

01162

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Facultad de Ingeniería

**EFFECTOS DE ESCALA DEBIDOS A LA TENSION  
SUPERFICIAL EN LA MODELACION DE VORTICES**

PATRICIA ISABEL ROJAS REINA

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERIA**

( **HIDRAULICA** )

CIUDAD UNIVERSITARIA

1995

FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres, por darme la vida.*

*A mis hijos, Illyani y Jaime Eduardo, que son mi realización como madre.*

*A mi esposo, Jaime, por su infinito amor, su comprensión y el apoyo que me dio en todo momento para realizar esta nueva etapa de mi vida profesional.*

*A mi amigo y profesor, Gabriel Echávez, por compartir conmigo sus conocimientos.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco al Dr. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE, director de esta investigación, por el apoyo que me brindó durante el transcurso de la maestría y en especial por brindarme la oportunidad de introducirme en un tema tan fascinante.

A mis sinodales, por la revisión y comentarios a este trabajo.

Al Ingeniero VICTOR FRANCO, por su incondicional apoyo a través del Instituto de Ingeniería.

A la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, y en especial al personal del laboratorio de hidráulica por la ayuda en la realización de los experimentos.

A mis compañeros de la maestría que de una u otra forma contribuyeron para llevar a cabo esta investigación.

A mis amigos y familiares.

*PATRICIA*

## CONTENIDO:

	pag
INTRODUCCIÓN	1
<b>CAPITULO 1. ANTECEDENTES</b>	
1.1 Consideraciones generales	3
1.2 Modelo de Rankine	3
1.3 Clasificación de los vórtices	5
1.4 Modelación	7
1.4.1 Modelación de vórtices a superficie libre	9
1.5 Efectos de escala	12
1.5.1 Efectos de escala debidos a la tensión superficial	15
1.5.2 Efectos de escala debidos a la viscosidad	19
1.6 Concentración de vorticidad	20
<b>CAPITULO 2. EQUIPO EXPERIMENTAL</b>	22
<b>CAPITULO 3. MEDICIONES</b>	26
3.1. Mediciones en la zona irrotacional	27
3.2 Mediciones en la zona rotacional	31
<b>CAPITULO 4. PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS</b>	35
4.1 Clasificación de los vórtices según la circulación y el gasto de descarga en el fondo	35
4.2 Efecto de la tensión superficial en el perfil del vórtice a superficie libre	50
4.3 Concentración de vorticidad en el núcleo	58
<b>CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	63
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	

## INTRODUCCIÓN

Desde hace varias décadas los vórtices han sido tema de interés dentro de la mecánica de fluidos. Estos flujos, generan fenómenos tales como disminución del coeficiente de descarga, vibración en las bombas y turbinas, y cavitación, de gran importancia en la ingeniería hidráulica.

Para conocer la variación de los diferentes parámetros que influyen en un movimiento vorticoso, se han desarrollado teorías que han sido insuficientes, por la misma complejidad que éste presenta; de ahí la necesidad de estudiarlo en modelos a costos razonablemente bajos y tratar de resolver los problemas que se presentan en la práctica. Es aquí donde los efectos de escala, es decir, el que no todos los números adimensionales que intervienen se puedan reducir por el mismo factor, juegan un papel importante dependiendo del tipo de fuerzas a las que se les dé más peso: si a las gravitacionales, a las viscosas, o a las fuerzas de tensión superficial.

Generalmente, para escalar los vórtices a superficie libre se ha aceptado el criterio de modelar bajo la ley de similitud de Froude, y las fuerzas de tensión superficial así como las de viscosidad, se consideran secundarias.

En esta investigación se estudian principalmente tres aspectos presentes tanto en la formación y desarrollo del vórtice como en su modelación:

1 - La forma del perfil del vórtice en función de la intensidad de la circulación y del gasto de descarga en el fondo y se propone una clasificación de los vórtices basada en estas dos variables.

2 - El efecto de la tensión superficial en el perfil del vórtice.

3 - La distribución de la vorticidad en la zona cercana al núcleo y su concentración en un filamento que se prolonga hasta la descarga de fondo.

En el primer capítulo de este trabajo se describen los modelos teóricos y experimentales encontrados en la literatura, y las consideraciones generales que se tienen en cuenta al modelar cuando se presentan efectos de escala. El segundo y tercer capítulo describen respectivamente, el equipo experimental usado en esta investigación, así como los ensayos y las mediciones realizadas. El cuarto capítulo, el más importante de este trabajo, contiene tres partes que son: la primera, describe la clasificación de los diferentes tipos de vórtices que se pueden generar de acuerdo con la variación de la circulación y el gasto de descarga en el fondo, así como la influencia del gasto que sale por el núcleo de aire del vórtice; la segunda, presenta la aplicación de un modelo numérico al perfil del vórtice, que permite determinar la variación de las cargas de presión por efecto de la tensión superficial y su influencia en el número de Weber; y la tercera, describe la influencia de la concentración de la vorticidad en el centro para los diferentes tipos de vórtices generados. Finalmente, en el quinto capítulo, se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de este estudio.

## CAPITULO 1. ANTECEDENTES

### 1.1 Consideraciones generales

En la formación y desarrollo de vórtices a superficie libre, intervienen muchas variables. Algunas de ellas como la circulación, el gasto de descarga en el fondo y la penetración de aire en el núcleo del vórtice varían de acuerdo con las características del fluido, la turbulencia del flujo y la variación de la distribución de velocidades a través del vórtice, alterando el comportamiento del mismo tanto en el espacio como en el tiempo. Esto hace que el fenómeno sea objeto de investigaciones experimentales, y que aún no se haya podido establecer un modelo numérico que permita reproducir los vórtices con exactitud.

### 1.2 Modelo de Rankine

Para analizar el comportamiento del vórtice, Rankine hace más de un siglo (1858), idealizó el fenómeno determinando dos zonas claras de flujo. Supuso que una porción central relativamente pequeña del vórtice, limitada por un radio finito  $a$ , gira como un cuerpo sólido -zona denominada vórtice forzado-, en el cual predominan las fuerzas viscosas, la vorticidad  $\omega$ , es constante y la velocidad tangencial varía linealmente con el radio; y otra zona en la que la viscosidad no tiene influencia, -zona denominada vórtice libre-, donde la circulación es constante, la velocidad varía inversamente con el radio y directamente con la circulación. Es decir, para la zona rotacional o de vórtice forzado, se tiene que:

$$V_t = \omega a \quad (1)$$

$$\Gamma = \pi \omega a^2 \quad (2)$$

y para la zona irrotacional o de vórtice libre:

$$\Gamma = 2 \pi a V_t \quad (3)$$

$$\Gamma = 2 \pi a^2 \omega \quad (4)$$

donde

$\omega$  velocidad angular [ 1/T ]

$V_t$  velocidad tangencial [ L/T ]

$a$  distancia del eje del vórtice al punto de transición entre la zona rotacional e irrotacional [ L ] donde la velocidad tangencial es máxima afectada por la viscosidad del fluido.

Para  $r > a$ , la circulación es independiente del radio de la curva y se determina con variables que pueden ser medidas experimentalmente o calculadas analíticamente. Así, para un vórtice combinado de Rankine (figura 1.1), se obtienen las siguientes expresiones:

$$h_o = \frac{\Gamma^2}{4 \pi^2 a^2 g} = \frac{V_a^2}{g} \quad (5)$$

y

$$p_o = \frac{\rho \Gamma^2}{4 \pi^2 a^2} \quad (6)$$

donde

$h_o$  altura de penetración de aire en el vórtice [ L ]

$\Gamma$  circulación [ L<sup>2</sup>/T ]

$p_o$  presión en la punta del vórtice [ F/L<sup>2</sup> ]

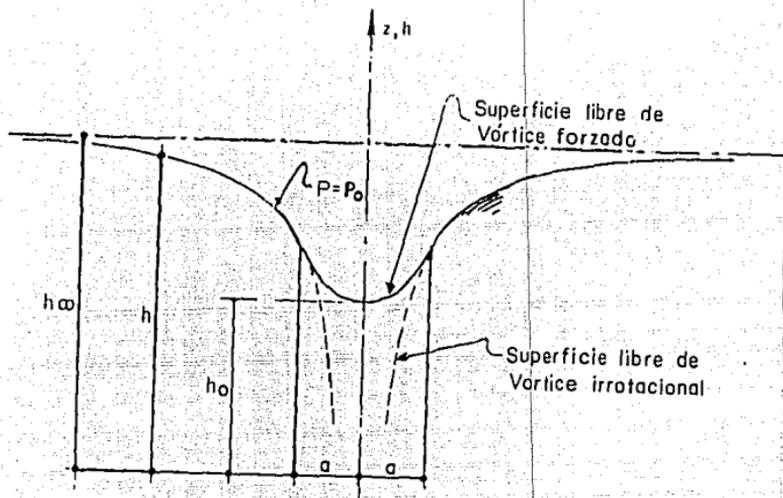


Figura 1.1 Diagrama del vórtice combinado de Rankine.

### 1.3 Clasificación de los vórtices

Durgin, Hecker (1970) y Dicmas (1978), todos miembros de la Alden Research Laboratory del Worcester Polytechnic Institute (WPI), presentan una clasificación de los vórtices a superficie libre. Esta clasificación está basada en técnicas netamente visuales de acuerdo con la forma de la superficie del vórtice, la penetración o núcleo de aire que se presente en un momento dado, y las mediciones que se realizan tienen que ver directa o indirectamente con la fuerza de los mismos vórtices. Aunque esta clasificación no es consistente con las mediciones cuantitativas obtenidas en los modelos, ha sido aceptada como una forma de identificar el fenómeno de acuerdo con su intensidad en el espacio y en el tiempo. En la tabla I se muestra esta clasificación.

**Tabla 1** Clasificación de los vórtices según la Alden Research Laboratory del Worcester Polytechnic Institute

TIPO DE VORTICE	DESCRIPCIÓN
1	Vórtice ligado a la superficie con una circulación muy baja.
2	Depresión de la superficie ligada al vórtice.
3	Núcleo de aire ligado a través de la columna de agua.
4	Vórtice con flotación de basura pero no de aire.
5	Vórtice con flotación de aire pero no de basura.
6	Núcleo completo de aire a la salida.

Anwar (1965) y McCann (1994), observaron que el gasto de salida tiene dos componentes: uno, radial, que viene de la capa límite en el fondo y el otro, vertical descendente, que llega del núcleo del vórtice. McCann comprobó que para valores no muy altos de circulación, el gasto que sale por el núcleo del vórtice controla la altura de sumergencia de éste, y por lo tanto la penetración parcial o total de aire en el núcleo. Cuando la circulación es muy fuerte y los dos gastos mencionados son máximos, el cuerpo del vórtice es robusto pero no existe penetración total de aire en la descarga.

En ensayos realizados por Echávez (1992), quien propuso separar el gasto de fondo y el gasto que viene del núcleo del vórtice, pudo observar dos tipos de vórtices, dependiendo de si el efecto dominante es la circulación o la descarga del fondo. Encontró que si la circulación domina, entonces la boca del vórtice es

abierta, el cuerpo de éste es robusto y la punta tiene la forma de un chupón. Para vórtices inducidos por la descarga de fondo y con circulación débil, la boca es estilizada, el cuerpo es más fino, formandose, a veces en éste, una serie de ondulaciones que algunos autores denominan ondas inerciales. La combinación de un vórtice robusto, cuando domina la circulación, y un vórtice esbelto donde domina la descarga, genera un tipo de vórtice de circulación media en el cual el perfil se aproxima más a los vórtices que se presentan en la realidad.

#### 1.4 Modelación

El objetivo principal de modelar, consiste en establecer criterios de semejanza que permitan relacionar características similares entre el modelo y el prototipo, cuando se rigen por las mismas ecuaciones, y que los efectos de escala sean lo más pequeños posibles.

Existen dos formas diferentes de encontrar las condiciones de similitud entre el modelo y el prototipo: La primera, es un análisis de las ecuaciones que rigen el fenómeno, lo cual da como resultado un modelo matemático. La segunda, es establecer un criterio de semejanza entre el modelo y el prototipo. En la práctica, para modelar cualquier tipo de sistema, es imposible tener semejanza dinámica en el sentido estricto de la palabra, y es entonces cuando se debe estudiar cada caso en particular para poder escalar sólo las fuerzas y efectos más importantes de acuerdo con el problema que se quiera investigar, para poderlo reproducir en el modelo.

La ASCE (1982), al presentar los términos y los factores que se involucran para modelar estructuras hidráulicas, define el efecto de escala, como una consecuencia de que no existe similitud entre el modelo y el prototipo debido a que el factor de reducción para todos los números adimensionales no es el mismo en el modelo y en el prototipo, y hace una distinción entre un modelo "perfecto" y un modelo "real". En el modelo "perfecto", todos los números adimensionales son los mismos en el modelo y en el prototipo, mientras que el modelo real se presenta, cuando la densidad y la viscosidad no están correctamente escaladas, y desde luego, algunos parámetros adimensionales presentan diferencias. Novak

(1984), refiriéndose a la definición anterior dice que esto implica un "efecto" o "error" que se introduce por no escalar algunas fuerzas menos importantes que la dominante. Por otra parte, Naudasher (1984), presenta una descripción de los factores que influyen en la determinación de un efecto de escala, teniendo en cuenta la influencia de todas las fuerzas que intervienen al considerar el movimiento de un fluido. Se describen brevemente a continuación:

1. Por geometría: La selección apropiada del tamaño del modelo por falta de espacio, y por economía, hace que se tienda a construir modelos a escalas muy pequeñas o modelos muy distorsionados.
2. Por aproximación del flujo: La distribución de la velocidad media, la dirección de la misma y la turbulencia, son importantes y dependen de factores como la aproximación del flujo, la rugosidad de las paredes y la magnitud del número de Reynolds.
3. Por gravedad: Esta característica es esencial para escalar un modelo ya que la mayoría de los movimientos se rigen bajo la ley de Froude.
4. Por viscosidad: Los efectos de escala más comunes son debido a esta fuerza puesto que influye en las pérdidas por energía y controla en general la turbulencia del fluido.
5. Por tensión superficial: Cuando el número de Weber de un flujo que se relaciona con una superficie libre, llega a ser más pequeño que un valor crítico puede afectar las condiciones en el modelo.
6. Por aireación y cavitación: El desarrollo de las líneas de corriente en contacto con la superficie libre puede ser afectado por el fenómeno de aireación y a su vez puede producir cavitación.
7. Por inestabilidad y vibración en las estructuras: Este efecto, en el caso de los vórtices es muy importante, sobre todo cuando se forman al pie de una estructura estacionaria - una compuerta por ejemplo-, ya que las fuerzas que actúan sobre la estructura pueden variar de acuerdo a la frecuencia con que cambia el vórtice en el tiempo.

#### 1.4.1 Modelación de vórtices a superficie libre.

Diferentes investigadores han planteado ecuaciones que describen los vórtices en términos de los números adimensionales que dominan el flujo, tal es el caso de Daguet y Keulegan (1974), quienes realizaron experimentos con diferentes fluidos para determinar los parámetros más significativos que relacionen el prototipo con el modelo en la formación del vórtice a superficie libre. Una vez hecho el análisis dimensional los autores obtuvieron la siguiente relación:

$$\frac{\eta}{H} = f \left[ \frac{r}{A}, \frac{R}{A}, \frac{H}{A}, F, R, W, N_r \right] \quad (7)$$

donde

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{2gH}} \quad (8)$$

$$R = \frac{Q}{Av} \quad (9)$$

$$W = \frac{Q}{2\pi A} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma A}} \quad (10)$$

$$N_r = \frac{\Gamma A}{Q} \quad (11)$$

y las variables son definidas a continuación

R radio del tanque [ L ]

A radio del orificio [ L ]

H profundidad el fluido en el tanque [ L ]

- $U_0$  velocidad radial inicial =  $Q/2\pi RH$  [ L/T ]  
 $Q$  gasto de descarga [ L<sup>3</sup>/T ]  
 $\Gamma$  circulación inicial constante [ L<sup>2</sup>/T ]  
 $\nu$  viscosidad cinemática del fluido usado [ L<sup>2</sup>/T ]  
 $\rho$  densidad del fluido [ M/L<sup>3</sup> ]  
 $\sigma$  tensión superficial del fluido [ F/L ]  
 $g$  aceleración debida a la gravedad [ L/T<sup>2</sup> ]  
 $\eta$  profundidad del fluido a una distancia  $r$  del centro del tanque [ L ]  
 $t$  espesor del tanque en el fondo [ L ]  
 $H' = H + t$  [ L ]

ver figura 1.2.

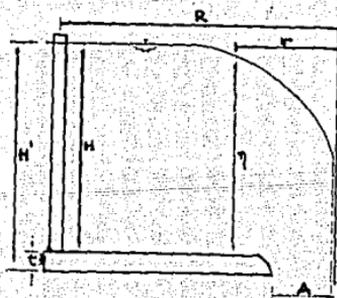


Figura 1.2 Definición de variables geométricas en un vórtice a superficie libre para un tanque circular, según Daguet, et al (1974).

Este análisis es cuestionado por Jain, et al (1975), sobre todo al definir el número de Froude, y sugiere que éste debe ser igual a  $Q/A^2\sqrt{gh}$ , puesto que  $U_0$  ha sido considerada una variable independiente y esto no es cierto, sobre todo cuando se varían los gastos de descarga. Aunque la expresión 7 puede ser tomada como parámetro de referencia, para obtener relaciones de escala en sistemas análogos de modelo y prototipo, puede variar ligeramente dependiendo de qué variable se quiera que sea la independiente. Las expresiones  $R/A$  y  $H/A$ , son relaciones que generalmente no presentan dificultad. Si la relación de escala de la circulación depende de la localización de las fronteras rígidas, entonces ésta puede tener valores tanto en modelo como en prototipo condicionados al número de Froude, y la mayor dificultad se presenta en la relación del número de Reynolds y el número de Weber, puesto que hay que considerar las características de aproximación del flujo al modelo y la presencia de superficie libre. Si se quiere que  $H$  o  $Q$  sean las variables dependientes entonces se puede cambiar  $A$  por  $H$  en los números adimensionales. En forma general, en los experimentos realizados en un tanque cilíndrico, se puede variar independientemente  $\Gamma$ ,  $Q$  y  $H$ , y las características del vórtice pueden ser expresadas de acuerdo con la longitud de éste de la siguiente forma:

$$\eta = f(H, A, r, \rho, \mu, \sigma, g, Q, \Gamma) \quad (12)$$

Como se anotó anteriormente, el gasto que viene de la capa límite en el fondo y el que sale del núcleo del vórtice conforman el gasto total en la salida y, aunque están muy relacionados entre sí, permiten suponer que el definir el número de Froude, el número de Reynolds y de Weber utilizando el gasto total de descarga, el diámetro del orificio de salida y la altura total del agua en el tanque experimentador, no es lo apropiado para analizar el centro del vórtice y que estos parámetros adimensionales podrían ser determinados, por el gasto que sale por el centro del vórtice y el radio que forma el tubo vorticoso en la vecindad del núcleo de éste.

## 1.5 Efectos de escala

Cuando se habla de efectos de escala algunos autores se refieren explícita o implícitamente a las fuerzas dominantes [Allen (1947) y Sharp (1981)]. Sin embargo, se debe tener cuidado que no todas las fuerzas pueden ser representadas fácilmente, y es cuando se debe analizar, bajo qué leyes más comunes es fácil modelar para que estas fuerzas sean significativas. Aquí influye la experiencia del ingeniero, para definir exactamente los criterios de modelación que le permitan representar correctamente lo que busca.

En el caso de los vórtices a superficie libre, Hecker (1984), Chang, et al (1986), y Ranga Raju y Garde (1986), entre otros, realizaron un análisis de las diversas formas que se han adoptado para modelar los vórtices y superar los efectos de escala que se presentan los cuales se describen brevemente a continuación:

a- Leyes de Froude: Hecker (1981), sugiere que para modelar bajo las leyes de Froude, el número de Reynolds debe ser mayor que  $3 \times 10^4$ , de tal forma que ni los efectos de la viscosidad ni los de tensión superficial sean significativos. Por encima de estos valores, si la geometría propuesta es modelada correctamente entonces los valores de circulación pueden ser reproducidos de una forma muy similar en el modelo y el prototipo. Anwar (1965), sugirió una relación de escala no menor de 1 a 20 y un  $R_R > 3 \times 10^3$ , definido el  $R_R = Q/vh$  (h es la altura de sumergencia del vórtice), para el cual la influencia de las fuerzas viscosas son despreciables.

M.C. Quick (1961), encontró que bajo las leyes de Froude, se producen vórtices muy similares excepto muy cerca al núcleo de aire, y que tanto la viscosidad como la tensión superficial, en el caso de modelos muy pequeños, ocasionan efectos de escala que alteran el comportamiento del modelo. McCorquodale (1968), realizó experimentos en tres modelos geoméricamente similares para estudiar el efecto de escala en vórtices estables con núcleos de aire de penetración completa. Para apreciar el efecto de escala en la descarga, las alturas en todos los modelos fueron cinco veces el tamaño del diámetro del orificio y observó que si se conserva el número de Froude en los modelos, entonces para una relación H/D dada, el cociente del radio del núcleo de aire

observado  $a_0$ , con respecto al radio del orificio de salida,  $r_0$ , podría ser el mismo para todos los modelos. Así mismo determinó un efecto de escala general y un efecto de escala local, -este último asociado a la región del núcleo de aire- el cual depende del chorro de salida, es decir, a la variación de  $a_0/r_0$  y al número de Reynolds. McCorquodale sugiere que pueden presentarse efectos de escala locales y generales en modelos de menor o igual tamaño que el modelo más pequeño usado por él en sus experimentos, (D del orificio de salida = 2 plg) y que se puede obtener similitud en la formación del flujo vorticoso utilizando dimensiones intermedias para diámetros de salida entre 2 y 4 plg.

b- Factor de corrección: Para tener en cuenta los efectos viscosos, se determina un factor de corrección, el cual es aplicado a cada uno de las velocidades del modelo, lo que da como resultado una distorsión cuando éste es operado bajo el criterio de Froude. El factor de corrección fue sugerido por Jain, et al (1978), en el cual propone que este factor puede ser igual a uno, cuando se cumple que  $N_v = R/F > 5 \times 10^4$ . Sin embargo, los autores asumen que los patrones de aproximación del flujo son independientes de la profundidad del agua lo cual altera las condiciones de similitud, además de que sus estudios no contemplan sino dos diámetros diferentes de salida limitando los resultados de sus experimentos a estos valores.

c- Variación de temperaturas: Al incrementar la temperatura del agua en el modelo, se pretende limitar los rangos de operación del número de Reynolds en el prototipo. Esto fue propuesto por Durgin y Hecker (1978), pero al aplicar el método se producen velocidades excesivas que distorsionan los patrones del flujo en el modelo.

d- Criterio de igual velocidad: Desarrollado por Denny (1956) y Denny y Young (1957). Los autores utilizaron un modelo geoméricamente similar y usaron una misma velocidad en el prototipo. Para los rangos en los cuales desarrollaron el ensayo los resultados fueron satisfactorios, es decir, para salidas de hasta 0.91m de diámetro y escalas mayores de 1/16. Kenn y Zenker (1967), para justificar el criterio de Denny trataron de interpretar el concepto de igual velocidad, en el cual las fuerzas de tensión superficial y de viscosidad son las que predominan, como una igualdad entre el cociente del cuadrado del número de

Weber y el número de Reynolds considerando la misma velocidad, es decir  $v/\sigma$ . Esto no tiene sentido puesto que no se puede olvidar que las fuerzas de inercia son esenciales para el desarrollo del vórtice.

Finalmente Hecker (1984), hace una evaluación de los efectos de escala aplicando los criterios mencionados anteriormente y los resume en la figura 1.3. Los puntos A, B y C representan tres modelos ensayados a una escala de Froude dada. Los puntos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  representan el incremento de la velocidad en las condiciones ensayadas manteniendo una relación de escala constante entre la altura de sumergencia y el tamaño de la salida ( $h_{\infty}/d$ ). El punto  $a_4$  representa la condición que sugieren algunos autores de mantener la misma velocidad de salida en el modelo y en el prototipo. El movimiento de los puntos de  $a_1$  a  $b_1$  o de  $a_1$  a  $c_1$  representan el incremento de la temperatura del agua para disminuir la tensión superficial o la adición de químicos para disminuir la viscosidad del agua que produce el mismo efecto. Para completar la evaluación de los efectos de escala, el modelo puede ser operado a valores menores de Froude que los escalados indicados por los puntos  $a_0$ ,  $b_0$  y  $c_0$ . Esto es, si un modelo opera bajo las condiciones descritas anteriormente, además de que dependiendo del tipo de vórtice, se mantenga la sumergencia crítica un cierto porcentaje de tiempo, se podría proponer un vórtice tipo representado por una línea en la figura 1.3. Sin embargo, si el diámetro de salida cambia -por ejemplo disminuye-, la velocidad de salida aumenta, cambiando por lo tanto la altura de penetración de aire en el vórtice afectando un parámetro geométrico. Si por el contrario, se alteran los patrones de aproximación del flujo asociados con la circulación, entonces el criterio de similitud regido por la ley de Froude no se satisface; y por último, al aumentar la turbulencia del flujo se afecta la forma como se desarrolla el vórtice. Por todo esto, el vórtice tipo no cumple las relaciones propuestas y no podría usarse para modelar.

De lo anterior, se puede decir que aún no existe una ley apropiada para escalar los vórtices y que la forma de modelarlos en su totalidad son objeto de investigación. Esto lo confirma Hecker (1984), quien dice: "Dada la variabilidad de situaciones para las cuales ocurren los vórtices, no existe una regla general para incrementar (o disminuir) un flujo dado. Las técnicas para superar los efectos de escala pueden ser únicamente ideadas para condiciones en los cuales

los efectos de escala probablemente existen, y no como una regla general de modelación." En modelos semejantes podrían ser mínimos los efectos de escala, y las comparaciones previas entre modelo y prototipo mostradas por Hecker (1981), muestran que tales modelos predicen muy bien los vórtices débiles.

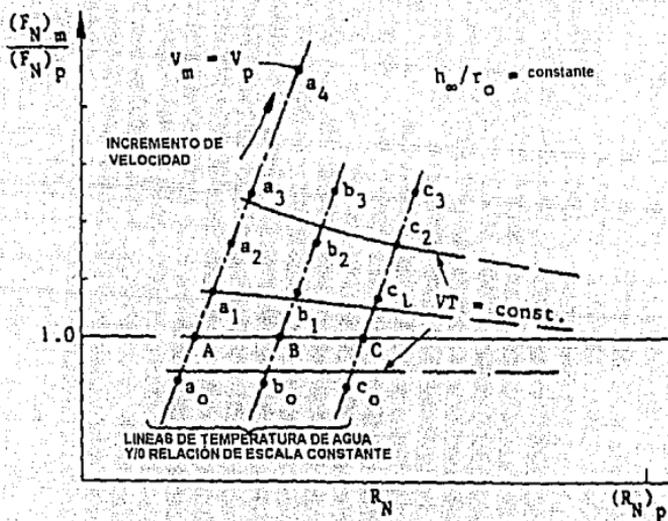


Figura 1.3 Evaluación de los efectos de escala según Hecker (1984).

### 1.5.1 Efectos de escala debidos a la tensión superficial.

En el caso específico de la fuerza de tensión superficial, se han desarrollado diversas teorías sobre su efecto en el comportamiento de los vórtices. Esta fuerza, y desde luego del número de Weber, ha sido generalmente considerada poco importante comparada con las fuerzas gravitacionales y su efecto aún no ha podido ser cuantificado de una manera clara puesto que se considera en principio, puede ser función de otros parámetros adimensionales.

Anwar (1966) realizó experimentos en un tanque cilíndrico con una salida vertical en el fondo del mismo, utilizando agua, y observó, que no se afecta el flujo en el núcleo de aire del vórtice cuando el  $R_R > 3 \times 10^3$ . Daggett y Keulegan, (1974), hicieron experimentos con dos tipos diferentes de fluido, -mezcla de agua y glicerina y diferentes mezclas con aceite- de diferente  $\sigma$  pero con la misma  $v$ , y mostraron que la tensión superficial en los vórtices es menor en aquellas mezclas cuya viscosidad es más baja, y que para los rangos utilizados en sus experimentos se puede establecer condiciones de similitud entre el modelo y el prototipo. Sin embargo Hugues (1975) en otro tipo de análisis, concluyó que la formación del núcleo de aire en el vórtice sí depende de la tensión superficial.

Jain, et al (1978), en sus ensayos utilizó fluidos con diferente tensión superficial y determinó que los efectos debido a ésta fuerza son mínimos en vórtices a superficie libre, cuando el número de Weber  $> 120$ .

Los resultados de los estudios efectuados por Anwar, et al (1978) en la formación de vórtices para una salida horizontal, muestran que el vórtice a superficie libre no se afecta por la viscosidad ni por la tensión superficial en el fluido ensayado (agua), cuando el número de Reynolds es mayor de  $3 \times 10^4$ . En los mismos ensayos, demostraron que el número de circulación depende de la relación geométrica  $h/D$ , y que el rango en el cual el efecto del número de Weber sobre el número de circulación decrece, es cuando la relación  $h/D$  aumenta, concluyendo que el centro del vórtice no es afectado por la tensión superficial cuando  $W$  y  $R$  son mayores de  $10^4$  y  $3 \times 10^4$  respectivamente.

En análisis teóricos, Yildirim, et al (1981), relacionan la solución de sus ecuaciones con los perfiles obtenidos por Anwar (1965), concluyendo que el efecto de la tensión superficial se incrementa para valores bajos de circulación, pudiendo ser significativo particularmente cerca del núcleo del vórtice, y que ésta fuerza produce una mayor depresión en la superficie del perfil del mismo (comparado con un fluido de tensión superficial cero) cuando se cumple que la relación  $\frac{\Gamma^2}{4\pi^2g} = 1 \times 10^{-6} \text{ pie}^3$ , es decir, para valores de circulación menores de  $3.56 \times 10^{-2} \text{ pie}^2/\text{s}$  ( $33.16 \text{ cm}^2/\text{s}$ ). Así mismo, muestra que para valores de

$\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 g} = 1 \times 10^{-6}$ , comprendidos entre  $4.21 \times 10^{-3}$  y  $1.04 \times 10^{-4}$  pie<sup>3</sup> (valores de circulación mayores de 2,200 cm<sup>2</sup>/s), el efecto de tensión superficial desaparece. Sin embargo, el análisis teórico no contempla los efectos viscosos en el núcleo del vórtice.

Hopfinger (1982), hace una comparación del perfil del vórtice observado, con un perfil corregido al quitarle la tensión superficial, y encontró que la diferencia de alturas entre los dos perfiles es de aproximadamente 1 cm, para valores de circulación de 35 cm<sup>2</sup>/s, velocidad en el centro del vórtice de 248 rad/s y  $1 \text{ cm} \leq r \leq 5 \text{ mm}$ . Ver figura 1.4

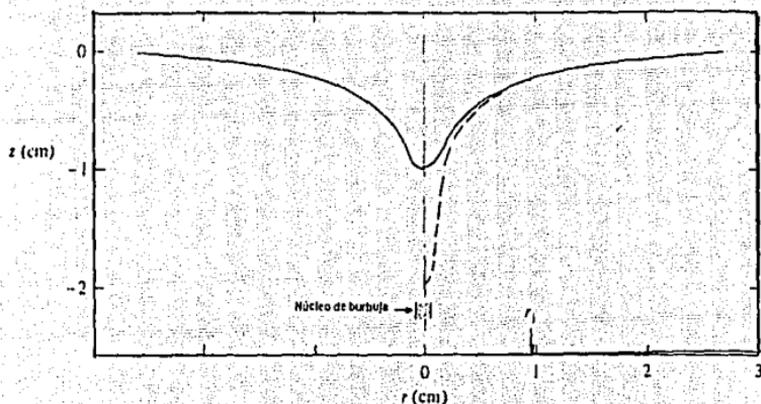


Figura 1.4 Forma del perfil sin tensión superficial según Hopfinger (1982).

Por otra parte, Odgaard (1986), propone un modelo que relaciona la altura crítica de sumergencia con el número de Froude, Reynolds y Weber, donde el número de Froude y  $N_T$  son los parámetros de mayor control, y el núcleo del vórtice es controlado tanto por la viscosidad cinemática como la viscosidad de

turbulencia (eddy viscosity), siendo esta última función de la circulación impuesta. Este modelo sugiere que el efecto de la tensión superficial puede ser despreciable cuando

$$W > 720 F^{1/2} N_r^{-3/2} R^{1/4} \quad (13)$$

para modelos que cumplan las condiciones que  $F$ ,  $N_r$  y  $R$  sean respectivamente 1, 0,1 y 10.

Farell y Cuomo (1981), plantean que no es posible establecer modelos geoméricamente similares operados a una escala de Froude para producir valores iguales en el parámetro de circulación, relacionándolo como  $\Gamma h/Q$ , y que al aceptar esto se deben realizar los experimentos con mucha precaución. Sin embargo, para encontrar que el número de Weber sea mínimo y que los efectos de tensión superficial puedan ser despreciables, debe tomarse en principio como función de otros números adimensionales independientes. Ellos sugieren que esta relación se puede hacer, introduciendo un radio mínimo de curvatura de la superficie libre como una variable dependiente adicional. Plantean que una forma de evaluar analíticamente los efectos de tensión superficial en un modelo de vórtice sencillo (bien sea un vórtice combinado de Rankine o un modelo de Einstein), es determinar la superficie libre del perfil, usando ecuaciones diferenciales, y entonces calcular la superficie media de curvatura para obtener las diferencias de presión debidas a la misma. Esta expresión está dada por

$$\Delta p = \sigma \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (14)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura correspondientes a los planos normales a la superficie para cada punto considerado.

Al respecto Hecker (1984), relaciona la misma expresión así:

$$\Delta p = \left[ \frac{\sigma}{\rho(Q/r_0 h_\alpha)^2 r_0} \right] \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (15)$$

donde

$$W = \frac{(Q / r_0 h_{\infty})^2}{\sigma / \rho r_0} \quad (16)$$

Esta última consideración se utiliza en una parte de esta investigación, puesto que basados en la forma de la superficie libre del vórtice y de los valores de los parámetros que influyen en la formación del mismo, se realiza un análisis numérico que permite ver de qué forma influye la tensión superficial en el núcleo del vórtice.

### 1.5.2 Efectos de escala debidos a la viscosidad.

El efecto de la viscosidad está relacionada directamente con el número de Reynolds. En general, cuando el número de Reynolds se incrementa la influencia de la viscosidad decrece. Para determinar el efecto de esta fuerza, varios autores coinciden que se deben usar líquidos de diferentes viscosidades o un mismo líquido a diferentes temperaturas. Así por ejemplo Zielinsky y Villemonte (1968), usaron aceites de diferentes viscosidades y encontraron que si la viscosidad aumenta, la circulación decrece debido al incremento en los esfuerzos cortantes viscosos y que para valores de Reynolds mayores de  $10^4$  los efectos causados por la misma pueden despreciarse.

Daggett y Keulegan (1974), concluyeron que los efectos viscosos llegan a carecer de importancia cuando  $Q/vd$  es mayor que  $2.5 \times 10^4$  y se modela bajo los criterios del número de Froude. Anwar et al (1978), encontraron que los efectos de la viscosidad son mínimos cuando el  $R_R > 3 \times 10^4$  definido este último como  $Q/vh$  donde  $h$  es la altura de sumergencia.

Jain, et al (1978), usaron líquidos de diferentes viscosidades en la formación de vórtices con salidas verticales y dedujeron que la altura de la sumergencia crítica está relacionada con el número de Froude, el número de circulación y el parámetro de viscosidad a través de la siguiente relación:

$$K \frac{S_c}{d} = 5.6 N_r^{0.42} F^{0.50} \quad (17)$$

donde

$S_c$     sumergencia crítica

$d$       diámetro del tubo de salida

$N_r$     parámetro de circulación  $\Gamma = S_c/Q$

$K$       es función de  $N_r$ , y es igual a uno para valores de  $N_r \geq 5 \times 10^4$ .

Esta relación es válida para  $1.1 \leq F \leq 20$ , y para valores de

$$0.1875 \leq N_r \leq 1.95 \text{ y } N_r \geq 5.3 \times 10^2$$

## 1.6 Concentración de vorticidad

Los cambios en la magnitud y en la dirección de un elemento de curva  $\delta s$ , tiene un efecto sobre el flujo, el cual es balanceado por los cambios de la velocidad rotacional. Esto lo confirma Batchelor (1970), quien dice "se tienen muchos campos de flujo en los cuales la cantidad de vorticidad aumenta, y continua incrementandose, hasta cambiar la distribución de la vorticidad de forma notable, por las pérdidas por viscosidad que son capaces de balancear lo que genera la extensión de las líneas vorticosas". Esto es, si la vorticidad es un vector unidireccional, y sus componentes en coordenadas cilíndricas son  $(w, 0, 0)$ , donde  $w$  depende únicamente de  $r$  y de  $t$ , la distribución de velocidad es entonces igualmente asimétrica, con componentes  $(U_x, U_r, U_\theta)$ . Por tanto, el movimiento en un plano axial estaría dado de la siguiente forma:

$$U_x = \alpha x \quad U_r = -\frac{1}{2} \alpha x \quad (18)$$

$\alpha$ , es una constante positiva  $[1/T]$ . Por lo tanto, la ecuación de vorticidad se reduce a un escalar, que satisface la ecuación

$$\frac{1}{2} \alpha w r^2 + v r \frac{dw}{dr} = \text{const} \quad (19)$$

si se iguala a cero la expresión 19, para un valor de  $w$  en  $r = 0$  la solución es

$$w(r) = w_1 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4v}\right) \quad (20)$$

La ecuación 20 muestra que en efecto, la distribución de  $w$ , cuando  $w$  y  $t$  tienden a infinito, para una condición inicial en la cual  $w$  tiende a cero cuando  $r$  tiende a infinito, es diferente de cero. Esto significa que el flujo vorticoso a través de un plano al eje  $x$  es invariante, y que se puede determinar una constante  $w_1$ , en términos de las condiciones iniciales del vórtice. Para un flujo uniforme, la vorticidad está concentrada dentro de una distancia radial del orden de  $(v/\alpha)^{1/2}$  del eje de simetría, la cual es muy pequeña [Batchelor, (1970)]. Si inicialmente se tiene una  $w$  uniforme con magnitud  $w_0$  dentro de una distancia  $r_0$  del eje y cero en otro punto, la condición de flujo constante a través de un plano normal al eje  $x$  da

$$w_1 \approx w_0 \frac{\alpha r_0^2}{4v} \quad (21)$$

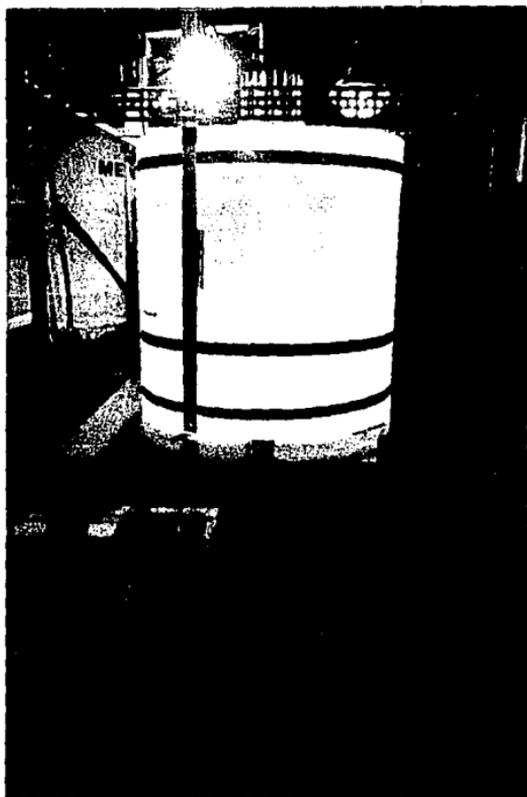
Esto es, si se conoce la velocidad de giro para un  $r_0$  en la zona irrotacional, y la velocidad  $w_1$  en la zona rotacional cercana al eje del vórtice, se puede tener una idea aproximada del valor de la constante  $\alpha$  con la cual se determina la distancia radial en la que se concentra la vorticidad.

## CAPITULO 2. EQUIPO EXPERIMENTAL

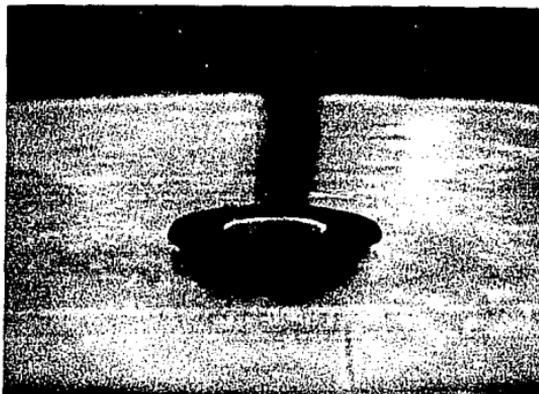
Los experimentos fueron llevados a cabo en el Laboratorio de Hidráulica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, y en la Escuela de Ingeniería (Unidad Torreón) de la Universidad Autónoma de Coahuila, en cuatro modelos diferentes para poder tener puntos de comparación.

El modelo usado en las instalaciones de la DEPMI, por ser el mayor, se tomó como prototipo. Consta de un tanque de acrílico transparente de 70 cm de diámetro y 73 cm de altura, con un orificio en el fondo de 4.4 cm de diámetro al cual se le adaptaron dos tubos -uno dentro del otro-, de modo tal que coincidan con la parte interior del tanque. El tubo exterior, de diámetro interno de 3.8 cm, controla la salida del gasto por medio de un diafragma de una cámara fotográfica. La salida del gasto del tubo interior, de diámetro interno 1 cm, sale por una manguera y se regula por medio de una válvula de paso. El tanque es alimentado por una bomba de 1 HP que toma el agua de un cárcamo de 2.4 m<sup>3</sup> de volumen y es impulsada hacia el mismo a través de un tubo que entra hasta la mitad del tanque en un ángulo de 90 grados. El agua que sale por el orificio del fondo nuevamente cae al canal que va hacia el cárcamo para volver a ser tomada. Para medir la circulación se utilizó un triángulo, en cuyas esquinas se colocaron esferas de unicel, para permitir que este flotara y pudiera girar libremente. A su vez, se usó un dispositivo con popotes insertados en una tabla de madera que sirven para asegurar que el triángulo quede centrado y poder medir la circulación. Ver fotografías 1, 2 y 3. Las imágenes de los vórtices generadas en el prototipo, fueron captadas en fotografías y por una cámara de video Canon LiHi8, y se editaron con una video Sony EVO 9700.

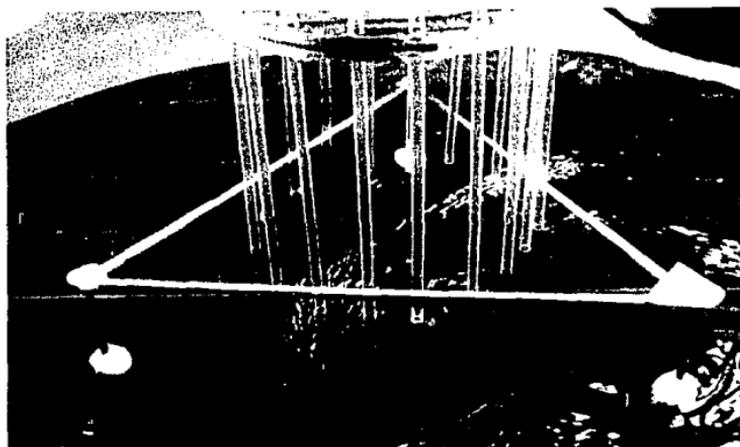
Las dimensiones de los modelos 1 y 2, son 42 y 14 cm de diámetro y altura respectivamente; con orificios de 2.56 y 1.55 cm de diámetro. El último modelo, el No 3, tiene 15 cm de diámetro y 13 cm de altura; con un orificio de 0.77 cm de diámetro. En estos tres modelos solamente se tomaron fotografías.



Fotografía No 1. Tanque experimentador prototipo.



Fotografía No 2. Detalle del tubo de salida.



Fotografía No 3. Cortina de popotes para centrar el triángulo con flotadores con el que se mide la circulación.



Fotografía No 4. Vista del modelo No 3.

### CAPITULO 3. MEDICIONES

En esta investigación se realizaron alrededor de 40 ensayos, en el prototipo y en los modelos 1, 2 y 3, generando diferentes clases de vórtices a superficie libre. Se hicieron un promedio de 6 a 7 mediciones por cada ensayo realizado. Para la mayoría, se tomaron fotografías y se hicieron en algunos casos filmaciones, con el fin de poder analizar el movimiento con mayor atención. El mayor número de mediciones se realizaron en el prototipo.

Para poder evaluar algunas de las variables que intervienen en el fenómeno, estas se mantuvieron constantes en algunos casos y en otros se permitió que variaran con el fin de poder ver su efecto en el comportamiento del vórtice. Se realizaron mediciones tanto en la zona irrotacional como rotacional del vórtice, para las principales variables las cuales se definen a continuación:

- H altura del agua en el tanque (m)
- $h_o$  altura de penetración de aire en el vórtice (m)
- r distancia radial del centro del tanque a un punto (m)
- z altura de medición para  $w_c$  (m)
- $w_i$  velocidad angular en la zona irrotacional (rad/s)
- $w_c$  velocidad angular en la zona rotacional (rps)
- $\Gamma$  circulación ( $m^2/s$ )
- $Q_e$  gasto de entrada al tanque (l/s)
- $Q_s$  gasto total de salida por el orificio (l/s)
- $Q_v$  gasto de salida por el centro del vórtice (l/s)
- $Q_l$  gasto de salida por los lados (l/s)

Ver figura 3.1.

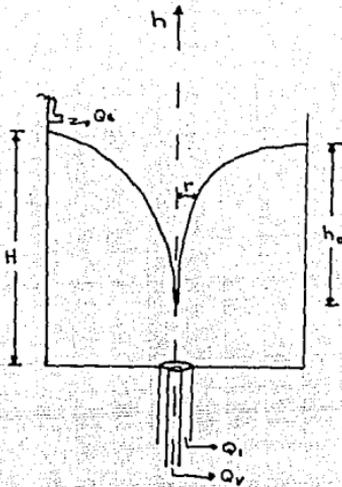


Figura 3.1 Esquema de las variables que se midieron.

### 3.1 Mediciones en la zona irrotacional

En cada experimento una vez estabilizado el vórtice, se midió la altura de penetración de aire en el núcleo ( $h_0$ ), así como la velocidad angular en esta zona del vórtice ( $w$ ). Para medir esta velocidad, se colocó sobre la superficie del agua una pequeña esfera de unicel a diferentes distancias del centro del vórtice; se tomó un punto de referencia de partida, y se contó el número de vueltas (generalmente 3 ó 4) a la vez que se tomó el tiempo que tardó en realizar las mismas. Este proceso se repitió con el triángulo formado por las esferas de unicel que giraban fijas alrededor de la cortina de popotes, para un radio de aproximadamente 0.1 m. De los datos obtenidos de velocidad, se determinaron los valores de circulación con la ecuación 4, donde el valor de  $a$ , toma el valor del radio medido en los ensayos.

El gasto total de salida en el fondo del tanque, conformado por el gasto que sale por el núcleo del vórtice y el gasto que viene de la capa límite, se midió tomando un tiempo fijo entre 10 y 15 segundos para los dos gastos y midiendo simultáneamente los volúmenes respectivos.

### 3.1.1 Altura del fluido constante en el tanque (H).

Para poder mantener una altura constante en el tanque de aproximadamente 0.70 m, se varió tanto el gasto de entrada como el de salida. Esto permitió que las circulaciones iniciales y las alturas de penetración de aire en el núcleo del vórtice fueran diferentes, lo que generó la formación de vórtices de perfiles esbeltos y vórtices robustos. El radio para medir la velocidad angular y determinar la circulación fue de 0.27 m. La tabla II muestra los valores obtenidos.

Tabla II. Altura del fluido (H) constante.

Exp No	H (m)	h(m)	$w_i$ (rad/s)	$\Gamma$ (m <sup>2</sup> /s)
1	0.67	0.61	1.48	0.68
2	0.67	0.56	0.76	0.35
3	0.70	0.55	0.20	0.09
4	0.69	0.52	0.18	0.08
5	0.69	0.51	0.16	0.07
6	0.70	0.46	0.08	0.04
7	0.70	0.32	0.18	0.08
8	0.69	0.65	0.57	0.26
9	0.70	0.57	0.20	0.09
10	0.70	0.60	0.37	0.17
11	0.70	0.53	0.18	0.08
12	0.70	0.32	0.08	0.04
13	0.67	0.30	0.07	0.03
14	0.70	0.23	0.05	0.02
15	0.68	0.20	0.03	0.01
16	0.69	0.16	0.02	0.01
17	0.69	0.62	0.39	0.18

### 3.1.2. Altura de agua en el tanque (H) y altura de penetración de aire en el núcleo (h) constantes

En esta etapa, se realizó el mismo proceso descrito en la sección anterior. La altura de penetración de aire del vórtice, se controló abriendo y cerrando tanto el diafragma de la cámara fotográfica como la válvula de paso en el fondo del tanque. Las mediciones se hicieron para alturas de penetración de aire, aproximadamente iguales a  $H/2$  y  $H/3$ , es decir 0.35 y 0.23 m respectivamente. La tabla III muestra los valores obtenidos para los diferentes gastos de entrada y salida del tanque.

Tabla III. Alturas del fluido (H) y penetración de aire (h) constantes.

Exp No	h(m)	$w_i$ (rad/s)	$\Gamma$ (m <sup>2</sup> /s)	$Q_e$ (l/s)	$Q_s$ (l/s)
1	0.35	0.35	0.12	0.11	0.14
2	0.35	0.41	0.10	0.99	0.16
3	0.35	0.52	0.13	0.18	0.23
4	0.23	0.80	0.13	0.20	0.21
5	0.23	0.41	0.11	0.20	0.17
6	0.23	0.39	0.10	0.14	0.18
7	0.23	0.41	0.11	0.21	0.16

### 3.1.3 Gasto de entrada constante ( $Q_e$ )

En esta fase, se mantuvo constante el gasto de entrada. Para observar el comportamiento y la forma que tomaba el perfil del vórtice se variaron los gastos de salida en el fondo del tanque. El radio que se utilizó para medir la circulación fue de 0.1 m. La tabla IV, muestra las mediciones obtenidas.

Tabla IV. Gasto constante ( $Q_e$ ).

Exp No	H(m)	h(m)	$w_i$ (rad/s)	$\Gamma$ (m <sup>2</sup> /s)	$Q_v$ (l/s)	$Q_l$ (l/s)	$Q_s$ (l/s)
1	0.61	0.31	1.55	0.096	0.0	0.34	0.34
2	0.55	0.55	1.55	0.096	0.05	0.34	0.39
3	0.55	0.44	1.55	0.096	0.02	0.34	0.36
4	0.61	0.05	0.78	0.048	0.0	0.19	0.19
5	0.60	0.33	0.78	0.048	0.04	0.19	0.23
6	0.70	0.70	2.26	0.141	0.01	0.47	0.48
7	0.70	0.70	2.26	0.141	0.01	0.50	0.51
8	0.53	0.53	1.77	0.109	0.00	0.44	0.44
9	0.65	0.65	1.77	0.109	0.15	0.00	0.15
10	0.65	0.54	1.77	0.109	0.01	0.38	0.39
11	0.55	0.55	1.15	0.071	0.16	0.00	0.16
12	0.35	0.35	1.52	0.094	0.00	0.38	0.38
13	0.57	0.43	1.19	0.074	0.07	0.18	0.25
14	0.49	0.26	1.32	0.081	0.04	0.25	0.29
15	0.50	0.50	1.99	0.12	0.01	0.47	0.48
16	0.50	0.50	2.49	0.15	0.02	0.41	0.43
17	0.60	0.60	2.65	0.16	0.01	0.46	0.47
18	0.62	0.62	2.63	0.16	0.00	0.51	0.51
19	0.67	0.59	2.42	0.15	0.00	0.47	0.47
20	0.70	0.70	1.41	0.09	0.07	0.26	0.33
21	0.70	0.57	1.39	0.09	0.05	0.38	0.43
22	0.70	0.15	0.81	0.05	0.00	0.30	0.30
23	0.45	0.30	0.84	0.05	0.27	0.04	0.31
24	0.47	0.47	0.41	0.03	0.28	0.00	0.28
25	0.53	0.18	0.36	0.02	0.05	0.17	0.22
26	0.62	0.62	2.02	0.13	0.04	0.40	0.44

### 3.2 Mediciones en la zona rotacional

Las mediciones que se realizaron en esta zona fueron para determinar la velocidad angular en el centro del vórtice ( $w_c$ ). Para ésto se escogieron esferas de unícel de diferentes diámetros, (la más pequeña medía 1.5 cm y la más grande 4.5 cm), que se introducían en el centro del vórtice hasta una altura tal en la que la esfera no perturbaba el perfil de éste. Ver foto 5.



Fotografía No 5. Forma de medir la velocidad angular ( $w_c$ ), en el centro del vórtice.

Las mediciones se hicieron usando dos métodos diferentes:

1. Las esferas se sujetaron de un hilo doble pasándolo por el eje de las mismas y colocándoles un tope en el extremo inferior de ellas, para permitir que giraran sobre sí libremente. Estas, se introducían en el centro del vórtice de forma muy cuidadosa tratando de evitar que el hilo se enrollara a causa del movimiento; una vez dentro, la esfera comenzaba a girar, el hilo se iba enrollando y se tomaba un tiempo ( $t$ ). Cuando se cumplía el tiempo se sacaba rápidamente la esfera del centro del vórtice, se sujetaba el hilo y la esfera para evitar que siguiera girando, luego se contaba el número de vueltas que se enrollaba el hilo en el tiempo y así obtener el valor de la velocidad. Ver tabla V. Esta forma de medir es muy imprecisa y demasiado laboriosa.

2. Mediciones con estroboscopio. Para poder medir de esta forma, a las esferas se les atravesó en su eje con un alambre de calibre muy delgado, colocándole topes tanto por encima como por debajo de ellas para evitar que se desplazaran a lo largo de éste, pero que si pudieran girar libremente sobre él. Ver tabla VI.

Adicionalmente, se hicieron algunas filmaciones del movimiento en la zona libre del vórtice y en el centro de éste, con la cámara KODAK EKTAPRO de alta velocidad. El número de cuadros por segundo fue de 500, lo que permitió medir el tiempo de giro tanto para la zona irrotacional como rotacional. Para obtener el valor real del radio con el cual se medía la circulación, se tomó una relación de escala teniendo en cuenta el radio observado en la punta del vórtice en el prototipo y el medido en la filmación. Las mediciones se presentan en la tabla VII.

Tabla V. Medición de velocidad en la zona rotacional. 1er método.

Exp No	H(m)	z(m)		$\Gamma(m^2/s)$	$w_c(rps)$	
prototipo						
		$d_1$	$d_2$		$d_1$	$d_2$
1	0.50	0.32		0.21	8.23	
2	0.52	0.42	0.32	0.20	6.73	12.43
3	0.50	0.33	0.18	0.51	12.13	12.76
4	0.42	0.42	0.40	0.18		7.44
Modelo 3						
5	0.20		0.15*	0.02		6.72

$d_1$  = diámetro de la esfera 4.57 cm

$d_2$  = diámetro de la esfera 1.98 cm

\* = diámetro de la esfera 0.65 cm

Tabla VI. Medición en la zona rotacional. 2o método.

Exp No	H (m)	z (m)	$\Gamma (m^2/s)$	$W_c (rps)$
1	0.55	0.35	0.04	15
2	0.62	0.25	0.13	23
3	0.65	0.35	0.11	37

Tabla VII. Análisis de movimiento de la película KODAK.

Zona irrotacional

Medición No	$r(m)$	$W_i(\text{rad/s})$	$\Gamma(\text{m}^2/\text{s})$
1	0.023	41.34	0.14
2	0.023	40.98	0.13
3	0.023	43.63	0.14
4	0.023	41.23	0.14
5	0.023	42.11	0.14
6	0.038	5.55	0.05
7	0.038	6.11	0.05
8	0.038	6.16	0.06
9	0.038	4.62	0.04
10	0.041	5.71	0.06
11	0.035	6.49	0.05
12	0.050	5.24	0.08

Zona rotacional

Medición No	$w_c(\text{rps})$
1	25.64
2	27.78
3	83.3
4	47.61
5	66.00
6	100.00
7	79.00

## CAPITULO 4. PRESENTACION Y DISCUSION DE RESULTADOS

Este capítulo se divide en tres partes: la primera, presenta una clasificación de las diferentes clases de vórtices de acuerdo a la forma del perfil de éstos y a la circulación inicial impuesta. A su vez, muestra la relación que existe entre el gasto que sale únicamente por el centro del vórtice y el gasto total de descarga, así como su influencia en la forma del perfil, y finalmente, se determina analíticamente el radio que divide la zona rotacional de la irrotacional y su relación con la clasificación de vórtices obtenida. La segunda parte, presenta la aplicación de un modelo numérico al perfil del vórtice, para determinar el efecto de tensión superficial sobre él, así como la influencia del número de Weber; aquí también se hace un análisis de las fuerzas que intervienen en el núcleo del vórtice. La tercera y última parte, analiza la concentración de vorticidad en el núcleo y su relación con la variación de la velocidad en el centro para cada uno de los tipos de vórtices clasificados.

### 4.1 Clasificación de la forma del perfil del vórtice

Para clasificar la forma del perfil del vórtice, se tuvieron en cuenta principalmente dos aspectos:

1. La consideración propuesta por Echávez (1992), de si el efecto dominante en la formación del vórtice es la circulación o la descarga de fondo.

2. Las mediciones obtenidas de las tablas III y IV, para las cuales en la mayoría de los casos se tomaron fotografías que facilitaron la clasificación. De estas dos tablas, se graficaron los valores de circulación y el gasto total de salida por el orificio. Se determinaron tres clases de perfiles, teniendo en cuenta la intensidad de la circulación. Ver figura 4.1. Esta clasificación concuerda con las observaciones hechas por Canales, et al (1989), donde el núcleo del vórtice toma diferentes formas, dependiendo de la circulación y el gasto de salida.

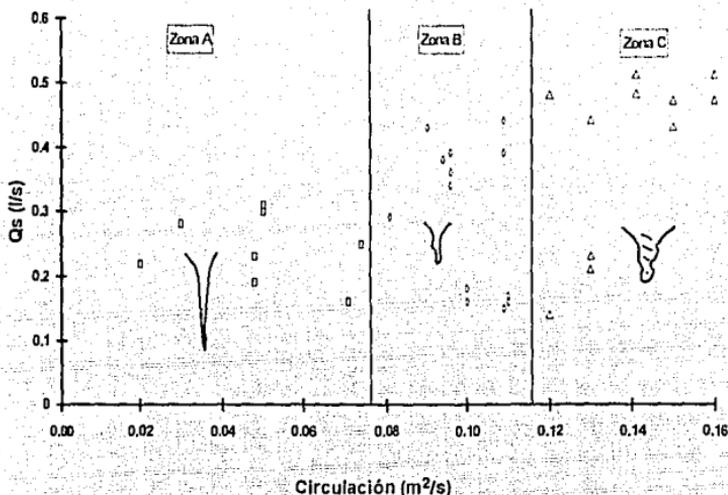


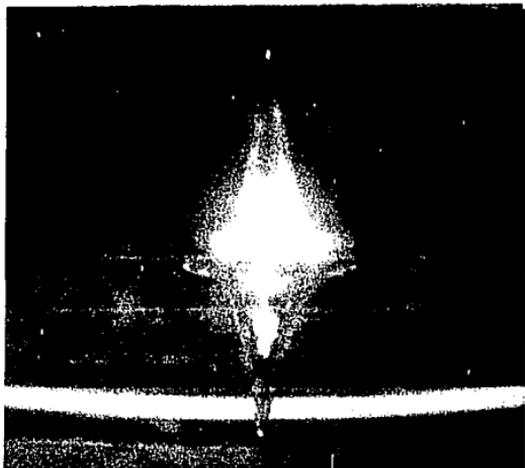
Figura 4.1 Relación de Circulación con el gasto total de salida en el fondo.

Las zonas son definidas a continuación:

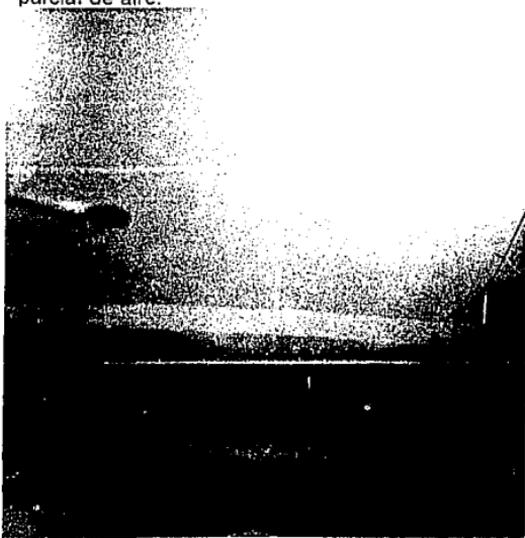
**Zona A. Vórtices de baja circulación.**

Se caracterizan por:

1. Los valores de circulación son menores o iguales a  $0.075 m^2/s$ .
2. La formación del vórtice es inducida por la descarga de fondo.
3. La boca del vórtice es estilizada y la punta de éste toma la forma de una parábola no muy abierta. Ver foto 6.
4. El cuerpo es esbelto, y a medida que la penetración de aire aumenta, éste se torna más fino, llegando en algunos casos a convertirse en un pequeño filamento. Ver foto 7.



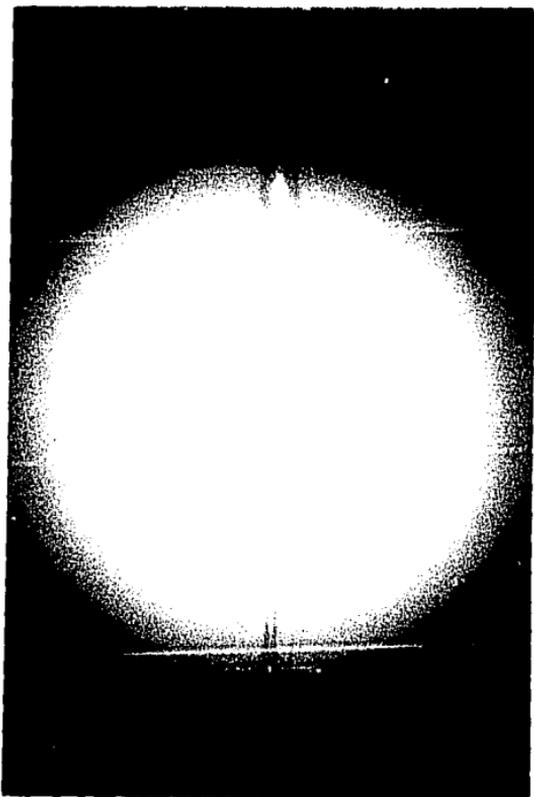
Fotografía No 6. Geometría de un vórtice de baja circulación con penetración parcial de aire.



Fotografía No 7. Perfil de un vórtice de baja circulación con penetración total de aire. Obsérvese que la punta es casi un filamento.

5. Las ondulaciones que se presentan a lo largo del perfil son muy tenues y tienden a desaparecer en la punta del vórtice.

6. En ciertas ocasiones, cuando la penetración de aire en el núcleo es completa, existe un rompimiento dentro de éste, ocasionando que las ondas que se forman en el perfil suban y bajen constantemente a lo largo del mismo con mayor rapidez. Este fenómeno es conocido como *vortex - breakdown*. Ver foto 8.



Fotografía No 8. Deformación del núcleo de aire.

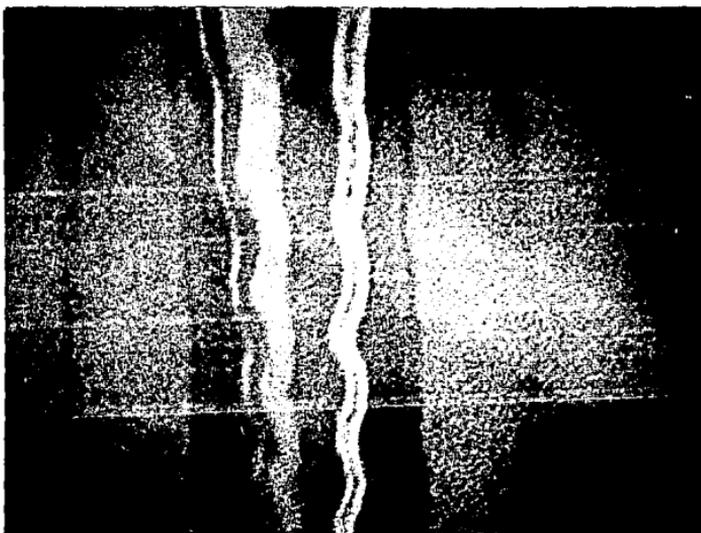
### Zona B. Vórtices de circulación media.

Se caracterizan por:

1. La circulación varía entre 0.075 y 0.116 m<sup>2</sup>/s.
2. El vórtice es inducido tanto por la circulación impuesta como por el gasto de salida en el fondo.
3. Cuando comienza a formarse el vórtice, la boca es más abierta, y a medida que penetra el aire en el núcleo, el cuerpo se va haciendo más delgado sin llegar a ser totalmente esbelto.
4. Las ondulaciones que se presentan a lo largo del perfil, muestran en algunas ocasiones cambios bruscos, pero se suavizan a medida que se acercan a la superficie. Ver fotos 9 y 10.



Fotografía No 9. Vórtice de circulación media, con penetración parcial de aire.



Fotografía No 10. Detalle de la región central del vórtice de intensidad media. Obsérvese como las ondas son más tenues hacia la parte superior del vórtice.

### Zona C. Vórtices de circulación intensa.

Se caracterizan por:

1. El vórtice es inducido por la circulación, y ésta es mayor de  $0.116 \text{ m}^2/\text{s}$ .
2. Al formarse, la boca del vórtice es muy abierta, adquiere la forma de un chupón y en la punta se forman burbujas debido a la turbulencia del movimiento. Ver foto 11.



**Fotografía No 11.** Iniciación de un vórtice con circulación intensa.

3. Cuando el vórtice comienza a avanzar hacia abajo, el cuerpo es robusto y se asemeja a un tornillo el cual se va adelgazando en la punta a medida que desciende, pero conservando su robustez. Ver foto 12.



**Fotografía No 12.** Forma del perfil de un vórtice de circulación intensa, cuando existe penetración parcial de aire.

4. Las ondulaciones que se presentan a lo largo del perfil, tiene las mismas características que los vórtices de intensidad media y cuando la penetración de aire es completa, desaparecen casi en su totalidad. ver foto 13.



**Fotografía No 13.** Vórtice con penetración completa de aire. Obsérvese que desaparecieron las ondas.

#### 4.1.1 Influencia del gasto que sale por el centro del vórtice.

Del registro de mediciones de la tabla IV, se determinó el porcentaje de contribución de cada uno de los gastos que conforman el gasto total de salida, para las diferentes circulaciones obtenidas. Ver tabla VIII y figura 4.2. Como se puede observar en la figura 4.2, a medida que aumenta la circulación, el porcentaje del gasto que sale por el núcleo del vórtice va disminuyendo y el que viene de la capa límite va aumentando.

Tabla VIII. Relación del gasto que sale por el centro del vórtice ( $Q_v$ ) y el que sale por los lados ( $Q_l$ ) con respecto al gasto total de salida en el fondo ( $Q_s$ ), para diferentes valores de circulación.

Exp No	$\Gamma(m^2/s)$	$Q_v/Q_s(\%)$	$Q_l/Q_s(\%)$	Tipo de vórtice
1	0.096	00.00	100.00	circ. media
2	0.096	12.82	87.18	circ. media
3	0.096	5.55	94.44	circ. media
4	0.048	00.00	100.00	esbelto
5	0.048	17.39	82.61	esbelto
6	0.141	2.08	97.92	robusto
7	0.141	1.96	98.04	robusto
8	0.109	00.00	100.00	circ. media
9	0.109	100.00	00.00	circ. media
10	0.109	2.56	97.43	circ. media
11	0.071	100.00	00.00	esbelto
12	0.094	00.00	100.00	circ. media
13	0.074	28.00	72.00	esbelto
14	0.081	13.79	86.21	circ. media
15	0.120	2.08	97.92	robusto
16	0.150	4.65	95.35	robusto
17	0.160	2.13	97.87	robusto
18	0.160	00.00	100.00	robusto
19	0.150	00.00	100.00	robusto
20	0.090	21.21	78.79	circ. media
21	0.090	11.63	88.37	circ. media
22	0.050	00.00	100.00	esbelto
23	0.050	87.10	12.90	esbelto
24	0.030	100.00	00.00	esbelto
25	0.020	22.73	77.27	esbelto
26	0.130	9.09	90.91	robusto

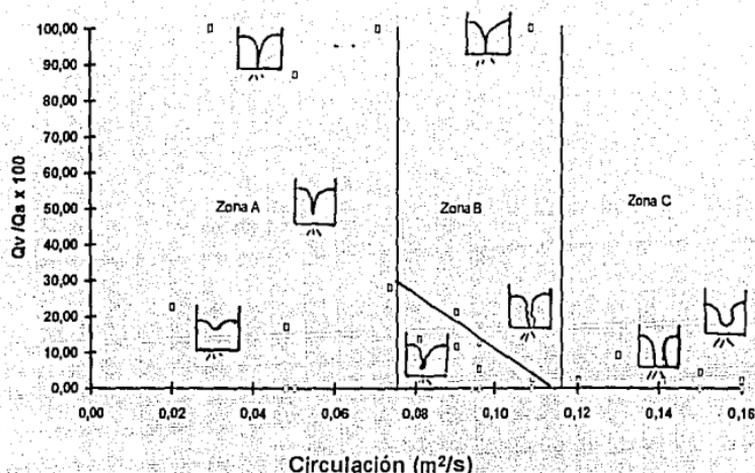


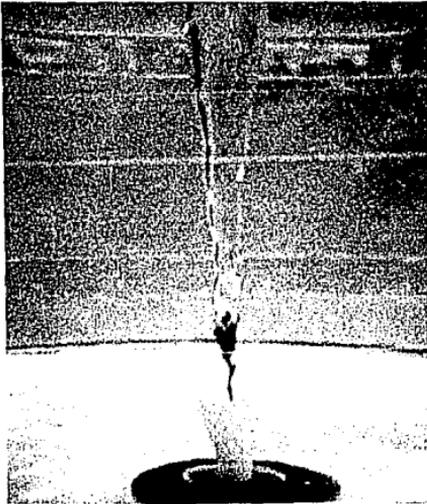
Figura 4.2. Relación en porcentaje del gasto que sale por el centro del vórtice  $Q_v$  respecto al gasto total  $Q_s$  para diferentes valores de circulación.

En la zona A, donde la circulación es baja, la penetración de aire es controlada por el gasto que sale a través del núcleo del vórtice. Cuando éste gasto es menor del 10% del gasto total, el vórtice que se presenta es incipiente. Entre el 10 y el 75% existe penetración parcial de aire en el núcleo y para valores mayores al 75% la penetración de aire es total.

Para la zona B -vórtices con circulación media-; cuando el gasto del núcleo es cero, el vórtice presenta penetración parcial de aire la cual va aumentando a medida que se incrementa el valor de la circulación. Para un mismo valor de circulación, al aumentar el gasto en el centro del vórtice aumenta también la altura de penetración de aire en el núcleo, pasando el perfil del vórtice por diferentes formas; desde un esbelto sinuoso en la punta, hasta su forma final, con penetración completa de aire en el centro. Ver fotos 14 a 16. Lo anterior, indica que el vórtice en esta zona, depende tanto de la circulación inicial como del gasto que sale por el centro del vórtice.



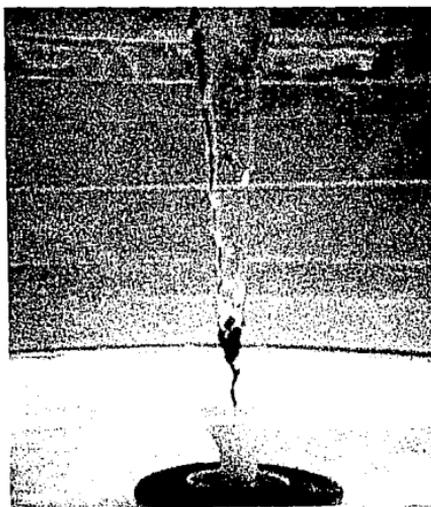
Fotografía No 14. Zona B, vórtice con penetración parcial de aire, sinuoso en la punta para valores de  $Q_V$  entre 8 y 10% de  $Q_S$ .



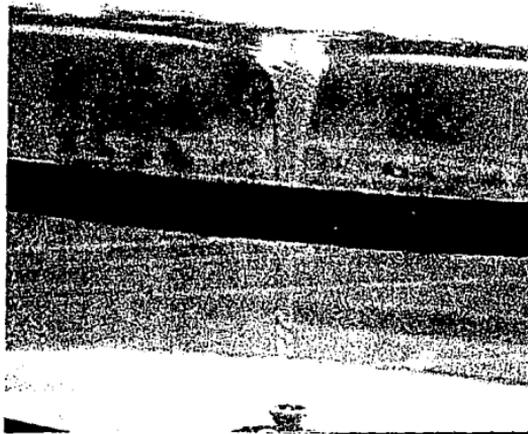
Fotografía No 15. Zona B, vórtice con  $Q_V$  diferente de cero para circulación de  $0.10 \text{ m}^2/\text{s}$ .



Fotografía No 14. Zona B, vórtice con penetración parcial de aire, sinuoso en la punta para valores de  $Q_v$  entre 8 y 10% de  $Q_s$ .



Fotografía No 15. Zona B, vórtice con  $Q_v$  diferente de cero para circulación de  $0.10 \text{ m}^2/\text{s}$ .



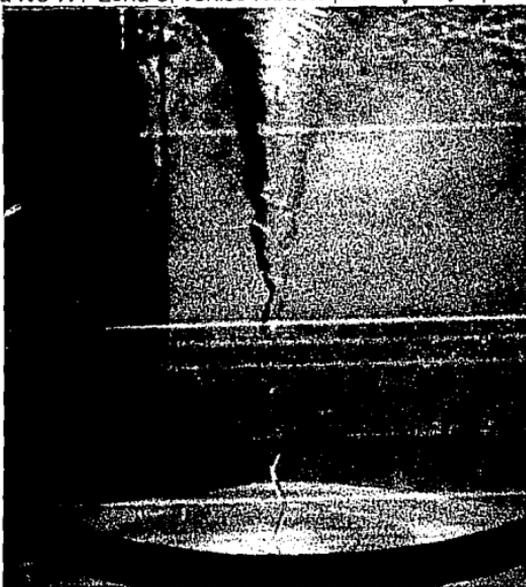
Fotografía No 16. Zona B, vórtice con penetración completa de aire para circulación de  $0.10 \text{ m}^2/\text{s}$ .

En la figura 4.2, se puede observar que para los puntos en los cuales la penetración de aire es total, al incrementarse la circulación en un valor constante, el porcentaje del gasto en el centro también se incrementa en ese mismo valor constante. Esto permite suponer que al trazar una línea recta por estos puntos, el valor del gasto que sale por el centro del vórtice alcanza hasta un 30% del gasto total. Para valores mayores a este valor, el perfil se torna esbelto.

Por último, para la zona C -vórtices con circulación intensa-, para que exista penetración parcial de aire, el gasto que sale por el núcleo del vórtice debe ser menor del 10% del gasto total de descarga, o bien que éste gasto sea cero y el que viene de la capa límite sea máximo. En este último caso, el perfil del vórtice es robusto en la parte superior y trata de volverse esbelto en su punta. Cuando los dos gastos son diferentes de cero, la penetración de aire en el núcleo es total. Ver fotos 17 y 18.



Fotografía No 17. Zona C, vórtice robusto para  $Q_v = 0$  y  $Q_l = \text{máximo}$ .



Fotografía No 18. Zona C, vórtice robusto con  $Q_v = \text{maximo}$  y  $Q_l = 0$ .

#### 4.1.2 Punto de transición entre la zona rotacional y la zona irrotacional.

En los ensayos realizados para los diferentes tipos de vórtices generados, se intentó medir el radio que separa las dos zonas de flujo. Esto fue difícil de realizar, y sólo en uno o dos casos, se pudo observar que el valor de este radio era de 5 mm para vórtices esbeltos y de aproximadamente 8 mm para vórtices de intensidad media. Por otra parte, el valor de  $a$  se determinó en forma analítica despejando este parámetro de la expresión 5, obteniéndose que:

$$a = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{h_0 4 \pi^2 g}} \quad (22)$$

donde

$h_0$  altura de penetración de aire en el vórtice (m)

$\Gamma$  circulación en la zona irrotacional ( $m^2/s$ )

$g$  constante gravitacional ( $m/s^2$ )

$a$  radio (m)

Los valores de circulación y alturas, fueron tomados de las tablas II, III y IV. La tabla IX y la figura 4.3, muestran los valores encontrados de  $a$  para las diferentes tipos de vórtices clasificados. Como se puede ver  $a$  varía de 1 a 5 mm para vórtices de circulación baja, de 5 a 9 mm para vórtices de circulación media y más de 9 mm para vórtices de circulación intensa. Los resultados coinciden con los observados por Hopfinger y Gagne (1982), para un vórtice esbelto de circulación de  $0.035 m^2/s$ .

Tabla IX. Valores de  $a$  para los diferentes tipos de vórtices clasificados.

Exp No	$\Gamma(m^2/s)$	$a(mm)$	Tipo de vórtice	Exp No	$\Gamma(m^2/s)$	$a(mm)$	Tipo de vórtice
1	0.68	44	robusto	26	0.10	7	int. media
2	0.35	24	robusto	27	0.10	8	int. media
3	0.09	6	int. media	28	0.05	4	esbelto
4	0.08	6	int. media	29	0.14	9	robusto
5	0.07	5	esbelto	30	0.14	9	robusto
6	0.04	3	esbelto	31	0.11	8	int. media
7	0.08	7	int. media	32	0.11	7	int. media
8	0.26	16	robusto	33	0.11	8	int. media
9	0.09	6	int. media	34	0.07	5	esbelto
10	0.17	11	robusto	35	0.09	8	int. media
11	0.08	6	int. media	36	0.07	5	esbelto
12	0.04	4	esbelto	37	0.08	8	int. media
13	0.03	3	esbelto	38	0.12	9	robusto
14	0.02	2	esbelto	39	0.15	11	robusto
15	0.01	1	esbelto	40	0.16	11	robusto
16	0.01	1	esbelto	41	0.16	10	robusto
17	0.18	12	robusto	42	0.15	10	robusto
18	0.12	10	robusto	43	0.09	6	int. media
19	0.10	9	robusto	44	0.09	6	int. media
20	0.13	11	robusto	45	0.05	5	esbelto
21	0.13	14	robusto	46	0.03	2	esbelto
22	0.11	12	robusto	47	0.02	2	esbelto
23	0.10	11	robusto	48	0.13	8	robusto
24	0.11	12	robusto				
25	0.10	9	int. media				

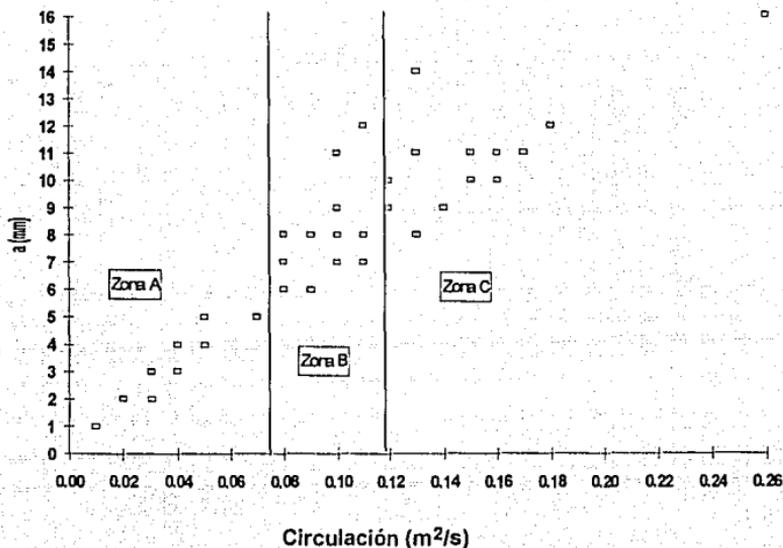


Figura 4.3 Valores de a en mm para los perfiles de vórtices clasificados.

#### 4.2 Efecto de la tensión superficial en el perfil del vórtice a superficie libre

Para evaluar el efecto que tiene la tensión superficial en los vórtices, se determinó la superficie libre del perfil por medio de ecuaciones polinómicas de segundo orden y se calculó entonces la superficie media de curvatura para encontrar la diferencia de presión que se presenta debido a ésta fuerza. Se escogieron tres fotografías de los perfiles más representativos de vórtices con baja circulación, de acuerdo a la clasificación encontrada en el numeral 4.1.

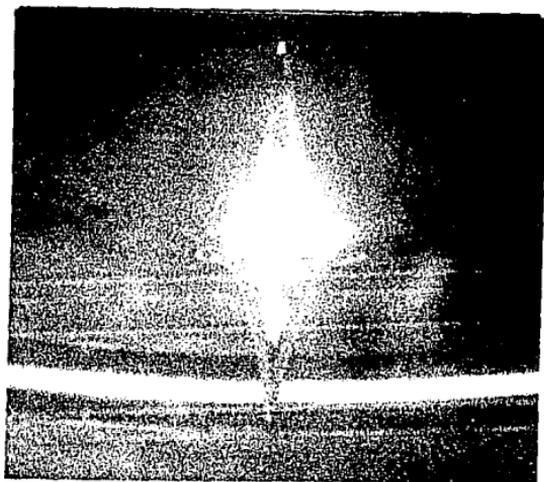
El proceso que se siguió para el análisis de cada uno de estos perfiles fue el siguiente:

1. Los perfiles de las fotografías fueron digitalizados en una computadora IBM RT-PC, a través de un programa llamado MAPEO elaborado en lenguaje C estandard, que utiliza el archivo PHIGS como traductor gráfico. La precisión para capturar la imagen fue de una diez milésima entre punto y punto, en el cual el programa transforma los puntos en parejas de coordenadas en un plano (X,Y). Las coordenadas obtenidas en X, corresponden a los diferentes radios a partir del centro del vórtice, y las coordenadas en Y, a las alturas correspondientes para cada uno de estos radios.

2. Por medio de un programa elaborado en QBASIC, las coordenadas obtenidas en el plano XY, se transformaron a las coordenadas reales del perfil, relacionando la escala de la fotografía con la escala del modelo correspondiente. Estas coordenadas reales fueron ajustadas como curvas de segundo grado, siguiendo el criterio sugerido por Anwar (1965), de que el perfil de la superficie libre del vórtice es hiperbólica, excepto en la punta del vórtice donde se asumió que la forma de ésta era la de una esfera.

3. Una vez obtenido el perfil real ajustado del vórtice, se hallaron los radios de curvatura y el valor de la curvatura media para cada par de puntos ajustados. La diferencia de presión obtenida para  $\sigma=0.0765 \text{ gr/cm}$ , en la interfase agua-aire, se obtuvo de la ecuación 14, y en la punta del vórtice  $h_0$  toma el valor  $2\sigma / R_1$ .

4. Al valor obtenido de  $h_0$ , se le restó la altura real del vórtice, teniendo en cuenta la dirección de la fuerza en cada uno de los puntos y así obtener las nuevas coordenadas del perfil sin los efectos de la tensión superficial. Por último, se graficó el perfil real del vórtice y el perfil del mismo cuando  $\sigma=0$ , en el cual se observa la magnitud de las diferencias de alturas de presión, para los modelos analizados. Ver fotos 19, 20 y 21, y, figuras 4.4, 4.5 y 4.6.



Fotografía No 19. Perfil del vórtice analizado en el prototipo.

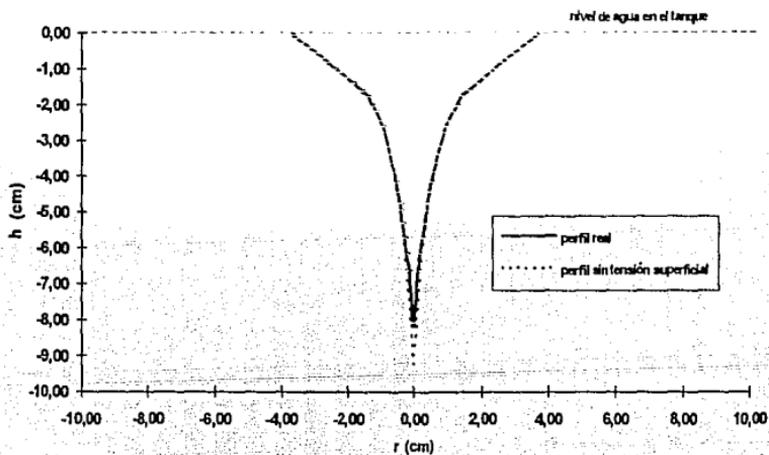
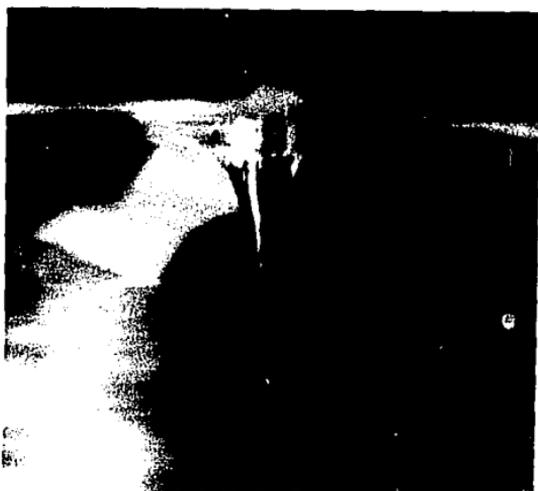


Figura 4.4 Perfil del vórtice con y sin tensión superficial correspondiente al prototipo.



Fotografía No 20. Perfil del vórtice analizado en el modelo 1.

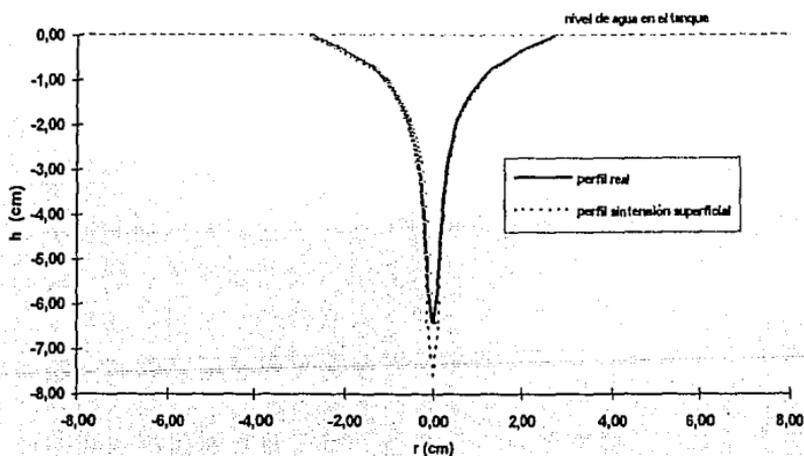


Figura 4.5 Perfil del vórtice con y sin tensión superficial correspondiente al modelo 1.



Fotografía No 21. Perfil del vórtice analizado en el modelo 3.

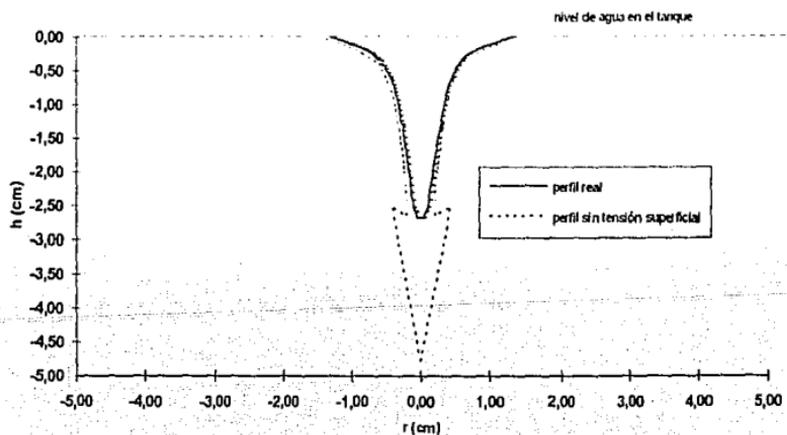


Figura 4.6 Perfil del vórtice con y sin tensión superficial correspondiente al modelo 3.

La Figura 4.4, correspondiente al prototipo, muestra que la mayor diferencia que se presenta entre el perfil real y el perfil en el cual  $\sigma=0$ , es de 1.09 cm para un radio de 0.13 cm. Así mismo para el modelo 1, -figura 4.5,- esta diferencia es de 1.20 cm para un radio de 0.095 cm. Igualmente, para el modelo 3, figura 4.6, la diferencia es de 2.09 cm para un radio hasta de 0.071 cm. En este último caso, el perfil para  $\sigma=0$ , asume la forma de un bulbo en la punta del vórtice, debido al cambio brusco de presiones al cambiar el perfil de una forma esférica a un polinomio de segundo grado. Como se puede observar, en los tres casos la diferencia de presiones no es mayor de 2 cm en el centro del vórtice y va disminuyendo a medida que se aleja del núcleo de éste.

Por otra parte, si se analiza la ecuación 14, se tiene que si  $R_1$  aumenta y  $R_2$  disminuye, la curvatura media y la diferencia de presión debida a la tensión superficial también disminuyen, tendiendo esta última a desaparecer. Esto significa, que para vórtices con penetración parcial de aire, siempre existirá el efecto de la tensión superficial en la punta del vórtice, aunque este efecto va a disminuir a medida que aumente la circulación, es decir, a medida que el perfil del vórtice se torne más robusto. Sin embargo, si la penetración de aire es completa; para todos los casos, el efecto desaparece. Esto confirma la teoría propuesta por Yildirim, et al (1981), quienes plantean que para valores menores de circulación de  $0.0033 \text{ m}^2/\text{s}$ , -el cual se encuentra dentro de los rangos probados experimentalmente aquí-, la tensión superficial produce una gran depresión en el vórtice -comparado con uno donde  $\sigma=0$ -, sin considerar los efectos viscosos, y que por lo tanto si se debe tener en cuenta el efecto de la tensión superficial para valores bajos de circulación especialmente en el centro del vórtice.

#### 4.2.1 Influencia del número de Weber.

Como se mencionó en el sección 4.1.1, el gasto que sale por el centro del vórtice disminuye a medida que la circulación aumenta. Para vórtices esbeltos, es decir de baja circulación, la altura de penetración de aire en el núcleo es controlada por este gasto. Si el gasto que sale por el centro es muy pequeño, se presentan vórtices incipientes, y a medida que el gasto aumenta el desarrollo del núcleo se incrementa. por tanto, lo más razonable es que al analizar el centro del vórtice se consideren únicamente las variables que intervienen en el núcleo,

como son el gasto que sale por el centro, el radio por el que sale éste y la altura de penetración de aire. Sin embargo, para tener parámetros de comparación con lo expresado por diferentes autores, entre ellos Anwar, Daguett et al, Jain et al, entre otros, se determinaron los números de Reynolds y de Weber, así como el Reynolds radial expresado como  $Q/\nu h$ , considerando las mismas variables que intervienen de acuerdo a las expresiones 9 y 10, con los valores obtenidos de la tabla IV. El radio que se utilizó fue de 1.9 cm correspondiente al orificio de salida en el prototipo y  $\sigma = 0.0765 \text{ gr}_f/\text{cm}$ . La tabla X presenta los resultados obtenidos.

Tabla X. Determinación del Número de Weber.

Ensayo No	$Q_s$ ( $\text{cm}^3/\text{s}$ )	$\Gamma$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	$h$ ( $\text{m}$ )	$R_R \times 10^3$	$R$ $10^3$	$W$
1	190	0.048	0.05	95	1.00	42
2	230	0.048	0.33	0.70	1.21	51
3	250	0.074	0.43	0.58	1.31	55
4	300	0.050	0.15	2.00	1.58	66
5	310	0.050	0.30	1.03	1.63	68
6	220	0.020	0.18	1.22	1.16	48

Como se puede observar en la tabla X, para vórtices de baja circulación, el número de Weber varía aproximadamente entre 41 y 68, para perfiles en los cuales las diferencias de presión por tensión superficial no son mayores de 2 cm.

Estos valores se encuentran por debajo del rango encontrado por Jain, et al (1978), en sus experimentos. Por tanto se puede considerar que dentro de éste rango, el efecto que se produce por tensión superficial existe, especialmente en la punta del vórtice. Por encima de de éste rango el efecto es mucho menor y se puede considerar despreciable. Por otra parte para  $R$  y  $R_R$  mayores de  $10^3$ , los efectos de tensión superficial desaparecen.

#### 4.2.2 Análisis de las fuerzas que intervienen en la formación del núcleo de aire del vórtice.

En un fluido que gira en torno a un eje, se producen principalmente dos tipos de fuerza: las de cuerpo y las de superficie.

En las fuerzas de cuerpo, si el sistema gira con una velocidad constante  $w$ , las fuerzas de cuerpo que intervienen son: la centrífuga, la de Coriolis y la debida a la aceleración angular. Como la aceleración angular es constante, esta fuerza es nula. La fuerza de Coriolis es función de la velocidad radial, la cual en el centro del vórtice tiende a cero; por lo tanto, esta fuerza se puede considerar despreciable. Sólo queda la única fuerza giratoria de cuerpo que es la centrífuga y que en términos de una presión constante está dada por:

$$h_w = \Delta p_w = \frac{w^2 r^2}{2g} \quad (23)$$

La única fuerza de superficie que interviene es la debida a la tensión superficial que en términos de la curvatura media, esta dada por:

$$\frac{\Delta p_\sigma}{\gamma} = h_\sigma = \frac{\sigma}{g} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (24)$$

al existir equilibrio de estas dos fuerzas en el perfil del vórtice en la interfase aire-agua, e igualando las expresiones 23 y 24 y despejando  $w$  se obtendría:

$$w = \sqrt{\frac{\Delta p_\sigma 2g}{r^2}} \quad (25)$$

La expresión anterior, sugiere que la variación de la velocidad de giro en el centro del vórtice es función principal de la diferencia de presión debida a la tensión superficial. Esto lo confirma Hopfinger, et al (1982), diciendo que éste giro en el centro, depende únicamente del equilibrio de la superficie de curvatura y del valor de la tensión superficial, los cuales son ambos conocidos de forma

razonablemente precisa. Ahora bien, para radios muy pequeños, cercanos al eje del vórtice, donde  $\Delta p_G$  alcanza su máximo valor, la velocidad sería función únicamente del radio. Es decir, si  $r$  tiende a cero  $w$  tendería a infinito. Sin embargo, cuando  $r$  alcanza un valor muy cercano a cero, la velocidad sólo alcanza un valor máximo debido a los efectos de difusión de las fuerzas viscosas que retardan el movimiento y que concentran la vorticidad en una distancia radial muy pequeña.

### 4.3 Concentración de la vorticidad en el núcleo

La concentración de vorticidad en el núcleo del vórtice, así como el incremento de la velocidad rotacional, están asociadas con el estrechamiento de las líneas vorticosas, en particular si no existen fronteras de fricción cercanas a la superficie libre del vórtice, (Farrel y Cuomo, 1981). Por otra parte, la fuerza del vórtice producido, está relacionada con la circulación impuesta y el cambio de vorticidad, ésta última concentrada a una distancia radial del orden de  $(\nu/\alpha)^{1/2}$ , (Batchelor, 1970). El valor de  $\alpha$  se determinó despejando ésta, a partir de la expresión 21 y utilizando los datos de la tabla VII. Es decir

$$\alpha = \frac{4 \nu w_1}{w_0 r_0^2} \quad (26)$$

donde

$w_0$  velocidad angular para un  $r_0$  (rps)

$r_0$  distancia radial fuera del núcleo de aire (cm)

$w_1$  velocidad angular en un punto dentro del núcleo de aire del vórtice (rps)

$\nu$  viscosidad cinemática (cm<sup>2</sup>/s)

$\alpha$  constante (1/s)

La tabla XI y la figura 4.7, muestran los valores obtenidos de  $(v/\alpha)^{1/2}$  para los diferentes tipos de vórtices clasificados. Como se observa en la figura 4.7, para vórtices de baja circulación el valor de  $(v/\alpha)^{1/2}$  varía entre 1 y 2 mm, para vórtices de circulación media es de aproximadamente 3 mm y de 6 mm para vórtices de circulación intensa. Para los tres tipos de vórtices clasificados, este valor aumenta a medida que aumenta la circulación y es menor que la distancia radial  $a$  que separa la zona rotacional de la irrotacional. Esto implica, que la velocidad de giro en la zona rotacional solamente es constante para  $(v/\alpha)^{1/2} \leq r \leq a$  y no para valores de  $0 \leq r \leq a$  como lo predice el diagrama de velocidades del vórtice de Rankine. Ver figura 4.8.

Tabla XI. Valores de  $\alpha$  (1/s).

No	$\Gamma$ (m <sup>2</sup> /s)	$w_1$ (rps)	$r_o$ (cm)	$w_o$ (rps)	$\alpha$ (1/s)	$(v/\alpha)^{1/2}$ (mm)
1	0.14	26.71	2.30	6.58	0.031	5.68
2	0.13	26.71	2.30	6.52	0.031	5.68
3	0.14	26.71	2.30	6.94	0.029	5.87
4	0.14	26.71	2.30	6.56	0.031	5.68
5	0.14	26.71	2.30	6.70	0.030	5.78
6	0.05	87.40	3.80	0.88	0.275	1.91
7	0.05	87.40	3.80	0.97	0.250	2.00
8	0.06	87.40	3.80	0.98	0.250	2.00
9	0.04	87.40	3.80	0.73	0.332	1.73
10	0.06	87.40	4.10	0.91	0.230	2.10
11	0.05	87.40	3.50	1.03	0.280	1.90
12	0.08	56.80	5.00	0.83	0.11	3.00

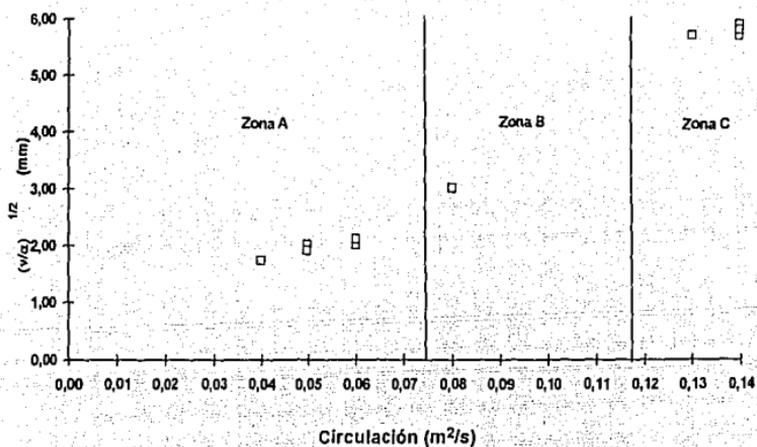


Figura 4.7 Valores de  $(v/\alpha)^{1/2}$  para los diferentes tipos de vórtices clasificados.

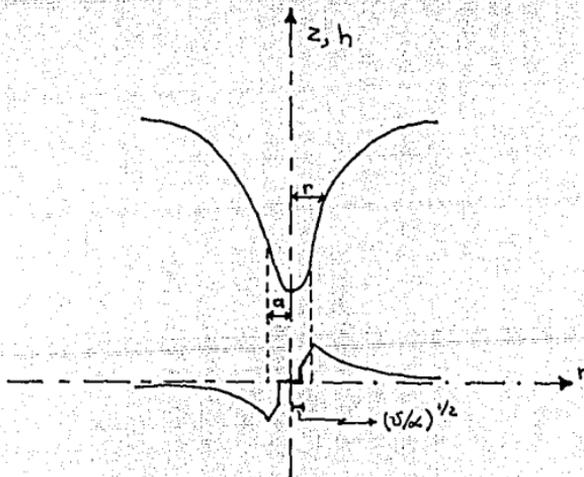


Figura 4.8 Diagrama real de velocidades tangenciales en un vórtice combinado de Rankine.

Por otra parte, para determinar el cambio de vorticidad a lo largo del perfil del vórtice, se aplicó el teorema de Pappus-Guldinus, el cual relaciona el cambio de circulación sobre el área que forma la vorticidad a lo largo del eje z. Por continuidad y por el teorema de Kelvin, la circulación permanece aproximadamente constante, a menos que exista una fuerza externa, que haga que tanto la velocidad rotacional como la vorticidad se incrementen. En este caso, como la vorticidad es la que cambia, la circulación varía en el centro del vórtice. La figura 4.9, presenta un esquema de la variación de vorticidad para diferentes profundidades de un perfil de vórtice de baja circulación. La tabla XII presenta los valores teóricos y reales obtenidos de vorticidad para este tipo de vórtices. Como se observa los resultados presentan rangos de distorsión aceptables para las velocidades obtenidas muy cerca al eje del vórtice.

Tabla XII Valores teóricos y reales de vorticidad.

corte	w <sub>0</sub> (rps)	r <sub>0</sub> (cm)	r <sub>1</sub> (cm)	w <sub>1</sub> real (rps)	w <sub>1</sub> teórica (rps)	Γ=∇ (cm <sup>2</sup> /s)
A-A'	0.96	3.65	1.5			33.39
B-B'	8.00	1.50	1.0	8.00	8.50	31.42
C-C'				100	141.67	23.41

$$\nabla_{A-A'} \text{ o } \nabla_{B-B'} = \pi w_0 [r_0^2 - r_1^2]$$

$$\nabla_{C-C'} = 2\pi w_1 (v/\alpha)^{1/2}$$

$$(v/\alpha)^{1/2} = 0.19 \text{ cm}$$

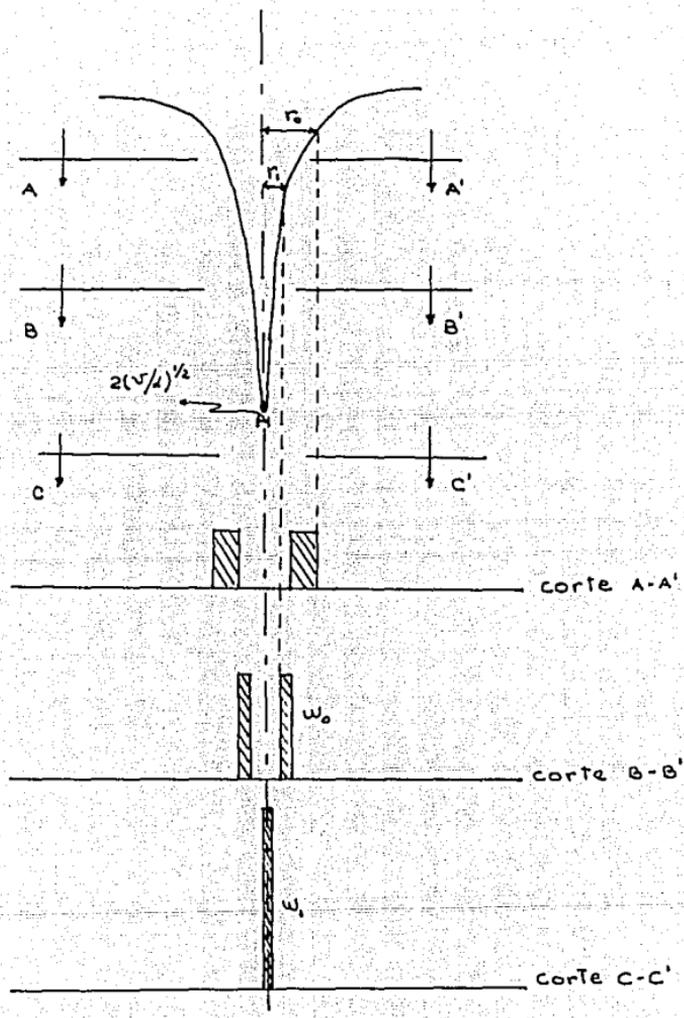


Figura 4.9 Esquema de variación de vorticidad en un vórtice combinado de Rankine.

## CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Muchos autores han propuesto ecuaciones para describir los vórtices en términos de los números adimensionales que dominan el flujo, y las características de los mismos pueden ser expresadas de acuerdo a la altura de penetración de aire en el núcleo, tal es el caso de Dagget, et al (1974), Jain, et al (1978), Farrel y Cuomo (1981), entre otros, quienes relacionan los parámetros más significativos que enlazan el prototipo con el modelo en la formación de vórtices a superficie libre. Sin embargo, aún no se ha logrado establecer una ley apropiada para escalar los vórtices, ya que las técnicas para superar estos efectos probablemente no existan.

En los experimentos realizados en el transcurso de este trabajo, la circulación y el gasto de descarga son los parámetros de mayor control. Con base en la variación de éstos, se clasificaron tres tipos de vórtices de acuerdo a su intensidad, y a si el efecto dominante en la formación de los mismos es la circulación o la descarga de fondo. Se confirmó que el gasto que sale por el orificio del tanque, tiene dos componentes: uno que sale por el centro del vórtice y otro que viene por la capa límite en el fondo, y que la proporción de estos dos varía de acuerdo al tipo de vórtice que se genere.

A lo largo de todo el perfil del vórtice se presentan ondas -denominadas por algunos autores ondas inerciales-, cuya formación probablemente se deban a las diferencias de presión ocasionadas por la única fuerza de cuerpo (fuerza centrífuga), y a la fuerza debida a la tensión superficial, ambas función de la curvatura del perfil. Para analizar los efectos de escala debidos a la tensión superficial en los vórtices, se calcularon las diferencias de presión debidas a esta fuerza, determinando la superficie libre del perfil por medio de ecuaciones de segundo orden y la variación de la superficie media de curvatura, lo cual dio como resultado que para vórtices con penetración parcial de aire, siempre existirá el efecto de tensión superficial especialmente en la punta del vórtice, y que este efecto disminuye a medida que se aumenta la circulación, es decir, cuando el perfil del vórtice se torna más robusto. Esto confirma la teoría propuesta por

Yildirim, et al (1981), quienes plantean que para valores bajos de circulación, la tensión superficial produce una gran depresión en el vórtice -comparado con uno donde esta fuerza es cero-, sin considerar los efectos viscosos, y que por lo tanto si se debe tener en cuenta el efecto de tensión superficial para valores bajos de circulación especialmente en el centro del vórtice. Sin embargo, si la penetración de aire es completa, para todos los casos el efecto desaparece totalmente. Se encontró que el número de Weber para el cual existe influencia por tensión superficial, varía entre 41 y 68, para valores de circulación hasta de 0.075 m<sup>2</sup>/s. Por encima de estos valores, así como para valores de Reynolds mayores de 10<sup>3</sup>, el efecto por tensión superficial se puede considerar despreciable.

La concentración de la vorticidad en el núcleo del vórtice, así como el incremento de la velocidad rotacional, están asociadas con el estrechamiento de las líneas vorticosas, en particular si no existen fronteras de fricción cercanas a la superficie libre del vórtice. La velocidad de giro en la zona rotacional, sólo alcanza un valor máximo debido a los efectos de difusión de las fuerzas viscosas que retardan el movimiento en el centro del vórtice, y que concentran la vorticidad en un filamento que se prolonga hasta la descarga de fondo en distancias muy pequeñas, que varían entre 1 y 6 mm dependiendo del tipo de vórtice generado. Esto implica que esta velocidad es constante para  $(v/\alpha)^{1/2} \leq r \leq a$ , y no para  $0 \leq r \leq a$  como lo predice el diagrama de velocidades del vórtice de Rankine. Los valores de vorticidad encontrados experimentalmente, concuerdan muy bien con los calculados teóricamente.

En resumen, y de acuerdo a la intensidad de la circulación, se presentan vórtices con las siguientes características, para los cuales se analizan los efectos de tensión superficial:

**Vórtices de baja circulación:** En este tipo de vórtices, la circulación varía hasta 0.075 m<sup>2</sup>/s; la formación del mismo es inducida por el gasto de descarga en el fondo; la boca del perfil es estilizada; el gasto que sale por el centro del vórtice controla la altura de penetración de aire en el núcleo y a medida que ésta aumenta el vórtice se torna más fino, llegando en algunos casos a convertirse en un pequeño filamento; la distancia del eje al punto de transición entre la zona rotacional e irrotacional -a-, varía de 1 a 5 mm aproximadamente. Aquí, se

encontró que para los perfiles de los vórtices analizados en los tres modelos, el vórtice es dominado por la tensión superficial para diferencias de alturas de presiones no mayores de 2 cm y distancias radiales que varían entre 0.7 y 1.3 mm, valores que se encuentran por debajo de los citados por Echávez (1992). En estos vórtices, los efectos viscosos son mayores debido a la concentración de vorticidad en el núcleo la cual alcanza valores hasta de 100 rps para valores de  $(v/\alpha)^{1/2}$  que no sobrepasan los 2 mm.

Vórtices de circulación media: Este tipo de vórtice, es el resultado de la combinación de un vórtice robusto cuando domina la circulación y un vórtice esbelto donde domina la descarga, y su perfil se aproxima más a los vórtices generados en la realidad. La circulación varía aproximadamente entre 0.075 y 0.116 m<sup>2</sup>/s; el vórtice es inducido tanto por la circulación como por el gasto de salida en el fondo y la forma del perfil es más robusta. El gasto que sale por el centro del vórtice disminuye -comparado con uno de baja circulación-; la distancia a varía de 5 a 9 mm; la vorticidad también disminuye y el efecto por tensión superficial puede considerarse despreciable.

Vórtices de circulación intensa: Se presentan en flujos totalmente turbulentos. El efecto dominante es la circulación la cual es mayor de 0.116 m<sup>2</sup>/s; el cuerpo es totalmente robusto y la boca del vórtice es muy abierta; el gasto que sale por el centro sólo alcanza un 10% del gasto total y en la mayoría de los casos la penetración de aire es total, excepto cuando no existe gasto de salida en el fondo; la concentración de vorticidad es muy baja y no existe influencia por tensión superficial.

Para finalizar, aunque aún no se ha dicho la última palabra sobre los efectos de escala debido a la tensión superficial en la modelación de vórtices, cabe señalar que las mediciones obtenidas en este trabajo para los cuatro modelos ensayados, arrojan resultados muy consistentes, y permiten suponer que al analizar la superficie libre del perfil del vórtice e introducir un radio mínimo de curvatura como una variable dependiente adicional para evaluar los efectos de escala debidos a esta fuerza, como lo sugieren Farrel y Cuomo (1981), son un buen indicio en la investigación de este tema. Por ello, se recomienda realizar ensayos en modelos diseñados en otras escalas de acuerdo a la ley de similitud

de Froude, en los cuales se varíen los parámetros geométricos; se tenga en cuenta si el efecto dominante en la formación del vórtice es la descarga del fondo o la circulación; y medir con mayor precisión la velocidad de rotación en el núcleo del vórtice, utilizando técnicas de medición más avanzadas -como cámaras de filmación de alta velocidad, rayos láser, entre otros-, para obtener vórtices tipos con formas de perfil distintas y poder así analizar el efecto de tensión superficial con la técnica aquí usada.

## BIBLIOGRAFÍA

Allen J., (1947). "Scale Models in Hydraulics Engineering," Longmans, Green and Co., London.

Anwar H.O., (1965). "Flow in Free Vortex," Water Power.

Anwar H.O., James A. Weller and Amphlett M. B. (1978). "Similarity of Free Vortex at Horizontal Intake," J. of Hydraulic Research, Vol. 16.

ASCE Task Committee on Glossary of Hydraulic Modeling Terms of the Committee on Research of the Hydraulics Division. ( 1982). "Modeling Hydraulic Phenomena: A Glossary of Terms," J. of Hydraulic Division, Vol. 108, HY7.

Batchelor G.K. (1970). "An Introduction to Fluid Dynamics," Cambridge University press.

Canales M. A. Y Sanchez E. A. (1989). "Modelación de Vórtices," Tesis para obtener el título de Ingeniería Civil, UNAM, México.

Chang E. and Prosser M.J. (1986). "Basic Results of Theoretical and Experimental Work," Swirling Flow Problems at Intakes, Hydraulics Structures Design Manual, IAHR, Editor: Jest Knauss.

Daggett Larry L. and Keulegan G. H. (1974). "Similitude in Free Surface Vortex Formations," J. of the Hydraulics Division, Vol. 100, HY11.

Denny D.F. and Young G.H. J. (1957). "The prevention of Vortices and Swirl at Intakes," Congress Lissabun IAHR, paper C1.

Denny D.F. (1956). "An Experimental Study of Air-Entraining Vortices in Pump Sumps," J. of the Institution of Mechanical Engineers 170(2), London, U.K.

Durgin W.W. and Hecker G.E. (1978). "The Modelling of Vortices at Intakes Structures," Proc IAHR-ASME-ASCE joint Symposium on design and operation of Fluid Machinery, CSU fort Collins, Vols. I and III.

Echávez G., (1992). "Estabilidad de Vórtices a pequeñas perturbaciones y oscilaciones en su punta," XV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, IAHR, Cartagena Colombia.

Einstein H.A. and Li H. (1955). "Steady Vortex Flow in a Real Fluid," La Houille Blanche, No 4.

Farrel C. And Cuomo A. (1981). "Introduction to the Study of Vortex Dynamics and Similitude in Free Surface Flows," Convênio Departamento de Águas o Energia Elétrica e Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Granger R. (1966). "steady three-dimensional Vortex Flow," J, Fluid Mechanics, Vol. 25, Part 3.

Hansen A.G. (1971). "Mecánica de Fluidos," Editorial Limusa-Wiley S.A., México.

Hecker G.E. (1984). "Scale Effects in Modelling Vortices," Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Techische Akademie Esslingen, Editor: H. Kobus, September 3-6.

Hecker G.E. (1986). "Fundamentals of Vortex Intake Flow," Swirling Flow Problems and Intakes, Hydraulics Structures Design Manual, IAHR, Editor: Jest Knauss.

Hecker George E. (1981). "Model-Prototype Comparison of Free Surface Vortices," J. of the Hydraulics Division, HY10, Vol 107.

Hopfinger, E.J., Browand F.K. and Y. Gagne. (1982). "Turbulence. and Waves in a Rotating Tank," J. Fluid Mechanics, Vol 125.

Hugues Roger L. (1975). "Discussion of Similitude in Free Surface Vortex Formation," J. of the Hydraulics Division, HY9, Vol. 101.

Jain A. K., Ranga Raju Kittur G., and Ramachandra J. Garde. (1978). "Vortex Formation at Vertical Pipe Intakes," J. of the Hydraulics Division, HY10, Vol. 104.

Jain Akalank K. and Ranga Raju Kittur G. (1975). "Discussion of Similitude in Free Vortex Formations," J. of Hydraulics Division, HY11, Vol 101.

Kelvin Lord (sir W. Thomson). (1869). "On Vortex Motion," Hydrodynamics, Cambridge, University Press.

Kenn M.J. And Zanker K.J. (1967). "Aspects of Similarity for Air-Entraining Water Flows," Nature 213(5071), pages 59-60.

Lamb H. (1932). "Hydrodynamics," 6Th ed., Cambridge, Univ. Press.

McCorquodale John A. (1968). "Scale Effects in Swirling Flow," J. of the Hydraulic Division, HY1.

McCann S. E. (1994). "Investigación experimental del vórtice libre," Tesis profesional para obtener el título de Maestro en Ingeniería Hidráulica, UNAM.

Naudasher E. (1984). "Scale Effects in Gate Model Tests," Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Techische Akademie Esslingen, Editor: H. Kobus, September 3-6.

Novak P. (1984). "Scaling Factors and Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures," Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Techische Akademie Esslingen, Editor: H. Kobus, September 3-6.

Odgaard A.J. (1984). "Fluid Properties and Their Scale Effects in Froude-Scaled Hydraulics Models," Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Techische Akademie Esslingen, Editor: H. Kobus, September 3-6.

Odgaard A.J. (1986). "Free Surface Air Core Vortex," J. of Hydraulic Engineering, Vol. 112, No 7.

Quick M.C. (1961). "A Study of the Free Spiral Vortex," thesis presented to the University of Bristol, England, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

Ranga Raju K.E. and Garde R.J. (1986). "Modelling of Vortices and Swirling Flows," Swirling Flow Problems at Intakes," Hydraulics Structures Design Manual, IAHR, Editor: Jest Knauss.

Rankine W.M.J. (1858). "A Manual of Applied Mechanics," Griffin, London.

Rouse H. (1971). "Selected Writings." Hydraulics Mechanics of Fluids, Engineering Education, Dover Pub, New York.

Sharp, J.J. (1981). "Hydraulic Modelling," Butterworths.

Weller James A. (1975). "Discussion of Similitude in Free Vortex Formations," J. of Hydraulics Division, HY11, Vol.101.

Woodford D.J. (1964). "Prediction of the Length of the Air Core in Vortices of Weak Circulation," La Houille Blanche, No 8.

Yildirim N. (1981). "Surface Tension Effect on Profile of a Free Vortex," J. of the Hydraulics Division, Vol. 107.

Zielinski Paul B. And Villemonte J. R. (1968). "Effect of Viscosity on Vortex-Orifice Flow," J. of the Hydraulics Division, HY3.

1977  
1978  
1979  
1980  
1981  
1982  
1983  
1984  
1985  
1986  
1987  
1988  
1989  
1990  
1991  
1992  
1993  
1994  
1995  
1996  
1997  
1998  
1999  
2000  
2001  
2002  
2003  
2004  
2005  
2006  
2007  
2008  
2009  
2010  
2011  
2012  
2013  
2014  
2015  
2016  
2017  
2018  
2019  
2020  
2021  
2022  
2023  
2024  
2025