

51
ZEJ



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**ANALOGIAS ENTRE RADIADORES DE MEDIA
LONGITUD DE ONDA ACUSTICOS Y
ELECTROMAGNETICOS**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R O F E S I O N A L
LUIS JAVIER VILLEGAS VICENCIO



MEXICO, D. F. **FACULTAD DE CIENCIAS**
SECCION ESCOLAR SEPTIEMBRE DE 1995

FALLA DE ORIGEN

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Luis Javier Villeras Vicencio

con número de cuenta 8423226-3 con el Título: Analógicas entre radiadores de media longitud de onda acústicos y electromagnéticos.

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Físico

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
	FIS. ANDRES VALENTIN	PORTA CONTRERAS	
Director de Tesis	DR. STEPHEN MUEL	SAUNDERS	
	M. EN C. RICARDO RUIZ	BOULLOSA	
	FIS. MANUEL J. SUS	JIMENEZ JIMENEZ	
Suplente	FIS. ESTEBAN A. ANG	BOYOMCRO	
Suplente			

Llegar hasta este punto involucra un proceso largo. Al voltear atrás veo múltiples partícipes en mi personal historia. Lamentablemente es una historia que es imposible contar con todos sus participantes. Es menester agradecerle su apoyo a todos ellos. En primer lugar deseo agradecer a mi madre, la Sra. Irma Vicencio Pérez por darme vida, amor y enseñarme un buen camino en la vida. A mis abuelos, la Sra. María Pérez Caballero y el Sr. Ramón Vicencio González + por soportar mi niñez. A mis tíos, la Sra. Ma. Concepción Vicencio Pérez, la Sra. Silvia Vicencio Pérez y el Lic. Sergio Gamboa P. + por su amor y generosidad de siempre. A mi tío el Sr. Rodolfo Villegas I. por su apoyo generoso cuando fue necesario.

Mis maestros han sido pilares indiscutibles de formación y ejemplo del ser profesional, el Fis. Andrés Porta Contreras y el Dr. Mayo Villagrán Muñiz, son ejemplo de ello.

Más recientemente existe el apoyo de otra persona. Con ella camino mi vida. Deseo agradecer a mi esposa, la Fis. Ma. de la Paz Cruz Jáuregui por ayudarme en mi carrera, y ahora, por la plenitud alcanzada como Profesional y como mi compañera de siempre.

Si en estas líneas no te has encontrado, no es por omisión. Ruégote disculpes por mi brevedad. todos ustedes viven en mi corazón y los vivo en mi infinita gratitud.

Gracias a Todos.

A todos.

"ANALOGÍAS ENTRE RADIADORES DE MEDIA LONGITUD DE ONDA ACÚSTICOS Y ELECTROMAGNÉTICOS."

CONTENIDO.

Introducción.

Capítulo I. Fundamentos mecánicos.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Vibraciones longitudinales.	2
1.2.1 Ecuación de onda.	2
1.2.2 Energía y potencia.	6
1.2.3 Condiciones de frontera.	8
1.3 Vibraciones torsionales.	10
1.3.1 Ecuación de onda.	10
1.3.2 Energía y potencia.	13
1.3.3 Condiciones de frontera.	15
1.4 Vibraciones flexurales.	17
1.4.1 Ecuación de onda.	17
1.4.2 Energía y potencia.	23
1.4.3 Condiciones de frontera.	25
1.5 Varillas de sección transversal variable.	30
1.5.1 Perfil cónico cilíndrico.	32
1.5.2 Perfil cónico cilíndrico truncado.	33
1.5.3 Perfil parabólico cilíndrico.	35
1.5.4 Perfil exponencial cilíndrico.	36
Capítulo II. Fundamentos electromagnéticos.	38
2.1 Introducción.	38
2.2 Ecuaciones de Maxwell.	39
2.3 Norma de Lorentz.	41
2.4 Potenciales retardados.	43
2.5 Radiación de un elemento de corriente.	46
2.6 Características de los patrones de radiación.	52
2.7 Potencia radiada y resistencia de radiación.	54
2.8 Estudio independiente del tiempo del potencial vectorial y los campos magnéticos y eléctricos.	57

Capítulo III. Radiadores.	60
3.1 Introducción.	60
3.2 Condiciones de resonancia de una varilla delgada.	61
3.3 Radiación dipolar acústica.	66
3.4 Formas de excitación.	70
3.5 Antenas electromagnéticas.	71
3.5.1 Antenas cortas.	71
3.5.2 Antenas de semilongitud de onda.	73
3.5.3 Diagrama polar de radiación.	76
3.5.4 Potencia emitida.	77
3.5.5 Resistencia de radiación.	78
3.5.6 Dipolo eléctrico.	79
3.6 Analogías entre el potencial eléctrico y la presión acústica.	84
3.7 Longitud efectiva.	87
Conclusiones.	89
Bibliografía	90

Introducción

En el presente trabajo de tesis se tiene por objetivo encontrar las analogías entre radiadores de media longitud de onda acústicos y electromagnéticos. Para encontrarlas se hace un análisis en tres capítulos. En el primero se analizan los fundamentos mecánicos para producir una antena acústica, en particular, se analizan los tres tipos de movimientos que pueden darse en una varilla delgada como resultado de deformaciones mecánicas, estos son: vibraciones longitudinales, torsionales y flexurales. Para cada uno de los movimientos se deduce la ecuación de onda y sus relaciones de energía y potencia. También dentro del mismo capítulo se obtiene la ecuación de onda para varillas de sección transversal variable con diversos perfiles cilíndricos, estos son: cónicos, cónicos truncados, parabólicos y exponenciales. Todos ellos con la aproximación de varilla delgada.

En el segundo capítulo, se analizan los fundamentos de los radiadores electromagnéticos, empezando por las ecuaciones de Maxwell y tras alguna manipulación de las mismas, se introduce la Norma de Lorentz para deducir las expresiones del potencial escalar eléctrico y potencial vectorial magnético y obtener las ecuaciones de onda de ambos potenciales. Luego se hace una discusión para encontrar los potenciales de retardo y la radiación de un elemento de corriente. También se hace una discusión de las características generales de los patrones de radiación de antenas. Se hacen cálculos de la potencia radiada y resistencia de radiación de una antena y finalmente, en completos del trabajo se hace un estudio independiente del tiempo en el potencial vectorial magnético y los campos eléctrico y magnético en antenas.

Finalmente, en el tercer capítulo se hace un estudio de los radiadores planteados en el objetivo. Primero se obtienen las condiciones de resonancia para una varilla delgada, después se obtienen las expresiones analíticas para la presión acústica debida a una par de fuentes puntuales, es decir, un doblete acústico; dicho doblete se hace con una varilla delgada. Ésta es la antena acústica que se propone en el trabajo. Ahí mismo se obtiene su patrón de radiación. En la siguiente sección se discute acerca de las formas posibles de excitar la antena. En la siguiente sección se analizan las antenas electromagnéticas más importantes para obtener un panorama adecuado en el estudio de una antena de semilongitud de onda. Los aspectos analizados aquí son: antenas cortas, antenas de semilongitud de onda, su diagrama polar de radiación, la potencia que emite, su resistencia de radiación y el dipolo eléctrico. Con los elementos que se tienen hasta este punto, se procede en la siguiente sección a encontrar las analogías entre el potencial eléctrico y la presión acústica de las antenas de media longitud de onda. Y en la última sección se discute acerca de una corrección muy importante en las antenas electromagnéticas, se trata de la corrección por longitud efectiva, éste no es propio sólo de las antenas electromagnéticas, sino

que se da también en las acústicas como la que se propone, sin embargo su efecto es despreciable, esto también se discute en la misma sección. Finalmente, en la última parte del trabajo se expresan un conjunto de conclusiones.

Capítulo I. Fundamentos Mecánicos.

1.1 Introducción.

En el presente capítulo se analizan los movimientos ondulatorios que pueden existir en un cuerpo sólido como resultado de sus propiedades elásticas. Para tal efecto, el sólido se considera como un medio elástico, isotrópico y homogéneo (1, 2); otra hipótesis fundamental para el análisis es que el cuerpo es una varilla delgada y larga, esto es, que las dimensiones de la sección transversal eficaz son pequeñas comparadas con su longitud (3).

Hay tres tipos fundamentales de vibración que ocurren en varillas delgadas, éstas se clasifican como longitudinales, torsionales y flexurales (4). La forma en que vibran es consecuencia de sus propiedades elásticas (1). Para los tres tipos de vibración, se considera primero la deducción de la ecuación de ondas y su solución, posteriormente se deducen las relaciones de energía, potencia, finalmente se evalúa el movimiento vibracional con condiciones de frontera, que, para los tres casos, se realiza con la varilla sujeta en un extremo y libre en su otro extremo, llamada fija-libre. Así pues, no se analizan los casos de varilla fija-fija, libre-libre o libre-fija.

En la última parte del capítulo se extraen conclusiones del análisis anterior para llevarlas a varillas de sección transversal variable; se deduce la ecuación de onda y se analiza la ecuación de onda para diversos perfiles y sus soluciones. Los perfiles considerados son cilíndricos de la forma: cónica, cónica truncada, parabólica y exponencial.

1.2 Vibraciones longitudinales.

En el caso de vibraciones longitudinales, los elementos de la varilla se extienden y contraen. Para varillas delgadas la deformación lateral no es significativa conforme las extensiones y contracciones se suceden (3, 4).

Para el estudio de ondas longitudinales en varillas resulta útil notar que el análisis es similar al de ondas planas en fluidos (2), es decir, que las expresiones matemáticas para la transmisión de ondas acústicas planas a través de fluidos, no sólo son similares a la transmisión de ondas de compresión a lo largo de una varilla, sino que, si el fluido está confinado en un tubo rígido, hay una estrecha correlación entre las condiciones de frontera (3). Además, sólo se necesitan considerar fuerzas (no momentos) y se obtienen ecuaciones parciales de segundo orden que conducen a la ecuación de onda.

1.2.1 Ecuación de onda.

Se han señalado en la sección 1.1 las hipótesis fundamentales para el presente estudio de vibraciones en sólidos. Con éstas, considérese una varilla de *longitud* L y *sección transversal* S sujeta a *fuerzas* $f(x, t)$; y la convención de que valores positivos de f representan fuerzas de compresión y valores negativos indican fuerzas de tensión, como se muestra en la figura 1. La elección de esta convención hace que la compresión de un sólido, sea análogo a la compresión de un fluido por un incremento positivo de la presión.

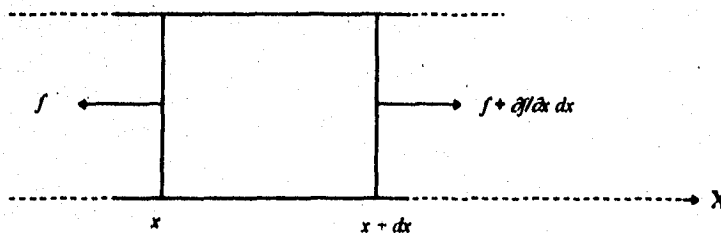


Figura 1. Fuerzas compresivas en una varilla.

La aplicación de fuerzas, respecto a la posición en equilibrio, produce un *desplazamiento longitudinal* $\xi = \xi(x, t)$ de cada una de las partículas de la varilla. Al pensar en una varilla delgada, este desplazamiento es el mismo en todos los puntos para cualquier sección transversal.

En el resto del capítulo se adopta la siguiente convención: la coordenada del extremo izquierdo de la varilla es $x = 0$ y la del derecho $x = L$. Un valor positivo de x representa un desplazamiento a la derecha y un negativo uno a la izquierda. Al aplicar fuerzas longitudinales, las partículas que se hallan originalmente en x se mueven una distancia ξ , de forma similar en un plano localizado en $x + dx$ (con dx elemento diferencial de varilla *no* deformada), se mueven una distancia $\xi + d\xi$ a la derecha. Ver figura 2.

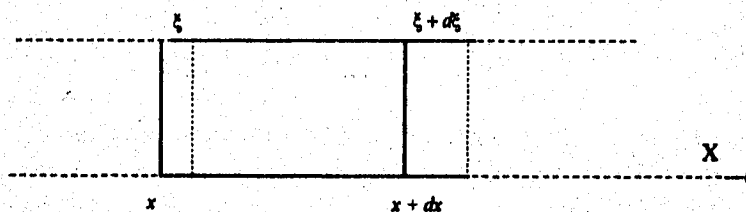


Figura 2. Deformación longitudinal $d\xi/dx$ en la varilla.

Al ser pequeño dx puede hacerse una aproximación en series de Taylor

$$\xi + d\xi = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \quad (1.1)$$

tras haberse desplazado el extremo izquierdo una distancia ξ y el derecho $\xi + d\xi$, el *incremento en longitud* $d\xi$ del segmento está dado, con la ayuda de la ecuación 1.1, por

$$\begin{aligned} (\xi + d\xi) - \xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \\ d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

La *deformación* ϵ en el segmento se define como la razón de un incremento en longitud con respecto a la longitud original o

$$\epsilon \equiv \frac{d\epsilon_o}{dx} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \quad (1.3)$$

Siempre que se deforma una varilla se producen fuerzas elásticas; estas fuerzas actúan a través de cada plano de sección transversal de la varilla y mantienen a la varilla unida.

El *esfuerzo* en una varilla se define por la razón de fuerza f aplicada a una superficie transversal S de la varilla o

$$\text{esfuerzo} = \frac{f}{S} \quad (1.4)$$

Para una varilla homogénea e isotrópica, el esfuerzo puede describirse en términos de la deformación con ayuda de 1.3 y 1.4, e indica que la razón de esfuerzo a deformación es constante, cuyo valor es el *módulo de Young* Y o *módulo de elasticidad*, que es una propiedad intrínseca del material (2).

$$\text{o bien} \quad \frac{f}{S} = -Y \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \quad (1.5)$$

Esta relación se conoce como ley de Hooke (3). Debido a que un esfuerzo positivo da lugar a una deformación negativa, el signo negativo garantiza un valor positivo de Y (que es siempre positivo constante y característico en los sólidos) (3). Explicando más ampliamente este punto se tiene que, al aplicar un esfuerzo (fuerza positiva según la convención utilizada), la deformación que se produce es de compresión; la deformación es el cambio de desplazamiento respecto a la posición (ver ec. 1.3) y es una cantidad negativa pues es menor que cuando se halla en equilibrio. Para el caso de una tensión (fuerza negativa), la deformación producida es una elongación, que indica que el cambio de desplazamiento respecto a la posición es una cantidad positiva, pues es mayor a cuando se halla en equilibrio.

Reescribiendo la ec 1.5 se tiene

$$f = -SY \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \quad (1.6)$$

como una expresión para las fuerzas internas longitudinales de la varilla.

Al ser f la fuerza longitudinal interna en x , la fuerza en $x+dx$ es $f + (\partial f / \partial x)dx$, por tanto, la fuerza neta hacia la derecha es, para un elemento diferencial en la varilla

$$df = f - (f + \frac{\partial f}{\partial x})dx = -\frac{\partial f}{\partial x} dx \quad (1.7)$$

Sustituyendo (1.6) se tiene

$$df = SY \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad (1.8)$$

La masa del elemento dx es $\rho S dx$, con ρ la densidad volumétrica, que por las hipótesis empleadas, es constante en toda la varilla.

Por segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$df = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx \quad (1.9)$$

Substituyendo las ecuaciones 1.7 y 1.8 en 1.9 y reduciendo

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\text{o bien} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

$$\text{con} \quad c_L^2 = \frac{Y}{\rho} \quad (1.11)$$

la ec. 1.10 es la ecuación de onda longitudinal unidimensional (3). Cabe notar que la velocidad c_L e la onda longitudinal depende de las características físicas intrínsecas en el sólido. (ver ec. 1.11).

La velocidad c_L es frecuentemente llamada velocidad de la varilla, para distinguirla de otras velocidades que caracterizan a los medios sólidos (1). Resulta ilustrativo calcular la magnitud de c_L para un metal común como el acero, su módulo de Young es aproximadamente 2×10^{11} N/m², su densidad es 8,000 Kg/m³; así pues $c_L \cong 5,000$ m/s (=18,000 Km/h)(1).

La ecuación 1.10 tiene como solución general

$$\xi(x,t) = \xi_1(ct - x) + \xi_2(ct + x) \quad (1.12)$$

La solución general compleja (en adelante todas las cantidades complejas se denotan por **lertas negritas**) es

$$\xi(x, t) = \mathbf{A} e^{i(\omega t - \kappa x)} + \mathbf{B} e^{i(\omega t + \kappa x)} \quad (1.13)$$

con **A** y **B** constantes de amplitud compleja. Además, $\kappa = \omega / c_L$ es el número de onda y ω la frecuencia angular (ω).

1.2.2 Energía y potencia.

Tras haber encontrado la ecuación de onda para vibraciones longitudinales en una varilla; en la presente sección se encuentran las relaciones de energía y potencia para el mismo tipo de vibraciones, para ello supóngase una onda viajera presente en una varilla delgada y larga dada por

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos(\kappa x - \omega t) \quad (1.14)$$

La densidad de *energía cinética* (por unidad de longitud) asociada con la onda es

$$K_1 = \frac{S \rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} S \rho \omega^2 \xi_m^2 \sin^2(\kappa x - \omega t) \quad (1.15)$$

Para hallar la expresión correspondiente a la densidad de *energía potencial*, es necesario conocer el trabajo requerido para estirar la varilla una cantidad $d\xi$ debido a la aplicación de la fuerza f . Dicho trabajo es

$$dW = \frac{1}{2} f d\xi \quad (1.16)$$

con esto la densidad de energía potencial por unidad de longitud es

$$V_1 = \frac{dW}{dx} = \frac{f d\xi}{2 dx} = \frac{f \xi}{2} \quad (1.17)$$

Sustituyendo las expresiones 1.6 y 1.3 en 1.17 se obtiene

$$V_1 = \frac{SY}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

$$V_1 = \frac{1}{2} SY \kappa^2 \xi_m^2 \text{sen}^2(\kappa x - \omega t)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} S \rho \omega^2 \xi_m^2 \text{sen}^2(\kappa x - \omega t) \quad (1.18)$$

donde se hizo la sustitución $Y \kappa^2 = \rho \omega^2$.

Con estos resultados la densidad total de energía ($K_1 + V_1$) es

$$E_1 = S \rho \omega^2 \xi_m^2 \text{sen}^2(\kappa x - \omega t) \quad (1.19)$$

La densidad total promedio de energía es

$$\overline{E_1} = S \rho \omega^2 \xi_m^2 \quad (1.20)$$

esto haciendo uso del hecho que para un periodo

$$\overline{\text{sen}^2(\kappa x - \omega t)} = \frac{1}{2} \quad (1.21)$$

nótese que al dividir 1.20 por S , se tiene la expresión para la densidad volumétrica de energía.

La potencia P transportada por la onda representada en la ecuación 1.13 se da por

$$P = -f \frac{\partial \xi}{\partial x} = -SY \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.22)$$

para ello se emplea la ecuación 1.6.

El resultado para la potencia es

$$P = S \rho c_L \omega^2 \xi_m^2 \text{sen}^2(\kappa x - \omega t) = c_L E_1 \quad (1.23)$$

La potencia promedio transportada es, por tanto

$$\overline{P} = \frac{1}{2} S \rho c_L \omega^2 \xi_m^2 = c_L \overline{E_1} \quad (1.24)$$

que se interpreta como la densidad promedio total de energía moviéndose con velocidad c_L .

La *intensidad* I de una onda es la potencia transportada por unidad de área normal a la dirección de propagación. De donde

$$I = \frac{1}{2} \rho c_L \omega^2 \xi_m^2 \quad (1.25)$$

para ondas longitudinales en una varilla delgada (1). De las ecuaciones 1.20, 1.24 y 1.25 se observa que la energía promedio, potencia promedio e intensidad dependen de cantidades intrínsecas del material en el cual se propaga la onda. Además se observa que estas cantidades físicas dependen del modo m -ésimo del desplazamiento, por lo que es necesario aclarar que aun cuando las cantidades son promedio, al tratarse de un promedio temporal, no guardan un promedio modal; por lo que no debe interpretarse como una cantidad absoluta sea cual fuere el modo de propagación.

1.2.3 Condiciones de frontera.

En la presente sección se aplican condiciones de frontera a la varilla, de modo que esté rigidamente fija en $x = 0$ y libre para moverse en $x = L$.

Si no es posible que la varilla se mueva en $x = 0$, entonces el desplazamiento es nulo, esto es, $\xi = 0$ en $x = 0$. El que en $x = L$ esté libre para moverse, implica que no puede haber fuerzas elásticas internas, en consecuencia, $f = 0$; dada la expresión 1.6 esta condición es equivalente a que $\partial \xi / \partial x = 0$ en $x = L$.

La aplicación de $\xi = 0$ en $x = 0$ mediante la expresión 1.13 da $A + B = 0$, de tal manera que 1.13 se convierte en

$$\xi = A e^{j\omega t} (e^{-j\kappa x} - e^{j\kappa x}) = -2j A e^{j\omega t} \text{sen}(\kappa x) \quad (1.26)$$

Al aplicar la segunda condición de frontera, $\partial \xi / \partial x = 0$ en $x = L$, da $\cos(\kappa L) = 0$ ó

$$\kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

que equivale a
$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c_L}{2L} \quad (1.28)$$

o bien
$$v_n = \frac{(2n-1)c_L}{4L} \quad (1.29)$$

La frecuencia ν del primer sobretono de una varilla fija-libre, es tres veces mayor que su fundamental. Debido a la ausencia de armónicos pares (3), la calidad del sonido producido por una varilla vibrante fija-libre, es de menor calidad al producido por una varilla, por ejemplo, libre-libre o fija-fija, en que sí están presentes dichos armónicos.

El desplazamiento complejo ξ_n correspondiente al n -ésimo modo de vibración es

$$\xi_n = -2jA_n e^{j\omega_n t} \text{sen}(\kappa_n x) \quad (1.30)$$

y la parte real es
$$\xi_n = (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t)) \text{sen}(\kappa_n x) \quad (1.31)$$

donde las constantes de amplitud reales A_n y B_n están perfectamente definidas por $2A_n = B_n + jA_n$. La solución completa es la suma de todas las soluciones armónicas separadas

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t)) \text{sen}(\kappa_n x) \quad (1.32)$$

Si las condiciones iniciales del desplazamiento y velocidad se conocen, se puede usar el teorema de Fourier para evaluar A_n y B_n (3).

1.3 Vibraciones torsionales.

En el caso de las vibraciones torsionales, cada sección transversal de la varilla, rota alrededor de su centro sobre su propio plano transversal, permaneciendo el eje central sin disturbio (4). Supóngase una varilla de *sección transversal* S , a lo largo del eje de la varilla su *densidad* ρ es uniforme y su *módulo de rigidez* o *módulo cortante* μ es también uniforme al ser un medio isotrópico (1).

1.3.1 Ecuación de onda.

El primer paso para calcular la ecuación de onda es calcular la torca necesaria para torcer un ángulo α un tubo de sección transversal constante de longitud L . Para ello, considérese un casquete cilíndrico de radio r y espesor dr . En la figura 3 se muestra el casquete cilíndrico, supóngase como resultado de un *esfuerzo cortante circunferencial* f_ϕ actuando a través de los extremos de áreas $dS = 2\pi r dr$, un par de torcas dM iguales y opuestas, ubicadas en los extremos del casquete.

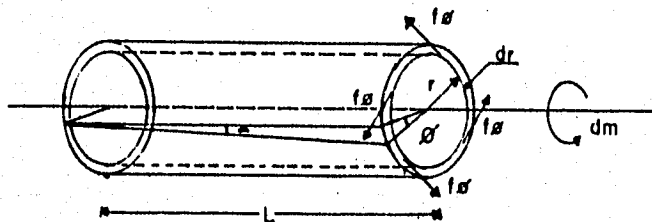


Figura 3. Casquete cilíndrico sometido a una torca constante.

El momento de la fuerza cortante es

$$dM = r f_\phi dS = 2\pi r^2 f_\phi dr \quad (1.33)$$

El desplazamiento cortante en el casquete es medido por el ángulo α (estrictamente $\tan \alpha$) entre la línea paralela al eje y la dirección que toma tal línea al torcerlo. De la geometría de la figura $L\alpha = r\phi$. Así, que el desplazamiento cortante es

$$\eta = \tan(\alpha) \cong \alpha = r\phi / L \quad (1.34)$$

La ley de Hooke (3) indica que si la deformación es pequeña, el esfuerzo es proporcional a ella.

$$f_{\phi} = \mu \eta \quad (1.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.35, 1.34 y 1.33 en 1.35 se tiene

$$dM = \frac{2\pi\mu\phi}{L} r^3 dr \quad (1.36)$$

que integrándola en el casquete resulta

$$M = \frac{\pi a^4 \mu \phi}{2L} \quad (1.37)$$

La cantidad ϕ es llamada *constante de torsión* de el tubo y es la torca necesaria para torcer el tubo un ángulo de un radián. Una aplicación de esto se presenta al torcer una fibra, usada en una balanza de torsión y otros aparatos sensibles, en ellos la constante de torsión es proporcional a la cuarta potencia de su diámetro, a , como se ve en la ecuación 1.37.

La figura 4 muestra un elemento dx de varilla con su eje a lo largo del eje longitudinal X .

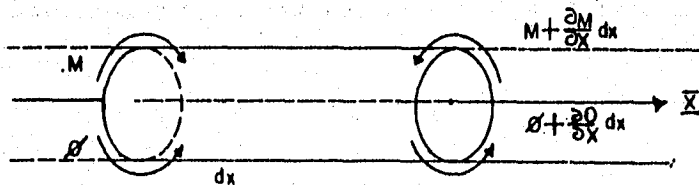


Figura 4. Elemento de varilla torcido por una onda torsional.

Cuando una onda de torsión está presente, para cualquier instante de tiempo, el extremo en x rota un ángulo ϕ por la onda, mientras el extremo $x + dx$ rota una cantidad $\phi + (\partial\phi/\partial x)dx$. Acorde con 1.37, la torsión neta del elemento $d\phi = (\partial\phi/\partial x)dx$, requiere una torca de magnitud

$$M = \frac{\pi a^4 \mu}{2} \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (1.38)$$

Si en x actúa una torca de $-M$, y en $x + dx$ una de torca $M + (\partial M/\partial x)dx$, no sólo la condición de torque se satisface ya que hay una torca desbalanceada $(\partial M/\partial x)dx$ que dará una aceleración angular. El momento de inercia del elemento alrededor del eje es

$$dI = \frac{1}{2} d m a^2 = \frac{1}{2} \pi a^4 \rho dx \quad (1.39)$$

Por otra parte, una torca dM para un elemento de inercia dI (s) para una varilla redonda es

$$dM = \frac{d}{dx} \left(dI \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = dI \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.40)$$

pero la torca total, que es la suma de la actuante en $x + dx$ y en x , es

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (1.41)$$

entonces de las ecuaciones 1.40 y 1.41 se tiene al igualarlas

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\pi}{2} a^4 \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.42)$$

Derivando la ec. 1.38 respecto a x e igualando con la ec. 1.42 se obtiene tras cancelar los términos comunes

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

o bien
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.43)$$

con
$$c_t^2 = \frac{\rho}{\mu} \quad (1.44)$$

Nótese nuevamente, al igual que las ondas longitudinales, que las ondas torsionales son independientes del radio de la varilla y que la velocidad c_t de propagación de ellas depende de propiedades intrínsecas en el material. Además, no es necesario hacer aproximaciones para obtener la ecuación de onda para la varilla redonda. Por lo tanto, las frecuencias de los modos normales de

una varilla de longitud L cuyos extremos están libres para torcerse constituyen una serie armónica exacta (1).

Comparando 1.43 con 1.10 se encuentra que las dos ecuaciones de onda, para vibraciones torsionales y longitudinales, respectivamente, son idénticas excepto por la velocidad de propagación de la onda, que respectivamente se da por 1.44 y 1.11. No obstante, estas cantidades son constantes en cada tipo de vibración.

Así pues, la solución encontrada para las ondas longitudinales es también solución para las ondas torsionales, con su debida traslación de constantes. Por lo tanto, la solución real es

$$\phi = \phi_1(ct - x) + \phi_2(ct + x) \quad (1.45)$$

y la solución general compleja es

$$\phi = Ae^{i(\omega t - \kappa x)} + Be^{i(\omega t + \kappa x)} \quad (1.46)$$

con $\kappa = \omega / c_t$ el número de onda y ω la frecuencia angular.

Mediante la ecuación $Y = 2\mu(1 + \sigma)$, con σ la razón de Poisson se tiene que la velocidad de las ondas torsionales es menor que para las ondas longitudinales en un mismo material por un factor $[2(1 + \sigma)]^{1/2}$, el cual en la mayoría de los metales, donde $\sigma \cong 0.25$, vale alrededor de 0.6 (1).

1.3.2 Energía y potencia.

La densidad de *energía cinética*, por unidad de longitud, se da (5) por

$$K_1 = \frac{dl}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \quad (1.47)$$

Suponga una onda viajera en la varilla, de la forma

$$\phi = \phi_m \cos(\kappa x + \omega t) \quad (1.48)$$

Sustituyendo las ecs. 1.39 y 1.48 en 1.47 se obtiene

$$K_1 = \frac{1}{4} \pi a^4 \rho \omega^2 \phi_m^2 \sin^2(\omega t + \kappa x)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \phi_m^2 \sin^2(\omega t + \kappa x) \quad (1.49)$$

donde
$$I_0 = \frac{1}{2} \pi a^4 \rho \quad (1.50)$$

el término I_0 es conocido como *momento de inercia* por unidad de longitud de la varilla.

Al igual que en la sección anterior, para encontrar la expresión que describa a la densidad de energía potencial, es necesario conocer el trabajo requerido para torcer a la varilla una cantidad η . La expresión para el trabajo es

$$dW = \frac{1}{2} f_\phi L \eta dS \quad (1.51)$$

Sustituyendo 1.34 en 1.51 se tiene

$$dW = \frac{1}{2} r f_\phi \phi dS \quad (1.52)$$

para hacer a 1.52 más familiar, se sustituye 1.33 y se obtiene

$$W = \frac{1}{2} M \phi \quad (1.53)$$

La densidad de *energía potencial*, por unidad de longitud, se da (1) por

$$V_1 = \frac{M \phi}{2L} \quad (1.54)$$

donde sustituyendo las ecuaciones 1.38, 1.48, 1.50 y con el cambio $\rho \omega^2$ por $\mu \kappa^2$ en 1.54 se tiene

$$V_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \phi_m^2 \sin^2(\omega t + \kappa x) \quad (1.55)$$

Comparando las densidades de energía potencial y cinética, dadas respectivamente por las ecuaciones 1.55 y 1.49, se encuentra que ambas son iguales; y la densidad total promedio de energía es

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \phi_m^2 \quad (1.56)$$

y la potencia que pasa a través de cualquier punto es

$$P = -M \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.57)$$

que para la onda armónica dada por 1.48, con las expresiones 1.38 para M , 1.50 para I_0 y 1.44 para c_t se tiene

$$P = I_0 c_t \omega^2 \phi_m^2 \sin^2(\kappa x + \omega t) \quad (1.58)$$

y la potencia total promedio es por lo tanto

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_0 c_t \omega^2 \phi_m^2 = c_t \bar{E}_1 \quad (1.59)$$

Esto significa que la transmisión de potencia es la energía total por unidad de longitud fluyendo con la velocidad de onda c_t (1).

Finalmente, la relación para la *intensidad* I es

$$I = \frac{1}{2} \frac{I_0 c_t \omega^2 \phi_m^2}{S} \quad (1.60)$$

1.3.3 Condiciones de frontera.

Se aplicarán las mismas condiciones de frontera que a la varilla sujeta a vibraciones longitudinales, o sea rigidamente fija en $x = 0$ y libre en $x = L$. El que esté fija significa que la constante de torsión ϕ es nula, es decir $\phi = 0$ para $x = 0$. Para el extremo libre se tiene que no hay transmisión del momento de torsión, por tanto, $M = 0$, que con la expresión 1.38 equivale a $\partial\phi/\partial x = 0$.

Vale la pena hacer notar que hasta ahora las ecuaciones resultantes para vibraciones longitudinales son exactamente del mismo tipo que para vibraciones torsionales, inclusive ante las condiciones de frontera. Con estos antecedentes, el procedimiento matemático es el mismo en ambos casos, se resume dando los resultados equivalentes. Los eigenvalores son

$$\kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.61)$$

que equivale a
$$\omega_n = \frac{(2n-1)c_t \pi}{2L} \quad (1.62)$$

o bien
$$v_n = \frac{(2n-1)c_1}{4L} \quad (1.63)$$

También aquí se da la misma falta de calidad en el sonido producido debido a la ausencia de armónicos pares, comparativamente con la varilla libre-libre o fija-fija.

La solución real completa se da por la suma de las soluciones armónicas, esto es

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \operatorname{sen} \kappa_n x \quad (1.64)$$

con $2A_n = B_n + jA_n$ dando la conexión entre los valores complejos y reales. También es posible evaluar los valores de A_n y B_n , mediante el teorema de Fourier, conociendo las condiciones iniciales.

1.4 Vibraciones flexurales.

Se han visto ya dos movimientos distintos, producidos por vibraciones longitudinales y por vibraciones torsionales; el que ahora ocupa es el producido por vibraciones flexurales, a éstas se les conoce también como vibraciones transversales (2) y como vibraciones laterales (4). En el presente trabajo se maneja únicamente el término de flexurales; en este tipo de movimientos no sólo se producen momentos de flexión sino también fuerzas cortantes (2, 3). El acoplamiento interno entre las deformaciones hace difícil, cuando no imposible, tener uno sólo de dichos movimientos sin la presencia de otro. Por ejemplo, si una varilla larga y delgada se soporta por la mitad y se pone a vibrar con un golpe de martillo dirigido tan cerca como se pueda de su centro, a lo largo del eje de la varilla, por lo general se encuentra que la ligera excentricidad inevitable en el golpe genera predominantemente vibraciones flexurales, en vez de las longitudinales que se deseaban (3); de aquí que, casi siempre existen varios tipos de movimientos con cualquier excitación.

1.4.1 Ecuación de onda.

Considérese una varilla con *área transversal* S de simetría bilateral uniforme, *densidad* uniforme ρ , *módulo de elasticidad* o *módulo de Young* Y y *longitud* L (1), hágase también que la *coordenada* x mida las posiciones a lo largo de la varilla (3). Cabe advertir que para el análisis presente se ignora el efecto de la gravedad (1).

Cuando la varilla se dobla como se muestra en la figura 5, la parte inferior se comprime y la superior se estira, existe pues un plano en el cual la deformación es nula, a dicho plano se le conoce como *plano neutro*, denotado por OO' . En este plano la longitud es la misma que la longitud de la varilla sin doblar, esto es, $R = L\theta$ (2).

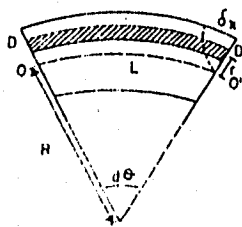


Figura 5. Vista exagerada de un elemento dx de varilla bajo flexión.

Considérese ahora un elemento de la varilla de longitud dx , y supóngase que la flexión de la varilla se mide con el radio de curvatura R del eje neutro. Sea $\delta x = (\partial \xi / \partial x) dx$ el incremento de longitud debido a la flexión de un filamento de la varilla, denotado por DD' , localizado a una distancia r del eje neutro. Entonces la fuerza longitudinal df está dada por

$$df = -Y dS \frac{\delta x}{dx} = -Y dS \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{1.65}$$

donde dS es el área de la sección transversal del filamento. El valor δx para el filamento particular considerado en la figura 5 es positivo, por lo que df es una tensión y en consecuencia, negativa. Para los filamentos que están debajo del eje neutro, δx es negativo, dando así una fuerza de compresión (3), en la figura 6 se muestran tales cantidades.

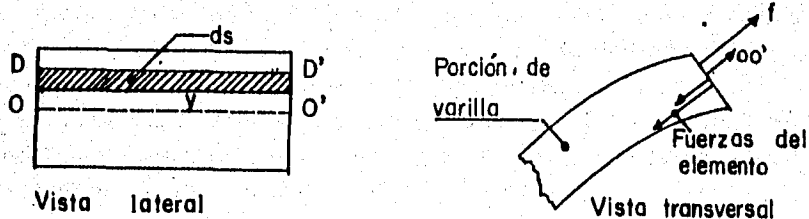


Figura 6. Vista lateral y transversal de una varilla flexionada.

La *deformación* es, como ya se dijo en la sección 1.2, el cambio de longitud respecto a la longitud original, así pues, para el filamento δx , la deformación es

$$\epsilon = \frac{(y + R)\phi - R\phi}{R\phi} = \frac{r}{R} \tag{1.66}$$

El *esfuerzo* que soporta el filamento está dado por df / dS , con este resultado y con 1.66, la ley de Hooke (2) queda como

$$\frac{df}{dS} = -Y \frac{r}{R}$$

o bien
$$df = -Y \frac{rdS}{R} \tag{1.67}$$

La fuerza longitudinal total $f = \int df$ es cero, ya que las fuerzas negativas por arriba del eje neutro se cancelan con las fuerzas positivas abajo de dicho eje. Sin embargo, hay en la varilla un momento de flexión M dado por

$$M = \int r df = - (Y/R) \int r^2 dS \quad (1.68)$$

Sea la constante definida como $\varphi = [\int r^2 dS] / S$ entonces

$$M = - \frac{YS\varphi^2}{R} \quad (1.69)$$

Puede considerarse a la constante φ como el *radio de giro* del área de sección transversal S , por analogía con el radio de giro de un sólido. Por ejemplo, el valor de φ para una varilla de sección transversal rectangular es $t/\sqrt{12}$, donde t es el grueso de la varilla medida en la dirección y , otro ejemplo es una varilla de sección transversal circular de radio a , $\varphi = a/2$.

En general, el radio de curvatura R no es una constante sino más bien una función de la posición a lo largo del eje neutro. Si los desplazamientos y de la varilla están limitados a los valores pequeños, $\partial y / \partial x \ll 1$, entonces se puede usar la relación aproximada

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \approx \frac{1}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad (1.70)$$

sustituyendo 1.70 en 1.69 se obtiene

$$M = - YS\varphi^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.71)$$

En la situación ilustrada en la figura 5, la curvatura es tal que hace $\partial^2 y / \partial x^2$ negativa, y en consecuencia el momento de flexión M es positivo, para obtener la curva ilustrada, el par de torsión aplicado al extremo *izquierdo* del segmento dx debe actuar en contra de las manecillas del reloj o en una dirección angular *positiva*, de tal manera que 1.71 da la torca que actúa en el extremo izquierdo tanto en magnitud como en dirección. De tal manera, la torca del extremo *derecho* del segmento debe actuar en la misma dirección en la que giran las manecillas del reloj, con el resultado de que es *negativa* y está, entonces, representada en dirección y magnitud por $-M$.

El efecto de deformar la varilla produce, no sólo momentos de flexión, sino también fuerzas cortantes: Considérese una fuerza cortante hacia arriba F_y que actúa en extremo izquierdo del segmento dx como positiva, ver figura 7.



Figura 7. Momentos de flexión y fuerzas cortantes en una varilla.

entonces, la fuerza cortante asociada que actúa en el extremo derecho del segmento está dirigida hacia abajo y en consecuencia es negativa. Cuando una varilla flexionada está en condición de equilibrio *estático*, las torcas y las fuerzas cortantes que actúan en cualquier segmento deben estar relacionadas de tal manera que no produzcan un momento de giro neto. Tomando momentos alrededor del extremo izquierdo del segmento de la figura 7, se tiene

$$M(x) - M(x+dx) = F_y(x+dx)dx \quad (1.72)$$

Para segmentos de pequeña longitud dx , $M(x+dx)$ y $F_y(x+dx)$ pueden expandirse en series de Taylor alrededor de x y esto dando

$$F_y = -\frac{\partial M}{\partial x} = YS\phi^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (1.73)$$

donde se han omitido los términos de segundo orden en dx .

Esta relación entre la fuerza cortante F_y y el momento de flexión M se ha derivado para una condición de equilibrio estático. Para vibraciones flexurales de una varilla, el equilibrio es más bien dinámico y del lado derecho de 1.72 es igual a la rapidez de aumento del momento angular del segmento. Sin embargo, si el desplazamiento y la pendiente de la varilla se limitan a valores pequeños, se pueden pasar por alto las variaciones en el momento angular, y la ec. 1.73 es una buena aproximación para la relación entre F_y y y .

La fuerza neta hacia arriba que actúa en el segmento dx esta dada por

$$dF_y = F_y(x) - F_y(x+dx)$$

$$dF_y = -\frac{\partial F_y}{\partial x} dx = -YS\varphi^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (1.74)$$

Esta fuerza dará al segmento una aceleración hacia arriba, y debido a que la masa del segmento es $\rho S dx$, la ecuación de movimiento es

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Y\varphi^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

o

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\varphi^2 c_L^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (1.75)$$

con

$$c_L^2 = \frac{Y}{\rho} \quad (1.76)$$

donde c_L es la misma que para las ondas longitudinales.

Existen diferencias significativas entre los tres tipos de vibraciones, en particular aparece en la ecuación de movimiento una derivada parcial de cuarto orden respecto a x , mientras que en las anteriores son de segundo orden respecto a la misma; por tanto las soluciones de la forma $f(ct-x)$ no son soluciones de 1.75. Otra diferencia importante es que las ondas flexurales no viajan a lo largo de la varilla con velocidad constante c_L y en forma invariable, más adelante se discute con mayor profundidad acerca de la velocidad de la onda.

Supóngase que se puede resolver 1.75 por separación de variables, y escribirse el desplazamiento transversal complejo como

$$v = \Psi(x)e^{j\omega t} \quad (1.77)$$

Al sustituir en 1.75, la función exponencial del tiempo se cancela, dejando una nueva ecuación diferencial total que implica a Ψ sólo como una función de x ,

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = \frac{\omega^2}{c_L^2 \kappa^2} \Psi$$

o haciendo

$$v = \sqrt{\omega c_L^2 \kappa} \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = \frac{\omega^4}{v^4} \Psi \quad (1.79)$$

Supóngase ahora que Ψ puede expresarse como una exponencial de la forma $\Psi = A \exp(\kappa x)$, que al sustituirse en 1.79, permite obtener

$$\kappa^4 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 = \left(\frac{\omega}{c_1^2 \varphi}\right)^2 \quad (1.80)$$

Esto puede satisfacerse con cuatro valores $\varphi = \pm \omega/v$, $\varphi = \pm j\omega/v$. Por lo tanto, la solución completa está dada por la suma de estas cuatro soluciones

$$\Psi = A e^{\omega x/v} + B e^{-\omega x/v} + C e^{j\omega x/v} + D e^{-j\omega x/v} \quad (1.81)$$

donde A, B, C y D son constantes de amplitud compleja. La solución para los desplazamientos y es pues

$$y = e^{j\omega t} (A e^{\omega x/v} + B e^{-\omega x/v} + C e^{j\omega x/v} + D e^{-j\omega x/v}) \quad (1.82)$$

Ninguno de los términos individuales de 1.82 representa ondas que se mueven con velocidad c_1 . Por ejemplo, el último término representa una perturbación ondulatoria que se mueve con una velocidad de fase v , pero de 1.78 se ve que v es en sí misma una función de la frecuencia, de tal manera que ondas de diferentes frecuencias viajan con diferentes velocidades. En una onda compleja que contenga varias componentes de frecuencia, las componentes de alta frecuencia viajan con velocidades mayores y, por tanto, se adelantan a las de baja frecuencia, se alternando así la forma de la onda. En consecuencia, es difícil dar una definición precisa de lo que significa la velocidad de tal onda. Sin embargo, cada componente de frecuencia de la onda compleja viaja a su propia velocidad v , la llamada *velocidad de fase* de la componente. Esta situación es análoga a la transmisión de la luz a través del vidrio, donde las diferentes componentes de frecuencia de un haz de luz compleja viajan con diferentes velocidades, y se origina la *dispersión*. Una varilla vibrante es un *medio dispersivo* para ondas flexurales.

La solución de 1.75 es la parte real de 1.82. Puede obtenerse de una manera conveniente si se usan identidades hiperbólicas y trigonométricas

$$y = \cos(\omega t) [A \cosh(\omega x/v) + B \sinh(\omega x/v) + C \cos(\omega x/v) + D \sin(\omega x/v)] \quad (1.83)$$

donde A, B, C y D son constantes reales. Aún cuando estas constantes están relacionadas con las constantes complejas A, B, C y D , dichas relaciones no tienen importancia ya en la práctica; A, B, C y D se evalúan directamente mediante la aplicación de condiciones iniciales y de frontera.

1.4.2 Energía y Potencia.

Una vez encontrada la expresión para la ecuación de onda flexural y su solución, ahora toca encontrar las expresiones para la energía y la potencia en una varilla delgada.

Supóngase una onda flexural armónica viajando en dirección positiva

$$y = y_m \cos(\kappa x - \omega t) \quad (1.84)$$

La velocidad de dicha onda, con la sustitución 1.80, es

$$c_f = \frac{\omega}{\kappa} = (\omega c_L \varphi)^{1/2} \quad (1.85)$$

Que expresado de otro modo, con ayuda de la expresión 1.80 para eliminar ω al despejarla, la velocidad flexural es

$$c_f = \kappa \varphi c_L = \frac{2\pi \varphi c_L}{\lambda} \quad (1.86)$$

De 1.86 se sigue que la velocidad de la onda flexural varía inversamente con la longitud de onda. Una varilla pues, tiene tanta *dispersión* como ondas flexurales estén presentes (λ).

El trabajo externo requerido para doblar el elemento dx a un radio de curvatura R , es

$$dW = \frac{Md\theta}{2} = \frac{Mdx}{2R} \quad (1.87)$$

que mediante las expresiones tomadas en 1.70 y 1.71 al sustituir en 1.87, entonces la *densidad de energía potencial*, por unidad de longitud (ϵ) es

$$V_1 = \frac{dW}{dx} = \frac{Y\varphi^2 S}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \quad (1.88)$$

esto asociado a la onda expresada por 1.84 da

$$V_1 = \frac{1}{2} Y \phi^2 S \kappa^4 y_m^2 \sin(\kappa x - \omega t) \quad (1.89)$$

cuyo valor promedio es

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{4} Y \phi^2 S \kappa^4 y_m^2 = \frac{1}{4} \rho S \omega^2 y_m^2 \quad (1.90)$$

Ahora, la densidad de *energía cinética* asociada a la onda es

$$K_1 = \frac{\rho S}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{\rho S}{2} \omega^2 y_m^2 \sin^2(\kappa x - \omega t) \quad (1.91)$$

y su valor promedio es

$$\bar{K}_1 = \frac{1}{4} \rho S \omega^2 y_m^2 \quad (1.92)$$

Al comparar las densidades de energía cinética y potencial (ecs. 1.91 y 1.89) así como sus valores promedio respectivos (ecs. 1.91 y 1.90), se observa que ambos son idénticos. Con esto, la densidad total de energía es

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 y_m^2 \quad (1.93)$$

La potencia transferida por una onda flexural es un poco más complicada de calcular. La potencia se transfiere de una posición a otra por una fuerza cortante F_y , actuando en conjunción con la velocidad de desplazamiento $\partial y / \partial t$; también el momento de flexión M actuando en conjunción con la velocidad angular $\partial^2 y / \partial x \partial t$. Tómese la convención de signos siguiente: valores positivos en F_y y $\partial y / \partial t$, constituyen un flujo de energía de dirección positiva; mientras valores positivos en M y en $\partial^2 y / \partial x \partial t$ constituyen flujos de energía en la dirección negativa. El flujo total de energía pasante en la dirección positiva es

$$P = F_y \frac{\partial y}{\partial t} - M \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \quad (1.94)$$

Sustituyendo 1.71 y 1.73 en 1.94 se obtiene

$$P = Y \varphi^2 S \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right) \quad (1.95)$$

con esta expresión, la potencia transportada por la onda viajera representada por 1.84 es

$$P = Y \varphi^2 S [\kappa^3 \omega y_m^2 (\sin^2(\kappa x - \omega t) + \cos^2(\kappa x - \omega t))] \\ P = Y \varphi^2 S \kappa^3 \omega y_m^2 = \rho S c_f \omega^2 y_m^2 \quad (1.96)$$

Este cálculo exhibe que cada uno de los términos en 1.94 contribuye igualmente a P . Para toda posición y tiempo los dos términos están fuera de fase (de ahí el término seno y coseno de 1.96), la potencia instantánea es una constante independiente de x y t . Esta es una gran diferencia con las ondas estudiadas previamente.

Como conclusión, el cálculo de la potencia 1.96 y la densidad total promedio 1.93 muestran que

$$\bar{P} = P = (2c_f) \bar{E}_1 \quad (1.97)$$

al igual que las otras ondas estudiadas, el flujo promedio de energía es "tantas veces" la velocidad de onda por unidad de onda por la densidad promedio de energía, excepto que aquí hay un factor 2 extra, este factor tiene relación con la velocidad de grupo, que no se trata aquí por no tener relevancia en el trabajo de tesis. Sin embargo, si se desea más información puede hacer uso de la referencia (1).

1.4.3 Condiciones de frontera.

En la presente sección se resuelve la ecuación de onda flexural con condiciones de frontera. Para obtener la solución completa son necesarias cuatro condiciones de frontera, dos por cada extremo, las formas particulares de éstas dependen de la naturaleza del soporte. Al igual que en las ondas estudiadas anteriormente, se ve el caso de la varilla fija-libre. Las deducciones se dan a continuación:

a) extremo fijo, $x = 0$. Si el extremo de la varilla está rigidamente prensado tanto el desplazamiento y , como la pendiente $\partial y / \partial x$, deben ser nulas para todo tiempo. Las condiciones de frontera son pues

$$y = 0 \quad (1.98)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

b) extremo libre, $x = L$. En el extremo libre no puede haber ni un par de torsión externo aplicado, ni una fuerza cortante, y por tanto M y F_y son cero en el plano localizado a una distancia infinitesimal del extremo. Sin embargo, el desplazamiento y la pendiente no están restringidas excepto por la condición general de que sean pequeños. De 1.71 y 1.73 al igualarlas a cero y despejar se tiene

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1.99)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

Al aplicar las condiciones de frontera 1.98 en $x = 0$ a la solución general dada por 1.83 se obtiene $0 = A + C$ y $0 = B + D$, de tal manera que la solución general se reduce a

$$y = \cos(\omega x) \left[A \left(\cosh\left(\frac{\omega x}{v}\right) - \cos\left(\frac{\omega x}{v}\right) \right) + B \left(\sinh\left(\frac{\omega x}{v}\right) - \sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) \right) \right] \quad (1.100)$$

La aplicación adicional de las condiciones 1.99 en $x = L$ da

$$A \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{v}\right) + \cos\left(\frac{\omega L}{v}\right) \right) = -B \left(\sinh\left(\frac{\omega L}{v}\right) + \sin\left(\frac{\omega L}{v}\right) \right)$$

$$y \quad A \left(\sinh\left(\frac{\omega L}{v}\right) + \sin\left(\frac{\omega L}{v}\right) \right) = -B \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{v}\right) + \cos\left(\frac{\omega L}{v}\right) \right)$$

Es imposible que ambas ecuaciones cumplan la igualdad para cualquier valor de frecuencia. Para determinar cuales frecuencias cumplen la igualdad, se divide una ecuación entre la otra cancelando las constantes A y B . Luego se multiplica en forma cruzada y se simplifica mediante las identidades $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ y $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$. Esto da

$$\cosh\left(\frac{\omega L}{v}\right)\cos\left(\frac{\omega L}{v}\right) = -1 \tag{1.101}$$

Una forma de obtener las raíces de esta ecuación trascendental es graficando las curvas de $\cosh(\omega L/v)$ y $\sec(\omega L/v)$ como función de $\omega L/v$, y después determinando sus intersecciones. Sin embargo, el procedimiento es impráctico excepto para valores pequeños de $\omega L/v$ ya que el coseno hiperbólico aumenta de manera aproximadamente exponencial al aumentar $\omega L/v$. Una manera de 1.101 más conveniente se obtiene con la aplicación de las identidades

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \quad \text{y} \quad \tanh\theta = \sqrt{\frac{\cosh\theta-1}{\cosh\theta+1}}$$

con éstas, 1.101 se transforma en

$$\cot\frac{\omega L}{2v} = \pm \tanh\frac{\omega L}{2v} \tag{1.102}$$

La figura 8 es una gráfica de las funciones $\cot(\omega L/2v)$ y $\pm \tanh(\omega L/2v)$ graficadas contra $\omega L/2v$. De los puntos de intersección de estas dos curvas se determinan las frecuencias correspondientes a los modos de vibración permitidos, y están dadas por

$$\frac{\omega L}{2v} = \frac{\pi}{4} (1.194, 2.988, 5, 7, \dots) \tag{1.103}$$

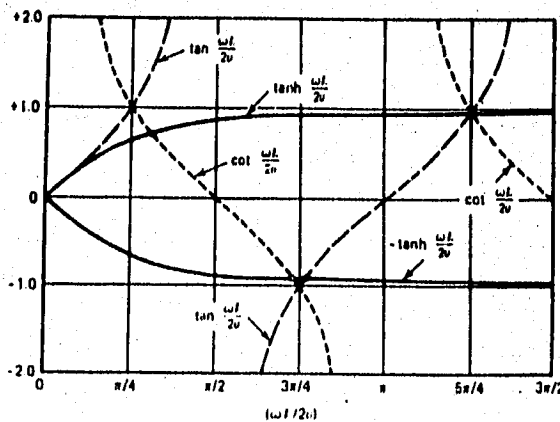


Figura 8. Curvas que muestran las funciones tangente, cotangente y tangente hiperbólica.

El valor numérico de la tangente se aproxima a la unidad para todos los ángulos mayores que π , por lo tanto, para tales ángulos las raíces de 1.102 están dadas con mucha aproximación por los ángulos $\omega L/2v = (2n-1)\pi/4$, donde $n = 3, 4, 5, \dots$ y la $\cot(\omega L/2v)$ es secuencialmente ± 1 . Para las dos frecuencias más bajas permitidas se deben usar los valores exactos $1.194\pi/4$ y $2.988\pi/4$.

Sustituyendo la ecuación 1.78, que es una expresión para v , en 1.103 y elevando al cuadrado ambos lados, se tiene

$$v = \frac{\pi C_L \phi}{8L^2} (1.194^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots) \tag{1.104}$$

como expresión para las frecuencias permitidas en vibraciones flexurales de una varilla fija-libre. Por lo tanto, la aplicación de las condiciones de frontera limita los modos de vibración permitidos de una varilla finita a un conjunto discreto de frecuencias. Otra cosa notable es que los sobretonos de la varilla no son armónicos de su fundamental.

La tabla 1.1 da los valores de varias cantidades físicas interesantes del análisis del movimiento vibracional fijo-libre. Teniendo 100 cm de longitud, prensada en $x = 0$ cm y libre en $x = 100$ cm. En la primera columna se observa la desarmonía con la fundamental; el primer sobretono tiene frecuencia mayor que el sexto armónico de una cuerda de la misma frecuencia fundamental. Si una varilla es golpeada de tal manera que las amplitudes de vibración de algunos de los sobretonos sean apreciables, el sonido producido tendrá una cualidad metálica. Pero estos sobretonos de alta frecuencia se amortiguan rápidamente, de tal manera que el sonido inicial pronto se suaviza para convertirse en un tono puro, cuya frecuencia es la de su fundamental. Un diapasón exhibe dichas características, de un sonido metálico que rápidamente decae dejando un tono casi puro.

TABLA 1.1 Vibraciones flexurales características de una varilla fija-libre.

Frecuencia.	Velocidad de fase.	Longitud de onda (cm)	Posiciones nodales (cm del extremo prensado)
v_1	v_1	335.0	0
$6.26 v_1$	$2.50 v_1$	133.4	0, 78.3
$17.55 v_1$	$4.18 v_1$	80.0	0, 50.4, 86.8
$34.39 v_1$	$5.87 v_1$	57.2	0, 35.8, 64.4, 90.6

Algunas otras aplicaciones de las varillas fijas-libres, lo constituyen las lengüetas vibrantes usadas como normas de frecuencia de frecuencímetros, y como componentes en filtros eléctricos de baja frecuencia. Es posible ajustar la frecuencia fundamental de resonancia de tales lengüetas variando el grueso y en consecuencia ϕ , o variando su longitud. Hay que hacer notar que conforme se duplica la longitud, la frecuencia se divide entre cuatro.

La distribución de los puntos nodales a lo largo de la varilla, es mucho más complicada que en los casos considerados previamente, ya que no están distanciados uniformemente a intervalos de $\lambda/2$ sino que tienen un esparcimiento irregular. Más aún, hay *tres* tipos de puntos nodales, es decir, posiciones donde $y = 0$ todo el tiempo. El punto donde la varilla está prensada es un nodo, caracterizado por las condiciones $\partial y / \partial x = 0$. El siguiente grupo de puntos nodales está caracterizado por $y = 0$ y $\partial^2 y / \partial x^2 \approx 0$. Estos nodos llamados *verdaderos* están localizados cerca de los puntos de inflexión de la varilla. Y también, el esparcimiento entre nodos *verdaderos* es aproximadamente $\lambda/2$. Un tercer tipo de punto nodal es el que ocurre en el nodo adjunto al extremo libre. Hay que hacer notar que la amplitud vibracional en las diversas porciones antinodales no es la misma para cada antinodo, porque la que existe en el extremo libre es siempre la mayor.

1.5 Varillas de sección transversal variable.

En las secciones previas se ha analizado a la varilla sometida a los tres tipos de vibración a los que se le puede someter. Todos los análisis se han hecho considerando varillas de sección transversal uniforme. En la presente sección se trata una varilla delgada de sección transversal variable, es decir, con una pequeña variación constante en su sección transversal a lo largo de su eje longitudinal, que se ha elegido como el eje cartesiano X. Además, sólo se hace el análisis para vibraciones longitudinales debido a que esta es la forma de propagación de las ondas en la antena a tratarse en el capítulo 3 del presente trabajo.

El primer paso en el análisis es deducir la ecuación de onda; para ello se hace uso de algunas deducciones realizadas en la sección 1.2. Así pues, al igualar 1.7 y 1.9, y eliminar los términos comunes se tiene

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = S\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1.105)$$

Como S varía longitudinalmente, entonces $S = S(x)$ y si se retoma la ecuación 1.6 y se deriva respecto a x se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -Y \frac{dS}{dx} \frac{\partial \xi}{\partial x} - YS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1.106)$$

Iguando 1.105 y 1.106, y dividiendo entre YS se tiene

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

o bien
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.107)$$

con
$$c_l^2 = \frac{Y}{\rho} \quad (1.108)$$

La ecuación 1.107 representa la *ecuación de onda longitudinal de sección transversal variable*. Es resaltable que 1.108 que representa la velocidad de onda longitudinal, es la misma que 1.11 donde se trató a la varilla de sección uniforme; lo que significa que la onda viaja con la misma velocidad sin importar la geometría, sino sólo la homogeneidad del medio.

La solución de 1.107, para la mayoría de las funciones $S(x)$, es realmente difícil de resolver(1). Así, para resolver 1.107 se emplea el método de separación de variables (7) con la substitución

$$\xi(x,t) = A(x)T(t) \quad (1.109)$$

El proponer una solución de esta forma trae como consecuencia que las soluciones encontradas no involucren términos cruzados, es decir, alguna función que contenga a x y t simultáneamente. Así pues tras substituir 1.109 en 1.107 y dividir entre AT se llega a

$$\frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{1}{SA} \frac{dS}{dx} \frac{dA}{dx} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (1.110)$$

El que ambos lados de la ecuación 1.110 sean iguales para toda posición y tiempo, indica que son iguales a una constante, sea ésta $-\kappa^2$. Al igualar 1.110 a $-\kappa^2$, se puede separar la ecuación en un par de ecuaciones que son

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{dA}{dx} + \kappa^2 A = 0 \quad (1.111)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \kappa^2 c^2 T = 0 \quad (1.112)$$

La ecuación 1.112 contiene la parte temporal de la onda viajera; es notorio que no hay un término que involucre un cambio de sección transversal en la ecuación. En cambio en la 1.111 se conserva la parte del cambio en la sección transversal, por tal razón basta con analizar la ecuación 1.111 para diversos perfiles. En el resto del capítulo se trata la solución de diversas funciones de $S(x)$.

La parte temporal tiene solución general

$$T(t) = T_0 e^{j\omega t} \quad (1.113)$$

con T_0 una constante arbitraria.

1.5.1 Perfil cónico cilíndrico.

El primer perfil que se analiza tiene forma cónica cilíndrica. Al tener la hipótesis de varilla delgada y larga, la pendiente de la conicidad es muy suave. Se hace la convención que el área máxima esté entre $x = 0$ y el ápice del cono en $x = L$. Ver figura 9. Dado el perfil propuesto, las secciones transversales son círculos. Para deducir la expresión que describa al área $S(x)$, se tiene que el radio, como función de la posición, está dado por

$$r = r(x) = \frac{b(L-x)}{L} \quad (1.114)$$

donde b es el radio en $x = 0$, que es el punto de área máxima.

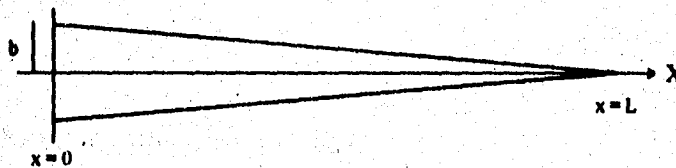


Figura 9. Corte longitudinal axial de la varilla de perfil cónico cilíndrico.

Al ser círculos los cortes de las secciones transversales, el área es

$$S(x) = \frac{\pi b^2 (L-x)^2}{L^2} \quad (1.115)$$

Sustituyendo 1.115 en 1.111 se tiene que

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{2}{x-L} \frac{dA}{dx} + \kappa^2 A = 0 \quad (1.116)$$

Para resolver 1.116 se usa el cambio de variable $u = x - L$, y luego de multiplicar por u^2 , se obtiene

$$u^2 \frac{d^2 A}{dx^2} + 2u \frac{dA}{dx} + \kappa^2 u^2 A = 0 \quad (1.117)$$

esta ecuación se identifica como una ecuación transformada de Bessel, cuya solución se da (8) por

$$A(u) = u^{-1/2} (A_1 J_{1/2}(\kappa u) + A_2 Y_{1/2}(\kappa u)) \quad (1.118)$$

donde A_1 y A_2 son constantes; J_n y Y_n son funciones de Bessel de primer y segundo orden, respectivamente.

Una vez encontrada en 1.118, la solución a la parte espacial, se puede encontrar la solución general para la varilla de perfil cónico cilíndrico, multiplicando 1.113 por 1.118 (regresando a x en vez de u) con lo que se obtiene

$$\xi(x, t) = (x - L)^{-1/2} e^{i\omega t} (D_1 J_{1/2}(\kappa(x - L)) + D_2 Y_{1/2}(\kappa(x - L))) \quad (1.119)$$

Para encontrar los valores de κ y ω para los cuales se cumple 1.119 se deben aplicar condiciones de frontera.

1.5.2 Perfil cónico cilíndrico truncado.

Esta vez toca turno al análisis para una varilla de perfil cónico cilíndrico truncado. Al igual que en la sección 1.5.1, el análisis parte de la deducción del radio como función de la posición, para el presente caso el radio es

$$r = r(x) = \frac{L-x}{L} (b-a) + a \quad (1.120)$$

donde b es el radio de la sección transversal a $x = 0$, es decir, que b es el máximo radio que puede tener el cono. En cambio a es el mínimo radio, que sucede en $x = L$. La figura 10 muestra dicho cono.

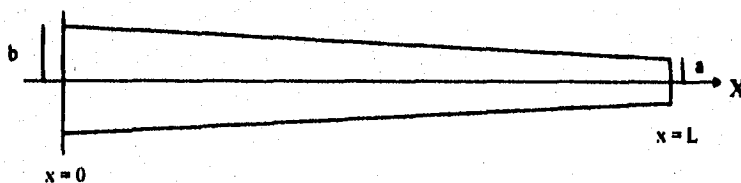


Figura 10. Corte longitudinal axial de la varilla de perfil cónico cilíndrico trunco. El área de la sección transversal es, para el radio propuesto

$$S(x) = \frac{\pi}{L^2} (Lb - x(b-a))^2 \quad (1.121)$$

al sustituirlo en 1.111 se obtiene

$$\frac{d^2 A}{dx^2} - \left(\frac{2(b-a)}{Lb-x(b-a)} \right) \frac{dA}{dx} + \kappa^2 A = 0 \quad (1.122)$$

para resolver ésta, se emplea el cambio de variable $u = Lb - x(b-a)$ con lo que queda 1.122 como

$$(b-a)^2 \frac{d^2 A}{du^2} + \left(\frac{2(b-a)^2}{u} \right) \frac{dA}{du} + \kappa^2 A = 0 \quad (1.123)$$

Nuevamente se introduce un cambio de variables con $\beta = b-a$; con éste y multiplicando por u^2/β^2 queda

$$u^2 \frac{d^2 A}{dx^2} + 2u \frac{dA}{dx} + \frac{\kappa^2}{\beta^2} u^2 A = 0 \quad (1.124)$$

como en la sección 1.5.1, se identifica con una transformada de Bessel, la solución (e) es

$$A(u) = u^{-1/2} \left[A_1 J_{1/2} \left(\frac{\kappa}{\beta} u \right) + A_2 Y_{1/2} \left(\frac{\kappa}{\beta} u \right) \right] \quad (1.125)$$

donde A_1 y A_2 son constantes; J_n y Y_n son funciones de Bessel de primer y segundo orden, respectivamente.

La solución a la ecuación de onda para la varilla con perfil cónico cilíndrico truncado es

$$\xi(x,t) = (Lb - x(b-a))^{-1/2} e^{j\omega t} \left[D_1 J_{1/2} \left(\frac{\kappa(Lb - x(b-a))}{(b-a)} \right) + D_2 Y_{1/2} \left(\frac{\kappa(Lb - x(b-a))}{(b-a)} \right) \right] \quad (1.126)$$

1.5.2 Perfil parabólico cilíndrico.

En la presente sección se analiza una varilla de forma cilíndrico parabólica; tal que en $x = 0$ tiene un radio $r_0 = bL$, se ha hecho esto para forzar a que el radio máximo r_0 , sea directamente proporcional a la longitud L de la varilla, con b una constante de proporcionalidad. De la condición de varilla delgada se desprende que $0 < b \ll L$, con p la distancia focal de la parábola. La figura 11 muestra un corte longitudinal del paraboloides analizado.

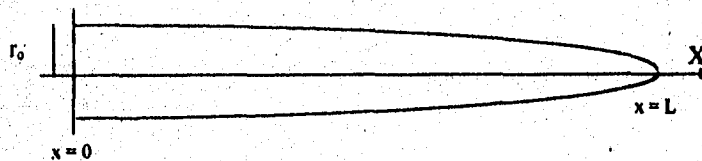


Figura 11. Corte longitudinal axil de una varilla parabólica cilíndrica.

La fórmula de la parábola descentrada que se analiza es

$$r^2 = r^2(x) = 4p(L - x) \quad (1.127)$$

Para darse cuenta del tipo de paraboloides que se trata, evalúese 1.127 en $x = 0$, entonces $r^2(x=0) = r_0^2 = 4pL$, pero $r_0 = bL$. Suponga además que la varilla tiene un diámetro máximo de una centésima parte de la longitud, es decir que su radio es $r_0 = 0.005L$. ($b=0.005$). Con estas cantidades $(0.005L)^2 = 4pL$, o bien, tras despejar p se obtiene una distancia focal de $6.25 \times 10^{-6} L$. Si $L = 1$ m, la distancia focal es de $p = 6.25 \mu\text{m}$. El lector se dará cuenta que se trata de un paraboloides sumamente cerrado. Que para todo fin práctico, es casi una varilla cilíndrica pues su distancia focal es sumamente corta. Desde un punto de vista experimental resulta muy complicado hacer un tallado con las cantidades dadas en el análisis.

Con el radio elegido en 1.127 se tiene una área de sección transversal

$$S(x) = 4\pi p(L - x) \quad (1.128)$$

sustituyendo y evaluando 1.128 en 1.111 se obtiene

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{1}{x-L} \frac{dA}{dx} + \kappa^2 A = 0 \quad (1.129)$$

que con el cambio de variable $u = x - L$, se obtiene tras multiplicar por u^2

$$u^2 \frac{d^2 A}{du^2} + u \frac{dA}{du} + \kappa^2 u^2 A = 0 \quad (1.130)$$

que es una ecuación de Bessel (7) con $n = 0$, y cuya solución es

$$A(u) = A_1 J_0(\kappa u) + A_2 Y_0(\kappa u) \quad (1.131)$$

Con el resultado de 1.131 se tiene la solución para la ecuación de onda con perfil parabólico cilíndrico dado por

$$\xi(x, t) = e^{j\omega t} (D_1 J_0(\kappa(x-L)) + D_2 Y_0(\kappa(x-L))) \quad (1.132)$$

1.5.4 Perfil exponencial cilíndrico.

Como último punto a tocar en el presente capítulo, se analiza una varilla con perfil exponencial cilíndrico. Primeramente considérese la varilla con un radio r_0 en $x = 0$. Si el radio decrece conforme avanza en x , éste se da por

$$r = r(x) = r_0 e^{-\alpha x} \quad (1.133)$$

El tener la hipótesis de varilla delgada implica que el factor $0 < \alpha \ll 1$. Un valor negativo de α da, por el contrario, una sección transversal creciente.

El área para cualquier punto de la varilla es

$$S(x) = S_0 e^{-2\alpha x} \quad (1.134)$$

donde $S_0 = \pi r_0^2$. A las guías de ondas con este perfil se les conoce como *trompetas exponenciales*. Las trompetas exponenciales tienen varios usos como incrementar la eficiencia de los antiguos fonógrafos y los modernos altavoces llamados "tweeter". El área de dichas guías se decrecientan en un factor e , a una distancia $1/2\alpha$. Al sustituir 1.133 en 1.111 se tiene

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + 2\alpha \frac{dA}{dx} + \kappa^2 A = 0 \quad (1.134)$$

cuya solución general está dada por

$$A(x) = e^{-\alpha x} (A_1 \exp(j\kappa_1 x) + A_2 \exp(-j\kappa_1 x)) \quad (1.135)$$

en que $\kappa_1 = (\kappa_0^2 - \alpha^2)^{1/2}$, y A_1 y A_2 son constantes.

La solución a la ecuación de onda para la trompeta exponencial es

$$\xi(x,t) = e^{-\alpha x} (D_1 \exp(j(\omega t + \kappa_1 x)) + D_2 \exp(j(\omega t - \kappa_1 x))) \quad (1.136)$$

El primer término representa una onda sinusoidal viajando en sentido $+x$. Su amplitud decrece en un factor exponencial $e^{-\alpha x}$ mientras avanza en x . El segundo término representa una onda sinusoidal similar, pero viajando en sentido $-x$. Su amplitud crece con el mismo factor exponencial al avanzar en la dirección negativa. Para ambos casos, la velocidad de la onda c_h es

$$c_h = \frac{\omega}{\kappa_1} = \frac{\omega}{(\kappa_0^2 - \alpha^2)^{1/2}} = \frac{c_L}{(1 - \alpha^2 c_L^2 / \omega^2)^{1/2}} \quad (1.137)$$

nótese que c_h es mayor a la velocidad $c_L = \omega/\kappa$ en una sección transversal de la varilla propuesta.

El análisis muestra que la magnitud de α es menor a κ para las ondas viajeras. En términos de frecuencia, ω es mayor que αc_L , la cual es llamada *frecuencia de corte* de la trompeta (1).

Capítulo II. Fundamentos electromagnéticos.

2.1 Introducción.

En el presente capítulo se analizan los fundamentos electromagnéticos necesarios para comprender, en forma el fenómeno de radiación de las antenas. Para ello se comienza en la sección 2.2 con las ecuaciones de Maxwell y sus interrelaciones entre sí, para encontrar una relación para el campo eléctrico en términos del potencial escalar eléctrico y el potencial vectorial magnético. En 2.3 se incluye la llamada Norma de Lorentz y se obtienen las ecuaciones de onda para los potenciales, escalar eléctrico, V , y vectorial magnético, A . En 2.4 de las anteriores ecuaciones de onda, se discute su acción en el vacío y se obtienen las soluciones de las mismas, además se discute el significado de los potenciales retardados. Luego, en 2.5, se incluyen los anteriores estudios para discutir la radiación de un pequeño elemento de corriente, aquí se encuentran las expresiones para el potencial vectorial eléctrico y de éste los campos eléctrico y magnético, y su relación para este caso. También se discute la radiación de campo cercano y lejano. Como una ayuda para comprender gráficamente el fenómeno de la radiación de una antena, en 2.6 se habla de las características de los patrones de radiación de las mismas. En 2.7 se calcula la potencia y resistencia de radiación de una antena, también se introduce la llamada longitud efectiva de una antena. Finalmente en 2.8, se hace un estudio independiente del tiempo de los potenciales eléctrico y vectorial magnético.

2.2 Ecuaciones de Maxwell.

El caso más general en la expresión de las ecuaciones de Maxwell, es aquel en donde los fenómenos electromagnéticos se hallan en presencia de materia. Siendo este el caso a estudiar en el presente trabajo, las *ecuaciones de Maxwell* son

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

La ecuación 2.1 es conocida como ley de Ampere-Maxwell; a la 2.2 se le conoce como ley de inducción electromagnética de Faraday-Henry, y finalmente las ecuaciones 2.3 y 2.4 como las leyes de Gauss para el campo eléctrico y el magnético, respectivamente (9). Por otra parte, la forma en la que se relacionan el *campo de intensidad magnética* \vec{H} y el *campo magnético* \vec{B} es mediante

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.5)$$

a la constante μ se le conoce como *permeabilidad*.

De igual modo, hay una relación entre el *desplazamiento eléctrico* \vec{D} y el *campo eléctrico* \vec{E} , que es

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.6)$$

donde la constante ϵ es llamada *permitividad*.

En el caso de onda electromagnética propagándose en el espacio libre, la *densidad de corriente* \vec{J} es nula, así la ecuación 2.1 se reduce a

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Por otra parte, la ecuación 2.4 se cumple si el campo magnético se expresa como el rotacional de un potencial, al cual se le asigna el nombre de *potencial vectorial magnético* \vec{A} .

Como la divergencia de un rotacional es cero, se puede establecer entonces

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.8)$$

De la misma manera se establece una relación entre el campo eléctrico y el *potencial escalar eléctrico* V . En este caso sustituyendo la ecuación 2.8 en la ecuación 2.2

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.9)$$

que factorizando rotacionales se tiene

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Esta ecuación indica que el campo $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ es conservativo, ya que su rotacional es cero, y en este caso se puede expresar como menos el gradiente de un potencial escalar $-\nabla V$, donde el signo negativo indica que la fuerza decrece con la distancia (10). Se tiene entonces

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

o bien

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.11)$$

Es evidente de 2.11, la relación entre el potencial vectorial magnético, \vec{A} , y el potencial escalar eléctrico, V , en el campo eléctrico.

2.3 Norma de Lorentz.

Para determinar las expresiones analíticas de los potenciales escalares eléctricos y vectoriales magnéticos, se procede a establecer sus ecuaciones de onda respectivas. Para el potencial vectorial, tras igualar 2.5 y 2.8, despejar la intensidad magnética y sustituirla en 2.1, se tiene

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (2.12)$$

que (9) mediante la expresión del triple producto vectorial queda como

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} \quad (2.13)$$

Derivando la expresión 2.11 respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

ahora, sustituyendo 2.14, 2.13 y 2.6 en 2.12, queda

$$-\nabla^2 \bar{A} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) + \epsilon \mu \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu \bar{J} \quad (2.15)$$

ésta es una *ecuación de onda vectorial*, por lo que es necesario que además de las condiciones de frontera se especifique la dirección del campo vectorial (10); imponiendo (11) la *norma de Lorentz*

$$\nabla \cdot \bar{A} + \epsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.16)$$

y sustituyendo en 2.15 se tiene como resultado una simplificación considerable. Si se satisface esta condición, entonces \bar{A} satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \bar{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} \quad (2.17)$$

De manera similar, la solución para V se obtiene sustituyendo la expresión 2.11 en 2.13, y queda

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V - \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.18)$$

Derivando 2.16 respecto al tiempo y sustituyendo en 2.18 se tiene

$$\nabla^2 V - \epsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, imponiendo la norma de Lorentz, tanto el potencial escalar como el vectorial están obligados a satisfacer ecuaciones de onda inhomogéneas (10), como se ve en 2.17 y 2.19.

Si se pudiera encontrar fácilmente una solución para estas ecuaciones diferenciales, ello sería muy útil, pues si se conocen la corriente y la carga, pueden encontrarse \vec{A} y V y con ellos \vec{E} y \vec{B} . El encontrar soluciones para 2.17 y 2.19 se puede considerar como un sólo problema, pues estas ecuaciones son de la misma forma.

De manera similar, la solución para V se obtiene sustituyendo la expresión 2.11 en 2.13, y queda

$$\nabla \cdot \bar{E} = -\nabla^2 V - \nabla \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad (2.18)$$

Derivando 2.16 respecto al tiempo y sustituyendo en 2.18 se tiene

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, imponiendo la norma de Lorentz, tanto el potencial escalar como el vectorial están obligados a satisfacer ecuaciones de onda inhomogéneas (10), como se ve en 2.17 y 2.19.

Si se pudiera encontrar fácilmente una solución para estas ecuaciones diferenciales, ello sería muy útil, pues si se conocen la corriente y la carga, pueden encontrarse \bar{A} y V y con ellos \bar{E} y \bar{B} . El encontrar soluciones para 2.17 y 2.19 se puede considerar como un sólo problema, pues estas ecuaciones son de la misma forma.

2.4 Potenciales retardados.

Considérese una simple perturbación electromagnética. Un impulso de corriente circula por un corto trozo de alambre (como en una antena); la carga fluye repentinamente de un extremo al otro del conductor. Antes y después del impulso, las condiciones son estáticas y las soluciones de 2.17 y 2.19 deben ser soluciones potenciales estáticas, éstas se describen por las mismas 2.17 y 2.19, sólo que al ser estáticas no hay variación respecto al tiempo y los términos que tienen la derivada parcial temporal se anulan, por lo que quedan, respectivamente, de la forma

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J} \quad (2.20)$$

y

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.21)$$

cuyas soluciones son

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\bar{J}}{r} dV \quad (2.22)$$

y

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho}{r} dV \quad (2.23)$$

Estas soluciones electrostáticas deben aplicarse antes de que comience la perturbación y después que desapareció, pero durante la perturbación, deben aplicarse 2.17 y 2.19. Se sabe, por lo tanto, que el campo potencial estático inicial se transforma en el campo potencial estático final mediante una perturbación en forma de onda progresiva. El potencial en todo punto del espacio se afecta por esta perturbación, pero los puntos más distantes no serán afectados hasta un tiempo después, que es proporcional a la distancia. La perturbación se propaga con una velocidad v , dada por $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ y, de aquí, si la distancia de la antena a un punto del espacio es r , el potencial en ese punto se afecta después del tiempo r/v .

Para expresar la misma idea en una forma diferente, a un tiempo t se determinan los potenciales \bar{A} y V en un punto a una distancia r de la fuente de la perturbación, no por la intensidad y la carga en la antena en ese tiempo t , sino por la corriente y la carga que existía en un tiempo anterior ($t - r/v$).

Usando la notación funcional, si la densidad de carga es una función del tiempo se escribe $\rho(t)$. Si ρ cambia con el tiempo en la misma manera que $\rho(t)$, pero con un cierto retraso, la variable

se escribe $(t - t_0)$ en lugar de t . La función densidad de carga retardada se escribe, por lo tanto, $\rho(t - t_0)$. Con esta notación 2.23 se escribe

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(t - t_0)}{r} dV \quad (2.24)$$

Ahora, en vista de tomar el tiempo retardado en la expresión para los potenciales dinámicos, la discusión indica que la solución puede ser

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(t - \frac{r}{v})}{r} dV \quad (2.25)$$

de igual manera 2.16 puede ser

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\bar{J}(t - \frac{r}{v})}{r} dV \quad (2.26)$$

Esto, aún cuando parece lógico, ha sido basado en especulaciones. Como sucede en la mayoría de las ecuaciones diferenciales se obtiene la solución total una vez que se ha conjeturado una solución particular, sustituyéndola en la ecuación diferencial. La sustitución de V de la ecuación 2.24 en 2.19 no es, sin embargo, inmediata. La solución directa de la ecuación 2.24 en la 2.19 lleva dificultades al aplicar el laplaciano de ρ/r en los puntos donde r es cero. Como r es la distancia del elemento de carga al punto donde se determina el potencial, sólo es cero cuando el potencial se determina en un punto en el cual está ubicada la carga. Para evitar esta dificultad, el espacio se divide en dos regiones: una tan cercana al punto potenciado que se puede aplicar 2.21, por ser cuasiestacionarias las condiciones. La otra contiene todo el resto del espacio. Para la segunda región ρ/r es regular, y el laplaciano de V se desarrolla finalmente en coordenadas esféricas para obtener

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(t - \frac{r}{v}) dV \quad (2.27)$$

Como ambas regiones contribuyen al potencial en el punto en cuestión, la expresión completa que debe sustituirse en el laplaciano de 2.19 es

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(t - \frac{r}{v}) dV \quad (2.28)$$

después de esto, la solución se obtiene sin inconvenientes y la ecuación 2.19 se reduce a la identidad. La analogía de la ecuación 2.18 con ésta muestra que su solución es, ciertamente 2.25.

Estos potenciales se conocen como *potenciales retardados* a causa del retraso de tiempo en el que se los considera.

No es siempre necesario usar potenciales retardados, aún en problemas dinámicos. Cuando los tiempos son grandes y las distancias cortas, los potenciales retardados son indistinguibles de los potenciales estáticos. Matemáticamente, si r es pequeño comparado con vt , una función de $(t - r/v)$ difiere en un valor despreciable de una función de t . Se pueden usar entonces las ecuaciones electrostáticas más simples, aunque los campos sean lentamente variables, y esta condición se llama *estado cuasiestacionario* (10).

2.5 Radiación de un elemento de corriente:

El radiador ideal es un hilo conductor de longitud l , el cual presenta una resistencia de carga llamada resistencia de radiación. La deficiencia de ese radiador es que no puede sostenerse por sí solo, por lo que se recurre a las antenas con estructura.

Para determinar la radiación de una antena se busca una solución para el potencial vectorial dinámico, tal como está dado por 2.26. Con este propósito en la sección anterior se han introducido los conceptos de potencial vectorial y escalar retardados (10).

Considérese un conductor por el cual corre una corriente alterna, con I_0 el valor pico de corriente

$$i = I_0 \text{sen } \omega t \quad (2.29)$$

El conductor se aísla en el espacio. Su longitud es L , y con un sistema de coordenadas esféricas de tal manera que el conductor se extienda a lo largo del eje polar desde $-L/2$ a $L/2$; véase la figura 12.

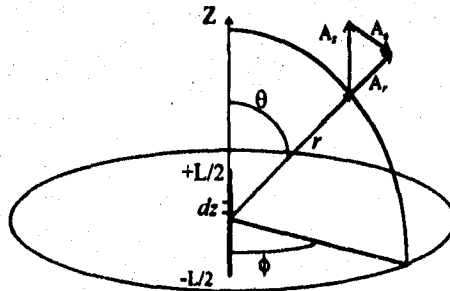


Figura 12. Sistema coordinado y componentes del potencial vectorial.

Usando la ecuación 2.26 se describe el potencial vectorial en el entorno del conductor; la integración se hace a lo largo del alambre solamente. La dirección del conductor coincide con el eje Z . Se tiene entonces (12)

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{I_0 \text{sen} \omega(t - \frac{r}{v})}{r} dz \quad (2.30)$$

puesto que hay corriente sólo en la dirección z , hay solamente una componente z del potencial vectorial (o bien $\bar{A} = A_z \hat{e}_z$). Si la longitud del conductor es pequeña comparada con la distancia del punto donde se mide \bar{A} , el denominador del integrando es prácticamente constante durante el curso de la integración. Si la longitud es pequeña comparada con la longitud de onda de la señal irradiada, el numerador es también prácticamente constante; esto significa que en cualquier punto del espacio la diferencia de fase entre las señales que llegan a un punto desde los extremos del conductor es despreciable. Con estas hipótesis el integrando de 2.30 es una constante, y resulta

$$A_z = \frac{\mu I_0 L}{4\pi r} \operatorname{sen} \left(\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right) \quad (2.31)$$

de esta manera se encuentra el vector potencial, partiendo de la corriente conocida.

Para encontrar el campo magnético a una antena corta, se determina el rotacional del potencial vectorial (como en la ecuación 2.8), esto se hace más cómodamente en coordenadas esféricas. El potencial vectorial se cambia fácilmente a coordenadas esféricas, como se ilustra en la figura 12, dando

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu I_0 L}{4\pi r} \operatorname{sen} \left(\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right) \cos \theta \quad (2.32)$$

$$A_\theta = -A_z \operatorname{sen} \theta = -\frac{\mu I_0 L}{4\pi r} \operatorname{sen} \left(\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right) \operatorname{sen} \theta \quad (2.33)$$

$$A_\phi = 0 \quad (2.34)$$

Ahora tomando estas tres ecuaciones y obteniendo su rotacional, como lo indica la ecuación 2.8, se obtiene el campo magnético

$$B_r = 0 \quad (2.35)$$

$$B_\theta = 0 \quad (2.36)$$

$$B_\phi = \frac{\mu I_0 L}{4\pi r} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{\omega}{v} \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right) + \frac{1}{r} \operatorname{sen} \left(\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right) \right] \quad (2.37)$$

Mediante 2.5 se pueden expresar estas mismas ecuaciones en términos de la intensidad magnética. Con ello y mediante 2.7 se puede, tras despejar el desplazamiento eléctrico y sustituirlo por su expresión del campo eléctrico (por medio de la ecuación 2.6), obtener pues

$$\bar{E} = \frac{1}{\epsilon} \int \nabla \times \bar{H} dt \quad (2.38)$$

Es un tanto complicado ver a que lleva esta ecuación, así que es útil expresar el rotacional en coordenadas esféricas (θ) como

$$\nabla \times \vec{H} = \hat{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial H_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right) + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \quad (2.39)$$

con esta sustitución 2.38 toma las formas

$$E_r = \frac{1}{\epsilon r \sin \theta} \int \left(\frac{\partial \sin \theta H_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right) dt \quad (2.40)$$

$$E_\theta = \frac{1}{\epsilon} \int \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial r} \right) dt \quad (2.41)$$

$$E_\phi = \frac{1}{\epsilon r} \int \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) dt \quad (2.42)$$

Por las condiciones elegidas sólo ha quedado la componente H_ϕ , tal como se ve en 2.35, 2.36 y 2.37; con éstas y sustituyendo en 2.40, 2.41 y 2.42 queda

$$E_r = \frac{1}{\epsilon r \sin \theta} \int \frac{\partial \sin \theta H_\phi}{\partial \theta} dt \quad (2.43)$$

$$E_\theta = \frac{1}{\epsilon r} \int \frac{\partial H_\phi}{\partial r} dt \quad (2.44)$$

$$E_\phi = 0 \quad (2.45)$$

o bien, con las sustituciones $\lambda = 2\pi v/\omega$ y $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ se obtiene

$$E_r = -\eta \frac{I_0 L \cos \theta}{r \lambda} \left[\frac{1}{4\pi^2 r^2} \cos \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) + \frac{1}{2\pi r} \sin \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \right] \quad (2.46)$$

$$E_{\theta} = \eta \frac{I_0 L \sin \theta}{2r\lambda} \left[-\frac{1}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{r^2} \cos\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) + \frac{1}{2\pi r} \sin\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) + \cos\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) \right] \quad (2.47)$$

$$E_{\phi} = 0 \quad (2.48)$$

y para el campo de inducción magnética

$$H_r = 0 \quad (2.49)$$

$$H_{\theta} = 0 \quad (2.50)$$

$$H_{\phi} = \frac{I_0 L \sin \theta}{2r\lambda} \left[\frac{1}{2\pi r} \sin\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) + \cos\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) \right] \quad (2.51)$$

Considere estas últimas seis ecuaciones en dos regiones generales: primero, cerca del conductor que irradia en la zona donde r es pequeño comparado con la longitud de onda $\lambda = 2\pi v/\omega$, esto es (13) que $0 < r \ll \lambda$; a esta zona se le conoce como *campo cercano*. Y segundo, a una distancia de varias longitudes de onda, de modo que r sea grande comparado con λ , o sea $0 < \lambda \ll r$ (13); a esta zona se le conoce como *campo lejano*. En la región cercana a la antena predominan los términos que contienen λ/r en las mayores potencias. Muy cerca de la antena se pueden despreciar todos los términos de las ecuaciones para campo eléctrico y magnético menos el primero en cada paréntesis. Al hacer esto, la ecuación se reduce a ecuaciones cuasiestacionarias de un dipolo oscilante (este tópico es tratado más adelante en este capítulo). Estos términos dan lo que se llama *campo de inducción* alrededor de la antena.

Si, por otra parte, se observa el campo lejano, de modo que λ/r sea pequeña, aparece otra simplificación importante. En este caso, los términos que contienen λ/r y λ^2/r^2 son tan pequeños que pueden despreciarse. Sólo se necesita retener el último término de E_{θ} , y la expresión completa de E_r es despreciable comparada con E_{θ} . También en H_{ϕ} sólo el último término tiene importancia. Con esta aproximación, que es buena a distancias de varias longitudes de onda del origen, la ecuación de onda describe lo que se llama *campo de radiación*.

$$E_r = 0 \quad (2.52)$$

$$E_{\theta} = \eta \frac{I_0 L \sin \theta}{2r\lambda} \cos\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) \quad (2.53)$$

$$E_{\phi} = 0 \quad (2.54)$$

$$H_r = 0 \quad (2.55)$$

$$H_\theta = 0 \quad (2.56)$$

$$H_\phi = \frac{I_0 L \sin \theta}{2r\lambda} \cos\left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t\right) \quad (2.57)$$

Este último grupo de seis ecuaciones describen un campo electromagnético muy sencillo. Es una onda que se propaga radialmente hacia afuera. Las componentes eléctrica y magnética son idénticas en forma y mutuamente ortogonales. Sus módulos están en la siguiente relación

$$E_\theta = \eta H_\phi \quad (2.58)$$

Las componentes eléctrica y magnética se debilitan a medida que la onda se propaga porque ambas son inversamente proporcionales al radio. La figura 13 muestra el aspecto de una sección de la onda esférica.

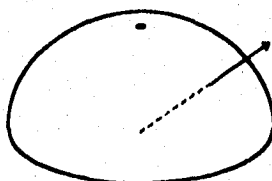


Figura 13. Diagrama de campo lejano de una onda electromagnética esférica.

Las líneas de campo eléctrico corresponden a lo que en Geografía son los meridianos del Mundo, y las líneas de campo magnético a los paralelos. Ambos campos son más intensos cerca del ecuador y se anulan en los polos. Los campos, en cualquier punto del espacio oscilan sinusoidalmente (10).

Con la ecuación 2.51 se puede determinar cuando los campos de inducción y radiación de ambos campos, eléctrico y magnético, son iguales; esto igualando amplitudes, se tiene que

$$\frac{\omega}{r v} = \frac{1}{r^2}, \text{ ó sea } r = \frac{v}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} \approx \frac{\lambda}{6} \quad (2.59)$$

lo que significa que a partir de aproximadamente $1/6$ de longitud de onda el campo de inducción se desvanece rápidamente, para pasar a predominar el campo de radiación. De aquí se puede deducir que los fenómenos que tienen lugar a distancias menores de $1/6$ de longitud de onda de una antena

corta, son predominantemente inductivos, y aquellos que ocurren a distancias mayores son fundamentalmente resultado de la radiación.

La distinción entre términos de inducción y los de radiación en las fórmulas 2.51 a 2.57 es de carácter matemático: los términos que contienen ciertas potencias de r son de inducción, los que tienen otras potencias son de radiación. Pero hay otra distinción más abierta a la interpretación física, que es la siguiente: el estado dinámico difiere de uno cuasiestacionario porque tiene en cuenta la capacidad para inducir un campo magnético variable para inducir otro eléctrico. El resultado es la radiación. Las componentes de los campos eléctrico y magnético no tienen una relación tan estrecha con la intensidad y la carga como la tienen los campos de inducción. Se han desprendido de su origen. El campo eléctrico de una onda no resulta de la presencia cercana de cargas, sino de la componente magnética variable de la onda; el campo magnético no resulta del flujo de corriente, sino del campo de inducción variable.

2.6 Características de los patrones de radiación.

A la radiación de un pequeño elemento de corriente se le llama comúnmente *radiación dipolar*. Así, un pequeño elemento de corriente puede verse como una antena elemental, la cual tiene asociadas un número de características básicas, descritas por parámetros usados para caracterizar a las antenas en general (14). Los principales puntos que hay que resaltar en un patrón de radiación son: el ancho del lóbulo principal, denominado haz, y el nivel de los lóbulos laterales.

El patrón de radiación se representa en dos planos, el plano E que es paralelo al campo eléctrico y que se extiende a lo largo del lóbulo de radiación principal. Para el caso de la mayoría de las antenas, el plano E se encuentra paralelo al plano de tierra. El otro plano, el magnético que al estar en presencia de aire se denomina H, es perpendicular a E y al plano de tierra y perpendicular también al máximo del patrón de radiación (10).

La figura 14a muestra el patrón de radiación de un pequeño elemento de corriente. Es común mostrar secciones planas del patrón de radiación en vez de su imagen tridimensional, las dos vistas más importantes son los patrones en el plano E y en el plano H. El patrón del plano E es una vista del patrón de radiación obtenido a partir de una sección que contiene el máximo valor del campo de radiación, que se obtiene dando un corte transversal de la superficie sólida, la cual es semejante a un toro. La figura 14b muestra un diagrama del campo E. El lóbulo del patrón tiene una zona donde resulta ser más ancho; a esta región se le conoce con el nombre de *ancho del haz* y queda definida como la zona en donde el nivel decae 3 dB por abajo del máximo, esto es, el nivel de potencia media. Recuerdese que el decibel (dB) está definido como $10 \log_{10} (A_x / A_0)$, donde A_0 es una intensidad de referencia y A_x es la intensidad medida a una distancia x .

Análogamente, al hacer un corte longitudinal del toro, en el plano XY descansando en el origen, se obtiene el patrón del plano H, lo cual se muestra en 14c, y nuevamente la sección contiene el máximo valor del campo de radiación (14).

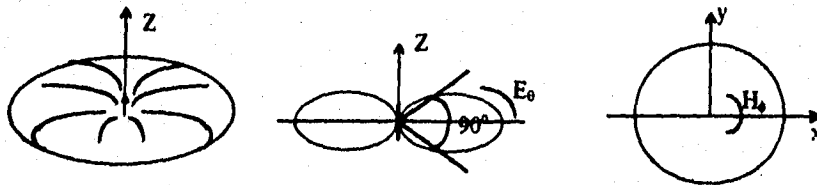


Figura 14. a) patrón de potencia de radiación para un pequeño elemento de corriente.
b) principal patrón del plano E, y c) principal patrón del plano H

En general todas las características de los niveles de los lóbulos que posee un patrón se dan en relación con el nivel del haz principal, y se expresa en dB por abajo de este nivel.

Los lóbulos laterales resultan ser en la mayoría de las veces niveles de radiación no deseados, ya que se traducen en pérdida de potencia hacia las regiones a las que no se desea enviar señal, teniendo además que efectuar protecciones de patrón hacia esas zonas, por lo que es deseable mantener un bajo nivel de lóbulos laterales.

La máxima radiación define también la polarización de la antena, quedando representada por la orientación del máximo de campo eléctrico, que en el caso estudiado es una polarización vertical ya que la componente de campo eléctrico predominante es la E_0 (10).

2.7 Potencia radiada y resistencia de radiación.

Un aspecto muy importante de la propagación ondulatoria es el flujo de potencia en el espacio. Es evidente que una onda que se propaga transporta energía, por ejemplo, lleva energía del transmisor al receptor.

Cuando una onda pasa por una superficie imaginaria en el espacio, su energía atraviesa tal superficie y en cada instante hay un flujo de potencia a través de cada unidad de área. Esta magnitud, expresada en watts por metro cuadrado, se indica por el símbolo P . El producto $P \cdot a$ es la potencia que atraviesa, en un instante dado, una área a . S es una cantidad vectorial, llamada vector de Poynting. Cuando se dibujan las líneas de flujo del campo vectorial P , éstas muestran el flujo de la energía electromagnética. El campo del vector de Poynting es marcadamente útil en electrodinámica.

En función de los campos E_r , E_θ y H_ϕ , se tienen para el vector de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ dos componentes

$$S_\theta = -E_r H_\phi \quad (2.60)$$

y también
$$S_r = E_\theta H_\phi \quad (2.61)$$

Como el campo E_r no tiene componente de radiación, la densidad de energía que proporciona S_θ no se propaga grandes distancias. Considérese la potencia proporcionada por S_r

$$P = \oint \langle S_r \rangle da \quad (2.62)$$

Con las sustituciones $\lambda = 2\pi v/\omega$ y $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ en 2.47 y 2.51 se tiene, respectivamente

$$E_\theta = \frac{I_0 L}{2\pi\epsilon r} \sin\theta \left[\frac{\omega}{v^2} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) + \frac{1}{r v} \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) - \frac{1}{\omega r^2} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \right] \quad (2.63)$$

$$H_\phi = \frac{I_0 L}{4\pi r} \sin\theta \left[\frac{\omega}{v} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) + \frac{1}{v} \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \right] \quad (2.64)$$

Para evaluar $\langle S_r \rangle$ se multiplica la expresión 2.63 y 2.64, y considerando los términos al cuadrado en función de sus ángulos dobles tales como

$$\cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) = \frac{1 + \cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)}{2} \quad (2.65)$$

$$\sin^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) = \frac{1 - \cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)}{2} \quad (2.66)$$

se tiene

$$S_r = \frac{I_0^2 L^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon} \left[\frac{\sin\left(2\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)}{2\omega r^3} + \frac{\cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)}{r^4 v} + \frac{\sin\left(2\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)}{r^3 v^2} + \frac{\omega^2}{2r^2 v^3} \left(1 - \cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)\right) \right] \quad (2.67)$$

Por definición, el promedio de una función $f(t)$ se expresa por

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.68)$$

donde T es el periodo. Considerando que la integral sobre el periodo de las funciones pares es cero, el promedio de 2.67 mediante 2.68, se reduce a

$$\langle S_r \rangle = \frac{I_0^2 L^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^2 v^3 t} \quad (2.69)$$

sustituyendo 2.69 en 2.62 y dado que en coordenadas polares $da = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$, se tiene

$$P = \int_0^\pi \frac{I_0^2 L^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^2 v^3 t} 2\pi^2 r^2 \sin\theta d\theta \quad (2.70)$$

que con las sustituciones $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} = 1/v\epsilon$ y $\kappa = \omega/v = 2\pi/\lambda$, en 2.70 se obtiene

$$P = \frac{30\pi^2 I_0^2 L^2}{\lambda^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (2.71)$$

La integral de 2.71 es del tipo numérico y su valor es 4/3. Sustituyéndolo en 2.71 se tiene que la potencia queda como

$$P = 40\pi^2 \frac{I_0^2 L^2}{\lambda^3} \quad (2.72)$$

La potencia se expresa en términos de corriente eficaz I_{ef} . Considerando $I_{\text{ef}} = I_0/\sqrt{2}$, se tiene

$$P = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 I_{\text{ef}}^2 = R_{\text{rad}} I_{\text{ef}}^2 \quad (2.73)$$

donde

$$R_{\text{rad}} = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \quad (2.74)$$

La ecuación 2.73 proporciona la información de la resistencia de radiación, R_{rad} ; esto es, el elemento conductor presenta una carga a la potencia, que es la resistencia de radiación.

Pero en general la distribución de corriente a lo largo de la antena no resulta uniforme, y la longitud real que radia la antena no es la longitud física, sino la longitud efectiva, l_{ef} , por lo que la resistencia de radiación se puede expresar como

$$R_{\text{rad}} = 80\pi^2 \left(\frac{l_{\text{ef}}}{\lambda}\right)^2 \quad (2.75)$$

En general, la resistencia de radiación se define como la razón de potencia total radiada por la antena dividida entre el cuadrado de la corriente efectiva de la antena. Las ecs. 2.74 y 2.75 proporcionan la información para la resistencia de radiación (12).

2.8 Estudio independiente del tiempo del potencial vectorial y los campos magnéticos y eléctricos.

En antenas, el patrón de radiación se expresa como una función independiente del tiempo, por lo que es conveniente expresar las componentes de los campos eléctrico y magnético con dicha independencia (15).

Supóngase que $\bar{A} = \text{Re}[\bar{A}(r) e^{j\omega t}]$ y $\bar{J} = \text{Re}[\bar{J}(r) e^{j\omega t}]$, esto es, la parte real del producto de la componente espacial por la onda que se desplaza en el tiempo $e^{j\omega t}$. Sustituyendo \bar{A} y \bar{J} en la ecuación 2.17, se obtiene

$$\nabla^2 \text{Re}[\bar{A}(r) e^{j\omega t}] - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Re}[\bar{A}(r) e^{j\omega t}] = -\mu \text{Re}[\bar{J}(r) e^{j\omega t}] \quad (2.76)$$

$$\nabla^2 \text{Re}[\bar{A}(r)] - \mu\epsilon (j\omega)^2 \text{Re}[\bar{A}(r)] = -\mu \text{Re}[\bar{J}(r)] \quad (2.77)$$

Como todos los términos consideran la parte real, se puede eliminar esta notación, y así

$$\nabla^2 \bar{A}(r) + \mu\epsilon \omega^2 \bar{A}(r) = -\mu \bar{J}(r) \quad (2.78)$$

Ya que 2.78 no depende del tiempo, la solución en este caso es

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\bar{J}(r) e^{-jkr}}{R} dV \quad (2.79)$$

En la figura 15 se ve un diagrama de las componentes del potencial vectorial.

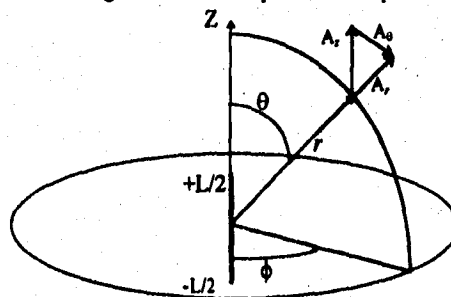


Figura 15. Componentes del potencial vectorial y sistema coordenado.

Considérese $\bar{J}(r)dl' = I_0 L dr$, la componente z del potencial vectorial es

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I_0 L e^{-j\kappa R}}{R} dr$$

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 L}{r} e^{j\kappa r} \quad (2.80)$$

Considérese el cambio a coordenadas esféricas dado en 2.32 y 2.33, y sustituyendo en 2.80, queda

$$A_r = \frac{\mu I_0 L}{4\pi r} e^{-j\kappa r} \cos \theta \quad (2.81)$$

$$A_\theta = -\frac{\mu I_0 L}{4\pi r} e^{-j\kappa r} \sin \theta \quad (2.82)$$

La componente del campo magnético es H_ϕ , dada por la ecuación

$$H_\phi = \frac{1}{\mu r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \quad (2.83)$$

Sustituyendo 2.81, 2.82 y 2.83 se obtiene

$$H_\phi = \frac{I_0 L \sin \theta e^{-j\kappa r}}{4\pi r} \left(\frac{j\kappa}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (2.84)$$

Manejando $\bar{E} = \text{Re} \bar{E}(r) e^{j\omega t}$, la primera derivada temporal es $j\omega \bar{E}$, sustituyéndolo en 2.7 con la ayuda de 2.6, se llega a que

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega \epsilon \bar{E} \quad (2.85)$$

que mediante la ecuación 2.39 e identificando términos se tienen las ecuaciones

$$E_r = \eta \frac{I_0 L \cos \theta e^{-j\kappa r}}{4\pi r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\kappa r^3} \right) \quad (2.86)$$

$$E_\theta = \eta \frac{I_0 L \sin \theta e^{-j\kappa r}}{4\pi r} \left(\frac{j\kappa}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\kappa r^3} \right) \quad (2.87)$$

El que no se hayan escrito las expresiones para A_ϕ , H_r , H_θ y E_ϕ es por que todas ellas son nulas, tal como se observa en la sección 2.5, en el que se hizo un análisis más detallado. Más

2.8 Estudio independiente del tiempo... 59

aún, las ecuaciones 2.84, 2.86 y 2.87 tienen en 2.51, 2.46 y 2.47, respectivamente, las mismas expresiones, claro con sus diferencias debidas a la forma de los potenciales vectoriales, de donde se obtuvieron las anteriores; esencialmente son las mismas.

Capítulo III. Radiadores.

3.1 Introducción.

En el presente capítulo se tiene por objetivo hacer una revisión de los radiadores acústicos y electromagnéticos de media longitud de onda para hacer una comparación entre ambos. Para tal efecto se analizan algunos tipos de antenas electromagnéticas, como son: antenas cortas, antenas de semilongitud de onda, su diagrama de radiación, la potencia de emisión y finalmente el dipolo eléctrico.

El análisis anterior da pie a buscar sus análogos acústicos, por ello se analizan las condiciones de resonancia para una varilla delgada y, al estar la varilla inmersa en aire y excitarla con vibraciones longitudinales, resulta de interés analizar sus emisiones al medio, así que, tras tomar la aproximación de varilla delgada, es posible "ver" a los extremos de la varilla como dos fuentes puntuales y analizar sus patrones de radiación. Al poder tomar un par de fuentes puntuales se hace en una sección el análisis de la radiación dipolar acústica. Y continuando con el estudio acústico se ven en otra sección las formas de excitación para producir tal efecto.

Para concretar de la comparación entre las antenas de semilongitud de onda se observa que hay una analogía en la concepción física y matemática entre el potencial eléctrico y la presión acústica en el fluido (aire en particular), por lo mismo, los patrones de radiación de ambos son en todo equivalentes. Al ser derivable el campo eléctrico del potencial, hay una analogía entre el campo eléctrico y el campo resultante del gradiente de presión acústico.

Finalmente se tiene que, en las antenas electromagnéticas se debe hacer en la mayoría de los casos una corrección por longitud efectiva en la antena, no así para el caso de la antena acústica; esto se debe principalmente a la aproximación de varilla delgada que se tomó. Esto se estudia en la última sección.

3.2 Condiciones de resonancia para una varilla delgada.

Quizá el ejemplo más cotidiano de resonancia es el que sucede al sintonizar en la radio una estación. Todas las estaciones están produciendo oscilaciones forzadas en el circuito del receptor; pero para cada posición del sintonizador, corresponde una frecuencia natural de oscilación en el circuito eléctrico del receptor, al coincidir esta frecuencia con la de la emisora, la absorción de energía es máxima y por ello es la única estación que se escucha. Si dos estaciones tienen frecuencias muy próximas, algunas veces se escucharán simultáneamente, lo que da lugar a un efecto de interferencia (5).

Este ha sido un ejemplo electromagnético, uno mecánico se da al hacer vibrar longitudinalmente a una varilla delgada. En la presente sección se estudian las condiciones para las cuales se produce el fenómeno de resonancia en este tipo de movimiento. Así pues, para comenzar con el análisis, es conveniente introducir la *impedancia mecánica* denotada por Z_m . Sus dimensiones son de Nseg/m, a menudo denotadas por *ohms mecánicos*. Se debe aclarar que aún cuando el ohm mecánico es análogo al eléctrico, estas cantidades no tienen las mismas unidades. El ohm eléctrico tiene unidades de voltaje entre corriente, mientras el ohm mecánico tiene unidades de fuerza entre velocidad. Se define pues, la impedancia mecánica como

$$Z_m = \frac{f}{u} \quad (3.1)$$

y tiene un significado físico muy importante: es la razón de la fuerza excitadora f a la velocidad resultante del sistema, u , en el punto en que se aplica la fuerza.

Supóngase que la varilla tiene longitud L y es excitada en $x = 0$ con una fuerza

$$f = F_0 e^{j\omega t} \quad (3.2)$$

de la ecuación 1.6 al multiplicar y dividir por la densidad ρ se tiene

$$f = -SY \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\rho_L c_L^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

donde $\rho_L = \rho S$ (3.4)

y $Y = \rho c_L^2$ (3.5)

En el otro extremo de la varilla donde $x = L$, supóngase un soporte cuya impedancia mecánica Z_{ml} . En dicho extremo la condición de frontera es $f_L = Z_{ml} u(L, t)$; dado que

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3.6)$$

retomando 3.3 para f , despejando f de 3.1 e introduciendo 3.6 en dicho despeje se tiene al evaluar en $x = L$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=L} = -\frac{Z_{mL}}{\rho_L c_L^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x=L} \quad (3.7)$$

En un caso idealizado las pérdidas internas son nulas y la ecuación de la onda viajera nuevamente toma la forma de 1.13, por lo tanto

$$\xi(x, t) = Ae^{j(\omega t - \kappa x)} + Be^{j(\omega t + \kappa x)} \quad (3.8)$$

Igualando 3.2 y 3.3. se obtiene

$$F_0 e^{j\omega t} = -\rho_L c_L^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.9)$$

y evaluando 3.8 en 3.9 para $x = 0$ queda la fuerza inicial

$$F_0 = -\rho_L c_L^2 (-j\kappa A + j\kappa B) \quad (3.10)$$

Ahora, al evaluar 3.8 en 3.7 da

$$-\rho_L c_L^2 (-j\kappa A e^{-j\kappa L} + j\kappa B e^{j\kappa L}) = Z_{mL} (A e^{-j\kappa L} + B e^{j\kappa L}) \quad (3.11)$$

Tras resolver 3.10 y 3.11 para encontrar las amplitudes se encuentra que son

$$A = \frac{F_0}{\kappa \rho_L c_L^2} \frac{1 + (Z_{mL} / \rho_L c_L)}{j(Z_{mL} / \rho_L c_L) \cos(\kappa L) + \text{sen}(\kappa L)} \frac{e^{j\kappa L}}{2} \quad (3.12)$$

$$B = \frac{F_0}{\kappa \rho_L c_L^2} \frac{1 - (Z_{mL} / \rho_L c_L)}{j(Z_{mL} / \rho_L c_L) \cos(\kappa L) + \text{sen}(\kappa L)} \frac{e^{-j\kappa L}}{2} \quad (3.13)$$

Nótese que A y B son complejas conjugadas, de tal manera que la onda que viaja hacia la derecha tiene la misma amplitud que la que viaja hacia la izquierda. Sustituyendo 3.12 y 3.13 en 3.8 y esto en 3.6 se obtiene una velocidad

$$u(x, t) = -j \frac{F}{\rho_L c_L^2} \frac{\cos[\kappa(L-x)] + j(Z_{mL}/\rho_L c_L^2) \sin[\kappa(L-x)]}{j(Z_{mL}/\rho_L c_L^2) \cos(\kappa L) + \sin(\kappa L)} e^{j\omega t} \quad (3.14)$$

y la impedancia mecánica de entrada es

$$Z_{m0} = \frac{F e^{j\omega t}}{u(0, t)} = \frac{Z_{mL} + j \tan(\kappa L)}{1 + j(Z_{mL}/\rho_L c_L) \tan(\kappa L)} \quad (3.15)$$

que descomponiendo en las partes real e imaginaria da

$$\frac{Z_{m0}}{\rho_L c_L} = \frac{[r_L (\tan^2(\kappa L) + 1)] + j[x_L \tan^2(\kappa L) + (r_L^2 + x_L^2 - 1) \tan(\kappa L) - x_L]}{(r_L + x_L)^2 \tan^2(\kappa L) - 2x_L \tan(\kappa L) + 1} \quad (3.16)$$

donde la impedancia de carga normalizada está definida por

$$\frac{Z_{mL}}{\rho_L c_L} = \frac{R_L}{\rho_L c_L} + j \frac{X_L}{\rho_L c_L} = r_L + j x_L \quad (3.17)$$

aquí R_L es la resistencia mecánica y X_L la reactancia mecánica.

Supóngase que el soporte mecánico en $x = L$ tiene pequeñas pérdidas (como sucede en la realidad), de manera que, si bien r no es cero, sí es posible tomar $r_L \ll 1$ y también que $|X_L| \ll 1$. Debido a que tanto r_L como x_L son pequeños, la reactancia de entrada se hace cero cuando

$$x_L \tan^2(\kappa L) - \tan(\kappa L) - x_L \approx 0 \quad (3.18)$$

esta expresión es cuadrática en $\tan(\kappa L)$ y da

$$\tan(\kappa L) \approx \frac{1}{x_L} (1 \pm \sqrt{1 + 4x_L^2}) \quad (3.19)$$

la raíz cuadrada de ésta se puede aproximar en series de potencias; la raíz positiva da el valor de reactancia para antiresonancia y el negativo el de resonancia, que es el que interesa ahora, así que el resultado de signo negativo es

$$\tan(\kappa L) \approx \frac{1 - (1 + 2x_L^2)}{2x_L} = -x_L \quad (3.20)$$

Las frecuencias de resonancia de cualquier sistema mecánico están definidas en general *son aquellas para las cuales la reactancia mecánica de entrada es cero*. Ello obliga en 3.20 que si $x_L = 0$, entonces $\tan(\kappa L) = 0$ ó bien $\sin(\kappa L) = 0$, que implica que

$$\kappa_n = \frac{n\pi}{L} \equiv \kappa_m \quad (3.21)$$

que equivale a
$$\omega_n = \frac{n\pi c_L}{L} \equiv \omega_m \quad (3.22)$$

ó bien
$$v_n = \frac{nc_L}{2L} \equiv v_m \quad (3.23)$$

los subíndices "m" indican 'de resonancia' y en este caso, de una varilla casi libre, forzada. Por lo tanto 3.23 implica las frecuencias de resonancia de la misma.

Para probar la afirmación de que las frecuencias de resonancia ocurren cuando la reactancia de entrada se hace cero, basta con combinar 3.20 y 3.16 y da

$$\frac{Z_{m0}}{\rho_L c_L} \approx \frac{r_L (x_L^2 + 1)}{(r_L + x_L)^2 x_L^2 + 2x_L^2 + 1} \approx r_L \quad (3.24)$$

Por lo tanto, si hay pérdidas en el sistema (como es siempre el caso en la realidad), entonces en resonancia la reactancia de entrada se hace cero y la resistencia de entrada es pequeña. Esto concuerda con el hecho de que la amplitud de la onda estacionaria es grande en resonancia; para la varilla casi libre, forzada, debe tener un antinodo cerca del extremo en $x = L$, de tal manera que la velocidad en este punto es aproximadamente $U_L = |u(L,t)|$.

Una vez que se saben expresiones para la velocidad se puede llegar a las expresiones para la potencia. Para ello se debe considerar la potencia enviada hacia la varilla en resonancia, con la ayuda de 3.1, la potencia es

$$\bar{P} = \frac{1}{2} F_0 U_0 = \frac{1}{2} Z_0 U_0^2 = \frac{F_0^2}{2Z_0} \quad (3.25)$$

hay que notar que en resonancia, la reactancia es nula y por ello la impedancia es igual a la resistencia, que en términos matemáticos es

$$Z_{m0} = R_0 \quad (3.26)$$

$$Z_{mL} = R_L \quad (3.27)$$

De igual manera, la potencia transmitida de la varilla a la carga en $x = L$ está aproximada por

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_L^2 R_L \quad (3.28)$$

Como se supuso que en sí la varilla no tiene pérdidas internas, 3.28 y 3.25 deben ser las mismas y se puede resolver para la amplitud de la velocidad antinodal aproximada

$$U_L \approx \frac{F_0}{\sqrt{R_0 R_L}} \quad (3.29)$$

y mediante 3.24 y 3.26 se encuentra (3) que $R_0 = R_L$ con lo que 3.29 queda expresado como

$$U_L \approx \frac{F_0}{R_L} \quad (3.30)$$

Esta expresión muestra la velocidad resultante de la perturbación longitudinal de la varilla hacia el medio en términos de la fuerza de entrada y la resistencia de salida.

3.3 Radiación dipolar acústica.

Una vez que se han analizado las condiciones de resonancia para varillas delgadas, en la presente sección se analiza la radiación debido a la resonancia de la varilla, dando en cada extremo un par de fuentes puntuales, esto es permitido al haber hecho la aproximación de varilla delgada, que se da siempre que sus dimensiones longitudinales son mucho mayores a las de su sección transversal eficaz.

Como un doblete acústico es un par de fuentes puntuales separadas una cierta distancia, la varilla delgada sometida a ondas longitudinales, radia hacia fuera como un dipolo acústico. La radiación se da más eficientemente en resonancia por ello se estudió en la sección anterior.

El primer paso a dar en el análisis de radiación del dipolo es analizar el tipo de ondas que se dan a razón del movimiento de los extremos de la varilla. En el presente análisis el medio en el que se halla sumergida la varilla delgada es aire. Al perturbar ésta al medio origina ondas tridimensionales esféricas debido a la puntualidad de las fuentes. Tómese además el medio como un fluido no viscoso.

La perturbación que ocasiona la varilla originará ondas de presión acústicas, que se denotan por p , las ondas cumplen (1, 3) con la ecuación de onda

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.31)$$

donde c_s^2 es la velocidad del sonido en el medio, esta se da por

$$c_s^2 = \frac{B}{\rho} \quad (3.32)$$

aquí B es el *módulo de compresibilidad adiabático* y ρ es la *densidad en equilibrio*; ambas son cantidades físicas intrínsecas del fluido en cuestión. Si se observan las ecuaciones 3.31 y 3.32 se ve que tienen la misma forma que las ecuaciones 1.10 y 1.11 para ondas longitudinales, 1.43 y 1.44 para ondas torsionales. No así para 1.75 y 1.76 de las ondas flexurales debido a la dispersión intrínseca que se da en este tipo de movimiento. Otro aspecto que da diferencia entre 3.31, 1.10 y 1.43 es el gradiente que está en el primero, éste se debe a la naturaleza tridimensional de la perturbación del fluido. Y una similitud entre 3.32, 1.11 y 1.44 es que todas las expresiones de la velocidad varían inversamente a la densidad del medio y directamente a una cantidad elástica propia de cada tipo de movimiento, es decir, el módulo de elasticidad o de Young para las ondas

longitudinales; cortante o de rigidez para las ondas torsionales y de compresibilidad adiabática de volumen para las ondas de presión.

Para encontrar la solución a la ecuación 3.31, tómesese una onda esférica. El operador laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.33)$$

donde $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ y $z = r \cos \theta$. Si las ondas tienen simetría radial, la presión acústica es una función de la distancia radial y del tiempo pero no de las coordenadas angulares θ y ϕ . Por lo tanto, esta ecuación se simplifica a

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.34)$$

y la ecuación de onda para campos de presión esféricamente simétricos con la sustitución de 3.34 en 3.31 es

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.35)$$

Si se toma el producto rp como variable dependiente, se puede reescribir 3.35 como

$$\frac{\partial^2 rp}{\partial r^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 rp}{\partial t^2} \quad (3.36)$$

al considerar rp como una sola variable, la ecuación 3.36 tiene solución general

$$p = \frac{1}{r} f_1(c_s t - r) + \frac{1}{r} f_2(c_s t + r) \quad (3.37)$$

el primer término representa una onda divergente de una fuente puntual en el origen moviéndose con una velocidad c_s ; mientras el segundo representa una onda convergente en el origen. Las ondas divergentes más importantes son armónicas. Se pueden representar en forma compleja por

$$p = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (3.38)$$

es válido tomar la frecuencia angular ω debido a que en resonancia la onda es monocromática. Se puede reescribir la expresión anterior con la ayuda de la identidad $\kappa = \omega/v$, como

$$p = \frac{A}{r} e^{j\omega(t-r/v)} \quad (3.39)$$

aquí A/r es la amplitud de la onda de presión. Se debe notar que la amplitud de una onda esférica no es constante, sino que decrece inversamente con la distancia r de la fuente.

Como ya se mencionó al principio de la sección, la varilla al ser delgada, permite tomar los extremos de la misma como un par de emisores acústicos puntuales, éste doblete acústico emite ondas esféricas en cada fuente, cada uno separado por una distancia s , las fuentes aún cuando emiten con la misma frecuencia se hayan desfasados por π uno respecto al otro. Ver figura 16.

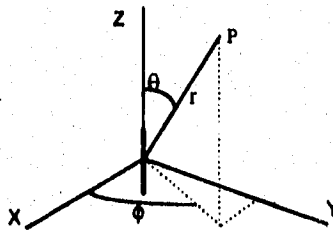


Figura 16. Geometría usada para derivar las características de radiación de un dipolo acústico.

La presión en el punto p debido a la fuente a, según 3.39, es

$$p_a = \frac{A}{r_a} e^{j\omega(t-r_a/v)} \quad (3.40)$$

y debido a la fuente b, igualmente es

$$p_b = \frac{A}{r_b} e^{j\omega(t-r_b/v)} \quad (3.41)$$

La presión en un punto cualquiera del espacio, es la suma de las presiones producidas por las fuentes individuales, por tanto, la presión en p es la suma de la presión debida a las fuentes a y b a un tiempo t

$$p = A \left(\frac{e^{j\omega(t-r_b/v)}}{r_b} - \frac{e^{j\omega(t-r_s/v)}}{r_s} \right) \quad (3.42)$$

Para distancias mucho mayores que la separación entre las fuentes, o sea, para $r \ll s$, es decir, campo lejano, se tiene

$$r_b \approx r + \frac{s}{2} \cos\theta \quad (3.43)$$

$$r_s \approx r - \frac{s}{2} \cos\theta \quad (3.44)$$

al sustituir estas dos aproximaciones en 3.42 se obtiene

$$p = \frac{A}{r} e^{j\omega(t-r/v)} \left[\frac{e^{j\kappa \cos\theta/2}}{1 - s\cos\theta/2r} - \frac{e^{-j\kappa \cos\theta/2}}{1 + s\cos\theta/2r} \right] \quad (3.45)$$

expandiendo en series tanto el numerador como el denominador, despreciando términos de tercer orden, y tomando $s/r \ll 1$ y $\kappa s \ll 1$ la ecuación 3.45

$$p = \frac{A}{r} e^{j\omega(t-r/v)} \left[\frac{1}{r} + j\kappa \right] \cos\theta \quad (3.46)$$

que es una expresión de campo lejano para el dipolo acústico. En la figura 17 se muestra el diagrama polar del campo de presión ocasionado.

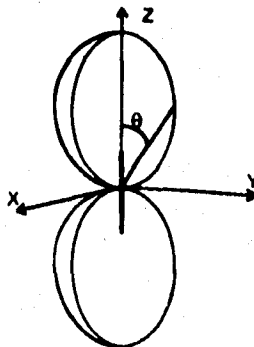


Figura 17. Diagrama polar de un dipolo acústico. El dipolo esta en posición vertical.

3.4 Formas de excitación.

Una forma de hacer vibrar una varilla delgada en forma longitudinal es tomarla a la mitad de su longitud y, desde ahí hacia el extremo, hacer fricción longitudinalmente en una sola pasada, procurando mantener la velocidad constante. Esto se puede hacer simplemente abrazando con las yemas de los dedos a la varilla y luego deslizar las yemas de los dedos de la otra mano hacia fuera, manteniendo la presión constante en la varilla durante el movimiento. Otro modo de hacerlo es sujetar por la mitad la varilla y golpearla en alguno de los extremos. Como ya se mencionó en el capítulo 1 es difícil que al querer hacer un movimiento longitudinal, no se provoque un movimiento flexural. Sin embargo al hacerlo en forma adecuada, es posible lograr que uno de los movimientos, el longitudinal, sea mucho más importante y que el flexural decrezca hasta hacerse nulo, esto se debe a que el movimiento longitudinal entra en resonancia, de lo cual ya se habló en la sección 3.2.

Una forma más elaborada de hacer la vibración longitudinal es colocar en un extremo de la varilla un transductor piezoeléctrico, al hacerlo funcionar provoca las deformaciones. Vale la pena hacer notar que al hacer funcionar al piezoeléctrico en un extremo, se hacen en ambos lados de la varilla antinodos de presión, mientras que por tener sujeta a la varilla por el centro se provoca un nodo de presión. En la figura 18 se muestran los dos primeros patrones de oscilación.

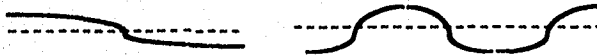


Figura 18. Patrones de oscilación de una varilla delgada con nodo central.

Las frecuencias de oscilación en forma analítica son las mismas que para una varilla libre-libre (3), estas son

$$v_n = \frac{(2n-1)c_t}{2L}, \quad n=1, 2, \dots \quad (3.47)$$

Si se compara 3.47 con 3.23 que expresa las frecuencias de resonancia para una varilla delgada, se observa que ambas expresiones tienen la misma forma excepto que en 3.47 ya se introdujo la condición de que sólo vibre en los números impares. Los números pares se eliminan por el hecho de existir un nodo central, de otro modo tendrían expresiones idénticas. Por tanto la expresión 3.47 da las frecuencias de oscilación para una varilla delgada con nodo central en resonancia.

3.5 Antenas electromagnéticas.

En las secciones anteriores se considera la radiación de un pequeño conductor en la hipótesis de que la corriente era la misma en toda la longitud del conductor. Esto, por supuesto, es imposible físicamente, a menos que el pequeño conductor forme parte de un circuito. Puede formar parte, por ejemplo, de un antena más grande, y en este caso, hay radiación de cada parte de la antena. La radiación total se encuentra luego por integración de las componentes de radiación provenientes de las pequeñas secciones de la antena.

3.5.1 Antenas cortas.

Considérese un conductor de longitud razonable, pero más corto que la longitud de onda de la señal irradiada. Considérese también, que ese conductor está aislado en el espacio sin ninguna tierra ni cuerpos perturbadores alrededor, sin embargo, en el cuerpo conductor hay un oscilador o alguna fuente de energía que produce corriente en el mismo. Véase la figura 19a. La corriente circula a causa de la capacitancia distribuida del alambre. La corriente carga las capacitancias y pasa de un máximo en el centro del conductor a cero en los extremos del mismo. La corriente se representa en la figura 19b.

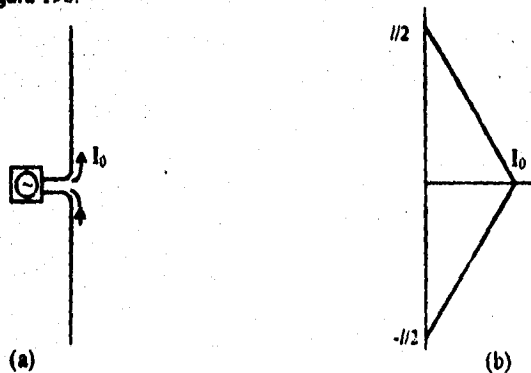


Figura 19 (a) Antena corta alimentada por un oscilador.
(b) Diagrama de intensidad vs. longitud de la antena.

Para encontrar la radiación total considérese la antena de la figura 19 como constituida por muchas secciones, cada una tan pequeña que la corriente es substancialmente constante en su

longitud. Se quiere encontrar el campo de radiación en un punto que está a algunas longitudes de onda de la antena y, por lo tanto, a muchas veces la longitud de la antena. Cada trozo contribuye al campo eléctrico en ese punto, según la ecuación 2.53.

$$E_{\theta} = \eta \frac{I_0 L \sin \theta}{2r\lambda} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \quad (3.48)$$

La intensidad de campo total en el punto de observación es simplemente una suma de las amplitudes recibidas de cada trozo de la antena. El único factor en la ecuación (3.48) que varía apreciablemente de un punto a otro de la antena es la intensidad I_0 . Cada componente de radiación es directamente proporcional a la intensidad de corriente en el trozo de donde proviene. Por lo tanto, la radiación recibida de un trozo cercano a los extremos de la antena de la figura 19 es mucho menor que la radiación de una sección de igual longitud cerca del centro. Teniendo en cuenta la distribución de la corriente, la radiación total recibida en cualquier punto, proveniente de la antena de la figura 19, es igual a la radiación que se obtendría de una antena de media longitud si fuera posible tener en toda su longitud una intensidad igual a la intensidad I_0 en su centro.

Se dice que una antena tal, como la de la figura 19 (aislada, recta y pequeña comparada con λ), tiene una longitud equivalente de la mitad de su longitud real. Para calcular la radiación de la antena que interesa se usa la ecuación 3.48, pero el valor que se sustituye en l_{ef} es la *longitud efectiva* o *equivalente*, igual a la mitad de la longitud real.

En la práctica, la cantidad deseada es el valor medio cuadrático o el valor efectivo del campo en la antena receptora. Esto se puede escribir en función de la longitud efectiva y de la corriente efectiva o raíz del promedio cuadrático en el punto medio de la antena, I_0 , de la siguiente manera:

$$\text{Intensidad efectiva en volts por metro (rms)} = \eta \frac{I_0 l_{ef}}{2r\lambda} \sin \theta \quad (3.49)$$

η para el vacío es 377 ohms.

I_0 es la corriente efectiva en el punto medio (rms).

L es la longitud en metros de la antena recta y aislada.

l_{ef} es la longitud efectiva en metros (si $L \ll \lambda$, $l_{ef} = \frac{1}{2} L$).

θ es el ángulo entre la antena transmisora y la antena receptora.

r es la distancia de la antena receptora a la transmisora, en metros.

λ es la longitud de onda de la señal en metros.

3.5.2 Antenas de semilongitud de onda.

Cuando la longitud de onda de la antena es considerable, comparada con la longitud de onda de la señal, el tratamiento, como si fuera una antena corta, es inexacto. Son necesarias dos correcciones.

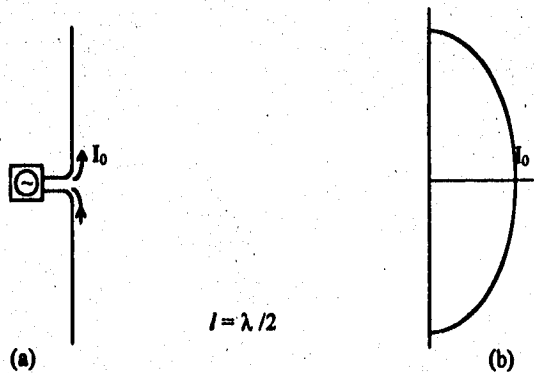


Figura 20 (a) Antena de semilongitud de onda. (b) Gráfica de distribución de corriente de la antena misma antena.

Primero, si la longitud de la antena es comparable a la longitud de onda, la intensidad en la antena no va a ser proporcional a la distancia al extremo. Una antena actúa como una línea de transmisión de circuito abierto con capacitancia distribuida; si es pequeña, la distribución de corriente es fundamentalmente lineal, como en la figura 19, pero si la antena es más larga, esta aproximación no es satisfactoria. Suponiendo que la capacitancia esté uniformemente distribuida en la antena (una hipótesis que no es precisa, pero suficientemente buena y generalmente aceptada), la corriente es proporcional al seno de la distancia al extremo de la antena. Como ejemplo, la figura 20 muestra la distribución de corriente en una línea que tiene una longitud igual a la semilongitud de onda; suponiendo que la intensidad en el medio de la antena es I_0 , la amplitud de la corriente I a una distancia z del centro de la antena es:

$$I = I_0 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) = I_0 \cos(\kappa z) \quad (3.50)$$

Una antena receptora a alguna distancia recibe una componente de la señal de cada sección pequeña de la antena de la figura 2.5, y la intensidad de cada componente es proporcional al valor de I en el trozo correspondiente de la antena.

Resulta una complicación por el hecho de que las diferentes componentes pueden no estar en fase entre sí cuando llegan a la antena receptora. Considérese que la antena receptora esté en un punto p de la figura 21. La distancia r_e es menor que r , de modo que la radiación que se propaga a lo largo de r tiene un cierto retardo al llegar a p con respecto a la radiación que se propaga por r_e .

Debemos introducir estas consideraciones en la ecuación 3.48. Un trozo de antena de longitud dz , ubicado a una distancia z del punto medio, tiene una amplitud de corriente dada por la ecuación 3.50.

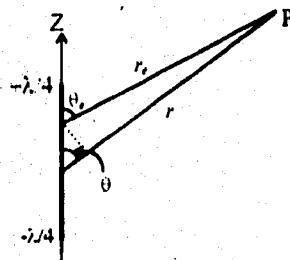


Figura 21. Antena de semilongitud de onda y sistema de referencia.

La distancia de este trozo de antena al punto de observación p es r_e , como en la figura 21. El campo eléctrico total recibido en p , debido a la antena, se encuentra integrando la ecuación 2.48 a lo largo de la longitud de la antena, desde $z = -\lambda/4$ hasta $z = \lambda/4$

$$E_{\theta} = \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{\eta I_0 \sin \theta_e}{2r_e \lambda} \cos(kz) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r_e}{c}\right)\right) dz \quad (3.51)$$

Aquí, como en la figura 21, r_e es la distancia del elemento recorrido por la corriente al punto en el cual se mide la intensidad del campo; r es la distancia del origen de coordenadas al punto medio de la antena. Como el interés está en el campo eléctrico a distancias mayores que algunas longitudes de onda, la diferencia entre r y r_e que aparece en el denominador es despreciable. Pero en el término coseno la distinción entre r y r_e es esencial, pues es la diferencia que determina la relación de fase entre las radiaciones para distintos trozos de la antena; $r - r_e$ puede no ser despreciable con λ , aunque despreciable comparada con r . Es bastante satisfactorio sustituir en el denominador r_e por r , pero en la relación de fase es necesario usar una aproximación que no puede tener un error mayor que una pequeña fracción de longitud de onda. Refiriéndose nuevamente a la figura 21, vemos que una buena aproximación es

$$r_e = r - z \cos \theta \quad (3.52)$$

Finalmente, el ángulo θ no es apreciablemente distinto de θ_e . Con estos cambios

$$E_\theta = \frac{\eta I_0 \sin \theta}{2r\lambda} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos(\kappa z) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v} + \frac{z \cos \theta}{v}\right)\right) dz \quad (3.53)$$

El proceso de integración, aunque algo largo, es esencialmente simple. El resultado es

$$E_\theta = \frac{\eta I_0}{2\pi r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \quad (3.54)$$

Las otras componentes del campo eléctrico son, por supuesto, nulas, igual que para una antena corta.

El campo magnético es perpendicular al eléctrico (ya que lo es para cada trozo elemental de la antena), y la relación entre ambos es la impedancia intrínseca. Se obtiene:

$$H_\phi = \frac{I_0}{2\pi r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \quad (3.55)$$

Las otras componentes de campo magnético son nulas. En las ecuaciones 3.54 y 3.55 los símbolos y unidades son los mismos que en la ecuación 3.49, y H_ϕ se mide en amperes por metro.

Las ecuaciones 3.54 y 3.55 son válidas sólo para antenas cuya longitud es de una semilongitud de onda. El método usado para deducir estas ecuaciones se puede extender a antenas de cualquier longitud. En ese caso se usa una expresión más general que la 3.50 para la distribución de corriente. Sin embargo, desde el punto de vista teórico y del práctico, la antena de semionda es un ejemplo muy interesante de antena larga y es el único que será tratado en detalle.

Es interesante comparar la ecuación 3.54 para una antena dipolar de semionda con la ecuación 3.49 para una antena corta. El campo efectivo (raíz promedio cuadrático) en cualquier punto de un plano normal a la antena (para el cual $\theta = 90$ grados) es, para una antena dipolar de semionda, $\eta I_0 / 2\pi r$. Para una antena corta de longitud efectiva l_{ef} es $\eta I_0 l_{ef} / 2r\lambda$. Estas fórmulas dan el mismo resultado si $l_{ef} = \lambda/\pi$, y por esta razón se dice que la longitud efectiva de una antena dipolar de semionda es λ/π . Como la longitud actual de una antena es $\lambda/2$, la longitud efectiva es $2/\pi$ veces la longitud real.

Esto dice que la longitud efectiva de una antena de semionda es $2/\pi$, o sea 0.637 veces su longitud real, y sabemos que la longitud efectiva de una antena muy corta es 0.5 veces su longitud real. No se está, por lo tanto, muy equivocado en estimar la longitud efectiva de cualquier antena dipolar, de longitud más corta que una semionda, como igual a cinco o seis décimas de la longitud real.

3.5.3 Diagrama polar de radiación.

La longitud efectiva da una idea de la intensidad del campo sólo en la dirección normal. Para comparar la distribución de radiación de un dipolo de semionda con la de una antena corta en otras direcciones, es útil el "diagrama polar de radiación", en él se trazan vectores radialmente a partir de un punto (véase figura 22), siendo la longitud de cada vector proporcional a la intensidad del campo a una distancia dada de la antena en la dirección indicada por el vector. La curva que une los extremos de los vectores es un diagrama polar de radiación. Frecuentemente se representa la intensidad del campo en microvolts por metro de distancia a una distancia de una milla.

La radiación normal a la antena es igual en todas direcciones, ya se trate de una antena corta o de un dipolo de semionda. El modelo de radiación en un plano normal es, por lo tanto, un círculo, como en la figura 22a.

El modelo de radiación para una antena corta en un plano que contiene a la antena se representa por la línea gruesa de la figura 22b. El máximo de radiación es normal a la antena, y la radiación en la dirección del eje de la antena es cero. La radiación en otras direcciones es proporcional al seno del ángulo que hace con el eje, como en la ecuación 2.49. De modo que el diagrama se compone de un par de círculos como los que se indican en la figura.

A veces es útil suponer que las figuras 22a y 22b sean secciones transversales de una superficie sólida semejante a un toro. Una superficie tal es el modelo de radiación completo tridimensional.

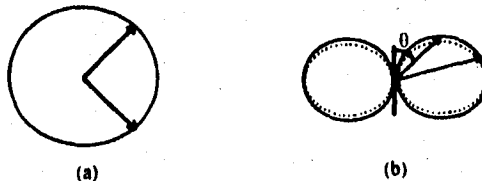


Figura 22. Diagrama de antena de semilongitud de onda de campo (a) magnético y (b) eléctrico. La antena se encuentra en medio de cada figura.

El modelo de radiación de una antena dipolar es sorprendentemente parecido. La función trigonométrica peculiar que aparece en el numerador de la ecuación 3.54 es numéricamente similar al $\sin^2\theta$; esta función, dividida por $\sin\theta$, no es, por lo tanto, muy diferente de $\sin\theta$, que es el término correspondiente a la ecuación 3.48. El modelo de radiación de una antena dipolo de semionda se muestra en la figura 22 por una línea punteada, ajustando la escala de tal manera que la radiación normal a la antena sea igual a la radiación normal de la antena corta.

Puesto que el modelo de radiación del dipolo de semionda está dentro del de la antena corta, se deduce que para tener la misma intensidad de campo en la dirección normal a la antena es necesario emitir menos energía que la antena dipolar de semionda que con una antena corta. Es interesante, a veces, trazar los diagramas suponiendo igual energía emitida, más bien que igual intensidad normal. La emisión normal de una antena de semionda es alrededor del seis por ciento mayor que la de una antena corta que emita igual potencia. Así se obtiene cierto grado de directividad.

3.5.4 Potencia emitida.

Es a menudo de interés saber la potencia total emitida por una antena. Hay varias maneras de calcular la potencia emitida, pero todas implican el vector de Poynting. Como un ejemplo básico y sencillo, se calculará la potencia de la antena corta de la ecuación 3.48.

La energía es emitida por la antena por medio del campo de radiación, y no por medio del campo de inducción. Considerando sólo la componente de radiación, el vector de Poynting es radial, y como está en la dirección de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, está dirigido hacia afuera. La energía total llevada por la onda progresiva de radiación se encuentra integrando el vector de Poynting sobre una superficie esférica, esta integración, por medio de 3.48 y 2.58, da:

$$P = \int (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\mathbf{a} = \int E_{\theta} H_{\phi} da$$

$$P = \int \eta \left[\frac{I_0 L \sin \theta}{2r\lambda} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \right]^2 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

$$P = \frac{\eta \pi I_0^2 L^2 \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)}{2\lambda^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$P = \frac{2\eta\pi I_0^2 L^2}{3\lambda^2} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \quad (3.56)$$

El vector de Poynting es una función del tiempo que varía como el cuadrado del coseno. En muchos casos se necesita la potencia media de la onda emitida y, como el valor medio del coseno al cuadrado es 1/2, se deduce que la potencia media emitida por una antena corta con distribución uniforme de corriente es:

$$\text{Potencia media} = \frac{\eta\pi I_0^2 L^2}{3\lambda^2} \quad (3.57)$$

3.5.5 Resistencia de radiación.

La potencia media de radiación es un término que se define como la potencia media emitida dividida por el cuadrado del valor efectivo de la intensidad de corriente en la antena. En la ecuación 2.57 I es el valor máximo de la corriente; el cuadrado de la intensidad efectiva es $\frac{1}{2} I^2$, de modo que la resistencia de radiación de una antena corta es

$$R_{rad} = \frac{2\pi\eta L^2}{3\lambda^2} \quad (3.58)$$

esta fórmula se deduce para un dipolo teórico y se puede aplicar a una antena corta dipolar si se usa la longitud efectiva $L = l_{ef}$. Si introducimos el valor η para el vacío, la resistencia de radiación (en ohms) de una antena dipolar corta de longitud efectiva l_{ef} es:

$$R_{rad} = 789 \left(\frac{l_{ef}}{\lambda}\right)^2 \quad (3.59)$$

Esta fórmula no es, sin embargo, correcta para un dipolo de semionda, ni tampoco para cualquier antena con un diagrama de radiación apreciablemente distinto del de un dipolo, aún cuando se use la longitud equivalente.

Para encontrar la resistencia de radiación de un dipolo de semionda, o de cualquier otra antena, se sustituyen en la ecuación 2.97 las funciones apropiadas para \vec{E} y \vec{H} . Para la antena dipolar de semionda se podrían usar \vec{E} y \vec{H} de las ecuaciones 3.54 y 3.55. El resultado es

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

sencillo, aunque los cálculos son algo complicados, la resistencia de radiación de una antena bipolar de semionda, para cualquier frecuencia, es 73.1 ohms.

3.5.6 Dipolo eléctrico.

Dos cargas iguales y de signo contrario Q y $-Q$, a una distancia de separación s , constituyen el llamado *dipolo eléctrico* (11). Es útil para el estudio definir el *momento dipolar* \bar{p} como el vector en la dirección $-Q$ a Q y cuya expresión analítica es $\bar{p} = Q\bar{s}$; ver figura 23. Supóngase además que las cargas no están fijas, sino que oscilan en forma armónica en su separación, de modo que tienen una separación máxima en la distancia s , luego se van juntando las cargas y por tanto disminuye el momento dipolar hasta llegar a cero y finalmente cambiar de lado las cargas y en consecuencia, se invierte la dirección del momento dipolar. De modo más formal puede describirse la carga como

$$Q = Q_0 e^{j\omega t} \quad (3.60)$$

entonces, el momento dipolar es

$$\bar{p} = Q_0 e^{j\omega t} \bar{s} = \bar{p}_0 e^{j\omega t} \quad (3.61)$$

donde el momento dipolar máximo es

$$\bar{p}_0 = Q_0 \bar{s} \quad (3.62)$$

Una forma de hacer un dipolo eléctrico es situar las cargas en un par de esferas unidas por un cable delgado de resistencia y capacidad despreciables. La corriente que fluye a través del cable es

$$I = \frac{dQ}{dt} = j\omega Q_0 e^{j\omega t} = I_0 e^{j\omega t} \quad (3.63)$$

donde

$$I_0 = j\omega Q_0 \quad (3.64)$$

que en términos del momento dipolar, al multiplicar 3.64 por s se tiene

$$I_0 s = j\omega p_0 \quad (3.65)$$

$$I_s = j\omega p \tag{3.66}$$

en la figura 23b se puede observar gráficamente a las cargas y la corriente como función del tiempo

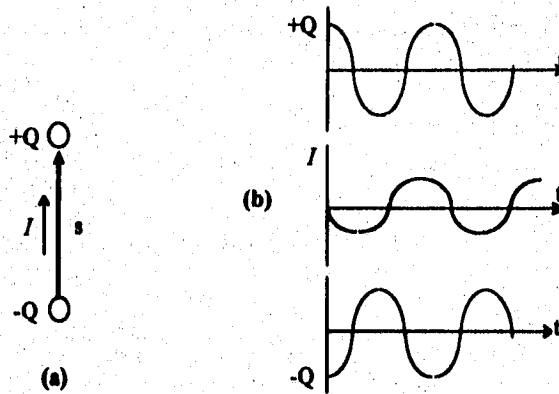


Figura 23. (a) Dipolo eléctrico oscilante y (b) cargas y corriente como función del tiempo

El potencial eléctrico producido por las cargas en el punto P del espacio es

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{j\omega(t-r_b/v)}}{r_b} - \frac{e^{j\omega(t-r_s/v)}}{r_s} \right] \tag{3.67}$$

Por comodidad se expresa el potencial en P en sus coordenadas naturales debido a la simetría que tiene el problema. Estas son las esféricas, de modo que $P(r, \theta, \varphi)$ a un tiempo t . Ver figura 24.

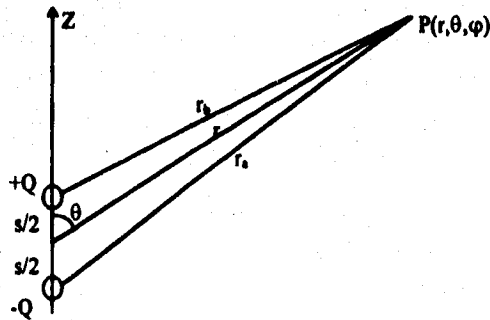


Figura 24. Potencial eléctrico en P de un dipolo eléctrico oscilante.

Nótese que las cargas $-Q$ y Q proporcionan un potencial eléctrico que difiere no sólo en amplitud sino también en fase. Las amplitudes difieren por los términos r_a y r_b en los denominadores y las fases difieren por los términos r_a/v y r_b/v de los exponenciales.

Puede encontrarse una expresión más conveniente para el potencial eléctrico, válida para distancias mucho mayores a la separación entre las cargas, esto es $r \gg s$, como sigue

$$r_a \approx r + \frac{s}{2} \cos \theta \quad (3.68)$$

$$\text{y} \quad r_b \approx r - \frac{s}{2} \cos \theta \quad (3.69)$$

al sustituir estas dos expresiones en 3.67 se obtiene

$$V \approx \frac{Q_0 e^{j\omega(t-r/v)}}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{e^{j\kappa \frac{s}{2} \cos \theta}}{1 - \frac{s}{2r} \cos \theta} - \frac{e^{-j\kappa \frac{s}{2} \cos \theta}}{1 + \frac{s}{2r} \cos \theta} \right] \quad (3.70)$$

Expandiendo los exponenciales y los denominadores de los dos términos en series de potencias, y despreciando términos de tercer orden y mayores en s/r y κs la ecuación 3.70 queda como

$$V \approx \frac{p_0 e^{j\omega(t-r/v)}}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} + j\kappa \right) \cos \theta \quad (3.71)$$

Cabe hacer notar que al haber tomado $s \ll r$ y $\kappa s \ll 1$, se hizo una aproximación de campo lejano.

Para una frecuencia distinta de cero, el término exponencial muestra que el potencial se propaga con una velocidad de fase v . Esto es falso debido al factor complejo $1/r + j\kappa$. Así que reescribiendo el factor complejo en forma exponencial se tiene

$$V = \frac{p_0 \kappa}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{\kappa^2 r^2} + 1 \right)^{1/2} \exp \left[j\omega \left(t - \frac{r}{v} + \frac{1}{\omega} \arctan(\kappa r) \right) \right] \cos \theta \quad (3.72)$$

para $\kappa r \gg 1$ (campo lejano), el $\arctan(\kappa r) \approx \pi/2$ es aproximadamente independiente de r y la velocidad de fase es entonces v . Pero cerca del dipolo, donde r no es mucho mayor a λ (campo cercano), el $\arctan(\kappa r)$ no es constante y en consecuencia, el efecto de este término da una velocidad de fase que es mayor que v .

Es importante notar que el caso del dipolo estático se da en $\omega = 0$ y entonces $\lambda \rightarrow \infty$, al sustituirlo en 3.71 queda como

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \quad (3.73)$$

En esta ecuación se observa que el potencial del dipolo estático varía inversamente al cuadrado de la distancia, mientras el potencial debido una carga puntual varía sólo inversamente a la distancia. Esto proviene del hecho de que las cargas del dipolo aparecen muy cercanas para un observador situado a una distancia lejana, y sus campos se cancelan más y más mientras se incrementa la distancia. Tanto para el caso del dipolo oscilante, como para el estático, los potenciales varían con el $\cos\theta$ que, por lo tanto, se anula en el plano ecuatorial. En la figura 25a se muestra un dipolo situado en el origen y su sistema coordenado; en la figura 25b se muestra un esquema radial del potencial como función de θ y ϕ (15).

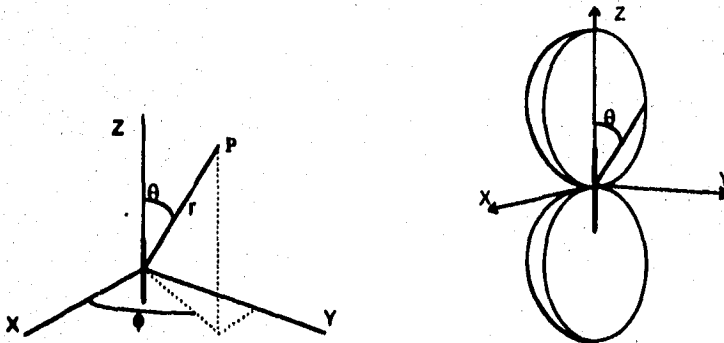


Figura 25. (a) Sistema coordenado de un dipolo y (b) diagrama radial del potencial.

Una vez hechas algunas observaciones del dipolo eléctrico oscilante y estático, se analizará la potencia de emisión del dipolo y la antena de media longitud de onda; en realidad son pocas las diferencias entre una y la otra debido a que el haz de potencia media para el dipolo es de 78° y el de la antena es de 90° y la diferencia más importante entre ambos es por la resistencia de radiación de la antena dipolar que es de 73.13Ω , el cual es un valor mayor a lo que se desearía para una antena de estructura práctica. Mientras que para el dipolo la resistencia de radiación se da por

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{S}{\lambda}\right)^2 \text{ ohms} \quad (3.74)$$

Por presentar un ejemplo numérico, imagínese un valor de $s = 1$ m y una longitud de onda de 300 m, que corresponde a una frecuencia de 1 MHz. La resistencia de radiación da con estos valores un resultado de 0.0084Ω el cual es un valor mucho menor a los 73.13Ω de la antena de media longitud de onda. Sin embargo, tampoco el dipolo es una buena antena debido a que tiene una alta reactancia y una muy pobre eficiencia, lo cual se traduce en una baja ganancia (14).

3.6 Analogías entre el potencial eléctrico y la presión acústica.

Se han estudiado en los capítulos 1 y 2 los fundamentos mecánicos y electromagnéticos necesarios para comprender a los radiadores acústicos y electromagnéticos. No se analizan todos los casos de radiadores ya que el interés del trabajo se centra en los radiadores de media longitud de onda y en encontrar sus analogías. En la presente sección se encuentran algunos puntos notables de las analogías entre ambos radiadores.

Como primer punto a discutir se ha de notar que, tanto el potencial eléctrico como la presión acústica son campos que cumplen con ecuaciones de ondas; para el primero se observa en la ecuación 2.19 y para el segundo en 3.31. También se ve en las mismas ecuaciones que la ecuación de onda para el potencial eléctrico es del tipo inhomogéneo y para la presión acústica es homogéneo. Además, para el caso del potencial eléctrico, el modelo empleado en el análisis de la radiación dipolar electromagnética tiene como base al dipolo eléctrico (estudiado en la sección 3.5.6); y para la antena dipolar acústica, se toma como base el llamado dipolo acústico. En ambos casos se tiene básicamente un par de fuentes emisoras puntuales separadas por una distancia, s , las fuentes para el dipolo eléctrico son dos cargas Q y $-Q$; y para el caso acústico dos fuentes a y b . Aquí hay que hacer una precisión, mientras en el caso eléctrico los responsables de la emisión son un par de cargas, para la antena de semilongitud de onda eléctrica, es necesaria una fuente de alimentación de corriente, misma que se da con un oscilador como se muestra en la figura 20 en la sección 3.5.2.

La antena propuesta en el trabajo es una varilla delgada y de ahí que se le haya dedicado el capítulo 1. También para el caso de la antena dipolar acústica es necesaria una fuente que provea la energía para la emisión de las fuentes, en la sección 3.4 se discute acerca de las formas de excitar mecánicamente a la varilla acústica. Las fuentes de emisión de la antena acústica son efectivamente un par de fuentes puntuales, esto se debe al modelo de varilla delgada que se asumió en el estudio; además, al provocar resonancia en la varilla se dan las condiciones óptimas de emisión mecánica, esto también se estudia en la sección 3.3.

Tanto para el caso eléctrico como para el acústico, al tener fuentes puntuales, se distingue una radiación esférica de cada fuente. Si se comparan las ecuaciones 3.42 y 3.67

$$p = A \left(\frac{e^{j\omega(t-r_b/v)}}{r_b} - \frac{e^{j\omega(t-r_a/v)}}{r_a} \right) \quad (3.42)$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^{j\omega(1-r_b/v)}}{r_b} - \frac{e^{j\omega(1-r_s/v)}}{r_s} \right) \quad (3.67)$$

se encuentra que ambas expresiones tienen exactamente la misma forma y difieren exclusivamente en las constantes, dichas expresiones son aún generales, las expresiones para campo lejano de ambos casos se dan en las ecuaciones 3.46 y 3.71 estas son

$$p = \frac{A}{r} e^{j\omega(1-r/v)} \left(\frac{1}{r} + j\kappa \right) \cos\theta \quad (3.46)$$

$$V \approx \frac{P_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{j\omega(1-r/v)} \left(\frac{1}{r} + j\kappa \right) \cos\theta \quad (3.71)$$

donde se observa nuevamente que las expresiones son idénticas en forma, excepto por las constantes. Para ambos casos se ve un anulamiento del campo en el plano ecuatorial, debido al término $\cos\theta$ y una variación inversamente proporcional a la distancia. En consecuencia los dos patrones de radiación deben ser en todo semejantes, si bien no iguales debido a las constantes. Los patrones de radiación del potencial y el acústico se ven en las figuras 25 y 17, respectivamente.

Una muy importante similitud que se da entre el caso eléctrico y el acústico es que para el caso estático, el campo eléctrico es el gradiente del potencial eléctrico, como se muestra en la ecuación 2.11. De igual manera para el caso acústico, el gradiente de la presión acústica tiene una equivalencia al campo eléctrico, la interpretación física del gradiente de presión es el sitio en el espacio donde se ocurre la máxima variación del campo de presión. Debido a la similitud entre el campo eléctrico y el gradiente de presión, es posible graficar el campo eléctrico de una antena de semilongitud de onda, este se ve en la figura 22b se ve un corte transversal del toro que hace el campo eléctrico y en la figura 26 se ve un esquema tridimensional del mismo, éste es equivalente en forma al campo derivado del gradiente de presión.

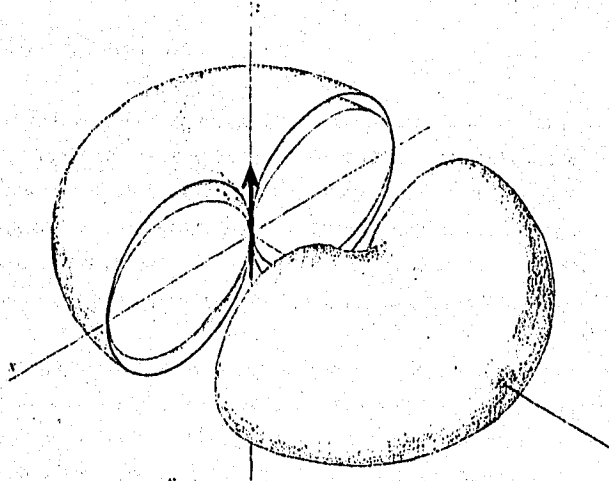


Figura 26. Diagrama de campo eléctrico de una antena de media longitud de onda, que es equivalente al gradiente de presión acústica en una antena dipolar acústica.

3.7 Longitud efectiva.

En el más general de los casos de antenas electromagnéticas debe hacerse una corrección por longitud efectiva, en particular también es así para las antenas de semilongitud de onda, esto sucede cuando la antena no tiene una distribución uniforme de corriente. De tenerse la distribución uniforme la longitud geométrica de la antena coincidirá con la longitud efectiva, una forma de hacerlo es cargar la antena con un sombrero de tipo capacitivo (10), éste produce el efecto de uniformizar la corriente, en este caso la longitud efectiva es la misma que la longitud física.

Esto sucede con las antenas electromagnéticas, pero surge la pregunta de si sucederá lo mismo para antenas acústicas como la que se está proponiendo, es decir, la varilla delgada; la respuesta es que sí sucede para la varilla delgada pero, la diferencia es tan pequeña que se antoja despreciable. Es necesario justificar más en este punto. En 1876 Pochhammer hizo estudios de deformación de cuerpos sólidos y encontró una corrección para la velocidad de fase c_p , respecto a la velocidad longitudinal c_L , la expresión analítica es la siguiente

$$c_p = c_L \left(1 - \frac{1}{4} \sigma^2 \kappa^2 r^2 \right) = c_L \left(1 - \sigma^2 \pi^2 \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \right) \quad (3.75)$$

aquí σ es la razón de Poisson, r el radio de la varilla, λ la longitud de onda y $\kappa = 2\pi/\lambda$ el número de onda. Nótese que la velocidad de fase decrece con el decremento de la longitud de onda y se anula cuando la longitud de onda es $\sigma\pi r$. La ecuación por tanto no es confiable para longitudes de onda menores al radio de la varilla (4).

Para ver la viabilidad de uso de 3.75 se puede hacer un ejemplo numérico, supóngase una varilla de aluminio de 1m de longitud y diámetro de 1 cm. Ésta es una *varilla delgada* pues sus dimensiones longitudinales son mucho mayores a las dimensiones de su sección transversal eficaz. Según $\kappa = 2\pi/\lambda$, al sustituirlo en 1.27 queda

$$\lambda_n = \frac{4L}{(2n-1)} \quad (3.76)$$

que para $n = 1$ da una longitud de onda de 4m. que con los datos anteriores para largo y radio de la varilla y como $\sigma = 0.33$ en aluminio, al sustituirlo en 3.75 da $c_p/c_L = 0.99998$, es decir, una corrección de $.679 \times 10^{-6}$. Al ser una corrección tan pequeña, es una muy buena aproximación tomar c_L y no c_p pues son prácticamente las mismas. Esto valida como buenos todos los cálculos hechos en el trabajo.

3.7 Longitud efectiva 88

Por lo tanto, existe la corrección de longitud efectiva tanto para el caso de antenas electromagnéticas como para las acústicas, en las primeras se debe a defectos en la uniformización de la corriente que circula, y para las segundas se debe a razones principalmente de naturaleza geométrica; que en el caso de varillas delgadas, la corrección es despreciable.

Conclusiones.

El objetivo del presente trabajo es obtener las analogías entre radiadores de media longitud de onda acústicos y electromagnéticos, para lo cual en el último capítulo se hizo el estudio de los dos radiadores y en la parte final del mismo, en 3.6 se obtuvieron las analogías entre el potencial eléctrico y la presión acústica, y en 3.7 se hizo una discusión acerca de la longitud efectiva en las antenas.

Como se menciona al final de la sección 3.5, las diferencias principales entre la antena de semilongitud de onda y el dipolo eléctrico son: primero, que en la antena de semionda tiene un ancho de haz de 90° y el dipolo de 78° ; y segundo, que la resistencia de radiación de la antena es de 73.13Ω mientras que en el dipolo cambia según la separación entre las cargas e inversamente a la longitud de onda. En el caso concreto de una separación de 1m y una longitud de onda de 300m, el valor de resistencia es de 0.0084Ω , que es un valor mucho más pequeño de resistencia comparado con el de la antena.

Una analogía notable es la similitud en las expresiones para el potencial eléctrico y la presión acústica, ambas expresiones analíticas tienen la misma forma excepto por diferentes constantes derivadas de cada análisis. Estas expresiones se dan en las ecuaciones 3.42 y 3.67 sin hacer aproximaciones (ver sección 3.6) y con aproximaciones de campo lejano las expresiones analíticas se dan en 3.46 y 3.71 (ver sección 3.6).

Otra analogía importante se da con el caso estático del campo eléctrico y el campo derivado de obtener el gradiente de presión acústica.

En la figura 17 se ve un diagrama de radiación de la presión acústica y en la figura 25 se ve un diagrama del potencial eléctrico. Ambos diagramas tienen la misma forma. También en la figura 26 se muestra un diagrama tridimensional del campo eléctrico, que por las razones anteriores es el mismo que para el campo derivado del gradiente de presión acústica.

Una analogía más entre las antenas electromagnéticas y las acústicas es que en ambas existe una corrección por longitud efectiva. En particular es necesaria para las antenas electromagnéticas de media longitud de onda. Aquí hay una diferencia (discutida en 3.7) para el caso de las antenas propuestas en el presente trabajo, que son varillas delgadas, en que no es necesario introducir ninguna corrección por longitud efectiva. Esto se debe a que en las antenas electromagnéticas el efecto de corrección viene ocasionado por una falta de uniformidad en la corriente de la antena, mientras que en el caso de las antenas acústicas se debe a factores de naturaleza geométrica como son la razón del radio de la varilla y la longitud de onda que viaja en la misma.

Una diferencia entre las antenas electromagnéticas y las antenas acústicas longitudinales, como se proponen en el presente trabajo, es en su uso como antenas captadoras. Para captar una señal en la forma más eficiente, las antenas electromagnéticas requieren una orientación transversal respecto a la dirección de propagación de la señal, de modo que el campo electromagnético queda absorbido por la antena en toda su longitud. En cambio en una antena acústica longitudinal, para captar la señal en una forma más eficiente, la antena debe estar orientada longitudinalmente respecto al campo de presión, esto es, la señal debe incidir en la parte más angosta de la antena.

Bibliografía.

1. "Physics of waves". William C. Elmore, Marck A. Heald. Dover Publications Inc., USA. 1948. 2nd. edition.
2. "Analytical acoustics". F.B. Stumpf. Ann Arber Science Publications Inc., USA. 1980.
3. "Fundamentos de acústica". Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, James V. Sanders. Limusa, México. 1992. 3a. Edición.
4. "Stress waves in solids". H Kolsky. Dover Publications Inc., USA. 1963.
5. "Física vol. I Mecánica". Marcelo Alonso, Edward J. Finn. Addison Wesley Iberoamericana, México. 1986.
6. "Vibration and sound". Philip M. Morse. McGraw Hill Book Co., USA. 1948. 2nd. edition.
7. "Mathematics in physics and engineering". J. Irving, N. Mullineux. Academic Press Inc., USA. 1966.
8. "Manual de fórmulas y tablas matemáticas". Murray R. Spiegel. McGraw Hill Book Co., USA. 1990.
9. "Física vol. II Campos y ondas". Marcelo Alonso, Edward J. Finn. Fondo Educativo Interamericano, S.A., México. 1983.
10. "Radiación propagación y antenas". María José Salmerón. Trillas, México. 1990. 2a. edición.
11. "Fundamentos de la teoría electromagnética". John R. Reitz, Frederick J. Mildford, Robert W. Christy. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., México. 1986. 3a. edición.
12. "Antennas". John D. Krauss. McGraw Hill Book Company. USA. 1950.
13. "Classical electrodynamics". John David Jackson. John Wiley & Sons, Inc. USA. 1975. 2nd. edition.
14. "Antennas and radiowave propagation". Robert E. Collin. McGraw Hill Book Company. USA. 1985.
15. "Electromagnetic fields and waves". Paul Lorrain, Dale Corson. W.H. Freeman and Company. USA. 1970. 2nd edition.

**FUE IMPRESO EN MEXICO
D.F.**

**POR "IMPRESIONES OAXACA"
PERU 102 ACC. 1, CASI ESQ. BRASIL
COL. CENTRO C.P. 06010**

**TELS. 526-47-00 y 526-88-19
FAX 526-43-57**