19

2E

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEAL HOMOGENEO EN R^3

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ALVARO LUNA DIAZ

MEXICO, D.F. 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Propiedades geométricas de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogeneo en R^3"

realizado por Alvaro Luna Díaz

con número de cuenta 7610016-5 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Dr. Federico Sánchez Bringas
Director de Tesis
Propietario

Dr. Fernando Brambila Paz
Propietario

Dr. Guillermo Sienra Loera
Propietario

M. en C. Jose Antonio Gomez Ortega
Suplente

Mat. Jose Matías Navarro Sosa
Suplente

Dra. Isabel Puga Espinosa
Consejo Departamental de Matemáticas

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco el apoyo que recibí de mis padres: Ofelia Díaz y Arturo Luna, así como la ayuda que en todo momento me brindaron mis hermanos, en especial, Homero y Virginia, ya que, sin su colaboración no hubiera podido realizar este trabajo de Tesis.

Doy las gracias a mi maestro Federico Sánchez Bringas por su desmedida paciencia y por todas las horas de orientación académica que me brindó... " un millón de gracias Federico ".

Agradezco también a mis Sinodales, Fernando Brambila Paz, Guillermo Sierna Loera, José Antonio Gómez Ortega y José Matías Navarro Sosa, el tiempo que dedicaron a la revisión y las sugerencias que me hicieron para mejorar la calidad de mi trabajo.

Al Profesor José Antonio Gómez Ortega por las observaciones acertadas que me hizo sobre todo en la redacción de cada capítulo, mi reconocimiento.

Por último, le doy las gracias a los Profesores: Salvador Pérez Esteva y Ana Irene Ramírez Galarza por el apoyo académico que me proporcionaron durante mi estancia en esta Facultad.

DEDICATORIAS

Esta Tesis se la dedico :

- A mis padres: Ofelia y Arturo

- A Lourdes con todo mi amor.

- A mis hermanos: Homero, Virginia, Eriberto, Rosa, Moisés, Horacio, Arturo, Araceli, Alejandro, Ana María, Juan, Carlos, Rafael y Ana Isabel.

INTRODUCCIÓN

El propósito fundamental de este trabajo es el estudio de la dinámica de los campos vectoriales que corresponden a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condición inicial, en R^3. Para esto se describen con detalle las soluciones del sistema haciendo énfasis den la teoria cualitativa.

La herramienta principal en este estudio es el algebra lineal; junto con los operadores exponenciales, que ayudarán a encontrar las soluciones de los sistemas diferenciales lineales homogéneos.
El trabajo se ha dividido en la siguiente forma:
-En el primer capítulo se presentan los teoremas de descomposición primaria de un espacio vectorial y a partir de estos se obtienen las formas canónicas del operador asociado al sistema. Enseguida se define la exponencial de un operador y se presentan sus propiedades respecto a la suma y producto de operadores.
-En el capítulo segundo se presenta el teorema de existencia y unicidad de la solución general del sistema lineal. La solución se da en términos de la exponencial del operador y se calculan las soluciones específicas a partir de las formas canónicas.
-En el tercer capítulo se estudia el aspecto cualitativo de las soluciones específicas y se presenta el retrato fase de cada una de ellas. La descripción de las soluciones se apoya en recursos geométricos como la curvatura y la torsión con el fin de presentar un retrato fase más claro y completo.

Un aspecto importante que se resalta es la diferencia que se presenta en el comportamiento de las curvas solución cuando hay bloques de Jordan y cuando los hay.

Por último, en el apéndice se incluyen las demostraciones de los teoremas que se utilizaron en este trabajo y que no fueron probados en su momento. Se presentan aparte con el fin de no desviar al lector del objetivo principal.

INDICE

CAPÍTULO 1
ALGEBRA LINEAL, TEOREMAS GENERALES

1.1 DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA
1.1.1 LOS POLINOMIOS CARACTERÍSTICO Y MÍNIMO DE UN OPERADOR

Sea T un operador en un espacio vectorial complejo E de dimensión finita; un elemento $x \neq 0$ de E se llama vector propio de T o eigenvector de T si $T(x)=\lambda x$ para algún $\lambda \in C$. El número λ es llamado valor propio o eigenvalor de T.

La propiedad tiene el vector propio se puede escribir en forma equivalente como:

$$(T-\lambda I)x=0$$

El número de eigenvalores que satisfacen esta condición está determinado por la cantidad de raices del polinomio caracteristico de T :

$$p(t)=\det(T-tI)$$

El grado de p(t) es la dimensión de E y al factorizarse puede quedar en la forma:

$$p(t)=\prod_{k=1}^{r}(t-\lambda_k)^{n_k}$$

Donde n_k es la multiplicidad de λ_k. En base al polinomio caracteristico se define para T el operador:

$$p(T)=\prod_{k=1}^{r}(T-\lambda_k I)^{n_k}$$

Un teorema de extrema importancia en el estudio de la descomposición de un espacio vectorial complejo en suma directa de subespacios invariantes, es el teorema de Cayley-Hamilton; éste garantiza queun operador T satisface su polinomio caracteristico. Los teoremas de descomposición primaria se apoyan en este resultado. Para demostrar la propiedad anterior es necesario hacer referencia a las definiciones siguientes [FRI]

Definición 1.111 Sea T un operador en un espacio vectorial E. Un subespacio W de E se llama T-ciclico si existe un elemento x en W tal que W es igual al subespacio generado por el conjunto:

$$\{x, T(x), T^2(x), ..\}$$

Definición 1.112. Sea $T:E \to E$ un operador y W un subespacio de E, entonces la restricción de T a W es el operador:

$$T_W: W \to E$$

$T_w(x)=T(x)$ para cada $x \in W$.

Teorema 1.111 Sea T un operador en un espcio E de dimesión finita, y sea W el subespacio T-cíclico generado por $x \in E$. Supongase que $\dim W=k\geq 1$ entonces:

i) $\{x, T(x),...T^{k-1}(x)\}$ es una base para W

ii) si $-a_0, -a_1,...,-a_{k-1}$ son los escalares tales que:

$T^k(x)=-a_0x -a_1T(x)- ... -a_{k-1}T^{k-1}(x)$

Entonces el polinomio caracteristico de Tw es:

$f(t)=(-1)^k (a_0 + a_1 t+...+a_{k-1}t^{k-1}+t^k)$

Demostración. Veáse el apéndice.

Teorema 1.112 (Cayley-Hamilton). Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y sea T un operador sobre E. Sea p(t) su polinomio caracteristico de T, entonces:

$p(T)=0$

Demostración. Si $x=0$ entonces $T(x)=0$ y $p(T)x=0$.
Sea $x\neq 0$ un elemento de E, y sea w el subespacio T-ciclíco generado por x; supongase que $\dim w=k$, entonces de acuerdo con el teorema 1.111 existen escalares $-a_0, -a_1,...,-a_{k-1}$ tales que:

i) $T^k(x)=-a_0x-a_1T(x)-...-a_{k-1}T^{k-1}(x)$

Y el polinomio caracteristico de Tw es:

$f(t)=(-1)^k(a_0+a_1t+...+a_{k-1}t^{k-1}+t^k)$

Aplicando f a T y utilizando ii) del teorema anterior se obtiene:

$f(T)x=(-1)^k(a_0I+a_1T+...+a_{k-1}T^{k-1}+T^k)x=0$

Ahora bien el polinomio caracteristico de Tw divide a p(t), esto implica que existe h(t) tal que:

$p(t)=f(t)h(t)$

Por lo tanto $p(T)(x)=0$ para toda $x \in E$, luego:

$p(T)=0$

Existen otros polinomios que cumplen esta condición; entre ellas está el polinomio mínimo:

Definición 1.113. Sea T un operador en E, un polimonio $m(t)$ se llama mínimo si es un polinomio mónico de grado mínimo para el cual $m(T)=0$

Teorema 1.113 Sea $m(t)$ el polinomio mínimo de T en un espacio vectorial E de dimensión finita. entonces:

i) $m(t)$ divide al polinomio caracteristico de T.

ii) el polinomio mínimo para T es único.

Demostración. Sea $p(t)$ el polinomio caracteristico de T.

i) Por el algoritmo de la división existen polinomios $q(t)$ y $r(t)$ tales que:

$p(t)=q(t)m(t)+r(t)$

Donde el grado de $r(t)$ es menor que el de $m(t)$. Por el teorema de Cayley-Hamilton:

Por el teorema de Cayley-Hamilton:

$p(T)=q(T)m(T)+r(T)=0$

Como $m(T)=0$ entonces $r(t)=0$; pero $m(t)$tiene grado mayor que $r(T)=0$ y es el de grado mínimo que cumple esta condición, esto implica que $r(t)=0$, por lo tanto:

$p(t)=q(t)m(t)$

ii) Supóngase que hay otro polinomio mínimo $m'(t)$. Utilizando el algoritmo de la división en forma semejante al inciso anterior se obtiene que:

$m(t)=q'(t)m'(t)$

Como los dos polinomios mínimos tienen el mismo grado, entonces $m(t)=km'(t)$; del hecho de que ambos son mónicos se deduce que $k=1$, esto implica que $m(t)=m'(t)$.

El polinomio caracteristico de un operador y el polinomio mínimo tienen los mismos factores irreducibles:

Teorema 1.114. Sea T un operador en un espacio vectorial E de dimensión finita. Sean p(t) y m(t) su polinomio característico y su polinomio mínimo. si p(t) se factoriza como:

$p(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}\ldots(t-\lambda_k)^{n_k}$

donde λ_i eigenvalor de T para toda i=1,...,k.

Entonces existen enteros $m_1,\ldots m_k$ tales que $1\leq m_i\leq n_i$

para toda i=1,...,k y m(t) es de la forma:

$m(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\ldots(t-\lambda k\ )^{m_k}$

Demostración. Como m(t) divide a p(t), entonces existe q(t) tal que:

$p(t)=q(t)m(t)$

Sea λ_i un eigevalor de T, entonces $p(\lambda_i)=0$, esto implica que $q(\lambda_i)m(\lambda_i)=0$ con $q(\lambda_i)\neq 0$, por lo tanto $m(\lambda_i)=0$ para toda i=1,...,k. Esto significa que cualquier eigevalor es un cero del polinomio mínimo.

1.12 EIGENESPACIO USUAL Y EIGENESPACIO GENERALIZADO

Definición 1.121. Sea T un operador en un espacio vectorial complejo E. Llamamos el eigenespacio usual de T correspondiente al valor propio λ_k al núcleo del operador $T-\lambda_k I$:

$$E\lambda_k=N(T-\lambda_k I)$$

Definición 1.122. Se define el eigenespacio generalizado de T correspondiente al valor propio de λ_k como el núcleo de $(T-\lambda_k I)^{n_k}$, donde n_k es la multiplicidad de λ_k:

$$E(T,\lambda_k)=N(T-\lambda_k I)^{n_k}$$

Observe que si $n_k=1$ entonces el eigenespacio usual es igual al eigenespacio generalizado.

Teorema 1.121. Sea T un operador en un espacio E y sea λ_k un valor propio de T. Entonces $E(T,\lambda_k)$ es un subespacio invariante bajo T.

Demostración. Sea $u \in E(T,\lambda_k)$, entonces:

$$(T-\lambda_k I)^{n_k} u=0$$

como $t(t-\lambda_k)^{n_k}=(t-\lambda_k)^{n_k}t$, se cumple que:

$$T(T-\lambda_k I)^{n_k}=(T-\lambda_k I)^{n_k}T$$

De esto se obtiene:

$$T(T-\lambda_k I)^{n_k}(u)=(T-\lambda_k I)^{n_k} T(u)$$

$$0=T(0)=(T-\lambda_k I)^{n_k} T(u)$$

Esto implica que $T(u) \in E(T,\lambda_k)$.

1.13. TEOREMAS DE DESCOMPOSICION PRIMARIA

A continuación se presentan los teoremas referentes a la descomposición de un espacio complejo en suma directa de subespacios invariantes [H-S]; su demostración se encuentra en el apéndice.

Teorema 1.131. Sea T un operador sobre un espacio E complejo, y sea m(t) su polinomio mínimo:

$m(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\dots(t-\lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda i\neq\lambda j$ para toda i,j=1,...,k, i≠j.

Sea $Ni=N(T-\lambda iI)^{m_i}$, entonces E es la suma directa de los subespacios Ni:

$E=N_1\oplus\dots\oplus N_k$

Y el polinomio mínimo de la restricción de T a cada Ni es:

$m_i(t)=(t-\lambda_i)^{m_i}$

Observe: que si el polinomio mínimo de T es:

$m_i(t)=(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)$

Entonces E es la suma directa de los eigenespacios usuales:

$E=E\lambda_1\oplus\dots\oplus E\lambda_k$

En este caso podemos obtener una base de vectores propios del espacio E, y T es diagonalizable.

La propiedad de descomposición primaria de un espacio, también se cumple para el polinomio característico del operador.

Teorema 1.132. Se a T un operador en E, donde E es un espacio vectorial complejo, o de otro modo E es real y T tiene eigenvalores reales. Sea p(t) su polinomio característico:

$p(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}\dots(t-\lambda_k)^{n_k}$

Y sea $E(T,\lambda_i)=N(T-\lambda_i)^{n_i}$ con i=1,...,k

Entonces E es la suma directa de los eigenespacios generalizados de T y la dimensión de cada eigenespacio generalizado es igual a la multiplicidad del eigenvalor correspondiente:

$E=E(T,\lambda_1)\oplus\dots\oplus E(T,\lambda_k)$ y $n_i=\dim E(T,\lambda_i)$

Ejemplo 1.132. Sea el operador T: $R^3 \rightarrow R^3$ en las coordenadas usuales definido como:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de T es:

$p(t)=(t+1)^2(t-1)$

Los eigenvalores son $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=1$; estos tienen multiplicidades n_1 y $n_2=1$ respectivamente.

El eigenespacio generalizado correspondiente al valor propio $\lambda_1=-1$ es:

$E(T,-1)=N(T-(-1)I)^2$

Éste se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} -1-(-1) & 1 & -2 \\ 0 & -1-(-1) & 4 \\ 0 & 0 & 1-(-1) \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema se obtiene $x_1=t$ $x_2=w$ $x_3=0$; entonces el eigenespacio generalizado correspondiente a $\lambda_1=1$ es:

$$E(T,-1)=\left\{\begin{pmatrix} t \\ w \\ 0 \end{pmatrix}: t, w \in R\right\}$$

En forma semejante, el eigenespacio generalizado de $\lambda_2=1$ esta dado por:

$E(T, 1)=N(T-1I)$

Éste está determinado por la solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} -1-1 & 1 & -2 \\ 0 & -1-1 & 4 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema se obtiene $x_1=0 \quad x_2=2s \quad x_3=s$;

el eigenespacio generalizado de $\lambda_2=1$ es:

$$E(T,1)=\left\{\begin{pmatrix}0\\2s\\0\end{pmatrix} : s \in R\right\}$$

Observe que:

i) $\quad E(T,-1)+E(T,1)=\left\{\begin{pmatrix}t\\w+2s\\0\end{pmatrix}: t, w, s \in R\right\}=R^3$

ii) $\quad$ Si $x \in E(T,-1)+E(T,1)$ entonces $x=\begin{pmatrix}t\\w\\0\end{pmatrix}$ y $x=\begin{pmatrix}0\\2s\\0\end{pmatrix}$, lo cual sólo es posible cuando $x=0$.

Por lo tanto:

$E(T,-1)\cap E(T,1)=\{0\}$

De los dos incisos anteriores se concluye que: $R^3=E(T,-1)\oplus E(T,1)$.

El teorema que acontinuación se presenta tiene gran importancia en el estudio de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Teorema 1.133. Sea T un operador sobre un espacio vectorial E, donde E es complejo si T tiene algún eigenvalor no real. Entonces T=S+N donde SN=NS, es nilpotente y S es diagonizable.

Ejemplo 1.134. Tómese el operador del caso anterior;

$$[T]_\beta=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\0 & -1 & 4\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$p(t)=(t+1)^2(t-1)$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ nos determinan los subespacios invariantes:

$$E(T,-1)=\left\{\begin{pmatrix}t\\w\\0\end{pmatrix}: t, w \in R\right\}$$

$$E(T,1)=\left\{\begin{pmatrix}0\\2s\\0\end{pmatrix}: s \in R\right\}$$

Sean $T_1=T/E(T,\lambda_1)$ y $T_2=T/E(T,\lambda_2)$ las restricciones de T a cada uno de estos subespacios. Sean bases respectivas:

i') $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ii') $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Entonces:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La restricción de T con respecto a $E(T,\lambda_1)$ es:

$$T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Análogicamente:

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La restricción de T con respecto a $E(T,\lambda_2)$ es:

$$T_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por el teorema 1.132 se sabe que:

$R^3=E(T,\lambda_1)\oplus E(T,\lambda_2)$

Como cada eigenespacio generalizado es invariante bajo T, entonces:

$T(R^3)=T(E(T,\lambda_1))\oplus T(E(T,\lambda_2))$

Si escogemos: $\beta'=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$, obtenemos:

$$[T]_{\beta'}=T_1+T_2=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este cambio de base lo hemos realizado para reconocer a las matrices S y N del teorema. Si escribimos el operador en la forma:

$$[T]_{\beta'}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil comprender que estas dos matrices conmutan bajo la operación del producto.
Otra propiedad importante que se obtiene es que la segunda matriz es nilpotente:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, se pueden tomar los operadores:

$$[S]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[N]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De lo anterior podemos escribir:

$[T]_{\beta'}=[S]_{\beta'}+[N]_{\beta'}$ con $[S]_{\beta'}$ diagonal y $[N]_{\beta'}$ nilpotente

Ahora bien, la matriz de cambio de coordenadas en términos de la base usual β a la base β' es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reciprocamente la matriz de cambio de coordenadas en términos de la base β' a la base usual es:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Las matrices anteriores están relacionadas en la forma siguiente:

i) $[T]_{\beta'}=P[T]_{\beta'}P^{-1}$

ii) $[T]_{\beta}=P^{-1}[T]_{\beta'}P$

De la segunda igualdad obtenemos:

$[T]_{\beta}=P1([S]_{\beta'}+[N]_{\beta'})P$

$[T]_{\beta}=P1[S]_{\beta'}P+P^{-1}[N]_{\beta}P$

$[T]_{\beta}=[S]_{\beta}+[N]_{\beta}$ ó en forma equivalente: $T=S+N$.

Por lo tanto las matrices que buscamos para nuestro ejemplo son:

$S=P^{-1}[S]_{\beta'}P$ y $N=P^{-1}[N]_{\beta'}P$

Claramente S es diagonizable y N es nilpotente.
Sustituyendo y calculando se obtiene:

$$[T]\beta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[T]_{\beta}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Entonces:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El operador S es diagonizable y N es nilpotente

1.2 COMPLEXIFICACIÓN DE UN ESPACIO REAL

Definición 1.21. Sea F un subespacio complejo de C^n, Entonces $F_R = F \cap R^n$ es el conjunto de todas las n-tuplas $(z_1,\ldots,z_n)$ que están en F y son reales. Llamamos a F_R el espacio de vectores reales en F.

Definición 1.22 Sea $E \subset R^n$ un subespacio real y sea Ec el subconjunto de C^n obteniendo mediante todas las combinaciones lineales de vectores en E con coeficientes complejos:

$$Ec=\left\{ z\in C^n \mid z=\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i \; zi \in E,\ \lambda_1 \in C \right\}$$

Este subespacio de C^n es llamado la complexificación de E. Observe que $E_{CR}=E$.

La operación de conjugación compleja juega un papel importante entre espacios vectoriales reales y complejos:

$\sigma: C^n \to C^n$ tal que:

$\sigma(z_1,\ldots z_n)=(\bar{z}_1\ldots \bar{z}_n)$

esta cumple con las propiedades siguientes:

i) $\sigma(\lambda v)=\sigma(\lambda)\sigma(v) \quad \lambda \in C,\ v \in C^n$

ii) $\sigma(u+v)=\sigma(u)+\sigma(v) \; u, v \in C^n$

Note que para cada subespacio $F \subset C^n$ se cumple:

$F_R=\{z\in F \mid \sigma(z)=z\}$

En el caso en que F pueda estar expresado en la forma $F=E_C$ para algún subespacio $E \subset R^n$ decimos que F puede descomplexificarse.

Teorema 1.21. $F \subset C^n$ puede descomplexificarse si y solo si $\sigma(F) \subset F$.
Demostración. Supóngase que F puede descomplexificarse, esto implica que $F=E_C$ con $E \subset R^n$. Sea

$$z=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i \quad z_i \in E \;\; \lambda_1 \in C$$

Aplicando σ se obtiene:

$\sigma(z)=\sum_{i=1}^{k}\sigma(\lambda_i)\sigma(z_i)=\sum_{i=1}^{k}\bar{\lambda}_i z_i,$

Como $\bar{\lambda}_i \in C$ y $z_i \in E$, entonces $\sigma(z) \in E_C=F$, esto implica que $\sigma(z) \in F$ para todo $z \in F$; por lo tanto $\sigma(F) \subset F$.
Reciprocamente, si $\sigma(F) \subset F$ entonces pra $x+iy \in F$ con $x,y \in R^n$ se cumple que:

$\sigma(x+iy)=x-iy \in F$

Como:

$x=1/2[(x+iy)+(x-iy)]$

$y=i/2\ [(x-iy)-(x+iy)]$

entonces $x, y \in F$. Observe que $x,y \in F_R$; si $z \in F$ este puede quedar expresado en la forma:

$z=(1+0i)x+(0+i)y.$

El siguiente teorema nos permite encontrar una representación para T cuando tiene valores propios complejos:

Teorema 1.22. Sea T un operador en un espacio vectorial $E \subset R^n$ con eigenvalores no reales u y $\bar{u}$ donde $u=a+ib$ con $a,b \in R$. Entonces existe una matriz A que representa a T en la forma:

$$A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Demostración. Sea $T_c:E_c \to E_c$ la complexificación de T. El operador Tc tiene los mismos eigevalores que T. Los eigenvectores φ y $\bar{\varphi}$ corresponden a u y $\bar{u}$ respectivamente.
Sea $\varphi=x+iy$ con $x,y \in R^n$ y $\bar{\varphi}=x-iy$. Los vectores x, y estan en Ec ya que:

$x=1/2\ (\varphi+\bar{\varphi})$

$y=i/2(\bar{\varphi}-\varphi)$

Entonces $x, y \in E_c \cap R^n=E$.

Los vectores x,y son linealmente independientes. En efecto, supóngase que:

$\propto_1 x + \propto_2 y = 0 \quad \propto_1, \propto_2 \in R$

entonces:

$\propto_1 1/2\ (\varphi + \bar{\varphi}) + \propto_2 i/2\ (\bar{\varphi} - \varphi) = 0.$

$\propto_1 + \propto_2 i/2\ \varphi + \propto_1 - \propto_2 i/2\ \bar{\varphi} = 0,$

Como φ y $\bar{\varphi}$ son lienealmente independientes se obtiene:

$\propto_1 + \propto_2 i = 0$ y $\propto_1 - \propto_2 i = 0$

Esto solo es posible si $\propto_1 = 0$ y $\propto_2 = 0$. Por lo tanto {y,x} es una base para E. Al aplicar T_C al vector propio φ:

i) $T_C(x+iy) = (a+bi)(x+iy) = (-by+ax) + i(ay+bx)$

ii) $T_C(x+iy) = T_C(x) + iT_C(y) = T(x) + iT(y)$

Igualando termino a termino se obtiene finalmente:

$T(y) = ay + bx$

$T(x) = -by + ax$

En la base {y,x} la matriz que representa a T es:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

1.3 FORMAS CANÓNICAS DE UN OPERADOR EN R^3

Las formas canónicaas de un operador son las expresiones más simples en que éste puede estar representado.

En el caso de R^3 existen al menos siete formas canónicas para representar a T. Estas dependen del polinomio característico y del polinomio mínimo del operador.

1.31 FORMAS CANÓNICAS DIAGONALES

En este caso T es diagonizable.

1.311FORMA DIAGONAL TIPO 1.

Aquí el polinomio característico de T está dado por:

$p(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$

Donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $i,j=1,2,3$.

Note que el polinomio mínimo m(t) en este caso es igual al polinomio característico. Por el teorema 1.132 se tiene que:

$R^3=N(T-\lambda_1 I)\oplus N(T-\lambda_2 I) \oplus N(T-\lambda_3 I)$

Esto significa que podemos obtener una base vectores propios para R^3 y en consecuencia T es diagonizable. La forma diagonal del operador es:

$$[T]_{\beta'}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

1.312 FORMA DIAGONAL TIPO 2

El polinomio caracteristico de T y su polinomio mínimo son:

i) $p(t)=(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

ii) $m(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$

De acuerdo con los teoremas 1.131 y 1.132 y las propiedades que cumple la suma directa de dos subespacios, se obtiene que:

i') $R^3=E(T,\lambda_1)\oplus E(T,\lambda_2)=N(T-\lambda_1 I)^2 \oplus N(T-\lambda_2 I)$ y

$\dim R^3=\dim N(T-\lambda_1 I)^2+\dim N(T-\lambda_2 I)=2+1$

ii") $R^3=N(T-\lambda_1 I)\oplus N(T-\lambda_2 I)$ y

$\dim R^3=\dim N(T-\lambda_1 I)+\dim N(T-\lambda_2 I)$

Este resultado nos permite afirmar lo siguiente:

$\dim N(T-\lambda_1 I)=\dim N(T-\lambda_1 I)^2=2$

Esto significa que se pueden tomar dos vectores propios linealmente independientes del subespacio correspondiente al eigenvalor λ_1.

Por otra parte, es fácil ver que:

$\dim N(T-\lambda_2 I)=1$

Sean $u_1,u_2 \in N(T-\lambda_1 I)$ y sea $u_3 \in N(T-\lambda_2 I)$, entonces:

$T(u_1)=\lambda_1 u_1+0u_2+0u_3$

$T(u_2)=0u_1+\lambda_1 u_2+0u_3$

$T(u_3)=0u_1+0u_2+\lambda_2 u_3$

Si se escoje la base $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$, el operador queda representado por:

$$[T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

1.313 FORMA DIAGONAL TIPO 3.

Los polinomios característico y minimp del operador T son:

i) $p(t)=(t-\lambda)^3$

ii) $m(t)=(t-\lambda)$

Utilizando los teoremas de descomposición primaria como en el caso anterior:

i') $R^3=N(T-\lambda I)^3$

ii') $R^3= N(T-\lambda I)$

De esto se obtiene que:

$\dim N(T-\lambda I)=\dim N(T-\lambda I)^3=3$

Sean $u_1,u_2,u_3 \in N(T-\lambda I)$ tres vectores linealmente independientes, y sea $\beta^1=\{u_1,u_2,u_3\}$, entonces:

$T(u_1)= \lambda u_1+0u_2+0u_3$

$T(u_2)= 0u_1+\lambda u_2+0u_3$

$T(u_3)= 0u_1+0u_2+\lambda u_3$

El operador T, en esta base esta representado por:

$$[T]_{\beta'}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

1.32 FORMAS CANÓNICAS DE JORDAN

Cuando un operador T no es diagonizable, la forma "más simple" en que se puede representar es una matriz casi diagonal ésta es llamada la forma canónica de Jordan de T. El siguiente teorema nos permite describir las columnas de una matriz de Jordan para un operador [LAN]. La demostración se presenta en el apéndice.

Definición 1.321. Sean $\alpha \in C$ y $x \in E$ con $x \neq 0$; decimos que x es $(T-\alpha I)$ ciclico si existe un entero $r \geq 1$ tal que $(T-\alpha I)^r x=0$. El mínimo entero positivo r que tiene esta propiedad, recibe el nombre de periodo de x relativo a $(T-\alpha I)$ y se cumple que $(T-\alpha I)^k x \neq 0$ para cualquier entero k con $k=1,2,...r-1$.

Teorema 1.321. Si $x \neq 0$ es $(T-\alpha I)$ ciclico con periodo r entonces el conjunto de vectores:

$\{(T-\alpha I)^{r-1},...,(T-\alpha I)x,x\}$

Es linealmente independiente.

1.321 FORMA CANÓNICA DE JORDAN TIPO 1.

Los polinomios característico y mínimo del operador son:

i) $p(t)=(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$

ii) $m(t)=(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$

Sea $u \in N(T-\lambda_1 I)^2$, entonces $(T-\lambda_1 I)^2 u=0$, por el teorema anterior el conjunto:

$\beta_1=\{(T-\lambda_1 I)u,u\}$,

Es linealmente independiente. Si ahora tomamos $v \in N(T-\lambda_2 I)$ el conjunto

$\beta_2=\{v\}$ es una base para este subespacio.

Utilizando la siguiente propiedad:

$T(T-\lambda I)^k x=(T-\lambda I)^{k+1}x+\lambda(T-\lambda I)^k x$

obtenemos:

$T(T-\lambda_1 I)u=(T-\lambda_1 I)^2 u+\lambda_1(T-\lambda_1 I)u=\lambda(T-\lambda_1 I)u$

$T(u) =(T-\lambda_1 I)u+\lambda_1 u$

Esta relación se puede escribir del modo siguiente:

$T(T-\lambda_1 I)u=\lambda_1(T-\lambda_1 I)u+0u+0v$

$T(u) = (T-\lambda_1 I)u+\lambda_1 u+0v$

Entonces la restricción de T al subespacio $N(T-\lambda_1 I)^2$ es:

$$T_1= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por otra parte:

$T(v)=0(T-\lambda_1)u+0u+\lambda_2 v$

La restricción de T a $N(T-\lambda_2 I)$ es:

$$T_2= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Como cada uno de estos eigenespacios es invariante bajo T, entonces la suma directa se conserva:

$T=T_1 \oplus T_2$

Esto implica que:

$$[T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

1.322 FORMA CANÓNICA DE JORDAN TIPO 2.

Los polinomios caracteristico y mínimo de T son:

$p(t)=(t-\lambda)^3$

$m(t)=(t-\lambda)^2$

Aquí se cumple que:

$\dim N(T-\lambda I)^2=\dim N(T-\lambda I)^3=3$

Sea $u\neq 0$ un elemento de R^3 que cumpla la condición de que $(T-\lambda I)u\neq 0$, por la propiedad del polinomio mínimo:

i) $(T-\lambda I)(T-\lambda I)u=(T-\lambda I)^2u=0$

Observe que en este caso el periodo de u relativo a $(T-\lambda I)$ es $r=2$, por el teorema 1.321, el conjunto:

$\beta_1=\{(T-\lambda I)u,u\}$

Es linealmente independiente. Como $(T-\lambda I)u\neq 0$, entonces u no es un vector propio de T. Por otra parte, del inciso i), se obtiene que $(T-\lambda I)u$ es un eigenvector.
Para poder describir la forma canónica que le corresponde a T se probará que $\dim N(T-\lambda I)=2$. En efecto, sea $x \in Im(T-\lambda I)$, entonces existe $y \in R^3$ tal que:

$x=(T-\lambda I)y$

Aplicando el operador $(T-\lambda I)$ en ambos lados de la igualdad y utilizando la propiedad del polinomio mínimo:

$T(T-\lambda I)x=(T-\lambda I)^2y=0$

Esto implica que $x \in N(T-\lambda I)$, lo cual significa que la imagen esta contenida en el núcleo:

$Im(T-\lambda I)\subset N(T-\lambda I)$

De lo anterior se obtiene que $\dim Im(T-\lambda I) \leq \dim N(T-\lambda I)$. Como $\dim Im(T-\lambda I)+\dim N(T-\lambda I)=\dim(R^3)=3$, entonces el único caso posible que puede darse es:

$\dim Im(T-\lambda I)=1$ y $\dim N(T-\lambda I)=2$

este resultado permite dar una base de R^3:

$\beta'=\{(T-\lambda I)u,u,v\}$

Con la propiedad de que $(T-\lambda I)u$ y v son vectores propios. Al encontrar la representación de T con respecto β' se obtiene:

$T(T-\lambda I)u=\lambda(T-\lambda I)^2u+\lambda(T-\lambda I)u=\lambda(T-\lambda I)u+0u+0v$

$T(u) = (T-\lambda I)u+\lambda u+0v$

$T(v) =0(T-\lambda I)u+0u+\lambda v$

La forma canónica de Jordan obtenida es:

$$[T]_{\beta'}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

1.323 FORMA CANÓNICA DE JORDAN TIPO 3.

T tiene como polinomios caracteristico y mínimo a:

$p(t)=(t-\lambda)^3$

$m(t)=(t-\lambda)^3$

Observe en este caso que $N(T-\lambda I)^3=R^3$. Sea $u \in N(T-\lambda I)^3$ tal que $(T-\lambda I)^2u\neq 0$, entonces el periodo de u relativo a $(T-\lambda I)u$ es $r=3$, esto implica que el conjunto:

$\beta'=\{(T-\lambda I)^2u, (T-\lambda I)u, (T-\lambda I)^0u\}$

Es una base de R^3. Aplicando el operador:

$$T(T-\lambda I)^2u=(T-\lambda I)^3u+\lambda(T-\lambda I)^2u$$

$$=\lambda(T-\lambda I)^2u+0(T-\lambda I)u+0(T-\lambda I)^0u$$

$$T(T-\lambda I)u=(T-\lambda I)^2u+\lambda(T-\lambda I)u$$

$$=(T-\lambda I)^2u+\lambda(T-\lambda I)u+0(T-\lambda I)^0u$$

$$T(T-\lambda I)^0u=(T-\lambda I)u+\lambda(T-\lambda I)^0u$$

$$=0(T-\lambda I)^2u+(T-\lambda I)u+\lambda(T-\lambda I)^0u$$

Por lo tanto para la base β', la representación de T es:

$$[T]_{\beta'}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

1.324 FORMA CANÓNICA DE JORDAN TIPO 4.

El polinomio caracteristico es:

$p(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$

donde λ_1 es un valor propio real y los restantes eigenvalores son complejos: λ_2=a-ib λ_3=a-ib. Debido a que hay valores propios que no son reales, el espacio se complexifica.
Sea Tc la complexificación de T, entonces de acuerdo con los teoremas de descomposición primaria:

$C^3=N(T_c-\lambda_1 I_c) \oplus N(T_c-\lambda_2 I_c) \oplus N(T_c-\lambda_3 I_c)$

Sea $w \in N(T_c-\lambda_1 I_c)$, por definición $(T_c-\lambda_1 I_c)w=$;, por el teorema 1.321 el conjunto:

$\{ (T_c-I_c)^0 w \}$

es una base de este subespacio en C^3. Sea $u \in R^3 \cap N(T_C-\lambda_1 I_c)$, entonces:

$(T_c-\lambda_1 I_c)u=(T-\lambda_1 I)u=0$

esto implica que:

$\beta_1=\{ (T-\lambda_1 I)^0 u \}=\{ u \}$

es base de $R^3 \cap N(T_c-\lambda_1 I_c)$.
Sea ahora z=x+iy un elemento del subespacio $N(T_c-\lambda_2 I_c)$. Por el teorema 1.22 el conjunto:

$\beta_2=\{ y,x \}$

es una base para $R^3 \cap (T_c-\lambda_2 I_c)$.

Si $\beta'=\{ u,y,x \}$ entonces:

$T(u) = \lambda_1 u+0y+0x$

$T(y) = 0u+ay+bx$

$T(x) = 0u-by+ax$

La forma canónica del operador en este caso es:

$$[T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

1.4 OPERADORES EXPONENCIALES

La solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales está expresada en términos del siguiente operador:

Para cada $T: R^n \to R^n$, se define la exponencial de este operador, como:

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$$

Teorema 1.41 Sean P,S,T Operadores en R^n. La exponencial cumple las propiedades siguientes:

a) si $Q=PTP^{-1}$ entonces $e^Q = P\, e^T\, P^{-1}$

b) si $ST=TS$ entonces $e^{S+T} = e^S\, e^T$

c) $e^{-S} = (e^S)^{-1}$

d) si $n=2$ y $T=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & -a \end{bmatrix}$ entonces:

$$e^T = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}$$

Es importante mencionar que en el inciso b) la hipótesis es necesaria, ya que cuando los operadores S y T no conmutan, puede ocurrir que la conclusión no se cumpla. Tómese como ejemplo a los dos operadores:

$$S= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T y S no conmutan con la operación de multiplicación.

Ahora bien:

$$e^{S+T} = e^{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)}$$

$$e^{S+T} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$e^{S+T} = \frac{1}{0!}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^1 + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 + \ldots$$

Note que el operador se anula en la tercera potencia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Simplificando la serie se obtiene:

$$e^{S+T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos para S y para T la exponencial:

ii) $$e^{S} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$e^{S} = \frac{1}{0!}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{0} + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{1} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2} + \ldots$$

La segunda potencia de S es la matriz nula:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$e^{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demanera análoga:

$$e^{T} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$e^{T} = \frac{1}{0!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{0} + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{1} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2} + \ldots$$

Al igual que en el caso anterior:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De ahí que:

iii) $$e^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos los dos operadores obtenemos:

$$e^S e^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iv) $$e^S e^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En los incisos i) e iv) podemos observar que la conclusión del enunciado no se cumple:

$$e^{S+T} \neq e^S e^T$$

CAPÍTULO 2

SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS EN R^3

2.1 LA SOLUCIÓN GENERAL DE UN SISTEMA HOMOGÉNEO EN R^3.

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, homogéneo con problema de valor inicial en R^n, es de la forma:

$x'=Ax$ con $x(0)=K \in R^n$ y $A:R^n \to R^n$ un operador.

El teorema que se presenta a continuación nos proporciona, la solución general del sistema.Ésta aparece en términos de un operador exponencial.

Teorema 2.11 Se A un operador en R^n. En tonces la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales con problema de valor inicial:

1) $x'(t)=Ax(t)$ con $x(0)=K \in R^n$

Esta dada por la trayectoria:

$x(t)=e^{tA}K$

y no hay otras soluciones

Demostración. Sea $L(R^n)$ el conjunto de operadores en R^n. En primer lugar considérese el mapeo:

$\gamma:R \to L(R^n)$

$\gamma(t)=e^{tA}$

Aplicando la derivada:

$$\frac{d\,e^{tA}}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{tA+hA}-e^{tA}}{h}$$

Como $(tA)(hA)=(hA)(tA)$, de acuerdo con el teorema 1.41 se obtiene:

$$\frac{d\,e^{tA}}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{tA}e^{hA}-e^{tA}}{h}=e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{hA}-I}{h}\right)$$

$$=e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{h}e^{hA}-\frac{1}{h}I}{h}\right)$$

$$=e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(\left[\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{0!}(hA)^0+\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{1!}(hA)^1+\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{2!}(hA)^2+\dots\right]-\frac{1}{h}I\right)$$

El primer término de la serie se cancela con el último operador y todos los términos con exponente mayor que uno tienden a la matriz cero cuando h tiende a cero. Por lo tanto:

$$\frac{de^{tA}}{dt}=e^{tA}A$$

Como A conmuta con cada término de la seria e^{tA}, entonces:

$$\frac{de^{tA}}{dt}=Ae^{tA}$$

Sea $x(t)=e^{tA}K$, aplicando el resultado anterior:

$$\frac{d\,x(t)}{dt}=\frac{d\,e^{tA}k}{dt}=\frac{d\,e^{tA}}{dt}=K=Ae^{tA}K=Ax(t)$$

Por lo tanto

$$\frac{d\,x(t)}{dt}=Ax(t)$$

Ahora se probará que la solución es única. Supongase que z(t) es otra solución de 1); haciendo:
$y(t)=e^{\,tA}z(t)$
al derivar se obtiene:

$$y'(t)=\frac{d\,e^{-tA}}{dt}z(t)+e^{\,tA}z'(t)$$

$$=-Ae^{\,tA}z(t)+e^{\,tA}Az(t)$$

$$=e^{\,tA}(-A+A)z(t)$$

$$=0$$

esto implica que y(t) es constante; esto se cumple solo cuando $z(t)=e^{tA}K'$. Por lo tanto:
$z(t)=e^{tA}K'=x(t)$

2.2 SOLUCIONES DE UN SISTEMA HOMOGÉNEO CON EL OPERADOR CANÓNICO

Las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales se determinan con más facilidad cuando el operador está en su forma canónica. A continuación se presentan los tipos de soluciones generales de acuerdo al operador canónico que represente a T

2.21 SOLUCIONES DE UN OPERADOR CON FORMA CANÓNICA DIAGONAL

2.211 FORMA DIAGONAL TIPO 1

El operador es:

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \lambda_1 \neq \lambda_3 \quad \lambda_2 \neq \lambda_3$$

El sistema que corresponde a este operador es:

$$y'(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} y(t) \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$$

Por el teorema 2.11 la solución buscada es:

$$y(t) = e^{t\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}} y(0) \quad \text{i)}$$

$$e^{t\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}} = \frac{1}{0!}\begin{bmatrix} t\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & t\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & t\lambda_3 \end{bmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} t\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & t\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & t\lambda_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} t\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & t\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & t\lambda_3 \end{bmatrix}^2 + \cdots$$

Calculando la exponencial:

El resultado de la suma de los términos de esta serie es:

$$e^{t\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_3 t)^k}{k!} \end{bmatrix}$$

Cada entrada en la diagonal de la matriz anterior, es la exponencial de la variable real $\lambda_j t$ (j=1,2,3), por lo cual el operador exponencial obtenido es:

$$e^{t\begin{bmatrix}\lambda_1 t & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 t & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 t\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en el inciso i), se obtiene la solución:

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} y(0)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix}$$

Multiplicando e igualando términos, obtenemos:

$$y_1(t) = y_1(0)\, e^{\lambda_1 t}$$
$$y_2(t) = y_2(0)\, e^{\lambda_2 t}$$
$$y_3(t) = y_3(0)\, e^{\lambda_3 t}$$

Esta solución representa el conjunto de trayectorias:

$y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ tal que :

$$y(t) = \left(y_1(0)\, e^{\lambda_1 t},\ y_2(0)\, e^{\lambda_2 t},\ y_3(0)\, e^{\lambda_3 t} \right)$$

2.212 FORMA DIAGONAL TIPO 2.

La forma del operador es:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

El sistema de ecuaciones diferenciales es en este caso:

$$y'(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix} y(t) \qquad \text{ó} \qquad \begin{bmatrix}y_1'(t)\\ y_2'(t)\\ y_3'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix}$$

con el mismo procedimiento utilizado en el caso anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\\ y_3(0)\end{bmatrix}$$

$$y_1(t)=y_1(0)\, e^{\lambda_1 t}$$
$$y_2(t)=y_2(0)\, e^{\lambda_1 t}$$
$$y_3(t)=y_3(0)\, e^{\lambda_2 t}$$

La solución se puede escribir como:

$$y(t)=\left(y_1(0)\, e^{\lambda_1 t},\ y_2(0)\, e^{\lambda_1 t},\ y_3(0)\, e^{\lambda_2 t}\right)$$

2.213 FORMA DIAGONAL TIPO 3.

El operador está representado por:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Al proceder en forma semejante a los casos anteriores, se encuentra la solución:

$$y(t) = \left(y_1(0)\, e^{\lambda t},\ y_2(0)\, e^{\lambda t},\ y_3(0)\, e^{\lambda t} \right)$$

2.22 SOLUCIONES DE UN OPERADOR CON FORMA CANONICA DE JORDAN

2.221 FORMA CANONICA DE JORDAN TIPO 1

El operador está dado por:

$$[T]_{B'}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

La solución en este caso es:

$$y(t)=e^{t\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}}\,y(0)$$

Observe que:

$$[T]_{B'}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Es fácil comprobar que las dos matrices del lado derecho conmutan bajo la operación del producto y que la segunda es nilpotente, por lo tanto el operador exponencial puede quedar expresado como:

$$e^{t\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}}=e^{t\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)}$$

Al aplicar el inciso b) del teorema 1.41 para exponenciales de operadores:

$$e^{t\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)} = e^{t\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}} e^{t\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

Por lo tanto:

$$e^{t\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}} = e^{t\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}} e^{t\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

El calculo de la primera serie, es semejante al del apartado 2.211 :

1') $$e^{t\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}$$

Al desarrollar la exponencial:

$$e^{t\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}} = \frac{1}{0!}\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^1 + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^2 + \cdots$$

se observa que :

$$\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{para } k \geq 2$$

Entonces la suma total de la serie es:

$$e^{t\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&t&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

2')

$$e^{t\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Sustituyendo los dos operadores obtenidos en 1') y 2'), en i) tenemos:

$$y(t) = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}&0&0\\0&e^{\lambda_1 t}&0\\0&0&e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} y(0)$$

En forma equivalente:

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}&0&0\\0&e^{\lambda_1 t}&0\\0&0&e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\\y_3(0)\end{bmatrix}$$

Multiplicando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0)\, e^{\lambda_1 t} + y_2(0)\, t\, e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)\, e^{\lambda_1 t} \\ y_3(0)\, e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0)\, e^{\lambda_1 t} + y_2(0)\, t\, e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= y_2(0)\, e^{\lambda_1 t} \\ y_3(t) &= y_3(0)\, e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

La trayectoria es:

$y : R \to R^3$

tal que:

$$y(t) = \left(y_1(0)\, e^{\lambda_1 t} + y_2(0)\, t\, e^{\lambda_1 t},\ y_2(0)\, e^{\lambda_1 t},\ y_3(0)\, e^{\lambda_2 t} \right)$$

2.222 FORMA CANONICA DE JORDAN TIPO 2.

El operador asociado al sistema lineal es:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Al desarrollar la serie del operador exponencial aplicado a $t\,[T]_{01}$ como en el caso anterior, se obtiene la solución:

$$y(t) = \left(y_1(0)\, e^{\lambda t} + y_2(0)\, t\, e^{\lambda t} ,\ y_2(0)\, e^{\lambda t} ,\ y_3(0)\, e^{\lambda t} \right)$$

2.223 FORMA CANONICA DE JORDAN TIPO 3.

La forma canónica del operador es:

$$[T]_{\beta'}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

El sistema que corresponde a este operador es:

$$y'(t)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} y(t)$$

La solución está dada por:

i) $$y(t)=e^{t\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}} y(0)$$

Al igual que en los casos anteriores el operador T se descompone en la suma de dos matrices:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Estas conmutan con la multiplicación y la segunda matriz del lado derecho de la igualdad es nilpotente de orden 3.

Calculando la exponencial del operador:

$$e^{t\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}} = e^{t\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)} = e^{t\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}} e^{t\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

Calculando:

1)

$$e^{t\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

2)

$$e^{t\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}} = \frac{1}{0!}\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^1 + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^3 + \cdots$$

observe que:

$$\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{para } k \geq 3$$

Desarrollando cada potencia se obtiene que:

$$e^{t\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&t&0\\0&0&t\\0&0&0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&t^2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e^{t\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Al sustituir las dos exponenciales en i), obtenemos:

$$y(t) = \begin{bmatrix}e^{\lambda t}&0&0\\0&e^{\lambda t}&0\\0&0&e^{\lambda t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix} y(0)$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t}&0&0\\0&e^{\lambda t}&0\\0&0&e^{\lambda t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\\y_3(0)\end{bmatrix}$$

Multiplicando obtenemos:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0)\, e^{\lambda t} + y_2(0)\, t\, e^{\lambda t} + \frac{1}{2} y_3(0)\, t^2 e^{\lambda t} \\ y_2(0)\, e^{\lambda t} + y_3(0)\, t\, e^{\lambda t} \\ y_3(0)\, e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

La trayectoria encontrada es:

$y : R \rightarrow R^3$ tal que :

$$y(t) = \left(y_1(0)\, e^{\lambda t} + y_2(0) \cdot e^{\lambda t} + \tfrac{1}{2} y_3(0) t^2 e^{\lambda t},\ y_2(0)\, e^{\lambda t} + y_3(0) t e^{\lambda t},\ y_3(0)\, e^{\lambda t} \right)$$

2.224 FORMA CANONICA DE JORDAN TIPO 4.

El operador tiene la forma:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 \in R \qquad \lambda_2 = a+ib \qquad \lambda_3 = a-ib$$

La solución es:

$$y(t) = e^{t\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}} y(0)$$

Desarrollando la exponencial se obtiene:

$$e^{t\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & a & -b\\ 0 & b & a\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t\lambda_1)^k & 0 & 0\\ 0 & & \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} & \frac{1}{k!}\begin{bmatrix}ta & -tb\\ tb & ta\end{bmatrix}^k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0 & 0\\ 0 & & \\ 0 & e^{t\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}} & \end{bmatrix}$$

Por el teorema 1.41:

$$e^{t\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}} = e^{at\begin{bmatrix}\cos b & -\mathrm{sen}\, b\\ \mathrm{sen}\, b & \cos b\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}e^{at}\cos tb & -e^{at}\,\mathrm{sen}\, tb\\ e^{at}\,\mathrm{sen}\, tb & e^{at}\cos tb\end{bmatrix}$$

Con estos resultados la solución encontrada es:

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0 & 0\\ 0 & e^{at}\cos tb & -e^{at}\,\mathrm{sen}\, tb\\ 0 & e^{at}\,\mathrm{sen}\, tb & e^{at}\cos tb\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\\ y_3(0)\end{bmatrix}$$

$$y_1(t) = y_1(0)e^{tt}$$
$$y_2(t) = y_2(0)e^{at}\cos tb - y_3(0)e^{at}\,\mathrm{sen}\, tb$$
$$y_3(t) = y_2(o)e^{at}\,\mathrm{sen}\, tb + y_3(0)e^{at}\cos tb$$

CAPITULO 3
RETRATO FASE DE LAS SOLUCIONES

En este capitulo se presenta un análisis geométrico de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales lineales utilizando dos conceptos que son de suma importancia: curvatura y torsión [HAA]. La curvatura de una curva descrita por y(t) se define como:

$$K(t)=\frac{|T'(t)|}{|y'(t)|}$$

Donde T(t) es el vector tangente unitario en el punto y(t). Si la solución se encuentra en R^3, entonces la curvatura se puede expresar como:

$$K(t)=\frac{|y'(t)xy''(t)|}{|y'(t)|^3}$$

En éste caso se puede también definir la torsión $\tau(t)$ de una curva mediante la relación:

$$B'(t)=-\tau(t)\,|y'(t)|N(t)$$

Aquí N(t) es el vector unitario normal principal a la curva en y(t) y B(t) es el vector binormal; recuerde que estos se definen por:

$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}\quad,\quad B(t)=T(t)xN(t)$$

El cálculo de la torsión es más simple utilizando la fórmula siguiente:

$$\tau(t)=\frac{(y'(t)x\ y''(t))\bullet y'''(t)}{|y'(t)xy''(t)|^2}$$

3.1 RETRATO FASE PARA LAS FORMAS CANÓNICAS DIAGONALES

3.11 FORMA CANÓNICA DIAGONAL TIPO 1

Aquí el sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \lambda_1 \neq \lambda_3 \quad \lambda_2 \neq \lambda_3$$

Con la condición inicial:

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix}$$

La solución esta dada por:

$$y(t) = \left(y_1(0)\, e^{\lambda_1 t},\ y_2(0)\, e^{\lambda_2 t},\ y_3(0)\, e^{\lambda_3 t} \right)$$

Haciendo $y_1(0)=k_1$, $y_2(0)=k_2$ y $y_3(0)=k_3$, las funciones relaes que componen la solución quedan definidas como:

$$y_1(t)=k_1\, e^{\lambda_1 t}$$
$$y_2(t)=k_2\, e^{\lambda_2 t}$$
$$y_3(t)=k_3\, e^{\lambda_3 t}$$

Al calcular la curvatura de y(t) se obtiene:

(3.111)

$$K(t) = \frac{\sqrt{\lambda_2^2 \lambda_3^2 k_2^2 k_3^2 (\lambda_3-\lambda_2)^2 e^{2(\lambda_2+\lambda_3)t} + \lambda_1^2 \lambda_3^2 k_1^2 k_3^2 (\lambda_1-\lambda_3)^2 e^{2(\lambda_1+\lambda_3)t} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 k_1^2 k_2^2 (\lambda_2-\lambda_1)^2 e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t}}}{\sqrt{\left(\lambda_1^2 k_1^2 e^{2\lambda_1 t} + \lambda_2^2 k_2^2 e^{2\lambda_2 t} + \lambda_3^2 k_3^2 e^{2\lambda_3 t}\right)^3}}$$

Este número es igual a cero sólo si las condiciones iniciales satisfacen:

1) $k_1=0$ $k_2=0$ $k_3\neq 0$
2) $k_1=0$ $k_2\neq 0$ $k_3=0$
3) $k_1=0$ $k_2=0$ $k_3=0$

Observe que cuando alguna de estas condiciones se cumple, las soluciones se encuentra sobre los ejes coordenados.

Para hacer un análisis de las soluciones que están sobre los planos y_1y_2, y_1y_3 y y_2y_3 se iguala a cero algúno de los tres valores que componen la condición inicial: k_1, k_2, k_3.

3.111. soluciones en el plano $y_1\ y_2$

$z(t)=(k_1\ e^{\lambda_1 t}, k_2\ e^{\lambda_2 t}, 0)\quad k_1\neq 0\quad k_2\neq 0$

Haciendo $k_3=0$ en 3.111 se obtiene el valor de la curvatura en z(t):

$$K(t)=\frac{|\lambda_2-\lambda_1|\quad|\lambda_1\lambda_2\ k_1\ k_2|e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\left(\sqrt{\lambda_1^2k_1^2e^{2\lambda_1 t}+\lambda_2^2k_2^2e^{2\lambda_2 t}}\right)^3}$$

3.1112. Soluciones en el plano $y_1\ y_3$:

$f(t)=(k_1\ e^{\lambda_1 t}, 0, k_3\ e^{\lambda_2 t})\quad k_1\neq 0\quad k_3\neq 0$

Haciendo $k_2=0$ en 3.111:

$$K(t)=\frac{|\lambda_1-\lambda_2|\quad|\lambda_1\lambda_2\ k_1\ k_2|e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\left(\sqrt{\lambda_1^2k_1^2e^{2\lambda_1 t}+\lambda_2^2k_2^2e^{2\lambda_1 t}}\right)^3}$$

3.1113. Soluciones en el plano y_2y_3:

$h(t)=(0, k_2\ e^{\lambda 2t}, k_3\ e^{\lambda 3t})\quad k_2\neq 0\quad k_3\neq 0$

Al hacer $k_1=0$ en 3.111:

$$K(t)=\frac{|\lambda_1-\lambda_3|\quad|\lambda_1\lambda_3\ k_1\ k_3|e^{(\lambda_1+\lambda_3)t}}{\left(\sqrt{\lambda_1^2k_1^2e^{2\lambda_1 t}+\lambda_3^2k_3^2e^{2\lambda_1 t}}\right)^3}$$

Como $\lambda_1\neq\lambda_j$ si $i\neq j$ (i,j=1,2,3); entonces la curvatura en cada una de estas soluciones es distinta de cero.

Decimos que una solución es plana si se encuentra totalmente contenida en un plano.
Para determinar si hay soluciones planas, se calcula la torsión en y(t) obteniendo como resultado:

$$\tau(t)=\frac{k_1k_2k_3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}\left[\lambda_1^2(\lambda_3-\lambda_2)+\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_3)+\lambda_3^2(\lambda_2-\lambda_1)\right]}{k_2^2k_3^2\lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_3-\lambda_2)^2 e^{2(\lambda_2+\lambda_3)t}+k_1^2k_3^2\lambda_1^2\lambda_3^2(\lambda_1-\lambda_3)^2 e^{2(\lambda_1-\lambda_3)t}+k_1^2k_2^2\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_2)\, e^{2(\lambda_1-\lambda_2)t}}$$

Utilizando en el numerador la siguiente igualdad:
$(\lambda_2-\lambda_1)=(\lambda_3-\lambda_1)-(\lambda_3-\lambda_2)$

Se obtiene finalmente:
(3.112)

$$\tau(t)=\frac{k_1k_2k_3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}{k_2^2k_3^2\lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_3-\lambda_2)^2 e^{2(\lambda_2+\lambda_3)t}+k_1^2k_3^2\lambda_1^2\lambda_3^2(\lambda_1-\lambda_3)^2 e^{2(\lambda_1-\lambda_3)t}+k_1^2k_2^2\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_2)\, e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t}}$$

Como los eigenvalores son distintos entre si, entonces la torsión es distinta de cero siempre $k_i \neq 0$ para toda i=1,2,3. En caso contrario las soluciones son planas.
El comportamiento de una solución depende también del signo de los valores propios. Aquí se tomaron tres casos que se consideran suficientes para su descripción:

Caso 1. $\lambda_3<\lambda_2<\lambda_1<0$
Si t tiende a ∞, entonces cada variable tiende a cero:
$\lim y(t)=(0,0,0)$
Hay una contracción en las tres variables.
en el caso contraario, cuando t tiende a $-\infty$, se presenta una expansión:

i) $\lim\limits_{t\to-\infty} y_1(t)=\pm\infty$

ii) $\lim\limits_{t\to-\infty} y_2(t)=\pm\infty$

iii) $\lim\limits_{t\to-\infty} y_3(t)=\pm\infty$

El retrato fase en cada uno de los planos formados por los ejes, muestra al origen como un sumidero (fig.1)

Caso2. $\lambda_2<\lambda_1<0<\lambda_3$
Hay contracción en las variables y_1 y y_2, mientras que en y_3 hay una expansión. En el plano y_1y_3 y y_2y_3 es un punto silla (fig.2)

i) $\lim_{t\to\infty} y_i(t)=0$

ii) $\lim_{t\to\infty} y_2(t)=0$

iii) $\lim_{t\to\infty} y_3(t)=\pm\infty$

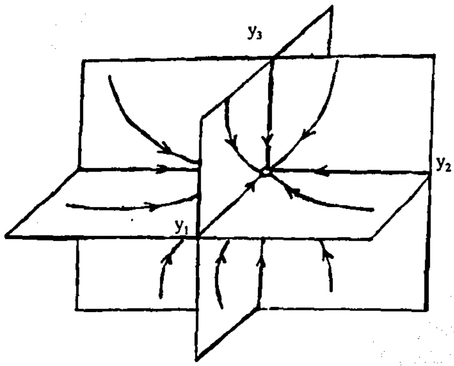
Caso 3. $0<\lambda_3<\lambda_2<\lambda_1$
si t tiende a ∞, entonces en las tres variables se presenta una expansión:

i) $\lim_{t\to\infty} y_i(t)=\pm\infty$

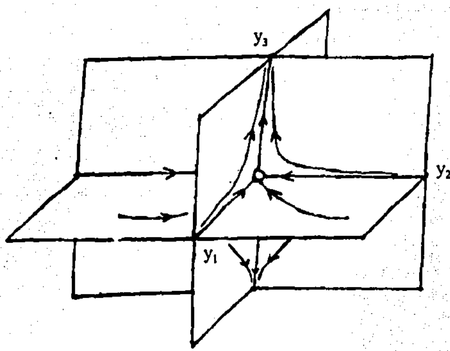
ii) $\lim_{t\to\infty} y_2(t)=\pm\infty$

iii) $\lim_{t\to\infty} y_3(t)=\pm\infty$

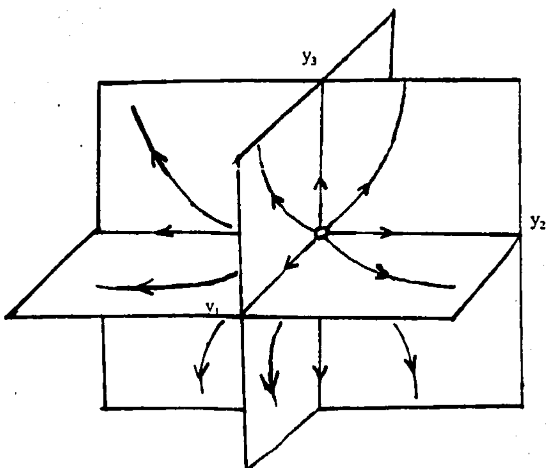
En cada uno de los planos formados por los ejes, el origen es una fuente (fig.3)



(Fig. 1)



(Fig. 2)



(Fig.3)

3.12 FORMA CANÓNICA DIAGONAL TIPO2

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} \qquad \text{con } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

La solución es de la forma:

$$y(t)=(k_1 e^{\lambda 1t}, k_2 e^{\lambda 1t}, k_3 e^{\lambda 2t})$$

Observe que el valor propio λ_1 aparece en las variables y_1 y y_2. Esto determina en este caso que todas las soluciones sean curvas planas. En efecto, la curvatura en y(t) esta dada por:

$$(3.121)\quad K(t)=\frac{\left|\lambda_1-\lambda_3 k_3\left(\lambda_1-\lambda_1\right)\right| e^{(\lambda_1+\lambda_1)t}\sqrt{k_1^2+k_3^4}}{\left(\sqrt{\lambda_1^2\left(k_1^2+k_3^4\right)e^{2\lambda_1 t}+k_1^2+k_3^4\, e^{2\lambda_1 t}}\right)^3}$$

En forma análoga al caso anterior, se obtienen las soluciones que se encuentran sobre los planos coordenados, y se calcula se curvatura:

3.1211 soluciones en el plano y_1y_2:

$$z(t)= (k_1 e^{\lambda 1t}, k_2 e^{\lambda 1t}, 0) \quad k_1 \neq 0 \quad k_2 \neq 0$$

Haciendo $k_3=0$ en 3.121 se obtiene:
$K(t)=0$
Las soluciones en esta caso son rectas.

3.1212. Soluciones en el plano y_1y_3:
$f(t)= (k_1 e^{\lambda 1t}, k_3 e^{\lambda 2t}, 0) \quad k_1 \neq 0 \quad k_3 \neq 0$
Haciendo $k_2=0$ en 3.121;

$$K(t)=\frac{\left|\lambda_1 \lambda_2 k_1 k_3\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\right| e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\left(\sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 e^{2\lambda_1 t}+k_3^2 \lambda_2^2\, e^{2\lambda_2 t}}\right)^3}$$

La curvatura es distinta de cero.

3.1213. Soluciones en el plano y_2y_3:
$H(t)=(0, k_2e^{\lambda 1t}, k_3\, e^{\lambda 2t})$ $k_2\neq 0$ $k_3\neq 0$
Haciendo $k_1=0$ se obtiene la curvatura:

$$K(t)=\frac{\left|\lambda_1\lambda_2 k_2k_3\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\right| e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\left(\sqrt{\lambda_1^2 k_2^2 e^{2\lambda_1 t}+k_3^2\lambda_2^2\ e^{2\lambda_2 t}}\right)^3}$$

en este caso se cumple también que $K(t)\neq 0$.
Observe que estas soluciones son las proyecciones de aquellas soluciones que no se encuentran sobre los planos coordenados. Las proyecciones sobre el plano y_1y_2 son lineas rectas; esto sólo es posible cuando una curva es plana. Para comprobar este resultado se cálcula la torsión rn y(t).
Ocupando λ_1 el lugar de λ_2 y λ_2 el de λ_3 se obtiene:

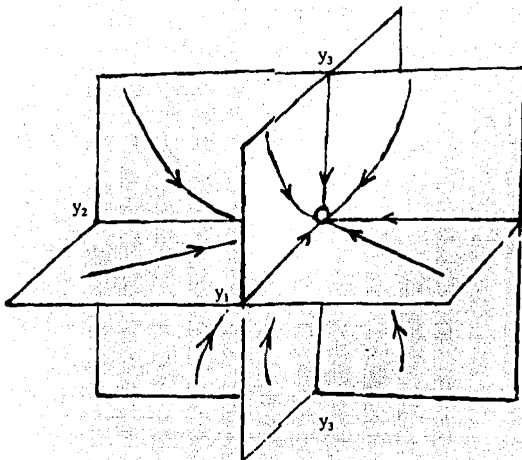
$$\tau(t)=\frac{k_1k_2k_3\lambda_1^2\lambda_2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(\lambda_1-\lambda_1\right)e^{(2\lambda_1+\lambda_2)t}}{k_3^2\lambda_1^2\lambda_2^2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)^2\left[k_1^2+k_2^2\right]e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t}}=0$$

Este resultado muestra que todas las soluciones son planas.
A continuación se describe el comportamiento de las soluciones en base al signo de los valores propios:

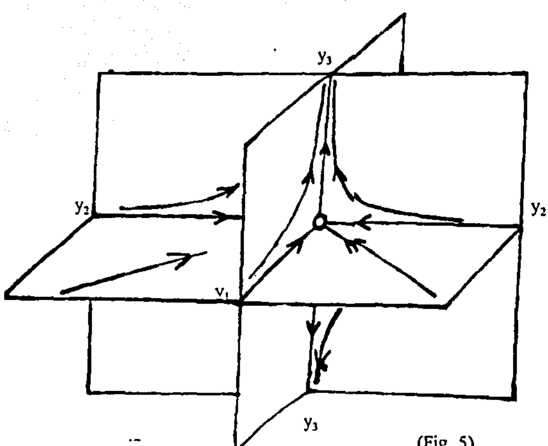
Caso 1. $\lambda_1<\lambda_2<0$
se presenta una contracción en las tres variables (fig.4):
$\lim_{t\to\infty} y(t)=(0,0,0)$

Caso 2. $\lambda_1<0<\lambda_2$
Hay contracción en las variables y_1 y_2 y expansión en y_3 (fig. 5):
i) $\lim_{t\to\infty} y_i(t)=0$
ii) $\lim_{t\to\infty} y_2(t)=0$
iii) $\lim_{t\to\infty} y_3(t)=\pm\infty$

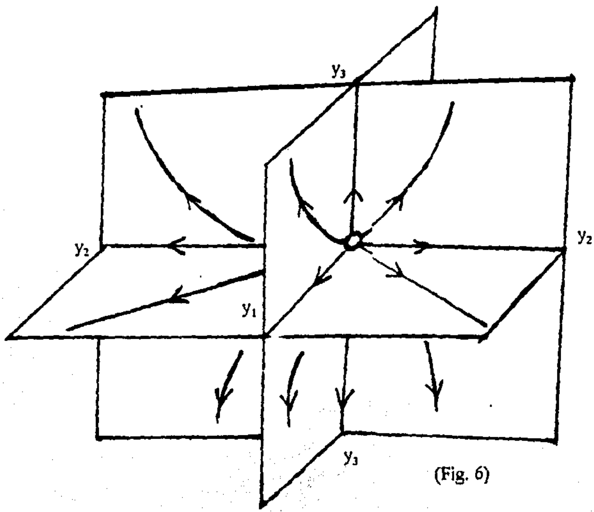
Caso 3. $0<\lambda_2<\lambda_1$
Hay expansión en las tres variables (fig. 6):
i) $\lim_{t\to\infty} y_i(t)=\pm\infty$
ii) $\lim_{t\to\infty} y_2(t)=\pm\infty$
iii) $\lim_{t\to\infty} y_3(t)=\pm\infty$



(Fig. 4)



(Fig. 5)



(Fig. 6)

3.13 FORMA CANONICA DIAGONAL TIPO 3

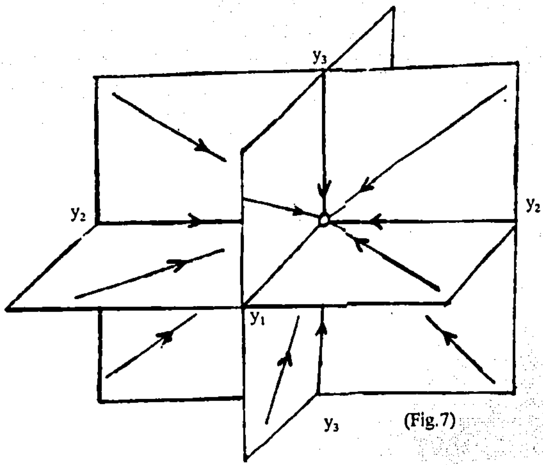
El sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{bmatrix} y_1' & (t) \\ y_2' & (t) \\ y_3' & (t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 (t) \\ y_2 (t) \\ y_3 (t) \end{bmatrix}$$

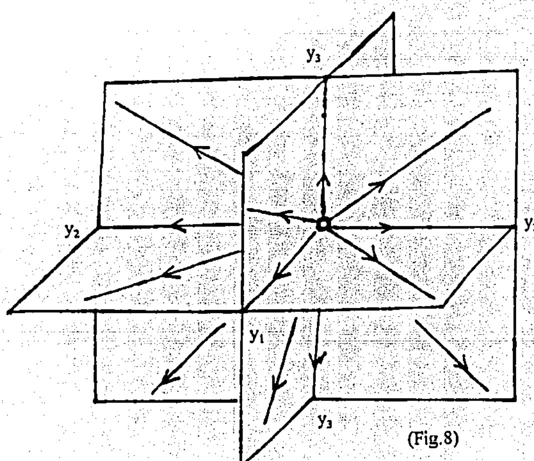
La solución del sistema esta dada por:
$y(t)=(k_1 e^{\lambda t}; k_2 e^{\lambda t}, k_3 e^{\lambda t})$
Haciendo $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ en 3.111 se obtiene:
$K(t)=0$
Esto significa que todas las soluciones son lineas rectas para determinar el comportamiento de éstas en base al signo de λ, son suficientes dos casos:

Caso1. $\lambda<0$
Se presenta contracción en las tres variables (fig. 7)

Caso 2. $\lambda> 0$
Hay expansión en las tres variables (fig. 8)



(Fig.7)



(Fig.8)

3.2 RETRATO FASE PARA LAS FORMAS CANONICAS DE JORDAN

3.21 FORMA CANÓNICA DE JORDAN TIPO 1

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

La solución obtenida en este caso es:
$y(t)= ((k_1+k_2t)e^{\lambda_1 t}, k_3e^{\lambda_1 t}, k_3e^{\lambda_2}$
La curvatura de la solución esta dada por:

3.211
$$K(t)=\frac{\sqrt{\lambda_1^2\lambda_3^2k_2^2k_3^2(\lambda_2-\lambda_1)^2e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t}+\left[k_3k_2(2\lambda_1\lambda_2-\lambda_2)^2\lambda_1\lambda_2k_3(\lambda_2-\lambda_1)(k_3-k_2t)\right]^2e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t}+\lambda_1^4k_2^4e^{4\lambda_1 t}}}{\left(\sqrt{\left[\lambda_1(k_3-k_2t)+k_2\right]e^{2\lambda_1 t}+\lambda_1^2k_2^2e^{2\lambda_1 t}+\lambda_2^2k_3^2e^{2\lambda_1 t}}\right)^3}$$

Para encontrar las soluciones que se encuentran sobre los planos formados por los ejes coordenados se procede en forma semejante a los caosos anteriores ;

3.2111 soluciones en el plano y_1y_2.
Haciendo $k_3=0$ se obtiene:
$z(t)=((k_1+k_2t)\, e^{\lambda_1 t}, k_2e^{\lambda_1 t}, 0) \qquad k_1\neq 0 \quad k_2\neq 0$

Sustituyendo el valor de $k_3=0$ en 3.211, se obtiene la curvatura:

$$K(t)=\frac{\lambda_1^2k_2^2e^{2\lambda_1 t}}{\left(\sqrt{\left[\lambda_1(k_1+k_2t)+k_2\right]^2e^{2\lambda_1 t}+\lambda_1^2k_2^2e^{2\lambda_1 t}}\right)^3}$$

este número es distinto de cero.

3.2112 Soluciones en el plano y_1y_3. Haciendo $k_2=0$ se obtiene.
$f(t)=(k_1e^{\lambda_1 t}, 0, k_3e^{\lambda_2 t}) \qquad k_1\neq 0 \quad k_3\neq 0$
estas son semejantes a las que se vieron cuando la forma canónica es diagonal.

3.1113 Soluciones en el plano y_2y_3.
Si $(k_1+k_2t)=0$ entonces $k_1=0$ y $k_2=0$, esto implica que las soluciones estan sobre el eje y_3:

$h(t)=(0,0,\ k_3e^{\lambda 2t})$

Las otras soluciones que se encuentran sobre los ejes se obtienen igulando a cero en forma simultanea k_2 y k_3.
Si $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ y $k_3 \neq 0$ entonces las soluciones se encuentran fuera de los planos coordenados. Se puede observar en 3.211 que se curvatura es distinta de cero.
En este caso las proyecciones no coinciden con las soluciones que estan sobre los planos, exepto la que se encuentra en y_1y_2. Las otras dos restantes se presentan a continuación:

3.2114. Proyecciones en el plano y_1y_3:

$$g(t)=((k_1+k_2t)e^{\lambda_1 t},0,k_3e^{\lambda_2 t}) \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Al calcular la curvatura se obtiene un valor distinto de cero ya que t es variable.

$$K(t)=\frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\left|k_2k_3(2\lambda_1\lambda_2-\lambda_2^2)-\lambda_1\lambda_2k_3(\lambda_2-\lambda_1)(k_1-k_2t)\right|}{\left(\sqrt{[\lambda_1(k_1+k_2t)+k_2]^2e^{2\lambda_1 t}+\lambda_2^2k_3^2e^{2\lambda_2 t}}\right)^3}$$

3.2115. Proyecciones en el plano y_2y_3:

$$w(t)=(0,k_2e^{\lambda_1 t},k_3e^{\lambda_2 t}) \qquad k_2 \neq 0 \quad k_3 \neq 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces la curvatura es distinta de cero de acuerdo con los resultados obtenidos en 3.11
calculando la torsión en y(t) se obtiene:

(3.212)

$$\tau(t)=\frac{k_2^2k_3\lambda_1^2\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)^2e^{2(\lambda_1+\lambda_3)t}}{\left[\lambda_1^2\lambda_2^2k_2^2k_3^2(\lambda_1-\lambda_3)^2+[k_2k_3(\lambda\lambda_1\lambda_2-\lambda_2^2)-\lambda_1\lambda_3k(\lambda_2-\lambda_1)(k_1+k_2t)]^2\right]e^{2(\lambda_1+\lambda_3)t}+\lambda_1^4\lambda_2^4e^{4\lambda_1 t}}$$

claramente en todas las soluciones que se encuentran fuera de los planos coordenados la torsión es distinta de cero. Por lo tanto ninguna de ellas es curva plana. Para estas soluciones se satisfacen los siguientes resultados:

i) $t_1=-k_1 \rightarrow y_1(t_1)=0 \rightarrow y(t_1)=(0,k_2e^{-\lambda_1k_1/k_2},k_3e^{-\lambda_1k_1/k_2})$

ii) $t<-k_1$ y $k_2>0 \rightarrow y_1(t)=(k_1+k_2t)e^{\lambda_1 t}<0$
$t>-k_1$ y $k_2>0 \rightarrow y_1(t)=(k_1+k_2t)e^{\lambda_1 t}>0$

iii) $t<-k_1$ y $k_2<0 \rightarrow y_1(t)=(k_1+k_2t)e^{\lambda_1 t}>0$
$t>-k_1$ y $k_2<0 \rightarrow y_1(t)=(k_1+k_2t)e^{\lambda_1 t}<0$

Esto muestra que cada solución atravieza al plano $y_2\, y_3$ en el punto $y(t_1)$.

Caso 1. $\lambda_2<\lambda_1<0$
Aquí se presenta una contracción en las tres variables; el comportamiento en los planos y_3y_2 y $y_1\, y_2$ aparece en la figura 9, mientras que en la figura 10 aparecen los planos $y_1\, y_3$ y y_1y_2.

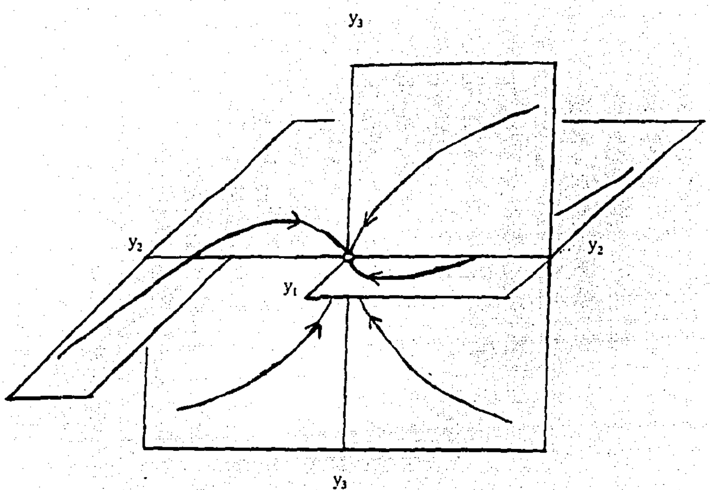
Caso 2. $\lambda_1<0<\lambda_2$.
Hay expansión en la variable y_3 y contracción en las variables y_1 y y_2 (fig.11);

i) $\lim_{t \to \infty} y_1(t)=0$

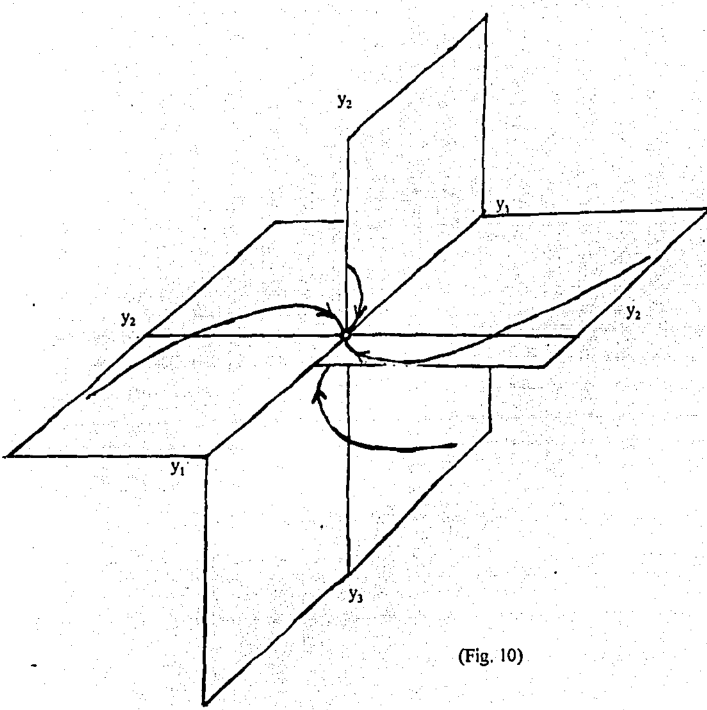
ii) $\lim_{t \to \infty} y_2(t)=0$

iii) $\lim_{t \to \infty} y_3(t)=0$

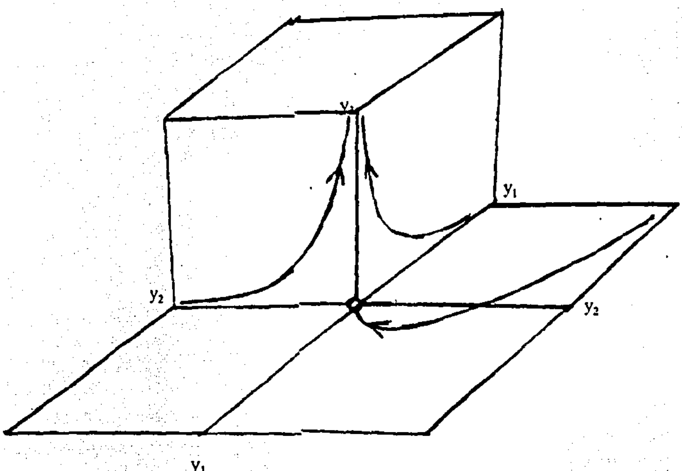
Caso 3. $0<\lambda_1<\lambda_2$.
Hay expansión en las tres variables (veáse fig. 12 planos $y_2\, y_3$, y_1y_2 y fig. 13 planos $y_3\, y_1$, $y_1\, y_2$).



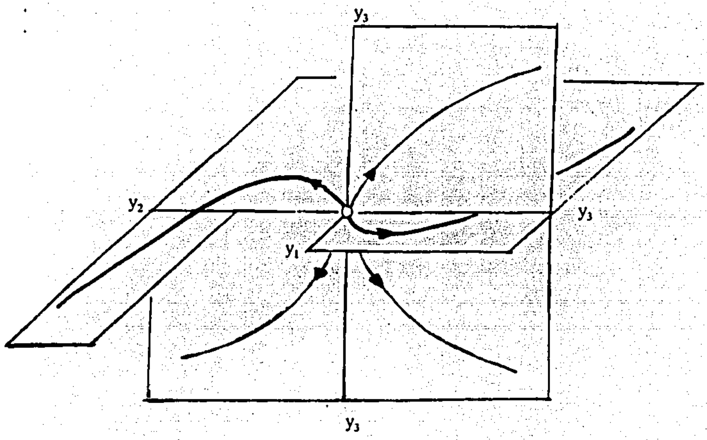
(Fig. 9)



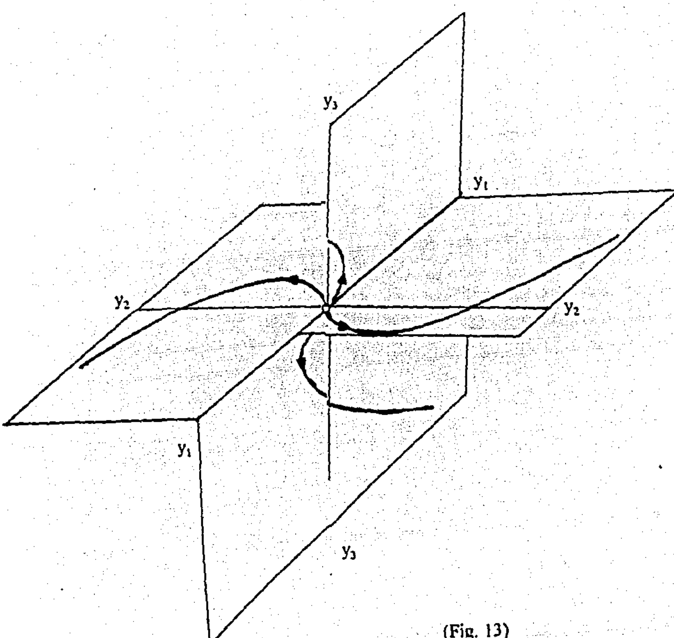
(Fig. 10)



(Fig. 11)



(Fig. 12)



(Fig. 13)

3.22 FORMA CANÓNICA DE JORDAN TIPO 2.

En este caso el sistema es de la forma:

$$\begin{bmatrix} y_1' & (t) \\ y_2' & (t) \\ y_3' & (t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & (t) \\ y_2 & (t) \\ y_3 & (t) \end{bmatrix}$$

La solución esta dada por:

$$y(t) = ((k_1 + k_2 t)e^{\lambda t}, k_2 e^{\lambda t}, k_3 e^{\lambda t})$$

La curvatura para cada solución es:

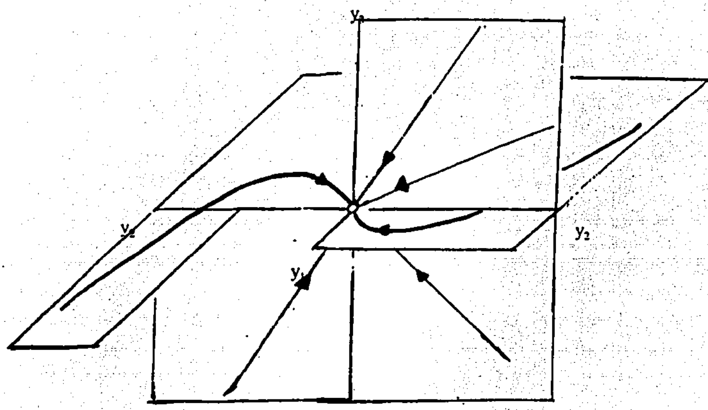
$$K(t) = \frac{\lambda |k_2| \sqrt{k_3^2 + k_2^2}}{e^{\lambda t}\left(\sqrt{[\lambda(k_1 + k_2 t) + k_2]^2 + \lambda^2 [k_2^2 + k_3^2]^3}\right)^3}$$

La soluciones con curvatura igual a cero son las que están sobre los planos $y_1 y_3$, $y_2 y_3$ y los ejes y_1 y y_3.
Para obtener la torsión se utiliza 3.212 con $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$:

$$\tau(t) = 0$$

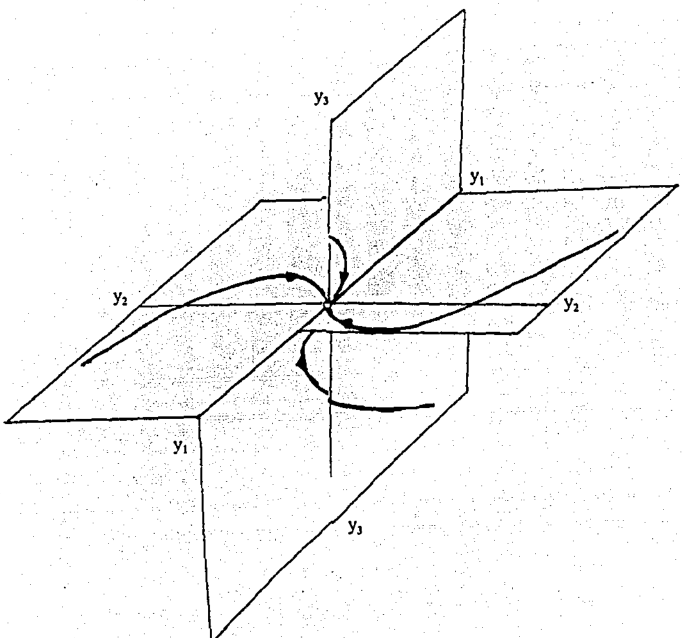
esto significa que todas las soluciones son curvas planas. Para desbribir su trayectoria son suficientes dos casos:

Caso 1. $\lambda < 0$, Hay expansión en las tres variables (fig. 16 planos $y_3 y_2$, $y_1 y_2$, fig. 17 planos $y_1 y_3$, $y_1 y_2$).

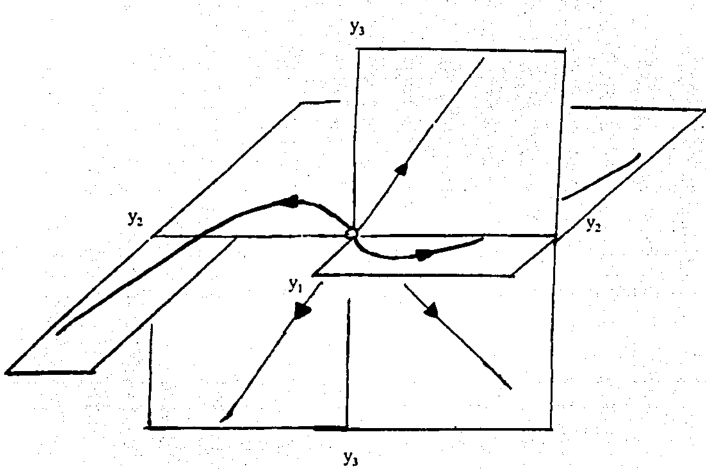


y_3

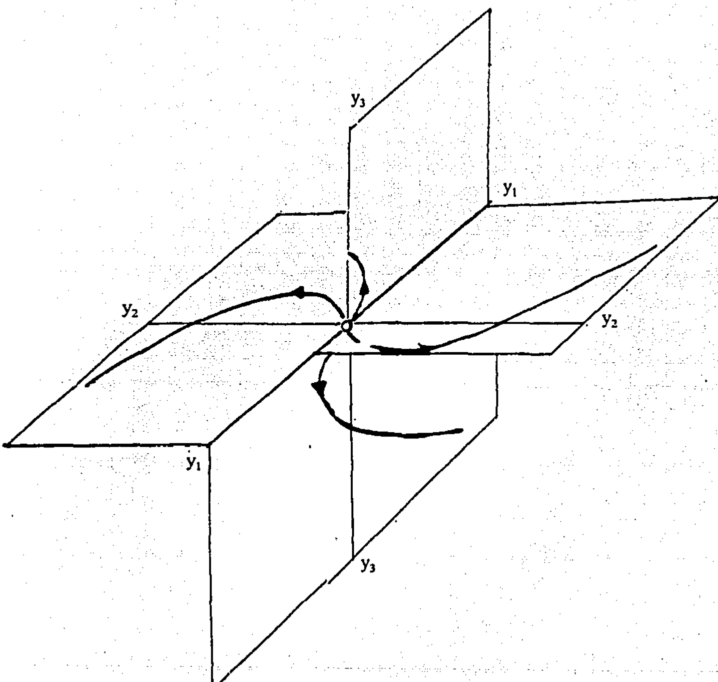
(Fig. 14)



(Fig. 15)



(Fig. 16)



(Fig. 17)

3.223 FORMA CANÓNICA DE JORDAN TIPO 3

El sistema esta dado por:

$$\begin{bmatrix} y_1' & (t) \\ y_2' & (t) \\ y_3' & (t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 (t) \\ y_2 (t) \\ y_3 (t) \end{bmatrix}$$

La solución generales:

$y(t)= ((k_1+k_2t)e^{\lambda t},k_2e^{\lambda t}, k_3e^{\lambda t})$

1) Las tres funciones reales que la componen son:

$y_1(t)=(k_1+k_2t+k_3/2t^2)\, e^{\lambda t}$
$y_2(t)=(k_1+k_2t)\, e^{\lambda t}$
$\dot{y}_1(t)=k_3\, e^{\lambda t}$

La curvatura y la torsión que se obtienen son:

$$K(t)=\frac{\sqrt{\lambda^4k^4_3+[\lambda^2k_3(k_2+k_3t)+k^2_3\lambda)]^2+[\lambda^2k_3(k_1+k_2t+k_3/2t^2)-\lambda^2(k_2+k_3t)^2-\lambda k_3(k_2+k_3t)-k^2_3]^2}}{e^{\lambda t}(\sqrt{[\lambda(k_1+k_2t+k_3/2t^2)+(k_2+k_3t)]^2+[\lambda(k_2+k_3t)+k_3]^2+\lambda^2k^2_3)^3}}$$

$$\tau(t)=\frac{-\lambda^3k^3_3}{e^{\lambda t}(\lambda^4k^4_3[\lambda^2k_3(k_2+k_3t)+k^2_3\lambda]^2+[\lambda^2k_3(k_1+k_2t+k_3/2t^2)-\lambda^2(k_2+k_3t)^2-\lambda k_3(k_2+k_3t)-k^2_3]^2}$$

Observe que la curvatura es cero sólo cuando $k_3=0$ y $k_2=0$, esto significa que las únicas soluciones que se encuentran en los planos coordenados son las que estan sobre el eje y_1. Si $k_3=0$ entonces la torsión es cero, por lo tanto todas las soluciones planas se encuentran en y_1y_2.

El análisis siguiente nos proporciona una mayor información de su comportamiento: en el inciso 1) las condiciones $y_1(t)=0$ ó $y_2(t)=0$ se cumplen cuando:

i) $P_1(t)= k_1+k_2t+k_3/2t^2=0$
ii) $P_2(t)= k_2+k_3t=0$

El polinomio $P_1(t)$ puede tener dos raices reales distintas, dos raíces reales iguales o ninguna raiz real:

1) $$t_1=\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2-2k_3k_1}}{k_3}=\alpha$$

2) $$t_1=\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2-2k_3k_1}}{k_3}=\beta$$

El caso $\Delta=k_2^2-2k_3k_1>0$. Aquí $p_1(t)$ tiene dos raices reales distintas y los puntos de intersección de cada solución con el plano y_2y_3 son:

1') $y(t_1)=(0,\sqrt{\Delta}\,e^{\lambda\alpha}, k_3e^{\lambda\alpha})$

2') $y(t_2)=(0,\sqrt{\Delta}\,e^{\lambda\beta}, k_3e^{\lambda\beta})$

Al calcular el campo vectorial en el punto $y(t_1)$ se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_1' & (t) \\ y_2' & (t) \\ y_3' & (t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ \sqrt{\Delta} & e^{\lambda\alpha} \\ k_3 & e^{\lambda\alpha} \end{bmatrix}$$

$y'_1(t_1)=\sqrt{\Delta}\,e^{\lambda\alpha}$
$y'_2(t_1)=(\lambda\sqrt{\Delta}+k_3)e^{\lambda\alpha}$
$y'_3(t_1)=\lambda k_3\,e^{\lambda\alpha}$

En forma análoga, pasa el punto $y(t_2)$ se obtiene:

$y'_1(t_2)=\sqrt{\Delta}\,e^{\lambda\beta}$
$y'_2(t_2)=(-\sqrt{\Delta}+k_3)e^{\lambda\beta}$
$y'_3(t_2)=\lambda k_3\,e^{\lambda\beta}$

Estos son los vectores velocidad de cada solución en los puntos $y(t_1)$ y $y(t_2)$.
Por hipótesis $\Delta>0$, de ahí que $y'_1(t_1)>0$ y $y'_1(t_2)<0$; esto implica que los vectores velocidad están fuera del plano y_2y_3 y en consecuencia cada solución lo atraviesa en $y(t_1)$ y $y(t_2)$.

El caso $\Delta=k_2^2-2k_3k_1=0$. Las dos raices son relaes e iguales:

$t_1=t_2=-k_2/k_3=\alpha$

Cada solución intersecta al plano y_2y_3 en un único punto:

$y(\alpha)=(0,0,k_3e^{\lambda\alpha})$

Si $t\neq -k_2/k_3$ entonces siempre se cumple que:

$(t+k_2/k_3)^2>0$

Al desarrollar el binomio y utilizar la hipótesis de que $\Delta=0$ se obtiene:

$k_1+k_2t+k_3/2t^2>0$

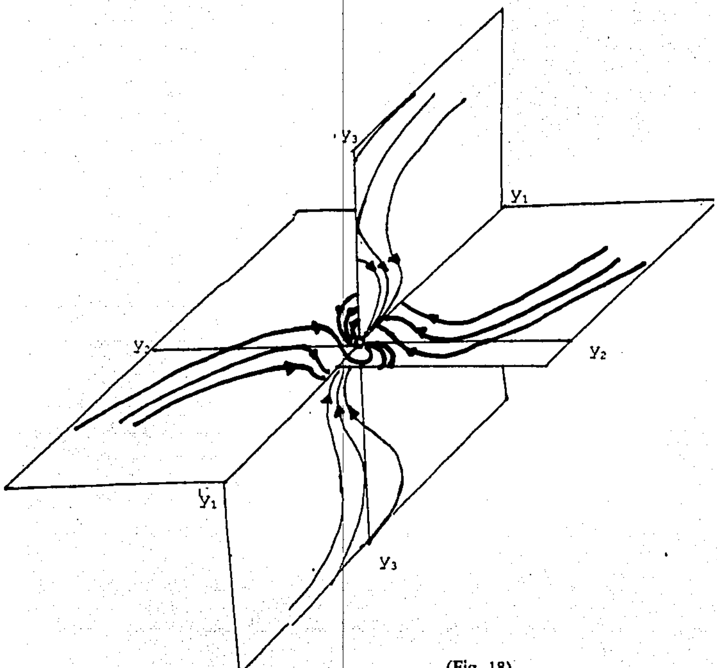
Esto implica que en $y(t)$ se cumple la propiedad:

$y_1(t)=(k_1+k_2t+k_3/2t^2)e^{\lambda t}>0$

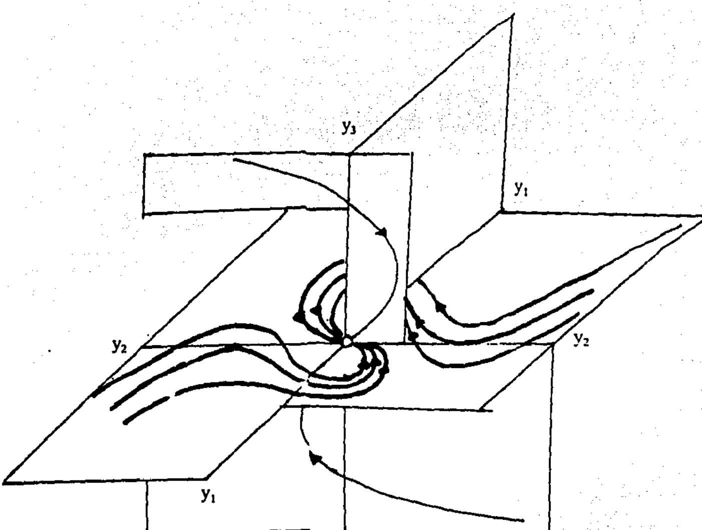
De lo anterior se concluye que las soluciones tocan al plano y_2y_3 en $y(\alpha)$ pero no la atraviezan:
Para describir el comportamiento de las soluciones en esta forma canónica con respecto al eigenvalor, son suficientes dos casos:

a) $\lambda<0$.
Hay contracción en las tres variables (véase fig. 18 planos y_2y_3, y_1y_2 y fig 19 planos y_3y_2, y_1y_2).

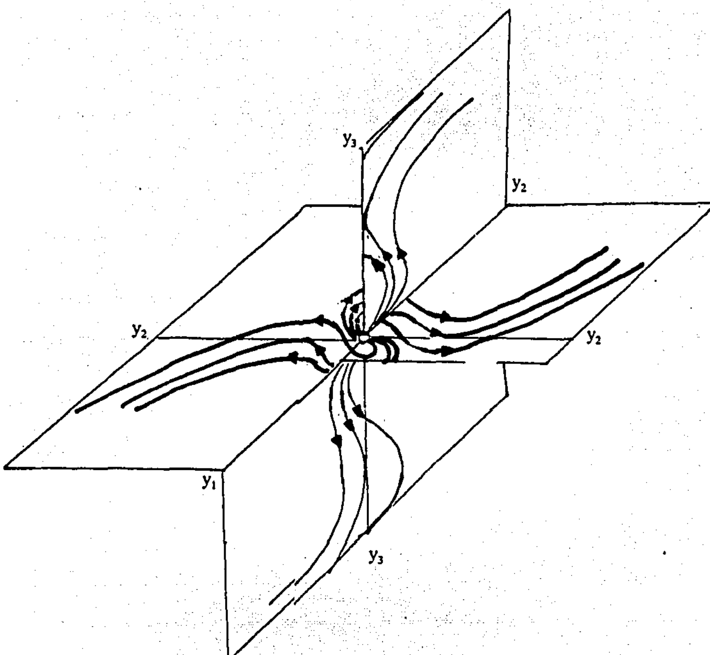
b) $0<\lambda$.
Se presenta expansión en las tres variables (fig 20 planos y_3y_1, y_1y_2 y fig 21 planos y_3y_2, y_1y_2) .



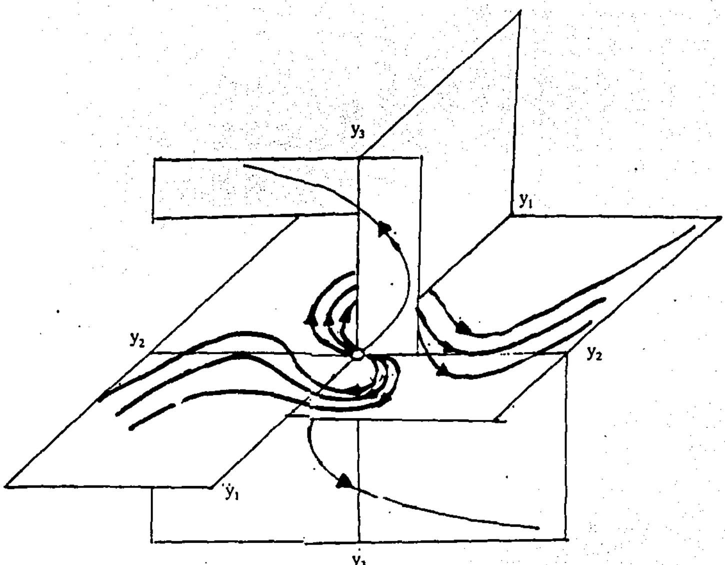
(Fig. 18)



(Fig. 19)



(Fig. 20)



(Fig. 21)

3.24 FORMA CANÓNICA DE JORDAN TIPO 4.

$$\begin{bmatrix} y_1' & (t) \\ y_2' & (t) \\ y_3' & (t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & (t) \\ y_2 & (t) \\ y_3 & (t) \end{bmatrix}$$

Los eigenvalores son: $\lambda_1 \in R$, $\lambda_2 = a+ib$, $\lambda_3 = a-ib$.
La solución general esta dado por:

$y_1(t)=k_1 e^{\lambda_1 t}$

$y_2(t)=[k_2 cos+b-k_3 sen+b]e^{at}$

$y_2(t)=[k_2 sen+b+k_3 cos+b]e^{at}$

Para describir la proyección de las soluciones sobre el plano y_2y_3, se analiza su restricción:

$$\begin{bmatrix} y_2\ (t) \\ y_3\ (t) \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} costb & -sentb \\ sentb & costb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1\ (t) \\ y_2\ (t) \end{bmatrix}$$

Se puede extablecer una correspondencia entre el plano y_2y_3 y el campo de los números complejos mediante la siguiente identificación [H-S]:

$(y_2(t),y_3(t)) \sim y_2(t)+iy_3(t)$

con esto es posible formar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(k_2,k_3) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\begin{bmatrix} costb & -sentb \\ sentb & costb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}"'] & k_2+ik_3 \arrow[d, dash, "(costb+isentb)(k_2+ik_3)"] \\
(k_2costb-k_3sentb,\ k_2sentb+k_3costb) \arrow[r, dash] & (k_2costb-k_3sentb)+i(k_2sentb+k_3costb)
\end{tikzcd}$$

La restricción al plano y_2y_3 vista en C es:

$y_2(t)+iy_3(t)=e^{at}(costb+isen+b)(k_2+ik_3)$

Como C esta identificado con R^2, la relación anterior nos determina en el plano y_2y_3 una rotación de una homotecia.
El comportamiento de la solución general depende de los valores de λ_1 y a [ARN].

Caso 1. $0<\lambda_1< a$.
Se presenta expansión en las tres variables: y_1,y_2,y_3, (fig.22)

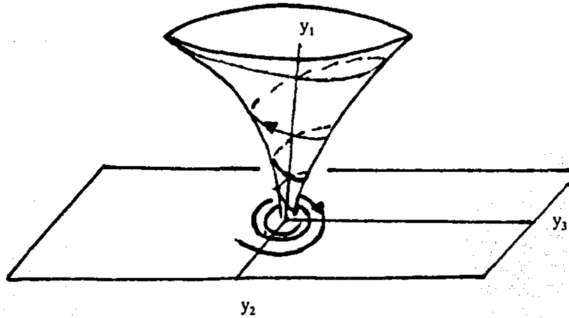
Caso 2. $a<0<\lambda_1$
Hay expansión en y_1 y contracción en y_2 y y_3 (fig. 23)

Caso 3. $\lambda_1<0<a$.
Hay contracción en y_1 y expansión en y_2 y y_3 (fig. 24).

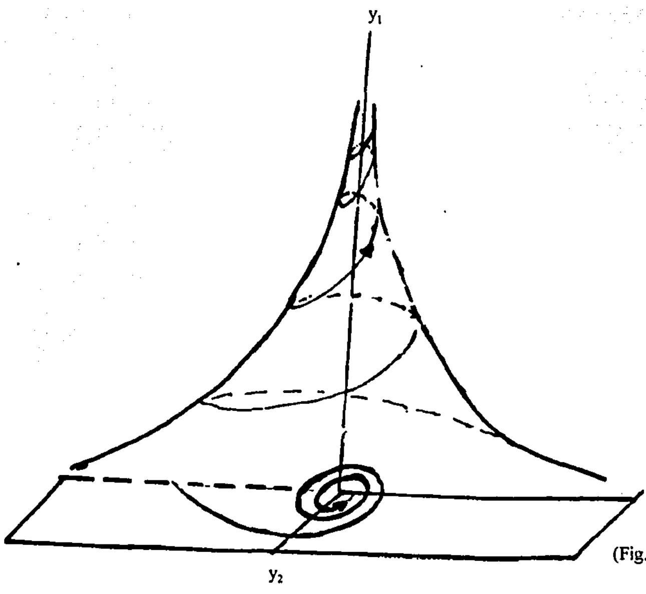
Caso 4. $a<\lambda_1<0$
Hay contracción en las tres variables (fig. 25).

Caso 5 $\lambda_1<a<0$
Se presenta una contracción en las tres variables la contracción es más rápido en y_1 que en y_2 y y_3 (fig. 26).

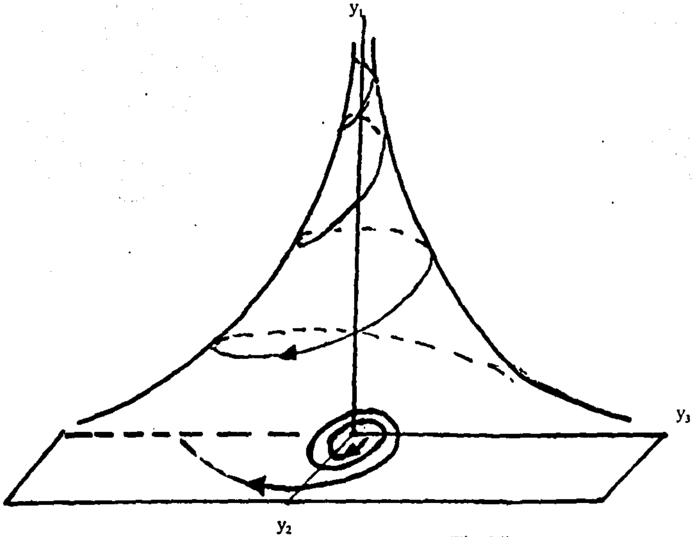
Caso 6. $0< a<\lambda_1$.
Se presenta una extensión en las tres variables. La variable y_1 crece más rápido que y_2 y y_3 (fig. 27).



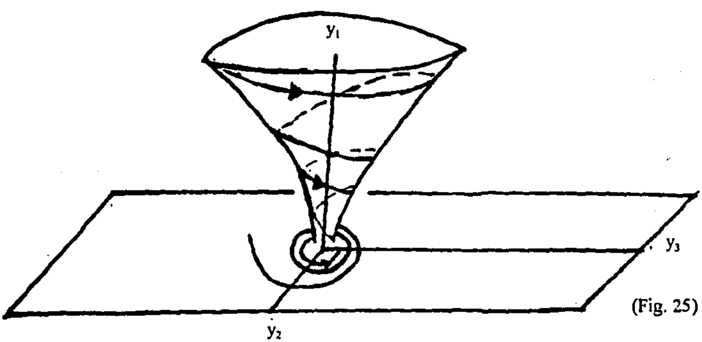
(Fig. 22)



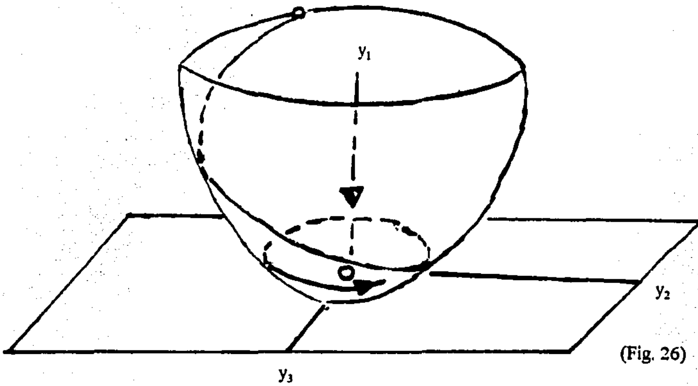
(Fig. 23)



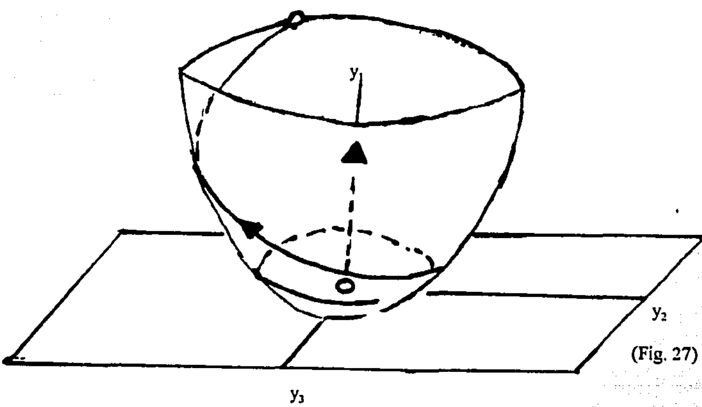
(Fig. 24)



(Fig. 25)



(Fig. 26)



(Fig. 27)

APÉNDICE

Las demostraciones de los teoremas que aquí se presentan, se encuentran en cualquier libro de algebra lineal por ejemplo en Diferential Equations, Dinamical systems, and Linear Algebra (Hirsch - Smale).

1. DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA

Teorema 1.111. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial dimensionalmente finito E y sea W el subespacio T-cíclico generado por $x \in E$. Supongase que $\dim(w)=k \geq 1$, entonces:

i) $\{x, T(x), T^2(x), \ldots, T^{k-1}(x)\}$ es una base para W

ii) si $-a_0, -a_1, \ldots, -a_{k-1}$ son los escalares tales que:

$T^k(x)=-a_0x-a_1T(x)-\ldots-a_{k-1}T^{k-1}(x)$

Entonces el polinomio caracteristico de T_W es:

$f(t)=(-1)^k(a_0+a_1t+\ldots+a_{k-1}t^{k-1}+t^k)$

Demostración. i) Como W es dimensionalmente finito entonces existe el menor entero j para el que $\{x, T(x), \ldots, T^j(x)\}$ es linealmente dependiente $(x \neq 0, j \geq 1)$. Por lo tanto $\{x, T(x), \ldots, T^{j-1}(x)\}$ es linealmente independiente y T^j esta en el espacio generado por este conjunto:

$$T^j(x) \in L(\{x, T(x), \ldots, T^{j-1}(x)\})$$

Es claro que si $0 \leq s \leq j$ entonces $T^s(x)$ está dentro de este subespacio.

Supongase que $T^m(x)$ pertenece a L para alguna $m \geq j$. Entonces existen escalares $b_0, b_1, \ldots, b_{j-1}$ tales que $T^m(x) = b_0x + b_1 T(x) + \ldots + b_{j-1} T^{j-1}(x)$

Aplicando T a ambos lados de la igualdad anterior se obtiene:

$T^{m+1}(x)=b_0T(x)+b_1T^2(x)+\ldots+b_{j-1}T^j(x)$

Esto implica que T^{m+1} es una combinación lineal de $T(x), T^2(x), \ldots, T^j(x)$ cada uno de los cuales pertenece a L. Entonces $T^{m+1} \in L$, por lo tanto:

$$W=L\left(\{x,\ T(x),\ T^2(x),\ \ldots,\}\right) \subset L\{x,\ T(x),\ T^2(x),\ \ldots,\ T^{j}\text{-}1(x)\}$$

Como la inclusión reciproca también es cierta, entonces $\{ x, T(x), \ldots, T^{j-1}(x) \}$ genera a W y como es linealmente independiente, es una base de W. Este conjunto debe tener k elementos por lo que j=k y entonces:

$\{ x, T(x), \ldots, T^{k-1}(x) \}$ es una base para W.

ii) sea $\beta=\{ x, T(x), \ldots, T^{k-1}(x) \}$ la base del inciso i), y sean $-a_0, -a_1, \ldots -a_{k-1}$ escalares tales que:

$T^k(x)= -a_0x-a_1T(x)-, \ldots, -a_{k-1}T^{k-1}(x)$

Observe que Tw con la base β se puede expresar como :

$$[Tw]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \ldots 0 & -a_1 \\ 0 & 1 \ldots 0 & -a_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 \ldots 0 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

Calculando el polinomio caracteristico de $[Tw]_\beta$ se obtiene:

$f(t) = (-1)^k (a_0 + a_1t + \ldots + a_{k-1}t^{k-1} + t^k)$

TEOREMA 1.131 Sea T un operador sobre un espacio E complejo y sea m(t) su polinomio mínimo:

$m(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_k)^{m_k}$

sea $Ni = N(T-\lambda_i I)^{m_i}$, entonces E es la suma directa de los subespacios Ni:

$E = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$

y el polinomio mínimo de la restricción de T a cada Ni es $mi(t) = (t - \lambda i)^{m_i}$ $\quad i = 1, \dots, k$

Teorema 1.132 Sea T un operador en un espacio E complejo, o de otro modo E es real y T tiene eigenvalores reales. Sea p(t) su polinomio característico:

$p(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \dots (t - \lambda k)^{n_k}$

Y sea $E(T, \lambda_i) = N(T - \lambda_i I)^{n_i}$ el eigenespacio generalizado de T correspondiente a λi ($i = 1, \dots, k$). Entonces E es la suma directa de los eigenespacios generalizados de T y la dimensión de cada uno de ellos es igual a la multiplicidad del eigenvalor correspondiente:

$E = E(T, \lambda_1) \oplus \dots \oplus E(T, \lambda_k)$, $\quad n_i = \dim E(T, \lambda_i)$

Demostración de 1.131 y 1.132 [LAN]
Por hipótesis $P(T) = m(T) = 0$. Sea f(t) un polinomio de grado mayor o igual que uno que satisfaga la condición:

$f(t) = f_1(t)\, f_2(t)$

Donde f_1 y f_2 son polinomios que cumplen la propiedad de que su máximo común divisor es 1.
Sea $A: E \to E$ un operador. Supongase que $f(A)=0$ sean:

$N_1=Nf_1(A)$ y $N_2=Nf_2(A)$

los núcleos de f_1 y f_2 en E. Por la propiedad del máximo común divisor existen polinomios g_1 y g_2 tal que:

$g_1(t)\, f_1(t) + g_2(t)\, f_2(t) = 1$

Si $x \in E$ entonces:

$g_1(A)\, f_1(A)x + g_2(A)\, f_2(A)x = Ix$

observe que:

$f_2(A)g_1(A)f_1(A) = g_1(A)[f_1(A)f_2(A)] = 0$
$f_1(A)g_2(A)f_2(A) = g_2(A)[f_1(A)f_2(A)] = 0$

Esto implica que $g_1(A)f_1(A)x \in N_2$ y $g_1(A)f_1(A)x \in N_2$.

Sea $x \in$ E entonces:

$x=x_2 + x_1 \quad x_2 \in N_2 \; , \; x_1 \in N_2$

Si $x \in N_1 \cap N_2$ entonces $f_1(A)x=0$ y $f_2(A)x=0$, esto implica que $x=0$; de esto se obtiene que:

$N_1 \cap N_2=\{0\}$

Por lo tanto E es la suma directa de N_1 y N_2:

i) $E=Nf_1(A) \oplus Nf_2(A)$

Sea $T:E \rightarrow E$ un operador sobre C, supongase que existe un polinomio F(t) tal que:

$F(t)=(t-\lambda_1)^{q_1} \ldots (t-\lambda_k)^{q_k}$ con $F(T)=0$

sea $Ui=N(T-\lambda iI)^{q_i}$,utilizando inducción asumimos la hipótesis verdadera de que:

$W=N(T-\lambda_2 I)^{q_2} \ldots (T-\lambda_k)^{q_k} = N(T-\lambda_2 I)^{q_2} \oplus \ldots \oplus N(T-\lambda_k I)^{q_k}$

Aplicando el inciso i) se obtiene:

$E=N(T-\lambda_1 I)^{q_1} \oplus W=N(T-\lambda I)^{q_1} \oplus N\,(T-\lambda I)^{q_2} \oplus \ldots \oplus N(T-\lambda_k I)^{q_k}$

observe que $U_j = N(T-\lambda_j I)^{q_j}$ $j=2, \ldots k$ en W. Sólo nos falta probar que es el núcleo de $(T-\lambda_j I)^{q_j}$ en E.

Sea $x \in V$ tal que $x \in N(T-\lambda_j I)^{q_j}$

$x=x_1 + \ldots + x_k$ con $xi \in Ui$

En particular $x \in W=N(T-\lambda_2 I)^{q_2} \ldots (T-\lambda_k I)^{q_k}$ esto implica que $x_q=0$ y que $x=x_j$

Teorema 1.134. Sea T un operador sobre un espacio vectorial E donde E es complejo si T tiene algún eigenvalor no real. Entonces T=S+N donde SN=NS , N es nilpotente y S diagonalizable.

Demostración [H-S]
Sea $Ti = T/E(T,\lambda i)$ la restricción de T al eigenespacio generalizado $E(T,\lambda i)$.

Sea $m(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \dots (t-\lambda_k)^{m_k}$ el polinomio mínimo de T. Entonces $(t-\lambda i)^{m_i}$ es el polinomio mínimo de Ti:

$(Ti-\lambda iI)^{m_i} = 0$ para $i = 1, \dots, k$.

De esto podemos definir a la matriz nilpotente:

$Ni = Ti - \lambda iI$

Entonces la restricción de T a $E(T,\lambda i)$ se puede expresar como:

$Ti = Ni + \lambda iI \quad i = 1, \dots, k. \quad Si = \lambda iI$

si $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_k$ y $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ entonces:

$T = S + N$

Como Ni y Si conmutan, al multiplicar por bloques se cumple que SN = NS. Ademas S es diagonal si $m = \max(m_1, \dots, m_k)$ entonces:

$$N^m = \begin{bmatrix} T_1-\lambda_1 I & & & \\ & T_2-\lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_k-\lambda_k I \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} O & & & \\ & O & & \\ & & \ddots & \\ & & & O \end{bmatrix}$$

2. FORMAS CANONICAS DE JORDAN

Teorema 1.321. Si $x \neq 0$ es $(T-\propto I)$ cíclico con periodo r, entonces el conjunto de vectores:

$\{ (T-\propto I)^{r-1} x, \ldots, (T-\propto I)x, x \}$

Es linealmente independiente.

Demostración [LAN]

Sea $B = T-\propto I$, entonces definase el polinomio:

$f(B) = a_0 x + a_1 (T-\propto I)x + \ldots + a_s (T-\propto I)^s x$

con $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_s t^s \quad s \leq r-1$

supongase que $f(B)=0$, esto es:

$a_0 x + a_1 (T-\propto I)x + \ldots + a_s (T-\propto I)^s x = 0$

Sea $g(t)=t^r$ y sea $h(t)$ el máximo común divisor de f y g, entonces existen polinomios f_1 y g_1 tal que:

$h(t) = f_1(t) f(t) + g_1(t) g(t)$
$h(t) = f_1(t)(a_0 + a_1 t + \ldots + a_s t^s) + g_1(t) t^r$

Aplicando h a $B = T-\lambda I$ se obtiene:

$h(B) = F_1(B)(a_0 I + a_1 B + \ldots + a_s B^s) + g_1(B)(B)^r = 0 + 0 = 0$

Como $h(t)$ divide a tr, es de grado menor o igual que r-1:

$h(t) = t^d$ con $d < r$ y con la propiedad $h(T-\propto I) = (T-\propto I)^d = 0$
Esto contradice el hecho de que r es el periodo de x.

3. OPERADORES EXPONENCIALES

Sea $T:E \to E$ un operador en R^n; la norma uniforme de T en $L(R^n)$ (conjunto de operadores en R^n) se define como:

$$\|T\| = \max\{|T(x)| \mid |x| \leq 1\}$$

esta norma tiene las siguientes propiedades [H-S].

i) Si $\|T\| = K$ entonces $|T(x)| \leq k|x|$ para todo valor $k \in R^n$, donde $|x| = (x^2_1 + \ldots + x^2_n)^{1/2}$

ii) $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$

iii) $\|T^m\| \leq \|T\|^m$ para cualquier $m \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$.

Teorema. La exponencial $e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$ de un operador es absolutamente convergente para cada operador T es absolutamente convergente y:

$$\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$$

Demostración. Por el inciso iii) se obtiene:

$$\left\|\frac{T^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|T^k\|}{k!}$$

De donde :

$$\|e^T\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^{\|T\|} < \infty$$

de lo anterior se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k}{k!} < \infty$$

esto implica que:

$$e^{T}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^{k}}{k!}$$

es absolutamente convergente y que:

$$\| e^{T} \| \leq e^{|T|}$$

Lema. Sean $\sum_{j=0}^{\infty} A_j = A$ y $\sum_{k=0}^{\infty} B_k = B$ series absolutamente convergentes de operadores en R^n.

Entonces:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \sum_{k=0}^{\infty} B_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j+k=\ell} A_j B_k$$

Demostración. Sean las sumas parciales:

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{n} A_j \quad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} B_k \quad \gamma = \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{j+k=\ell} A_j B_k$$

Entonces:

$$\gamma_n - \alpha_n \beta_n = \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{j+k=\ell} A_j B_k - \sum_{j=0}^{n} A_j \sum_{k=0}^{n} B_k$$

Donde $\sum'$ denota la suma de los terminos cuyos indices satisfacen:

$j+k \leq 2n \quad 0 \leq j \leq n \quad n+1 \leq k \leq 2n$

Y $\sum''$ es la suma que corresponde a:

$j+k \leq 2n \quad n+1 \leq j \leq 2n \quad 0 \leq k \leq n$

Aplicando la norma uniforme:

$$\left\| \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{\ell=j+k} A_j B_k - \sum_{j=0}^{n} A_j \sum_{k=0}^{n} B_k \right\| = \left\| \sum' A_j B_k + \sum'' A_j B_k \right\| \leq$$

$$\leq \quad \sum' \|A_j\| \cdot \|B_k\| + \sum'' \|A_j\| \cdot \|B_k\|$$

Observe que :

a) $\sum' \|A_j\|\cdot\|B_k\| \le \sum_{j=0}^{\infty}\|A_j\| \sum_{k=n+1}^{2n} \|B_k\|$

b) $\sum'' \|A_j\|\cdot\|B_k\| \le \sum_{j=n+1}^{2n}\|A_j\| \sum_{k=0}^{\infty} \|B_k\|$

esto implica que:

$$\left\|\sum_{l=0}^{2n}\sum_{l=j+k} A_jB_k - \sum_{j=0}^{n} A_j \sum_{k=0}^{n} B_k \right\| \le \sum'\|A_j\|\,\|B_k\| + \sum''\|A_j\|\,\|B_k\|$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}\|A_j\| \sum_{k=n+1}^{2n}\|B_k\| + \sum_{j=n+1}^{2n}\|A_j\| \sum_{k=0}^{\infty}\|B_k\|$$

Como A y B son series absolutamente convergentes entonces:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|A_j\| < \infty \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\|B_k\| < \infty$$

Y sus residuos parciales tienden a cero cuando n tiende a ∞. Aplicando el límite a los términos de la desigualdad, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{l=0}^{2n}\sum_{l=j+k} A_jB_k - \sum_{j=0}^{n} A_j \sum_{k=0}^{n} B_k \right\| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty}\|A_j\| \sum_{k=n+1}^{2n}\|B_k\| + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{2n}\|A_j\| \sum_{k=0}^{\infty}\|B_k\| = 0$$

Por lo tanto:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \sum_{k=0}^{\infty} B_k = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=j+k} A_jB_k$$

Este resultado se aplicará para probar el teorema principal de los operadores exponenciales:
Teorema 1.41. Sean P,S,T operadores en R^n. La exponencial de un operador cumple las propiedades siguientes:

a) si $Q=PTP^{-1}$ entonces $e^Q=Pe^TP^{-1}$

b) si ST=TS entonces $e^{S+T}=e^{ST}$

c) $e^{-S}=(e^{S})^{-}$

d) *si* n-2 *y* T-$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ *entonces:* $e^{T} \cdot e^{a\begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}}$

Demostración.

a) $\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{(PTP^{-1})}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{(PT^{k}P^{-1})}{k!} = P\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{T^{k}}{k!} P^{-1}$

por lo tanto, al pasar al limite cuando N tiende a ∞ se obtiene:

$e^{Q}=Pe^{T}P^{-1}$

b) Como ST=TS, podemos aplicar el teorema del binomio:

$(S+T)^{n}=n!\sum\limits_{n=j+k} \frac{s^{j}}{j!} \frac{T^{k}}{k!}$

aplicando la exponencial y el lema anterior se obtiene:

$$
\begin{aligned}
e^{S+T} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(s+T)^{n}}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=j+k} \frac{s^{j}}{j!} \frac{T^{k}}{k!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^{j}}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k}}{k!} \\
&= e^{S} e^{T}
\end{aligned}
$$

c) Como producto S y -S conmutan con la operación del producto, podemos aplicar el inciso b):

$e^{S+(-S)} = e^{S}\, e^{-S}$ implica $I = e^{0} = e^{S}\, e^{-S}$

Esto significa que $(e^{S})^{-1} = e^{-S}$

d) Para probar este inciso hacemos la identificación.

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = aI + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

como:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$e^{\begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}} = e^{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}}\; e^{\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}}$$

Ahora bien:

$$e^{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}} = e^{aI} = e^{a}\, I$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}^{k}$$

pero:

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} 0 & -(1)^{k}\, b^{2k+1} \\ (-1)^{k}\, b^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{si } n=2k+1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-1)^k b^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k b^{2k} \end{bmatrix} \qquad \text{si } n=2k$$

por lo tanto:

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k!)} b^{2k} & -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!)} b^{2k} \end{bmatrix}$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \cos b & -\text{senb} \\ \text{sen } b & \text{cosb} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$e^{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}} = e^{a} \, I \begin{bmatrix} \cos b & -\text{senb} \\ \text{sen } b & \text{cosb} \end{bmatrix} = e^{a} \begin{bmatrix} \cos b & -\text{senb} \\ \text{sen } b & \text{cosb} \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

[ARN] Arnold I.V. Ordinary Differential Equations. MIT press paperback, Massachusetts 1978, pp. 139-141.

[BRA] Bramer Fred, Nohel A. John. The Qualitative Theory of ordinary Diferential Equations: An Introduction. Dover publicationes inc., New York, 1989.

[DOC] Do Carmo M.P. Differential Geometry of Corves and surfaces. Prentice Hall International. New Jersey 1976.

[FRI] Friedberg H. Stephen, Insel J. Arnold, Spence E. Laerence. Algebra Lineal. Publicaciones Cultural, México, D.F. 1982, pp.306-316.

[HAA] Haaser B. Norman, Lasalle P. Joseph. Análisis Matemático. Trillas, México, D.F. 1970, 143-153.

[H-S] Hirsch W. Morris, Smale Stephen. Differential Equations, Dinamical Systems and Linear Algebra. Academic Press, New York 1974, pp. 82-85, 110-115.

[LAN] Lang Serge. Algebra lineal. Fondo Educativo Interamericano, México, D.F. 1976, 281-301.

[LEF] Lefschetz Solomon. Differential Equations: Geometr Theory. Dover Publications Inc. New York 1977.

[NEW] Newytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equations. Dover Publications INC., New York 1989.