



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

78  
ESTAMPAS

FACULTAD DE INGENIERIA

“ FENOMENOS TRANSITORIOS EN  
CONDUCTOS A PRESION ”

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A I  
ABRAHAM GONZALEZ SANTIAGO



DIRECTOR DE TESIS:

M. I. OSCAR VEGA ROLDAN

MEXICO, D. F.

1995

FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-1-044/95

Señor  
**ABRAHAM GONZALEZ SANTIAGO**  
Presente.

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **M.I. OSCAR VEGA ROLDAN**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

**"FENOMENOS TRANSITORIOS EN CONDUCTOS A PRESION"**

- I. INTRODUCCION**
- II. EL FLUJO TRANSITORIO EN CONDUCTOS CERRADOS**
- III. EL METODO DE ALLIEVI**
- IV. EL METODO GRAFICO DE BERGERON**
- V. EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS**
- VI. DISPOSITIVOS DE CONTROL HIDRAULICO**
- VII. EJEMPLOS DE APLICACION**
- VIII. CONCLUSIONES**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
**"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"**  
Cd. Universitaria, a 31 de marzo de 1995.  
EL DIRECTOR.

  
ING. JOSÉ MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/RCR\*nl1

*A mis padres, con quienes el camino fue menos difícil.*

*A mis hermanos.*

***Agradezco al M. I. Oscar Vega Roldán  
su apoyo invaluable para la realización  
de esta tesis.***

**FENÓMENOS TRANSITORIOS  
EN  
CONDUCTOS A PRESIÓN**

# CONTENIDO

<b>I.</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
	El origen de la hidráulica	1
	Los fenómenos transitorios en la hidráulica	3
	Clasificación de los fenómenos transitorios	3
	Alcance de la presente tesis	4
<b>II.</b>	<b>EL FLUJO TRANSITORIO EN CONDUCTOS CERRADOS</b>	<b>5</b>
	Generalidades	5
	Antecedentes históricos relativos al cálculo de los fenómenos transitorios en conductos a presión	5
	Definiciones	7
	Cambios de presión causados por un cambio de velocidad instantáneo	9
	Descripción del fenómeno del golpe de ariete	12
	Ecuaciones fundamentales del flujo transitorio	17
	Consideraciones básicas	17
	Condición de equilibrio dinámico	18
	Condición de continuidad	21
	Celeridad de las ondas del golpe de ariete	25
	Consideraciones sobre las ecuaciones del flujo transitorio	29
	Significado físico de las ecuaciones del flujo transitorio	31
	Métodos de solución	34

<b>III. EL MÉTODO DE ALLIEVI</b>	<b>35</b>
Ecuación básica de Allievi	35
Desarrollo en cadena de Allievi	38
Maniobras de cierre y apertura	40
Leyes para operaciones de cierre y apertura	40
Tipos de maniobra según el tiempo de su ejecución	41
Cartas de Allievi	43
<b>IV. EL MÉTODO GRÁFICO DE BERGERON</b>	<b>47</b>
Teoría del análisis gráfico	47
Ecuaciones conjugadas del golpe de ariete	47
Ecuaciones de descarga en la compuerta	51
Solución gráfica para un cierre de válvula	52
<b>V. EL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS</b>	<b>57</b>
Introducción	57
Ecuaciones características	58
Condiciones de frontera	65
Depósito con carga constante en el extremo aguas arriba	66
Depósito con carga constante en el extremo aguas abajo	68
Válvula en el extremo aguas abajo	69
Unión en serie	71
Condiciones de estabilidad y convergencia	74
Selección del incremento de tiempo para un sistema complejo de tuberías	75
Método combinado implícito-características	77

<b>Contenido</b>	<b>iii</b>
<b>VI. DISPOSITIVOS DE CONTROL HIDRÁULICO</b>	<b>79</b>
Introducción	79
Métodos y dispositivos disponibles para el control de los fenómenos transitorios	80
Torres de oscilación	81
Cámaras de aire	83
Tanques de flujo unidireccional	85
Válvulas	86
Control óptimo de flujos transitorios	90
<b>VII. EJEMPLOS DE APLICACIÓN</b>	<b>93</b>
Introducción	93
Resolución mediante el método de Allievi	94
Ejemplo VII.1	94
Ejemplo VII.2	102
Resolución mediante el método de Bergeron	104
Ejemplo VII.3	104
Ejemplo VII.4	109
Resolución mediante el método de las características	111
Ejemplos VII.5 y VII.6	111
<b>VIII. CONCLUSIONES</b>	<b>117</b>
<b>APÉNDICE A</b>	<b>121</b>
<b>APÉNDICE B</b>	<b>125</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>137</b>

# I

## INTRODUCCIÓN

### EL ORIGEN DE LA HIDRÁULICA

El hombre comenzó a asentarse en establecimientos permanentes hace aproximadamente 6000 años. Desde entonces, para poder sobrevivir, ha tenido que afrontar dificultades en relación con el agua desde dos puntos de vista: por un lado, ha visto la necesidad de protegerse de posibles desbordamientos e inundaciones; por el otro, ha tenido que garantizar la existencia del vital líquido para poderse abastecer de él y utilizarlo en actividades domésticas y de riego. Como consecuencia de lo anterior, ha tenido que construir obras hidráulicas un tanto complejas, que sirvan para que se proteja del agua en exceso o para que pueda disponer de ella en tiempos de escasez de la misma. Se tiene que hacer notar que las primeras obras hidráulicas constituyen los logros tecnológicos más antiguos del género humano.

Las primeras grandes civilizaciones que se fundaron dentro de los valles de los ríos Nilo, Tigris y Éufrates, Indo y Huang, sólo desarrollaron las bases de los avanzados y complejos sistemas conductores de agua, debido a que las condiciones topográficas, climatológicas e hidrológicas de estas regiones, permitieron que se dotara y produjera permanentemente suficientes alimentos aplicando tan sólo los principios del control de inundaciones y de riego.

Las primeras grandes ciudades que en su tiempo fueron centros importantes del orbe, como Atenas, Babilonia, Cartago, Alejandría y Roma, surgieron durante los cuatro milenios a.C. En aquellos periodos antiguos de la historia, se construyeron complejas instalaciones hidrotécnicas para abastecimiento de agua potable; sin embargo no hay evidencia de que los ingenieros que planearon y construyeron aquellos asombrosos proyectos, hayan poseído conocimientos cuantitativos o conceptos cualitativos claros acerca del comportamiento del agua en estado de reposo o en movimiento.

El progreso en la comprensión de los fenómenos físicos relacionados con el agua, es decir, en la creación de nuevos conceptos hidráulicos, se inició alrededor del año 500 a.C. y se basó en la ingeniería práctica. Sin embargo conceptos tales como la hidrostática de Arquímedes o la introducción del factor tiempo (velocidad) en la descripción de los procesos del flujo<sup>\*</sup>, no fueron tomados en cuenta por los ingenieros de aquella época.

Los logros más sobresalientes de la ingeniería hidráulica antigua se obtuvieron a partir de los primeros cinco siglos d.C. Consistieron en la construcción de grandes sistemas, tanto de aquéllos que se utilizaron para el abastecimiento de agua potable, como de los que se emplearon para el desagüe de las grandes ciudades. Quizás el ejemplo más destacado lo constituye la "ciudad eterna" de Roma. Después de la decadencia del imperio romano, tuvieron que transcurrir alrededor de 1500 años tratar nuevamente el asunto relacionado con el abastecimiento de agua potable. Así, en los últimos años, fue necesario realizar un enorme desarrollo científico que permitiera elaborar tecnología de alto nivel con el fin de poder abastecer agua con calidad aceptable.

Los primeros pensamientos, ideas y conceptos, quedaron confinados a los círculos esotéricos de filósofos y científicos; y como consecuencia permanecieron estériles y sin algún efecto sobre los diseños comunes de ingeniería. Por eso, aún cuando la historia de la ingeniería hidráulica data de aproximadamente 5000 años, la hidráulica y la hidrología modernas aparecieron hace apenas 500 años, por lo que se les considera disciplinas relativamente jóvenes.

---

\* Contribución atribuida a Hero.

## **LOS FENÓMENOS TRANSITORIOS EN LA HIDRÁULICA**

Uno de los temas sobre los que trata la hidráulica se refiere al estudio de los fenómenos transitorios. El conocimiento de los efectos de tales fenómenos cobra gran importancia para el diseño de obras hidráulicas, tales como obras de toma de algunas presas, conductos de alimentación y desfogue de plantas hidroeléctricas, acueductos, etc. Lo anterior se debe a que esos efectos pueden causar severos daños sobre las obras mencionadas, y consecuentemente, pueden ocurrir pérdidas materiales o incluso de vidas humanas.

Se dice que ocurre un fenómeno transitorio cuando las características del flujo varían a través del tiempo. En el capítulo siguiente se explica con mayor detalle este concepto (ver definiciones).

Algunos de los ejemplos comunes que ocasionan los fenómenos transitorios en sistemas ingenieriles hidráulicos son los siguientes:

1. Apertura o cierre de válvulas en una tubería o de compuertas en un canal.
2. Arranque o paro de bombas en un sistema de bombeo.
3. Inicio o fin de operación de turbinas hidráulicas.
4. Vibraciones de los álabes de rodets o impulsores.

### **Clasificación de los fenómenos transitorios**

Dependiendo del tipo de conducto en que ocurren los fenómenos transitorios, éstos pueden clasificarse en las siguientes categorías:

1. Fenómenos transitorios en conductos cerrados.
2. Fenómenos transitorios en canales abiertos.

## **ALCANCE DE LA PRESENTE TESIS**

En el presente trabajo se realiza una breve descripción de los estudios que se hacen a los fenómenos transitorios que ocurren en conductos cerrados, especialmente de aquéllos que se relacionan con el fenómeno denominado *golpe de ariete*. También, se lleva a cabo una exposición de los métodos usuales que se utilizan para analizar dicho fenómeno. Asimismo, se presentan los dispositivos de control hidráulico que existen para atenuar los efectos provocados por el mismo fenómeno. Se resuelven algunos problemas de aplicación, empleando para ello cada uno de los métodos expuestos. Y por último, se efectúa una comparación de los resultados obtenidos.

## II

# EL FLUJO TRANSITORIO EN CONDUCTOS CERRADOS

### GENERALIDADES

#### **\* Antecedentes históricos relativos al cálculo de los fenómenos transitorios en conductos a presión**

El estudio de los fenómenos transitorios comenzó con la investigación de la propagación en el aire de las ondas del sonido, la propagación de ondas en la superficie del agua y el flujo de sangre en las arterias. Sin embargo, ninguno de estos problemas se pudo resolver rigurosamente, sino hasta el desarrollo de la teoría de la elasticidad, del cálculo y de la solución de las ecuaciones diferenciales parciales.

Se considera actualmente que Michaud fue el primero en realizar investigaciones acerca del fenómeno del golpe de ariete en tuberías<sup>\*</sup>; Michaud publicó dichas investigaciones en Lausana, Suiza, en 1878.

---

\* Recientes investigaciones efectuadas por Anderson muestran que Menabrea fue el primero en estudiar dicho fenómeno (ver referencia 3).

En 1897, en Moscú, Nicolai Jukovsky llevó a cabo amplios experimentos relacionados con el fenómeno del golpe de ariete. Basado en sus estudios teóricos y experimentales publicó un reporte, en el cual dio a conocer su teoría básica del golpe de ariete. Jukovsky obtuvo la expresión para calcular la celeridad de la onda de presión, tomando en cuenta tanto la elasticidad del agua como la de las paredes de la tubería; asimismo desarrolló la expresión que relaciona la reducción de velocidad con el aumento de la presión en el flujo, al producirse el cierre brusco de una válvula situada aguas abajo de una tubería. Las ecuaciones que obtuvo Jukovsky conforman la primera gran aportación a la teoría del golpe de ariete.

El italiano Allievi, considerado como la figura más importante en el estudio de este fenómeno, profundizó en las investigaciones efectuadas por Jukovsky, desarrollando así la teoría general del golpe de ariete que publicó en 1902. Para un cierto tiempo de cierre  $t_c$  de una válvula, Allievi obtuvo una expresión para calcular el aumento de presión en dicha válvula. También presentó gráficas para calcular el aumento (o decremento) de presión producido por un cierre (o apertura) uniforme de una válvula.

En 1926, Strowger y Kerr (Estados Unidos) presentaron un procedimiento de cómputo para determinar los cambios en la velocidad de una turbina hidráulica producidos por cambios en la carga. Al realizar su análisis, tomaron en consideración las presiones provocadas por el fenómeno del golpe de ariete, la eficiencia de la turbina para diferentes aperturas, y maniobras de cierre uniformes y no uniformes.

Wood, en el mismo año, al realizar una discusión sobre el análisis de Strowger y Kerr, introdujo el método gráfico para el análisis del golpe de ariete. Por su parte, Löwy (Alemania), independientemente, desarrolló y presentó un método gráfico similar en 1928. Estudió también la resonancia provocada por el movimiento periódico de una válvula, y el decremento de presión causado por la apertura gradual de válvulas o compuertas. En su análisis consideró las pérdidas por fricción, al incluir los términos que las toman en cuenta en las ecuaciones diferenciales parciales básicas. Schnyder (Suiza, 1929, 1932), desarrolló un método gráfico de solución del golpe de ariete para conductos conectados a bombas centrífugas. Fue él, el primero que incluyó las pérdidas por fricción en el análisis gráfico. Bergeron

(Francia, 1931, 1937), extendió el método gráfico para poder determinar las condiciones de flujo en secciones intermedias de una tubería. Angus (Canadá, 1935), a su vez, elaboró la teoría básica del método gráfico, el cual considera las pérdidas por fricción, y realizó algunas aplicaciones del mismo.

Entre los años 1940 y 1960, fueron publicados numerosos trabajos referentes al análisis del golpe de ariete, entre los cuales destacan los realizados por Rich, Jaeger y Parmakian. Muchos de los desarrollos recientes se han logrado basándose en las investigaciones realizadas por científicos e ingenieros alemanes, franceses, estadounidenses, checos e italianos. Ruus fue el primero que presentó procedimientos para determinar la secuencia de cierre de una válvula (cierre óptimo de válvula), de tal manera que permitiera mantener la máxima presión generada dentro de los límites permisibles. Más tarde, Gray introdujo el método de las características, el cual está orientado a analizar mediante una computadora el fenómeno del golpe de ariete. Lai, en su tesis doctoral, aplicó dicho método. Streeter y él fueron los primeros en emplear las computadoras para analizar los fenómenos transitorios comunes, aplicando ese método. Después, Streeter publicó numerosos artículos relativos al método de las características.

Acerca de la teoría de cámaras de oscilación, las primeras contribuciones fueron hechas por Léauté, Rateau, Prásil y Vogt. En este rubro debemos mencionar a Thoma como el primero que mostró que una cámara es estable sólo si el área de su sección transversal es mayor que un cierto valor mínimo, ahora comúnmente conocido como *área de Thoma*. Otras contribuciones hechas a la teoría de torres de oscilación han sido hechas por Escande, Jaeger, Gardel, Binnie, Evangelisti, Paynter y Marris.

### **Definiciones**

En esta sección se definen los términos que más se usan en el estudio de los fenómenos transitorios en conductos a presión:

***Flujo permanente y no permanente:*** Se dice que se presenta *flujo permanente* en un conducto, cuando en una sección determinada del mismo, las condiciones de

flujo tales como la presión  $p$ , la velocidad  $V$  y el gasto  $Q$ , permanecen constantes a través del tiempo  $t$ . Si dichas condiciones cambian respecto al tiempo, el flujo es llamado *no permanente*.

Así, en un flujo permanente

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.1})$$

**Flujo transitorio:** Se dice que se presenta *flujo transitorio* cuando las condiciones cambian con respecto al tiempo, para pasar de un estado de flujo permanente, a otro que también es permanente, pero con condiciones distintas al primero. Dicho de otra forma, el flujo transitorio se presenta como una fase intermedia entre dos estados de flujo, ambos permanentes, los cuales son distintos uno de otro. El flujo transitorio tiene la característica de ser no permanente. El *golpe de ariete* es un caso particular de este tipo de flujo.

**Flujo unidimensional:** Se denomina flujo unidimensional a aquel cuyas características hidráulicas tales como presión, velocidad y gasto, varían en función de una sola coordenada curvilínea  $x$ , y tal vez, en función del tiempo. Esa coordenada generalmente se hace coincidir con el eje del conducto.

**Flujo uniforme y no uniforme:** Cuando la magnitud de la velocidad media del flujo es constante respecto a la distancia, en un cierto tiempo, al flujo se le denomina *uniforme*. Si por el contrario, la velocidad media del flujo varía respecto a la distancia, el flujo es llamado *no uniforme* o *variado*.

En un flujo uniforme se cumple que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.2})$$

**Flujo oscilatorio:** Se le llama *flujo oscilatorio* a aquel en el que sus condiciones varían respecto al tiempo y se repiten en un intervalo fijo de tiempo. A este intervalo se le llama período.

**Flujo compresible y no compresible:** Se considera que el flujo es *no compresible*, cuando a través del tiempo no existe diferencia significativa en los valores de la densidad del fluido de una sección y otra de la vena líquida. Si ocurre lo contrario, al flujo se le denomina *compresible*.

En el flujo no compresible ocurre que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.3})$$

en donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

### Cambios de presión causados por un cambio de velocidad instantáneo

Considérese una tubería como la mostrada en la figura II. 1, en la que el fluido se mueve con una velocidad  $V_0$  y la presión inicial aguas arriba de la válvula vale  $p_0$ . Para simplificar, no se consideran las pérdidas de carga locales o debidas a la fricción. Si se cierra la válvula (en forma parcial o total) instantáneamente, la velocidad de flujo en la misma cambia a  $V_0 + \Delta V$ , la presión alcanza un valor  $p_0 + \Delta p$ , y la onda de presión de magnitud  $\Delta p$  viaja en dirección aguas arriba. La velocidad con la que se propaga esta onda es conocida como *celeridad de la onda de presión*, y generalmente se designa con la letra  $a$ . Obsérvese en la figura II. 1 que las condiciones de flujo aguas arriba del frente de la onda son distintas a las que prevalecen aguas abajo.

Si se representa con  $m$  a la masa del fluido que cambia su cantidad de movimiento en la unidad de tiempo, resultará que

$$m = m_1 + m_2 \quad (\text{II.4})$$

en donde

$$m_1 = \rho_0 a A \Delta t \quad (\text{II.5})$$

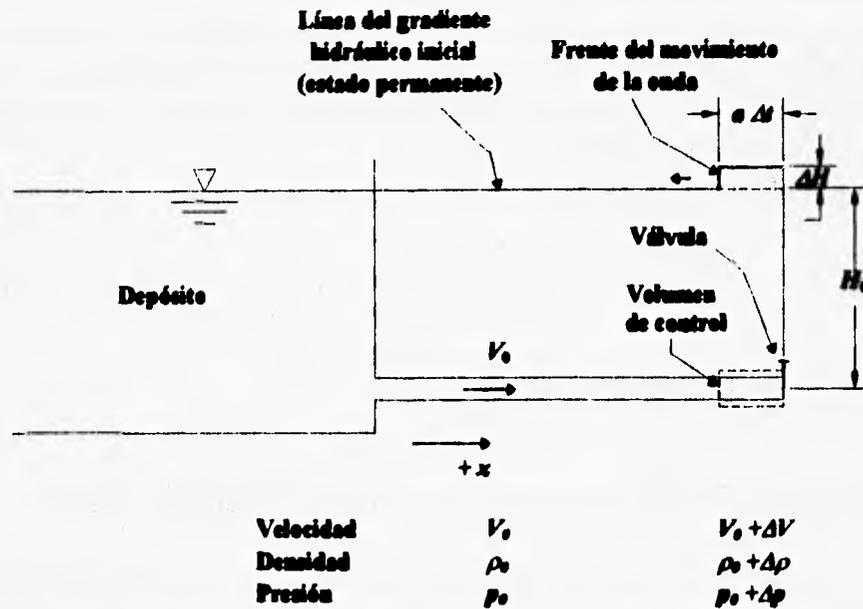


Figura II.1 Incremento de presión debido a la reducción instantánea de la velocidad ( $\Delta p = \rho g \Delta H$ ).

la cual representa la masa que ocupa el volumen de control de longitud  $a \cdot \Delta t$ . Asimismo

$$m_2 = \rho_0 V_0 A \Delta t \quad (II.6)$$

que es la masa que entra en el volumen de control en el mismo lapso. Si se sustituyen las expresiones II.5 y II.6 en la ecuación II.4 se obtiene que

$$m = \rho_0 (V_0 + a) A \Delta t \quad (II.7)$$

y entonces el cambio de cantidad de movimiento es

$$\Delta(mV) = \rho_0 (V_0 + a) A [(V_0 + \Delta V) - V_0] \Delta t$$

o sea

$$\frac{\Delta(mV)}{\Delta t} = \rho_0 (V_0 + a) A \Delta V \quad (\text{II.8})$$

Como se ha despreciado la fricción, el valor de la fuerza  $F$  que actúa sobre el volumen de control del fluido en la dirección positiva de  $x$ , es

$$p_0 A - (p_0 + \Delta p)A$$

es decir

$$F = -\Delta p A \quad (\text{II.9})$$

Recordando además la segunda ley de Newton, la cual establece que la variación de la cantidad de movimiento respecto al tiempo es igual a la fuerza neta, de las ecuaciones II.8 y II.9 podemos obtener que

$$\Delta p = -\rho_0 (V_0 + a) \Delta V \quad (\text{II.10})$$

Como se verá posteriormente, cuando se presentan los fenómenos transitorios en tuberías de metal o de concreto, o en túneles excavados en roca, la celeridad  $a$  (que resulta del orden de 1000 m/s) es mucho más grande que  $V_0$  (comúnmente menor a 10 m/s). Basándose en esto, se puede despreciar  $V_0$  en la ecuación anterior. Se recordará además que  $p = \rho \cdot g \cdot H$ , en donde  $H$  es la carga de presión sobre la tubería. Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación II.10 puede quedar como

$$\Delta p = -\rho_0 a \Delta V \quad (\text{II.11})$$

o también

$$\Delta H = -\frac{a}{g} \Delta V \quad (\text{II.12})$$

A la expresión anterior se le conoce como *Ecuación de Jukovsky*, ya que fue el ingeniero ruso quien la obtuvo por primera vez. El signo negativo en el segundo miembro de esa ecuación, indica que se presenta un incremento de presión ( $\Delta H$  positiva) para una reducción de velocidad ( $\Delta V$  negativa) en el flujo, o viceversa. Se debe hacer notar que la expresión II.12 se obtuvo para el caso en que la velocidad de

flujo cambia en el extremo aguas abajo de la tubería, y para un frente de onda que se propaga en sentido aguas arriba.

### Descripción del fenómeno del golpe de ariete

Considérese el sistema de conducción mostrado en la figura II.2, en el que las condiciones de flujo son permanentes para un tiempo  $t = 0$ , y la válvula (u otro órgano de cierre) se cierra por completo instantáneamente. Si se supone que en el sistema no hay fricción, para un estado permanente inicial, la carga de presión a lo largo de la tubería será igual a  $H_0$ . De acuerdo al párrafo anterior, considérense positivas a  $V$  en el sentido aguas abajo, y a  $\Delta H$  cuando representa un incremento de presión. La secuencia de eventos que sigue al cierre de la válvula puede ser dividida en cuatro partes (ver fig. II.2):

#### 1. $0 < t \leq L/a$ (fig. II.2a y b)

Un instante después de que se cierra la válvula, la velocidad de flujo en esta se reduce a cero. Lo anterior causa que la carga de presión se incremente a un valor  $\Delta H = +(a/g) V_0$ . Al ocurrir esto, la tubería se expande (en la figura II.2, se muestra el diámetro del tubo para el estado permanente inicial mediante una línea discontinua), el fluido a su vez se comprime aumentando así su densidad, y una onda de presión positiva se propaga hacia el embalse. Atrás de dicha onda, la velocidad de flujo es cero, y toda la energía cinética se convierte en energía elástica. Si  $a$  es la celeridad (velocidad) de las ondas de presión y  $L$  es la longitud de la tubería, entonces para un tiempo  $t=L/a$ , a lo largo de toda la longitud del conducto, éste se encuentra expandido, la velocidad de flujo es cero y la carga de presión tiene un valor  $H_0 + \Delta H$ .

#### 2. $L/a < t \leq 2L/a$ (fig. II.2c y d)

Cuando la onda de presión choca con el depósito de agua, las condiciones en la frontera ubicada entre la tubería y el embalse se tornan inestables, esto es debido a que el nivel del depósito se mantiene constante. Así en dicha frontera, del lado correspondiente al embalse, la carga de presión vale  $H_0$ ; mientras que del lado de la tubería la carga de presión es  $H_0 + \Delta H$ . La presión diferencial que se genera en dicho sitio provoca que el fluido se comience a mover de la tubería hacia el embalse

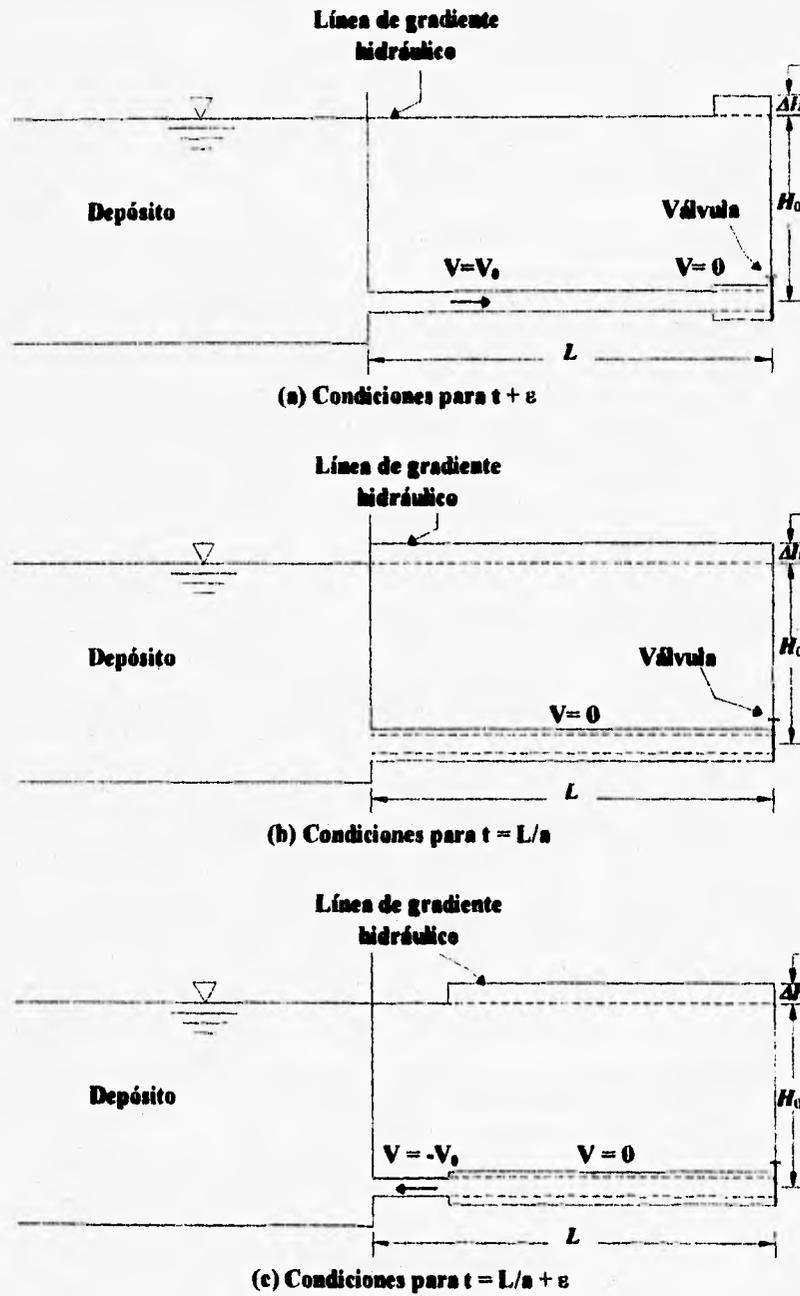


Figura II.2 Propagación de las ondas de presión causadas por cierre instantáneo de la válvula.

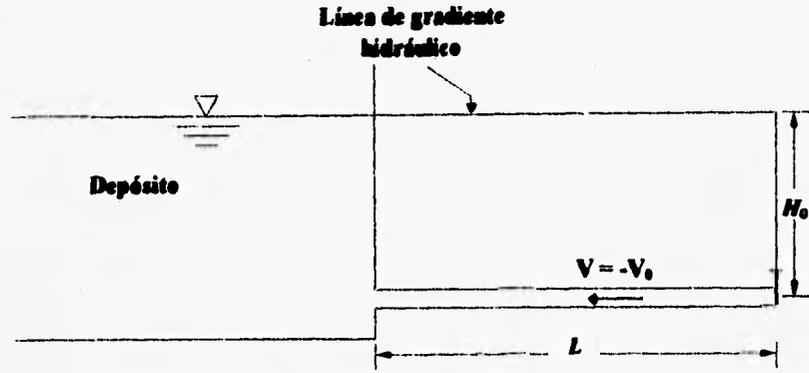
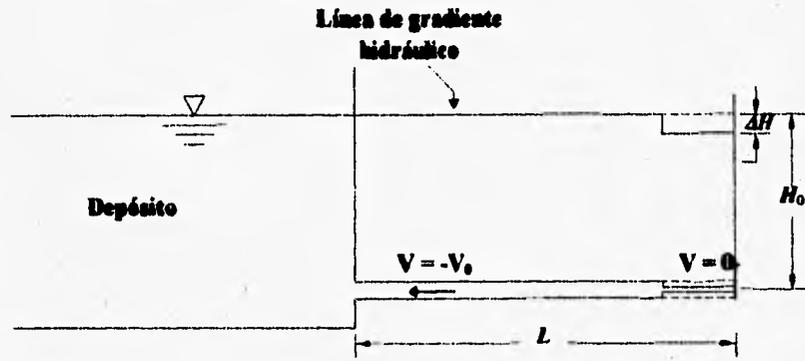
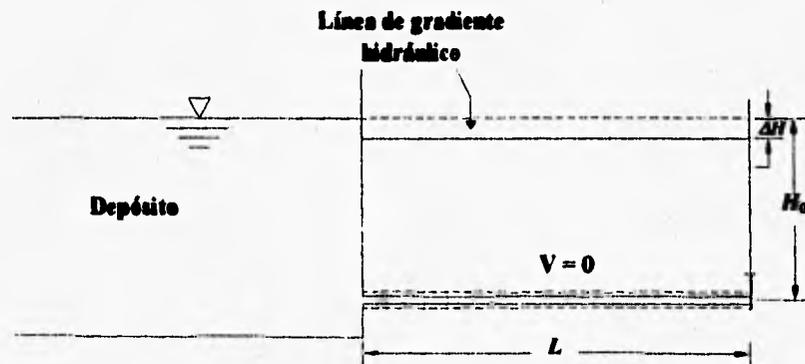
(d) Condiciones para  $t = 2L/a$ (e) Condiciones para  $t = 2L/a + \epsilon$ (f) Condiciones para  $t = 3L/a$ 

Figura 11.2 (Continuación)

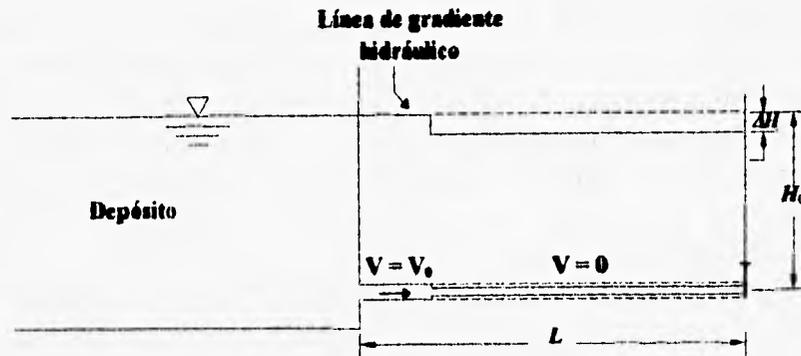
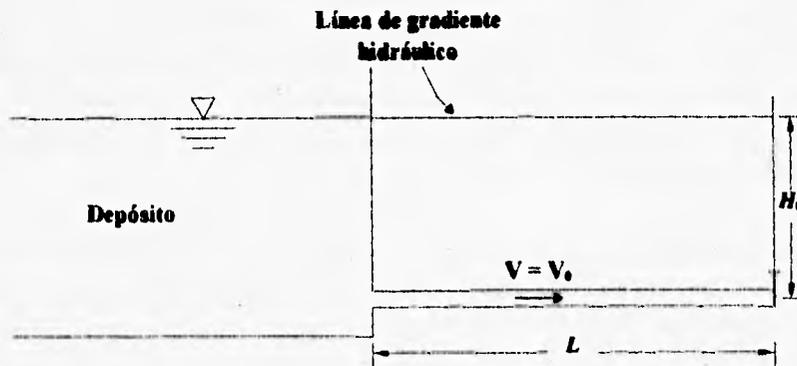
(g) Condiciones para  $t = 3L/a + \epsilon$ (h) Condiciones para  $t = 4L/a$ 

Figura II.2 (Continuación)

con una velocidad  $-V_0$ , lo que causa que la presión descienda de  $H_0 + \Delta H$  a  $H_0$  y que tanto el agua como el conducto adquieran sus propiedades iniciales. En otras palabras, una onda negativa de presión se propaga hacia la válvula; detrás de esta onda (lado aguas arriba), la presión vale  $H_0$  y la velocidad,  $-V_0$ . Así en un tiempo  $t = 2L/a$ , en toda la longitud de la tubería, la carga de presión es igual a  $H_0$ , la velocidad de flujo vale  $-V_0$ , y el conducto ha recuperado sus dimensiones iniciales.

### 3. $2L/a < t \leq 3L/a$ (fig. II.2e y f)

Puesto que la válvula se encuentra cerrada totalmente, no se puede mantener una velocidad negativa en ella; por lo tanto, en dicho lugar la velocidad cambia

instantáneamente de  $-V_0$  a 0. De esta manera la presión se reduce a  $H_0 - \Delta H$ . Entonces una onda negativa se propaga en el sentido aguas arriba. Detrás de esta onda, la presión tiene un valor de  $H_0 - \Delta H$ , la velocidad de flujo vale cero y el tubo se encuentra contraído. Para un tiempo  $t = 3L/a$ , en toda la longitud de la tubería, la carga de presión es  $H_0 - \Delta H$ , y la velocidad de flujo es igual a cero.

#### 4. $3L/a < t \leq 4L/a$ (fig. II.2g y h)

Tan pronto como la onda negativa choca con el depósito de agua, se crea nuevamente una condición de desequilibrio en el extremo aguas arriba del conducto. Ahora, la presión en el embalse es más alta que la que se presenta en la tubería, esto provoca que el fluido se mueva hacia la válvula con una velocidad  $V_0$ , la carga de presión se restaura a  $H_0$  y la tubería adopta nuevamente las dimensiones que tenía en el estado permanente. En el tiempo  $t = 4L/a$ , en toda la longitud de la tubería, la carga de presión vale  $H_0$ , y la velocidad de flujo es igual a  $V_0$ . Así para ese tiempo, las condiciones en el conducto son las mismas que las que se presentaban en el estado permanente inicial.

Como la válvula se encuentra completamente cerrada, la secuencia de eventos comienza nuevamente en el tiempo  $t = 4L/a$ . La figura II.2 ilustra la secuencia de eventos que suceden a lo largo de la tubería; mientras que la figura II.3 ilustra la variación de la presión respecto al tiempo en el extremo aguas abajo. Como se había supuesto que no había fricción en el sistema, la serie de procesos podría continuar indefinidamente, y se repetiría en un intervalo de  $4L/a$ . A este intervalo se le conoce como periodo del conducto. Sin embargo, en los sistemas físicos reales las ondas de presión se disipan debido principalmente a las pérdidas por fricción. De este modo, el flujo se detiene después de que transcurre poco tiempo. Así, si se toman en cuenta las pérdidas por fricción, la variación de la presión en la válvula respecto al tiempo sería como se ilustra en la figura II.4

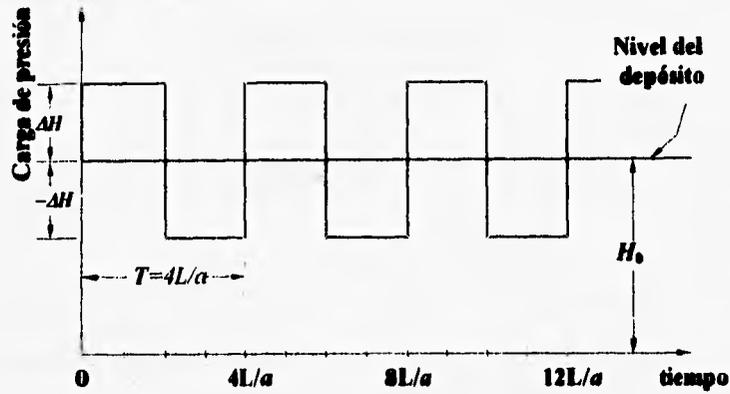


Figura II.3 Variación de presión respecto al tiempo en la válvula, sin considerar pérdidas por fricción.

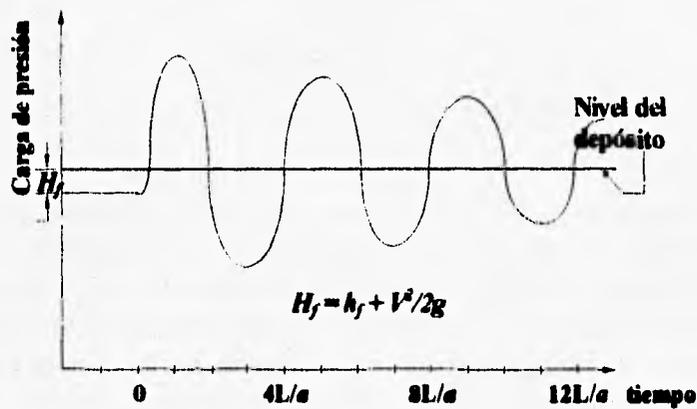


Figura II.4 Variación de presión respecto al tiempo en la válvula, considerando pérdidas por fricción.

## ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL FLUJO TRANSITORIO.

### Consideraciones básicas

Considérese un elemento de fluido confinado por dos secciones paralelas normales al eje del conducto (fig. II.5). La condición de equilibrio dinámico requiere

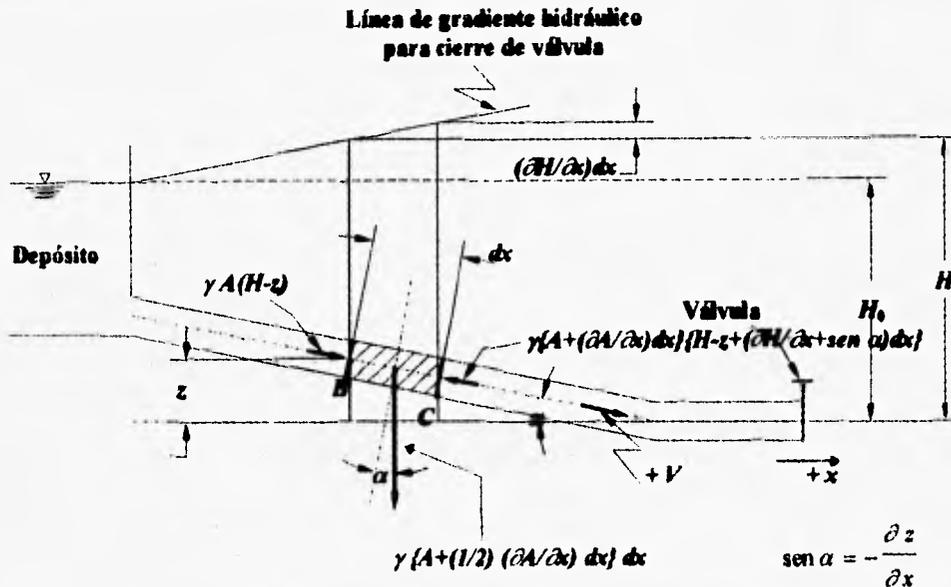


Figura II.5 Condición de equilibrio dinámico.

que la fuerza que actúa sobre el elemento sea igual al producto de la masa del elemento por su aceleración; lo anterior se satisface con la segunda ley de Newton. Para la condición de continuidad se necesita que todo el espacio interior disponible del elemento confinado sea ocupado por fluido durante todo el tiempo. Las ecuaciones que se obtienen a partir del estudio de las condiciones de equilibrio dinámico y de continuidad, se resuelven simultáneamente para obtener las ecuaciones fundamentales del flujo transitorio.

### Condición de equilibrio dinámico

En la figura II.5 se muestra la condición de equilibrio dinámico para un elemento de fluido con una longitud  $dx$ . Entre las secciones B y C, el área transversal puede tener un incremento con un valor de  $\frac{\partial A}{\partial x} dx$ . Si se define como  $A$  al valor del área transversal en la sección B, entonces el área transversal en la

sección C valdrá  $A + \frac{\partial A}{\partial x} dx$ . Para obtener la intensidad de la presión que actúa sobre las secciones B y C se procede de manera similar. Los valores que se obtienen, se presentan en la siguiente tabla:

	<i>Sección B</i>	<i>Sección C</i>
<b>Área</b>	$A$	$A + \frac{\partial A}{\partial x} dx$
<b>Presión</b>	$\gamma(H - z)$	$\gamma \left[ H - z + \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen } \alpha \right) dx \right]$
<b>Fuerza debida a la presión</b>	$\gamma A (H - z)$	$\gamma \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) \left[ H - z + \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen } \alpha \right) dx \right]$

Tabla II.1

La fuerza cortante que actúa en las paredes del conducto entre las secciones B y C es igual a

$$F_c = \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) \gamma h_{f A-B} \quad (\text{II.13})$$

Si se usa la fórmula de Darcy-Weisbach\* para calcular las pérdidas por fricción, se realizan operaciones y se simplifica, resulta que

$$F_c = \frac{\gamma}{g} \frac{f V^2}{8} \pi D dx + \left[ \frac{\pi}{8} \frac{\partial D^2}{\partial x} dx \right] \left[ f \frac{dx V^2}{D 2g} \right] \gamma \quad (\text{II.14})$$

La fuerza debida a la gravedad que actúa en el centro de gravedad del elemento, equivale a

$$\gamma \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) dx \quad (\text{II.15})$$

\*  $h_f = f(L/D) (V^2/2g)$

Entonces la fuerza resultante que actúa sobre el eje del tubo es

$$\begin{aligned} \gamma \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) \left[ H - z + \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen } \alpha \right) dx \right] - \gamma A (H - z) - \gamma \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) dx \text{sen } \alpha \\ + \frac{\gamma}{g} \frac{f V^2}{8} \pi D dx + \left[ \frac{\pi}{8} \frac{\partial D^2}{\partial x} dx \right] \left[ f \frac{dx V^2}{D 2g} \right] \gamma \end{aligned} \quad (II.16)$$

donde el sentido positivo de la fuerza se toma en sentido contrario del flujo. Si se desprecian los términos de muy pequeña magnitud y se reducen los términos semejantes, la fuerza resultante que actúa sobre el eje del tubo es igual a

$$\gamma \left[ A \frac{\partial H}{\partial x} + (H - z) \frac{\partial A}{\partial x} \right] dx + \frac{\gamma}{g} \frac{f V^2}{8} \pi D dx$$

o también

$$\gamma \left[ A \frac{\partial H}{\partial x} + (H - z) \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{f V^2}{8} \pi D \right] dx \quad (II.17)$$

Puede mostrarse que  $\gamma (H - z) \frac{\partial A}{\partial x} dx$  es siempre muy pequeño cuando se compara con  $\gamma A \frac{\partial H}{\partial x} dx$ . De lo anterior, la fuerza resultante que actúa sobre el eje del conducto se puede reducir a

$$\gamma \left( A \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{f V^2}{8} \pi D \right) dx \quad (II.18)$$

Si se desprecia  $\frac{\partial A}{\partial x} dx$ , la masa del elemento a ser desplazada es  $\frac{\gamma}{g} A dx$ , y su aceleración es  $-\frac{dV}{dt}$ . Entonces, de la segunda ley de Newton se puede escribir que

$$-\gamma A \frac{\partial H}{\partial x} dx = \frac{\gamma}{g} A \frac{dV}{dt} dx + \frac{\gamma f V^2}{g 8} \pi D dx \quad (\text{II.19})$$

Como  $V$  es una función de  $x$  y  $t$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{II.20})$$

entonces, expresando el área en términos de  $D$ , sustituyendo y simplificando, la expresión II.19 queda como sigue

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{f}{2D} V^2 \right) \quad (\text{II.21})$$

La ecuación II.21 constituye la ecuación de equilibrio dinámico para un elemento de fluido en flujo transitorio.

### Condición de continuidad

Considérese el elemento de fluido de longitud  $dx$ , mostrado en la figura II.5. Para mayor claridad este se presenta nuevamente en la figura II.6. Despreciando, por ahora, alguna posible variación del radio debido a la presión, el volumen que entra al elemento y el que sale de él durante un intervalo de tiempo  $dt$ , son respectivamente

$$V_{ent} = V \pi r^2 dt \quad (\text{II.22})$$

$$V_{sal} = \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) \pi r^2 dt \quad (\text{II.23})$$

en donde  $r$  es el radio del conducto. El incremento en el volumen del elemento de fluido,  $dV_{ent}$ , durante el tiempo  $dt$  es

$$dV_{ent} = V_{ent} - V_{sal} = -\frac{\partial V}{\partial x} dx dt \pi r^2 \quad (II.24)$$

El cambio de presión,  $dp$ , durante el intervalo de tiempo  $dt$  es  $(\partial p / \partial t)dt$ . Este cambio de presión causa que las paredes del conducto se contraigan o expandan radialmente y que la longitud del volumen de control aumente o disminuya debido a la compresibilidad del fluido (ver figura II.6)<sup>3</sup>.

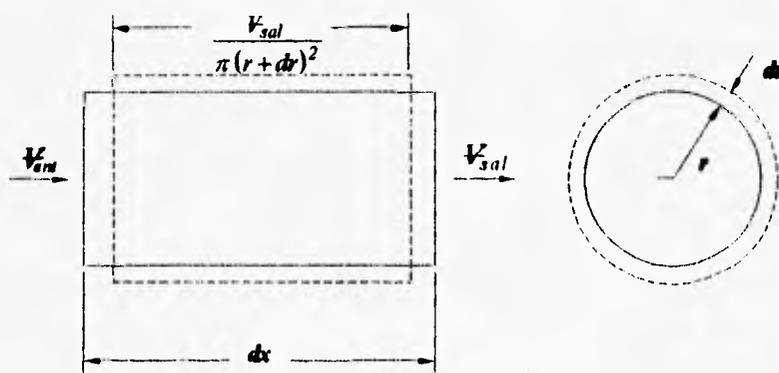


Figura II.6

Considérese el cambio de volumen  $dV_r$ , debido a la expansión o contracción radial del conducto. El esfuerzo tangencial  $\sigma$ , en el conducto debido a la presión  $p$  está dado por la ecuación

$$\sigma = \frac{pr}{e} \quad (II.25)$$

en donde  $e$  es el espesor de las paredes del conducto. Por consiguiente, si se desprecia la variación del radio respecto al tiempo, el cambio en el esfuerzo tangencial  $d\sigma$ , causado por  $dp$ , puede expresarse como

$$d\sigma = dp \frac{r}{e} = \frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{r}{e} \quad (II.26)$$

Puesto que el radio  $r$  se ha incrementado a  $r + dr$ , la deformación unitaria es

$$d\varepsilon = \frac{dr}{r} \quad (\text{II.27})$$

Si las paredes del conducto son linealmente elásticas, entonces

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (\text{II.28})$$

en donde  $E$  es el módulo de elasticidad de Young. Si se sustituyen las expresiones II.26 y II.27 en la ecuación II.28 se obtiene que

$$E = \frac{(\partial p / \partial t) dt (r / e)}{dr / r} \quad (\text{II.29})$$

o también

$$dr = \frac{\partial p r^2}{\partial t e E} dt \quad (\text{II.30})$$

El cambio en el volumen del elemento debido a la expansión o contracción radial del conducto es

$$dV_r = 2\pi r dx dr \quad (\text{II.31})$$

Sustituyendo la ecuación II.30 en esta última expresión queda que

$$dV_r = 2\pi \frac{\partial p r^3}{\partial t e E} dt dx \quad (\text{II.32})$$

A continuación se procede a obtener una expresión para el cambio en el volumen  $dV_c$ , debido a la compresibilidad del fluido. El volumen inicial del elemento de fluido es

$$V = \pi r^2 dx \quad (\text{II.33})$$

El módulo de elasticidad volumétrico  $K$  de un fluido, se define como

$$K = \frac{-dp}{dV_c/V} \quad (\text{II.34})$$

Sustituyendo en esta última expresión la ecuación II.33 y recordando que  $dp = (\partial p / \partial t)dt$ , resulta que

$$dV_c = \frac{-\partial p}{\partial t} \frac{dt}{K} \pi r^2 dx \quad (\text{II.35})$$

Si en un instante dado se supone que la densidad del fluido permanece constante, entonces se sigue de la ley de la conservación de la masa que

$$dV_{ent} + dV_c = dV_r \quad (\text{II.36})$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las expresiones II.24, II.32 y II.35 y dividiendo entre  $\pi r^2 dx dt$  resulta que

$$-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{2r}{eE} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{II.37})$$

o

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \left( \frac{2r}{eE} + \frac{1}{K} \right) = 0 \quad (\text{II.38})$$

Definase a

$$a^2 = \frac{K}{\rho [1 + (KD/eE)]} \quad (\text{II.39})$$

en donde  $\rho$  es la densidad de la masa del fluido. Recordando que  $p = \rho g H$ , reorganizando términos y sustituyendo  $Q = VA$ , la ecuación II.38 se convierte en

$$\frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.40})$$

La ecuación II.40 conforma la ecuación de continuidad para un elemento de fluido en flujo transitorio, en donde  $a$  es la celeridad de las ondas de presión que se generan en ese tipo de flujo.

### Celeridad de las ondas del golpe de ariete

La celeridad\* de las ondas del golpe de ariete depende tanto de las características del fluido como de las propiedades elásticas del conducto, así como de las fuerzas externas que actúan sobre él. En las propiedades elásticas se incluye tanto el tamaño del conducto, como el espesor y el material de sus paredes. En las fuerzas externas se incluyen el tipo de soportes y la libertad de movimiento que tiene el conducto en la dirección longitudinal.

El módulo de elasticidad volumétrico de un fluido depende a su vez de la temperatura, presión, densidad y de los gases disueltos del mismo. Pearsall<sup>3</sup> demostró que la celeridad de la onda de presión cambia cerca del 1% por cada 5°C. Se ha demostrado en pruebas de laboratorio que los gases disueltos en el fluido escapan de él cuando se le reduce la presión, siempre cuando ésta sea superior a la de vaporización. Lo anterior causa que se reduzca significativamente el valor de la celeridad de la onda. De lo anterior se deduce que la celeridad de una onda positiva puede ser más alta que la de una onda negativa.

Halliwell<sup>3</sup> presentó la siguiente expresión general para calcular la celeridad de la onda:

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho [1 + (K/E) \psi]}} \quad (\text{II.41})$$

en donde  $\psi$  es un parámetro adimensional que depende de las propiedades elásticas de la tubería,  $E$  es el módulo de elasticidad de Young de las paredes de la tubería y  $K$  y  $\rho$  son el módulo de elasticidad volumétrico y la densidad del fluido respectivamente. En las tablas II.2 y II.3 se presentan los valores de los módulos de elasticidad de Young y de elasticidad volumétrico de los materiales que

\* En el estudio de los fenómenos transitorios es común denominar así a la velocidad de la onda.

comúnmente se emplean para fabricar las paredes del conducto, así como las densidades de masa de varios líquidos.

A continuación se presentan las expresiones que permiten calcular  $\psi$  para las siguientes condiciones:

1. *Conductos rígidos*

$$\psi = 0 \quad (\text{II.42})$$

2. *Conductos elásticos de pared gruesa*

a. Conducto restringido al movimiento longitudinal en toda su longitud

$$\psi = 2(1 + \nu) \frac{R_0^2 + R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} - \frac{2\nu R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \quad (\text{II.43})$$

en donde  $\nu$  es la relación de Poisson y  $R_0$  y  $R_i$  son el radio externo e interno de la tubería respectivamente.

b. Conducto restringido al movimiento longitudinal en el extremo final

$$\psi = 2 \left[ \frac{R_0^2 + 1.5 R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} + \frac{\nu (R_0^2 - 3 R_i^2)}{R_0^2 - R_i^2} \right] \quad (\text{II.44})$$

c. Conducto con juntas frecuentes de expansión

$$\psi = 2 \left( \frac{R_0^2 + R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} + \nu \right) \quad (\text{II.45})$$

3. *Conductos elásticos de pared delgada*

a. Conductos restringidos al movimiento longitudinal en toda su longitud

$$\psi = \frac{D}{e} (1 + \nu^2) \quad (\text{II.46})$$

Material	Módulo de elasticidad, E (GPa) <sup>*</sup>	Relación de Poisson
Acero	200-212	0.27
Aleación de aluminio	68-73	0.33
Asbesto-Cemento	24	
Cobre	107-131	0.34
Concreto	14-30	0.1-0.2
Hierro forjado	80-170	0.25
Latón	78-110	0.36
<b>Plásticos</b>		
Nilón	1.4-2.75	
Poliestireno	5.0	0.4
Polietileno	0.8	0.46
PVC rígido	2.4-2.75	
Plomo	4.8-17	0.44
<b>Rocas</b>		
Arenisca	2.75-4.8	0.28
Caliza	55	0.21
Cuarzita	24.0-44.8	
Granito	50	0.28
Vidrio	46-73	0.24

Tabla II.2 Módulo de elasticidad de Young y relación de Poisson  
para diferentes materiales<sup>\*\*</sup>.

en donde  $D$  es el diámetro del conducto y  $e$  su espesor.

b. Conducto restringido al movimiento longitudinal en el extremo final

$$\psi = \frac{D}{e} (1.25 - \nu) \quad (II.47)$$

c. Conducto con juntas frecuentes de expansión

$$\psi = \frac{D}{e} \quad (II.48)$$

\* 1 GPa  $\approx$  1.02 X 10<sup>4</sup> kg/cm<sup>2</sup>

\*\* Fuente: Referencia No. 3

Líquido	Temperatura (°C)	Densidad, $\rho$ (kg./m <sup>3</sup> )	Módulo de Elasticidad Volumétrico, K (GPa)
Aceite	15	900	1.5
Agua dulce	20	999	2.19
Agua salada	15	1 025	2.27
Alcohol Etilico	0	790	1.32
Benceno	15	880	1.05
Glicerina	15	1 260	4.43
Mercurio	20	13 570	26.2
Queroseno	20	804	1.32

Tabla II.3 Densidad y módulo de elasticidad volumétrico de algunos líquidos a presión atmosférica\*.

#### 4. Túneles excavados en roca

Halliwell obtuvo expresiones extensas para calcular la  $\psi$  de túneles excavados en roca, revestidos o no revestidos. Usualmente, las características de la roca no pueden ser estimadas debido a que las condiciones de la misma no son homogéneas y a que contiene fisuras. Por lo tanto, si se usan en la práctica las expresiones de Halliwell, los resultados no serán confiables. En su lugar, pueden usarse las siguientes expresiones basadas en las ecuaciones de Parmakian<sup>3,4</sup>

##### a. Túneles no revestidos

$$\left. \begin{aligned} \psi &= I \\ E &= G \end{aligned} \right\} \quad (II.49)$$

en donde  $G$  es el módulo de rigidez de la roca. Recuérdese que el módulo de rigidez (o módulo cortante de elasticidad) se define como

$$G = \frac{\phi}{\omega} \quad (II.50)$$

en donde  $\phi$  es el esfuerzo cortante unitario y  $\omega$  es la deformación cortante unitaria del material. Y está relacionado con el módulo de elasticidad  $E$  del

\* Fuente: Referencia No. 3

mismo material, de acuerdo a la siguiente expresión

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{II.51})$$

b. Túnel con revestimiento de acero\*

$$\psi = \frac{DE}{GD + Ee} \quad (\text{II.52})$$

en donde  $e$  es el espesor del revestimiento (acero) y  $E$  es el módulo de elasticidad del acero.

### 5. Tubos de concreto reforzado

El tubo de concreto reforzado se reemplaza por un tubo de acero con su espesor equivalente correspondiente:

$$e_e = E_r e_c + \frac{A_s}{l_s} \quad (\text{II.53})$$

en donde  $e_c$  es el espesor del tubo de concreto;  $A_s$  y  $l_s$  son el área de la sección transversal y el espaciamiento de las barras de acero, respectivamente; y  $E_r$  es la relación entre los módulos de elasticidad del concreto y del acero. Usualmente el valor de  $E_r$  varía de 0.06 a 0.1; sin embargo considerando el agrietamiento que sufre el concreto, Chaudry<sup>3</sup> sugiere un valor de 0.05. Teniendo calculado  $e_e$ , el valor de  $\psi$  se puede determinar mediante alguna de las ecuaciones de la condición 3. En estas ecuaciones y en la II.41 se sustituyen los valores correspondientes al acero.

### Consideraciones sobre las ecuaciones del flujo transitorio

La ecuación de continuidad y la ecuación dinámica, integran una serie de

\* Se desprecia el efecto del concreto de relleno entre la roca y la placa de acero del conducto.

ecuaciones parciales diferenciales de primer orden. En estas ecuaciones existen dos variables independientes,  $x$  y  $t$ ; y dos variables dependientes,  $Q$  y  $H$ . Otras incógnitas como  $A$  y  $D$ , son características del sistema conductor y cambian respecto al tiempo; aunque también pueden ser funciones de  $x$ .

Aunque la celeridad de la onda depende fundamentalmente de las características del sistema, ésta se reduce significativamente al disminuir la presión; siempre y cuando, esta última sea mayor a la de vaporización.

El factor de fricción  $f$  varía de acuerdo con el número de Reynolds; sin embargo,  $f$  se considera constante, debido a que los efectos que ocasiona la variación de dicho factor son despreciables en el estado transitorio (véanse los ejemplos que se presentan en el capítulo VII).

Las ecuaciones II.21 y II.40 pueden ser escritas en forma matricial como sigue

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} Q \\ H \end{Bmatrix} = -[B] \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} Q \\ H \end{Bmatrix} - [G]$$

en donde

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & gA \\ \frac{a^2}{gA} & 0 \end{bmatrix} \quad (II.54)$$

y

$$[G] = \begin{Bmatrix} \frac{fQ|Q|}{2DA} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II.55)$$

Los valores característicos  $\lambda$ , de la matriz  $[B]$ , determinan el tipo de la serie de ecuaciones. La ecuación característica de la matriz  $[B]$  es

$$\lambda^2 - a^2 = 0 \quad (\text{II.56})$$

Por lo que

$$\lambda = \pm a \quad (\text{II.57})$$

Como  $a$  es real, ambos valores característicos son reales y distintos, y por lo tanto las ecuaciones II.21 y II.40 forman una serie de ecuaciones parciales diferenciales de tipo *hiperbólico*.

### Significado físico de las ecuaciones del flujo transitorio

Las ecuaciones dinámica y de continuidad, pueden ser resueltas simultáneamente. Si se desprecia el efecto de la fricción y además se supone que el término  $V \frac{\partial V}{\partial x}$  es muy pequeño comparado con  $\frac{\partial V}{\partial t}$ , las ecuaciones mencionadas pueden expresarse de la forma siguiente:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{II.58})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{II.59})$$

Las soluciones generales que corresponden a estas ecuaciones son las siguientes\*:

$$H - H_0 = F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (\text{II.60})$$

$$V - V_0 = -\frac{g}{a} \left[ F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{II.61})$$

\* La letra  $f$  en esas expresiones representa a una función y no debe confundirse con la fricción.

Analizando la ecuación II.60, se observa que dimensionalmente,  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  es una carga de presión que tiene las mismas unidades que  $H$ . En un instante dado,  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  es una función que depende solamente de  $x$ , y puede ser representada por una curva como la que se muestra en la figura II.7 (curva  $mn$ ). Después de que transcurre un tiempo  $dt$ , el argumento de la función  $F$  se convierte en  $t + dt + \frac{x}{a}$ .

Sin embargo, si por cada incremento  $dt$ , la abscisa disminuye un valor  $dx$  igual a  $-a \cdot dt$ , la magnitud de la función  $F$  permanece constante. Esto significa que la curva  $mn$  que se construye para un instante  $t$ , puede usarse también para un tiempo  $t + dt$ ; desplazando la misma una distancia  $dx = -a \cdot dt$  en dirección negativa de  $x$ . La curva desplazada se muestra en la figura II.7 mediante una línea discontinua  $m'n'$ . De lo anterior, se deduce que la función  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  representa una onda de presión que se mueve en la dirección negativa de  $x$  con una velocidad  $-a$ . Se puede proceder de una forma similar para explicar el significado físico de la función  $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ , pero en este caso  $dx = a \cdot dt$ . Se encontrará finalmente que este término representa una onda de presión que se mueve en la dirección positiva de  $x$ .

Así, se puede concluir de acuerdo a con la ecuación II.60, que para un tiempo  $t$ , en un punto de la tubería con coordenada  $x$ , el incremento de la carga es igual a la suma de las cargas móviles de presión (ondas de presión  $F$  y  $f$ ). Estas cargas móviles se propagan en el interior del conducto en dirección contraria una respecto a la otra, y a una velocidad constante  $a$ . Sin embargo, cuando se cruzan ambas ondas, ninguna de ellas sufre cambio alguno en su estructura.

La ecuación II.61, es una relación entre la magnitud de las cargas de presión  $F$  y  $f$  y el cambio en la velocidad que ocurre en una sección de la columna móvil de agua.

---

\* Los términos  $F$  y  $f$  se usan como abreviaturas de  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  y  $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$  respectivamente.

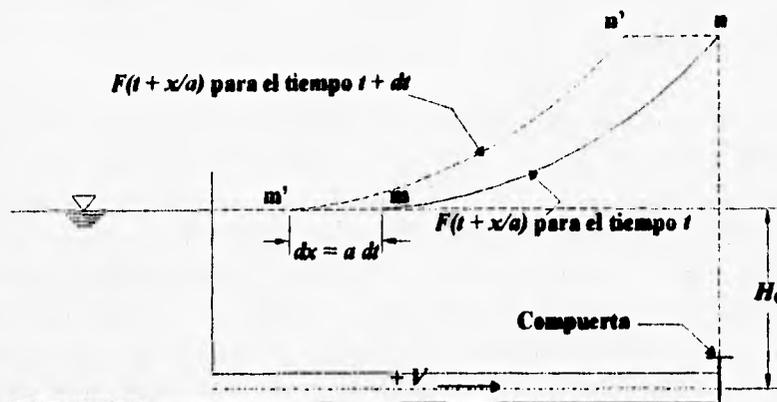


Figura II.7

Antes de concluir esta sección, tiene que demostrarse que  $V \frac{\partial V}{\partial x}$  es pequeño cuando se compara con  $\frac{\partial V}{\partial t}$ , tal como se había supuesto en el principio de la misma.

En la interpretación física de los términos  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  y  $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ , se mostró que éstos representan ondas de presión que se desplazan en el interior del conducto a una velocidad  $a$ , en la dirección  $-x$  y  $+x$  respectivamente. Además existe una relación definida entre  $x$  y  $t$ , es decir  $x = \pm a \cdot t + \text{una constante}$ . Con base en lo anterior se puede escribir que

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = \pm \frac{V}{a} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{II.62})$$

Usualmente, en un conducto, la relación  $V/a$  es del orden de  $1/100$  o incluso menor. Por lo tanto se concluye que el término  $V \frac{\partial V}{\partial x}$  es despreciable en comparación con  $\frac{\partial V}{\partial t}$ .

### **Métodos de solución**

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones dinámica y de continuidad son ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico. La solución directa de estas ecuaciones es imposible. Sin embargo, se han podido desarrollar métodos de solución, gráficos o analíticos, que se basan para su aplicación, en la linealización, o en su defecto, omisión de los términos no lineales de las ecuaciones. Estos métodos son aproximados y por lo tanto no pueden usarse para analizar sistemas muy extensos o que posean condiciones de frontera muy complejas. No obstante, el método de las características empleando a su vez métodos como el de diferencias finitas implícitas, logra constituirse en un método apropiado para analizar ese tipo de sistemas a través de una computadora.

En el método de las características, primeramente se convierten las ecuaciones diferenciales parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias a través de una combinación lineal de las mismas. Una vez transformadas pueden ser resueltas por el método explícito de diferencias finitas. La desventaja de éste radica en que, para que sea estable, deben usarse pequeños intervalos de tiempo para poder satisfacer la condición de Courant. Para superar ese problema, se puede usar una combinación de diferencias finitas implícitas.

En el método implícito de diferencias finitas, las derivadas parciales son reemplazadas precisamente por diferencias finitas, y entonces las ecuaciones algebraicas resultantes de todo el sistema se resuelven simultáneamente. El número de ecuaciones no lineales que tienen que resolverse depende del tamaño del sistema; sin embargo, el análisis por medio de este método convierte aún el más complicado sistema, en varios que contienen condiciones de frontera mucho menos complejas, que pueden ser resueltos a través de técnicas iterativas. El método tiene la ventaja de que es incondicionalmente estable, esto es, pueden ser usados intervalos de tiempo relativamente largos, lo que se traduce en tiempos de computadora económicos. Pero, el intervalo de tiempo no puede incrementarse arbitrariamente, ya que esto conlleva al suavizamiento de los picos reales de presión.

En los capítulos siguientes se exponen con mayor detalle el método de Allievi, el método gráfico de Bergeron y el método de las características.

### III

## EL MÉTODO DE ALLIEVI

### ECUACIÓN BÁSICA DE ALLIEVI

Si en las ecuaciones II.60 y II.61, se sustituye a  $x$  por  $L$ , donde  $L$  es la longitud de la tubería medida desde el depósito hasta el dispositivo de cierre (ver figura III.1); resulta que

$$H = H_0 + F\left(t + \frac{L}{a}\right) + f\left(t - \frac{L}{a}\right) \quad (\text{III.1})$$

y

$$V = V_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t + \frac{L}{a}\right) - f\left(t - \frac{L}{a}\right) \right] \quad (\text{III.2})$$

A estas expresiones se les conoce con el nombre de *Ecuaciones de Allievi*.

Si se considera que la magnitud de la carga piezométrica  $H_0$  permanece constante en el depósito, de la ecuación II.60 se obtiene que para  $x = 0$ , en el instante  $t$

$$f(t) = -F(t) \quad (\text{III.3})$$

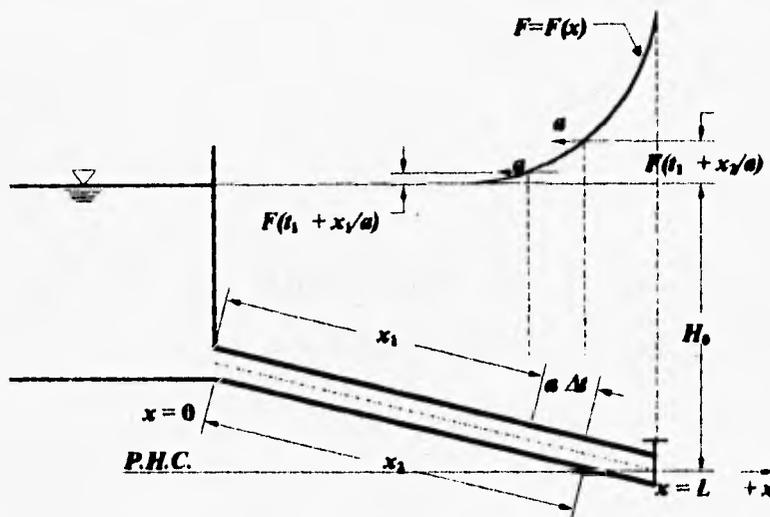


Figura III.1

esto significa que las ondas se reflejan en el depósito con igual magnitud y signo contrario.

Supóngase ahora a una onda  $F$  que parte del dispositivo de cierre en un instante  $t$ :  $F(t)$ ; dicha onda llegará al depósito en un tiempo  $t + \frac{L}{a}$  y entonces se reflejará convertida en una onda  $f$ . Como se ha visto, transformada en una onda  $f$ , tendrá la misma magnitud, pero signo contrario, y se desplazará hacia el dispositivo de control al que llegará en el instante  $t + \frac{2L}{a}$ . Con base en lo anterior, puede afirmarse que en la sección del conducto que corresponde a este último instante, resulta válida la siguiente expresión:

$$f\left(t + \frac{2L}{a}\right) = -F(t)$$

o, lo que es lo mismo:

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \quad (\text{III.4})$$

Lo anterior significa que la magnitud de la onda  $f$  en el órgano de control para el instante  $t$ , es igual a la de la onda  $F$  que partió del mismo hacia el depósito  $2L/a$  segundos antes, pero de signo opuesto.

Si se acepta que  $i = \frac{t}{T}$ , en donde  $T$  es la fase del conducto, el cual equivale a  $2L/a$ , la ecuación III.4 puede escribirse como

$$f(i T) = -F[(i - 1)T] \quad (\text{III.5})$$

donde  $i$  es un número adimensional, entero o fraccionario. Si se define que  $f(i T) = f_i$  y  $F[(i - 1)T] = F_{i-1}$ , la ecuación anterior se puede escribirse así:

$$f_i = -F_{i-1} \quad (\text{III.6})$$

Si se sustituye esta expresión en la ecuación III.1, para los instantes  $i$  e  $i-1$ , se obtiene que

$$H_i = H_0 + F_i - F_{i-1} \quad (\text{III.7})$$

y

$$H_{i-1} = H_0 + F_{i-1} - F_{i-2} \quad (\text{III.8})$$

Sumando estas ecuaciones se obtiene que

$$H_i + H_{i-1} - 2H_0 = F_i - F_{i-2} \quad (\text{III.9})$$

Haciendo un razonamiento similar con la ecuación III.2, se llega a que

$$\frac{a}{g}(V_{i-1} - V_i) = F_i - F_{i-2} \quad (\text{III.10})$$

Finalmente, al igualar las ecuaciones III.9 y III.10 resulta que

$$H_i + H_{i-1} - 2H_0 = \frac{a}{g} (V_{i-1} - V_i) \quad (\text{III.11})$$

Esta es la ecuación básica de Allievi y permite realizar un desarrollo en cadena mediante el cual se puede obtener la carga piezométrica en la sección adyacente al órgano de control para el instante  $i$ . Lo anterior se logra cuando se conoce el valor de dicha carga para el instante  $i-1$ , así como el incremento de la velocidad que se presenta entre dichos instantes ( $i$  e  $i-1$ ), mismo que está determinado por la ley de cierre o apertura del dispositivo de control.

### DESARROLLO EN CADENA DE ALLIEVI

Si se divide a la ecuación III.11 entre  $H_0$ , y se introduce  $V_0$  en el segundo miembro de la misma, se obtiene que

$$\frac{H_i}{H_0} + \frac{H_{i-1}}{H_0} - 2 = \frac{aV_0}{gH_0} \left( \frac{V_{i-1}}{V_0} - \frac{V_i}{V_0} \right) \quad (\text{III.12})$$

si además se define a  $\zeta_i^2 = \frac{H_i}{H_0}$  y  $\varepsilon = \frac{aV_0}{2gH_0}$ , entonces la ecuación anterior se convierte en

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i-1}^2 - 2 = 2\varepsilon \left( \frac{V_{i-1}}{V_0} - \frac{V_i}{V_0} \right) \quad (\text{III.13})$$

Por otra parte, cuando el mecanismo de control se somete a una maniobra de cierre o apertura siguiendo una determinada ley (ver figura III.2), la aplicación de la ecuación de continuidad en una sección transversal ubicada aguas arriba del mismo lleva a lo siguiente:

Antes de iniciarse dicha maniobra, el flujo en el conducto es permanente, por lo que

$$AV_0 = (C_d A_v)_0 \sqrt{2gH_0} \quad (\text{III.14})$$

después que se ha iniciado la maniobra

$$AV = (C_d A_v) \sqrt{2gH} \quad (\text{III.15})$$

Si se divide a la expresión anterior entre la ecuación III.14, resulta que

$$\frac{V}{V_0} = \frac{(C_d A_v)_i}{(C_d A_v)_0} \sqrt{\frac{H}{H_0}} \quad (\text{III.16})$$

De lo anterior puede escribirse que

$$\frac{V_i}{V_0} = \frac{(C_d A_v)_i}{(C_d A_v)_0} \sqrt{\frac{H_i}{H_0}} \quad (\text{III.17})$$

Ahora bien, si se define a  $\eta_i = \frac{(C_d A_v)_i}{(C_d A_v)_0}$  y  $\zeta_i = \sqrt{\frac{H_i}{H_0}}$ , la ecuación III.17 puede expresarse así

$$\frac{V_i}{V_0} = \eta_i \zeta_i \quad (\text{III.18})$$

Sustituyendo esta ecuación en la III.13, se obtiene finalmente que

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i-1}^2 - 2 = 2\varepsilon (\eta_{i-1} \zeta_{i-1} - \eta_i \zeta_i) \quad (\text{III.19})$$

A esta expresión se le conoce con el nombre de *Ecuación adimensional de Allievi*.

## MANIOBRAS DE CIERRE Y APERTURA

### Leyes para operaciones de cierre y apertura

Para poder obtener los valores tanto de la carga piezométrica como de la velocidad en el órgano de control cuando éste se somete a una maniobra de cierre o apertura, se necesita conocer la ley bajo la cual se efectúa dicha maniobra (ver la siguiente figura).

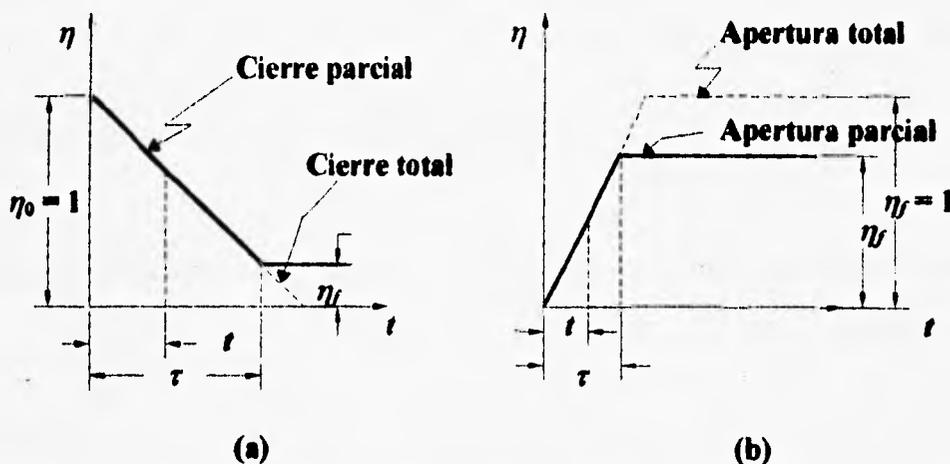


Figura III.2 Leyes para maniobras de cierre o apertura uniformes.

Para el caso de una maniobra de cierre que siga una ley de tipo lineal, esto quiere decir que el área efectiva del órgano varía linealmente respecto al tiempo, el valor de  $\eta_i$  será:

$$\eta_i = 1 - (1 - \eta_f) \frac{i}{\theta}, \quad 0 \leq i \leq \theta \quad (\text{III.20})$$

$$\eta_i = \eta_f, \quad i \geq \theta \quad (\text{III.20a})$$

donde  $i = \frac{t}{T}$  y  $\theta = \frac{\tau}{T}$ , siendo  $\tau$  el tiempo de cierre (o apertura en su caso). En un cierre parcial ocurre que  $\eta_f > 0$ , y es nulo cuando el cierre es total.

Para una ley uniforme (lineal) de apertura, ya sea parcial ( $\eta_f < 1$ ) o total ( $\eta_f = 1$ ), resulta que

$$\eta_i = \frac{i}{\theta} \eta_f, \quad 0 \leq i \leq \theta \quad (\text{III.21})$$

$$\eta_i = \eta_f, \quad i \geq \theta \quad (\text{III.21a})$$

Cuando la ley de cierre o apertura no es uniforme, como la que se muestra en la figura IV.3, resulta conveniente realizar una gráfica que contenga las características de la operación e interpolar de ella el valor deseado de  $\eta$ . En la actualidad se pueden simular operaciones que obedecen a leyes de cierta complejidad mediante el auxilio de una computadora.

### Tipos de maniobra según el tiempo de su ejecución

Se dice que una maniobra, parcial o total, es *rápida* o *brusca* cuando el tiempo de cierre o apertura  $\tau$  es menor o igual a la fase del conducto  $T$  ( $\tau \leq T$ ,  $\theta \leq 1$ ). Cuando se efectúa este tipo de maniobra, el valor de la carga piezométrica que se origina en el órgano de cierre se obtiene de la ecuación III.19, aplicada para los instantes  $i = 0$  e  $i = \theta$ , mismos que corresponden a las condiciones inicial y final respectivamente.

Si en esta ecuación se hace  $\zeta^2 = 1$ , y se recuerda que  $\varepsilon = \frac{a V_0}{2g H_0}$  y  $V_i = \eta_i \zeta_i V_0$ , ordenando términos resulta que

$$\frac{H_m}{H_0} = 1 + \frac{a}{gH_0} (V_0 - V_f) \quad (\text{III.22})$$

en donde  $H_m$  representa la carga piezométrica máxima o mínima, ya sea que la maniobra sea de cierre o de apertura,  $V_0$  y  $V_f$  son las velocidades correspondientes al flujo permanente inicial y final respectivamente. Así para una maniobra de cierre total ( $V_f = 0$ ), la expresión III.22 se reduce a

$$H_m = \left( 1 + \frac{aV_0}{gH_0} \right) H_0 \quad (\text{III.23})$$

si se acepta que  $\Delta H = H_m - H_0$ , entonces se puede escribir que

$$\Delta H = \frac{aV_0}{g} \quad (\text{III.23a})$$

se podrá observar que esta expresión corresponde a la *Ecuación de Jukovsky* (ver también capítulo II).

Si la maniobra es de apertura y se inicia cuando la compuerta está totalmente cerrada ( $V_0 = 0$ ), entonces

$$H_m = \left( 1 + \frac{aV_f}{gH_0} \right) H_0 \quad (\text{III.24})$$

En una maniobra brusca, la magnitud de las cargas extremas (máxima o mínima) que se originan en la válvula, no dependen de la ley de cierre o apertura, y se presentan en los instantes  $i = \theta$  e  $i = \theta + 1$  respectivamente<sup>2</sup>.

Se dice que la maniobra es lenta cuando el tiempo que tarda en efectuarse es mayor que  $T$ , es decir, si  $\tau > T$  y  $\theta > 1$ . En este caso, la variación de la carga respecto al tiempo se obtiene de la aplicación reiterada de la ecuación III.19, la cual permite conocer el valor de  $\zeta_i$  cuando ya se conoce el de  $\zeta_{i-1}$ , de acuerdo con la ley de cierre o apertura.

## CARTAS DE ALLIEVI

Las cartas elaboradas por Allievi son de gran utilidad para realizar estudios preliminares, ya que proporcionan un valor aproximado de la carga piezométrica máxima o mínima en la válvula mediante un procedimiento bastante rápido. Sin embargo, estos diagramas fueron realizados bajo la hipótesis de que el área efectiva en la válvula tiene una variación uniforme o lineal respecto al tiempo, y en consecuencia, no dan una estimación correcta de la carga piezométrica cuando la maniobra no es uniforme; por otra parte, tampoco se toma en consideración el efecto de la fricción en el conducto.

Allievi obtuvo sus cartas basándose en la ecuación III.19, en dichas cartas se obtiene la carga adimensional máxima  $\zeta_{max}^2$  para una maniobra de cierre uniforme en función de los parámetros  $\varepsilon$  y  $\theta$ . Obteniendo  $\zeta_{max}^2$ , se procede a obtener el valor de la carga piezométrica de acuerdo con la expresión  $H_{max} = H_0 \zeta_{max}^2$ . Las cartas se presentan en las figuras III.3, III.4 y III.5.

En la carta que se presenta en la figura III.4, se muestra además el instante en el que tiene lugar  $\zeta_{max}^2$ . Para determinar ese instante, se hace uso de la familia de curvas  $S$  que indican el tiempo (en unidades  $t=2L/a$ ) que transcurre desde el inicio de la maniobra hasta el momento en el que se presente  $\zeta_{max}^2$ .

En la misma figura puede comprobarse que si  $\theta \leq 1$  (cierre brusco),  $\zeta_{max}^2$  ocurre antes o al final de la primera fase sin depender del tiempo empleado para llevar a cabo la maniobra; y si  $\theta > 1$  (cierre lento), dicho valor máximo ocurre en alguna de las fases posteriores; además, si  $\varepsilon < 1$ , independientemente del valor de  $\theta$ ,  $\zeta_{max}^2$  se presenta antes de la primera fase.

Allievi también resolvió el problema para una maniobra de apertura uniforme de la válvula, del cual también elaboró cartas (ver figuras III.6 y III.7). En estas cartas

$$\varepsilon = \frac{aV_f}{2gH_0}$$

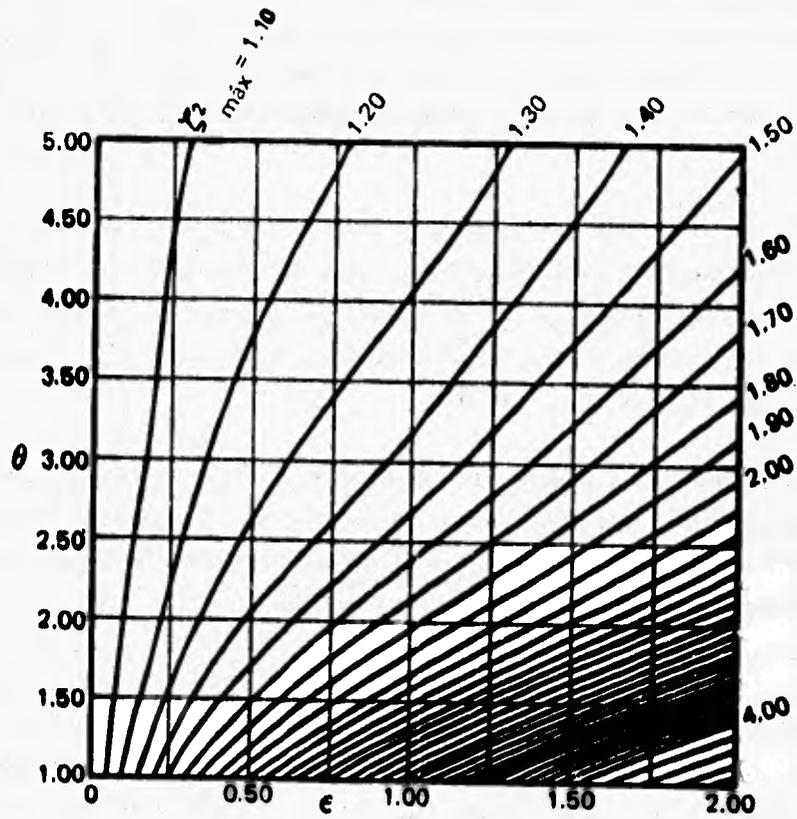


Figura III.3 Cierre lineal, carga piezométrica máxima para valores de  $\epsilon$  y  $\theta$  pequeños.

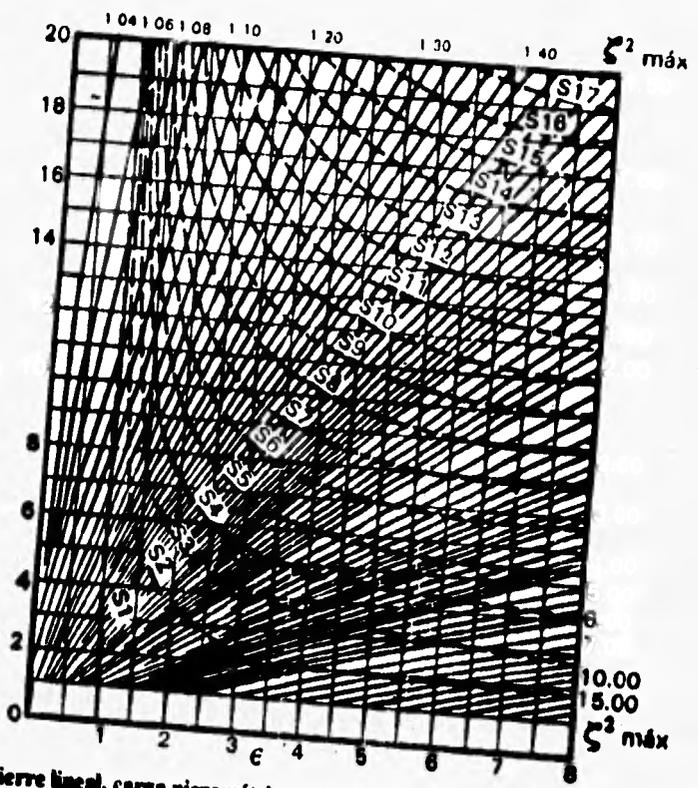
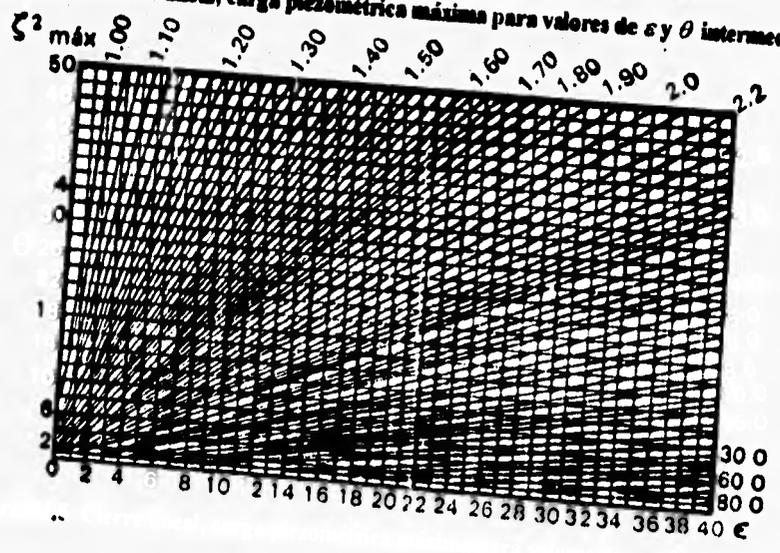


Figura III.4 Cierre lineal, carga piezométrica máxima para valores de  $\sigma$  y  $\theta$  intermedios.



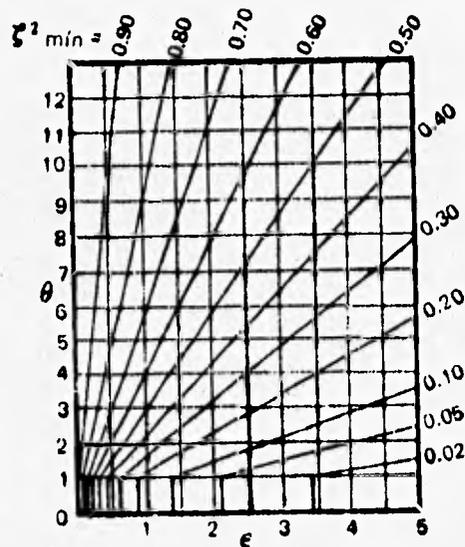


Figura III.6 Apertura lineal, carga piezométrica mínima para valores de  $\epsilon$  y  $\theta$  pequeños.

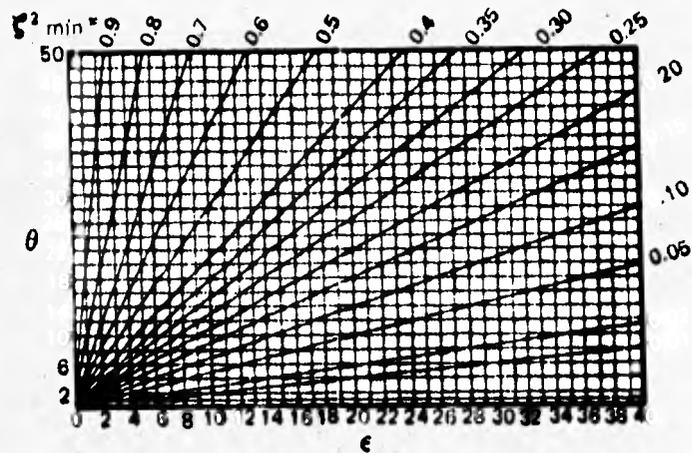


Figura III.7 Apertura lineal, carga piezométrica mínima para valores de  $\epsilon$  y  $\theta$  grandes.

## IV

# EL MÉTODO GRÁFICO DE BERGERON

### TEORÍA DEL ANÁLISIS GRÁFICO

#### Ecuaciones conjugadas del golpe de ariete

El método gráfico consiste esencialmente en representar en un sistema de coordenadas  $v-h$ , la velocidad y la carga que en cada instante se presentan en una sección determinada del conducto. Resulta ideal para obtener más rápidamente la solución de las ecuaciones del golpe de ariete. El método se obtiene como se indica a continuación:

Las expresiones II.60 y II.61 son las ecuaciones fundamentales del golpe de ariete, estas son:

$$H - H_0 = F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (\text{IV.1})$$

y

$$V - V_0 = -\frac{g}{a} \left[ F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{IV.2})$$

Al sustraer la ecuación IV.2 de la IV.1 se obtiene que

$$H - H_0 = \frac{a}{g}(V - V_0) + 2F\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (\text{IV.3})$$

La suma de las mismas ecuaciones da como resultado

$$H - H_0 = -\frac{a}{g}(V - V_0) + 2f\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (\text{IV.4})$$

La expresión IV.3 define las relaciones de carga y velocidad en la tubería en función de las ondas  $F$ , ya que, como puede observarse, en dicha ecuación se involucra solamente a ese tipo de ondas. De la misma manera, la ecuación IV.4 define las relaciones de carga y velocidad en función de las ondas  $f$ .

Considérese una tubería como la mostrada en la figura IV.1. En el segmento inferior de la tubería, que es de diámetro y espesor constantes, se tiene una celeridad de onda  $a_1$ ; mientras que en el segmento superior del conducto se tiene una celeridad de onda  $a_2$ . Supóngase que existe una onda  $F_1$  en la sección  $B_1$  para un tiempo  $t_1$ . Esta onda se moverá con una velocidad  $a_1$ , y estará en la sección  $C_1$  en el tiempo  $t_2 = t_1 + L_1 / a_1$ . Igualmente, supóngase que existe una onda  $f_2$  en  $C_2$  para un tiempo  $t_3$ . Esta onda se moverá hacia aguas abajo con una velocidad  $a_2$  y alcanzará  $B_2$  en el tiempo  $t_4 = t_3 + L_2 / a_2$ . Si se aplica la ecuación IV.3 entre las secciones  $B_1$  y  $C_1$ , y la ecuación IV.4 entre  $B_2$  y  $C_2$ , se obtendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_{B_1 t_1} - H_{B_1 t_0} &= \frac{a_1}{g}(V_{B_1 t_1} - V_{B_1 t_0}) + 2F_1 \\ H_{C_1 t_2} - H_{C_1 t_0} &= \frac{a_1}{g}(V_{C_1 t_2} - V_{C_1 t_0}) + 2F_1 \\ H_{C_2 t_3} - H_{C_2 t_0} &= -\frac{a_2}{g}(V_{C_2 t_3} - V_{C_2 t_0}) + 2f_2 \\ H_{B_2 t_4} - H_{B_2 t_0} &= -\frac{a_2}{g}(V_{B_2 t_4} - V_{B_2 t_0}) + 2f_2 \end{aligned}$$

Si se elimina  $F_1$  y  $f_2$  de estas ecuaciones y se utilizan las siguientes relaciones\* :

$$H_{B_1 t_0} = H_{C_1 t_0} \quad H_{C_2 t_0} = H_{B_2 t_0}$$

$$V_{B_1 t_0} = V_{C_1 t_0} \quad V'_{B_2 t_0} = V'_{C_2 t_0}$$

se obtienen las siguientes expresiones:

$$H_{B_1 t_1} - H_{C_1 t_2} = \frac{a_1}{g} (V_{B_1 t_1} - V_{C_1 t_2}) \quad (\text{IV.5})$$

$$H_{C_2 t_3} - H_{B_2 t_4} = -\frac{a_2}{g} (V'_{C_2 t_3} - V'_{B_2 t_4}) \quad (\text{IV.6})$$

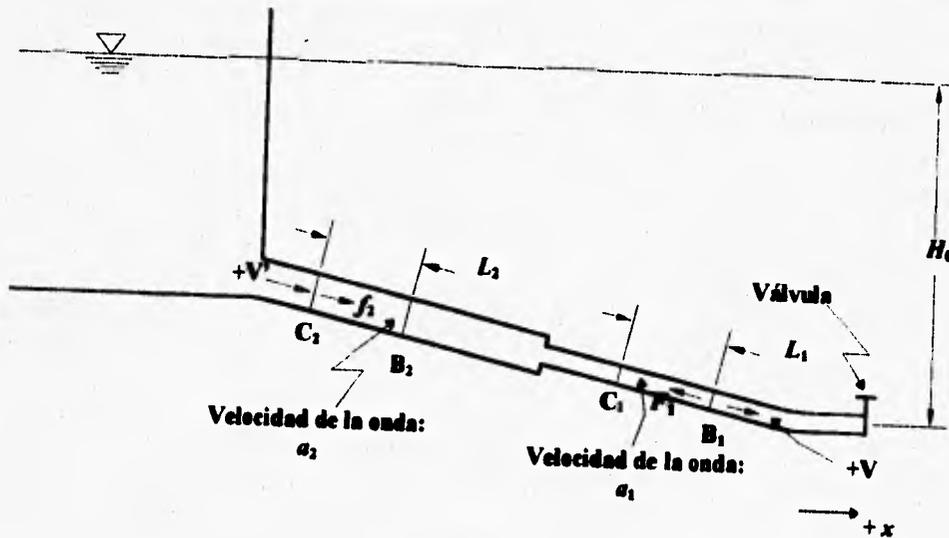


Figura IV.1

Para la obtención de las ecuaciones IV.5 y IV.6, B<sub>1</sub> y C<sub>1</sub> eran secciones arbitrarias del segmento inferior de la tubería, asimismo B<sub>2</sub> y C<sub>2</sub> lo eran del segmento superior. Sin embargo, estas ecuaciones pueden aplicarse entre dos

\* Válidas si se supone que no hay fricción en el sistema.

secciones cualesquiera, incluyendo los extremos, de cualquier segmento de tubería con diámetro y espesor uniformes.

Estas ecuaciones pueden reescribirse en otra forma si se involucran las siguientes relaciones:

$$h = \frac{H}{H_0} \quad (\text{IV.7})$$

$$v = \frac{V}{V_0} \quad \text{para maniobras de cierre} \quad (\text{IV.8})$$

$$v = \frac{V}{V_f} \quad \text{para maniobras de apertura} \quad (\text{IV.9})$$

donde  $H$  y  $V$  son respectivamente la carga de presión y la velocidad de flujo transitorio que se presentan en una determinada sección de una tubería para un cierto tiempo. Asimismo,  $V_0$  y  $V_f$  son respectivamente las velocidades permanentes de los flujos inicial y final en esa misma sección.

Entonces

$$h_{B_1 t_1} - h_{C_1 t_2} = 2\varepsilon_1 (v_{B_1 t_1} - v_{C_1 t_2}) \quad (\text{IV.10})$$

y

$$h_{C_2 t_3} - h_{B_2 t_4} = -2\varepsilon_2 (v_{C_2 t_3} - v_{B_2 t_4}) \quad (\text{IV.11})$$

Donde

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1 V_0}{2gH_0} \text{ y } \varepsilon_2 = \frac{a_2 V'_0}{2gH_0}$$

para un cierre de válvula, y

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1 V_f}{2gH_0} \text{ y } \varepsilon_2 = \frac{a_2 V'_f}{2gH_0}$$

para una apertura de válvula.

Las expresiones IV.10 y IV.11 son las ecuaciones conjugadas del golpe de ariete, mientras que  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son constantes de la tubería. En un sistema de coordenadas rectangulares  $v-h$ , las ecuaciones conjugadas se representan por medio de líneas rectas que tienen por pendiente  $\pm 2\varepsilon$  y que pasan a través de puntos conocidos como se muestra en la figura IV.2.

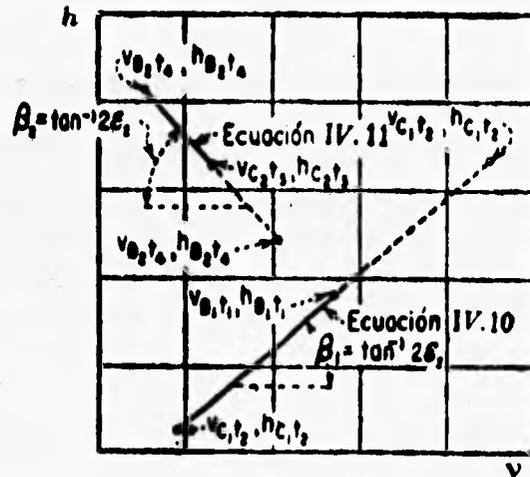


Figura IV.2

### ECUACIONES DE DESCARGA EN LA COMPUERTA

Cada ecuación conjugada del golpe de ariete define la relación que existe entre  $h$  y  $v$  en una sección determinada de un conducto, con área transversal constante, en función de los valores de  $h$  y  $v$  que prevalecen en otra sección del mismo. Sin embargo, para determinar  $h$  y  $v$  explícitamente, se requiere de una segunda relación independiente. Esta relación, la cual se obtuvo en el capítulo III (ecuación III.18), se determina a partir de la descarga en la válvula o compuerta.

En la expresión III.18 se había llegado a que

$$\frac{V}{V_0} = \eta \zeta \tag{IV.12}$$

en donde  $\eta = \frac{(C_d A_v)}{(C_d A_v)_0}$  y  $\zeta = \sqrt{\frac{H}{H_0}}$ . De acuerdo a las ecuaciones IV.7 y IV.8 (ó IV.9 en caso de apertura), la ecuación IV.12 se puede escribir así:

$$v = \eta \sqrt{h} \quad (\text{IV.13})$$

### SOLUCIÓN GRÁFICA PARA UN CIERRE DE VÁLVULA

Considérense el conducto así como la ley de cierre de la válvula que se presentan en las figuras IV.3a y b, en dicho sistema  $L/a = 1$  s y  $\varepsilon = 1$ . Para mostrar la solución de una forma simple, el incremento de carga se determina en intervalos de dos segundos. Ya que el tiempo que tarda la onda en viajar desde A hasta E es de un segundo, las ecuaciones conjugadas del golpe de ariete necesarias para los extremos del conducto son como las siguientes\*:

$$\begin{aligned} h_{A_0} - h_{E_1} &= 2(v_{A_0} - v_{E_1}) & (\text{a}) \\ h_{E_1} - h_{A_2} &= -2(v_{E_1} - v_{A_2}) & (\text{b}) \\ h_{A_2} - h_{E_3} &= 2(v_{A_2} - v_{E_3}) & (\text{c}) \\ h_{E_3} - h_{A_4} &= -2(v_{E_3} - v_{A_4}) & (\text{d}) \\ h_{A_4} - h_{E_5} &= 2(v_{A_4} - v_{E_5}) & (\text{e}) \\ h_{E_5} - h_{A_6} &= -2(v_{E_5} - v_{A_6}) & (\text{f}) \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

En estas ecuaciones las razones de carga  $h$  y de velocidad  $v$  en la válvula son indicadas para el tiempo  $t = 0, 2, 4$  y  $6$  segundos. Por lo tanto, en la solución del problema del golpe de ariete, solamente se requerirá la relación de descarga en la válvula para esos tiempos específicos. Estas relaciones son como siguen:

\* Los subíndices de A y E indican el tiempo, en segundos, que transcurre después de que se abre la válvula.

$$v_{A_0} = 1.0\sqrt{h_{A_0}} \quad (\text{m})$$

$$v_{A_2} = 0.7\sqrt{h_{A_2}} \quad (\text{n})$$

$$v_{A_4} = 0.3\sqrt{h_{A_4}} \quad (\text{o}) \quad (\text{IV.15})$$

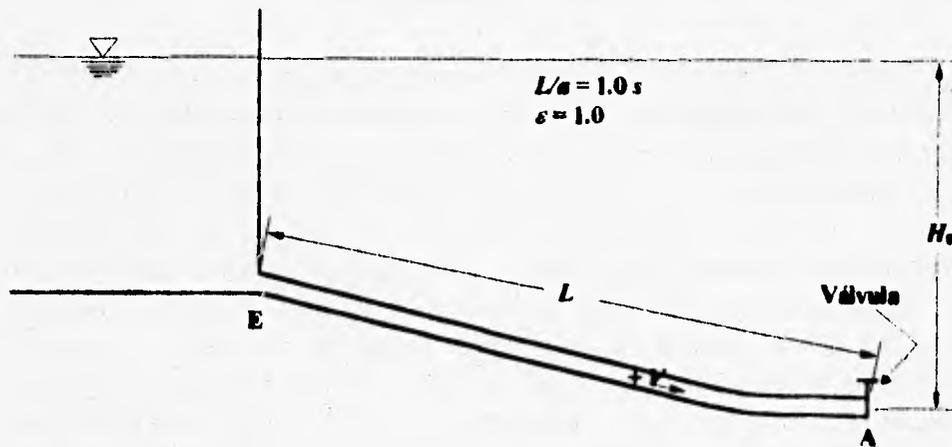
$$v_{A_6} = 0 \quad (\text{p})$$

$$v_{A_t} = 0 \text{ cuando } t > 6 \text{ segundos.}$$

El procedimiento para resolver simultáneamente las ecuaciones IV.14 y IV.15 por medio de métodos gráficos es como se presenta a continuación (ver figura IV.3c): En un conjunto de ejes coordenados  $v-h$ , se dibujan las parábolas  $m$ ,  $n$ ,  $o$  y  $p$  para los valores de  $\eta = 1.0$ ,  $0.7$ ,  $0.3$  y  $0$ , tal como se muestra en la figura. La parábola  $\eta = 0$  coincide con el eje vertical en  $v = 0$ . Antes de que se efectúe el movimiento en la válvula, el punto  $A_0$  se localiza sobre las coordenadas  $h = l$  y  $v = l$ . Debido a que el efecto de la onda, que se origina al cerrar la válvula, no alcanza al depósito sino hasta después de que la onda ha viajado un segundo,  $E_1$  también se localiza en el mismo punto que  $A_0$ . Por lo tanto, la ecuación IV.14a se representa como un punto sobre el diagrama, en  $h = l$  y  $v = l$ . La ecuación IV.14b es de una línea recta que tiene por pendiente  $-2\varepsilon$  y que pasa a través del punto  $E_1$ . Como el punto que corresponde a  $A_2$  se ubica sobre la parábola  $n$  y también sobre la línea  $b$ , este se localiza necesariamente en la intersección de ambas líneas tal como se muestra en la figura. La ecuación IV.14c es de una línea recta que tiene por pendiente  $2\varepsilon$  y que pasa a través del punto  $A_2$ . Para un nivel constante en el depósito,  $E_3$  se localiza en el eje horizontal en  $h = l$ . Los puntos que corresponden a  $A_4$ ,  $E_5$ ,  $A_6$ ,  $E_7$ ,  $A_8$ , etc., se localizan de una forma similar (ver figura IV.3c).

Realizando una comparación de los resultados que se obtienen mediante este método con aquellos que nos proporcione un método analítico nos puede dar idea de la buena aproximación que tiene el método. Resumiendo, el método gráfico para analizar el problema del golpe de ariete está hecho esencialmente para resolver ecuaciones simultáneas. El primer grupo de estas ecuaciones depende de los valores de  $\eta$ , la abertura de válvula efectiva, la cual generalmente se especifica. Estas ecuaciones se representan por medio de parábolas en la gráfica  $v-h$ . El segundo

grupo de ecuaciones se obtiene a partir de las ecuaciones conjugadas del golpe de ariete. Estas expresiones se representan en la gráfica  $v-h$  por medio de líneas rectas con pendiente  $\pm 2\varepsilon$ . Las intersecciones de estas líneas con las parábolas determinan las razones de carga y de velocidad en el órgano de control, asimismo las intersecciones de las mismas líneas con la línea horizontal  $h = l$  determinan las razones para el extremo aguas arriba del conducto.



(a)



Ley de cierre de la válvula

(b)

Figura IV. 3



## V

# EL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

## INTRODUCCIÓN

Corresponde a este capítulo la exposición detallada del método de las características. En el segundo capítulo de esta tesis se demostró que las expresiones que describen el estado de flujo transitorio en conductos cerrados son ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, lo que permite transformarlas en ecuaciones diferenciales ordinarias a lo largo de ciertas direcciones preferenciales: sus "características". En el presente capítulo se obtienen las ecuaciones que permiten simular un conducto, y se desarrollan además las condiciones de frontera para un cierto número de condiciones finales simples. Para la obtención de las ecuaciones se sigue la aproximación general propuesta por Lister y posteriormente adoptada por Streeter y Wylie<sup>3</sup>. Finalmente se presenta el criterio de estabilidad y convergencia para que el esquema de diferencias finitas sea estable.

## ECUACIONES CARACTERÍSTICAS

Para facilitar la discusión se reescriben las ecuaciones de continuidad y dinámica (ecuaciones II.21 y II.40) obtenidas en el capítulo II como

$$L_1 = \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (\text{V.1})$$

$$L_2 = a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{V.2})$$

Considérese una combinación lineal de las ecuaciones anteriores, esto es

$$L = L_1 + \lambda L_2$$

o también

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \lambda g A \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (\text{V.3})$$

Esta expresión es válida para cualquier valor de  $\lambda$ , y si se escogen dos valores de  $\lambda$  se obtendrán dos ecuaciones independientes que pueden usarse en lugar de las expresiones V.1 y V.2. El método de las características puede plantearse como la selección de dos valores diferentes de  $\lambda$  que transforman estas ecuaciones diferenciales parciales en ordinarias.

Sean  $H = H(x, t)$  y  $Q = Q(x, t)$  soluciones de las ecuaciones V.1 y V.2. Sus derivadas totales son entonces:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (\text{V.4})$$

y

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (\text{V.5})$$

Observando las ecuaciones V.4 y V.5, se ve que la expresión V.3 se puede convertir en ordinaria si se puede poner que

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{dx}{dt} = \lambda a^2 \quad (\text{V.6})$$

lo cual se cumple cuando

$$\lambda = \pm \frac{l}{a} \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = \pm a \quad (\text{V.7})$$

Entonces, utilizando las ecuaciones V.4 y V.5, en el caso de que sea válida V.7 y tomando en cuenta a V.6, la ecuación V.3 puede escribirse como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (\text{V.8})$$

si

$$\frac{dx}{dt} = a \quad (\text{V.9})$$

y

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (\text{V.10})$$

si

$$\frac{dx}{dt} = -a \quad (\text{V.11})$$

Obsérvese que las ecuaciones V.8 y V.10 son válidas si se satisfacen las ecuaciones V.9 y V.11 respectivamente. En otras palabras, las ecuaciones diferenciales parciales V.1 y V.2 se convierten en ordinarias con variable independiente  $t$ , si se imponen las relaciones dadas por las expresiones V.9 y V.11.

En el plano  $x-t$ , las ecuaciones V.9 y V.11 representan dos líneas rectas con pendiente  $\pm 1/a$ . Éstas se denominan *líneas características*. Matemáticamente,

dichas líneas dividen el plano  $x-t$  en dos regiones, que pueden estar dominadas por dos tipos diferentes de solución, es decir, la solución puede ser discontinua a lo largo de estas líneas. Físicamente representan la trayectoria recorrida por una perturbación. Por ejemplo, una perturbación que se origine en el punto **A** (Fig. V.1), en el tiempo  $t_0$ , alcanzaría al punto **P** transcurrido un tiempo  $\Delta t$ .

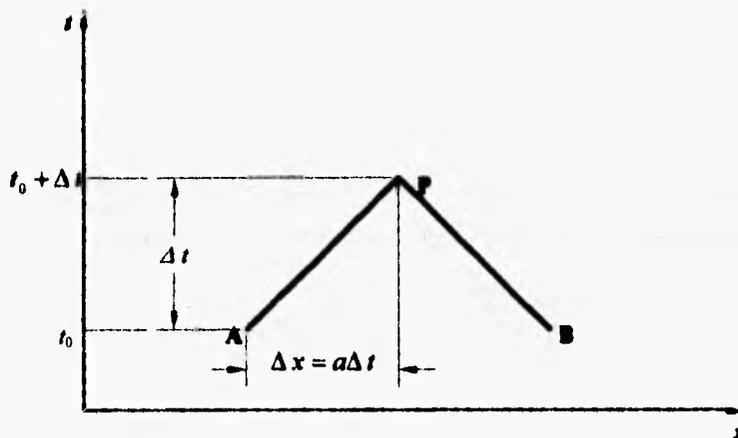


Figura V.1 Líneas características en el plano  $x-t$ .

Antes de presentar un procedimiento para resolver las ecuaciones V.8 y V.10, se interpretará primeramente el significado físico de las líneas características en el plano  $x-t$ . Para facilitar esta discusión, considérese una tubería como la mostrada en la figura V.2. Las ecuaciones V.8 y V.10, llamadas también *ecuaciones de compatibilidad*, son válidas a lo largo de la longitud del conducto, es decir, para  $0 < x < B$ . En los extremos ( $x = 0$  y  $x = L$ ) se requieren dar expresiones especiales que permitan determinar las condiciones de frontera (ver figura V.3). En el ejemplo bajo consideración, existe un depósito con carga constante en el extremo aguas arriba ( $x = 0$ ), y una válvula en el extremo aguas abajo ( $x = L$ ). Las condiciones de flujo transitorio se producen al cerrar la válvula. Esto provoca que se reduzca el gasto que pasa a través de la válvula hasta llegar a ser igual a cero, lo que ocasiona que se incremente la presión en el órgano de cierre. Debido a este incremento, una onda de presión viaja en sentido aguas arriba. Si el recorrido de esta onda se traza en el plano  $x-t$ , quedaría representado por la línea **BC** tal como se muestra en la figura V.4. Se puede ver claramente en esta figura que las condiciones en la región I dependen solamente de las condiciones iniciales debido a que las condiciones de

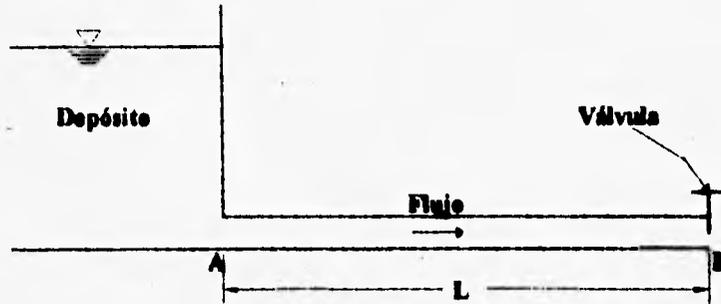


Figura V.2 Tubería simple.

frontera aguas arriba no cambiaron, mientras que en la región II dependen de las condiciones prevalecientes en la frontera aguas abajo. Así, la línea característica BC separa los dos tipos de solución. Si las excitaciones se impusieran simultáneamente en los puntos A y B, entonces la región influenciada por las condiciones iniciales sería como la que se muestra en la figura V.5, en donde la línea característica AC separa la región influenciada por la frontera aguas arriba y las condiciones iniciales, y la línea BC separa las regiones influenciadas por las mismas condiciones iniciales pero también por la frontera aguas abajo. En otras palabras, las líneas características

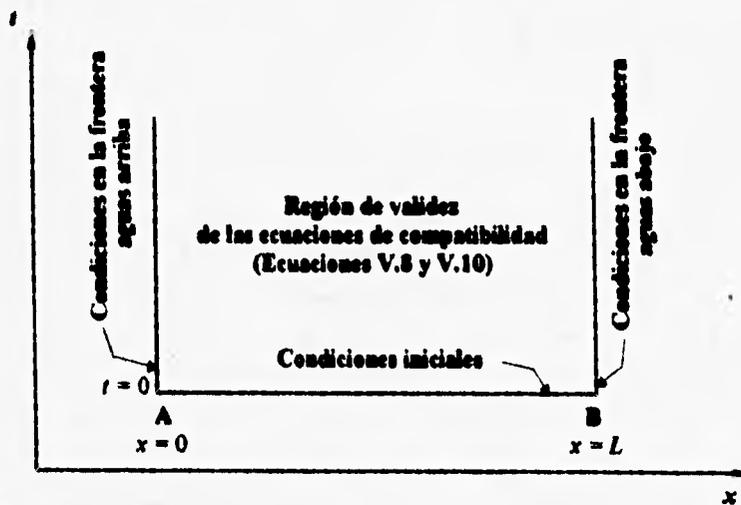


Figura V.3 Región de validez para una tubería simple.

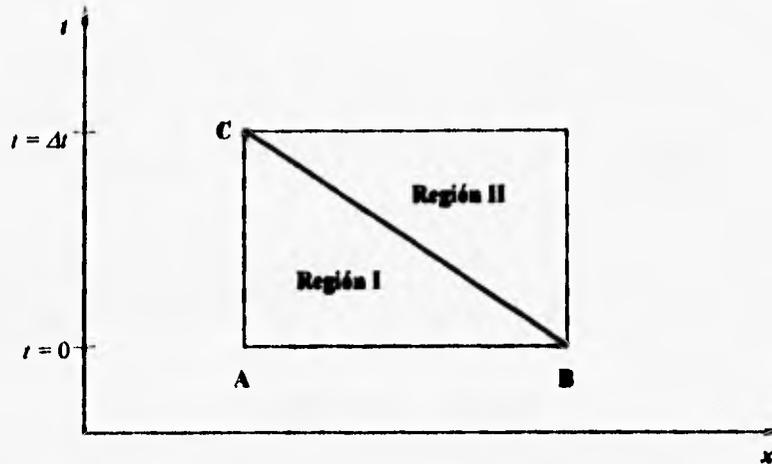


Figura V.4 Excitación en el extremo aguas abajo.

en el plano  $x-t$  representan las trayectorias de viaje de las perturbaciones que se originaron en diversos puntos del conducto.

Para resolver las ecuaciones V.8 hasta la V.11 se han propuesto varios esquemas de diferencias finitas. Streeter y Wylie utilizaron una técnica de

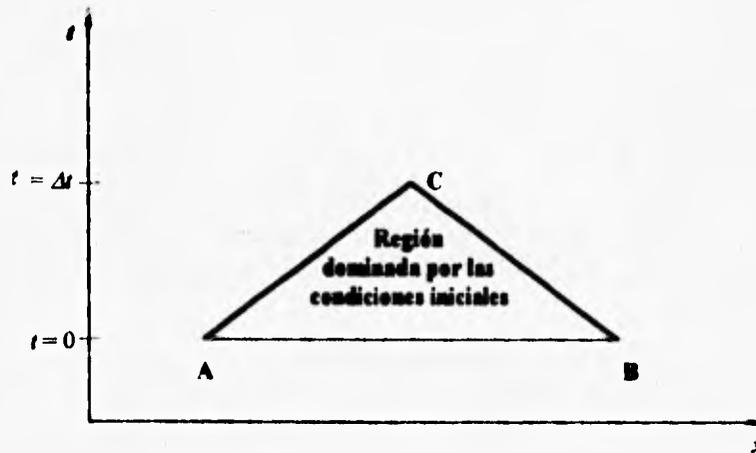


Figura V.5 Excitación en los extremos aguas arriba y aguas abajo.

diferencias finitas de primer orden; Evangelisti sugiere un método pronosticador-corrector; y Lister emplea esquemas de diferencias finitas tanto de primer orden como de segundo orden. Debido a que los intervalos de tiempo que se utilizan en la resolución de estas ecuaciones en problemas prácticos son generalmente pequeños, se presenta aquí la técnica de primer orden que sugiere Streeter y Wylie la cual proporciona resultados suficientemente precisos. Sin embargo, si las pérdidas por fricción son muy grandes, esta técnica podría dar resultados inestables. Para tales casos, se podría emplear un método pronosticador-corrector o una aproximación de segundo orden (consultar referencia 3) para evitar que el esquema de diferencias finitas se vuelva inestable.

Se observa en la figura V.1 que para poder calcular las condiciones desconocidas en el tiempo  $t_0 + \Delta t$ , tienen que conocerse las condiciones para el tiempo  $t = t_0$ . Ya sea que estas sean las condiciones iniciales, es decir aquellas correspondientes para el tiempo  $t = 0$  (estado permanente inicial), o las que han sido calculadas para el intervalo de tiempo previo. Para determinar las condiciones desconocidas se procede como se indica a continuación: Refiriéndose a la figura V.1 se puede escribir a lo largo de la línea característica positiva AP:

$$dQ = Q_P - Q_A \quad (\text{V.12})$$

$$dH = H_P - H_A \quad (\text{V.13})$$

Igualmente, se puede escribir a lo largo de la línea característica negativa BP:

$$dQ = Q_P - Q_B \quad (\text{V.14})$$

$$dH = H_P - H_B \quad (\text{V.15})$$

Si se sustituyen las expresiones V.12 y V.13 en la ecuación V.8, y las ecuaciones V.14 y V.15 en la V.10, si se calcula además el término de la fricción en los puntos A y B, y se multiplica todo por  $\Delta t$  se puede obtener que

$$(Q_P - Q_A) + \frac{gA}{a}(H_P - H_A) + \frac{f \Delta t}{2DA} Q_A |Q_A| = 0 \quad (\text{V.16})$$

y

$$(Q_P - Q_B) + \frac{gA}{a}(H_P - H_B) + \frac{f \Delta t}{2DA} Q_B |Q_B| = 0 \quad (\text{V.17})$$

La ecuación V.16 se puede escribir como

$$Q_P = C_p - C_a H_P \quad (\text{V.18})$$

y la ecuación V.17 como

$$Q_P = C_n + C_a H_P \quad (\text{V.19})$$

en donde

$$C_p = Q_A + \frac{gA}{a} H_A - \frac{f \Delta t}{2DA} Q_A |Q_A| \quad (\text{V.20})$$

$$C_n = Q_B + \frac{gA}{a} H_B - \frac{f \Delta t}{2DA} Q_B |Q_B| \quad (\text{V.21})$$

y

$$C_a = \frac{gA}{a} \quad (\text{V.22})$$

Obsérvese que la ecuación V.18 es válida a lo largo de la línea característica positiva **AP**, y la ecuación V.19 a lo largo de la línea característica negativa **BP**. Los valores de las constantes  $C_p$  y  $C_n$  se conocen para cada intervalo, y el valor de  $C_a$  depende de las propiedades del conducto. De aquí en adelante se referirá a la ecuación V.18 como la *ecuación característica positiva* y a la ecuación V.19 como la *ecuación característica negativa*. En las ecuaciones V.18 y V.19, se tienen dos valores desconocidos:  $H_P$  y  $Q_P$ . Estos valores pueden determinarse resolviendo simultáneamente las ecuaciones mencionadas, es decir:

$$Q_P = 0.5(C_p + C_n) \quad (\text{V.23})$$

Entonces el valor de  $H_p$  puede determinarse ya sea utilizando la ecuación V.18 o por medio de la ecuación V.19. Empleando las ecuaciones V.18 y V.23 se pueden determinar las condiciones en todos los puntos interiores para el final del intervalo. Para determinar las condiciones en las fronteras se podrá disponer de las ecuaciones V.18 ó V.19. Por lo tanto, como se discutió anteriormente, se necesitan expresiones especiales que permitan determinar las condiciones en las fronteras para el tiempo  $t_0 + \Delta t$ .

Para ilustrar como se utilizan las ecuaciones anteriores, se considerará otra vez el sistema mostrado en la figura V.2. Primeramente se divide al conducto en  $n$  partes iguales (ver figura V.6). Después se obtienen las condiciones para el estado permanente  $t = t_0$ , en los puntos cuadrículados. Entonces se utilizan las ecuaciones V.18 y V.23 para determinar las condiciones en los puntos interiores en el tiempo  $t = t_0 + \Delta t$ . Posteriormente se utilizan las expresiones especiales que permiten determinar las condiciones en los extremos. Podrá verse en la figura V.6 que para poder calcular las condiciones que prevalecen en los puntos interiores en el tiempo  $t = t_0 + 2\Delta t$ , tienen que conocerse las condiciones existentes en las fronteras para el tiempo  $t = t_0 + \Delta t$ . Conocidas las condiciones en todos los puntos (incluyendo las fronteras) para este tiempo, las condiciones para el tiempo  $t = t_0 + 2\Delta t$  se determinan siguiendo el procedimiento antes descrito. De esta manera, se determinan, calculando paso a paso, las condiciones transitorias por el tiempo requerido.

## CONDICIONES DE FRONTERA

En la sección pasada se mencionó que se requieren expresiones especiales para determinar las condiciones en las fronteras. Esas expresiones se obtienen por medio de las ecuaciones V.18, V.19, o ambas, y por las condiciones dadas por las fronteras. De esta manera, la ecuación V.18 se utiliza en la frontera aguas abajo y la ecuación V.19 en la frontera aguas arriba.

En este documento se expone un cierto número de condiciones de frontera simples. Las condiciones de frontera complejas como para bombas, turbinas y dispositivos de control del golpe de ariete, pueden verse en la referencia No.3.

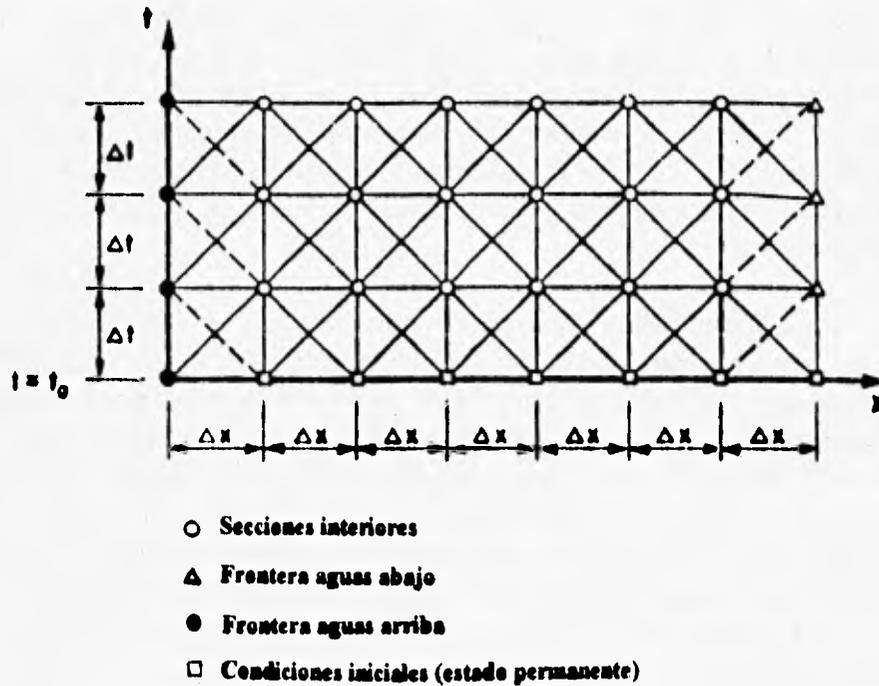


Figura V.6 Malla característica.

### Depósito con carga constante en el extremo aguas arriba (Fig. V.7)

Si las pérdidas en la entrada así como la carga de velocidad son despreciables, entonces

$$H_p = H_{res} \quad (V.24)$$

en donde  $H_{res}$  es la altura de la superficie del agua en el depósito respecto al plano de referencia. De este modo la ecuación V.19 para el extremo superior se vuelve:

$$Q_p = C_n + C_a H_{res} \quad (V.25)$$

Sin embargo, si la carga de velocidad o las pérdidas por entrada no son pequeñas, entonces estas pueden considerarse en el análisis como sigue:

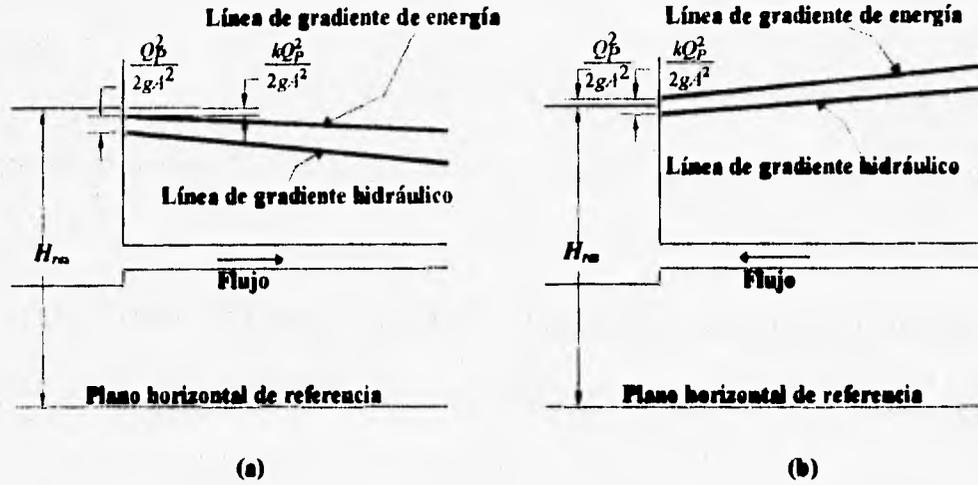


Figura V.7 Depósito con carga constante en el extremo aguas arriba.

Si las pérdidas por entrada se obtienen mediante la siguiente ecuación:

$$h_e = \frac{k Q_p^2}{2gA^2} \quad (V.26)$$

en donde  $k$  es el coeficiente de pérdidas por entrada. Entonces haciendo referencia a la figura V.7,

$$H_P = H_{res} - (1+k) \frac{Q_p^2}{2gA^2} \quad (V.27)$$

Resolviendo simultáneamente la ecuación V.27 y la ecuación característica negativa (ecuación V.19) queda que

$$Q_P = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k_1(C_n + C_a H_{res})}}{2k_1} \quad (V.28)$$

en donde

$$k_1 = \frac{C_a(1+k)}{2gA^2} \quad (\text{V.29})$$

$H_p$  puede determinarse entonces de la ecuación V.27.

Se le asigna un valor negativo a  $k$  en las ecuaciones V.27 y V.29, cuando el flujo se invierte.

### Depósito con carga constante en el extremo aguas abajo (fig. V.8)

Si las pérdidas por entrada en el depósito son

$$h_e = \frac{k Q_p^2}{2gA^2} \quad (\text{V.30})$$

entonces de acuerdo a la figura V.8a

$$H_p = H_{res} - (1-k) \frac{Q_p^2}{2gA^2} \quad (\text{V.31})$$

A  $k$  se le asigna un valor negativo en la ecuación V.30, cuando el flujo se invierte.

Si se elimina a  $H_p$  de las ecuaciones V.31 y V.18 queda que

$$k_2 Q_p^2 - Q_p + k_3 = 0 \quad (\text{V.32})$$

En donde

$$k_2 = \frac{C_a(1-k)}{2gA^2} \quad (\text{V.33a})$$

y

$$k_3 = C_p - C_a H_{res} \quad (\text{V.33b})$$

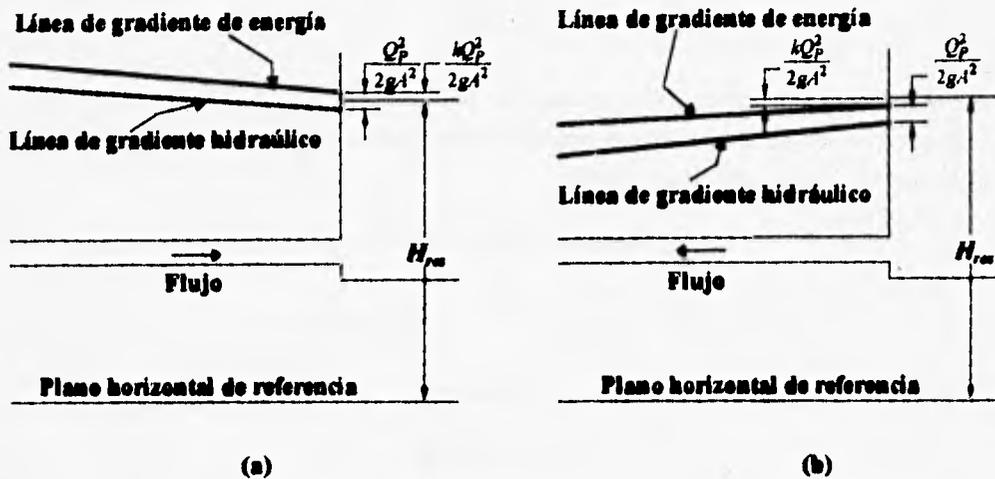


Figura V.8 Depósito con carga constante en el extremo aguas abajo.

Resolviendo la ecuación V.32 para  $Q_p$ , resulta que

$$Q_p = \frac{1 + \sqrt{1 - 4k_2k_3}}{2k_2} \quad (V.34)$$

Entonces  $H_p$  se puede determinar de la ecuación V.18. Si la pérdida por salida y la carga de velocidad son despreciables, entonces

$$H_p = H_{res} \quad (V.35)$$

se sigue de la ecuación V.18 que

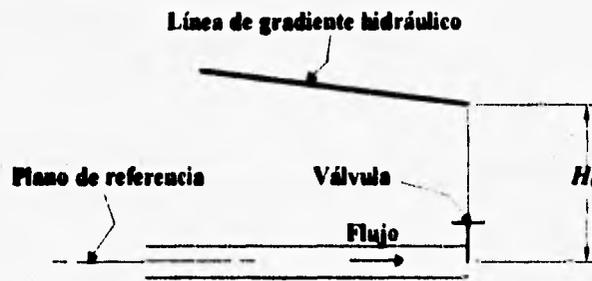
$$Q_p = C_p - C_a H_{res} \quad (V.36)$$

### Válvula en el extremo aguas abajo (Fig. V.9)

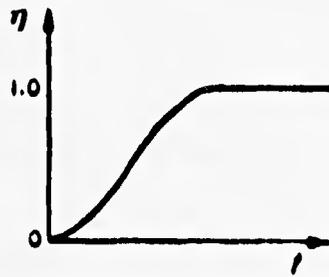
El gasto que pasa a través de la válvula durante el estado permanente puede escribirse como

$$Q_0 = (C_d A_v)_0 \sqrt{2gH_0} \quad (V.37)$$

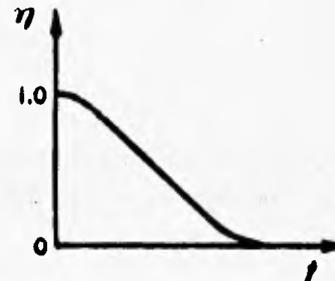
en donde el subíndice 0 indica que se trata de condiciones en estado permanente,  $C_d$  es el coeficiente de descarga,  $H_0$  es la carga de presión aguas arriba de la válvula y  $A_v$  es el área de la abertura de la válvula.



(a)



(b) Apertura



(c) Cierre

Figura V.9 Válvula en el extremo aguas abajo.

Se puede escribir una ecuación similar a la V.37 para el estado transitorio como

$$Q_P = (C_d A_v) \sqrt{2gH_P} \quad (V.38)$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la V.37, elevando al cuadrado ambos miembros y recordando que la relación de abertura de la válvula es  $\eta = (C_d A_v) / (C_d A_v)_0$ , se puede obtener que

$$Q_p^2 = \frac{(\eta Q_0)^2}{H_0} H_p \quad (\text{V.39})$$

Sustituyendo  $H_p$ , en la ecuación V.39, por la ecuación característica positiva (ecuación V.18), se obtiene que

$$Q_p^2 + C_v Q_p - C_p C_v = 0 \quad (\text{V.40})$$

en donde  $C_v = (\eta Q_0)^2 / (C_d H_0)$ . Resolviendo para  $Q_p$  y omitiendo el signo negativo del radical\*

$$Q_p = 0.5 \left( -C_v + \sqrt{C_v^2 + 4C_p C_v} \right) \quad (\text{V.41})$$

$H_p$  puede entonces determinarse con la ecuación V.18.

Para calcular las condiciones del estado transitorio para una apertura o cierre de válvula, las curvas  $\eta-t$  (figuras V.9b y c) se pueden especificar ya sea en forma tabular o por medio de una expresión algebraica. En las figuras V.9b y c, se puede ver que  $\eta = 1$  corresponde a una válvula totalmente abierta en donde el gasto que pasa a través de la válvula es  $Q_0$  bajo una carga de presión  $H_0$ .

### Unión en serie (Fig. V.10)

Hasta aquí se ha considerado un solo conducto, y la fronteras ubicadas en los extremos aguas arriba y aguas abajo. Por consiguiente, no se tuvo algún cuidado especial para designar las variables en la fronteras ya que solamente había una sección del conducto bajo consideración. Sin embargo, si existe una frontera

\* No es válido físicamente tomar en cuenta el signo negativo del radical.

adicional que se encuentre en la unión de dos o más conductos, entonces tienen que especificarse las variables en las diferentes secciones de los diversos conductos. Para este propósito, se utilizarán dos subíndices. El primer subíndice se empleará para designar el número del conducto, mientras que el segundo indicará el número de la sección. De este modo,  $Q_{P_i,j}$  indicaría el gasto en la  $j$ -ésima sección del  $i$ -ésimo conducto. Se utiliza solamente un subíndice para variables que tienen igual valor en todas las secciones de un conducto. Por ejemplo,  $C_{a_i}$  se refiere a la constante  $C_a$  (ecuación V.22) para el  $i$ -ésimo conducto. Aunque  $C_p$  y  $C_n$  pueden tener diferentes valores en diferentes secciones de un conducto, sólo se usará un subíndice en ellas para indicar el número del conducto. Esto simplifica la presentación y al mismo tiempo no se cae en alguna ambigüedad ya que cada conducto puede tener solamente una sección final como frontera. Como se comentó anteriormente, el subíndice  $P$  indicará las variables desconocidas al final de cada intervalo de tiempo.

Si la diferencia en las cargas de velocidad en las secciones  $(i, n+1)$  e  $(i+1, 1)$  (fig. V.10) y las pérdidas de carga de presión en la unión son despreciables, entonces

$$H_{P_{i,n+1}} = H_{P_{i+1,1}} \quad (\text{V.42})$$

Las ecuaciones características positivas y negativas para las secciones  $(i, n+1)$  e  $(i+1, 1)$  son

$$Q_{P_{i,n+1}} = C_{p_i} - C_{a_i} H_{P_{i,n+1}} \quad (\text{V.43})$$

$$Q_{P_{i+1,1}} = C_{n_{i+1}} + C_{a_{i+1}} H_{P_{i+1,1}} \quad (\text{V.44})$$

La ecuación de continuidad en la unión es

$$Q_{P_{i,n+1}} = Q_{P_{i+1,1}} \quad (\text{V.45})$$

Se sigue de las ecuaciones V.42 a la V.45 que

$$H_{P_{i,n+1}} = \frac{C_{p_i} - C_{n_{i+1}}}{C_{a_i} + C_{a_{i+1}}} \quad (\text{V.46})$$

Entonces  $H_{P_{i+1,l}}$ ,  $Q_{P_{i,n+1}}$  y  $Q_{P_{i+1,l}}$  se pueden determinar mediante las ecuaciones V.42 a la V.44.

Sin embargo, si la diferencia en las cargas de velocidad en las secciones  $(i, n+1)$  e  $(i+1, 1)$  o las pérdidas de la carga de presión en la unión no son despreciables, la ecuación V.42 no es válida. En tales casos, en lugar de esta ecuación se puede utilizar la siguiente expresión para calcular la carga total:

$$H_{P_{i,n+1}} + \frac{Q_{P_{i,n+1}}^2}{2gA_i^2} = H_{P_{i+1,l}} + (1+k) \frac{Q_{P_{i+1,l}}^2}{2gA_{i+1}^2} \quad (\text{V.47})$$

en donde  $k$  es el coeficiente de pérdidas de carga,  $h_l$  en la unión es

$$h_l = \frac{k Q_{P_{i+1,l}}^2}{2gA_{i+1}^2}$$

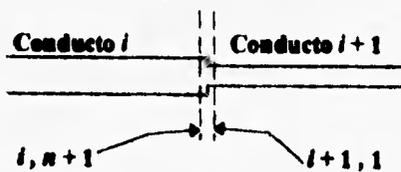


Figura V.10 Unión en serie.

Si se resuelven simultáneamente las ecuaciones V.43, V.44, V.45 y V.47 queda que

$$Q_{P_{i,n+1}} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4cd}}{2c} \quad (\text{V.48})$$

en donde

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{l}{C_{a_i}} + \frac{l}{C_{a_{i+1}}} \\ c &= \frac{l}{2g} \left( \frac{l}{A_i^2} - \frac{l+k}{A_{i+1}^2} \right) \\ d &= \frac{C_{p_i}}{C_{a_i}} + \frac{C_{n_{i+1}}}{C_{a_{i+1}}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.49})$$

Entonces  $Q_{P_{i+1},l}$ ,  $H_{P_{i,n+1}}$  y  $H_{P_{i+1},l}$  pueden determinarse mediante las ecuaciones V.43 a la V.45.

## CONDICIONES DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA

Al esquema de diferencias finitas que se presentó en la sección correspondiente a *ecuaciones características* se le denomina *convergente* si la solución exacta de las ecuaciones diferenciales se aproxima con la de las ecuaciones diferenciales originales, es decir, cuando  $\Delta t$  y  $\Delta x$  se acercan a cero. Se le denomina *inestable*, si el error por redondeo para representar los números irracionales mediante un número finito de dígitos significativos crece conforme se calcula para llegar a la solución. Si al contrario este error disminuye, el esquema es *estable*. Se ha demostrado que para que haya convergencia necesariamente tiene que existir estabilidad o viceversa.

Los métodos para determinar los criterios de convergencia o estabilidad para ecuaciones no lineales son extremadamente difíciles, si no es que imposibles. Collatz sugiere que la convergencia y estabilidad pueden estudiarse resolviendo numéricamente las ecuaciones para un cierto número de razones  $\Delta x/\Delta t$  y examinando los resultados. Sin embargo, la convergencia y estabilidad pueden estudiarse analíticamente linealizando las ecuaciones básicas. Si los términos no lineales son relativamente pequeños, es razonable suponer que los criterios aplicables a las ecuaciones simplificadas son también válidas para las ecuaciones no lineales originales.

Utilizando el procedimiento propuesto por O'Brien y considerando las ecuaciones linealizadas, Perkins mostró que para que el esquema de diferencias finitas pueda ser estable,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{l}{a} \quad (\text{V.50})$$

Esta condición implica que las características que atraviesan el punto **P** en la figura V.1 no deberían caer afuera del segmento **AB**. En el límite:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{l}{a} \quad (\text{V.51})$$

Los criterios para convergencia indican que las soluciones más exactas se obtienen si se satisface la ecuación V.51. Así, la convergencia y/o el criterio de estabilidad para las ecuaciones de diferencias finitas (ecuaciones V.16 y V.17) están dados por la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{l}{a} \quad (\text{V.52})$$

Esta es llamada *condición de estabilidad de Courant*.

## SELECCIÓN DEL INCREMENTO DE TIEMPO PARA UN SISTEMA COMPLEJO DE TUBERÍAS

Para un sistema complejo de dos o más conductos, es necesario que se use el mismo incremento de tiempo en cada uno de ellos de modo que se puedan aplicar las condiciones de frontera en la unión. Este incremento de tiempo deberá seleccionarse de tal manera que satisfaga la condición de estabilidad de Courant (ecuación V.52)

Si el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es tal que la longitud de cualquier conducto en el sistema no es igual a  $a\Delta t$ , entonces  $\Delta x$  tendrá que ser mayor que  $a\Delta t$  para satisfacer el criterio de estabilidad de Courant. Esto significa que las características que pasan

por **P**, tienen que pasar a través de **R** y **S** y no atravesar la malla de puntos **A** y **B** (Fig. V.11). Sin embargo, no se pueden calcular las condiciones en el punto **P** para cada intervalo de tiempo si no se conocen las condiciones que ocurren en **R** y **S** para el intervalo de tiempo anterior.

Streeter y Lai en sus primeros escritos, así como Wylie, propusieron un procedimiento de interpolación para calcular las condiciones en **R** y **S** a partir de las condiciones conocidas en **A**, **B** y **C**. Sin embargo, se ha demostrado en investigaciones posteriores que dicho procedimiento suaviza los picos transitorios agudos. Para evitar esto, Streeter sugiere que las ecuaciones diferenciales originales se pueden escribir en forma implícita. Kaplan por su parte, propone un procedimiento llamado *zooming*, en el cual el  $\Delta t$  que se emplea para conductos largos puede ser múltiplo integral del  $\Delta t$  que se utiliza para conductos cortos del sistema.

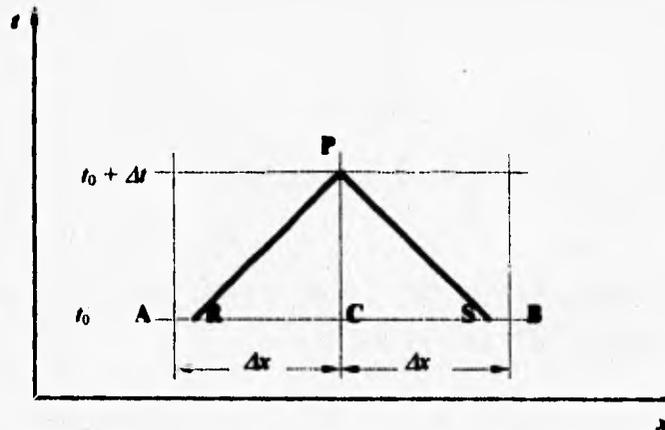


Figura V.11 Notación para interpolación.

El mismo Kaplan opina que, debería utilizarse la combinación del método implícito con el método de las características sólo si en el sistema existe un cierto número de conductos muy cortos respecto a otros; de otra forma, para obtener resultados lo suficientemente precisos, sólo bastaría hacer un ajuste simple de las celeridades de la onda de presión, satisfaciendo la siguiente ecuación:

$$\Delta t = \frac{L_i}{a_i n_i} \quad (i = 1 \text{ a } N) \quad (\text{V.53})$$

en donde  $n_i$  es un entero igual al número de segmentos en que se divide el conducto  $i$ -ésimo, y  $N$  es el número de tubos de que se compone el sistema. Como la celeridad de la onda no se conoce en forma precisa, se acepta que se realicen ajustes menores en su valor.

Debido a las limitaciones impuestas por la condición de estabilidad de Courant sobre  $\Delta t$ , se requiere una gran cantidad de tiempo-computadora para analizar sistemas que tienen una variación lenta de los fenómenos transitorios. Para el análisis de tales sistemas, Yow dio a conocer una técnica que permite utilizar pasos de tiempo mayores y satisfacer al mismo tiempo la condición de Courant. En dicha técnica, el término de inercia de la ecuación dinámica se multiplica por un factor arbitrario  $\alpha^2$ . Entonces, la ecuación resultante y la ecuación de continuidad se convierten en la forma característica. Debido a la multiplicación por  $\alpha^2$ , se permite usar un intervalo de tiempo igual a  $\alpha \Delta t$ , en donde  $\Delta t$  es el intervalo dado por la condición de Courant. Se pueden emplear valores distintos de  $\alpha$  para conductos diferentes y dichos valores pueden alcanzar hasta un valor igual a 20. Sin embargo, la técnica de Yow sólo se puede aplicar en aquellos sistemas en donde el término de inercia es pequeño comparado con el término de fricción, tales como el flujo de gas, flujo en medios porosos e inundaciones de ríos. La validez de esta técnica es dudosa debido a que las ecuaciones gobernantes originales son alteradas arbitrariamente, por lo se debe tener extremo cuidado en su uso.

## MÉTODO COMBINADO IMPLÍCITO-CARACTERÍSTICAS

En la sección pasada se señaló que algunas veces resulta ventajoso emplear una combinación de los métodos implícito y de las características para analizar algunos sistemas de tuberías. En este método, las expresiones derivadas de las ecuaciones dinámica y de continuidad (ecuaciones V.1 y V.2) se reemplazan por diferencias finitas implícitas. Sin embargo, debe tenerse cuidado al seleccionar el conducto o segmento de conducto en donde se usa el método implícito, ya que en

este se emplean condiciones de frontera muy simples. Se pueden consultar los detalles de este método en la referencia No. 3.

# **VI**

## **DISPOSITIVOS DE CONTROL HIDRÁULICO**

### **INTRODUCCIÓN**

Un sistema de tuberías se puede diseñar con un cierto factor de seguridad que tome en cuenta las presiones tanto máxima como mínima provocadas ante cualquier circunstancia operativa esperada posible que ocurra durante la vida útil del sistema. Sin embargo, en la mayoría de los casos, tal diseño resultaría antieconómico. Por eso, para reducir o eliminar los fenómenos transitorios indeseables tales como el incremento o descenso excesivo de presión, separación de columna, etc., se utilizan diversos dispositivos y/o procedimientos de control. Dichos dispositivos son generalmente costosos, y no existe uno sólo que resulte apropiado para emplearse en cualquier tipo de sistemas o condiciones operativas posibles. Por lo tanto, al diseñarse un sistema, deben considerarse los diferentes tipos de dispositivos que existen y seleccionar aquel que dé como resultado un sistema aceptable y sobre todo económico. Podría definirse como sistema aceptable de respuesta, a aquél que se mantiene dentro de los límites especificados para las presiones máxima o mínima y velocidad máxima de una turbina o velocidad reversible máxima de una bomba.

En el segundo capítulo se presentó la ecuación que relaciona el cambio de presión  $\Delta H$  con el cambio de velocidad en el flujo  $\Delta V$  (Ecuación de Jukovsky), es decir:

$$\Delta H = -\frac{a}{g} \Delta V \quad (\text{VI.1})$$

en donde  $a$  es la celeridad de las ondas del flujo transitorio y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad. Esta ecuación indica que la función principal de un dispositivo que se utiliza para reducir la magnitud del incremento o descenso de la carga de presión, consiste necesariamente en reducir  $\Delta V$  y/o  $a$ . Además, la velocidad de flujo  $V$  se puede hacer variar de tal manera que las presiones se mantengan dentro de los límites prescritos. A la variación controlada de los fenómenos transitorios que se traduce en un sistema aceptable de respuesta se le denomina *control óptimo del flujo transitorio*, más adelante se explica con mayor detalle en qué consiste este tipo de operación.

En este capítulo se señalan los diversos dispositivos que existen para reducir o eliminar los fenómenos transitorios indeseables. En la referencia No. 3 se pueden consultar las condiciones de frontera para estos dispositivos, las cuales son necesarias para realizar el análisis de sistemas mediante el método de las características.

## **MÉTODOS Y DISPOSITIVOS DISPONIBLES PARA EL CONTROL DE LOS FENÓMENOS TRANSITORIOS**

Las torres de oscilación, cámaras de aire y válvulas, son algunos de los dispositivos que se usan generalmente para reducir o eliminar los fenómenos hidráulicos transitorios tales como presión excesiva, separación de columna, etc. Además de los dispositivos mencionados, se puede variar el perfil de la tubería, aumentar el diámetro del conducto o disminuir la velocidad de la onda de presión a fin de reducir los efectos que provocan este tipo de fenómenos. A continuación se hace una breve descripción del funcionamiento de cada uno de los dispositivos indicados al principio de este párrafo.

## TORRES DE OSCILACIÓN

Una torre de oscilación consiste en un depósito vertical conectado a la tubería de un sistema de conducción. Las funciones principales de una torre de oscilación son:

1. Reducir la amplitud de las fluctuaciones de presión reflejando las ondas de presión que ingresan a ella. Las ondas de presión que se producen en el tramo de tubería ubicada aguas abajo de la torre, ocasionadas por los cambios de carga en la turbina (figura VI.1) se reflejan en su mayor parte en la torre de oscilación. De esta

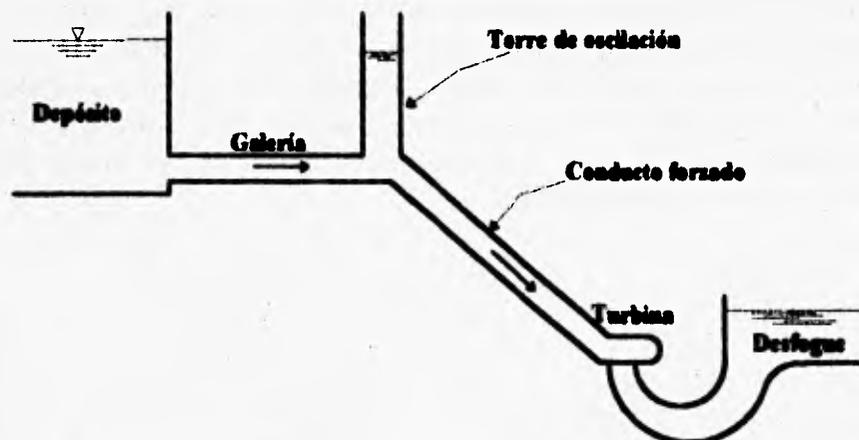


Figura VI.1 Diagrama esquemático de una planta hidroeléctrica.

manera, se analiza solamente la longitud de tubo que se encuentra entre la turbina y la torre de oscilación y no el tramo comprendido entre la turbina y el embalse. Debido a esta reducción en la longitud del conducto, el incremento o descenso de presión es menor que en el caso de que la torre no estuviera instalada. Además, si no estuviera presente una torre entre la tubería y el túnel, éste tendría que diseñarse para que soporte las presiones transitorias.

2. Una torre de oscilación actúa como un almacenamiento del exceso de agua que se produce al reducir la carga en una planta hidroeléctrica y durante el arranque

de las bombas en un sistema de bombeo. De manera similar, provee agua al conducto cuando se acepta carga en la planta hidroeléctrica o cuando falla el suministro de energía a los motores de las bombas en el sistema de bombeo. Por lo tanto, el agua se acelera o desacelera en forma lenta, reduciendo así la amplitud de las oscilaciones de presión en el sistema.

Dependiendo de su configuración, una torre se puede clasificar como *simple*, *de orificio* o *diferencial*. A continuación se describe brevemente cada uno de los tipos de torre de oscilación.

Una *torre de oscilación simple*, como se había mencionado, es precisamente un depósito vertical de agua conectado al conducto. Si se restringe la entrada a la torre por medio de un orificio, entonces se le denomina *torre de orificio*. Si una torre de orificio tiene un tubo ascendente, entonces se le denomina *diferencial*. Dependiendo de los requerimientos que tenga que cumplir la torre, ésta puede contener galerías superiores o inferiores. En la figura VI.2 se muestran los diferentes tipos de torres de oscilación.

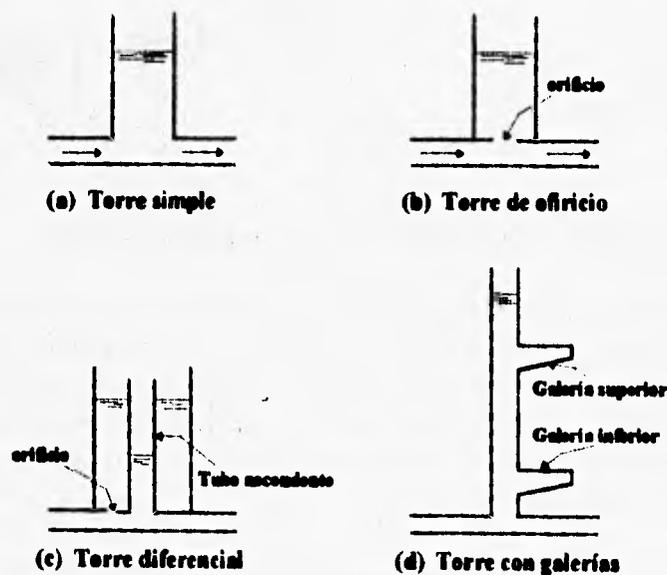


Figura VI.2 Tipos de torres de oscilación.

Las torres de orificio y diferencial funcionan hidráulicamente mejor que una simple, y en algunos casos particulares mejoran las características económicas del sistema. Si fuera conveniente, se puede instalar en el sistema una combinación de los diferentes tipos de torres de oscilación. En todo caso, debe investigarse cuál es la opción que conduce a un sistema económico.

Si en la tubería se cuenta con una torre de oscilación, los fenómenos transitorios rápidos o de corta duración (por ejemplo, el golpe de ariete) se pueden analizar mediante el método de las características. Sin embargo, si se desean estudiar fenómenos transitorios lentos o de larga duración (por ejemplo, las oscilaciones del nivel de agua de la torre posteriores al rechazo de la carga de presión en una turbina) este método no resulta apropiado ya que requiere una cantidad excesiva de tiempo-computadora.

## CÁMARAS DE AIRE

Una cámara de aire (figura VI.3) es un recipiente que contiene aire comprimido en su parte superior y líquido en su parte inferior. Para restringir la entrada o salida de flujo, las cámaras de aire están provistas de un orificio localizado entre la cámara y el conducto. El orificio se construye de tal modo que produce una mayor pérdida de carga cuando entra el flujo a la cámara que cuando sale de ella, razón por la cual se le denomina *orificio diferencial* (figura VI.3). Para evitar presiones mínimas muy bajas en la tubería y por lo tanto una separación de la vena líquida, la salida de flujo de la cámara debería estar en lo posible libre de obstáculos, mientras que la entrada de flujo a la misma puede estar restringida a fin de que se pueda reducir su tamaño. Generalmente se usa una razón de 2.5:1 entre las pérdidas de carga ocasionadas por la entrada de flujo a la cámara y las generadas por la salida. Como el volumen de aire en la cámara puede disminuir debido a la fuga del mismo o a su disolución en el líquido, se utiliza un compresor de aire para mantener el volumen de aire dentro de los límites especificados.

Es una práctica común instalar una válvula de no retorno (válvula *check*) entre la bomba y la cámara de aire (ver figura VI.3). Cuando se presenta una falla en el suministro de energía, la carga desarrollada por la bomba así como el gasto

decrecen rápidamente. Entonces, el aire comprimido que existe en la cámara obliga a que ésta abastezca de líquido a la tubería, minimizando así la magnitud de los fenómenos transitorios. Cuando el flujo en el conducto se invierte, la válvula de no retorno se cierra instantáneamente y entonces el líquido en el conducto se introduce a la cámara. Debido a la entrada y salida de flujo en la cámara, el aire que se encuentra dentro de la misma se expande y contrae, de esta manera se hace variar gradualmente la velocidad de flujo en la conducción y se logra así que se reduzca la magnitud del incremento o descenso de la presión.

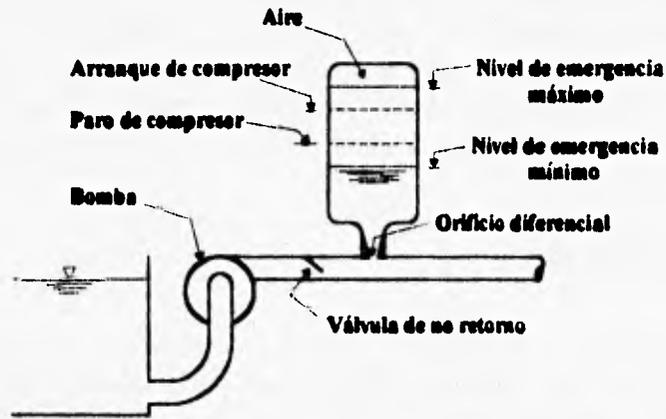


Figura VI.3 Cámara de aire.

Una cámara de aire tiene las siguientes ventajas sobre una torre de oscilación:

1. El volumen de una cámara de aire que se requiere para mantener las presiones máxima y mínima dentro de los límites especificados, es menor que el equivalente en una torre de oscilación.
2. Una cámara de aire se puede instalar con su eje paralelo a la pendiente del suelo, con lo que se reduce así el costo del apoyo y a la vez se proporciona mejor resistencia a las cargas debidas al viento o a sismos.
3. Una cámara de aire puede instalarse cerca de una bomba, esto quizá no sea práctico para el caso de una torre de oscilación debido a que su altura es excesiva.

Tal disposición de la cámara de aire reduce el incremento o descenso de presión en la tubería.

La desventaja principal de una cámara de aire consiste en la necesidad de proveer equipo que requiere mantenimiento constante, compresores de aire por ejemplo. Se reitera que deben analizarse las ventajas y desventajas del empleo de un cierto dispositivo de alivio para cada caso en particular.

Engler, Allievi, y Angus estudiaron el uso de cámaras de aire para el control de los fenómenos transitorios generados por fallas en el suministro de energía en sistemas de bombeo. El tamaño aproximado de una cámara se puede determinar mediante el uso de tablas. Sin embargo, durante la etapa de proyecto definitivo se debería llevar a cabo un análisis detallado para elegir el tamaño apropiado de la cámara de aire. El método de las características incorpora las condiciones de frontera para realizar el análisis mencionado.

## TANQUES DE FLUJO UNIDIRECCIONAL

En un *tanque de flujo unidireccional*, el líquido fluye desde el tanque hasta el interior de la tubería sólo cuando la presión en la misma desciende por debajo de un nivel considerado de seguridad. Después que transcurren las condiciones de estado transitorio, la tubería suministra agua al tanque (ver figura VI.4).



Figura VI.4 Tanque de flujo unidireccional.

## VÁLVULAS

Dependiendo del tipo, una válvula se usa para el control de los fenómenos transitorios realizando cualquiera de las siguientes operaciones:

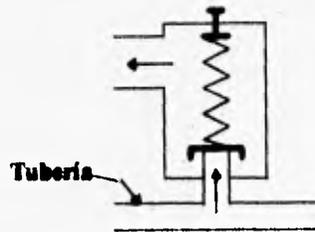
1. Abriendo o cerrando con el fin de reducir el rango de cambio neto en la velocidad de flujo en el conducto.
2. Permitiendo que el líquido salga rápidamente del conducto si la presión excede un valor fijado. Esta salida provoca un descenso en la presión, reduciéndose así la presión máxima.
3. Abriendo para permitir que el aire pase al interior del conducto y así evitar que la presión descienda y provoque la vaporización del fluido.

Las válvulas que se usan generalmente son las que se enlistan a continuación:

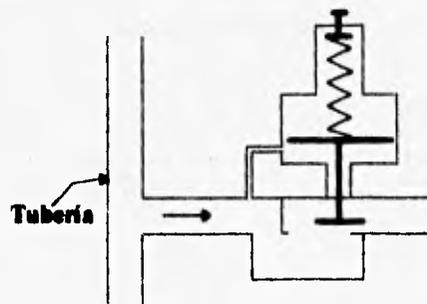
1. Válvulas de seguridad
2. Válvulas de alivio de presión
3. Válvulas reguladoras de presión
4. Válvulas de admisión de aire
5. Válvulas de no retorno.

Una *válvula de seguridad* (Fig. VI.5a) es un resorte que abre en el momento en que la presión interna de la conducción excede la presión fijada en la válvula. Ésta cierra instantáneamente cuando la presión desciende por debajo de dicho límite (Fig. VI.6a). Una válvula de seguridad se encuentra ya sea totalmente abierta o totalmente cerrada.

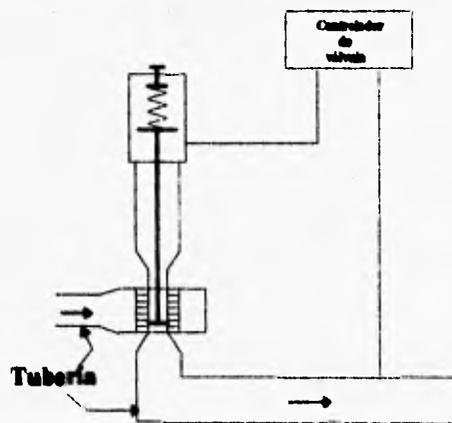
La operación de una *válvula de alivio de presión* (Fig. VI.5b) es similar al de una válvula de seguridad excepto que su abertura es proporcional a la cantidad de presión que excede el límite especificado justamente aguas arriba de la válvula. La válvula cierra cuando la presión se encuentra por debajo del límite fijado en la válvula. Generalmente se presentan excitaciones cuando abre o cierra la válvula, como se presenta en la figura VI.6b.



(a) Válvula de seguridad.

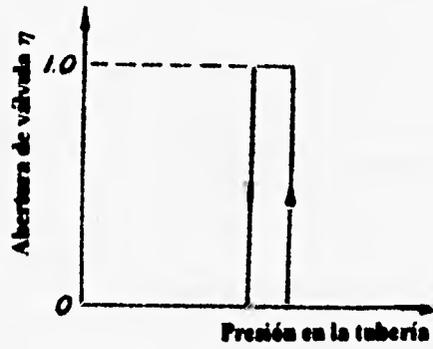


(b) Válvula de alivio de presión.

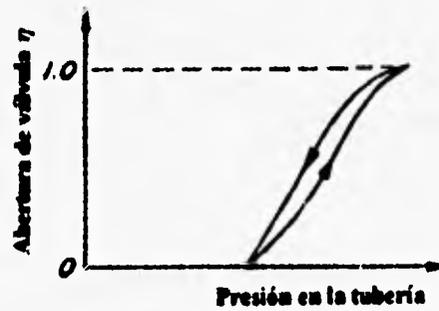


(c) Válvula reguladora de presión.

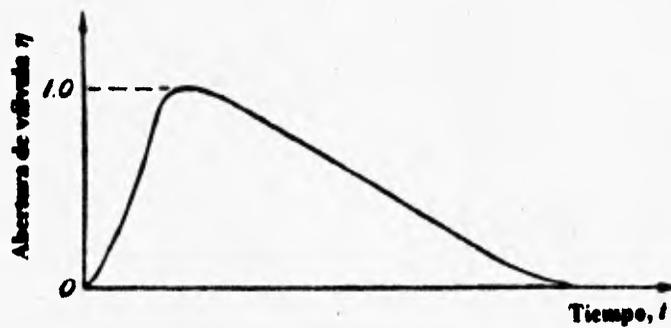
Figura VI.5 Diagrama esquemático de válvulas de seguridad, de alivio y reguladoras de presión.



(a) Válvula de seguridad



(b) Válvula de alivio de presión



(c) Válvula reguladora de presión

Figura VI.6 Líneas características de descarga de válvulas de seguridad, de alivio y reguladoras de presión.

Para un sistema de bombeo en donde más de una bomba descarga a un solo conducto, se puede instalar, en lugar de una válvula de alivio grande, una batería de válvulas de alivio de menor tamaño. Puede instalarse una válvula en cada bomba o se puede montar una batería de válvulas en la línea de descarga principal. En este arreglo último, el valor fijado de sobrepresión de cada válvula se debería establecer de tal manera que la apertura de las mismas ocurra consecutivamente una detrás de otra y no simultáneamente.

Una *válvula reguladora de presión (VRP)* es una válvula estranguladora controlada por un piloto, que se abre o cierra por un motor servidor, y en la cual los tiempos de apertura y cierre se pueden establecer individualmente. En un sistema de bombeo, se instala justamente aguas abajo de una bomba, en cambio en un sistema hidroeléctrico, se sitúa aguas arriba de una turbina. En el sistema de bombeo, la VRP abre rápidamente cuando ocurre una falla en el suministro de energía al motor de la bomba, y de inmediato empieza a cerrarse en forma gradual (Fig. VI.6c). En un sistema hidroeléctrico, cuando se efectúa un rechazo de carga en la turbina, la VRP se abre a medida que las compuertas de la turbina se cierran, hasta lograr que se desvíe todo el flujo que alimentaba a la turbina hacia la VRP. Una vez logrado lo anterior, se comienza a cerrar la VRP lentamente (Fig. VI.7). Durante tal operación se desperdicia cierta cantidad de energía hidráulica. Sin embargo, como la operación representa una condición de emergencia, la cantidad de energía que se desperdicia resulta insignificante. Debido al cierre gradual de la VRP, se logra disminuir la magnitud de los fenómenos transitorios.

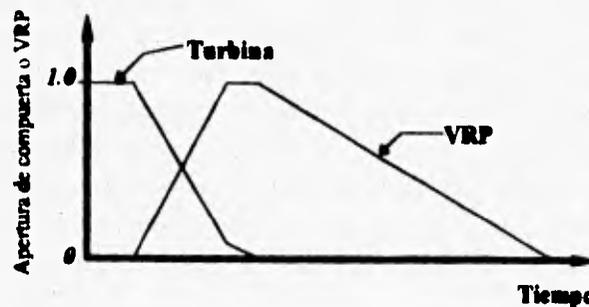


Figura VI.7 Operación sincronizada de una turbina y una válvula reguladora de presión.

Una *válvula de admisión de aire* se instala para introducir aire al interior de la tubería siempre que la presión interna en el conducto descienda por debajo de la presión atmosférica. De esta manera se reduce la presión diferencial que existe entre la presión atmosférica externa y la presión interna en el conducto, evitando así el colapso del mismo. Las válvulas de admisión de aire también se usan para reducir la generación de presiones altas que ocurre cuando las venas líquidas que se habían separado, por la inclusión de una burbuja de aire, se vuelven a juntar.

Una vez que el aire se admite en el conducto, se tiene que tener cuidado extremo mientras la línea se vuelve a llenar. Las burbujas de aire se deben eliminar gradualmente debido a que el aire atrapado puede ocasionar presiones muy altas.

Las *válvulas de no retorno* o *check* se usan para prevenir que el líquido fluya en sentido inverso a través de una bomba y para evitar que haya flujo de la tubería hacia un tanque de flujo unidireccional. Estas válvulas se instalan inmediatamente aguas abajo de una bomba o en la parte inferior de un tanque de flujo unidireccional. Una válvula de no retorno, en su forma más simple, es una válvula provista de un disco giratorio, aunque algunas veces se provee a la válvula de resortes y amortiguadores para evitar que ésta cierre súbitamente.

## CONTROL ÓPTIMO DE FLUJOS TRANSITORIOS

Se le denomina *control óptimo de flujo* al modo de operación de diversos dispositivos de control que permite obtener un sistema aceptable de respuesta. En un sistema aceptable de respuesta se logra mantener dentro de los límites permisibles los valores de las presiones máxima y mínima del flujo transitorio, ya sea cambiando en un tiempo mínimo las condiciones del flujo de un estado permanente a otro, o sin que presente oscilaciones, etc. Por ejemplo, una válvula instalada en el extremo aguas abajo de un conducto puede cerrarse de tal manera que no se exceda el límite permisible de la presión, y que tan pronto como cese su movimiento, los fenómenos transitorios en la tubería se disipen. A esta operación se le conoce como *cierre óptimo de válvula*.

El control óptimo de flujo es un diseño o una síntesis aproximada en donde

las variaciones de las condiciones de frontera se calculan para poder obtener una respuesta deseada del sistema. Este enfoque es diferente del análisis usual en donde las variaciones de las condiciones de frontera se especifican previamente a fin de determinar la respuesta del sistema.

Enseguida se presentan algunas de las aplicaciones prácticas del control óptimo del flujo transitorio:

1. Cuando existen varios usuarios conectados al sistema, se pueden trasladar algunas salidas de flujo a otras ubicaciones sin alterar el gasto de salida para los usuarios.

2. Se estabiliza en un tiempo mínimo, el flujo en los conductos de un esquema de rebombeo, cuando se efectúa el cambio de generación a bombeo o viceversa.

3. La apertura o cierre de válvulas en un sistema de conductos se realiza sin exceder los límites superior e inferior de la presión.

4. El cierre de las compuertas de una turbina hidráulica se puede hacer de modo que el incremento de presión que ocurre después del rechazo de la carga se minimice.

5. Se puede aceptar o rechazar la carga de presión en turbinas hidráulicas en un tiempo mínimo, sin exceder los límites permisibles para aumento o descenso de presión.

92

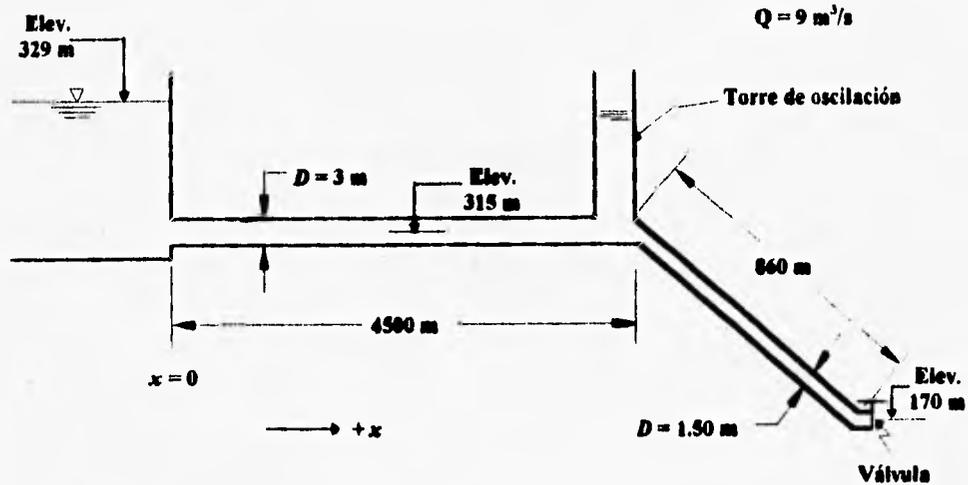
## **VII**

### **EJEMPLOS DE APLICACIÓN**

#### **INTRODUCCIÓN**

En el presente capítulo se procede a calcular los fenómenos transitorios que ocurren en el sistema que se muestra en la figura VII.1, cuando en él se efectúa un cierre de la válvula. Para lo anterior, se emplean los métodos expuestos a lo largo de esta tesis: método de Allievi, método de Bergeron y método de las características. Al resolver el problema, con cada método, se toman en cuenta las siguientes consideraciones: primeramente se supone que el sistema no cuenta con torre de oscilación, por lo que este tendría una configuración como la que se presenta en la figura VII.2. Posteriormente, el problema se resuelve tomando en cuenta su configuración original. En este caso, sólo se analiza el tramo de tubería comprendido entre la torre de oscilación y la válvula (conducto 2), ya que como se había comentado, los fenómenos transitorios importantes se confinan en dicho tramo. Se establece además la hipótesis de que el nivel de agua en la torre de oscilación permanece constante durante el tiempo de análisis. Dicha hipótesis se basa en que la oscilación de la masa de agua dentro de la torre es relativamente

lenta, y entonces la variación del nivel de agua que contiene la torre es muy pequeña durante el tiempo que perdura el flujo transitorio.



1. El tramo comprendido entre el embalse y la torre (conducto 1) es un túnel excavado en roca con acabado interior de cemento.

2. El tramo que se localiza entre la torre y la válvula (conducto 2) es una tubería de acero soldado.

Figura VII.1 Sistema de conducción con torre de oscilación.

## RESOLUCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE ALLIEVI

### Ejemplo VII.1

Como se mencionó anteriormente, para analizar el sistema se supone primeramente que éste no cuenta con torre de oscilación. De esta manera, el sistema tendría una configuración como la que se muestra en la figura VII.2. Se puede observar que el conducto presenta variación tanto en sus características geométricas

como elásticas. Para resolver este problema se determinan las condiciones de flujo transitorio partiendo de algunas hipótesis simplificatorias mediante las cuales se sustituye el conducto real por otro equivalente (teoría de la columna elástica<sup>2</sup>). En la primera hipótesis se establece que la energía cinética del fluido (en este caso agua) para el flujo permanente es igual tanto en el conducto real como en el equivalente. En la segunda, que el tiempo de traslación de la onda de presión para el flujo transitorio es el mismo para los conductos real y equivalente.

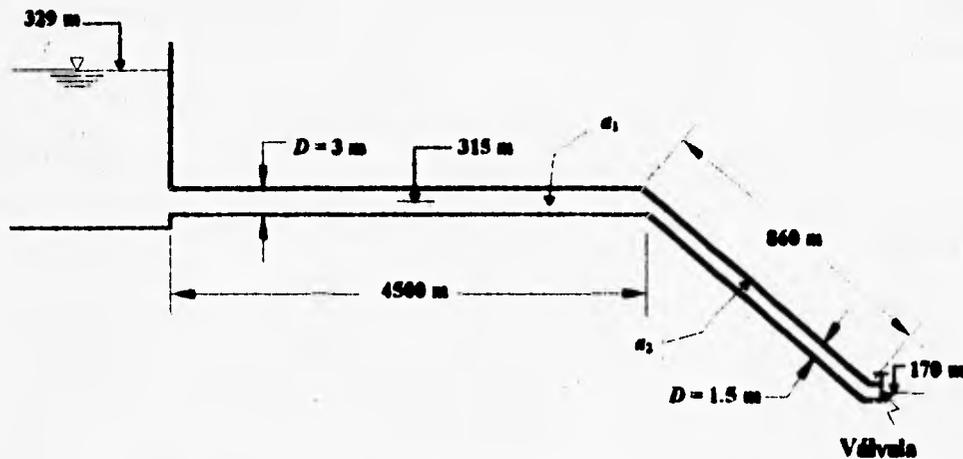


Figura VII.2 Sistema de conducción sin torre de oscilación.

La energía cinética para el conducto real  $E_r$ , formado por  $n$  número de tramos, se puede expresar como

$$E_r = \frac{\gamma}{2g} (L_1 A_1 V_1^2 + L_2 A_2 V_2^2 + \dots + L_n A_n V_n^2) \quad (\text{VII.1})$$

Para el conducto equivalente, la energía cinética  $E_e$  puede expresarse como

$$E_e = \frac{\gamma}{2g} (L_1 A_1 + L_2 A_2 + \dots + L_n A_n) V_e^2 \quad (\text{VII.2})$$

donde  $V_e$  es la velocidad de flujo en el conducto equivalente.

Si de acuerdo con la primera hipótesis, se igualan las ecuaciones anteriores, se recuerda que  $Q = AV$  y se despeja el valor de  $V_e$ , se obtiene que

$$V_e = \sqrt{\frac{Q \sum_{k=1}^n L_k V_k}{\sum_{k=1}^n L_k A_k}} \quad (\text{VII.3})$$

Por otra parte, de acuerdo con la hipótesis referente al tiempo de traslación se puede escribir que

$$\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2} + \dots + \frac{L_n}{a_n} = \frac{\sum_{k=1}^n L_k}{a_e} \quad (\text{VII.4})$$

o bien que

$$a_e = \frac{\sum_{k=1}^n L_k}{\sum_{k=1}^n \frac{L_k}{a_k}} \quad (\text{VII.5})$$

donde  $a_e$  es la celeridad de la onda de presión en el conducto equivalente.

Una vez obtenidos los valores de  $V_e$  y  $a_e$  se puede definir el parámetro  $\varepsilon$  como

$$\varepsilon = \frac{a_e V_e}{2gH_0} \quad (\text{VII.6})$$

y un valor equivalente del período

$$T_e = \frac{2 \sum_{k=1}^n L_k}{a_e} \quad (\text{VII.7})$$

los cuales permiten el análisis del conducto equivalente mediante las ecuaciones de

Allievi. Se debe señalar sin embargo, que los resultados que se obtienen con estas expresiones son aproximados y tienden a alejarse de los valores reales conforme aumenta el número de características diferentes en el conducto.

a) Cálculo de la velocidad equivalente

El área en cada uno de los conductos es

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi (3)^2}{4} = 7.07 \text{ m}^2$$

y

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi (1.5)^2}{4} = 1.77 \text{ m}^2$$

Entonces la velocidad de flujo para los mismos es

$$V_1 = \frac{Q_0}{A_1} = \frac{9}{7.07} = 1.27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y

$$V_2 = \frac{Q_0}{A_2} = \frac{9}{1.77} = 5.08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De acuerdo con la expresión VII.3, la velocidad del conducto equivalente es

$$V_e = \sqrt{\frac{(9)[(4500)(1.27) + (860)(5.08)]}{(4500)(7.07) + (860)(1.77)}} = 1.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Cálculo de la celeridad equivalente

b.1) Celeridad para el conducto excavado en roca

Se supone que el módulo de rigidez de la roca es igual a

$$G = 6.30 \times 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

De la ecuación II.49, el módulo de elasticidad de la roca es

$$E = 6.30 \times 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

y el valor de  $\psi$  es igual a 1.

Si en la ecuación II.41 se sustituyen los valores siguientes:  $K_{\text{agua}} = 2.23 \times 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ ,  $\gamma_{\text{agua}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  y  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , ésta puede simplificarse como

$$a = \frac{1480}{\sqrt{1 + \frac{2.23 \times 10^8}{E} \psi}} \quad (\text{VII.8})$$

Empleando esta expresión, la celeridad en el conducto 1 resulta igual a

$$a_1 = \frac{1480}{\sqrt{1 + \frac{2.23 \times 10^8}{6.30 \times 10^8} (1)}} = 1271.91 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

#### b.2) Celeridad para el conducto de acero soldado

Para calcular la celeridad en el conducto de acero soldado, se hace la suposición de que cuenta con juntas frecuentes de expansión, por lo que para este caso  $\psi = \frac{D}{e}$  (ecuación II.48). Para calcular  $\psi$  se supone un espesor de placa  $e = 1.91 \text{ cm}$  ( $3/4''$ ). Estrictamente tendría que verificarse si dicho espesor soporta la carga máxima a la que se sometería la tubería. El módulo de elasticidad del acero es  $E_{\text{acero}} = 2.10 \times 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ . Con las consideraciones anteriores, el valor de la celeridad en el conducto de acero sería

$$a_2 = \frac{1480}{\sqrt{1 + \frac{2.23 \times 10^8}{2.10 \times 10^{10}} \left( \frac{150}{1.91} \right)}} = 1092.87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## b.3) Cálculo de la celeridad equivalente

De acuerdo con la expresión VII.5, la celeridad del conducto equivalente es igual a

$$a_e = \frac{4500 + 860}{\frac{4500}{1271.91} + \frac{860}{1092.87}} = 1239.33 \frac{m}{s}$$

## c) Cálculo de la constante de Allievi para el conducto equivalente

Tomando en cuenta que  $H_0 = 329 - 170 = 159 m$ , si se sustituyen los valores anteriores en la ecuación VII.6 se obtiene que

$$\varepsilon = \frac{(1239.33)(1.65)}{2(9.81)(159)} = 0.656$$

## d) Cálculo del periodo equivalente

Sustituyendo valores en la expresión VII.7 resulta que

$$T_e = \frac{2(4500 + 860)}{1239.33} = 8.65 s$$

Finalmente, tiene que conocerse la ley de cierre de la válvula. Supóngase para este caso que se efectúa un cierre total bajo una ley de tipo lineal.

Conocidas todas las constantes de la conducción se comienza a desarrollar en cadena la ecuación adimensional de Allievi (ecuación III.19) para así conocer los valores de  $\zeta$  para cada intervalo de tiempo.

Supóngase que el tiempo que tarda en cerrarse la válvula es de  $\tau = 2T = 17.30 s$ , es decir  $\theta = 2$ . Para el tiempo  $t = 0$ , el valor de  $\zeta$  es  $\zeta_0 = \sqrt{\frac{H_0}{H_0}} = 1$ , y el de  $\eta$  es  $\eta_0 = 1$  (válvula totalmente abierta). Conocidos los valores anteriores y el de  $\varepsilon$ , para determinar el valor de  $\zeta$  en el instante  $i = 1$  ( $\zeta_1$ ), se resuelve la ecuación III.19. La solución de dicha expresión para los valores dados es  $\zeta_1 = 1.23$ . Para determinar el valor de  $\zeta_2$ , sólo falta calcular el valor de  $\eta_1$ . Considerando que se trata de un cierre total bajo una ley de tipo lineal, el valor de  $\eta_1$

es  $\eta_1 = 1 - \frac{1}{2} = 0.50$  (ecuación III.20). Con los valores actualizados, se resuelve nuevamente la ecuación III.19, encontrándose así el valor de  $\zeta_2$ . Se procede de una forma similar para calcular los valores de  $\zeta$  para los demás intervalos de tiempo hasta que se haya completado el tiempo de cálculo requerido. Los valores de  $H$ , para cada intervalo de tiempo, se determinan con base en la definición dada anteriormente, en donde  $\zeta_i^2 = \frac{H_i}{H_0}$ . En la tabla VII.1 se resumen los resultados que se obtienen al ejecutar el programa de cómputo basado en el diagrama de flujo que se muestra en la figura VII.3. En el Apéndice A de este trabajo se puede consultar el listado de dicho programa el cual está elaborado en lenguaje BASIC.

Tiempo	$\eta$	$\zeta$	$H$
0.00	1.00	1.00	159.00
8.65	0.50	1.23	239.53
17.30	0.00	1.14	206.40
25.95	0.00	0.84	111.60
34.60	0.00	1.14	206.40
43.25	0.00	0.84	111.60
51.90	0.00	1.14	206.40

Tabla VII.1

En la tabla VII.2 se presentan los valores máximo y mínimo de la carga de presión en la sección correspondiente a la válvula, para diferentes tiempos de cierre de la misma. Si se desea conocer la carga de presión para las otras secciones, se puede efectuar una interpolación lineal, considerando que en el punto  $x = 0$  el nivel del embalse no sufre variación.

	$\theta = 2$ (17.30 s)	$\theta = 3$ (25.95 s)	$\theta = 4$ (34.60 s)	$\theta = 5$ (43.25 s)	$\theta = 6$ (51.50 s)	$\theta = 7$ (60.55 s)	$\theta = 8$ (69.20 s)
$H_{máx}$ (m)	239.53	208.37	194.53	186.73	181.74	178.26	175.71
$H_{mín}$ (m)	111.60	115.89	132.30	136.13	140.90	143.29	145.47

Tabla VII.2

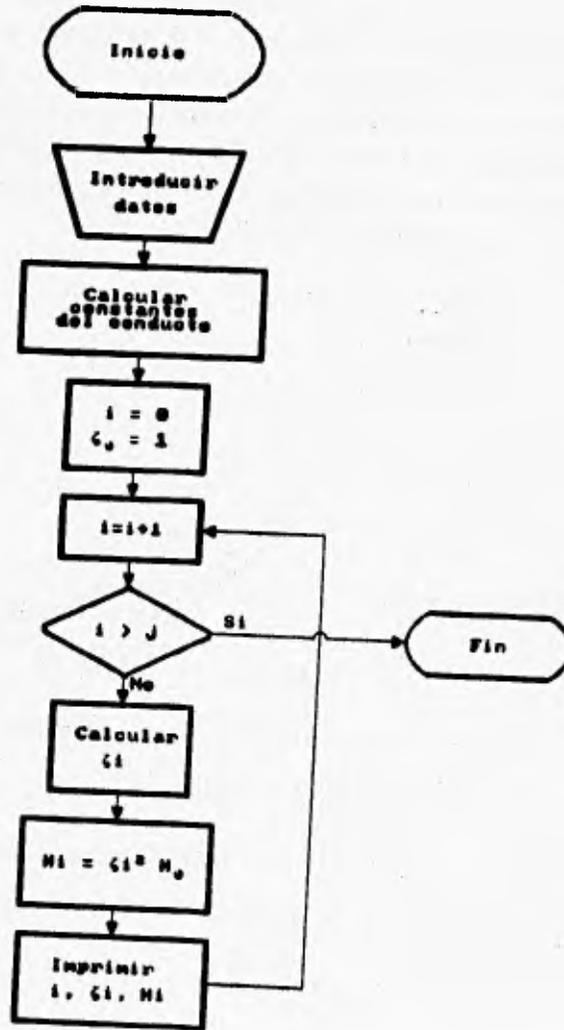


Figura VII.3 Diagrama de flujo utilizando el Método de Allievi.

### Ejemplo VII.2

En este ejemplo se calculan las condiciones para el estado transitorio del sistema mostrado en la figura VII.1. De acuerdo con los comentarios anteriores, cuando existe una torre de oscilación en un sistema de conducción, los fenómenos transitorios se atenúan considerablemente en el tramo ubicado aguas arriba de la misma, por lo que se desprecian en dicho tramo. Al estudiar solamente el tramo de tubería comprendido entre la torre de oscilación y la válvula, el sistema analizado sería equivalente al que se muestra en la figura VII.4.

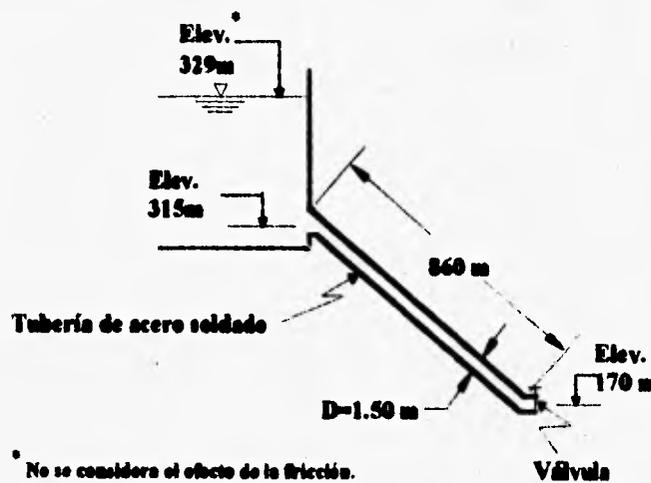


Figura VII.4 Sistema simplificado.

Del ejemplo anterior, se obtiene que para este caso, los valores de la velocidad de flujo y la celeridad de la onda de presión son  $V = 5.08 \frac{m}{s}$  y  $a = 1092.87 \frac{m}{s}$  respectivamente. El valor de  $\varepsilon$  es:

$$\varepsilon = \frac{(1092.87)(5.08)}{2(9.81)(159)} = 1.780$$

y el de  $T$ :

$$T = \frac{2(860)}{1092.87} = 1.57 \text{ s}$$

En la tabla VII.3 se presentan los valores máximo y mínimo de la carga de presión que se obtienen al introducir los valores anteriores en el programa de cómputo que se muestra en el Apéndice A. Podrá observarse que se emplearon los mismos tiempos de cierre de la válvula que en el ejemplo anterior. Asimismo en la figura VII.5 se presenta una comparación de los resultados que se muestran en las Tablas VII.2 y VII.3. En esa figura, se puede ver claramente que las cargas de presión que se obtienen en los distintos sistemas difieren en gran medida cuando los tiempos de cierre son pequeños. Sin embargo, al aumentar el tiempo de cierre de la válvula, la diferencia entre los valores de la carga de presión disminuye notablemente. Así por ejemplo para un tiempo de cierre de cinco minutos se obtienen los valores que se muestran en la tabla VII.4. Obsérvese que para ese tiempo de cierre, no existe ya diferencia significativa entre los valores de la carga de presión que se obtienen en los diferentes sistemas. De la misma manera, tampoco son importantes los valores de la sobrepresión y la depresión.

	$\theta \approx 11$ (17.30 s)	$\theta \approx 16$ (25.95 s)	$\theta \approx 22$ (34.60 s)	$\theta \approx 27$ (43.25 s)	$\theta \approx 33$ (51.50 s)	$\theta \approx 38$ (60.55 s)	$\theta \approx 44$ (69.20 s)
$H_{\text{máx}}$ (m)	186.89	177.70	172.39	169.83	167.81	166.62	165.56
$H_{\text{mín}}$ (m)	131.11	140.30	145.61	148.17	150.19	151.38	152.44

Tabla VII.3

	Sistema figura VII.2	Sistema figura VII.4
$H_{\text{máx}}$ (m)	162.65	160.49
$H_{\text{mín}}$ (m)	155.99	157.51

Tabla VII.4

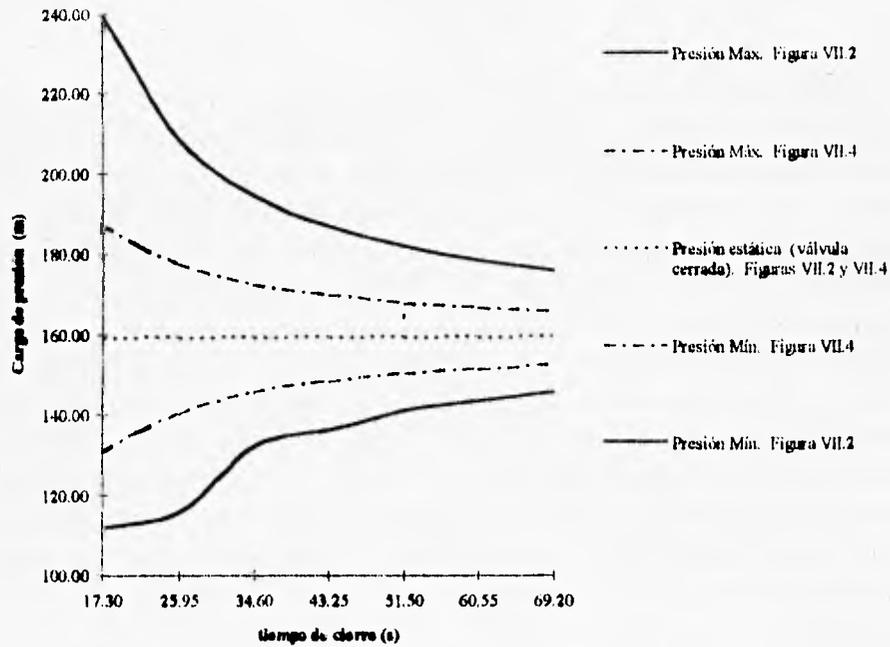


Figura VII.5 Comparación de resultados.

## RESOLUCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE BERGERON

### Ejemplo VII.3

De acuerdo con lo mencionado en el principio de este capítulo, se resuelve en primer lugar, un sistema como el que se muestra en la figura VII.2, el cual nuevamente se presenta en la figura VII.6. En esta figura puede notarse que los extremos de los segmentos de la conducción están señalados con las letras A, B y C.

Para un conducto que presenta un cambio en el área de su sección transversal así como en la velocidad de la onda de presión, se pueden aplicar también las ecuaciones conjugadas del golpe de ariete (ecuaciones IV.10 y IV.11) en los extremos de cada segmento de diámetro uniforme.

La representación de estas ecuaciones en el diagrama  $v-h$  es similar a la que se muestra en la figura IV.3c de esta tesis, con la excepción de que una de las series de ecuaciones conjugadas se representan por medio de líneas con una pendiente  $\pm 2\varepsilon_1$ , mientras que las líneas de la otra serie tienen una pendiente  $\pm 2\varepsilon_2$ .

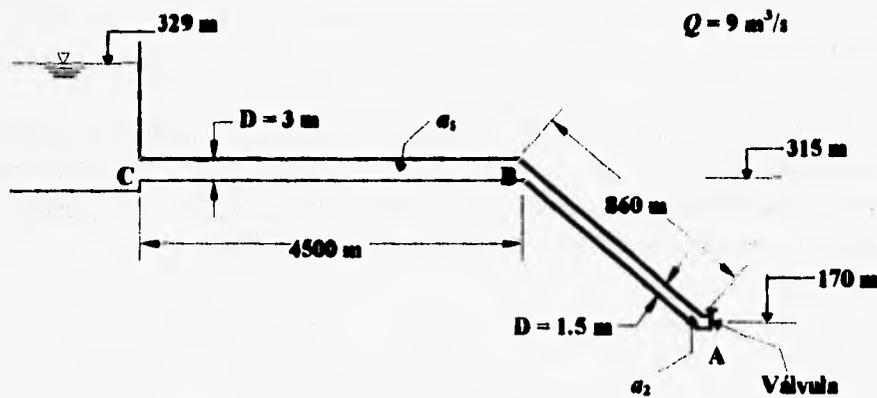


Figura VII.6 Notación para el Método de Bergeron.

Como en los ejemplos anteriores, la ley de cierre de la válvula es de tipo lineal, es decir,  $\eta$  varía linealmente respecto al tiempo. La ley de cierre que se utiliza para este ejemplo se presenta en la siguiente figura:

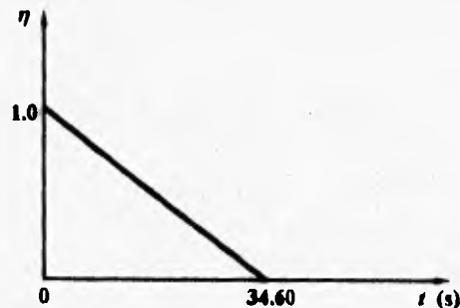


Figura VII.7 Ley de cierre de la válvula.

El tiempo que tarda la onda de presión en viajar de la sección A a la sección B es de  $L_2/a_2 = 860/1092.87 = 0.79$  s. Y de la sección B a la C,  $L_1/a_1 = 4500/1271.91 = 3.53$  s. Para la resolución del problema, se realiza un ajuste al valor de la celeridad de la onda de presión en cada uno de los tramos, de tal manera que el tiempo de viaje de la onda de A hacia B sea de 0.84 s, y de B hacia C de 3.36 s. De esta forma, las celeridades ajustadas son  $a_1 = 1339.29$  m/s y  $a_2 = 1023.81$  m/s.

El resumen de los pasos que se siguen para resolver este ejemplo, se muestra en la siguiente figura. En ella se podrá observar la razón por la cual se ajustan los valores originales de la celeridad de la onda de presión en cada uno de los segmentos (permitir la acoplación de los tiempos de cálculo).

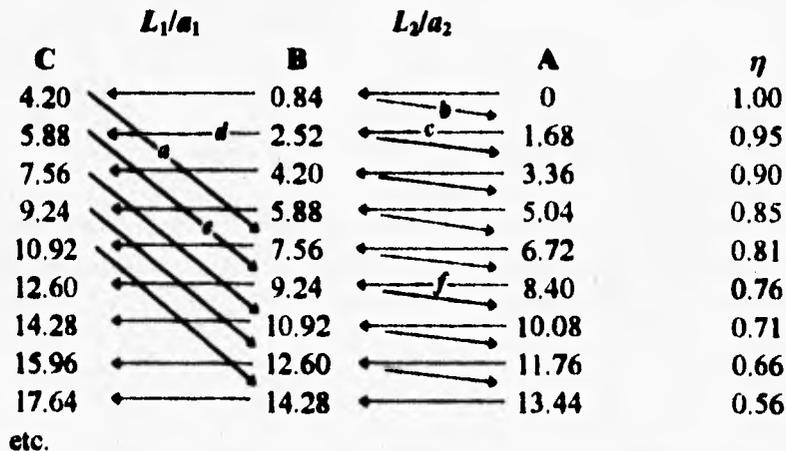


Figura VII.8 Resumen de pasos para elaborar la figura VII.9.

La explicación de esta figura es la siguiente (cotejar con la figura VII.9): en primer lugar se dibujan las parábolas para los valores de  $\eta = 0.95, 0.90, 0.85, 0.81, 0.76$ , etc., que de acuerdo a la figura VII.7, corresponden a  $t = 1.68, 3.36, 5.04, 6.72, 8.40$ , etc., respectivamente. Las parábolas se trazan de acuerdo con la ecuación IV.13. Como en el tiempo  $t = 0$  aún no se cierra la válvula,  $A_0^*$  se localiza en las coordenadas  $h = l$  y  $v = l$ , las cuales corresponden a las condiciones del estado

\* Los subíndices denotan el tiempo (en segundos) que transcurre después que se ha iniciado la maniobra, de modo que  $B_{0.84}$  expresa el valor de la carga piezométrica en la sección B cuando  $t = 0.84$  s.

permanente inicial. Como la onda de presión no alcanza a la sección B sino hasta que transcurren 0.84 s, y de la misma manera no llega hasta la sección C antes de que pasen 4.20 s, B<sub>0.84</sub> y C<sub>4.20</sub> se localizan en el mismo punto que A<sub>0</sub>. Desde este punto se trazan las líneas *a* y *b* que representan las ecuaciones conjugadas del golpe de ariete. Estas líneas tienen por pendiente  $-2\varepsilon_1$  y  $-2\varepsilon_2$  respectivamente. Donde

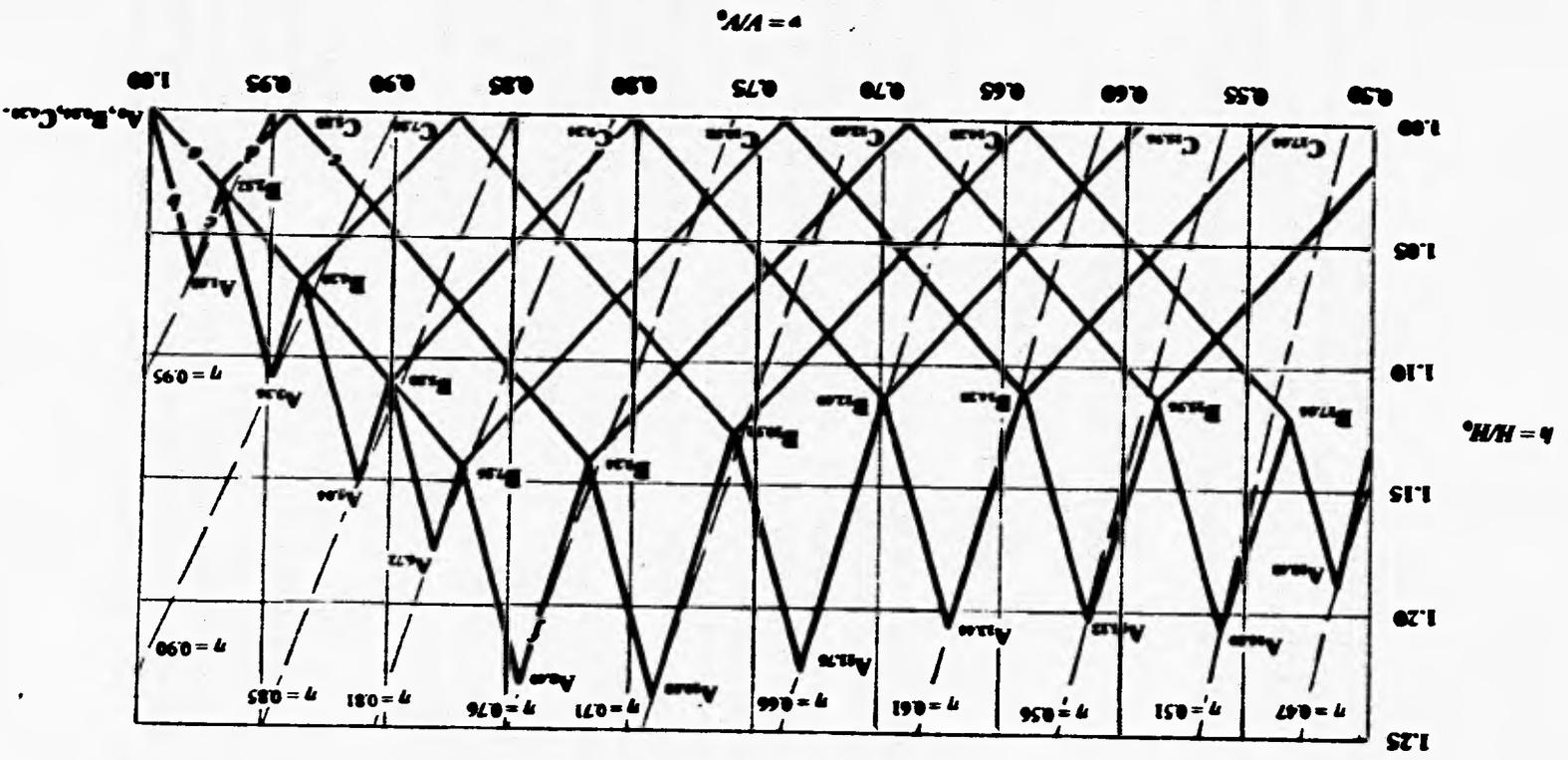
$$\varepsilon_1 = \frac{a_1 V_1}{2gH_0} = \frac{(1339.29)(1.27)}{2(9.81)(329 - 170)} = 0.54$$

y

$$\varepsilon_2 = \frac{a_2 V_2}{2gH_0} = \frac{(1023.81)(5.08)}{2(9.81)(329 - 170)} = 1.667$$

El punto A<sub>1.68</sub> se localiza en la intersección de la recta *b* con la parábola  $\eta = 0.95$ , ya que ese es el valor de  $\eta$  cuando  $t = 1.68$  s. Posteriormente, desde A<sub>1.68</sub> se traza la recta *c*, la cual tiene una pendiente  $2\varepsilon_2$ . El punto B<sub>2.52</sub> se encuentra en la unión de esta línea con la recta *a*. A partir de B<sub>2.52</sub> se dibuja una línea con pendiente  $2\varepsilon_1$  (recta *d*). Como el nivel del embalse se mantiene constante, C<sub>5.88</sub> se encuentra necesariamente en el cruce de esta recta con el eje  $h = l$ . A partir de este punto se traza la línea *e* con pendiente  $-2\varepsilon_1$ . Obsérvese que esta línea afectará el valor de la carga piezométrica en la sección B cuando  $t = 9.24$  s, de modo que para tiempos anteriores a este, la carga piezométrica en B se determina por la unión de la línea *a* con las líneas de pendiente  $2\varepsilon_2$  que parten desde los puntos A (hasta A<sub>6.72</sub>). Se continúa de forma similar para determinar los demás puntos que se indican en la figura VII.9. Por ejemplo para localizar B<sub>9.24</sub>, se dibuja desde A<sub>8.40</sub> la línea *f* que tiene por pendiente  $2\varepsilon_2$ ; la intersección de esta recta con la línea *e* determinan el punto deseado.

Se puede observar en la figura VII.9 que la carga piezométrica máxima sobre la válvula se presenta cuando  $t = 10.08$  s, que según la definición de  $h$ , equivale aproximadamente a  $1.24H_0$ , es decir a 197.16 m. Puede verse también que se conoce el valor de la carga piezométrica existente en la sección B (donde cambia el diámetro del conducto). Teniendo los valores de la carga piezométrica en las secciones A, B y C se puede conocer la carga piezométrica en las demás secciones



Ejemplos de aplicaciones

Figura VII.9 Representación gráfica de las conexiones conjugadas del tipo de serie para el ejemplo VII.3

de la tubería mediante una interpolación lineal. La carga de presión sobre dichas secciones se obtendrá al restar la carga de posición.

El método se puede aplicar también cuando existen más de dos cambios en el diámetro de la tubería o en la celeridad de la onda de presión. Sin embargo, cuando existen demasiados, el método resulta muy tedioso. En tales casos, se recomienda recurrir a la sustitución de la tubería por un conducto equivalente, tal como se mostró en la resolución del ejemplo VII.1.

#### Ejemplo VII.4

El sistema que se resuelve en esta sección corresponde al que se presenta en la figura VII.3. Podrá advertirse que los datos que se requieren para resolver el problema mediante este método, ya se calcularon anteriormente. La ley de cierre de la válvula se presenta en la figura VII.10. Como se trata de un sistema simple, el procedimiento que se sigue para calcular la carga máxima sobre la válvula es prácticamente el mismo que se describe al final del capítulo IV. La gráfica que se obtiene se presenta en la figura VII.11. El punto A corresponde a la sección donde se localiza la válvula, mientras que el punto B, corresponde a la frontera localizada entre el embalse y el conducto. En la figura VII.11 se observa que la carga piezométrica máxima se presenta en el tiempo  $t = 6.32$  s y esta es igual a  $1.45H_0$ , es decir a 230.55 m.

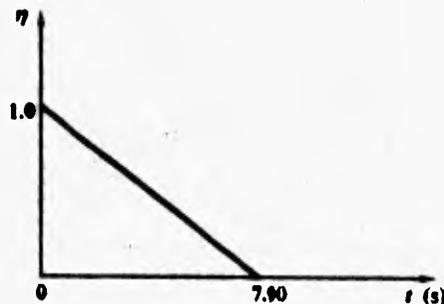
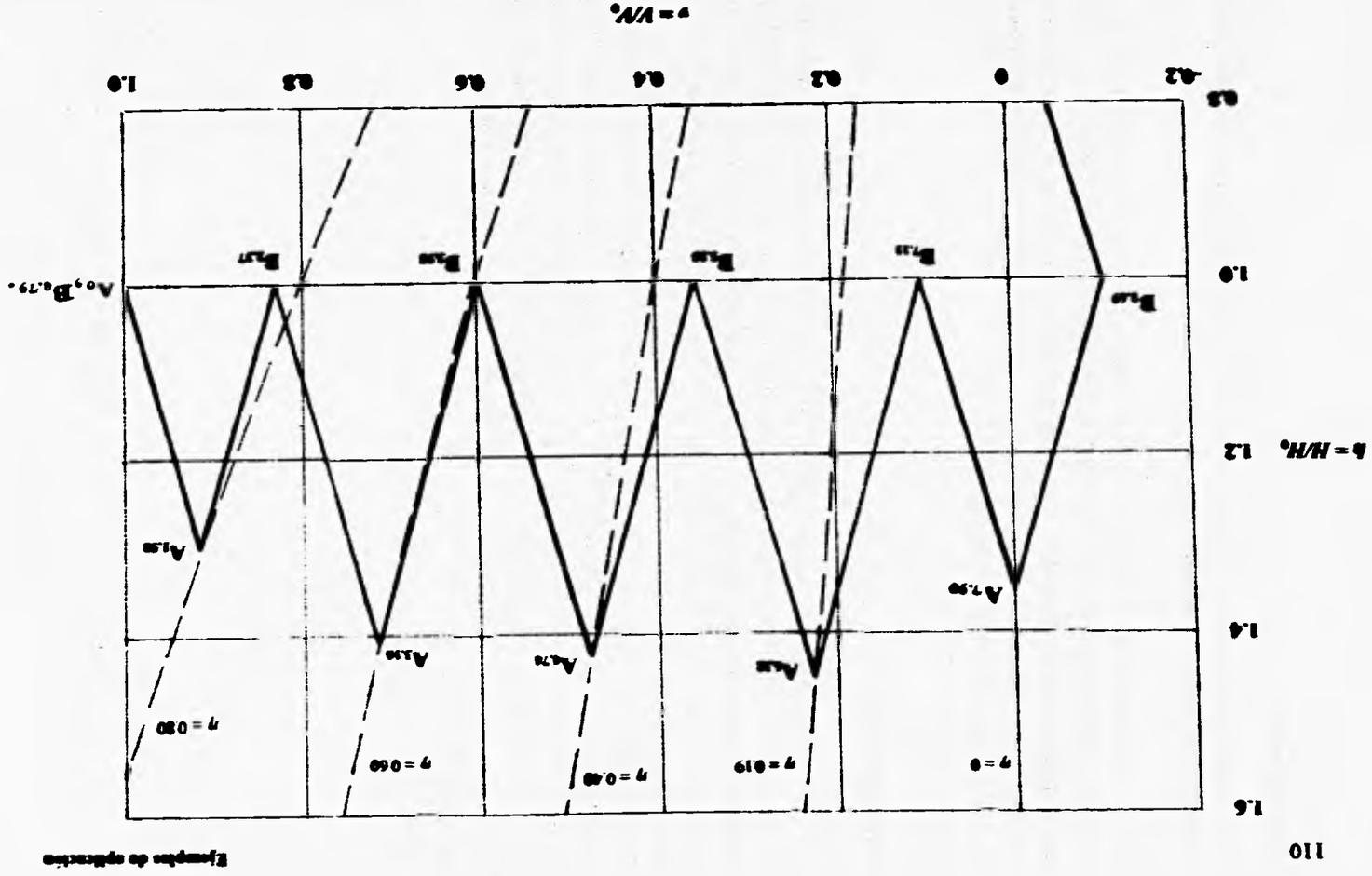


Figura VII.10 Ley de cierre de la válvula.



Ejemplos de aplicación

Si se comparan los resultados obtenidos en los ejemplos VII.3 y VII.4 con los que se obtuvieran mediante el Método de Allievi para los mismos tiempos de cierre de la válvula, se notará que no existe una diferencia significativa entre ellos. Para conocer su grado de precisión, sólo restaría compararlos con valores experimentales de la carga piezométrica que se obtuvieran en los diferentes sistemas.

## RESOLUCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

### Ejemplos VII.5 y VII.6

Para calcular las condiciones del estado transitorio mediante este método en un sistema de conducción que se componga de varios segmentos, se debe dividir el conducto más corto del sistema en un número tal de segmentos de modo que se obtenga el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . De acuerdo con Evangelisti<sup>3</sup>, un intervalo de tiempo igual a 1/16 a 1/24 del tiempo de transición, esto es, del tiempo que tarda en viajar una onda de presión de un extremo a otro de la tubería, debería proporcionar resultados suficientemente exactos. No obstante, Chaudry<sup>3</sup> opina que se debería utilizar este criterio sólo para darse una idea de cuál es el resultado, y  $\Delta t$  debería aumentarse o disminuirse de acuerdo con la frecuencia con que se produzcan los fenómenos transitorios. Después de haber seleccionado el valor de  $\Delta t$ , se procede a dividir los conductos restantes del sistema en longitudes iguales para así emplear el procedimiento descrito en el capítulo V (página 75). Si es necesario, se deben ajustar las celeridades de la onda para satisfacer la ecuación V.53, o mejor se utiliza el método combinado implícito-características, de modo que las características pasen a través de la malla de puntos. Posteriormente, se calculan la carga de presión en todas las secciones y el gasto para el estado permanente y se imprimen sus valores. Después, se incrementa el tiempo y se calculan las condiciones transitorias en todos los puntos interiores de acuerdo a las ecuaciones V.23 y V.18. Para determinar las condiciones en el depósito se utilizan las ecuaciones V.24 y V.25. Asimismo, para calcular las condiciones en donde cambia el diámetro de la sección transversal del conducto, se emplean las ecuaciones V.42, V.43, V.45 y V.46.

Finalmente, para determinar las condiciones de flujo transitorio en la válvula, se utilizan las ecuaciones V.41 y V.18. Este proceso continúa hasta calcular las condiciones transitorias por el tiempo requerido.

El diagrama de flujo que se presenta en la figura VII.12 muestra los pasos de cómputo que se siguen para determinar las condiciones en un sistema complejo de conducción (como el mostrado en la figura VII.2), el cual resulta igualmente válido para un sistema de conducción simple. Basado en dicho diagrama, se desarrolló el programa de computadora (utilizando para ello el lenguaje BASIC) que determina las condiciones de flujo transitorio de los sistemas que se muestran en las figuras VII.2 y VII.3. Este programa se presenta en el Apéndice B de la tesis. Las condiciones transitorias fueron provocadas al cerrar la válvula bajo una ley de tipo lineal. Para tratar de obtener resultados con suficiente grado de precisión se utilizó un  $\Delta t = 0.10s$ .

En las tablas VII.5 y VII.6 se muestran solamente los valores máximos y mínimos de la carga de presión que se obtuvieron en la válvula para los diferentes tiempos de cierre. Nótese que estos resultados son similares con los que se obtuvieron empleando el Método de Allievi (tablas VII.2 y VII.3). En las figuras VII.13 y VII.14 se comparan los valores de la carga de presión para diferentes secciones de la tubería, obtenidos mediante el Método de Allievi (y realizando una interpolación lineal) y el Método de las Características (consultar valores en el Apéndice B) para un tiempo de cierre de la válvula igual a 17.30 s. Podrá notarse que existe similitud en los valores aún cuando ellos se obtuvieron mediante una interpolación lineal en el Método de Allievi.

**Sistema de la figura VII.2 (Ejemplo VII.5)**

	Tiempo de cierre						
	17.30	25.95 s	34.60 s	43.25 s	51.90 s	60.55 s	69.20 s
$H_{máx}$ (m)	240.69	208.50	192.85	185.85	181.30	177.58	175.19
$H_{mín}$ (m)	106.16	118.93	131.40	137.53	140.68	143.93	145.71

**Tabla VII.5**

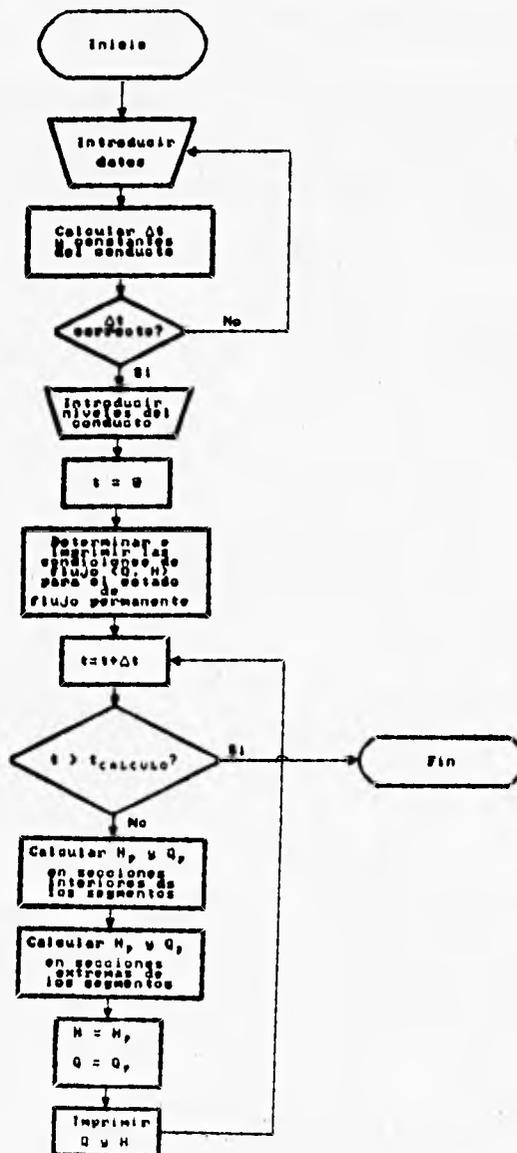


Figura VII.12 Diagrama de flujo utilizando el Método de las Características.

Sistema de la figura VII.4\* (Ejemplo VII.6)

	Tiempo de cierre						
	17.30	25.95 s	34.60 s	43.25 s	51.90 s	60.55 s	69.20 s
$H_{máx.}$ (m)	185.77	175.60	170.73	167.87	166.06	164.65	163.66
$H_{mín.}$ (m)	128.03	139.35	143.06	146.60	147.73	148.55	148.55

Tabla VII.4

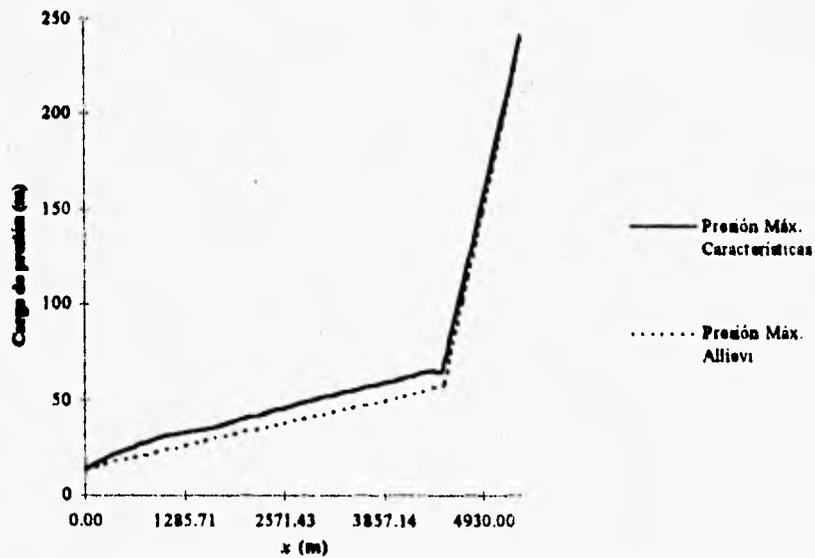


Figura VII.13 Comparación de resultados.

\* Como en el Método de las Características se consideran las pérdidas por fricción, el nivel de la superficie libre del agua en la torre de oscilación se consideró igual a 326.89 m (se utilizó la fórmula de Darcy para calcular las pérdidas por fricción).

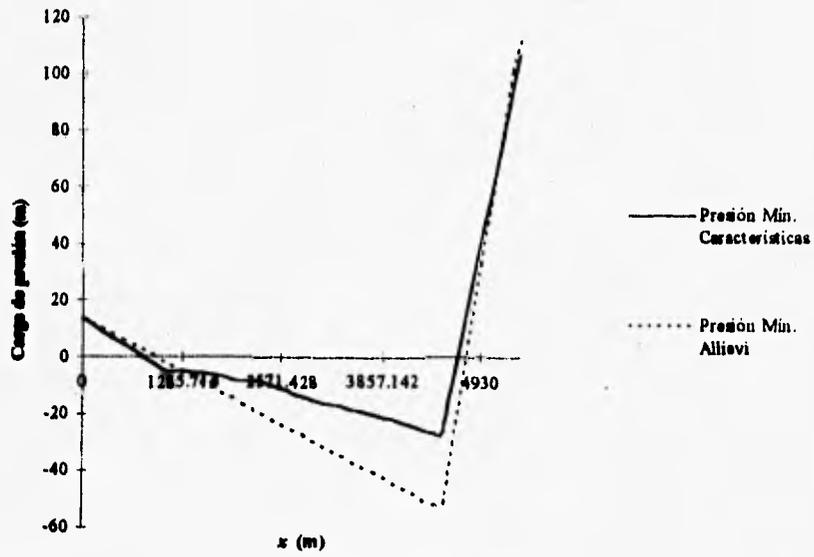


Figura VII.14 Comparación de resultados.

## VIII

# CONCLUSIONES

En el primer capítulo de esta tesis, se comentó la importancia que tiene el estudio de los fenómenos transitorios hidráulicos. Se explicó también que dicha importancia radica en la capacidad de poder evitar daños provocados por los efectos de los fenómenos transitorios, los cuales se pueden traducir en pérdidas materiales y/o de vidas humanas.

En el desarrollo de esta tesis se mostraron algunos de los métodos que existen para poder cuantificar los efectos de los fenómenos transitorios, en función de la velocidad de flujo y de la carga de presión que existen en una sección determinada de la vena líquida. Al resolver algunos ejemplos con cada uno de ellos, se pudo observar que se obtienen resultados similares, indicando quizá con esto su grado de confiabilidad. En todo caso, la conveniencia de emplear cierto método, dependerá de las circunstancias que existan en un caso dado. Sin embargo, se pueden hacer las siguientes observaciones al comparar los resultados que se obtuvieron con cada uno de los métodos empleados.

Respecto al Método de Allievi, no se encuentra dificultad al emplearlo. Al contrario, resulta sumamente sencillo resolver un problema mediante él. Otro ejemplo, es la facilidad con que se puede elaborar un programa de cómputo que se base en el método. Aunque en la resolución de los ejemplos no se utilizaron las gráficas de Allievi, puede comprobarse que su empleo es muy sencillo. Entre las desventajas del método se encuentra que: a) no se pueden hacer intervenir las pérdidas por fricción, en cada uno de

los pasos de cálculo, para determinar las condiciones de flujo transitorio ( $Q$  y  $H$ ); b) las condiciones se obtienen para una sola sección, la cual corresponde a la de la válvula; y c) no se le puede aplicar en casos más complicados que los que se analizaron aquí. En cuanto a las desventajas a y b, pueden no resultar un obstáculo para el empleo del método, pues si se efectúa una interpolación lineal para conocer los valores de la carga de presión en las secciones intermedias (ver capítulo anterior) y se comparan los resultados obtenidos con el método de las características, el cual si calcula las condiciones de flujo transitorio tomando en cuenta las pérdidas por fricción y para varias secciones de la vena líquida, se verá que son muy semejantes. Por lo general para calcular las condiciones transitorias en un sistema de conducción, no resulta importante despreciar los efectos debidos a la fricción; pero sería conveniente que se tomaran en cuenta. Respecto a la desventaja c, definitivamente el método no se puede aplicar para resolver sistemas que posean condiciones de frontera más complejas.

Al utilizar el Método de Bergeron, se observa la utilidad que tiene este para comprender de mejor manera el comportamiento del fenómeno. El método es a fin de cuentas, la resolución gráfica de las ecuaciones conjugadas. Su empleo es muy sencillo cuando se trata de determinar las condiciones de flujo transitorio en un sistema simple depósito-conducto-válvula. Aunque en los ejemplos no se realizó, también se pueden hacer intervenir las pérdidas por fricción para determinar las condiciones transitorias en un sistema, si se supone que esas pérdidas se concentran en una o varias secciones a lo largo de la conducción. El método resulta tedioso al determinar las condiciones transitorias en un sistema como el mostrado en la figura VII.2 (ver ejemplo VII.3). Además, en la gráfica que se obtiene sólo se muestran las condiciones para un determinado tiempo de cierre de la válvula. De esta manera, si se quieren obtener las condiciones de flujo para diferentes tiempos de cierre de la válvula, se tienen que elaborar tantas gráficas como diferentes tiempos de cierre de la válvula se requieran. Puede considerarse que en la actualidad resulta obsoleto debido a la facilidad que se tiene para emplear las computadoras digitales. Sin embargo, se reitera que al utilizarlo se comprende de mejor manera el fenómeno transitorio.

En el Método de las Características, se encuentran varias ventajas respecto a los métodos anteriores. En primer lugar, por medio de este método se pueden aprovechar en gran medida las ventajas que ofrecen las computadoras. También, por medio de él se pueden conocer las condiciones de flujo transitorio en varias secciones de la vena

liquida. Dependerá del intervalo de tiempo que se esté usando, el número de secciones en las cuales se obtendrán las condiciones transitorias así como la precisión del cálculo. Así, para un intervalo de tiempo menor corresponderá un mayor número de secciones y una mayor precisión en los valores de las condiciones transitorias. De igual manera, al emplear este método se pueden hacer intervenir las pérdidas locales y las debidas a la fricción en cada uno de los pasos de cálculo para determinar las condiciones de flujo transitorio. El método cuenta también con diferentes expresiones que permiten simular diferentes condiciones de frontera\*, no resultando muy complicada la incorporación de algunas de esas expresiones en un programa de cómputo. Quizá una de las desventajas que se le pueda encontrar al método, consiste en que se requieren invertir varias horas-hombre para la realización del programa que determine las condiciones de flujo transitorio mediante una computadora. Sin embargo la rapidez con que se obtienen los resultados al ejecutar dicho programa compensa en gran medida esa desventaja. No contando además que varias de las instituciones que se dedican al diseño de sistemas de conducción (como Comisión Nacional del Agua o Comisión Federal de Electricidad), cuentan con programas elaborados que calculan las condiciones de flujo transitorio en sistemas que posean condiciones de frontera complejas.

En los párrafos anteriores se han hecho observaciones respecto a los métodos que se usaron para determinar las condiciones de flujo transitorio en un sistema de conducción debidas a la apertura o cierre de una válvula. Pero aún cabe hacer comentarios sobre las diferencias que se encontraron en los sistemas que se muestran en las figuras VII.1 y VII.2.

En este párrafo se listarán las ventajas que se encontraron en el sistema de conducción provisto de la torre de oscilación (figura VII.1), sobre el otro que no tenía dicha torre (figura VII.2):

1. Los fenómenos transitorios importantes se confinan al conducto forzado, localizado entre la torre de oscilación y la válvula, lo cual equivale a que el diseño de la galería sólo se realice para flujo permanente.

2. Para un mismo tiempo de cierre de la válvula, se presentan en la conducción cargas de presión menores. Con esto se logra que sea más económica. Debería

---

\* Con el Método de Bergeron también se pueden simular diferentes condiciones de frontera (consultar referencia 4), pero la resolución se vuelve muy complicada.

analizarse si el sistema de conducción en su conjunto también lo es.

3. No se presentan cargas de presión negativas (menores a la presión atmosférica) en el conducto, a menos que los tiempos de cierre de la válvula sean demasiado pequeños. La presencia de cargas de presión negativas en la conducción podría ocasionar que: a) en la galería puedan haber desprendimientos del revestimiento o del material rocoso; b) pueda originarse separaciones de columna en la vena líquida, y en este caso no tienen validez las ecuaciones de flujo transitorio; y c) la conducción falle por aplastamiento.

En un problema real, los tiempos de cierre son mucho mayores que los que se consideraron en los ejemplos del capítulo anterior, por lo que convendría hacer un estudio económico exhaustivo para saber si sería conveniente construir la torre de oscilación en el sistema analizado, pues se observó que para tiempos de cierre con algunos minutos de duración, la diferencia que se obtiene entre los valores de la carga de presión en un sistema que no posee torre de oscilación respecto a otro que si, no es significativa. Debería también evaluarse las otras alternativas que existen en materia de control hidráulico para elegir así la opción que conlleve a un sistema de conducción económico.

Finalmente, debe aclararse que las conclusiones anteriores no son válidas necesariamente para casos más complejos que los que se estudiaron en el capítulo anterior, que posean, por ejemplo, condiciones de frontera de otro tipo como bombas, turbinas con regulador, redes de tuberías, etc.

## APÉNDICE A

**Listado del programa empleado para resolver los ejemplos VII.1 y VII.2 (Método de Allievi).**

```
CLS
INPUT "Introduzca: Q0, g"; Q0, G
INPUT "Introduzca: Tiempo de cierre de la valvula, Tiempo de calculo"; TC,
    TCALC
INPUT "Introduzca: Velocidad (o velocidad equivalente)"; V0
INPUT "Introduzca: Longitud (o longitud equivalente)"; L
INPUT "Introduzca: Celeridad (o celeridad equivalente)"; A
INPUT "Introduzca: Carga de presion sobre la valvula"; H0

PI = 3.141592654#
EPS = A * V0 / (2 * G * H0); T = 2 * L / A
TETA = CINT(TC / T); J = (TCALC / T)

DIM NU(J), ZETA(J), H(J)
FOR I = 0 TO TETA
    NU(I) = 1 - I / TETA
NEXT I

FOR I = TETA + 1 TO J
    NU(I) = 0
NEXT I

ZETA(0) = 1
FOR I = 1 TO J
    C1 = 1; C2 = 2 * EPS * NU(I); C3 = ZETA(I - 1) ^ 2 - 2 * EPS * NU(I - 1) *
        ZETA(I - 1) - 2
    GOTO 20
10 NEXT I

HMIN = H0
HMAX = H0
```

```
LPRINT
LPRINT TAB(4); "Tiempo"; TAB(13); "NU"; TAB(18); "ZETA"; TAB(26); "H"
FOR I = 0 TO J
  H(I) = ZETA(I) ^ 2 * H0
  IF H(I) > HMAX THEN HMAX = H(I)
  IF H(I) < HMIN THEN HMIN = H(I)
  LPRINT USING "###.## "; I * T;
  LPRINT USING "#.## "; NU(I);
  LPRINT USING "###.## "; ZETA(I);
  LPRINT USING "###.##"; H(I)
NEXT I

LPRINT
LPRINT "Hmax =";
LPRINT USING "###.##"; HMAX
LPRINT "Hmin =";
LPRINT USING "###.##"; HMIN
GOTO 30

20 REM Calculo de ZETA(I)
D = C2 ^ 2 - 4 * C1 * C3: ZETA(I) = .5 * (-C2 + SQR(D))
GOTO 10

30 END
```

**Resultados que se obtienen al ejecutar el programa para datos del problema VII.1**

**$\theta=2$**

Tiempo	NU	ZETA	H
0.00	1.00	1.00	159.00
8.65	0.50	1.23	239.53
17.30	0.00	1.14	206.40
25.95	0.00	0.84	111.60
34.60	0.00	1.14	206.40
43.25	0.00	0.84	111.60
51.90	0.00	1.14	206.40

Hmax =239.53

Hmin =111.60

**$\theta=3$**

Tiempo	NU	ZETA	H
0.00	1.00	1.00	159.00
8.65	0.67	1.14	208.37
17.30	0.33	1.10	192.30
25.95	0.00	1.13	202.11
34.60	0.00	0.85	115.89
43.25	0.00	1.13	202.11
51.90	0.00	0.85	115.89

Hmax =208.37

Hmin =115.89

**$\theta=4$**

Tiempo	NU	ZETA	H
0.00	1.00	1.00	159.00
8.65	0.75	1.11	194.53
17.30	0.50	1.08	184.21
25.95	0.25	1.09	189.14
34.60	0.00	1.08	185.70
43.25	0.00	0.91	132.30
51.90	0.00	1.08	185.70
60.55	0.00	0.91	132.30
69.20	0.00	1.08	185.70
77.85	0.00	0.91	132.30

Hmax =194.53

Hmin =132.30

**$\theta=5$**

Tiempo	NU	ZETA	H
0.00	1.00	1.00	159.00
8.65	0.80	1.08	186.73
17.30	0.60	1.06	179.21
25.95	0.40	1.07	182.29
34.60	0.20	1.07	180.56
43.25	0.00	1.07	181.87
51.90	0.00	0.93	136.13
60.55	0.00	1.07	181.87
69.20	0.00	0.93	136.13
77.85	0.00	1.07	181.87

Hmax =186.73

Hmin =136.13

$\theta=6$ 

Tiempo	NU	ZETA	H
0.00	1.00	1.00	159.00
8.65	0.83	1.07	181.74
17.30	0.67	1.05	175.84
25.95	0.50	1.06	178.02
34.60	0.33	1.05	176.96
43.25	0.17	1.06	177.62
51.90	0.00	1.06	177.10
60.55	0.00	0.94	140.90
69.20	0.00	1.06	177.10

Hmax =181.74  
Hmin =140.90

 $\theta=7$ 

Tiempo	NU	ZETA	H
0.00	1.00	1.00	159.00
8.65	0.86	1.06	178.26
17.30	0.71	1.04	173.42
25.95	0.57	1.05	175.08
34.60	0.43	1.05	174.36
43.25	0.29	1.05	174.75
51.90	0.14	1.05	174.49
60.55	0.00	1.05	174.71
69.20	0.00	0.95	143.29

Hmax =178.26  
Hmin =143.29

## APÉNDICE B

**Listado del programa empleado para resolver los ejemplos VII.5 y VII.6  
(Método de las características).**

CLS

INPUT "Introduzca: No. de conductos, Q0, g"; NC, Q0, G

INPUT "Introduzca: Tiempo de cierre de la valvula, Tiempo de calculo"; TC,  
TCALC

INPUT "Introduzca: Nivel del PHC, Nivel de la SLA del deposito"; PHC, SLA  
DIM AREA(NC), D(NC), A(NC), F(NC), AC(NC)

PI = 3.141592654#

10 INPUT "Dt propuesto"; DT

FOR I = 1 TO NC

PRINT "Celeridad ("; I; ")";

INPUT A(I)

PRINT "Diametro ("; I; ")";

INPUT D(I)

PRINT "Longitud ("; I; ")";

INPUT L(I)

PRINT "Factor de friccion de Darcy ("; I; ")";

INPUT F(I)

$N(I) = \text{CINT}(L(I) / (DT * A(I)))$  'Condicion de Courant

$DX(I) = L(I) / N(I)$

$AC(I) = L(I) / (DT * N(I))$

$AREA(I) = PI * D(I) ^ 2 / 4$

NEXT I

FOR I = 1 TO NC

PRINT "Numero de segmentos en conducto "; I; "="; N(I)

PRINT "Valor de Dx en conducto "; I; "="; DX(I)

PRINT "Celeridad ajustada en conducto "; I; "="; AC(I)

$CA(I) = G * AREA(I) / AC(I)$

NEXT I

```
INPUT "Esta de acuerdo con el numero de segmentos (s/n)"; AS
IF AS = "n" OR AS = "N" THEN 10
```

```
INPUT "Introduzca el mayor numero de segmentos en que fue dividido un
conducto"; NS
```

```
DIM H(NC, NS + 2), ALT(NC, NS + 2), Z(NC, NS + 2), Q(NC, NS + 2),
HPIE(NC, NS + 2), CP(NC, NS + 2), CN(NC, NS + 2), QP(NC, NS + 2), HP(NC,
NS + 2)
```

```
DIM HMAX(NC, NS + 2), HMIN(NC, NS + 2)
```

```
FOR I = 1 TO NC
```

```
  PRINT "Nivel de la tubería, sección ("; I; ", 1)";
```

```
  INPUT ALT(I, 1)
```

```
  PRINT "Nivel de la tubería, sección ("; I; ", "; N(I) + 1; ")";
```

```
  INPUT ALT(I, N(I) + 1)
```

```
  DESNIVEL(I) = ALT(I, 1) - ALT(I, N(I) + 1)
```

```
NEXT I
```

```
FOR I = 1 TO NC
```

```
  FOR J = 2 TO N(I)
```

```
    ALT(I, J) = ALT(I, 1) - (J - 1) * DX(I) * DESNIVEL(I) / L(I)
```

```
  NEXT J
```

```
NEXT I
```

```
REM Calculo de condiciones iniciales
```

```
t = 0: nu = 1
```

```
FOR I = 1 TO NC
```

```
  FOR J = 1 TO N(I) + 1
```

```
    Z(I, J) = ALT(I, J) - PHC
```

```
    Q(I, J) = Q0
```

```
    H(I, J) = H(I, J - 1) - F(I) * DX(I) / D(I) * (4 * Q(I, J)) ^ 2 / (2 * G * (PI *
D(I) ^ 2) ^ 2)
```

```
    IF I >= 2 THEN H(I, 1) = H(I - 1, N(I - 1) + 1)
```

```
    HPIE(I, J) = H(I, J) - Z(I, J)
```

```
    IF I = NC AND J = N(I) + 1 THEN HVALV = H(I, J)
```

```
    H(1, 1) = SLA - PHC
```

```
    HPIE(1, 1) = H(1, 1) - Z(1, 1)
```

```
    HMAX(I, J) = H(I, J)
```

```
    HMIN(I, J) = H(I, J)
```

```

NEXT J
NEXT I

PRINT TAB(3); "Tiempo"; TAB(11); "nu"; TAB(16); "Conducto"; TAB(26);
"Seccion"; TAB(35); "Carga de presion"; TAB(55); "Gasto"
FOR I = 1 TO NC
  FOR J = 1 TO N(I) + 1
    PRINT USING "####.## "; t;
    PRINT USING " ###.##"; nu;
    PRINT TAB(19); I; TAB(28); J;
    PRINT USING "   ###.##"; HPIE(I, J);
    PRINT USING "   ###.##"; Q(I, J)
  NEXT J
NEXT I

20 t = t + DT
IF t > TCALC THEN 70
FOR I = 1 TO NC
  FOR J = 1 TO N(I) + 1
    CP(I, J) = Q(I, J - 1) + CA(I) * H(I, J - 1) - F(I) * DT * Q(I, J - 1) *
    ABS(Q(I, J - 1)) / (2 * D(I) * AREA(I))
    CN(I, J) = Q(I, J + 1) - CA(I) * H(I, J + 1) - F(I) * DT * Q(I, J + 1) *
    ABS(Q(I, J + 1)) / (2 * D(I) * AREA(I))
  NEXT J
NEXT I

FOR I = 1 TO NC
  FOR J = 1 TO N(I) + 1
    IF I < NC AND J = N(I) + 1 THEN 40
    IF I > 1 AND J = 1 THEN 50
    IF I = NC AND J = N(I) + 1 THEN 60
    QP(I, J) = .5 * (CP(I, J) + CN(I, J))
    HP(I, J) = (QP(I, J) - CN(I, J)) / CA(I)
    HP(1, 1) = H(1, 1)
    CN(1, 1) = Q(1, 2) - H(1, 2) * CA(1) - F(1) * DT * Q(1, 2) * ABS(Q(1, 2)) /
    (2 * D(1) * AREA(1))
    QP(1, 1) = CN(1, 1) + CA(1) * HP(1, 1)
  30 NEXT J
NEXT I

```

```

FOR I = 1 TO NC
  FOR J = 1 TO N(I) + 1
    Q(I, J) = QP(I, J)
    H(I, J) = HP(I, J)
    HPIE(I, J) = H(I, J) - Z(I, J)
    IF H(I, J) > HMAX(I, J) THEN HMAX(I, J) = H(I, J)
    IF H(I, J) < HMIN(I, J) THEN HMIN(I, J) = H(I, J)
  NEXT J
NEXT I

```

```

FOR I = 1 TO NC
  FOR J = 1 TO N(I) + 1
    PRINT USING "####.## "; t;
    PRINT USING " #.##"; nu;
    PRINT TAB(19); I; TAB(28); J;
    PRINT USING "   ###.##"; HPIE(I, J);
    PRINT USING "   ###.##"; Q(I, J)
  NEXT J
NEXT I
GOTO 20

```

```

40 REM Condiciones de flujo en el cambio de diametro seccion aguas arriba
  HP(I, J) = (CP(I, J) - CN(I + 1, 1)) / (CA(I) + CA(I + 1))
  QP(I, J) = CP(I, J) - CA(I) * HP(I, J)
  GOTO 30

```

```

50 REM Condiciones de flujo en el cambio de diametro seccion aguas abajo
  HP(I, J) = HP(I - 1, N(I - 1) + 1)
  QP(I, J) = QP(I - 1, N(I - 1) + 1)
  GOTO 30

```

```

60 REM Calculo de nu en el cierre de valvula
  IF t > TC THEN nu = 0 ELSE nu = 1 - t / TC

```

```

REM Calculo de condiciones de flujo en la valvula
  CV = (nu * Q0) ^ 2 / (CA(NC) * HVALV)
  QP(I, J) = .5 * (-CV + SQR(CV ^ 2 + 4 * CP(I, J) * CV))
  HP(I, J) = (CP(I, J) - QP(I, J)) / CA(NC)
  GOTO 30

```

```

70 PRINT
PRINT TAB(3); "Conducto"; TAB(13); "Seccion"; TAB(22); "Pres. Max.";
TAB(33); "Pres. Min"
FOR I = 1 TO NC
  FOR J = 1 TO N(I) + 1
    LPRINT TAB(6); I; TAB(16); J;
    LPRINT USING " ###.## "; HMAX(I, J) - Z(I, J);
    LPRINT USING " ###.##"; HMIN(I, J) - Z(I, J);
  NEXT J
NEXT I
END

```

**Resultados que se obtienen al ejecutar el programa para datos del problema VII.5**

```

Introduzca: No. De conductos, Q0, g? 2,9,9.81
Introduzca: Tiempo de cierre de la valvula, Tiempo de calculo? 17.3,30
Introduzca: Nivel del PHC, Nivel de la SLA del deposito? 170,329
Dt propuesto? 1
Celeridad ( 1 )? 1271.91
Diametro ( 1 )? 3
Longitud ( 1 )? 4500
Factor de friccion de Darcy ( 1 )? .017
Celeridad ( 2 )? 1092.87
Diametro ( 1 )? 1.5
Longitud ( 1 )? 860
Factor de friccion de Darcy ( 1 )? .011
Numero de segmentos en conducto 1 = 4
Valor de Dx en conducto 1 = 1125
Celeridad ajustada en conducto 1 = 1125
Numero de segmentos en conducto 2 = 1
Valor de Dx en conducto 1 = 860
Celeridad ajustada en conducto 1 = 860
Esta de acuerdo con el numero de segmentos (s/n)? s
Introduzca el mayor numero de segmentos en que fue dividido un conducto? 4
Nivel de la tuberia, seccion ( 1 , 1 )? 315
Nivel de la tuberia, seccion ( 1 , 5 )? 315
Nivel de la tuberia, seccion ( 2 , 1 )? 315
Nivel de la tuberia, seccion ( 2 , 2 )? 170

```

Tiempo	nu	Conducto	Seccion	Carga de presion	Gasto
0.00	1.00	1	1	14.00	9.00
0.00	1.00	1	2	13.47	9.00
0.00	1.00	1	3	12.95	9.00
0.00	1.00	1	4	12.42	9.00
0.00	1.00	1	5	11.89	9.00

0.00	1.00	2	1	11.89	9.00
0.00	1.00	2	2	148.56	9.00
1.00	0.94	1	1	14.00	9.00
1.00	0.94	1	2	13.47	9.00
1.00	0.94	1	3	12.95	9.00
1.00	0.94	1	4	12.42	9.00
1.00	0.94	1	5	11.89	9.00
1.00	0.94	2	1	11.89	9.00
1.00	0.94	2	2	159.35	8.78
2.00	0.88	1	1	14.00	9.00
2.00	0.88	1	2	13.47	9.00
2.00	0.88	1	3	12.95	9.00
2.00	0.88	1	4	12.42	9.00
2.00	0.88	1	5	17.11	8.68
2.00	0.88	2	1	17.11	8.68
2.00	0.88	2	2	171.17	8.54
3.00	0.83	1	1	14.00	9.00
3.00	0.83	1	2	13.47	9.00
3.00	0.83	1	3	12.95	9.00
3.00	0.83	1	4	17.62	8.68
3.00	0.83	1	5	22.84	8.33
3.00	0.83	2	1	22.84	8.33
3.00	0.83	2	2	179.36	8.17
4.00	0.77	1	1	14.00	9.00
4.00	0.77	1	2	13.47	9.00
4.00	0.77	1	3	18.13	8.68
4.00	0.77	1	4	23.33	8.33
4.00	0.77	1	5	29.25	7.93
4.00	0.77	2	1	29.25	7.93
4.00	0.77	2	2	187.79	7.78
5.00	0.71	1	1	14.00	9.00
5.00	0.71	1	2	18.64	8.68
5.00	0.71	1	3	23.82	8.33
5.00	0.71	1	4	29.72	7.94
5.00	0.71	1	5	36.02	7.52
5.00	0.71	2	1	36.02	7.52
5.00	0.71	2	2	196.35	7.36
6.00	0.65	1	1	14.00	8.37
6.00	0.65	1	2	24.31	8.33
6.00	0.65	1	3	30.18	7.94
6.00	0.65	1	4	36.47	7.52
6.00	0.65	1	5	43.20	7.08
6.00	0.65	2	1	43.20	7.08
6.00	0.65	2	2	205.30	6.91
7.00	0.60	1	1	14.00	7.67
7.00	0.60	1	2	25.52	7.63
7.00	0.60	1	3	36.92	7.53

Apéndice B

7.00	0.60	1	4	43.62	7.09
7.00	0.60	1	5	50.75	6.62
7.00	0.60	2	1	50.75	6.62
7.00	0.60	2	2	214.70	6.44
8.00	0.54	1	1	14.00	6.89
8.00	0.54	1	2	26.61	6.87
8.00	0.54	1	3	38.94	6.78
8.00	0.54	1	4	51.16	6.63
8.00	0.54	1	5	58.73	6.13
8.00	0.54	2	1	58.73	6.13
8.00	0.54	2	2	224.54	5.95
9.00	0.48	1	1	14.00	6.07
9.00	0.48	1	2	27.41	6.05
9.00	0.48	1	3	40.84	5.97
9.00	0.48	1	4	54.02	5.83
9.00	0.48	1	5	67.13	5.62
9.00	0.48	2	1	67.13	5.62
9.00	0.48	2	2	234.86	5.43
10.00	0.42	1	1	14.00	5.21
10.00	0.42	1	2	28.23	5.18
10.00	0.42	1	3	42.48	5.10
10.00	0.42	1	4	56.79	4.97
10.00	0.42	1	5	68.32	4.93
10.00	0.42	2	1	68.32	4.93
10.00	0.42	2	2	245.64	4.88
11.00	0.36	1	1	14.00	4.29
11.00	0.36	1	2	29.07	4.27
11.00	0.36	1	3	44.18	4.19
11.00	0.36	1	4	56.78	4.21
11.00	0.36	1	5	69.20	4.20
11.00	0.36	2	1	69.20	4.20
11.00	0.36	2	2	246.24	4.22
12.00	0.31	1	1	14.00	3.33
12.00	0.31	1	2	29.95	3.30
12.00	0.31	1	3	43.36	3.38
12.00	0.31	1	4	56.58	3.42
12.00	0.31	1	5	68.02	3.51
12.00	0.31	2	1	68.02	3.51
12.00	0.31	2	2	245.07	3.54
13.00	0.25	1	1	14.00	2.32
13.00	0.25	1	2	28.29	2.45
13.00	0.25	1	3	42.36	2.53
13.00	0.25	1	4	54.61	2.68
13.00	0.25	1	5	66.02	2.83
13.00	0.25	2	1	66.02	2.83
13.00	0.25	2	2	243.84	2.87
14.00	0.19	1	1	14.00	1.56

14.00	0.19	1	2	26.41	1.55
14.00	0.19	1	3	39.54	1.75
14.00	0.19	1	4	51.80	1.95
14.00	0.19	1	5	63.42	2.13
14.00	0.19	2	1	63.42	2.13
14.00	0.19	2	2	241.87	2.19
15.00	0.13	1	1	14.00	0.78
15.00	0.13	1	2	25.25	0.87
15.00	0.13	1	3	35.86	0.97
15.00	0.13	1	4	48.36	1.20
15.00	0.13	1	5	60.06	1.44
15.00	0.13	2	1	60.06	1.44
15.00	0.13	2	2	238.63	1.52
16.00	0.08	1	1	14.00	0.17
16.00	0.08	1	2	23.45	0.20
16.00	0.08	1	3	34.07	0.32
16.00	0.08	1	4	44.13	0.46
16.00	0.08	1	5	55.76	0.75
16.00	0.08	2	1	55.76	0.75
16.00	0.08	2	2	234.10	0.85
17.00	0.02	1	1	14.00	-0.38
17.00	0.02	1	2	22.82	-0.37
17.00	0.02	1	3	31.71	-0.31
17.00	0.02	1	4	41.47	-0.13
17.00	0.02	1	5	50.41	0.07
17.00	0.02	2	1	50.41	0.07
17.00	0.02	2	2	228.23	0.19
18.00	0.00	1	1	14.00	-0.91
18.00	0.00	1	2	22.27	-0.89
18.00	0.00	1	3	30.22	-0.83
18.00	0.00	1	4	38.00	-0.70
18.00	0.00	1	5	47.77	-0.52
18.00	0.00	2	1	47.77	-0.52
18.00	0.00	2	2	198.77	0.00
19.00	0.00	1	1	14.00	-1.40
19.00	0.00	1	2	21.40	-1.37
19.00	0.00	1	3	28.56	-1.28
19.00	0.00	1	4	36.53	-1.21
19.00	0.00	1	5	33.37	-0.41
19.00	0.00	2	1	33.37	-0.41
19.00	0.00	2	2	166.94	0.00
20.00	0.00	1	1	14.00	-1.82
20.00	0.00	1	2	20.29	-1.79
20.00	0.00	1	3	27.71	-1.76
20.00	0.00	1	4	23.92	-0.99
20.00	0.00	1	5	18.10	-0.08
20.00	0.00	2	1	18.10	-0.08

**Apéndice B**

20.00	0.00	2	2	157.98	0.00
21.00	0.00	1	1	14.00	-2.17
21.00	0.00	1	2	20.31	-2.21
21.00	0.00	1	3	15.67	-1.50
21.00	0.00	1	4	9.28	-0.62
21.00	0.00	1	5	9.09	-0.08
21.00	0.00	2	1	9.09	-0.08
21.00	0.00	2	2	159.25	0.00
22.00	0.00	1	1	14.00	-2.60
22.00	0.00	1	2	9.38	-1.39
22.00	0.00	1	3	1.90	-1.08
22.00	0.00	1	4	0.84	-0.59
22.00	0.00	1	5	2.92	-0.23
22.00	0.00	2	1	2.92	-0.23
22.00	0.00	2	2	150.20	0.00
23.00	0.00	1	1	14.00	-1.60
23.00	0.00	1	2	-4.39	-1.46
23.00	0.00	1	3	-5.43	-0.97
23.00	0.00	1	4	-4.46	-0.68
23.00	0.00	1	5	-5.26	-0.21
23.00	0.00	2	1	-5.26	-0.21
23.00	0.00	2	2	136.60	0.00
24.00	0.00	1	1	14.00	-0.33
24.00	0.00	1	2	-0.81	-0.69
24.00	0.00	1	3	-10.74	-1.07
24.00	0.00	1	4	-11.53	-0.60
24.00	0.00	1	5	-13.78	-0.11
24.00	0.00	2	1	-13.78	-0.11
24.00	0.00	2	2	129.28	0.00
25.00	0.00	1	1	14.00	0.23
25.00	0.00	1	2	7.64	0.06
25.00	0.00	1	3	-6.91	-0.31
25.00	0.00	1	4	-20.06	-0.50
25.00	0.00	1	5	-19.86	-0.08
25.00	0.00	2	1	-19.86	-0.08
25.00	0.00	2	2	125.84	0.00
26.00	0.00	1	1	14.00	0.46
26.00	0.00	1	2	7.90	0.60
26.00	0.00	1	3	-1.68	0.64
26.00	0.00	1	4	-15.24	0.20
26.00	0.00	1	5	-25.90	-0.14
26.00	0.00	2	1	-25.90	-0.14
26.00	0.00	2	2	120.99	0.00
27.00	0.00	1	1	14.00	0.98
27.00	0.00	1	2	4.68	1.03
27.00	0.00	1	3	-0.43	1.11
27.00	0.00	1	4	-7.51	1.00

134

Apéndice B

27.00	0.00	1	5	-14.94	0.18
27.00	0.00	2	1	-14.94	0.18
27.00	0.00	2	2	112.37	0.00
28.00	0.00	1	1	14.00	1.60
28.00	0.00	1	2	5.67	1.49
28.00	0.00	1	3	-1.16	1.39
28.00	0.00	1	4	-0.13	1.10
28.00	0.00	1	5	-1.52	0.63
28.00	0.00	2	1	-1.52	0.63
28.00	0.00	2	2	139.12	0.00
29.00	0.00	1	1	14.00	2.00
29.00	0.00	1	2	8.16	1.96
29.00	0.00	1	3	5.96	1.47
29.00	0.00	1	4	4.84	1.02
29.00	0.00	1	5	11.84	0.36
29.00	0.00	2	1	11.84	0.36
29.00	0.00	2	2	174.56	0.00
30.00	0.00	1	1	14.00	2.32
30.00	0.00	1	2	14.29	1.98
30.00	0.00	1	3	14.15	1.59
30.00	0.00	1	4	17.93	0.73
30.00	0.00	1	5	23.38	-0.12
30.00	0.00	2	1	23.38	-0.12
30.00	0.00	2	2	174.54	0.00

Conducto Seccion Pres. Max. Pres. Min.

1	1	14.00	14.00
1	2	29.95	-4.39
1	3	44.18	-10.74
1	4	56.79	-20.06
1	5	69.20	-25.90
2	1	69.20	-25.90
2	2	246.24	112.37

Introduzca: No. De conductos, Q0, g? 2,9,9.81  
 Introduzca: Tiempo de cierre de la valvula, Tiempo de calculo? 17.3,30  
 Introduzca: Nivel del PHC, Nivel de la SLA del deposito? 170,329  
 Dt propuesto? .1  
 Celeridad ( 1 )? 1271.91  
 Diametro ( 1 )? 3  
 Longitud ( 1 )? 4500  
 Factor de friccion de Darcy ( 1 )? .017  
 Celeridad ( 2 )? 1092.87  
 Diametro ( 1 )? 1.5  
 Longitud ( 1 )? 860  
 Factor de friccion de Darcy ( 1 )? .011  
 Numero de segmentos en conducto 1 = 35  
 Valor de Dx en conducto 1 = 128.5714  
 Celeridad ajustada en conducto 1 = 1285.714  
 Numero de segmentos en conducto 2 = 8  
 Valor de Dx en conducto 1 = 107.5  
 Celeridad ajustada en conducto 1 = 1075  
 Esta de acuerdo con el numero de segmentos (s/n)? s  
 Introduzca el mayor numero de segmentos en que fue dividido un conducto? 35  
 Nivel de la tuberia, seccion ( 1 , 1 )? 315  
 Nivel de la tuberia, seccion ( 1 , 5 )? 315  
 Nivel de la tuberia, seccion ( 2 , 1 )? 315  
 Nivel de la tuberia, seccion ( 2 , 2 )? 170

Conducto	Seccion	Pres. Max.	Pres. Min.
1	1	14.00	14.00
1	2	16.39	11.61
1	3	18.77	9.22
1	4	21.09	6.85
1	5	22.83	4.49
1	6	25.01	2.14
1	7	27.09	-0.20
1	8	29.15	-2.52
1	9	31.18	-4.82
1	10	31.85	-5.11
1	11	32.51	-5.39
1	12	33.18	-5.65
1	13	33.99	-5.90
1	14	35.53	-6.26
1	15	37.04	-7.04
1	16	38.54	-7.82
1	17	40.01	-8.55
1	18	41.47	-8.54
1	19	42.91	-9.12
1	20	44.33	-10.37
1	21	45.72	-11.68
1	22	47.09	-12.97
1	23	48.44	-14.24

1	24	49.77	-15.48
1	25	51.08	-16.70
1	26	52.37	-17.30
1	27	53.64	-17.89
1	28	54.91	-18.64
1	29	56.20	-19.59
1	30	57.51	-20.53
1	31	58.85	-21.46
1	32	60.18	-22.39
1	33	61.49	-23.32
1	34	62.78	-24.54
1	35	64.05	-25.76
1	36	65.31	-27.05
2	1	65.31	-27.05
2	2	87.17	-10.42
2	3	109.06	6.18
2	4	130.96	22.76
2	5	152.88	39.32
2	6	174.82	55.85
2	7	196.78	72.71
2	8	218.74	89.45
2	9	240.69	106.16

## REFERENCIAS

1. Garbrecht, Gunter. *Hydraulics and Hydraulic Research, a historical review*. Editorial A. A. Balkema Publishers. Países Bajos, 1987.
2. Mancebo del Castillo, Uriel. *Teoría del golpe de ariete y sus aplicaciones en ingeniería hidráulica*. Editorial Limusa. México, 1987.
3. Chaudry, M. Hanif. *Applied hydraulic transients*. Editorial Van Nostrand Reinhold Company. Nueva York, 1979.
4. Parmakian, John. *Waterhammer analysis*. Editorial Dover Publications, Inc. Nueva York, 1963.
5. Sotelo Ávila, Gilberto. *Hidráulica General, Vol. I: Fundamentos*. Editorial Limusa. México, 1974.
6. Vega Roldán, Oscar. *Procedimientos generales de integración de ecuaciones hiperbólicas que aparecen en la hidromecánica*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México. México, 1966.
7. Merrit, Frederick S. *Manual del Ingeniero Civil, Vol. I*. Editorial McGraw-Hill Book Co. Estados Unidos, 1986.