de escala para los resultados generalizados

y posiblemente alguna interpolación.

Se concluye que el método puede ser de gran utilidad en el diseño de sistemas de riego por goteo, por la estimación simple de las tasas y longitudes de aplicación de agua, así como el espaciamiento entre emisores de agua.

Warrick *et al* (1991), presentan un desarrollo matemático para dar solución a las ecuaciones de Richards para tiempos variables de infiltración. Los rangos de la infiltración están especificados como cantidad constantes con el tiempo. La respuesta está expresada como una suma de dos términos, el primero es una función de la infiltración instantánea y el segundo una integral para contabilizar la distribución de agua dentro del perfil para los registros en el transcurso de la infiltración previa.

Fuentes *et al* (1991), analizan la aplicabilidad de las ecuaciones para describir las características hidrodinámicas de los suelos $h(\theta)$ y $K(\theta)$, a través de un criterio especial basado en las condiciones integrales de la ecuación de infiltración. Las funciones consideradas fueron las de Gardner (1958), las de Brooks y Corey (1964), las de Van Genuchten (1980) sujeta a las condiciones de Mualem (1976) y Burdine (1953), y la combinación de la de Van Genuchten (1980), con la de Brooks y Corey (1964).

Se muestra que muchas de las combinaciones de $h(\theta)$ y $K(\theta)$ o $K(h)$ fallan, cuando son examinadas sobre el amplio rango de suelos encontrados en situaciones de campo. Los mejores parámetros de ajuste se vuelven inconsistentes con la teoría de infiltración, especialmente para los suelos arcillosos.

La única combinación correcta es presentada por la ecuación de Van Genuchten, para $h(\theta)$ con la condición de Burdine $m = 1-2/n$ y la ecuación de Brooks y Corey para $K(\theta)$. Esta satisface la

condición de la infiltración para todo tipo de suelo, inclusive cuando es aplicada a los dos casos extremos utilizados por Green y Ampt (1911) y Talsma y Parlange (1972).

La dependencia mutua entre los parámetros de $h(\theta)$ y $K(\theta)$ es discutida en el contexto de la teoría desarrollada, esta última basada en 2 variables de escala, que caracterizan los suelos en función de su comportamiento hidrodinámico.

Paniconi *et al* (1991), proponen algunos procedimientos no iterativos para resolver las ecuaciones no lineales de Richards, y se comparan con los resultados de la metodología convencional del método iterativo de Newton y Picard.

Estrategias no iterativas para la solución de ecuaciones trascendentes no lineales, surgen de discretizaciones explícitas o lineales del tiempo, métodos de linealización adecuados, un segundo orden en los dos niveles del esquema "implícito factorizado" y un método de tercer orden a tres niveles "menos".

Los valores exactos de la eficiencia de estos esquemas y de los métodos de Newton y Picard, son evaluados para una serie de problemas de simulaciones del proceso de flujo en una dimensión en medios porosos no saturados. Los resultados indican que los sistemas con primer orden de exactitud están ineficientemente comparados con los resultados obtenidos de los métodos de segundo orden; que los esquemas de aproximación de segundo orden no iterativos pueden ser completamente comparables con los métodos iterativos de Newton y Picard; y que el esquema de Newton es tan eficiente como el de Picard, además de que los problemas altamente no lineales pueden ser resueltos con el mismo esquema de Picard. Los esquemas de aproximación no iterativos de segundo orden, aparentan ser una alternativa atractiva para los métodos iterativos, esto con el interés de que puedan ser comparados con

el comportamiento del esquema de tres niveles.

Se concluye que de las cuatro estrategias no iterativas presentadas, el esquema factorizado implícito es el más prometedor, y se sugiere mejorar las formulaciones del método.

Zaidel y Russo (1992), exponen los resultados obtenidos para la simulación trascendente del flujo vertical en suelos no saturados de diferentes suelos homogéneos inicialmente secos, utilizando las ecuaciones de Richards para una celda numérica relativamente amplia, donde no es universal el esquema de humedad para estimar el interbloqueo de conductividades capaz de dar una acertada solución de los resultados en etapas con fronteras húmedas, excepto para el esquema asociado con las transformaciones de Kirchhoff (KT). La principal inconveniencia de KT, es que solo debe ser aplicado a suelos heterogéneos. Un nuevo esquema de humedecimiento (AW), basado en el comportamiento asintótico de la función de conductividad hidráulica en la cercanía de la saturación residual, es propuesto.

Pruebas numéricas demuestran que el esquema AW describe la frontera húmeda en suelos homogéneos casi tan cercanamente como un esquema basado en KT. Se demuestra que la aplicabilidad del esquema AW para simular la infiltración del agua en suelos heterogéneos tiene una variación substancial vertical de propiedades hidráulicas. La extensión del esquema propuesto para grandes dimensiones es directo.

Vogel y Hopmans (1992), utilizan un modelo que simula el Flujo del agua por medio de la técnica del elemento finito para simular la infiltración del riego en surcos con bajo nivel freático.

Este modelo sugiere que las aplicaciones son primeramente

aquellas que se enfocan al flujo de agua en zonas no saturadas. Mediciones de suelo *in situ*, fueron utilizadas para compararse con la infiltración de agua simulada para sistemas en dos capas de suelo. La infiltración simulada y medida fueron próximas para un evento de riego, pero significativamente diferentes en otros.

Para investigar posteriormente las causas de discrepancia entre la infiltración simulada y la medida, fue también aplicado el modelo del flujo de agua para simular la influencia de la variable suelo y las características del flujo de la infiltración en un surco.

Se simuló la infiltración para la variación de niveles de agua en el surco, con surcos adyacentes llenos de agua y secos, estudiando el efecto de una superficie impermeable y comparando perfiles de suelo homogéneos con heterogéneos, contra regiones que tenían preferencia de flujo.

El movimiento de agua lateral fue encontrado insignificante, y la influencia de la variación de niveles de agua en el surco, fue casi completamente descrito por el cambio en el perímetro mojado.

La introducción de una conductividad hidráulica espacialmente variada en las dos dimensiones de suelo, tiene como resultado una respuesta inmediata del nivel freático para la infiltración ponderada.

Haverkamp *et al* (1994), proponen que la medición de las propiedades hidráulicas no alteradas, pueden ser realizadas *in situ*, mediante el análisis del flujo no confinado del cilindro infiltrómetro de tensión, de donde la ecuación de infiltración puede ser derivada.

Se presenta el desarrollo de una ecuación de infiltración analítica en tres dimensiones, basada en el uso de parámetros físicos, medidos y ajustados por la variación inicial y condiciones límites. La ecuación es válida sobre todo el dominio del tiempo.

Por propósitos prácticos se deriva por medio de esta metodología una solución simple. Las ecuaciones completa y simplificada dan excelentes resultados, comparados con otros resultados reportados en la literatura, y son particularmente utilizados para determinar las propiedades hidráulicas del suelo a través de la aplicación de procedimientos inversos.

3.- ECUACIONES FUNDAMENTALES

3.1.- ECUACIONES DE BASE

3.1.1.- ECUACION DE CONSERVACION DE LA MASA

El principio de conservación de masa establece, que en un volumen de control la masa que entra menos la masa que sale en la unidad de tiempo, es igual al cambio de almacenamiento.

Para deducir la ecuación de conservación de masa del agua en el suelo, considerese el volumen elemental de suelo mostrado en la figura 3.1.

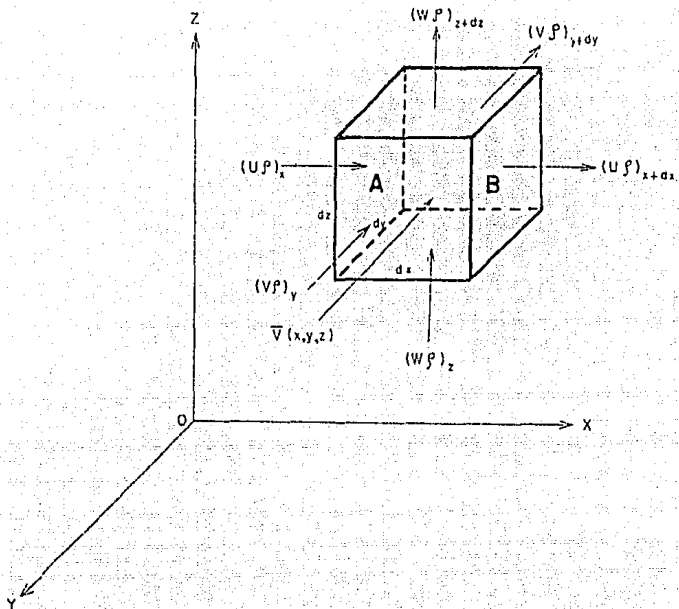


FIGURA 3.1. Esquema para la deducción de la ecuación de conservación de la masa.

Por la cara A, normal al eje O_x , entra una masa de fluido M_x en el tiempo dt .

$$M_x = (\rho u)_x dy dz dt$$

siendo u la velocidad según el eje x en x , y ρ la masa del agua contenida en el volumen elemental.

Por la cara B, opuesta a la cara A, sale una masa de fluido M_{x+dx} en el tiempo dt .

$$M_{x+dx} = (\rho u)_{x+dx} dy dz dt$$

La diferencia entre la entrada y la salida es (aplicando el desarrollo en serie de Taylor y despreciando los términos de orden mayor a 1):

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= M_x - M_{x+dx} = dy dz dt [(\rho u)_x - (\rho u)_{x+dx}] \\ &= - dx dy dz dt \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \end{aligned}$$

La variación de masa por unidad de tiempo y unidad de volumen, $\Delta \mu_x$, será:

$$\Delta \mu_x = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

Similarmente según los ejes y, z puede establecerse:

$$\Delta \mu_y = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

$$\Delta \mu_z = - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

en las que v y w son respectivamente las componentes del vector velocidad \vec{v} según los ejes y y z.

Sumando las tres ecuaciones se obtiene la diferencia entre la entrada y la salida que vale:

$$\Delta \mu = \Delta \mu_x + \Delta \mu_y + \Delta \mu_z = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]$$

y en notación vectorial

$$\Delta\mu = - \operatorname{div} (\rho \overline{v})$$

donde:

\overline{v} = es el vector de velocidad (u, v, w).

Según el principio de conservación de masa se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} (\rho \overline{v})$$

donde

$$\rho = \rho_w \theta$$

con θ el contenido volumétrico de agua en el suelo, definido como el volumen de agua (V_w) con respecto al volumen total (V_t):

$$\theta = \frac{V_w}{V_t}$$

donde

V_w , Volumen de agua, cm^3

V_t , Volumen total, cm^3

y ρ_w , la densidad del agua, g/cm^3 .

De la definición de masa del agua se sabe:

$$M_w = \rho V_w = \rho_w \theta \Delta x \Delta y \Delta z$$

por lo que la variación de masa ($\Delta\mu$) con respecto al tiempo resultará:

$$\Delta\mu = \frac{\partial (\rho_w \theta)}{\partial t}$$

y al sustituir en la igualdad de notación vectorial:

$$\frac{\partial (\rho_w \theta)}{\partial t} + \text{div} (\rho_w \theta \bar{v}) = 0 \quad \dots (3.2)$$

si $\bar{q} = \theta \bar{v}$ y ρ_w es considerada constante, se obtiene finalmente el principio de conservación macroscópica de masa en el suelo, representada como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div} (\bar{q}) = 0 \quad \dots (3.3)$$

3.1.2.- LA LEY DE DARCY

En 1856, Henri Darcy propone una ecuación para explicar el comportamiento de la infiltración a través de columnas de suelo totalmente saturadas de agua. En ella establece que el caudal descargado por una columna de suelo, es proporcional a la sección transversal por donde atraviesa (A), y a la diferencia de carga hidráulica (ΔH), e inversamente proporcional a la longitud de la columna de suelo L por donde atraviesa el flujo.

$$Q = - K_s \frac{A}{L} \Delta H$$

el caudal que fluye por una área unitaria será:

$$q = \frac{Q}{A}, \text{ por lo tanto } q = - K_s \frac{\Delta H}{\Delta L}$$

Cuando $\Delta L \rightarrow 0$, la ley de Darcy se escribe como sigue

$$q = - K_s \frac{dH}{dL}$$

donde K_s es la conductividad hidráulica a saturación, m/s.

La ley de Darcy se generaliza a los medios no saturados considerando que la conductividad hidráulica depende del contenido del agua en el suelo (θ); por lo que las componentes del flujo en el espacio cartesiano se escribe como:

$$q_x = - K_x \frac{\partial H}{\partial x}, \quad q_y = - K_y \frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{y} \quad , \quad q_z = - K_z \frac{\partial H}{\partial z}$$

y sustituyendo las igualdades anteriores en la ec. de caudal unitario total q , se tiene:

$$q = -K_x \frac{\partial H}{\partial x} i - K_y \frac{\partial H}{\partial y} j - K_z \frac{\partial H}{\partial z} k \quad \dots (3.4)$$

La ec. 3.4 es conocida como la ley de Darcy generalizada para suelos parcialmente saturados.

3.1.3.- LA ECUACION DE RICHARDS L. A. (1931)

Sustituyendo la ley de Darcy generalizada (ec. 3.4), en la ecuación de conservación macroscópica de masa (3.3) se obtiene la expresión:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial H}{\partial z} \right] \quad \dots (3.5)$$

donde K_x , K_y y K_z son las conductividades hidráulicas del suelo [L/T] y H es el potencial hidráulico del agua en el suelo [L].

Cuando el agua en el suelo está a una presión hidrostática mayor que la atmosférica, su potencial de presión se considera positivo. Cuando el agua está a una presión menor que la atmosférica, entonces su potencial de presión es considerado como negativo; es por esto que el agua debajo de la superficie libre tiene un potencial de presión positivo, cero en la superficie libre, y negativo para el agua que está en un capilar arriba de la superficie libre.

El potencial de presión en el suelo, se encuentra por debajo del valor de la presión atmosférica; por lo tanto es considerado como negativo.

Así, el potencial de presión total (H) del suelo está representado como:

$$H = h(\theta) - z$$

donde

h, es el potencial de presión [L], mismo que en la zona no saturada es negativo y función de θ .

z, es el potencial gravitacional [L].

Derivando la función que representa al potencial hidráulico H en el suelo, con respecto a las direcciones x, y, z, se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}; \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}; \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z} - 1$$

Con la finalidad de homogeneizar la ecuación 3.5 en h, Richards (1931) incluyó en ella, el concepto de capacidad específica C(h), definido por:

$$C(h) = \frac{d\theta}{dh}$$

De este modo, al aplicar la regla de la cadena en el lado izquierdo de la ecuación 3.5 y sustituyendo las igualdades previamente definidas, se obtiene:

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_x(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y(h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \frac{\partial K_z(h)}{\partial z} \dots (3.6)$$

Ahora, realizando operaciones en la ec. anterior se tiene

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = K_x(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y(h) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z(h) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{\partial K_z(h)}{\partial z} + \frac{\partial K_x(h)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial K_y(h)}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y}$$

en donde, por las propiedades de la diferenciación parcial se aplica la siguiente igualdad

$$\frac{\partial K_z(h)}{\partial z} = \frac{dK_z(h)}{dh} \frac{\partial h}{\partial z}$$

que en analogía para las direcciones x e y son las igualdades

$$\frac{\partial K_x(h)}{\partial x} = \frac{dK_x(h)}{dh} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial K_y(h)}{\partial y} = \frac{dK_y(h)}{dh} \frac{\partial h}{\partial y}$$

las cuales, sustituidas en la ec. 3.6 generan la ecuación:

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = K_x(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{dK_x(h)}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 + K_y(h) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{dK_y(h)}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial y} \right]^2 + K_z(h) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{dK_z(h)}{dh} \frac{\partial h}{\partial z}$$

... (3.7)

que es la ecuación universal de Richards (1931) para tres direcciones de flujo.

Analizando la ecuación 3.7, se observa que omitiendo la participación de una de las dos direcciones del plano x-y, se tiene que, la igualdad debe cumplirse para las otras 2 restantes, es decir,

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = K_x(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{dK_x(h)}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 + K_z(h) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{dK_z(h)}{dh} \frac{\partial h}{\partial z}$$

... (3.8)

lo anterior debido a que en todo el miembro izquierdo de la ecuación se requieren los valores totales del potencial de presión (h).

También, cuando se analizan 2 direcciones de flujo, la participación de cada sentido es diferente, todas para hacer un total; ésto porque se está utilizando el valor de h, por lo tanto la ec. 3.8 transforma en:

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = (\vartheta - 1) \left[K_x(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{dK_x(h)}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 \right] + \vartheta K_z(h) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \vartheta \frac{dK_z(h)}{dh} \frac{\partial h}{\partial z}$$

... (3.9)

donde

ϑ es un factor de peso en la solución de la ecuación (adimensional), comprendido entre cero y uno.

3.2. - CARACTERISTICAS HIDRODINAMICAS DEL SUELO

Los suelos están formados por tres fases: la fase sólida, que constituye lo que se conoce en física de suelos como la matriz del suelo; la fase líquida que consiste del agua en el suelo, debido a que existen sustancias disueltas (también se le conoce como la solución del suelo); y la fase gaseosa conocida como la atmósfera del suelo. La fase sólida incluye las partículas minerales y la materia orgánica (Fig. 3.2).

La proporción relativa de las tres fases en el suelo varía continuamente, la cual depende del clima, vegetación y manejo del suelo.

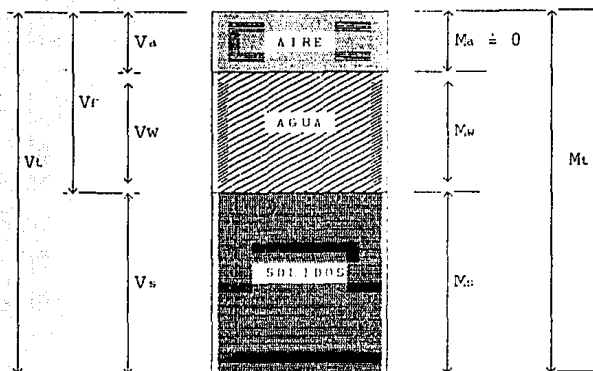


FIGURA 3.2 Esquema de las tres fases del suelo.

En la figura 3.2 se presenta en forma esquemática un suelo hipotético, donde se representan las masas y volúmenes de las tres fases en una muestra del suelo. En dicha figura, las masas de las fases están indicadas en el lado derecho: la masa del aire M_a , es despreciable con respecto a la masa de sólidos y de agua; la masa de agua M_w ; la masa de sólidos M_s ; y la Masa total. Estas masas pueden ser representadas por sus pesos (el producto de la masa por la aceleración de la gravedad). Los volúmenes de los mismos componentes están indicados al lado izquierdo del esquema: Volumen de aire V_a , Volumen de agua V_w , Volumen de poros V_r (igual a V_a más V_w), Volumen de sólidos V_s y Volumen total V_t .

3.2.1.- CURVA CARACTERÍSTICA DE HUMEDAD (θ - h).

Según Rendón (1992), el contenido volumétrico de humedad, relaciona el volumen de agua en el suelo (V_w) con respecto al volumen total de suelo (V_t).

Este parámetro se representa con la letra griega θ y se define como:

$$\theta = \frac{V_w}{V_t}$$

El agua en un suelo saturado se encuentra en equilibrio con el agua libre colocada a la misma elevación, por lo que el potencial de presión del agua en un suelo saturado es cero.

Si a una muestra de suelo saturado se le aplica una presión negativa muy pequeña, el agua no drena de la muestra, sino hasta que la presión negativa es igual o mayor que un valor crítico a partir del cual empiezan a drenar los poros más grandes del suelo. Este valor crítico se conoce en la literatura como valor de entrada de aire ("air entry value").

Conforme la presión negativa (en valor absoluto) aumenta, mayor cantidad de agua drena el suelo de los poros más grandes; quedando los poros más pequeños llenos de agua. Es decir, todo aumento de la presión negativa, produce una disminución del contenido de humedad. La cantidad de agua que contiene el suelo en equilibrio, es función del volumen de poros llenos de agua y por lo tanto, de la presión negativa aplicada. Esta función se puede medir experimentalmente y se representa en una gráfica como una curva conocida con el nombre de curva característica de humedad o curva de retención de humedad.

La determinación experimental de la curva característica de humedad, puede hacerse en el laboratorio o directamente en el campo. Una de las ecuaciones que sí cumple con la condicionante de que, cuando el contenido de humedad tiende a saturación, la tensión de humedad también tiende a cero y de esta manera queda representada la física del fenómeno, es la propuesta por Van Genuchten (1980).

La forma funcional para representar la curva $\theta - h$, propuesta por Van Genuchten, se ha vuelto muy popular en los últimos años, ya que, por un lado salva el problema de la discontinuidad en la Capacidad Específica que representa la de Brooks y Corey (1964), y por otro lado, el autor ha propuesto algunas funcionales para $K(h)$ obtenidas a partir de dos modelos predictivos. La relación $\theta(h)$ ligeramente modificada es la siguiente:

$$K(h) = K_e S_e^\eta$$

donde

$$\eta = \frac{1}{m} + 2, \text{ es adimensional.}$$

$$S_e(h) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{h}{h_g} \right)^n \right]^m}; \quad h < 0$$

$$S_e(h) = 1; \quad h \geq 0$$

donde

h_g = Valor empírico, m. También representado como α .

obsérvese que ésta es de hecho una generalización de aquella propuesta por Brutsaert (1966), para la cual $m = 1$.

Con la restricción de $m = 1 - 2/n$, (Fuentes, 1991), se obtiene la siguiente expresión analítica para $K(\theta)$, a partir del modelo de Burdine (1953).

$$K(h) = K_s S_e^\eta$$

donde

$$\eta = 1 / (n + 2)$$

o también

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{h}{\alpha} \right)^n \right]^m} \quad \dots (3.10)$$

siendo

$$m = 1 - \frac{2}{n}$$

donde:

θ_s = Contenido Volumétrico de humedad a saturación, cm^3/cm^3

θ_r = Contenido Volumétrico de humedad residual, cm^3/cm^3

h = Potencial de presión correspondiente al contenido de humedad θ , m.

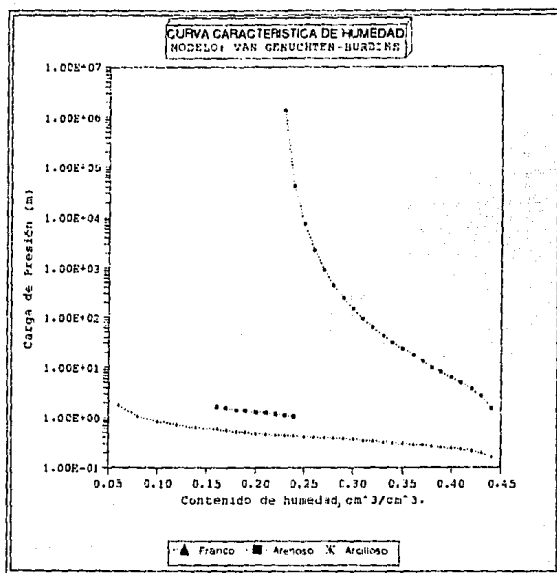
α = Parámetro empírico (también conocido como h_0), m.

n = Parámetro empírico, adimensional.

Fuentes (1985) supone que $\theta_r = 0$, por lo que la ec. 3.10 se puede escribir como:

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{h}{\alpha} \right)^n \right]^m} \quad \dots(3.11)$$

En la gráfica 3.1 se presenta la curva característica de humedad para suelos de textura arcillosa, franca y arenosa.



GRAFICA No. 3.1. Curva Característica de Humedad (θ-h), para tres diferentes texturas de suelo.

3.2.2.- CAPACIDAD ESPECIFICA C(h)

Se define como la pendiente de la curva característica de humedad, que es el cambio en el contenido de humedad correspondiente a un cambio unitario del potencial de presión (Richards, 1931), y está representada por la siguiente expresión:

$$C(h) = \frac{d\theta}{dh} \quad \dots(3.12)$$

Si se considera que la curva característica de humedad que se utilizará, es la propuesta por Van Genuchten (1980) y modificada por Fuentes (1985), ec. 3.11, la capacidad específica correspondiente es la siguiente:

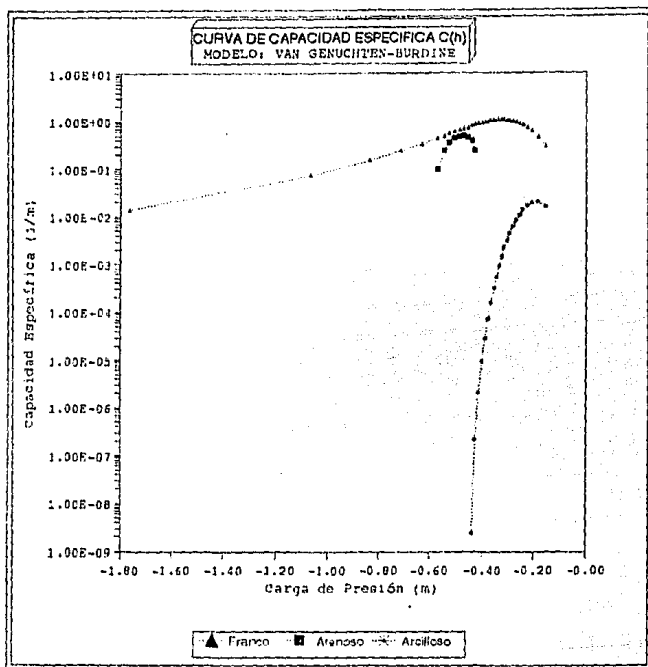
$$\frac{d\theta}{dh} = - \frac{(\theta_s - \theta_r) \cdot n \cdot \left(\frac{h}{\alpha}\right)^{n-1}}{\alpha \cdot \left[1 + \left(\frac{h}{\alpha}\right)^n\right]^{m+1}}; \quad h < 0 \quad \dots(3.13)$$

$$\frac{d\theta}{dh} = 0; \quad h \geq 0$$

La gráfica 3.2, presenta la capacidad específica para las tres texturas de suelo: arcillosa, franca y arenosa.

3.2.3.- CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA K(h)

Se define como el caudal que pasa por una sección unidad de suelo, bajo un gradiente unitario a una temperatura fija o determinada, sus dimensiones son las de la velocidad (L/T). Según Fuentes (1991), una función que describe el comportamiento de la conductividad hidráulica con respecto a la presión, es la combinación de las ecuaciones propuestas por Van Genuchten (1980) para $\theta(h)$ y la de Brooks y Corey (1964) para $K(\theta)$.



GRAFICA No. 3.2. Capacidad Específica C(h) para tres diferentes texturas de suelo.

Brooks y Corey (1964), proponen dos ecuaciones empíricas; la primera es para representar la curva característica de humedad $\theta - h$, la cual está representada como:

$$S_e(h) = \begin{cases} \left(\frac{h_{cr}}{h}\right)^\lambda & ; -\infty < h < h_{cr} \\ 1 & ; h_{cr} \leq h \leq 0 \end{cases}$$

donde

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$$

h_{cr} = Potencial de presión crítico, determinado experimentalmente.

La segunda corresponde a la expresión que representa a la Conductividad hidráulica $K(h)$, que fue obtenida con la introducción de la ecuación anterior (S_e), en el modelo de Burdine (1953); dada como:

$$K(h) = K_s S_e^\eta$$

donde

K_s = Conductividad hidráulica de saturación, determinada experimentalmente.

$$\eta = \frac{2}{\lambda} + 3$$

por lo tanto resultará

$$K(h) = K_s S_e^{2+3\lambda} ; -\infty < h < h_{cr}$$

$$K(h) = K_s ; h_{cr} \leq h \leq 0$$

Aplicando la expresión para S_e propuesta por Van Genuchten y modificada por Fuentes, esta ecuación se transforma en:

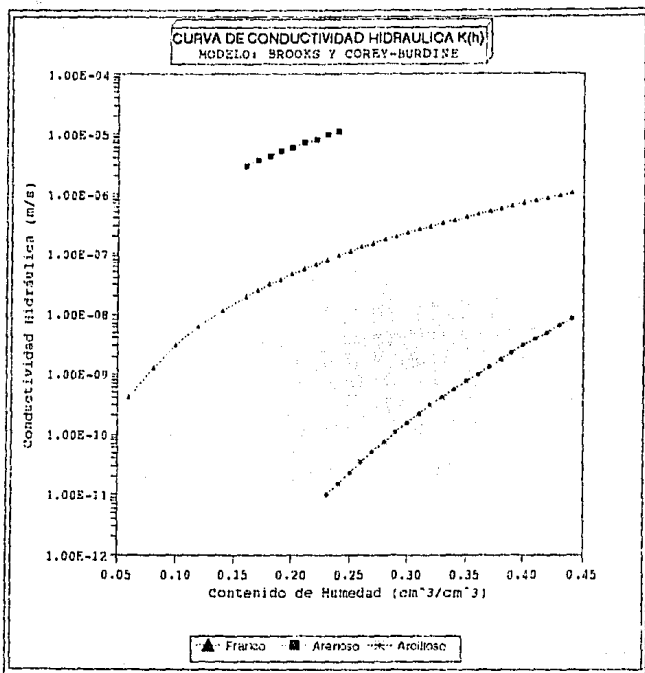
$$K(\theta) = K_s \left[\frac{\theta}{\theta_s} \right]^\beta \quad \text{ó} \quad K(h) = \frac{K_s}{\left[1 + \left(\frac{h}{\alpha} \right)^n \right]^{\beta/m}} \quad \dots (3.14)$$

$$\beta = \frac{1}{m} + 1 + p$$

donde p es un valor que depende de función de ajuste utilizada por diferentes autores.

En la gráfica 3.3 se presenta el resultado de aplicar la ecuación 3.14 a las texturas de suelo arcillosa, franca y arenosa con $p = 1$.

Finalmente se enmarca que dentro del contexto de los análisis realizados por Fuentes R. C. et al (1989), se puede establecer sin ambigüedades que: la combinación representada por la ecuación de Van Genuchten (1980), con la relación $m = 1 - 2/n$ y por la ecuación de Brooks y Corey (1964), la primera relacionando el potencial de presión con el contenido de humedad y la segunda relacionando la conductividad hidráulica con el contenido de humedad, cubre todo el comportamiento hidrodinámico posible de los suelos no saturados.



GRAFICA No. 3.3. Conductividad Hidráulica $K(\theta)$, para tres diferentes texturas de suelo.

4.- SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES

4.1.- CONCEPTOS BASICOS

La ecuación de Richards (Ecs. 3.7, 1931), es del tipo diferencial parcial de orden superior, que calcula el cambio de potencial de presión (h) en suelos parcialmente saturados y no saturados, cuando estos son sometidos a fuerzas de tensión de humedad superiores a las de cohesión, adhesión y tensión superficial que guardan las partículas del agua con las partículas de los sólidos del suelo.

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = K_x(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{dK_x(h)}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 + K_y(h) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{dK_y(h)}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial y} \right]^2 + K_z(h) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{dK_z(h)}{dh} \frac{\partial h}{\partial z}$$

... (4.1)

Por el análisis expuesto en el capítulo anterior, puede representarse esta ecuación, en dos de sus direcciones:

$$\left[C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \right]_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad \dots (4.1a)$$

$$\left[C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \right]_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(h)}{\partial z} \quad \dots (4.1b)$$

Pueden calcularse con ellas, los cambios del potencial de presión en las direcciones de flujo x , y y z ; donde x y y , son las direcciones de flujo en el plano (planta) y z , corresponde a la dirección de flujo vertical.

Con fines prácticos, se considera aquí que el flujo sobre el plano se lleva acabo en forma radial, por lo que, puede analizarse el sentido de flujo x ó y .

Los términos que participan en las ecuaciones de Richards, básicamente pertenecen a las características hidrodinámicas de los suelos, y son mencionadas a continuación:

- h - Carga de tensión de humedad, en m.
- x - Dirección de flujo sobre el plano, distancia analizada en este sentido, en m.
- z - Dirección de flujo vertical, distancia analizada en este sentido, en m.
- t - Tiempo, en seg.
- $K(h)$ - Conductividad hidráulica, en m/seg.
- $C(h)$ - Capacidad específica, definida como:

$$C(h) = \frac{d\theta}{dh}$$

4.1.1.- CLASIFICACION DE LA ECUACION DE RICHARDS

Raras veces se puede hacer un análisis formal de ecuaciones no lineales, afortunadamente muchas de las ecuaciones de interés práctico son lineales o casi lineales.

Una clase de ecuaciones diferenciales de segundo orden que es frecuente encontrar, son del tipo :

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D \frac{\partial f}{\partial x} + E \frac{\partial f}{\partial y} + Ff + G = 0 \quad \dots (4.2)$$

Cuando A, B, C, D, E, F y G (ec. 4.2) son funciones de x e y, corresponde al caso de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden, pero si estas funciones dependen de x y f, se dice que son cuasi-lineales.

Se dice que la ecuación anterior puede ser de tres tipos, según resulte el valor de $B^2 - 4AC$ respecto a cero, esto es, si:

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC < 0 & \text{ es elíptica} \\ B^2 - 4AC = 0 & \text{ es parabólica} \\ B^2 - 4AC > 0 & \text{ es hiperbólica} \end{aligned}$$

en atención a esta clasificación, la búsqueda de la solución puede hacerse con diferentes métodos.

La elíptica es una ecuación diferencial parcial que suele resolverse por medio de los métodos elemento finito o diferencias finitas.

La parabólica es una ecuación diferencial parcial que se acostumbra resolver por el método de diferencias finitas.

La hiperbólica es una ecuación diferencial parcial cuya solución puede obtenerse por los métodos de diferencias finitas o el de las características.

Debido a la forma en que está planteada la ecuación de Richards (4.1) se realizará una clasificación de la misma, primero con (x,t) y posteriormente con (z,t) , para finalmente relacionarlas mediante la teoría de promedios pesados.

La clasificación de la ecuación de Richards, corresponde a una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico para las direcciones x y z ; por lo tanto, un método adecuado para dar solución a esta ecuación puede ser el de diferencias finitas.

4.2.- DESARROLLO DEL MODELO NUMERICO

La finalidad de la presente tesis, es dar solución a la ecuación de Richards, considerando flujo en las direcciones x y z , por lo que al aplicar el método, deben considerarse en cada elemento diferencial analizado, la evaluación de las dos ecuaciones (Ecs. 4.1a y 4.1b); de esta manera resulta:

$$C(h)_T = \frac{C(h)_x + C(h)_y}{2} \quad \text{o también}$$

$$\vartheta C(h)_y + (1-\vartheta) C(h)_x = C(h)_T \quad \text{donde :}$$

$C(h)_T$, Capacidad específica total

$C(h)_x$, Capacidad específica en el sentido de flujo x

$C(h)_z$, Capacidad específica en el sentido de flujo z

ν , Factor de peso.

De igual forma:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_T = \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_z}{2} \quad \text{o también}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_T = \nu \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_z + (1-\nu) \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_x$$

despejando de la ecuación de Richards para cada dirección de flujo los valores de $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)$, considerando el criterio del factor de peso (ν) y sustituyendo en la ecuación anterior (donde se calcula $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_T$) resulta:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_T = \nu \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial z} \left[K(h)_z \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(h)_z}{\partial z}}{C(h)_z} \right\} +$$

$$(1-\nu) \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left[K(h)_x \frac{\partial h}{\partial x} \right]}{C(h)_x} \right\} \quad \dots (4.3)$$

multiplicando y simplificando la ecuación 4.3, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_T = \frac{\nu K(h)_z}{C(h)_z} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\nu}{C(h)_z} \frac{\partial K(h)_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\nu}{C(h)_z} \frac{\partial K(h)_z}{\partial z} +$$

$$\frac{(1-\nu) K(h)_x}{C(h)_x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{C(h)_x} \frac{\partial K(h)_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots (4.4)$$

Ahora si, de la ecuación 4.4 se establece que:

$$U^2 = \frac{(1-\vartheta) K(h)_x}{C(h)_x}, \quad V^2 = \frac{\vartheta K(h)_z}{C(h)_z} \quad y$$

$$L = - \frac{\vartheta}{C(h)_z} \frac{\partial K(h)_z}{\partial z} + \frac{\vartheta}{C(h)_z} \frac{\partial K(h)_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{(1-\vartheta)}{C(h)_x} \frac{\partial K(h)_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}$$

tomará la forma:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_T = U^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + V^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + L \quad \dots (4.5)$$

La ecuación 4.5 puede analizarse en una sola dirección, es decir, si se comparan los términos con las ecuaciones de Laplace, del Calor y de la Onda (4.6, 4.7 y 4.8), resultará que es semejante a la ecuación del Calor; sin embargo, es necesario aclarar que existe una diferencia en esta comparación, porque el término a^2 de la ecuación de calor, es considerado como constante; sin embargo para este caso, V^2 , U^2 y L , dependen también de funciones diferenciales parciales donde interviene el valor de la variable de interés h .

Ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (4.6)$

Ecuación de Calor $\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \dots (4.7)$

Ecuación de la Onda $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \dots (4.8)$

La diferencia entre aplicar esquemas numéricos implícitos o explícitos, considerando el esquema planteado, consiste

básicamente en que el primero debe dar solución a un sistema de ecuaciones con una matriz de coeficientes pentadiagonal de orden $m \times m$, donde m es el número de diferenciales de toda la sección geométrica analizada, mismo que para el caso del movimiento de agua en suelos es demasiado grande; sin embargo, el segundo solamente utiliza los valores calculados actualmente para los cinco diferenciales que intervienen en la determinación del elemento diferencial central a ellos, es decir, con él solamente se evalúa una fórmula general que utiliza los valores actuales para calcular los posteriores; lo que simplifica en gran medida la obtención del resultado.

Para dar solución al problema planteado, se utilizará un esquema explícito, y se aplicará el método al esquema numérico desarrollado a continuación, denominado de Balance Local (Fuentes R. C., 1994).

Otra forma de expresar la ec. 4.3, es mediante la aplicación de derivadas ordinarias, a los términos donde se deriva parcialmente a la conductividad hidráulica (K) con respecto a la parcial de la carga de humedad (h).

Así, la ecuación 4.3 toma la forma:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) = \frac{\theta}{C(h)_z} K(h)_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\theta}{C(h)_z} \frac{dK(h)_z}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right]^2 - \frac{\theta}{C(h)_z} \frac{dK(h)_z}{dh} \frac{\partial h}{\partial z} +$$

$$\frac{(1-\theta) K(h)_x}{C(h)_x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{(1-\theta)}{C(h)_x} \frac{dK(h)_x}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 \dots (4.9)$$

Es necesario mencionar que aún no se han eliminado los subíndices x y z de la ec. 4.9, porque la evaluación de las características hidrodinámicas de conductividad hidráulica $K(h)$ y capacidad específica $C(h)$, se realizará sobre el elemento central

con posición $h_{i,j}$, por lo que, serán utilizados los valores que toman los elementos anterior y posterior a dicha posición en ambas direcciones.

Discretizando cada término de la ecuación donde intervienen las derivadas parciales, con el método de diferencias finitas, resulta:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h(x, z, t + \Delta t) - h(x, z, t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h(x - \Delta x, z, t) - 2h(x, z, t) + h(x + \Delta x, z, t)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{h(x, z - \Delta z, t) - 2h(x, z, t) + h(x, z + \Delta z, t)}{\Delta z^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x + \Delta x, z, t) - h(x, z, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h(x, z + \Delta z, t) - h(x, z, t)}{\Delta z}$$

Sustituyendo las discretizaciones anteriores, en la ecuación 4.9, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{h(x, z, t+\Delta t) - h(x, z, t)}{\Delta t} &= \frac{\theta}{C(h)_z} K(h)_z * \\
&\frac{h(x, z-\Delta z, t) - 2h(x, z, t) + h(x, z+\Delta z, t)}{\Delta z^2} \\
&+ \frac{\theta}{C(h)_z} \frac{dK(h)_z}{dh} \left[\frac{h(x, z+\Delta z, t) - h(x, z, t)}{\Delta z} \right]^2 \\
&- \frac{\theta}{C(h)_z} \frac{dK(h)_z}{dh} \frac{h(x, z+\Delta z, t) - h(x, z, t)}{\Delta z} \\
&+ \frac{(1-\theta)}{C(h)_x} K(h)_x * \\
&\frac{h(x-\Delta x, z, t) - 2h(x, z, t) + h(x+\Delta x, z, t)}{\Delta x^2} \\
&+ \frac{(1-\theta)}{C(h)_x} \frac{dK(h)_x}{dh} \left[\frac{h(x+\Delta x, z, t) - h(x, z, t)}{\Delta x} \right]^2 \\
&\dots (4.10)
\end{aligned}$$

Realizando un cambio de nomenclatura bajo las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll}
x = i\Delta x & x+\Delta x = (i+1)\Delta x & x-\Delta x = (i-1)\Delta x \\
z = j\Delta z & z+\Delta z = (j+1)\Delta z & z-\Delta z = (j-1)\Delta z \\
t = p\Delta t & t+\Delta t = (p+1)\Delta t & t-\Delta t = (p-1)\Delta t
\end{array}$$

se simplifica la notación de la ecuación; quedando los términos con los subíndices i , j y p , como en el siguiente ejemplo:

$$h(x, z, t) = h(i\Delta x, j\Delta z, p\Delta t) = h_{i,j,p}$$

De esta manera, la ecuación 4.10 toma la notación:

$$\begin{aligned}
\frac{h_{i,j,p+1} - h_{i,j,p}}{\Delta t} &= \frac{\vartheta K(h)_z}{C(h)_z} + \frac{h_{i,j-1,p} - 2h_{i,j,p} + h_{i,j+1,p}}{\Delta z^2} \\
&+ \frac{\vartheta}{C(h)_z} * \frac{dK(h)_z}{dh} * \left[\frac{h_{i,j+1,p} - h_{i,j,p}}{\Delta z} \right]^2 \\
&- \frac{\vartheta}{C(h)_z} * \frac{dK(h)_z}{dh} * \frac{h_{i,j+1,p} - h_{i,j,p}}{\Delta z} \\
&+ \frac{(1-\vartheta) K(h)_x}{C(h)_x} * \frac{h_{i-1,j,p} - 2h_{i,j,p} + h_{i+1,j,p}}{\Delta x^2} \\
&+ \frac{(1-\vartheta)}{C(h)_x} * \frac{dK(h)_x}{dh} * \left[\frac{h_{i+1,j,p} - h_{i,j,p}}{\Delta x} \right]^2
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

Despejando el término de interés $h_{i,j,p+1}$ de la ecuación 4.11, se obtiene:

$$\begin{aligned}
h_{i,j,p+1} &= \frac{\vartheta \Delta t K(h)_z}{C(h)_z} + \frac{h_{i,j-1,p} - 2h_{i,j,p} + h_{i,j+1,p}}{\Delta z^2} \\
&+ \frac{\vartheta \Delta t}{C(h)_z} * \frac{dK(h)_z}{dh} * \left[\frac{h_{i,j+1,p} - h_{i,j,p}}{\Delta z} \right]^2 \\
&- \frac{\vartheta \Delta t}{C(h)_z} * \frac{dK(h)_z}{dh} * \frac{h_{i,j+1,p} - h_{i,j,p}}{\Delta z} \\
&+ \frac{(1-\vartheta) \Delta t K(h)_x}{C(h)_x} + \frac{h_{i-1,j,p} - 2h_{i,j,p} + h_{i+1,j,p}}{\Delta x^2} \\
&+ \frac{(1-\vartheta) \Delta t}{C(h)_x} * \frac{dK(h)_x}{dh} * \left[\frac{h_{i+1,j,p} - h_{i,j,p}}{\Delta x} \right]^2 + h_{i,j,p}
\end{aligned}$$

... (4.12)

La ecuación 4.12, corresponde a la solución de la ecuación de Richards (ecs. 4.1a y 4.1b). De esta ecuación, los términos de capacidad específica $C(h)$ y las derivadas de la conductividad hidráulica $(\frac{dK(h)}{dh})$ para las direcciones X y Z, fueron expuestas en el capítulo 3; también, es necesario mencionar, que ésta será la ecuación que se aplicará en el programa de cómputo, por la facilidad de aplicación que ofrecen los términos antes mencionados.

Cabe aclarar que la ecuación 4.12, no es aplicable en la zona saturada ya que $C(h) = 0$ para $h \geq 0$, según la ecuación de Van Genuchten.

4.3.- PUNTOS CONSIDERADOS EN EL ESQUEMA NUMERICO

Las dos direcciones consideradas por la ecuación de Richards, corresponden a los sentidos de flujo horizontal x (ec. 4.1a) y flujo vertical z (ec. 4.1b), las cuales se aplicarán a los diferenciales de suelo con el esquema geométrico representado en la figura 4.1, donde se observa que son cinco los elementos diferenciales que participan en el cálculo del potencial de presión para el elemento que se encuentra en la posición central de ellos.

Lo anterior se establece considerando que se trata de dar solución a ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden (ecs. 4.1a y 4.1b), por lo tanto al desarrollar el modelo en diferencias finitas, resultará que los elementos con posiciones anterior y posterior a un elemento central intervendrán directamente en la determinación de éste, como es demostrado más adelante.

Con fines prácticos y para simplificar la aplicación del

esquema numérico por desarrollar, se eligió una forma rectangular para los elementos diferenciales; con ésto, la distribución de ellos favorece a la suposición, de que el canal puede dividirse en dos secciones simétricas; por lo tanto solamente se analizará una de ellas.

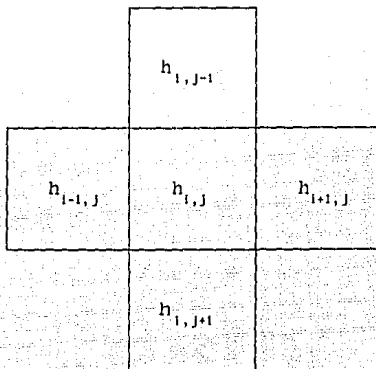


FIGURA 4.1. Esquema geométrico de los diferenciales que participan en el cálculo del Potencial de Presión en el suelo (h), para el elemento central de ellos ($h_{i,j}$).

4.4.- CONDICIONES DE FRONTERA

Muchos problemas de ciencia e ingeniería cuando se formulan matemáticamente, conducen a ecuaciones diferenciales parciales las cuales tienen asociados algunos requisitos que deben cumplir como las llamadas, condiciones de frontera o iniciales. El problema de determinar soluciones para una ecuación diferencial parcial que satisfaga las condiciones de frontera, se llama un problema de frontera o contorno.

Es de fundamental importancia, desde un punto de vista matemático así como físico, que uno pueda no sólo ser capaz de encontrar tales soluciones (o sea, que las soluciones existen) sino que para un problema dado, pueda asegurar una sola solución (es decir, que la solución es única).

Una función que satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots (4.13)$$

en una región R se llama armónica en R .

Sea R (Fig. 4.2) una región simplemente conexa acotada por una curva simple cerrada C . Dos tipos de problemas de frontera son de gran importancia.

- 1.- El problema de Dirichlet busca la determinación de una función ϕ que satisfaga la ecuación de Laplace (4.13) (o sea, es armónica) en R y toma valores prescritos sobre la frontera C .
- 2.- El problema de Neumann busca determinar una función ϕ que satisfaga la ecuación de Laplace (4.13) en R y cuya derivada normal $\partial\phi/\partial n$ tome valores prescritos sobre la frontera C .

Debe determinarse que tipo de problema se presenta sobre las condiciones de frontera impuestas al esquema propuesto:

Otra manera de representar la ecuación completa de Richards (1931) (ec. 4.1), es con la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \frac{\partial K}{\partial z} \quad \dots (4.14)$$

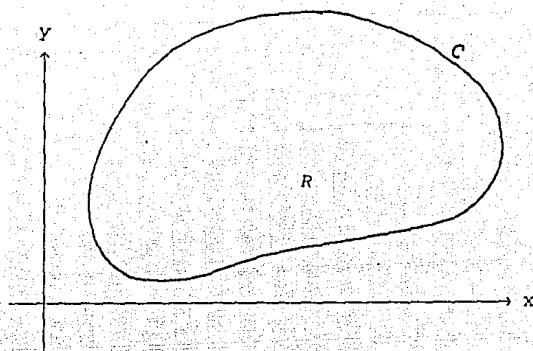


FIGURA 4.2. Región simplemente conexa acotada por una curva simple cerrada C.

El caudal unitario en dirección sobre el eje x, está representado por la ecuación:

$$q_x = -K \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots (4.15)$$

Ahora, sea $\phi (h)$ una función que describe el comportamiento de la conductividad hidráulica (Fig. 4.3)

$$\phi (h) = \int_{h_1}^h K (h) dh, \quad \frac{d\phi}{dh} = K (h), \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ec. 4.15 resultará:

$$q_x = -K (h) \frac{dh}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

y aplicando este resultado en la ec. 4.14, resultará:

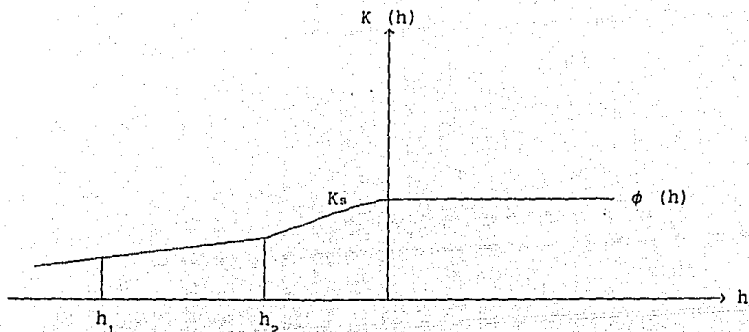


FIGURA 4.3. Comportamiento de la Conductividad hidráulica $K(h)$, con respecto a la tensión de humedad del suelo (h).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial K}{\partial z}, \text{ también}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dh} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{d\theta}{dh} \frac{dh}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{C(h)}{K(h)} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{C(\phi)}{K(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t} =$$

$G(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t}$, de igual manera:

$$\frac{\partial K}{\partial z} = \frac{dK}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{dK}{dh} \frac{dh}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{K(h)} \frac{dK}{dh} \frac{\partial \phi}{\partial z} = E(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

finalmente la ec. 4.14 se transforma en:

$$G(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - E(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

si $-G(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} - E(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial z}$, es igual a $F(\phi)$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + F(\phi) = 0 \quad \dots (4.16)$$

La ec. 4.16 es una representación general de la ec. 4.14 y permite la aplicación conforme de los criterios de las condiciones de frontera referidas a la ec. 4.13 de Laplace.

Así, las condiciones de frontera presentes sobre el esquema geométrico por analizarse, están representadas en la figura 4.4; donde para cualquier dirección, si el $q = 0$ entonces estará presente la condición de Neumann; y donde $q \neq 0$, será una condición de Dirichlet.

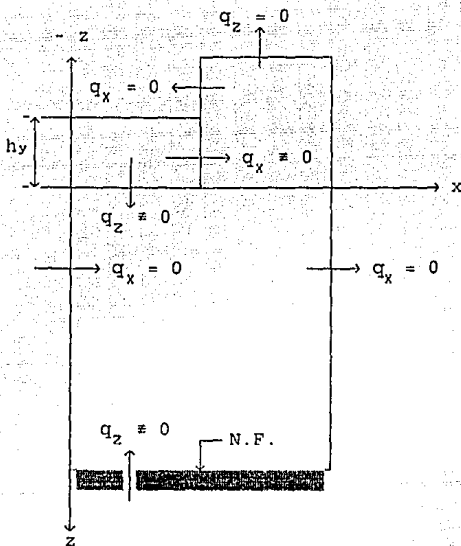


FIGURA 4.4. Condiciones de frontera sobre el esquema geométrico propuesto.

4.5.- APLICACION DEL MODELO MATEMATICO Y CONDICIONES DE FRONTERA, A LOS DIFERENTES ELEMENTOS GENERADOS POR EL ESQUEMA PROPUESTO.

Los elementos generados a partir del esquema geométrico propuesto, estan representados en la figura 4.5, de los cuales se hará una descripción detallada de acuerdo a la condición física presente en cada uno de ellos.

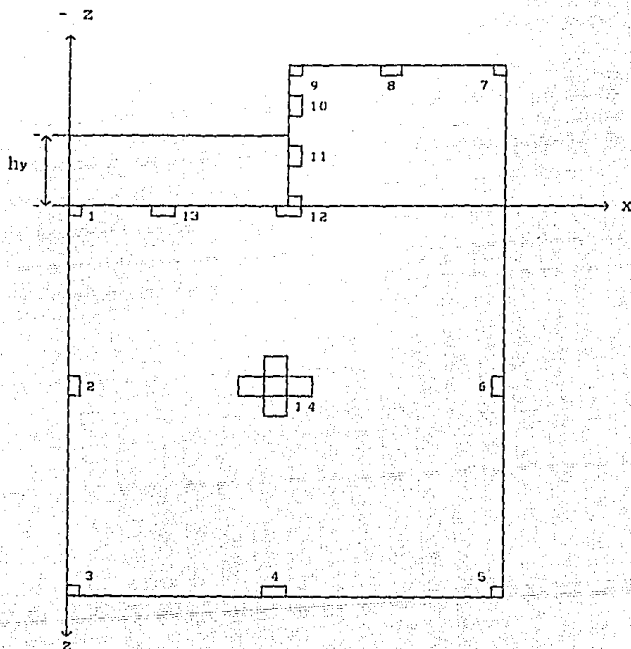
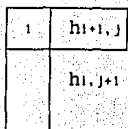


FIGURA 4.5. Diferenciales geométricos analizados, dentro del esquema propuesto.

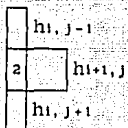
Diferencial No. 1



$h_{i,j}$ = Elemento 1, existe con valor propio.
 $h_{i-1,j}$ = $h_{i+1,j}$, no existe con valor propio.
 $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
 $h_{i,j-1}$ = h_v , existe como valor propuesto.
 $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6a.

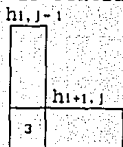
Diferencial No. 2



$h_{i,j}$ = Elemento 2, existe con valor propio.
 $h_{i-1,j}$ = $h_{i+1,j}$, no existe con valor propio.
 $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
 $h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.
 $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6b.

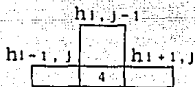
Diferencial No. 3



$h_{i,j}$ = Elemento 3, existe con valor propio.
 $h_{i-1,j}$ = $h_{i+1,j}$, no existe con valor propio.
 $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
 $h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.
 $h_{i,j+1}$ = 0, existe como valor propuesto.

FIGURA 4.6c.

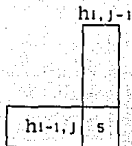
Diferencial No. 4



$h_{i,j}$ = Elemento 4, existe con valor propio.
 $h_{i-1,j}$ = existe con valor propio.
 $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
 $h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.
 $h_{i,j+1}$ = 0, existe como valor propuesto.

FIGURA 4.6d.

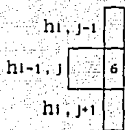
Diferencial No. 5



- $h_{i,j}$ = Elemento 5, existe con valor propio.
- $h_{i-1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i+1,j} = h_{i-1,j}$, no existe con valor propio.
- $h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j+1} = 0$, existe como valor propuesto.

FIGURA 4.6e.

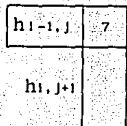
Diferencial No. 6



- $h_{i,j}$ = Elemento 6, existe con valor propio.
- $h_{i-1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i+1,j} = h_{i-1,j}$, no existe con valor propio.
- $h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6f.

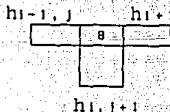
Diferencial No. 7



- $h_{i,j}$ = Elemento 7, existe con valor propio.
- $h_{i-1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i+1,j} = h_{i-1,j}$, no existe con valor propio.
- $h_{i,j-1} = h_{i,j+1}$, no existe con valor propio.
- $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6g.

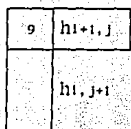
Diferencial No. 8



- $h_{i,j}$ = Elemento 8, existe con valor propio.
- $h_{i-1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j-1} = h_{i,j+1}$, no existe con valor propio.
- $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6h.

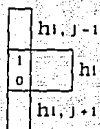
Diferencial No. 9



- $h_{i,j}$ = Elemento 9, existe con valor propio.
- $h_{i-1,j}$ = $h_{i+1,j}$, no existe con valor propio.
- $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j-1}$ = $h_{i,j+1}$, no existe con valor propio.
- $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6i.

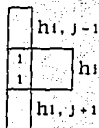
Diferencial No. 10



- $h_{i,j}$ = Elemento 10, existe con valor propio.
- $h_{i-1,j}$ = $h_{i+1,j}$, no existe con valor propio.
- $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6j.

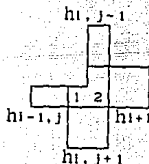
Diferencial No. 11



- $h_{i,j}$ = Elemento 11, existe con valor propio.
- $h_{i-1,j}$ = 0, existe como valor propuesto.
- $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6k.

Diferencial No. 12

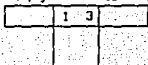


- $h_{i,j}$ = Elemento 12, existe con valor propio.
- $h_{i-1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.
- $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6l.

Diferencial No. 13

$h_{i-1,j}$ $h_{i+1,j}$ $h_{i,j}$ = Elemento 13, existe con valor propio.



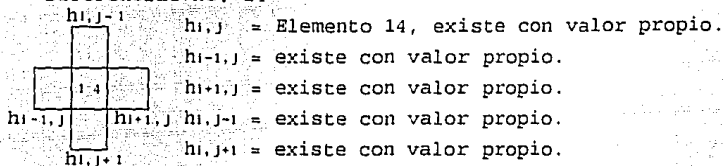
$h_{i-1,j}$ = existe con valor propio.

$h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.

$h_{i,j+1}$ $h_{i,j-1}$ = h_v , existe como valor propuesto.

FIGURA 4.6m. $h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

Diferencial No. 14



$h_{i,j}$ = Elemento 14, existe con valor propio.

$h_{i-1,j}$ = existe con valor propio.

$h_{i+1,j}$ = existe con valor propio.

$h_{i,j-1}$ = existe con valor propio.

$h_{i,j+1}$ = existe con valor propio.

FIGURA 4.6n.

4.6.- CONSIDERACIONES GENERALES PARA APLICAR EL MODELO NUMERICO

En este tipo de estudios, siempre es indispensable establecer las normas generales a las que está sujeta la aplicación de los esquemas numéricos desarrollados. Se explican aquí, tres tipos de consideraciones hechas para definir con mayor claridad el problema por resolver:

4.6.1.- GEOMETRICAS Y DE DIMENSIONES

- 1.- Los diferenciales Δx y Δz tendrán un valor constante de 0.01 m respectivamente, por lo tanto, todos los diferenciales analizados, tendrán sección cuadrada.
- 2.- Los diferenciales Δt tendrán unidades de segundo.

- 3.- El canal tiene sección rectangular con eje de simetría vertical (z) (Fig. 4.7), por lo tanto solamente se realizará el análisis de una de ellas. Considerando así, los mismos resultados para la otra.
- 4.- El eje x está localizado sobre la plantilla del canal y el z exactamente al centro de él, de tal manera que lo divide en dos secciones simétricas (Fig. 4.7).

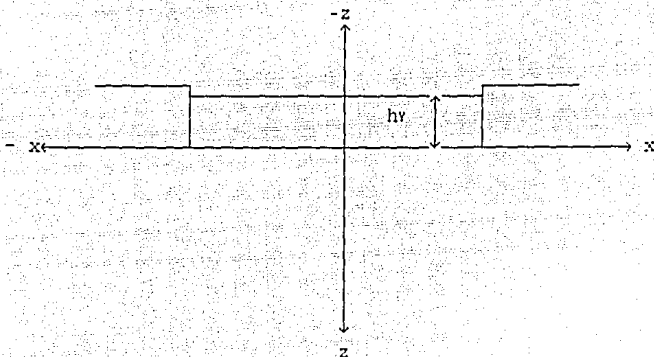


FIGURA 4.7. Ejes cartesianos sobre la sección analizada.

- 5.- El ancho entre canales (surcos), será de 0.8 m, por lo tanto la sección analizada tendrá un ancho máximo de 0.4 m, que equivalen a un total de 40 diferenciales Δz (Fig. 4.8).
- 6.- La profundidad máxima analizada será de 0.7 m, medidos a partir de la plantilla del canal (eje x); por lo tanto, serán 70 diferenciales Δz analizados (Fig. 4.8).
- 7.- La altura del canal será de 0.3 m, por lo que el número de diferenciales es de 30; los que sumados con los 70 localizados por debajo de la plantilla, harán un total de 100

elementos analizados en este sentido (Fig. 4.8).

- 8.- Existe un tirante de agua constante (h_v), sobre la plantilla del canal (Fig. 4.7).
- 9.- Existe la presencia de Nivel Freático a una profundidad de 0.7 m, a partir de la plantilla del canal (Fig. 4.8).

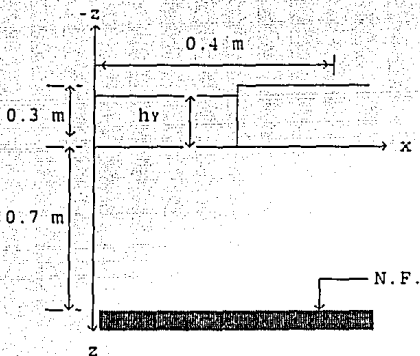


FIGURA 4.8. Longitud máxima de análisis sobre los ejes cartesianos.

4.6.2.- EDAFOLOGICAS

- 1.- El suelo es homogéneo (mismas características físicas e hidrodinámicas en todas direcciones).
- 2.- No existe la presencia de grietas sobre la sección analizada.

4.6.3.- HIDRODINAMICAS

- 1.- Cada uno de los parámetros hidrodinámicos se evaluará exactamente en el centroide (Punto donde el área de una

sección se distribuye homogéneamente) de los diferenciales analizados.

- 2.- El mismo valor del contenido de humedad inicial (θ_i), será aplicado en toda la sección geométrica analizada (No están incluidas aquí, las condiciones de frontera).
- 3.- Serán utilizados valores empíricos n y α , de acuerdo al tipo de suelo que se esté analizando.
- 4.- Los contenidos de humedad inicial (θ_i) y de saturación (θ_s) por utilizarse, son aquellos que de igual manera que en el caso anterior, permiten un análisis de resultados adecuado, pero que además estarán dados de acuerdo a los parámetros n y α propuestos, que corresponden a un determinado tipo de suelo (con textura y características físicas propias).
- 5.- La conductividad hidráulica a saturación (K_s), estará propuesta de acuerdo al tipo de suelo elegido. También tendrá una correspondencia con las características físicas y los valores empíricos antes mencionados.

4.7.- ANALISIS DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA

El desarrollo del esquema numérico mediante la metodología denominada de "Balance Local" (ec. 4.12), tiene como resultado una representación muy complicada de la solución para poder aplicar los criterios de convergencia y estabilidad; ésto, debido a la presencia de términos de la variable de interés (h) elevados al cuadrado; así como también, por la existencia de multiplicaciones de la misma variable con diferentes posiciones; por lo tanto, se planteará la revisión del esquema numérico con otro desarrollo aquí propuesto. Sin embargo, en el programa de cómputo se

utilizará el de "Balance local"; ésto por la facilidad de aplicación de los criterios que ofrece el segundo desarrollo.

Para la ecuación 4.4 se proponen las siguientes consideraciones:

- 1.- La capacidad específica $C(h)$ para las direcciones X y Z se calculará con el valor del potencial de presión total h_T , es decir, aquel que considera los criterios del factor de peso.
- 2.- La conductividad hidráulica $K(h)$ para ambas direcciones, se calculará también con el valor del potencial de presión total h_T .
- 3.- Para los casos en donde intervenga los operandos parciales (θ), se aplicarán las diferencias finitas en las direcciones que marca cada uno de ellos.

Finalmente la ecuación por diferenciar resulta ser:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) = \frac{\theta}{C(h)} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\theta}{C(h)} \frac{\partial K(h)}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\theta}{C(h)} \frac{dK(h)}{dh} \frac{\partial h}{\partial z} +$$

$$\frac{(1-\theta) K(h)}{C(h)} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{(1-\theta)}{C(h)} \frac{\partial K(h)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots (4.17)$$

Discretizando en diferencias finitas los términos de la ecuación (4.17), resulta:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h(x, z, t + \Delta t) - h(x, z, t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h(x - \Delta x, z, t) - 2h(x, z, t) + h(x + \Delta x, z, t)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{h(x, z - \Delta z, t) - 2h(x, z, t) + h(x, z + \Delta z, t)}{\Delta z^2}$$

$$\frac{\partial K(h)}{\partial x} = \frac{K(h)(x + \Delta x, z, t) - K(h)(x, z, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial K(h)}{\partial z} = \frac{K(h)(x, z + \Delta z, t) - K(h)(x, z, t)}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x + \Delta x, z, t) - h(x, z, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h(x, z + \Delta z, t) - h(x, z, t)}{\Delta z}$$

Sustituyendo cada uno de los términos en la ec. 4.17, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{h(x, z, t+\Delta t) - h(x, z, t)}{\Delta t} &= \frac{\vartheta \cdot K(h)}{C(h)} * \\
&\frac{h(x, z-\Delta z, t) - 2h(x, z, t) + h(x, z+\Delta z, t)}{\Delta z^2} + \frac{\vartheta}{C(h)} * \\
&\frac{K(h)(x, z+\Delta z, t) - K(h)(x, z, t)}{\Delta z} * \\
&\frac{h(x, z+\Delta z, t) - h(x, z, t)}{\Delta z} - \frac{\vartheta}{C(h)} * \\
&\frac{dK(h)}{dh} * \frac{h(x, z+\Delta z, t) - h(x, z, t)}{\Delta z} + \frac{(1-\vartheta) \cdot K(h)}{C(h)} * \\
&\frac{h(x-\Delta x, z, t) - 2h(x, z, t) + h(x+\Delta x, z, t)}{\Delta x^2} + \frac{(1-\vartheta)}{C(h)} * \\
&\frac{K(h)(x+\Delta x, z, t) - K(h)(x, z, t)}{\Delta x} * \\
&\frac{h(x+\Delta x, z, t) - h(x, z, t)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

... (4.18)

Realizando un cambio de nomenclatura bajo los criterios explicados en el apartado 4.2, la ec. 4.18 se transforma en:

$$\begin{aligned}
\frac{h_{i,j,p+1} - h_{i,j,p}}{\Delta t} &= \frac{\vartheta}{C(h)} * \frac{h_{i,j-1,p} - 2h_{i,j,p} + h_{i,j+1,p}}{\Delta z^2} + \\
&\frac{\vartheta}{C(h)} * \frac{K(h)_{i,j+1,p} - K(h)_{i,j,p}}{\Delta z} * \\
&\frac{h_{i,j+1,p} - h_{i,j,p}}{\Delta z} - \frac{\vartheta}{C(h)} * \\
&\frac{dK(h)_{i,j,p}}{dh} \frac{h_{i,j+1,p} - h_{i,j,p}}{\Delta z} + \frac{(1-\vartheta) K(h)}{C(h)} * \\
&\frac{h_{i-1,j,p} - 2h_{i,j,p} + h_{i+1,j,p}}{\Delta x^2} + \frac{(1-\vartheta)}{C(h)} * \\
&\frac{K(h)_{i+1,j,p} - K(h)_{i,j,p}}{\Delta x} * \frac{h_{i+1,j,p} - h_{i,j,p}}{\Delta x}
\end{aligned}$$

... (4.19)

Despejando $h_{i,j,p+1}$, y agrupando términos con iguales subíndices i, j y p , se obtiene:

$$\begin{aligned}
h_{i,j,p+1} &= \frac{\vartheta}{C(h_{i,j,p})} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} h_{i,j-1,p} + h_{i,j,p} \left[- \frac{2\vartheta}{C(h_{i,j,p})} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} - \right. \\
&\frac{\vartheta}{C(h_{i,j,p})} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} + \frac{\vartheta}{C(h_{i,j,p})} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \\
&\left. \frac{2(1-\vartheta)K(h_{i,j,p})\Delta t}{C(h_{i,j,p})\Delta x^2} - \frac{(1-\vartheta)K(h_{i+1,j,p})\Delta t}{C(h_{i,j,p})\Delta x^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(1-\vartheta) K(h_{i,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta x^2} + 1 \right] + h_{i,j+1,p} \left[\frac{\vartheta K(h_{i,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta z^2} + \right. \\
& \left. \frac{\vartheta K(h_{i,j+1,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta z^2} - \frac{\vartheta K(h_{i,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta z^2} - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right] + \\
& \frac{(1-\vartheta) K(h_{i,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta x^2} h_{i-1,j,p} + h_{i+1,j,p} \left[\frac{(1-\vartheta) K(h_{i,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta x^2} + \right. \\
& \left. \frac{(1-\vartheta) K(h_{i+1,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta x^2} - \frac{(1-\vartheta) K(h_{i,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta x^2} \right] \\
& \dots (4.20)
\end{aligned}$$

Agrupando términos de la ec. 4.20, bajo las siguientes consideraciones:

$$\lambda = \frac{(1-\vartheta) K(h_{i,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta x^2} ; \quad \lambda_1 = \frac{(1-\vartheta) K(h_{i+1,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta x^2} ;$$

$$\eta = \frac{\vartheta K(h_{i,j,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta z^2} ; \quad \eta_1 = \frac{\vartheta K(h_{i,j+1,p}) \Delta t}{C(h_{i,j,p}) \Delta z^2} ,$$

y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned}
h_{i,j,p+1} = & \eta h_{i,j-1,p} + h_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\
& + h_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda h_{i-1,j,p} + \lambda_1 h_{i+1,j,p} \\
& \dots (4.21)
\end{aligned}$$

La ec. 4.21 es otra solución numérica de la ecuación de Richards (ec. 4.1), ésta ofrece facilidad para aplicar los criterios de convergencia, estabilidad, congruencia y consistencia del esquema planteado.

Realizando el análisis de convergencia de la ec. 4.21, se conocerán los valores límite a los que esta sujeta la solución.

4.7.1.- CONVERGENCIA

I.- Se plantea el esquema por revisar:

Sea H la solución exacta de la ecuación

$$\frac{\partial H}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + B^2 \frac{\partial H}{\partial x} + C^2 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial H}{\partial z} (D^2 - E^2)$$

h la solución del esquema (con todas sus cifras)

$$h_{i,j,p+1} = \eta h_{i,j-1,p} + h_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\ + h_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda h_{i-1,j,p} + \lambda_1 h_{i+1,j,p}$$

II.- Escribiendo h en función del error de truncado

Sea $E = H - h$, así

$$h_{i,j,p} = H_{i,j,p} - E_{i,j,p}; \quad h_{i+1,j,p} = H_{i+1,j,p} - E_{i+1,j,p};$$

$$h_{i-1,j,p} = H_{i-1,j,p} - E_{i-1,j,p} \dots \dots \dots$$

III.- Sustituyendo en la ecuación de diferencias finitas

$$\begin{aligned}
 H_{i,j,p+1} - E_{i,j,p+1} &= \eta(H_{i,j-1,p} - E_{i,j-1,p}) + (H_{i,j,p} - E_{i,j,p}) \\
 &\quad * \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} + \\
 &\quad + (H_{i,j+1,p} - E_{i,j+1,p}) \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} \\
 &\quad + \lambda (H_{i-1,j,p} - E_{i-1,j,p}) \\
 &\quad + \lambda_1 (H_{i+1,j,p} - E_{i+1,j,p})
 \end{aligned}$$

ordenando términos

$$\begin{aligned}
 - E_{i,j,p+1} + \eta E_{i,j-1,p} + E_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\
 + E_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} + \lambda E_{i-1,j,p} + \lambda_1 E_{i+1,j,p} + \right. \\
 (H_{i,j,p+1} - H_{i,j,p}) + \eta(H_{i,j,p} - H_{i,j-1,p}) - \eta_1(H_{i,j+1,p} - H_{i,j,p}) \\
 \left. + \lambda (H_{i,j,p} - H_{i-1,j,p}) - \lambda_1 (H_{i+1,j,p} - H_{i,j,p}) + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} + \right. \\
 \left. (H_{i,j+1,p} - H_{i,j,p}) \right) = 0
 \end{aligned}$$

IV.- Desarrollando H en serie de Taylor con respecto al tiempo en un punto fijo

$$H(x, z, t + \Delta t) = H(x, z, t) + \frac{\partial H}{\partial t} (x, z, t + \theta_1 \Delta t) \Delta t$$

de donde

$$H(x, z, t + \Delta t) - H(x, z, t) = \frac{\partial H}{\partial t} (x, z, t + \theta_1 \Delta t) \Delta t$$

de manera similar

$$H(x-\Delta x, z, t) = H(x, z, t) - \frac{\partial H}{\partial t}(x, z, t) \Delta t + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x+\theta_2 \Delta x, z, t) \frac{\Delta x^2}{2}$$

$$H(x+\Delta x, z, t) = H(x, z, t) + \frac{\partial H}{\partial t}(x, z, t) \Delta t + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x+\theta_3 \Delta x, z, t) \frac{\Delta x^2}{2}$$

sumando y arreglando

$$H(x-\Delta x, z, t) - 2H(x, z, t) + H(x+\Delta x, z, t) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x+\theta_4 \Delta x, z, t) \Delta x^2$$

usando la notación con índices

$$H_{i,j,p+1} - H_{i,j,p} = \frac{\partial H}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta z, p\Delta t + \theta_1 \Delta t) \Delta t$$

$$H_{i-1,j,p} - 2H_{i,j,p} + H_{i+1,j,p} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(i\Delta x + \theta_4 \Delta x, j\Delta z, p\Delta t) \Delta x^2$$

también

$$H_{i,j-1,p} - 2H_{i,j,p} + H_{i,j+1,p} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(i\Delta x, j\Delta z + \theta_5 \Delta z, p\Delta t) \Delta z^2$$

V.- Sustituir la H en el esquema, en términos del error

$$E_{i,j,p+1} \doteq \eta E_{i,j-1,p} + E_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\ + E_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda E_{i-1,j,p} + \lambda_1 E_{i+1,j,p} \\ + M \Delta t$$

donde

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\partial H}{\partial t} (i \Delta x, j \Delta z, p \Delta t + \theta_1 \Delta t) - A^2 \frac{\partial^2 H}{\Delta x^2} (i \Delta x + \theta_4 \Delta x, j \Delta z, p \Delta t) - \\
& B^2 \frac{\partial H}{\partial x} (i \Delta x + \theta_6 \Delta x, j \Delta z, p \Delta t) - C^2 \frac{\partial^2 H}{\Delta z^2} (i \Delta x, j \Delta z + \theta_5 \Delta z, p \Delta t) - \\
& (D^2 - E^2) \frac{\partial H}{\partial z} (i \Delta x, j \Delta z + \theta_7 \Delta z, p \Delta t) \quad \dots (4.22)
\end{aligned}$$

VI.- Analizar la ecuación de errores de truncado

Para asegurar que los errores tengan signo positivo y continuar con el control del error en este análisis, se tomará el valor absoluto y así:

$$\begin{aligned}
|E_{i,j,p+1}| &\doteq \eta |E_{i,j-1,p}| + |E_{i,j,p}| \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right. \\
& \left. - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} + |E_{i,j+1,p}| \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} \\
& + \lambda |E_{i-1,j,p}| + \lambda_1 |E_{i+1,j,p}| + |M| \Delta t \quad \dots (4.23)
\end{aligned}$$

Esta ecuación es cierta cuando los coeficientes son positivos o iguales a cero.

VII.- Se realiza una simplificación en la ecuación de errores de truncado.

Si el mayor de los errores para cualquier i y j en el instante p es E_p , al asignar:

$$E_p \rightarrow E_{i-1,j,p}$$

$$E_p \rightarrow E_{i+1,j,p}$$

$$E_p \rightarrow E_{i,j,p}$$

$$E_p \rightarrow E_{i,j-1,p}$$

$$E_p \rightarrow E_{i,j+1,p}$$

la ecuación anterior se puede escribir (desde un punto de vista conservador) como:

$$E_{p+1} \leq \eta E_p + E_p \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_1, j, p)}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} + E_p \cdot \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_1, j, p)}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda E_p + \lambda_1 + |M| \Delta t$$

y simplificando la ecuación resultará:

$$E_{p+1} \leq E_p + \Delta t |M|$$

Si M es considerada constante

$$E_1 \leq E_0 + \Delta t |M|$$

$$E_2 \leq E_1 + \Delta t |M|, \quad E_2 \leq E_0 + 2\Delta t |M|$$

$$E_3 \leq E_2 + \Delta t |M|, \quad E_3 \leq E_0 + 3\Delta t |M|$$

$$E_{p+1} \leq E_0 + (p+1)\Delta t |M|$$

Como en el tiempo cero no existe error $E_0 = 0$ y por tanto

$$E_{p+1} \leq (p+1)\Delta t |M| \quad \dots (4.24)$$

VIII.- Conclusión

Si $t \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, $\eta_1 \rightarrow 0$, $\frac{dK(h_1, j, p)}{dh} \frac{1}{\Delta z} \rightarrow 0$ y por la ec. 4.22, $M \rightarrow 0$

Por lo tanto, la ecuación 4.24 también tiende a cero y la solución converge a la H.

Para esto se requiere que los coeficientes de la ecuación 4.23, sean positivos o iguales a cero como se apuntó antes, y ello se cumple si

$$\eta \geq 0, \eta_1 \geq \frac{dK(h_i, j, p)}{dh} \frac{1}{\Delta z}, \lambda \geq 0, \lambda_1 \geq 0 \quad y$$

$$0 \leq \{-\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_i, j, p)}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1\} \leq 1$$

Las condiciones y desigualdades anteriores constituyen la llamada condición de convergencia.

4.7.2. - ANALISIS DE ESTABILIDAD

Se estudia el comportamiento de errores distintos al de truncado.

Cuando a medida que se utiliza un esquema de diferencias finitas para avanzar en el tiempo, el error (de redondeo) acumulado tiende a un límite de magnificación, el esquema de diferencias finitas es estable.

Método de Von Neumann o serie de Fourier

Se expresa el error en un punto fijo $x = i\Delta x$, $z = j\Delta z$ y $t = p\Delta t$ como:

$$E_{i, j, p} = \sum_{k=0} A_k e^{i\beta_k i\Delta x} e^{i\gamma_k j\Delta z} e^{\alpha_k p\Delta t}$$

siendo

$$\beta_k = k\pi/N\Delta x, \gamma_k = k\pi/N\Delta z, N\Delta x = G, N\Delta z = S \quad e \quad i = \sqrt{-1}$$

Se considera que analizando un término de la serie de Fourier, se conoce el comportamiento de toda ella, y que los coeficientes A_k pueden ser despreciados; así el error se toma como

$$E_{i,j,p} = e^{i\beta_1 \Delta x} e^{i\gamma_j \Delta z} e^{\alpha_p \Delta t} = e^{i\beta_1 \Delta x + i\gamma_j \Delta z} \xi^p$$

Se deduce que el error no crecerá al aumentar p cuando

$$|\xi| \leq 1$$

Como paso siguiente, se realiza el análisis de estabilidad del esquema explícito planteado:

I.- Escribir el esquema en términos del error de redondeo

Sea E el error de redondeo

$$E = h - N$$

h = Solución con todas sus cifras

N = Solución con un cierto número de cifras

Siendo h la solución del esquema de diferencias finitas con todas sus cifras decimales y N la solución del esquema con un número limitado de cifras.

$$N = h - E$$

Expresando el error (de redondeo) en términos de los subíndices i , j y p se tiene

$$\begin{aligned}
 N_{i,j,p} &= h_{i,j,p} - E_{i,j,p} ; N_{i-1,j,p} = h_{i-1,j,p} - E_{i-1,j,p} ; \\
 N_{i+1,j,p} &= h_{i+1,j,p} - E_{i+1,j,p} ; N_{i,j-1,p} = h_{i,j-1,p} - E_{i,j-1,p} ; \\
 \text{y } N_{i,j+1,p} &= h_{i,j+1,p} - E_{i,j+1,p} \quad \dots (4.25)
 \end{aligned}$$

Según el esquema dado por la ec. 4.21

$$\begin{aligned}
 N_{i,j,p+1} &\doteq \eta N_{i,j-1,p} + N_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(N_{i,j,p})}{dN} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\
 &+ N_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(N_{i,j,p})}{dN} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda N_{i-1,j,p} + \lambda_1 N_{i+1,j,p}
 \end{aligned}$$

Al sustituir las igualdades 4.25 en la ecuación anterior resultará:

$$\begin{aligned}
 h_{i,j,p+1} - E_{i,j,p+1} &= \eta (h_{i,j-1,p} - E_{i,j-1,p}) + (h_{i,j,p} - E_{i,j,p}) \\
 &+ \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} + \\
 &+ (h_{i,j+1,p} - E_{i,j+1,p}) \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} \\
 &+ \lambda (h_{i-1,j,p} - E_{i-1,j,p}) \\
 &+ \lambda_1 (h_{i+1,j,p} - E_{i+1,j,p})
 \end{aligned}$$

Arreglando términos

$$\begin{aligned}
 h_{i,j,p+1} - \eta h_{i,j-1,p} - h_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\
 - h_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} - \lambda h_{i-1,j,p} - \lambda_1 h_{i+1,j,p} = \\
 E_{i,j,p+1} - \eta E_{i,j-1,p} - E_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\
 - E_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} - \lambda E_{i-1,j,p} - \lambda_1 E_{i+1,j,p} \dots (4.26)
 \end{aligned}$$

Ya que h es la solución del esquema de diferencias finitas,

$$h_{i,j,p+1} \doteq \eta h_{i,j-1,p} + h_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\ + h_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda h_{i-1,j,p} + \lambda_1 h_{i+1,j,p}$$

y por lo tanto TODO el miembro izquierdo de la igualdad 4.26 es nulo. Así

$$E_{i,j,p+1} \doteq \eta E_{i,j-1,p} + E_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\ + E_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda E_{i-1,j,p} + \lambda_1 E_{i+1,j,p}$$

Notese que la ecuación anterior tiene exactamente la misma forma del esquema de diferencias finitas.

II.- Expresar el error de acuerdo con el sumando de la serie de Fourier.

$$E_{i,j,p+1} \doteq \eta E_{i,j-1,p} + E_{i,j,p} \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} \\ + E_{i,j+1,p} \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda E_{i-1,j,p} + \lambda_1 E_{i+1,j,p}$$

$$e^{i\beta_1 \Delta x + i\gamma_j \Delta z} \xi^{p+1} \doteq \eta e^{i\beta_1 \Delta x + i\gamma_{(j-1)} \Delta z} \xi^p + e^{i\beta_1 \Delta x + i\gamma_j \Delta z} \xi^p + \\ \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} + \\ e^{i\beta_1 \Delta x + i\gamma_{(j+1)} \Delta z} \xi^p \left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{i,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \\ \lambda e^{i\beta_{(i-1)} \Delta x + i\gamma_j \Delta z} \xi^p + \lambda_1 e^{i\beta_{(i+1)} \Delta x + i\gamma_j \Delta z} \xi^p$$

al dividir entre $e^{i\beta_1 \Delta x + i\gamma_1 \Delta z}$ resulta

$$\xi = \eta e^{-i\gamma_1 \Delta z} + \left\{ -\eta - \eta_1 + \frac{dK(h_{1,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} - \lambda - \lambda_1 + 1 \right\} + e^{i\gamma_1 \Delta z} +$$

$$\left\{ \eta_1 - \frac{dK(h_{1,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right\} + \lambda e^{-i\beta_1 \Delta x} + \lambda_1 e^{i\beta_1 \Delta x}$$

$$\xi = \eta (e^{-i\gamma_1 \Delta z} - 1) + \left(\eta_1 - \frac{dK(h_{1,j,p})}{dh} \frac{1}{\Delta z} \right) (e^{i\gamma_1 \Delta z} - 1) +$$

$$\lambda (e^{-i\beta_1 \Delta x} - 1) + \lambda_1 (e^{i\beta_1 \Delta x} - 1)$$

III.- Analizar la ecuación de ξ para establecer las condiciones para que sea (en valor absoluto) menor o igual a uno

Considerando que el límite de aplicación y análisis de la ecuación que calcula a ξ , será cuando $\eta = \eta_1$ y $\lambda = \lambda_1$, donde $K(h)_{1,j+1,p} = K(h)_{1,j,p}$ y $K(h)_{1+1,j,p} = K(h)_{1,j,p}$, entonces se tendrá que $d(h_{1,j,p})/dh \rightarrow 0$, por lo tanto se obtiene:

$$\xi = \eta (e^{-i\gamma_1 \Delta z} - 2 + e^{i\gamma_1 \Delta z}) + \lambda (e^{-i\beta_1 \Delta x} - 2 + e^{i\beta_1 \Delta x}) + 1$$

Por otra parte, de las propiedades de las funciones seno y coseno se tiene que $0.5(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta$, así

$$0.5 (e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) = \cos 2\theta$$

también

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \text{ por lo tanto}$$

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{1 - 0.5(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta})}{2}$$

o bien

$$4 \operatorname{sen}^2 \theta = 2 - e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}$$

si $2\theta = \beta \Delta x$ y $2\theta = \gamma \Delta z$

$$4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} = 2 - e^{i\beta \Delta x} - e^{-i\beta \Delta x}$$

Cambiando signo a la ecuación resulta

$$-4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} = -2 + e^{i\beta \Delta x} + e^{-i\beta \Delta x}$$

Para γ , Δz , se tiene una identidad semejante pero con las variables:

$$-4 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2} = -2 + e^{i\gamma \Delta z} + e^{-i\gamma \Delta z}$$

Al considerar las identidades resulta

$$\xi = 1 - (\lambda 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2}) - (\eta 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2})$$

ya que para no aumentar los errores

$$|\xi| < 1 \text{ o también } -1 \leq \xi \leq 1$$

entonces

$$-1 \leq 1 - \lambda 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} - \eta 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2} \leq 1$$

caso 1

$$1 - \lambda 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} - \eta 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2} \leq 1$$

simplificando

$$- \lambda 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} - \eta 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2} \leq 0$$

la cual se cumple para $\lambda \geq 0$ y $\eta \geq 0$ pues $\operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2}$ y $\operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2}$ son cantidades positivas.

caso 2

$$-1 \leq 1 - \lambda 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} - \eta 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2}$$

reduciendo

$$-2 \leq - \lambda 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} - \eta 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq - \lambda \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2} - \eta \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2}$$

como el valor más grande de $\operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta x}{2}$ y $\operatorname{sen}^2 \frac{\gamma \Delta z}{2}$ es uno.

$$0.5 \geq \lambda + \eta$$

por lo tanto

$$0 \leq \lambda + \eta \leq 0.5$$

Generalizando la condición resultará que:

$$0.5 \geq \lambda_1 + \eta_1, 0.5 \geq \lambda_1 + \eta, 0.5 \geq \lambda + \eta \text{ y } 0.5 \geq \lambda + \eta_1$$

lo cual constituye la condición de estabilidad del esquema.

5.- METODO DE COMPUTO

Después de establecer y aplicar los criterios teóricos al esquema numérico desarrollado, fue necesario realizar un modelo de cómputo para comprobar su bondad. Para lograr el objetivo anterior, fue utilizada una microcomputadora con las siguientes características:

Marca : Acer Plus 486dx
Velocidad : 66 Mhz
Mem. RAM : 4 Mb exp. a 36 Mb
Chip-Up : Escalable
Drive : 3 1/2 de 1.44 Mb
Disco duro: 212 Mb
Monitor : Color SVGA 7111D
Coprocesador Matemático Instalado
M.S. DOS : 6.0

Con la que se realizaron distintas actividades en combinación del software indicado:

- Captura de información: ChiWrite Ver. 3.16
- Elaboración del Modelo Numérico: Turbo Pascal Ver. 7.0
- Corridas de calibración: Modelo Numérico Ver. EXE
- Gráficas : Qpro Ver. 5.0

Para comprobar la bondad del esquema numérico desarrollado, se elaboró un programa de cómputo con ayuda del software Turbo Pascal Ver. 7.0, al que se llama ICRINRE, cuyas siglas representan el texto: Infiltración en Canales de Riego No Revestidos.

5.1.- METODO DE COMPUTO

Una vez que fueron definidas las condiciones teóricas a las que está sujeta la aplicación del esquema numérico propuesto, se definió el área física de estudio y posteriormente se aplicaron estas condiciones en el desarrollo del Modelo de Cómputo ICRINRE, en Software Turbo Pascal Versión 7.0.

5.1.1.- ENTRADA DE DATOS AL MODELO ICRINRE

5.1.1.1.- Contenido de Humedad Inicial (θ_i)

Se propone de acuerdo al resultado físico obtenido del muestreo en campo, el cual es determinado en laboratorio o *in situ*. Sus unidades están dadas en cm^3/cm^3 , y varía desde 1 (uno), hasta 0 (cero). Debe tenerse cuidado en la propuesta de este dato; ya que siempre debe ser mayor que el Contenido de Humedad Residual (θ_r).

ESTE TEXTO HA SIDO
CALLE DE LA INDUSTRIA

5.1.1.2.- Contenido de Humedad a Saturación (θ_s)

Es una característica del suelo, que al igual que el Contenido de Humedad Inicial, está dada en cm^3/cm^3 , y también varía desde 1 (uno), hasta 0 (cero). Puede ser propuesta en base a la Tabla 5.1 y cuando se trate de un suelo específico, debe determinarse en laboratorio con el cálculo de las densidades real (D_r) y aparente (D_a) y la ayuda de la expresión propuesta por Rogowski (1971).

$$\theta_s = 0.9 \left(1 - \frac{D_a}{D_r} \right) \quad \dots (5.1)$$

5.1.1.3.- Contenido de Humedad Residual (θ_r)

Sus dimensiones están dadas en cm^3/cm^3 , y su valor se encuentra entre 1 (uno) y 0 (cero), éste es el más pequeño de los contenidos de humedad (θ). Para su propuesta, pueden utilizarse las Tablas 5.1 y 5.2, o bien, ser determinado por algún método numérico, para cualquier tipo de suelo.

5.1.1.4.- Conductividad Hidráulica de Saturación (K_s)

Sus dimensiones son las de velocidad y las unidades de entrada al Modelo ICRINRE son m/s. Para su propuesta pueden utilizarse las Tablas 5.1 y 5.3, o bien, determinarse físicamente por mediciones de campo; o con el empleo de otras metodologías.

5.1.1.5.- Valor Empírico (α)

Se propone de acuerdo a la Tabla 5.1, o bien, para un suelo específico, deben realizarse mediciones en laboratorio y aplicar algún Método Numérico para su obtención, sus dimensiones son de L y las unidades requeridas por ICRINRE son en m.

5.1.1.6.- Valor Empírico (n)

Al igual que el valor empírico alfa (α), puede proponerse en base a la Tabla 5.1 o de igual manera utilizar mediciones de laboratorio para determinarse mediante un Método Numérico; este valor es adimensional.

5.1.1.7.- Factor de Peso (FP1, FP2, FP3 y FP4)

Estos valores se proponen de acuerdo a la zona de análisis en que se esté aplicando el esquema numérico desarrollado (Fig. 5.1).

El FP1 corresponde a la zona 1 (Fig. 5.1), donde la participación de los cálculos realizados en el sentido de flujo horizontal (x), es insignificante; es por ésto que se recomienda aplicarle valores desde 0.9, hasta 1.

El FP2 corresponde a la zona 2 (Fig. 5.1), donde existe una participación de los cálculos realizados en el sentido de flujo horizontal menor al 50 % del total. Es por ésto que los valores recomendados deben fluctuar entre 0.6 y 0.9.

El FP3 corresponde a la zona de estudio 3 (Fig. 5.1), donde son más importantes los cálculos generados en el sentido de flujo horizontal (x). Para este caso se recomienda aplicar valores entre 0.3 y 0.4.

El FP4 corresponde a la zona de estudio 4 (Fig. 5.1), donde los cálculos generados en los sentidos de flujo horizontal (x) y vertical (z), tienen igual grado de importancia. es por ésto que el valor recomendado debe ser de 0.5.

La recomendación de utilizar los valores anteriores para el factor de peso (FP), surge de las corridas realizadas para

diferentes texturas de suelo.

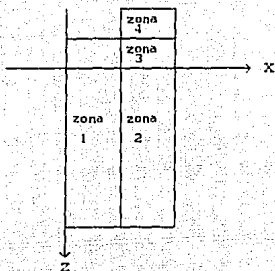


FIGURA 5.1. División del esquema geométrico analizado, en diversas zonas de estudio.

5.1.1.8.- Diferencial de Tiempo (DT1, DT2, DT3 y DT4)

Este valor se propone a criterio del usuario, ICRINRE lo solicita en unidades de segundos. Se recomienda que para suelos arenosos el valor máximo dado al DT4 no rebase los 120 seg. y para suelos arcillosos el valor de 300 seg. Todos los diferenciales de tiempo pueden tener un mismo valor, sin embargo, lo más recomendable es que el valor desde el DT1 hasta el DT4, aumente de acuerdo a la necesidad del usuario. De este dato dependerá el número de iteraciones por realizarse en la prueba de infiltración.

5.1.1.9.- Duración del Diferencial de Tiempo (DDT1, DDT2, DDT3 y DDT4)

Al igual que el DT, este valor debe proponerse de acuerdo al interés del usuario, ICRINRE lo solicita en minutos y también se recomienda aumentar su valor desde el DDT1 hasta el DDT4, ésto con

la finalidad de analizar el fenómeno bajo diferentes condiciones. En general se recomienda que para suelos arenosos el tiempo total en prueba de infiltración no rebase las 6 horas, y para arcillosos el tiempo de prueba puede ser hasta de 24 horas aunque no existe ninguna restricción para que sea mayor o menor.

5.1.2.- SECUENCIA DE EJECUCION DEL MODELO ICRINRE

Se explicará aquí la secuencia de ejecución del Modelo ICRINRE así como sus opciones de continuidad.

Como primer paso, ICRINRE solicita los datos referentes a características del suelo (Gráfica 5.1). Automáticamente aparecerán datos en pantalla, sin embargo, éstos podrán ser cambiados, dependiendo de las características del suelo específico por analizarse.

Es necesario mencionar que en caso de proporcionar un dato en forma incorrecta a la que ICRINRE lo requiere, éste avisará mediante la activación de un sonido. En esta pantalla, ICRINRE da opción a continuar con la activación de la tecla F3, o volver al programa ICRINRE.PAS, mediante la tecla Esc.

Si activó la tecla F3, entonces aparece una segunda pantalla (Gráfica 5.2), en la que ICRINRE solicita datos referentes al diferencial de tiempo y su respectiva duración.

Si usted se encuentra en esta pantalla, y desea volver a la anterior, ésto solamente se logra pulsando la tecla Esc, que lo lleva a ICRINRE.PAS y debe iniciar nuevamente la corrida.

En ésta pantalla, también aparece la opción de continuar que es activando la tecla F3. Si hace ésta operación, entonces aparece una tercera pantalla.

Programa para el cálculo de infiltración por la ecuación de Richards

Indique los siguientes datos:

Contenido de Humedad Inicial	: 0.1
Contenido de Humedad a Saturación	: 0.45
Contenido de Humedad Residual	: 0.05
Conductividad Hidráulica a saturación	: 0.00000111
Valor Empírico de Alfa	: -0.3771
Valor Empírico de N	: 3.55
Valor del Diferencial en X	: 0.01
Valor del Diferencial en Z	: 0.01
Factor de Peso en Zona Uno	: 0.99
Factor de Peso en Zona Dos	: 0.7
Factor de Peso en Zona Tres	: 0.3
Factor de Peso en Zona Cuatro	: 0.5
Tirante de Agua Sobre Plantilla	: 25

F3 Para continuar

ESC Para cancelar

GRAFICA 5.1. Características hidrodinámicas y físicas del suelo, solicitadas por ICRINRE.

Programa para el calculo de infiltracion por la ecuacion de Richards

Indique los datos para cada diferencial de tiempo

Primer Diferencial de Tiempo DT1 (Seg.)	:	30
Duracion del DT1 en Minutos	:	11
Segundo Diferencial de Tiempo DT2 (Seg.)	:	60
Duracion del DT2 en Minutos	:	49
Tercer Diferencial de Tiempo DT3 (Seg.)	:	120
Duracion del DT3 en Minutos	:	108
Cuarto Diferencial de Tiempo DT4 (Seg.)	:	300
Duracion del DT4 en Minutos	:	195

*F3 Para continuar

ESC Para cancelar

GRAFICA 5.2. Datos referentes al tiempo, solicitados por ICRINRE.

En la tercera pantalla (Gráfica 5.3), ICRINRE pregunta si desea impresión de resultados. Tiene opción a pulsar las teclas S para Si o N para la opción No.

Independientemente de la opción elegida ICRINRE pasa a una cuarta pantalla (Gráfica 5.4) después de haber pulsado la tecla Enter; donde pregunta por donde quiere la impresión de resultados. Las opciones son Impresión por Monitor o Impresión por Impresora. La opción elegida se ilumina con un color que a simple vista resalta. La opción puede ser elegida con las teclas ↑ y ↓.

Para continuar debe pulsarse la tecla Enter e ICRINRE inicia el proceso de cálculo.

Se imprime entonces una matriz que tiene datos de la presión de humedad inicial del suelo, en metros de columna de agua.

En esta primera matriz no aparece aún la presencia del nivel freático en la hilera 70.

Después de calculado el primer intervalo de tiempo, nuevamente se imprime la matriz resultante y en ella está presente el nivel freático en la hilera 70.

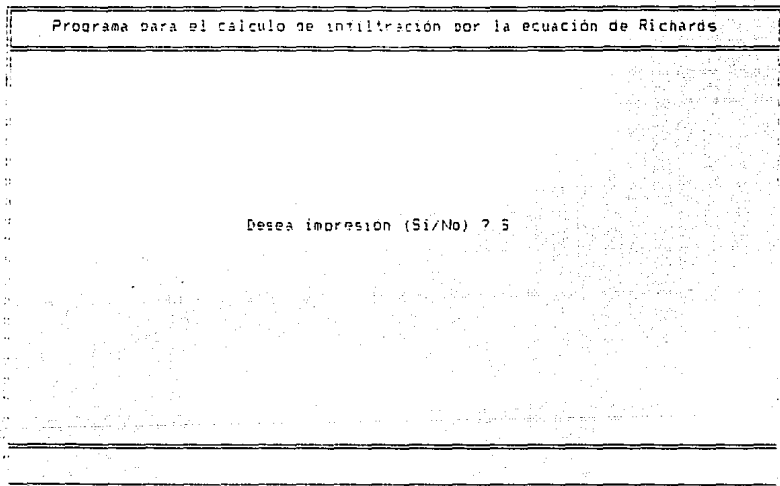
Cuando terminó la impresión de la matriz para el primer intervalo de tiempo, entonces para los siguientes intervalos aparecerá el mensaje: INTERVALO DE TIEMPO EN PRUEBA DE INFILTRACION XX, ésto informará del avance que ICRINRE lleva de la prueba de infiltración.

La impresión de otra matriz se realizará, exactamente al momento en que ICRINRE haya terminado de calcular el intervalo de tiempo último de cada duración de diferencial de tiempo, por lo tanto, serán 4 (cuatro) las impresiones de éste tipo y las 2

(dos) explicadas anteriormente.

Cuando ICRINRE finaliza con la impresión de la matriz No. 6, entonces se imprime el mensaje: **TERMINO SATISFACTORIAMENTE EL PROCESO DE INFILTRACION.**

Si los datos proporcionados al inicio de la corrida no fueron los adecuados, posiblemente el proceso de cálculo se interrumpirá, enviando un mensaje en pantalla (Gráfica 5.5) con la leyenda: **Tenga cuidado, ya que existe error de datos.**



GRAFICA 5.3. Opción afirmativa o negativa para solicitud de impresión a ICRINRE.

Programa para el calculo de infiltración por la ecuación de Richards

Elija una de las siguientes opciones de impresion

Impresion por monitor

Impresion por impresora

GRAFICA 5.4. Selección de opción para la impresión de resultados, solicitada por ICRINRE.

Programa para el cálculo de infiltración por la ecuación de Richards

tenga cuidado, ya que existe error de datos

GRAFICA 5.5. Mensaje de error enviado por ICRINRE, cuando existe un error en las operaciones por una mala designación de datos.

TABLA 5.1a. Características Hidrodinámicas de algunos suelos

FUENTE: Fuentes R. C., Haverkamp R. y Parlange J. Y., 1991

SUELO	θ_s	θ_r	α	n	K_s
DESCRIPCION	%	%	m	adim.	m/s
Hygiene Sand	0.2500	0.1526	-1.2441	10.6553	0.0000125000
Touched Silt Loam G.E.3.	0.4690	0.1878	-1.9201	7.3991	0.0000350690
Guelph Loam (Main Drying)	0.5200	0.2125	-0.6250	2.8121	0.0000036570
Silt Loam G.E.3	0.3960	0.0412	-1.5591	2.4820	0.0000005740
Bell Netofa Clay Soil	0.4460	0.2237	-2.8213	2.2722	0.0000000094

$$m = 1 - \frac{2}{n} \quad \eta = \frac{1}{m} + 2$$

TABLA 5.1b. Características Hidrodinámicas de algunos suelos

FUENTE: Fuentes R. C., Haverkamp R. y Parlange J. Y., 1991

SUELO	θ_s	p	α	n	K_s
DESCRIPCION	%	adim.	m	adim.	m/s
Sellinge Yolo Light	0.4554	-0.1775	-0.1657	2.1838	0.0000012375
Yob Light Clay	0.4950	-1.9070	-0.1931	2.2209	0.0000001230
Silt Columbia (main Wetting)	0.4010	0.3748	-0.3606	2.2851	0.0000005833
Grenoble Sand	0.3120	2.2046	-0.1639	2.7925	0.0000426944

$$m = 1 - \frac{2}{n} \quad \eta = \frac{1}{m} + 1 + p$$

TABLA 5.1c. Características Hidrodinámicas de algunos suelos

FUENTE: Paniconi C., Aldama A. y Wood E. F., 1991

SUELO	θ_s	θ_r	α	n	K_s
DESCRIPCION	%	%	m	adim.	m/s
Sin Nombre 1	0.3800	0.1500	-1.2000	4.0000	0.0000001111
Sin Nombre 2	0.4500	0.0800	-3.0000	3.0000	0.0013888888
Sin Nombre 3	0.3800	0.1500	-1.2000	4.0000	0.00000027777

$$m = 1 - \frac{1}{n} \quad \eta = \frac{2}{\lambda} + 3$$

TABLA 5.1d. Características Hidrodinámicas de algunos suelos

FUENTE: Zaidel J. y Russo, 1992

SUELO DESCRIPCION	θ_s %	θ_r %	α m	n adim.	K_s m/s
Arcilloso	0.4500	0.1000	-1.0000	1.2000	0.0000013888
Limo	0.4000	0.0600	-0.5000	2.0000	0.0000069444
Arena	0.3600	0.0300	-0.3333	3.0000	0.0000277777

$$m = 1 - \frac{1}{n} \quad \eta = \frac{2}{\lambda} + 3$$

TABLA 5.1e. Características Hidrodinámicas de algunos suelos

FUENTE: Vogel T. y Hopkins J. W., 1992

SUELO DESCRIPCION	θ_s %	θ_r %	α m	n adim.	K_s m/s
Arena	0.4200	0.0610	-0.5291	2.0000	0.0000045000
Limo	0.4500	0.2400	-0.5263	1.8300	0.0000015833
Arcilla	0.4700	0.2600	-1.0416	1.9100	0.0000010500

$$m = 1 - \frac{1}{n} \quad K(S_e) \text{ de Van Genuchten}$$

TABLA 5.1f. Características Hidrodinámicas de algunos suelos

FUENTE: Kool J. B., Parker J. C. y Van Genuchten H. Th., 1980

SUELO DESCRIPCION	θ_s %	θ_r %	α m	n adim.	K_s m/s
Arena limosa	0.4700	0.1700	-1.0000	2.0000	0.0000087000
Arcillo Limoso	0.4500	0.2400	-1.4925	1.3950	0.000000069

$$m = 1 - \frac{1}{n} \quad K(S_e) \text{ de Van Genuchten}$$

TABLA 5.1g. Características Hidrodinámicas de algunos suelos

FUENTE: Healy R. W. y Warrick A. W., 1989

SUELO DESCRIPCION	θ_s %	θ_r %	α m	n adim.	K_s m/s
Sin Nombre	0.4500	0.1000	-0.2000	2.0000	0.0000277777
Sin Nombre	0.4500	0.1000	-0.2000	2.0000	0.0000277777
Sin Nombre	0.3500	0.2000	-0.2000	2.0000	0.0000277777
Sin Nombre	0.5000	0.0000	-0.1724	2.0000	0.0000277777
Sin Nombre	0.4500	0.1000	-2.0000	2.0000	0.0000277777
Arena Fina	0.4500	0.0500	-0.3771	3.5500	0.0000011111

$$m = 1 - \frac{1}{n} \quad \eta = \frac{2}{\lambda} + 3$$

TABLA 5.2. Cont. de Humedad Residual (θ_r) para diferentes suelos
 FUENTE: Hualem Yechezkel, 1976

No.	Suelo	θ_{\max}	θ_{\min}	ψ_{\min}^2 cm H_2O	θ_r	λ
1	Beit Netafa	0.446	0.241	1.51×10^4	0.010	0.19
2	Shluhot Silty Clay	0.385	0.163	1.51×10^4	0.010	0.20
3	Silt Mont Cenis	0.447	0.042	1.70×10^5	0.010	0.36
4	State dust	0.482	0.110	1.44×10^2	0.090	5.69
5	Weid Silty Clay loam	0.470	0.140	2.12×10^2	0.090	1.52
6	Amarillo Silty Clay Loam	0.455	0.140	2.25×10^2	0.110	2.35
7	Rideau Clay loam	0.416	0.286	4.19×10^2	0.280	1.62
8	Caribou silt loam	0.441	0.313	4.25×10^2	0.280	0.91
9	Greenville silt loam	0.475	0.037	1.00×10^6	0.010	0.34
10	Touchet silt loam	0.480	0.170	2.35×10^3	0.120	1.17
11	Ida silt loam (>15 cm)	0.530	0.175	2.00×10^3	0.060	0.38
12	Ida silt loam (0-15 cm)	0.554	0.219	2.00×10^3	0.010	0.27
13	Touchet silt loam	0.469	0.180	4.14×10^2	0.130	1.89
14	Pachappa loam	0.456	0.007	3.19×10^6	0.002	0.42
15	Adelanto loam	0.426	0.012	4.65×10^6	0.007	0.50
16	Indio loam	0.450	0.021	1.50×10^6	0.010	0.81
17	Guelph loam	0.520	0.236	1.00×10^3	0.130	0.41
18	Rubicon sandy loam	0.381	0.166	2.40×10^2	0.150	2.08
19	Pachappa fine sandy clay	0.334	0.049	1.50×10^4	0.030	0.44
20	Gilat sandy loam	0.440	0.130	1.02×10^3	0.010	0.44
21	Sand	0.272	0.090	3.60×10^1	0.010	1.83
22	Sand	0.258	0.084	3.80×10^1	0.010	2.87
23	Botany sand fraction	0.350	0.055	5.70×10^1	0.010	8.35
24	River sand	0.400	0.060	1.50×10^2	0.050	1.57
25	Volcanic sand	0.350	0.050	1.85×10^2	0.040	1.30
26	Sand fraction	0.372	0.045	8.00×10^1	0.040	4.94
27	Sable de riviera	0.342	0.075	1.90×10^2	0.060	0.92
28	Gilat fine sand	0.179	0.070	1.51×10^4	0.010	0.27
29	Rehovot sand	0.400	0.020	2.50×10^2	0.015	0.83
30	Pouder river sand	0.364	0.044	8.20×10^1	0.030	2.92
31	Molongio river sand	0.277	0.098	3.00×10^1	0.010	0.96
32	Beit Dagan Sand	0.161	0.052	1.49×10^4	0.040	0.37
33	Hygiene sandstone	0.250	0.151	2.01×10^2	0.140	3.78
34	Berea sandstone	0.206	0.064	2.34×10^2	0.050	2.13
35	Fragmented Fox Hill sandstone	0.503	0.166	1.16×10^2	0.160	2.61
35	Fine sand	0.356	0.063	3.02×10^2	0.050	1.98
37	Volcanic sand	0.365	0.058	2.73×10^1	0.050	1.65
38	Sand fraction(150-300/ μ m)	0.350	0.056	5.70×10^1	0.050	11.67
39	Sand fraction(1.0-0.5mm)	0.357	0.034	3.64×10^1	0.020	2.80
40	Sand fraction(0.5-0.25mm)	0.364	0.040	4.40×10^1	0.030	5.69
41	Fragmented mixture	0.437	0.134	1.07×10^2	0.120	2.65
42	Plainfield sand	0.307	0.060	2.05×10^2	0.050	1.45
43	Glass beads	0.383	0.037	3.01×10^1	0.030	1.90
44	Aggregated glass beads	0.548	0.080	8.26×10^1	0.060	3.57
45	Monodispersed g. beads	0.326	0.033	6.82×10^1	0.020	6.24

TABLA 5.3a. Conductividad Hidráulica a Saturación (K_s) para diferentes suelos.

FUENTE: Hartley D.H., 1992

TEXTURA DE SUELO	K_s (m/d)
Arena	0.0000583333
Arena-Limosa	0.0000170000
Limo-Arenosa	0.0000071666
Limo	0.0000036666
Franco-Limosa	0.0000018333
Arena-Limo-Arcillosa	0.0000011666
Limo-Arcillosa	0.0000006666
Limo-Franco-Arcillosa	0.0000005000
Arcillo-Arenosa	0.0000003333
Arcilla-Franca	0.0000003333
Arcilla	0.0000001666

TABLA 5.3b. Conductividad Hidráulica a Saturación (K_s) para diferentes suelos.

FUENTE: Romero G. N. y Vázquez F. E., 1992

TEXTURA DE SUELO	K_s (m/s)
Arena	0.0000084888 - 0.0000015663
Arena-Limosa	0.0000044833 - 0.0000064944
Limosa	0.0000025833 - 0.0000035083
Arcillo-Limosa	0.0000007027 - 0.0000021388
Arcilla	0.0000002916 - 0.0000005055

5.2.- EL EXPERIMENTO DE CLOTHIER Y SCOTTER (1982)

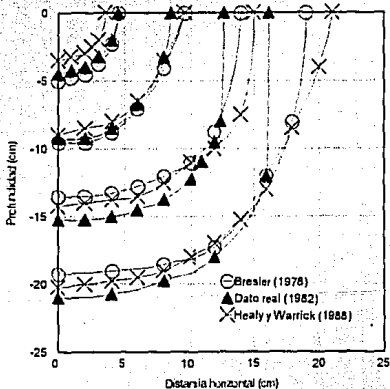
Para calibrar los resultados proporcionados por el Modelo ICRINRE, fue necesario utilizar los datos reportados en la bibliografía referente al tema. Un trabajo de investigación con el que se pudo efectuar una comparación en la zona de infiltración 2 (Fig 5.1), fue el realizado por Healy R. W. y Warrick A. W., (1988), el que consistió en lo siguiente:

Los experimentos de infiltración descritos por Clothier y Scotter (1982), fueron llevados a cabo en una caja rectangular con un área superficial horizontal de 200 mm x 200 mm y una altura total de 300 mm. La caja fue llenada con suelo Manawata (Dystric

Fluentic Eutrochrept) con textura arena-limosa-fina. Se aplicó un pequeño flujo de $0.9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{h}$, sobre una de las esquinas de la caja (La cual se realizó para garantizar la simetría radial de distribución) durante 9.67 h. Lo anterior creando una cavidad de aproximadamente 4 mm de radio que permaneció llena durante el transcurso del experimento.

Se determinó una curva de retención de humedad, resultando los siguientes valores: $n = 3.55$, Alfa (α) = -0.3717 m , $\theta_r = 0.45$, $\theta_r = 0.05$ y un valor de $K_s = 0.00000111 \text{ m/s}$ fue estimado por Healy (1987). Se hizo la estimación de la localización de los frentes de humedecimiento (y volúmenes de consumo) para los tiempos de 0.17, 1.00, 2.75 y 6.00 hrs.

Con la aplicación de los datos seleccionados, se presenta una gráfica comparativa (Gráfica 5.6) entre los resultados obtenidos experimentalmente (resultados físicos), los resultados físicos del Modelo BCZ (Ben-Asher et al, 1986) y los proporcionados con la técnica propuesta por Healy R. W. y Warrick A. W. (1988).



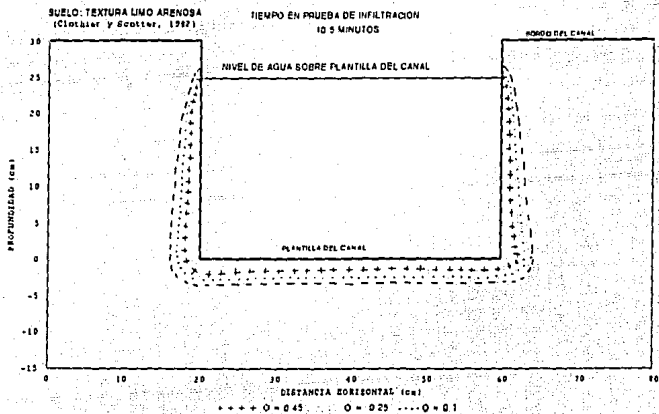
GRAFICA 5.6. Comparación de resultados obtenidos para describir el frente de humedecimiento en un suelo por distintos métodos.

6.- EJEMPLOS DE APLICACION Y RESULTADOS

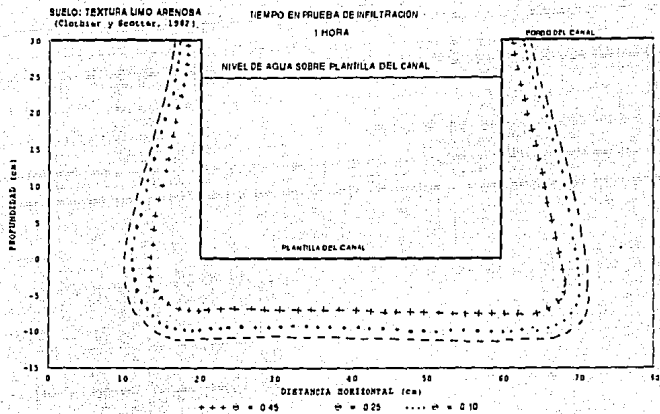
6.1.- EJEMPLOS DE APLICACION

Se realizó la transformación de datos por medio de una metodología que utiliza el método de Newton Raphson modificado, donde se utilizaron los valores reportados por Healy R. W. y Warrick A. W. (1988), obteniéndose las variables de entrada al modelo ICRINRE con: $n = 4.1738$ y $\alpha = - 0.323717$. Es importante hacer la aclaración que todos los datos reportados por estos autores, fueron utilizados para efectuar la corrida de calibración del Modelo ICRINRE y que el valor de la conductividad hidráulica a saturación $K_s = 0.004$ m/h, es incongruente con los demás datos referentes al suelo. Por lo tanto, se plantea que pudo existir un error de mecanografía y que su valor correcto era de 0.009 m/h.

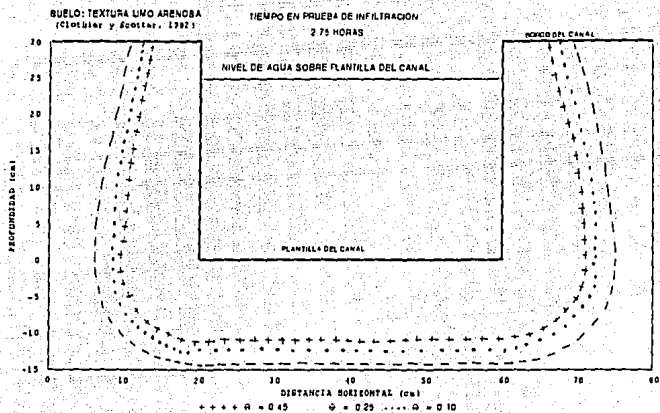
Con la propuesta de otras variables solicitadas por ICRINRE (las que faltaban definirse), se obtuvieron los resultados de la corrida de calibración. presentas en las gráficas 6.1.



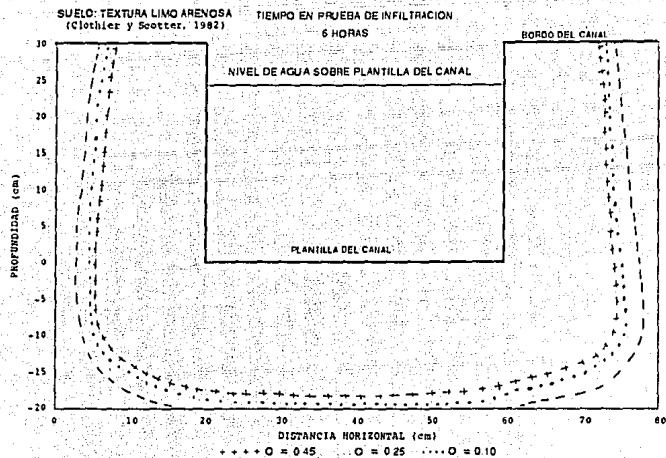
GRAFICA No. 6.1a. Curvas de Isocontenidos de humedad para 10.5 minutos de tiempo acumulado de infiltración en suelo limo arenoso.



GRAFICA No. 6.1b. Curvas de Isocontenidos de humedad para 60 minutos de tiempo acumulado de infiltración en suelo limo arenoso.

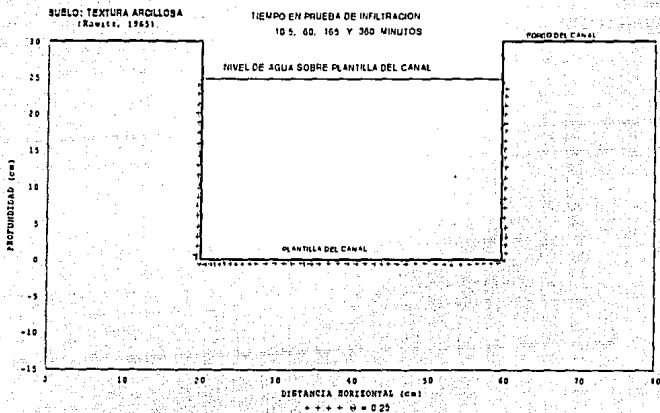


GRAFICA No. 6.1c. Curvas de Isocontenidos de humedad para 165 minutos de tiempo acumulado de infiltración en suelo limo arenoso.

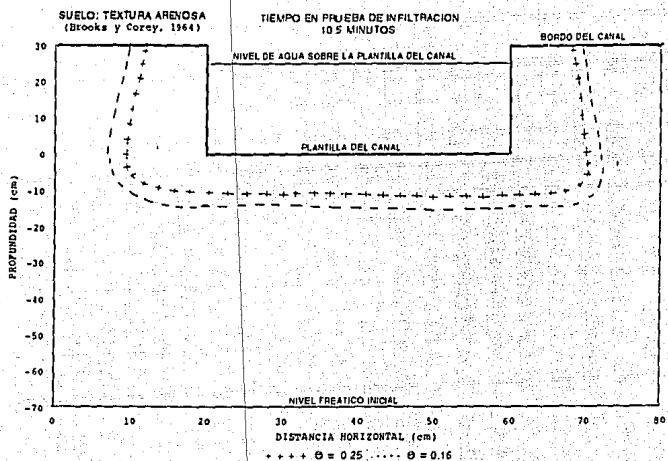


GRAFICA No. 6.1d. Curvas de Isocontenidos de humedad para 360 minutos de tiempo acumulado de infiltración en suelo limo arenoso.

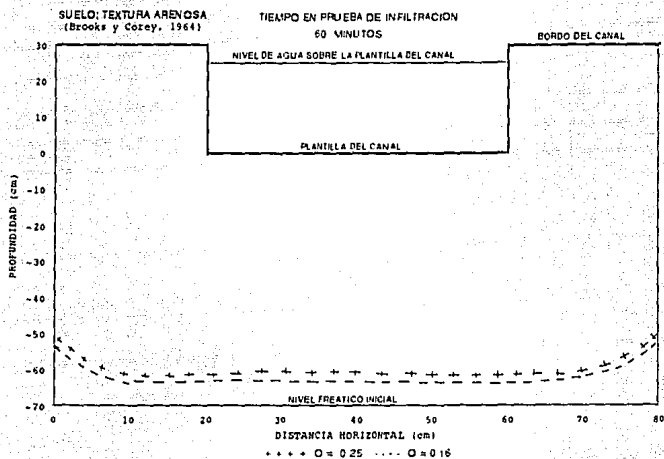
Se realizaron también, dos corridas del Modelo ICRINRE con datos de suelos arcilloso y arenoso (Beit Netofa Clay Soil e Hygiene Sand Stone, Tabla 5.1a), con los que se realiza una comparación de avance del frente de humedecimiento y curvas de isocontenidos de humedad para los mismos tiempos acumulados de infiltración que la corrida de calibración (Gráficas 6.2 y 6.3).



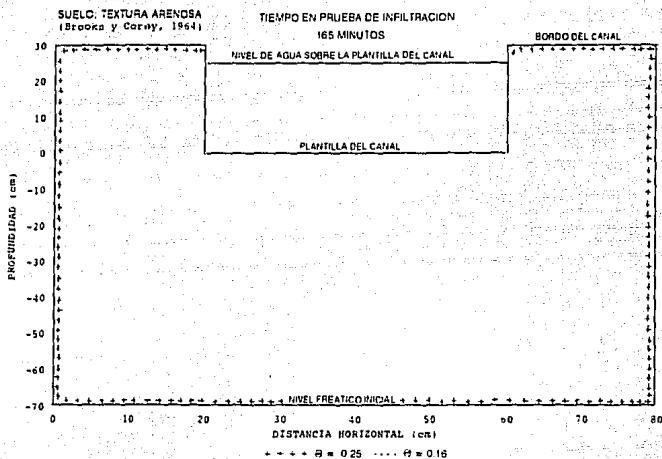
GRAFICA No. 6.2. Curvas de Isocontenidos de humedad para 10.5, 60, 165 y 360 minutos de tiempo acumulado de infiltración en suelo arcilloso.



GRAFICA No. 6.3a. *Curvas de Isocontenidos de humedad para 10.5 minutos de tiempo acumulado de infiltración en suelo arenoso.*



GRAFICA No. 6.3b. Curvas de Isocontenidos de humedad para 60 minutos de tiempo acumulado de infiltración en suelo arenoso.



GRAFICA No. 6.3c. *Curvas de Isocontenidos de humedad para 165 minutos de tiempo acumulado de infiltración en suelo arenoso.*

6.2.- RESULTADOS

Como primer paso, se dió solución a la ecuación de Richards L. A. (1931), con el fin de conocer el cambio del potencial de presión en suelos saturados y parcialmente saturados, para dos direcciones de flujo con el método de diferencias finitas. La propuesta de solución está dada, con un esquema explícito de diferenciación central, al que se hizo una similitud de solución y análisis como la ecuación del calor (ec. 4.7). El desarrollo con todas sus consideraciones, están escritas en el capítulo No. 4, mismo que corresponde al tema de solución numérica de las ecuaciones fundamentales. En éste desarrollo se definen las limitaciones a las que está sujeta el esquema numérico y se aplican metodologías que ayudan a simplificar dicho esquema.

El esquema numérico desarrollado fue aplicado al caso específico de un canal rectangular, en donde pudiera observarse la diferencia de movimiento entre las direcciones de flujo horizontal (X) y vertical (Z).

Como segundo paso, se realizó un Modelo de cómputo llamado ICRINRE, en lenguaje de programación Turbo Pascal Ver. 7.0, en el que se aplicaron el desarrollo y la metodología aquí consideradas. En el anexo A de este documento, se incluye el archivo del listado del Modelo ICRINRE.PAS, en donde está la secuela de cálculo del mismo.

Como tercer resultado, se presenta en el mismo anexo A la versión ejecutable (ICRINRE.EXE) en Diskette del Modelo ICRINRE, a la que pueden cambiarse los datos, dependiendo del tipo de suelo por estudiar.

El cuarto resultado, corresponde a la transformación de datos reportados en la bibliografía (Modelo de Van Genuchten - Mualem) a

los utilizados en el Modelo ICRINRE (Modelo de Van Genuchten - Burdine).

Como quinto y último resultado, se obtienen las curvas de isocontenidos de humedad para tres diferentes texturas de suelo (Graf. 6.1, 6.2 y 6.3), según los cálculos realizados por ICRINRE, con los datos correspondientes a cada uno de ellos.

7.- DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

7.1.- DISCUSIONES

La discusión que se presenta está dada con base en los resultados obtenidos de la investigación realizada.

Del esquema numérico planteado y las restricciones que lo limitan; puede decirse, que fueron aplicados conforme las consideraciones hechas en su desarrollo, y es con los resultados y las comparaciones con otros Modelos (Gráfica 5.6), que se prueba su bondad.

El programa ejecutable ICRINRE, está diseñado con la finalidad de presentar la mayor información posible de lo que sucede a cualquier tiempo, en el transcurso de una prueba de infiltración. Con él, puede describirse la localización del frente de humedecimiento y los volúmenes de agua consumidos a cualquier tiempo de la prueba de infiltración. El análisis se realizó para

dos direcciones de flujo considerando un ancho unidad para la dirección horizontal faltante.

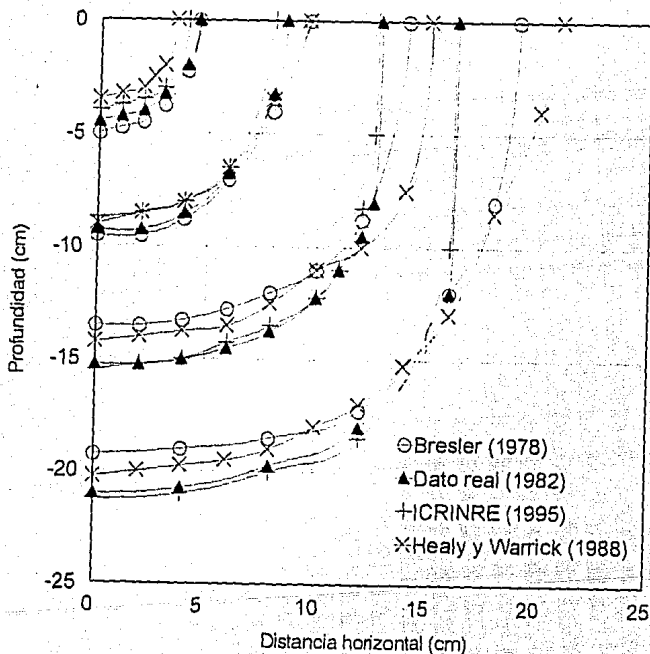
De la metodología sugerida (Newton Raphson modificado) para la transformación de datos de una combinación de modelos a otros, es necesario aclarar que se tienen muchas raíces de solución para el valor empírico n , pero que solamente una, es la que lleva al valor correcto de α para representar la curva de retención de humedad del suelo analizado. Como una primera aproximación, el valor inicial propuesto para n , debe ser el dato reportado para la combinación de modelos a transformar.

Comparando los resultados reportados por Healy y Warrick (1988), con los obtenidos mediante la aplicación del Modelo ICRINRE (para la columna inicial, correspondiente a la posición sobre el eje x en $i = 20$, localizada en la zona de infiltración 2 de la figura 5.1); se observa un mejor ajuste de datos del Modelo ICRINRE con los datos del experimento realizado, en comparación de los otros dos modelos presentados, que también son comparados con los datos reales. Esto es claro observarlo en el movimiento horizontal, que para ICRINRE es casi idéntico al real, sin embargo, los otros dos modelos se alejan más del dato. Con respecto al movimiento vertical los datos calculados con los tres modelos son muy próximos, aunque para la corrida de calibración realizada, ICRINRE toma ventaja para la posición del frente de humedecimiento a las 6 horas de la prueba de infiltración (Gráfica No. 7.1); esto puede corregirse reduciendo el valor del DT4 (Diferencial de Tiempo 4) solicitado por ICRINRE. Si el valor del DT4 es reducido, entonces puede obtenerse el perfil real del frente de humedecimiento.

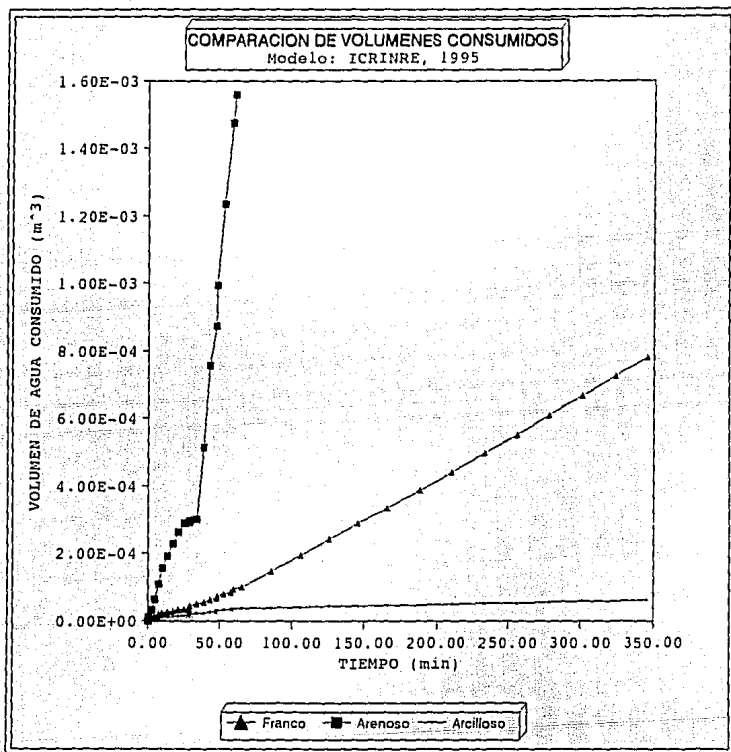
La gráfica donde se presentan los volúmenes de agua consumidos para tres diferentes texturas de suelo (7.2), aclara la idea de que, es un suelo arenoso el que consume mayor cantidad de

agua, seguido por el suelo franco y en último lugar el arcilloso.

Finalmente es necesario aclarar que se eligió una sección transversal de canal rectangular, porque es únicamente con ésta que pueden determinarse los perfiles de humedecimiento y las curvas de isocontenido de humedad para cualquiera que sea la geometría de la sección analizada.



GRAFICA No. 7.1. Comparación de datos reales de un experimento con tres diferentes modelos de aproximación.



GRAFICA No. 7.2. Volúmenes de agua consumidos por tres diferentes texturas de suelo.

7.2.- CONCLUSIONES

- 1.- Se ha desarrollado un modelo matemático explícito en diferencias finitas, que da solución a la ecuación de Richards (1931), con mejores resultados en la zona de infiltración 2 (figura 5.1), que los modelos presentados por Warrick y Healy (1988), y Bresler (1978).
- 2.- En el modelo matemático propuesto, se establecen las limitaciones de aplicabilidad del mismo (convergencia y estabilidad), y se consideran diferentes criterios para el cálculo de parámetros que intervienen en él.
- 3.- Se realizó la aplicación del modelo matemático, al caso específico de un canal rectangular, porque a partir de él es posible determinar los perfiles de humedecimiento y las curvas de isocontenidos de humedad para cualquier sección geométrica de canal. También permite apreciar con mayor claridad la diferencia entre los movimientos horizontal (X) y vertical (Z).
- 4.- El cambio del potencial de presión en el sentido de flujo horizontal X, se manifestó más lento en comparación con el movimiento vertical Z (gráfica 7.1), tal como sucede en la naturaleza.
- 5.- Dando valores reales de las características hidrodinámicas del suelo al modelo ICRINRE, se obtienen resultados muy próximos a la solución exacta de la ecuación de Richards.

- 6.- La aplicación de funciones simplificadas que calculan parámetros que intervienen en el modelo matemático desarrollado, proporcionan un ajuste de datos que llevan a la solución rápida de la ecuación de Richards.
- 7.- Los volúmenes de agua consumidos, de acuerdo a la textura del suelo analizado, tienen una buena correspondencia con sus características hidrodinámicas, lo que da una aproximación cercana a lo sucedido en la realidad.
- 8.- Para el caso específico del Modelo ICRINRE, la ecuación de Richards está desarrollada considerando el criterio de promedios pesados (factores de peso) de acuerdo a la acción o no de una carga de presión en el sentido de flujo analizado. Lo que lleva a un mejor ajuste de los resultados simulados con los reales.
- 9.- Se logró alcanzar todos los objetivos planteados al inicio de esta tesis.

8.- BIBLIOGRAFIA

American Society of Agricultural Engineers, "Advances in infiltration", Proceedings of the national conference on advances in infiltration, ASAE Publication 11-83, Chicago, Illinois, December 12-13, 1983.

Bautista E. and Wallander W. W., Article: "Hidrodynamic furrow irrigation model with specified space steps in: Journal of irrigation and drainage engineering, Vol. 118 No. 3, May-June, ASCE, 1992.

Bautista E. AND Wallander W. W., Article: "Numerical calculation of infiltration in furrow irrigation simulation models", in: Journal of irrigation an drainage engineering, vol. 119 No. 2, March/April, ASCE, 1993.

Brandt A., Bresler E., Diner N., Ben-Asher I., Heller J., and Goldberg D., Article: Infiltration from a trickle source: I.

Mathematical models, in: SOIL. SCI. SOC. AMER. PROC., Vol. 35, 1971.

Fuentes M. O. y Martínez A. P., "Introducción a los Métodos Numéricos Aplicados a la Hidráulica", Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Serie divulgación 5, México, 1988.

Fuentes R. C., Haverkamp R. and Parlange J. Y., Article: "Parameter constraints on closed-form soilwater relationships", in: Journal of hidrology, Vol. 134, Pages 117 to 142, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1992.

Geat A., Article: "Adaptation of horton and SCS infiltration equations to complex storms", in: Journal of Irrigation and drainage engineering, Vol. 118 No. 2, March-April ASCE 1992.

Hartley D. M., Article: "Interpretation of kostiakov infiltration parameters for borders", in: Journal of irrigation and drainage engeneering, Vol. 118 No. 1, January-February, ASCE, 1992.

Haverkamp R., Ross P. J., Smettem K. R. J., Parlange J. Y., Vauclin M. and Thony J. L., Article: "Three dimensional infiltration equation", in: Memorias del 15 congreso mundial de la ciencia del suelo, Volume 2a: Commission I: Symposia, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, Acapulco, México, July 10-16, 1994.

HEALY R. W. AND WARRICK A. W., Article: "A generalized solution to infiltration from a surface point source" in: SOIL SCI. SOC. AM. J., Vol. 52, 1988.

Islas A. and Lomen D. O., Article: "An analytical solution to Richards equation for time-varying infiltration". in: Water resources research, Vol. 27 No. 5, Pages 763-766, May 1991.

Kool J. B., Parker J. C. and Van Genuchten M. Th., Article: "Determining soil hydraulic properties from one-step outflow experiments by parameter estimation: I. Theory and numerical studies". in: SOIL SCI. SOC. AM. J., Vol. 49, 1985.

Levi Enzo, "El agua según la ciencia", Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Protagonistas de la Ciencia, Ediciones Castell Mexicana, S. A., México, D. F., 1989.

Malcolm R. D., Article: "Numerical calculation of saturated-unsaturated infiltration in a cracked soil". in: Water resources research, Vol. 21 No. 5, Pages 709-714, May 1985.

Mualem Yechezkel, Article: "A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media", in Water Resources Research, Vol. 12 No. 3, Pages 513 to 522, June of 1976.

Murray R. Spiegel, "Variable compleja", Serie Schaums, Mc Graw Hill, México, 1991.

Paniconi C., A. Alvaro A. and Wood F. E., Article: "Numerical evaluation of iterative and noniterative methods for the solution of the nonlinear Richards equation", in: Water resources research, Vol. 27 No. 6 pages 1147-1163, June 1991.

Parker J. C., Kool J. B. and Van Genuchten M. Th., Article: "Determining soil hydraulic properties from one-step outflow experiments by parameter estimation: II. Experimental studies" in: SOIL SCI. SOC. AM. J., Vol. 49, Pages 1354-1359, 1985.

Raats R. A. C., Article: "Steady infiltration from lime sources and furrows", in: Soil science society of America, Vol. 34 No.5, September-October 1970.

Rendón P. L., "Riego por melgas (Diseño y evaluación)", Colegio de Postgraduados, Centro de Hidrociencias, Montecillos, México, 1992.

Rubin J., Article: "Theoretical analysis of two-dimensional, transient flow of water in unsaturated and partly unsaturated soils", in: Soil Science Society of America, Vol. 32 No. 5, September-October 1968.

Saleem Ahmad, Deepak Kashyap, and Mathur B. S., Article: "Mathematical modeling of saturated-unsaturated flow to drains in: Journal of irrigation and drainage engineering, Vol. 119. No. 1, January-February, ASCE, 1993.

Van Genuchten M. Th., Article: "A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils", in: SOIL SCI. SOC. AM. J. VOL. 44, Pages 892-898, 1980.

Vogel T. and Hopmans J. W., Article: "Two dimensional analysis of furrow infiltration", in: Journal of irrigation and drainage engineering, Vol. 118, No. 5 September/October, ASCE, 1992.

Youngs E. G., Article: "Two-and three-dimensional infiltration: seepage from irrigation channels and infiltrameter rings", in: Journal of hydrology Vol. 15, Pages 301-3015, 1972.

Zaidel J. and Russo D., Article: "Estimation of finite difference interblock conductivities for simulation of infiltration into initially dry soils", in: Water resources research, Vol. 28 No. 9 Pages 2285-2295, September 1992.

Anexo A.- Modelo ICRINRE .EXE y .PAS (Diskette)