

3  
2 ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
ARAGON**

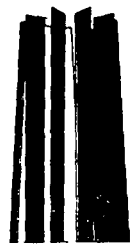
FALLA DE ORIGEN

APUNTES DE ANALISIS ESTRUCTURAL II

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**INGENIERO CIVIL**

PRESENTA  
**LUIS ALEJANDRO AGUILAR PATLAN**

E  
N  
E  
P  
A  
R  
A  
G  
O  
N



**UNAM**

NETZAHUALCOYOTL, ESTADO DE MEXICO 1995



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
ARAGÓN  
DIRECCIÓN

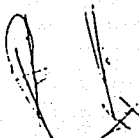
LUIS ALEJANDRO AGUILAR PATLAN  
P R E S E N T E .

En contestación a su solicitud de fecha 13 de junio del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. FELIPE DE JESUS GUTIERREZ ESCUDERO pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado " APUNTES DE ANALISIS ESTRUCTURAL II ", con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPRITU"  
San Juan de Aragón, Méx., Julio 20 de 1988  
EL DIRECTOR

  
Lic. SERGIO GUERRERO VERDEJO

  
c.c.p. Coordinación de Ingeniería (21).  
Unidad Académica.  
Departamento de Servicios Escolares.  
Asesor de Tesis.

---

# DEDICATORIA

---

*A mis padres: Esther Tatlán Quintana  
y  
José Guadalupe Aguilár Mejía*

*Por su apoyo de toda la vida*

*A mi esposa: Lilia Millán Campuzano*

*Por todo el cariño y apoyo incondicional que siempre me ha  
demostrado aún en los tiempos difíciles*

*Con cariño para mis hijos:*

*Arió Alejandro  
y  
Luis Fernando*

*Todo mi agradecimiento para todas  
aquellas personas que colaboraron en  
la realización de mi carrera.*

---

# Introducción

---

A través del tiempo, el campo del Análisis Estructural se ha renovado, ya que la ciencia a aportado nuevas teorías en algunos casos, y en otros ha perfeccionado las ya existentes, haciéndolas más eficientes y reduciendo los tiempos de trabajo en la resolución de un problema dado.

Sin embargo, la aparición de las Computadoras de gran capacidad marcó el inicio de una nueva era en el campo del Análisis Estructural; ya que estas, se han convertido en una herramienta indispensable en la resolución de estructuras de gran tamaño. Durante muchos años se intentó resolver problemas aplicando los métodos matemáticos del álgebra lineal y aún cuando muchas estructuras pudieron analizarse; el trabajo hubiera sido, en muchos casos imposible si no hubieran existido las computadoras y calculadoras de gran capacidad.

Durante muchos años, para la resolución de problemas de análisis estructural, tuvo que recurrirse a los llamados "métodos aproximados o iterativos", los cuales se volvían bastante complicados a medida que el tamaño de la estructura por resolver crecía. Sin embargo, este era el único medio para analizar una estructura ya que los llamados "métodos exactos", requerían la resolución de grandes sistemas de ecuaciones simultáneas; los cuales eran prácticamente imposible resolver en forma manual. La aparición de las computadoras vino a solucionar este problema, ya que; éstas resuelven de manera relativamente fácil un gran número de ecuaciones simultáneas. Además, las computadoras son bastante prácticas para utilizarlas en el manejo de operaciones matriciales, ya que; por medio de un programa adecuado, resuelven en forma sencilla complicadas operaciones matemáticas propias del álgebra matricial en tiempos por demás cortos en comparación con lo que sería una resolución manual.

El presente trabajo pretende ser una ayuda en el estudio de la materia de "Análisis Estructural II" que se imparte en la E.N.E.P. Aragón. La idea principal es la exposición de los principios del análisis estructural utilizando un lenguaje análogo al utilizado en las aulas universitarias, esto es; (misma terminología y accesibilidad en la presentación).

Tal pretensión no fue fácil ya que la mayoría de los textos a los que se recurrió para elaborar este trabajo utilizan, en muchos de los casos; un lenguaje peculiar o totalmente diferente al que se maneja usualmente en nuestras aulas. Esto conlleva bastantes problemas al tratar de darle una interpretación en el lenguaje conocido ya que, en un principio; el que suscribe no pudo siquiera relacionar lo que estaba leyendo con los conocimientos básicos ya adquiridos sobre la materia. Solo a través del tiempo y de leer y releer los textos tradicionales es como poco a poco logró comprender en forma aceptable y relacionar las ideas de los textos con mis conocimientos básicos sobre la materia, para después darle una interpretación lógica y poderlos exponer de manera accesible, por lo menos a mi juicio. Desde luego lo anterior no significa que para otros estudiantes a mi nivel ocurra lo mismo.

De cualquier manera y sin falsa modestia, creo que aunque sea en mediana manera el objetivo se cumplió al realizar este trabajo.

También debo aclarar que este trabajo no maneja los temas con gran profundidad. Si algún lector pretende profundizar en algún tema específico, deberá recurrir a algún texto sobre la materia; la bibliografía que al final se presenta puede ayudar a este respecto.

FALLA DE ORIGEN

El presente trabajo presupone que el lector está familiarizado de antemano con el análisis de estructuras isostáticas y de estructuras hiperestáticas, así como con el manejo del álgebra matricial, tema este último al que se ha dedicado el capítulo 1, pero; solo a manera de repaso ya que resultará una herramienta bastante útil a lo largo de todo o casi todo este trabajo. El capítulo 2 plantea los principios básicos del análisis estructural en una forma rigurosa valiéndose para ello de las matemáticas superiores y utilizando en una forma estricta todos y cada uno de los parámetros básicos que el análisis de una estructura requiere. Los capítulos 3, 4 y 5 presentan algunos conceptos básicos que más adelante se utilizan. Los capítulos 6 y 7 presentan formalmente los dos "métodos tradicionales exactos", que se utilizan en el análisis estructural así como algún método iterativo. El capítulo 8 hace una comparación de los métodos expuestos en los dos anteriores capítulos y presenta algunos temas selectos o variaciones relacionadas con el análisis de estructuras especiales. Por último, el capítulo 9 muestra un somero panorama acerca del análisis plástico de estructuras.

Es importante comentar también que en este trabajo se han hecho dos omisiones importantes.

La primera: se refiere a la contribución que por efecto de fuerza cortante se induce en la matriz de flexibilidad y/o rigideces de una barra que forma parte de una estructura. A su vez está primera omisión afecta la obtención de las fuerzas de empotramiento que se obtienen en los extremos de barras cargadas en su interior, ya que; según el inciso 8.A.3, la obtención de estas fuerzas se hace en función de las convenientes matrices de flexibilidad y/o rigideces apropiadas. Esta primera omisión es válida, si consideramos que la contribución que la fuerza cortante aporta (ver inciso 4.2) no afecta significativamente los resultados finales y en última de las instancias puede ser absorbida por los factores de carga y de seguridad que en diseño estructural se manejan. Esta omisión tiene también el fin de hacer más fáciles los cálculos ya que en este trabajo, casi todos han sido hechos en forma manual y en función de algunos datos que se consideran constantes durante el análisis (A, E, I, ...). Si además consideramos la fuerza cortante, tendríamos que incluir  $A_c$  y  $G$ , y el trabajo ya no sería tan fácil. Sin embargo (y dado que los métodos que se presentan en este trabajo son más bien programables en computadora) esta omisión no será válida si se utiliza la programación para sistematizar el análisis y por consiguiente se deberán manejar todos y cada uno de los parámetros que se requieran.

La segunda omisión importante, se refiere a los diagramas de elementos mecánicos para marcos rígidos. Creo que una vez que se conocen las fuerzas finales en los extremos de cada barra, la obtención de los elementos mecánicos es trivial y no requiere gran trabajo. Además, y debido a la gran extensión de este trabajo, esta omisión permitió ahorrar bastante espacio y costo; ya que la impresión es bastante cara. Sin embargo, creo yo que tal omisión no afectará la calidad del trabajo (ya sea buena o mala).

Por último quiero referirme a los "apuntes" que otros compañeros, al igual que yo han elaborado en otras materias propias de la carrera de Ingeniería Civil. Creo que al realizar estos trabajos, cada uno de nosotros a puesto toda su capacidad y esfuerzo para presentar un trabajo que, además de servir como tramite a nuestra titulación, tenga una verdadera utilidad dentro de las aulas de nuestra escuela.

Esto lo menciono porque es realmente triste y frustrante ver que en la biblioteca se han acumulado un gran número de trabajos de esta naturaleza que —a reserva de ser analizados y calificados realmente por profesores conocedores de las materias respectivas— podrían ser recomendados por los mismos profesores que imparten tales materias, si no como libro de texto por lo menos como libro de consulta. Y en esta forma darles una utilidad real y no tenerlos solamente almacenados como basura inservible.

Con lo anterior hago un llamado a las autoridades, a manera de sugerencia, para que sea considerado mi comentario y se de una utilidad real a estos trabajos que han sido elaborados con dedicación y entrega por cada uno de nosotros. ■

FALLA DE ORIGEN

---

# CONTENIDO

---

<b>Capítulo 1. Álgebra matricial . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Definiciones y operaciones entre matrices . . . . .	1
1.2 Matrices particionadas . . . . .	12
1.3 Uso de programas . . . . .	22
<b>Capítulo 2. Análisis introductorio . . . . .</b>	<b>25</b>
2.1 Definiciones fundamentales, principios básicos y solución por los métodos generales y de análisis . . . . .	25
<b>Capítulo 3. Vectores estructurales . . . . .</b>	<b>37</b>
3.1 Vector, fuerza y desplazamiento . . . . .	37
3.2 Transformaciones geométricas . . . . .	38
3.3 Contragradencia . . . . .	43
<b>Capítulo 4. Elementos estructurales . . . . .</b>	<b>45</b>
4.1 Relación carga-desplazamiento (Ley de Hooke) . . . . .	45
4.2 Matriz de flexibilidad de barras . . . . .	47
4.3 Matriz de rigidez de barras . . . . .	50
4.4 Transformaciones de flexibilidad y rigidez . . . . .	53
4.5 Desplazamientos de barras en cantiliver y obtención en función de estos de las fuerzas de fijación . . . . .	54
<b>Capítulo 5. Conceptos estructurales básicos . . . . .</b>	<b>63</b>
5.1 Clasificación de las estructuras (Conceptos generales) . . . . .	63
5.2 Continuidad y equilibrio . . . . .	67
<b>Capítulo 6. Método de los desplazamientos . . . . .</b>	<b>78</b>
6.1 Matriz de rigidez de una estructura . . . . .	78
6.2 Método de pendiente-deflexión . . . . .	123

6.3	Análisis con distintos tipos de solicitaciones . . . . .	132
6.4	Planteamiento matricial de algunos métodos iterativos . . . . .	164
<b>Capítulo 7.</b>	<b>Método de las fuerzas . . . . .</b>	<b>167</b>
7.1	Elección de la estructura primaria . . . . .	168
7.2	Partición de la matriz de equilibrio . . . . .	171
7.3	Matriz de flexibilidad de la estructura . . . . .	180
7.4	Análisis de estructuras diversas . . . . .	187
<b>Capítulo 8.</b>	<b>Temas especiales . . . . .</b>	<b>209</b>
8.1	Relación entre flexibilidades y rigideces y elección del método adecuado . . . . .	209
8.2	Rigidez de barras discontinuas . . . . .	209
8.3	Simplificación por simetría y antisimetría del sistema de solicitaciones . . . . .	219
8.4	Problemas especiales . . . . .	225
<b>Capítulo 9.</b>	<b>Nociones de análisis plástico en estructuras . . . . .</b>	<b>253</b>
9.1	Conceptos fundamentales . . . . .	253
9.2	Articulaciones plásticas . . . . .	254
9.3	Teorema fundamental . . . . .	250
9.4	Método del equilibrio . . . . .	258
<b>Bibliografía . . . . .</b>		<b>263</b>



---

# Capítulo 1

---

## Álgebra Matricial

### 1.1 DEFINICIÓN Y OPERACIONES ENTRE MATRICES

*Definición de Matriz:* Podemos decir que una matriz es una "tabla" o "arreglo rectangular" de elementos que, usualmente son números reales o complejos.

El concepto de matriz puede sin embargo extenderse, al caso en que los elementos sean polinomios, funciones, operadores o cualquier otro tipo de "entes matemáticos"; conservando su validez la mayoría de los conceptos y propiedades aquí presentados, y donde se considera a la matriz como un arreglo de números.

Comúnmente se representa a las matrices con letras mayúsculas y con minúsculas a sus elementos.

Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde  $[A]$  es una matriz de " $m$ " renglones por " $n$ " columnas. En forma abreviada:

$[A] = [a_{ij}]$  donde:

$i$  = Número del renglón correspondiente

$j$  = Número de la columna correspondiente

#### 1.1.1 Igualdad de matrices

Se dice que dos matrices son iguales cuando tienen los mismos elementos y estos se encuentran dispuestos de la misma manera en ambos arreglos. Esto es:

Sea,  $[A] = [a_{ij}]$  y  $[B] = [b_{ij}]$  Entonces:

$[A] = [B]$  si:  $a_{ij} = b_{ij}$

Donde:  $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

### 1.1.4 Multiplicación de matrices

Si  $[A]$  es una matriz de  $m \times r$  y  $[B]$  es una matriz de  $r \times n$ , el producto  $[A] \times [B]$  es la matriz de  $m \times n$  cuyos elementos se determinan de la manera siguiente: Para encontrar el elemento que está en el renglón  $i$ -ésimo y la columna  $j$ -ésima de  $[A] \times [B]$  se toma el renglón  $i$ -ésimo de la matriz  $[A]$  y la columna  $j$ -ésima de la matriz  $[B]$ , se multiplican los elementos correspondientes del renglón y la columna y después se suman todos los productos. Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{(2 \times 3)} ; [B] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{(3 \times 4)}$$

Entonces  $[A][B] = (2 \times 4)$ . La determinación de los elementos es como sigue.

Renglón 1, Columna 1 = Renglón 1 de  $[A]$  por columna 1 de  $[B]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{r} 1 \times 4 = 4 \\ + \\ 2 \times 0 = 0 \\ + \\ 4 \times 2 = 8 \end{array}$$

Resultado = 12

Renglón 2, Columna 1 = Renglón 2 de  $[A]$  por columna 1 de  $[B]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{r} 2 \times 3 = 6 \\ + \\ 6 \times 1 = 6 \\ + \\ 0 \times 2 = 0 \end{array}$$

Resultado = 12

Entonces:

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 12 & | & | & | \\ \hline | & | & | & | \\ \hline 12 & | & | & | \end{bmatrix}$$

Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 9 \\ 10 & 39 & -6 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 9 \\ 10 & 39 & -6 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Entonces: } [A] = [B]$$

### 1.1.2 Adición de matrices

Esta operación puede efectuarse cuando las matrices son del mismo orden y el resultado se obtiene sumando los elementos correspondientes de ambas matrices. Esto es:

Sea,  $[A] = [a_{ij}]$  y  $[B] = [b_{ij}]$  dos matrices de  $m \times n$ . La suma  $[A] + [B]$  es igual a:

$[S] = [s_{ij}]$  tal que:

$S_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ; para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

La adición de matrices satisface las siguientes propiedades:

Para  $[A]$ ,  $[B]$  y  $[C]$  matrices de  $m \times n$

- |                     |   |
|---------------------|---|
| — Asociatividad     | $[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C]$ |
| — Conmutatividad    | $[A] + [B] = [B] + [A]$                 |
| — Elemento idéntico | $[A] + [0] = [A]$                       |
| — Elemento inverso  | $[A] + (-[A]) = [0]$                    |

### 1.1.3 Multiplicación por un escalar

En ocasiones y particularmente desde el punto de vista de las aplicaciones, se requiere multiplicar una matriz por un número que genéricamente se le llama "escalar". Dicha operación se define así:

Sea,  $[A] = [a_{ij}]$  una matriz de  $m \times n$  y sea  $\beta$  un escalar cualquiera. Entonces:

$[E] = [e_{ij}] = \beta [A]$  de  $m \times n$  tal que:

$e_{ij} = \beta a_{ij}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Para todo  $[A]$ ,  $[B]$  matrices de  $m \times n$  se cumple que:

- $\beta ([A] + [B]) = \beta [A] + \beta [B]$
- $(\tau + \beta) [A] = \tau [A] + \beta [A]$
- $\tau (\beta [A]) = (\tau \beta) [A]$

Se llama *matriz identidad* de orden  $n$   $[I_n] = [a_{ij}]$  tal que:

$$a_{ij} = 1 \quad \text{Si } i = j$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{Si } i \neq j$$

Al igual que en el álgebra común, esta matriz tiene las mismas propiedades que el elemento identidad para la multiplicación. Esto es: Si  $[A]$  es una matriz de orden  $n$  entonces:

$$- [I_n][A] = [A]$$

$$- [A][I_n] = [A]$$

### 1.1.6 Transposición de una matriz

La transposición es una operación que transforma una matriz en otra, llamada su *transpuesta*, cuyos renglones son las columnas de la matriz original y cuyas columnas son los renglones de la matriz original. Con esto se tiene que:

Sea  $[A] = [a_{ij}]$  una matriz de  $m \times n$ . Se llama *transpuesta de  $[A]$*  a la matriz de  $n \times m$

$[A^T] = [c_{ij}]$  tal que  $c_{ij} = a_{ji}$  por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Las principales propiedades de la transposición se presentan a continuación:

$$- [A^T]^T = [A]$$

$$- (\beta[A])^T = \beta[A^T]$$

$$- ([A] + [B])^T = [A^T] + [B^T]$$

$$- ([A][B])^T = [B^T][A^T]$$

Los cálculos para los elementos restantes son:

$$R_1 C_2 = (1 \times 1) + (2 \times -1) + (4 \times 7) = 27 \quad \text{Y finalmente queda:}$$

$$R_1 C_3 = (1 \times 4) + (2 \times 3) + (4 \times 5) = 30$$

$$R_1 C_4 = (1 \times 3) + (2 \times 1) + (4 \times 2) = 13$$

$$R_2 C_1 = (2 \times 4) + (6 \times 0) + (0 \times 2) = 8$$

$$R_2 C_2 = (2 \times 1) + (6 \times -1) + (0 \times 7) = -4$$

$$R_2 C_3 = (2 \times 4) + (6 \times 3) + (0 \times 5) = 26$$

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

La condición fundamental para poder efectuar el producto  $[A][B]$  es que el número de columnas de  $[A]$  sea igual al número de renglones de  $[B]$ . Por ejemplo: Si  $[A] = (3 \times 2)$  y  $[B] = (2 \times 6)$ , entonces  $[A][B]$  se puede obtener. La definición formal de la multiplicación queda entonces así:

Sean  $[A] = [a_{ij}]$  y  $[B] = [b_{jk}]$  dos matrices  $m \times n$  y  $n \times q$  respectivamente.

El producto  $[A][B]$  es una matriz  $[P] = [p_{ij}]$  de  $m \times q$  tal que:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}; \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad \text{y} \quad j = 1, 2, 3, \dots, q$$

La multiplicación de matrices satisface las siguientes propiedades.

Sean  $[A]$ ,  $[B]$  y  $[C]$  matrices de  $m \times n$ ,  $n \times q$  y  $q \times p$ , respectivamente. Entonces:

$$- [A]([B][C]) = ([A][B])[C]$$

$$- [A][B] \neq [B][A]$$

Sea  $[D]$  una matriz de  $r \times n$ , y  $[B]$  y  $[C]$  de orden  $n \times q$

$$- [D]([B] + [C]) = [D][B] + [D][C]$$

### 1.1.5. Matriz identidad

Es una matriz de orden  $n$  de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que:

<sup>1</sup> En algunos casos, el producto se puede efectuar en un sentido pero no en el otro, digamos  $AB$  pero no  $BA$ . En otros casos la multiplicación puede efectuarse tanto en un sentido como en el otro, pero los resultados puede ser diferentes e iguales según las matrices de que se traten si  $AB = BA$ . Las matrices se llaman permutables. (Eduardo Solís González).

La transposición da lugar a dos tipos de matrices especiales, cuadradas, como se establece a continuación:

Sea  $[A]$  una matriz de  $n \times n$ . Se dice que:

- $[A]$  es simétrica si  $[A^T] = [A]$
- $[A]$  es antisimétrica si  $[A^T] = -[A]$

Veamos ahora las características de los elementos de una matriz simétrica y de una antisimétrica. Para el primer caso:

$$[a_i] = [a_j] \quad \text{Esto es: } a_i = a_j$$

Es decir, los elementos "simétricos" con respecto a la diagonal principal son iguales. Ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{cases} a_{12} = a_{21} = 6 \\ a_{13} = a_{31} = 3 \\ a_{23} = a_{32} = -2 \end{cases}$$

Para el segundo caso tenemos que:

$$[a_i] = [-a_j] \quad \text{o sea } a_i = -a_j$$

Es decir, los elementos "simétricos" respecto a la diagonal principal deben ser, uno el negativo del otro. Además de la expresión anterior se tiene, para  $i = j$ , que:

$$\text{Si } a_i = -a_j \Rightarrow a_i = 0$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -11 \\ -6 & 0 & 4 \\ 11 & -4 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{cases} a_{12} = -a_{21} = 6 \\ a_{13} = -a_{31} = -11 \\ a_{23} = -a_{32} = 4 \end{cases}$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

Las matrices simétricas y antisimétricas tienen entre otras las siguientes propiedades:

Si  $[A]$  y  $[B]$  son dos matrices simétricas (antisimétricas) de  $n \times n$  y  $\beta$  es un escalar, entonces:

- $[A] + [B]$  es simétrica (antisimétrica)
- $\beta [A]$  es simétrica (antisimétrica)

Para cualquier matriz  $[A]$  de  $n \times n$

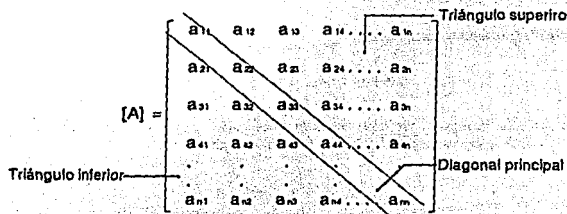
- $[A] + [A^T]$  es simétrica
- $[A] - [A^T]$  es antisimétrica

### 1.1.7 Tipos especiales de matrices cuadradas

Las matrices cuadradas desempeñan un papel muy importante en la teoría de matrices, especialmente en lo que se refiere a sus aplicaciones. Es por eso que se establece cierta terminología especial para este tipo de matrices, de la cual nos ocupamos en esta sección.

- **Diagonal principal:** Está constituida por los elementos  $a_{ij}$  tales que  $i = j$ , es decir, por los elementos de la forma  $a_{ii}$  (en una matriz cuadrada, la diagonal que va de izquierda a derecha y de arriba a abajo)
- **Triángulo superior:** Constituido por los elementos  $a_{ij}$  tales que  $i < j$ . Estos elementos se encuentran situados por arriba de la diagonal principal.
- **Triángulo inferior:** Constituido por los elementos  $a_{ij}$  tales que  $i > j$ . Estos elementos se encuentran situados por abajo de la diagonal principal.

Los tipos especiales de matrices cuadradas que veremos en esta sección se refieren a la naturaleza y disposición de los elementos de acuerdo con estas tres regiones.



Sea  $[A] = [a_{ij}]$  una matriz de  $n \times n$ . Se dice que:

- $[A]$  es una matriz triangular superior si  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$
- $[A]$  es una matriz triangular inferior si  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$

Tal que:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] \\
 \text{Triangular superior} & & \text{Triangular Inferior}
 \end{array}$$

Entonces:

Si  $\{A\}$  y  $\{B\}$  son dos matrices triangulares (superior o inferior) del mismo orden y  $\beta$  un número cualquiera se cumple que:

- $\{A\} + \{B\}$  Es triangular (superior o inferior)
- $\beta \{A\}$  Es triangular (superior o inferior)
- $\{A\} \{B\}$  Es triangular (superior o inferior)

Una matriz que es triangular superior e inferior a la vez; esto es, una matriz cuyos elementos situados fuera de la diagonal principal son todos nulos, recibe el nombre de matriz diagonal.

Sea  $\{A\} = \{a_{ij}\}$ . Una matriz de  $n \times n$ . Se dice que  $\{A\}$  es una matriz diagonal si  $a_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$  y se representan como:

$$\text{Diag} (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$$

Si  $\{A\}$  y  $\{B\}$  son dos matrices diagonales tales que:

$$\{A\} = \text{Diag} (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}) \text{ y } \{B\} = \text{Diag} (b_{11}, b_{22}, b_{33}, \dots, b_{nn})$$

$\gamma$   $\beta$  es un escalar cualquiera entonces:

$$\begin{aligned} - \{A\} + \{B\} &= \text{Diag} [a_{11} + b_{11}, a_{22} + b_{22}, a_{33} + b_{33}, \dots, a_{nn} + b_{nn}] \\ - \beta \{A\} &= \text{Diag} [\beta a_{11}, \beta a_{22}, \beta a_{33}, \dots, \beta a_{nn}] \\ - \{A\} \{B\} &= \text{Diag} (a_{11} b_{11}, a_{22} b_{22}, a_{33} b_{33}, \dots, a_{nn} b_{nn}) \\ - \{A\}^{-1} &= \text{Diag} \left( \frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \frac{1}{a_{33}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}} \right) \end{aligned}$$

### 1.1.8. Inversa de una matriz

El problema de resolver un sistema de ecuaciones lineales se puede reducir a resolver una ecuación matricial de la forma  $\{A\} \{X\} = \{B\}$ , donde  $\{X\}$  es la incógnita. Esta ecuación matricial es análoga a la ecuación numérica.  $a x = b$ , la cual se puede resolver (si  $a \neq 0$ ) multiplicando en ambos lados por el recíproco (o inverso multiplicativo) de  $a$ , obteniendo  $x = a^{-1} b$ .

Sea  $\{A\}$  una matriz de  $n \times n$ . Una matriz  $\{X\}$  se dice que es la inversa de  $\{A\}$  si:

$$\{X\} \{A\} = \{A\} \{X\} = \{I_n\}$$

$\{X\}$  se representa como  $\{A\}^{-1}$

Cabe hacer notar que la igualdad,  $\{X\} \{A\} = \{A\} \{X\}$ , solo es posible cuando  $\{A\}$  y  $\{X\}$  son matrices cuadradas del mismo orden; en consecuencia, para que una matriz  $\{A\}$  tenga inversa es condición necesaria que sea cuadrada. Además, la inversa deberá ser también cuadrada y del mismo orden



que  $[A]$ . Debe señalarse, sin embargo, que no todas las matrices tienen inversa, por lo que, a las matrices que tienen inversa las llamamos "no singulares"<sup>2</sup> y a las que no tienen inversa singulares.

La inversa de una matriz tiene las siguientes propiedades:

Sean  $[A]$  y  $[B]$  dos matrices no singulares del mismo orden y  $\beta$  un escalar.

Entonces:

- $[A]^{-1}$  es única
- $([A]^{-1})^{-1} = [A]$
- $([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}$
- $(\alpha[A])^{-1} = \frac{1}{\alpha}[A]^{-1}$  si  $\alpha \neq 0$

A continuación se ilustra un método para obtener la inversa de una matriz, para lo cual se tienen las siguientes definiciones:

— Menor de un elemento. Se obtiene eliminando el renglón y la columna de la matriz que contiene ese elemento.

Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \text{ menor de } a_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; \text{ menor de } b_{22} = [b_{11}]$$

— Cofactor de un elemento. Se define como el menor del elemento precedido por un signo (+) ó (-). El signo por utilizar depende de la posición del elemento en la matriz. Cuando la suma de sus subíndices de columna y renglones es un número par, se antepone el signo (+); si tal suma es impar, se antepone el signo (-), un cofactor se simboliza a menudo con una letra mayúscula, testada y con subíndices.

Por ejemplo:

$$\text{Cofactor de } a_{21} = A_{21} = (-) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

<sup>2</sup> Matriz singular: es aquella matriz que no es regular, y, para que una matriz sea regular, es necesario y suficiente que su determinante sea distinto de cero si el determinante asociado de una matriz, es distinto de cero. Los vectores de que está compuesta se dice que son "linealmente independientes".

$$\text{Cofactor de } a_{13} = \bar{A}_{13} = (+) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

— *Adjunta de una matriz.* Es la matriz que se obtiene reemplazando cada uno de sus elementos por su cofactor, y transponiendo luego dicha matriz. La adjunta de una matriz  $[A]$  se simboliza por  $[A']$ .

Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [A'] = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

La inversa de una matriz puede determinarse a partir de la siguiente expresión; que establece que es igual a la adjunta dividida entre el valor del determinante respectivo.

$$[A]^{-1} = \frac{\text{Adjunta de } [A]}{|A|} = \frac{1}{|A|} [A']$$

Donde  $|A|$  = Determinante de  $[A]$

Ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Si: } [A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 6/10 & -2/10 \\ -4/10 & -3/10 \end{bmatrix}$$

Este método se presenta solamente como introducción del tema, ya que; para matrices mayores de  $3 \times 3$  ó  $4 \times 4$ , se necesitaría un gran número de operaciones, con lo cual se vuelve impráctico dicho método. Si se quiere ahondar en el estudio de este tema se tendrá que recurrir a algún libro de álgebra matricial.

**1.1.9. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales**

Con base en las definiciones de igualdad y multiplicación de matrices, un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas (lineales), puede quedar representado por la expresión:

$$[A] \{X\} = \{B\}$$

Donde  $[A]$  es una matriz de  $n \times n$  que se conoce como "matriz de coeficiente" del sistema,  $\{X\}$  es una matriz de  $n \times 1$  conocida como "vector de incógnitas" y  $\{B\}$  es una matriz de  $n \times 1$  conocida como "vector de términos" independientes.

Esta ecuación puede resolverse premultiplicando por  $[A]^{-1}$  cuando  $[A]$  sea una matriz no singular, tal que:

$$[A]^{-1} ([A] \{X\}) = [A]^{-1} \{B\}$$

$$([A]^{-1} [A]) \{X\} = [A]^{-1} \{B\}$$

$$[I] \{X\} = [A]^{-1} \{B\}$$

$$\{X\} = [A]^{-1} \{B\}$$

Así, por ejemplo; el sistema de ecuaciones lineales

$$X_1 + 3X_3 = 2$$

$$X_2 - 2X_3 = -1$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 3$$

Puede expresarse en forma matricial como  $[A] \{X\} = \{B\}$ , donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \{X\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \{B\} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Procedemos ahora a encontrar  $[A]^{-1}$  (si existe) tal que:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia

$$\{X\} = [A]^{-1} \{B\} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Es la solución del sistema; es decir:

$$X_1 = -4$$

$$X_2 = 3$$

$$X_3 = 2$$

### 1.1.10. Notación de matrices

Las matrices cuadradas o rectangulares se indican encerrando una letra mayúscula dentro de paréntesis angulares.

Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Una matriz columna se indica encerrando una letra mayúscula dentro de paréntesis curvos o llaves.

Por ejemplo:

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{Bmatrix}$$

En lo sucesivo tomaremos esta simbología para referirnos a los sistemas matriciales.

## 1.2. MATRICES PARTICIONADAS

En ciertos casos puede ser útil "subdividir" las matrices con objeto de simplificar algunos cálculos o para cambiar la presentación de un problema, surge así el concepto de partición de matriz; sin embargo, es conveniente introducir antes los conceptos de submatriz e hipermatriz para facilitar la comprensión del concepto de partición.

— **Submatriz e hipermatriz.** Si  $[A]$  es una matriz de  $m \times n$ , se llama "submatriz de  $[A]$ " a cualquier matriz que pueda obtenerse a partir de  $[A]$  supliendo en esto algunas regiones o columnas. Por ejemplo, si en la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Suprimimos el tercer renglón y la segunda y cuarta columna, se obtiene la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Que es una submatriz de  $[A]$ .

A continuación presentamos como ejemplo, algunas submatrices de  $[A]$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[a_{11} \ a_{12}] \ [a_{21}]$$

Se conoce como hipermatriz a un arreglo rectangular de matrices; es decir, a una especie de matriz cuyos elementos son matrices. Por ejemplo, las matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix}; [C] = [c_{11} \ c_{12}]; [D] = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}$$

Pueden ser representadas en un arreglo de la siguiente manera:

$$[H] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Con lo que se obtiene una hipermatriz. Esta hipermatriz también puede expresarse en términos con los elementos de  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  y  $[D]$ , como sigue:

$$[H] = \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ \hline a_{31} & a_{32} & d_{11} \\ \hline c_{11} & c_{12} & d_{21} \end{array} \right]$$

### 1.2.1. Partición de una matriz

Consideremos ahora la matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}$$

Y expresémosla como una hipermatriz, agrupando sus elementos en submatrices de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}$$

Hemos formado con ello la hipermatriz:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; [A_{12}] = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}; [A_{13}] = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}; [A_{21}] = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{bmatrix}$$

$$[A_{22}] = \begin{bmatrix} a_{33} \\ a_{43} \\ a_{53} \end{bmatrix}; [A_{23}] = \begin{bmatrix} a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \end{bmatrix}$$

Dicha hipermatriz se dice que es una "partición" de la matriz  $[A]$ . Otra partición de la misma matriz puede ser la siguiente:

$$\begin{array}{|cccc|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix}$$

Donde se tiene ahora solo dos submatrices.

En términos generales puede decirse que una partición de una matriz es la expresión de esta como una hipermatriz, mediante la agrupación de sus elementos en submatrices; sin embargo, no cualquier clase de hipermatriz se considera como una partición. Solo se aceptan como tales aquellas en que:

- Todas las submatrices que integran un mismo renglón (de la hipermatriz) tienen el mismo número de renglones.
- Todas las submatrices que integran una misma columna tienen el mismo número de columnas.

Así, una hipermatriz como

$$[H] = \begin{array}{|cc|c|} \hline a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ a_{31} & a_{32} & d_{11} \\ \hline c_{11} & c_{12} & d_{21} \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

No es una partición de la matriz  $[H]$ , puesto que las submatrices  $[A]$  y  $[B]$  no tienen el mismo número de renglones, como tampoco lo tienen las matrices  $[C]$  y  $[D]$ . En consecuencia, toda partición de una matriz  $m \times n$  deberá ser de la forma:

$$\begin{array}{l} m_1 \text{ renglones } \{ \\ m_2 \text{ renglones } \{ \\ m_3 \text{ renglones } \{ \\ m_4 \text{ renglones } \{ \end{array} \begin{array}{|cccc|} \hline A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \hline A_{41} & A_{42} & A_{43} & \dots & A_{4n} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Donde:} \\ m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_s = m \\ n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_t = n \end{array}$$

Así, para la primer partición que se presentó tenemos que:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

En donde  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 3$  y  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$ ,  $n_3 = 1$ . Por lo que se trata de la partición de  $[A]$  inducida por los números  $(2, 3)$  y  $(2, 1, 1)$ . En dicha partición la matriz  $[A_{21}]$ , por ejemplo; es una matriz de  $m_2 \times n_1$  (es decir de  $3 \times 2$ ) definida por

$$[A_{21}] = [a_{ij}] \quad \text{con: } i=3, 4, 5 \\ j=1, 2$$

## 1.2.2 Operaciones de matrices por partición

Una vez que se han determinado las particiones, con las hipermatrices obtenidas pueden efectuarse operaciones como si se tratara de matrices cuyos elementos son las submatrices correspondientes, siempre que estas últimas sean conformables para todas las operaciones requeridas.

Veamos primero unos ejemplos relativos a la adición y a la multiplicación por una escalar, y para ello consideremos las matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Si establecemos las siguientes particiones para  $[A]$  y  $[B]$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 7 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ \hline -3 & 1 & 6 & -3 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Y sumamos las hipermatrices como si estas fueran matrices. Se obtiene



$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos la hipermatriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ \hline -3 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right] = [A] + [B]$$

La cual constituye a su vez la partición de  $[A] + [B]$ , como puede verificarse fácilmente sumando las matrices  $[A]$  y  $[B]$ .

Consideremos ahora el escalar  $-1$ . Si lo multiplicamos por la hipermatriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 7 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Como si esto fuera una matriz. Se obtiene

$$-1 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1A_{11} & -1A_{12} \\ -1A_{21} & -1A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Que es una partición de  $-1[A]$ .

De mayor utilidad práctica resulta el caso de la multiplicación de matrices por partición. El producto puede obtenerse multiplicando las hipermatrices como si estas fueran matrices, siempre que las correspondientes submatrices sean conformables para las operaciones a efectuar con ellas. Por ejemplo, consideremos las matrices

$$[A] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 7 \end{array} \right] \text{ y } [B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ \hline -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Si establecemos la siguiente partición para  $[A]$  y  $[B]$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 7 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} ; \quad \left[ \begin{array}{ccc} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Y multiplicamos las submatrices como si fueran matrices, se obtiene

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} & A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} \\ A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} & A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$[A_{11}][B_{11}] + [A_{12}][B_{21}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[A_{11}][B_{12}] + [A_{12}][B_{22}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} [0 \ 0] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[A_{21}][B_{11}] + [A_{22}][B_{21}] = [0 \ -2 \ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + [7][1] = [0] + [7] = [7]$$

$$[A_{21}][B_{12}] + [A_{22}][B_{22}] = [0 \ -2 \ 0] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + [7][0 \ 0] =$$

$$[-6 \ 4] + [0 \ 0] = [-6 \ 4]$$

Por lo que se llega a la hipermatriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & 9 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [A][B] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & 9 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Si se desea obtener la transpuesta de una partición de matriz, primero se trata la matriz como si no fuera una partición y se intercambian las filas y las columnas al igual que en el proceso común de transposición. Luego se vuelven a establecer las líneas de partición en la matriz transpuesta y se verifica que cada una de sus matrices sea la transpuesta de la submatriz correspondiente en la matriz original. Por tanto, la submatriz  $[A_{ij}]$  localizada en la posición  $(i, j)$  de la matriz particionada aparece como su transpuesta en la posición  $(j, i)$  de  $[A^T]$ . Entonces, la transpuesta de la matriz correspondiente a la definición de partición de una matriz se puede expresar como:

$$[A^T] = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T & \dots & A_{2n}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T & \dots & A_{3n}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & A_{n3}^T & \dots & A_{nn}^T \end{bmatrix}$$

### 1.2.3 Inversa de una matriz particionada

Supongamos que se tiene la matriz  $[A]$  de la que se quiere determinar su inversa. Es posible dividirla en submatrices de orden menor y así determinar su inversa con el procedimiento siguiente.

Considerese el sistema de ecuaciones:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (1)$$

En el que  $[A]$  es la matriz por invertir y  $\{B\}$  un vector cualquiera de términos independientes. Si  $A_{22}$  representa una submatriz de  $[A]$  con inversa conocida, formada por algunos de los últimos renglones de  $[A]$ , y el mismo número de las últimas columnas de  $[A]$ , la ecuación matricial anterior se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

En donde, fijada la posición de la submatriz  $A_{22}$  en  $[A]$ , quedan obligadas las de las otras submatrices que aparecen en (2). De esta manera, si  $A_{22}$  resulta ser de orden  $m \times m$ , el vector  $X_2$  contendrá los últimos  $m$  elementos de  $[X]$  y el vector  $B_2$  también tendrá los últimos  $m$  elementos de  $[B]$ .

Para resolver este sistema matricial se harán las operaciones matriciales indicadas en el producto e igualdad, teniendo en cuenta que los elementos matriciales son a su vez matrices. Se tiene:

$$A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = B_1 \quad (3)$$

$$A_{21} X_1 + A_{22} X_2 = B_2 \quad (4)$$

Despejando el vector  $X_2$  de (4) se obtiene:

$$X_2 = A_{22}^{-1} (B_2 - A_{21} X_1) \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3) y despejando el vector  $X_1$  se tiene:

$$X_1 = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) \quad (6)$$

Para facilitar la notación de esta última expresión se hará

$$C = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \quad (7)$$

$$D = A_{12} A_{22}^{-1} \quad (8)$$

Con lo que (6) queda como:

$$X_1 = C^{-1} (B_1 - DB_2) \quad (9)$$

Llevando ahora (9) a (5) se obtiene:

$$X_2 = A_{22}^{-1} A_{21} C^{-1} B_1 + (A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} C^{-1} D) B_2 \quad (10)$$

Haciendo en esta última expresión

$$E = A_{22}^{-1} A_{21} \quad (11)$$

$$F = A_{22}^{-1} + EC^{-1}D \quad (12)$$

Se puede escribir (10) como:

$$X_2 = -EC^{-1}B_1 + FB_2 \quad (13)$$

Resumiendo la expresión (9) y (13) la solución del sistema (2) queda:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1} & -C^{-1}D \\ -EC^{-1} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Por lo que la inversa de la matriz  $[A]$  es:

$$[A]^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|cc} & C^{-1} & -C^{-1}D & \\ \hline -EC^{-1} & & F & \end{array} \right]$$

Donde  $C$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$  están ya definidas.

Ejemplo: Calcular la inversa de la siguiente matriz por partición de matrices

$$[A] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 8 & -4 & 2 & 1 \\ \hline -4 & 9 & -5 & 3 \\ \hline 2 & -5 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \end{array} \right] \quad \text{a)}$$

Dividiendo la matriz como en a) nos queda que:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.021 \\ 0.021 & 0.170 \end{bmatrix} \quad \text{b)}$$

De la ecuación (7) se tiene que:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.128 & 0.021 \\ 0.021 & 0.170 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.234 & -3.255 \\ -3.255 & 4.915 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0.197 & 0.130 \\ 0.130 & 0.290 \end{bmatrix} \quad \text{c)}$$

De (8), teniendo en cuenta b) se obtiene:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.128 & 0.021 \\ 0.021 & 0.170 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.277 & 0.213 \\ -0.574 & 0.404 \end{bmatrix} \quad \text{d)}$$

Luego:

$$-C^{-1}D = \begin{bmatrix} 0.197 & 0.130 \\ 0.130 & 0.290 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.277 & 0.213 \\ -0.574 & 0.404 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.020 & -0.094 \\ 0.130 & -0.450 \end{bmatrix} \quad \text{e)}$$

De (11), teniendo en cuenta b) nos queda

$$E = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.021 \\ 0.021 & 0.170 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.277 & -0.574 \\ -0.213 & 0.404 \end{bmatrix}$$

Luego

$$-EC^{-1} = - \begin{bmatrix} 0.277 & -0.574 \\ 0.213 & 0.404 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.197 & 0.130 \\ 0.130 & 0.290 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.020 & 0.130 \\ -0.094 & -0.450 \end{bmatrix} \quad \text{f)}$$

Finalmente

$$F = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.021 \\ 0.021 & 0.170 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.277 & -0.574 \\ 0.213 & 0.404 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.197 & 0.130 \\ 0.130 & 0.290 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.277 & 0.213 \\ -0.574 & 0.404 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.197 & -0.036 \\ -0.036 & 0.245 \end{bmatrix} \quad \text{g)}$$

Sustituyendo c), e), f) y g) se obtiene

$$[A]^{-1} = \begin{array}{cc|cc} 0.197 & 0.130 & 0.020 & -0.094 \\ 0.130 & 0.290 & 0.130 & -0.145 \\ \hline 0.020 & 0.130 & 0.197 & -0.036 \\ -0.094 & -0.145 & -0.036 & 0.245 \end{array}$$

### 1.3 USO DE PROGRAMAS

Actualmente existen en el mercado de la computación un número considerable de paquetes o programas elaborados específicamente para resolver problemas de análisis estructural. En la referencia 14 de la

bibliografía que se utilizó en este trabajo, se presentan varios programas en lenguaje BASIC. Uno llamado "Flex", que utiliza el método de flexibilidades en la resolución de armaduras y marcos planos. Otro llamado "Rigideces", que da los desplazamientos en los nudos de armaduras planas. El último se llama RIGIDIM, y da el vector de desplazamientos en armaduras tridimensionales.

Sin embargo, para este trabajo se recomienda algún paquete de operaciones matriciales solamente ya que los programas antes señalados, por su forma de estructuración no requieren mucho conocimiento de análisis estructural y pueden ser utilizados incluso por un capturista. Dado el objetivo de este trabajo, que es familiarizar al lector con el análisis estructural matricial, no se recomienda utilizar los programas antes mencionados hasta no tener un conocimiento claro de la materia.

El programa de operaciones matriciales que se utilice deberá realizar por lo menos las siguientes operaciones:

- Suma de matrices
- Multiplicación por una escalar
- Multiplicación entre matrices
- Transposición de matrices
- Inversión de matrices

Se recomienda también adquirir la codificación del método de "Cholesky" para resolver ecuaciones simultáneas que, por sus características, es el indicado para obtener la solución de los sistemas de ecuaciones simultáneas que se obtienen tanto para el método de rigideces como el de flexibilidades. ■

---

## Capítulo 2

---

### Análisis introductorio

#### 2.1 DEFINICIONES FUNDAMENTALES, PRINCIPIOS BÁSICOS Y SOLUCIÓN POR LOS MÉTODOS GENERALES Y DE ANÁLISIS

Se han desarrollado métodos de la teoría de la elasticidad para su aplicación a un cuerpo cuyo material está uniformemente repartido sobre un volumen de una forma específica dada y que está apoyado y posteriormente cargado y/o deformado de una manera determinada. Se supone que el material es homogéneo, isotrópico y linealmente elástico. Para ese problema específico se quiere calcular el estado de las fuerzas, deformaciones y desplazamiento a lo largo del cuerpo.

A objeto de la resolución matemática de esos problemas, es necesario referir los puntos y partes del cuerpo respecto a algún sistema de ejes coordenados apropiados  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  será el que utilizemos.

Las fuerzas exteriores que actúan en un cuerpo son de dos tipos: Fuerzas de superficie y fuerzas de volumen. El aislar una parte de un cuerpo y considerar su equilibrio demuestra la existencia de las fuerzas internas en las caras internas de esa sección. En la figura 2-1, se presenta la notación y el criterio utilizado para describir las fuerzas interiores y exteriores. En todos los casos las fuerzas están representadas en sus sentidos positivos. Para los trozos diferenciales aislados, como el representado en sus sentidos positivos, la variación de intensidad en una superficie (o volumen) diferencial, es tan pequeña que se puede representar la fuerza total en una superficie (o volumen) por la intensidad en el centro de la cara (o volumen) multiplicada por la sección de la cara (o volumen del trozo).

Las fuerzas de superficie están repartidas sobre la superficie del cuerpo y se pueden descomponer en tres componentes coordenadas, cuyas intensidades (fuerza por unidad de superficie) se representan por  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Las fuerzas de volumen están repartidas en el volumen del cuerpo; pueden estar producidas por la gravedad, magnetismo o aceleración (fuerza de inercia) y se pueden representar por tres componentes coordenadas, cuyas intensidades (fuerza por unidad de volumen) están expresadas por  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Se observará que el sentido positivo de los componentes de las fuerzas de superficie o de volumen es el mismo que para los correspondientes ejes coordenados.

La fuerza interna resultante repartida sobre una cara interior, se puede descomponer en los componentes; una componente normal a la cara y una componente tangencial o de cortante, paralela a ella. Generalmente esta última se vuelve a descomponer en dos componentes en el plano de la cara. A las intensidades (fuerza por unidad de superficie) de las componentes normal y de corte se las llama respecti-



vamente fuerza normal  $\sigma$  y fuerza tangencial o fuerza cortante  $\tau$ ; de ordinario, la fuerza en un punto se define especificando las fuerzas normales y de corte en los tres planos coordenados  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  que pasan por ese punto, perpendiculares a los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  respectivamente.

Con  $\sigma$  se usa un subíndice para expresar el plano en el que actúa la fuerza normal; así  $\sigma_y$  expresa la fuerza normal en un plano perpendicular al eje  $Y$ . Estas fuerzas se consideran positivas cuando son de tensión.

Con  $\tau$  se usan dos subíndices, el primero de los cuales indica el plano en que actúa y el segundo la dirección en este plano; así,  $\tau_{xy}$  indica la fuerza cortante en el plano  $X$  que actúa paralelamente al eje  $Y$ . Las fuerzas se consideran positivas cuando actúan en las direcciones coordenadas positivas de la cara más positiva del elemento de volumen.

Como consecuencia de la deformación, se desplazan los puntos de un cuerpo. Los desplazamientos de un punto se pueden representar por sus tres componentes coordenadas  $u$ ,  $v$ ,  $w$  en las direcciones  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  respectivamente. Las componentes de un desplazamiento se consideran positivas en el sentido positivo del eje coordenado correspondiente.

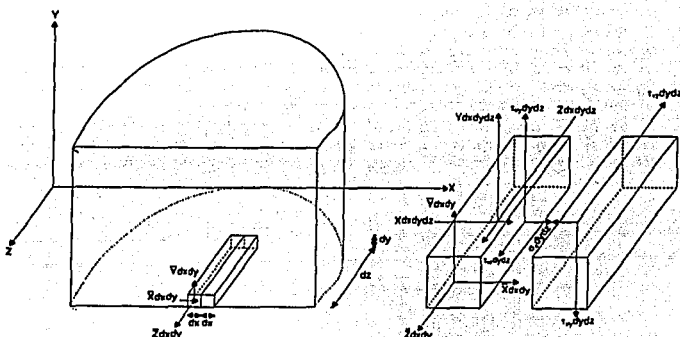


Figura 2-1. Notación y criterio de intensidad de fuerzas.

Una vez definidos los desplazamientos de todos los puntos, es fácil calcular las deformaciones. La deformación lineal de un elemento lineal se representa por  $\epsilon$  y se considera positiva cuando es un alargamiento. Con  $\epsilon$  se utiliza un subíndice para expresar la dirección primitiva del elemento que interviene.

La variación del ángulo recto entre dos elementos lineales originalmente perpendiculares se llama deformación angular o deformación de cortante, entre esos elementos y se representa por  $\gamma$ , considerándola positiva cuando se reduce el ángulo recto original entre la prolongación positiva de estos elementos lineales.

Es fácil ver que se pueden calcular las fuerzas normal y cortante en cualquier plano que pasa por un punto, si se conocen la fuerza normal y dos componentes de fuerza tangencial en cada uno de tres planos perpendiculares entre sí (tres planos ortogonales) en un punto. Por tanto, parece que para definir el estado de fuerzas en cada punto, es necesario conocer nueve componentes de fuerza (tres en cada uno de los tres planos). Sin embargo, es fácil demostrar que sólo hay en cada punto seis componentes independientes.

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$$

Pero:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Así, resulta evidente que sólo hay seis componentes de fuerza independientes en cada punto: tres fuerzas normales  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  y tres fuerzas cortantes  $\tau_{xy} (= \tau_{yx}), \tau_{xz} (= \tau_{zx})$  y  $\tau_{yz} (= \tau_{zy})$ .

Una vez conocidos los desplazamientos por  $u, v, w$  en todos los puntos de un cuerpo, es fácil calcular por simples consideraciones geométricas cualquier aspecto de la deformación del mismo. Tales cálculos son especialmente sencillos si los desplazamientos son pequeños de modo que sean válidas las hipótesis de ángulos pequeños ( $\alpha \cong \text{Sen } \alpha \cong \tan \alpha$  y  $\text{Cos } \alpha \cong 1$ ) y se pueden despreciar los cuadrados de las primeras derivadas, en comparación con las propias derivadas primeras.

Por ejemplo, consideremos la figura 2-2, hay tres elementos lineales en el punto O: OA, OB y OC. Después de la deformación, estos elementos se han movido hasta las posiciones O'A', O'B' y O'C', habiéndose exagerado enormemente su magnitud para aclarar la figura. Obsérvese que, si los desplazamientos del punto O son  $u, v, w$  los de A, B, C son:

$$\text{Punto A: } u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; v + \frac{\partial v}{\partial x} dx; w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

$$\text{Punto B: } u + \frac{\partial u}{\partial y} dy; v + \frac{\partial v}{\partial y} dy; w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

$$\text{Punto C: } u + \frac{\partial u}{\partial z} dz; v + \frac{\partial v}{\partial z} dz; w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Por la pequeñez de los desplazamientos las verdaderas longitudes de los elementos tales como O'A' y O'C' y los ángulos entre ellos, se verán prácticamente en la proyección de esas líneas sobre el plano XZ. En esa proyección, por ejemplo, es evidente que la variación de longitud de OA,  $\Delta(OA)$  es prácticamente

$$\Delta(OA) = O'A' - OA = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Por lo tanto, el alargamiento unitario o deformación lineal de este elemento que era originalmente paralelo al eje X se llama  $\epsilon_x$  y es igual a  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Del mismo modo, la variación de ángulo entre los elementos OA y OC, originalmente perpendicular,  $\Delta(\angle AOC)$ , es

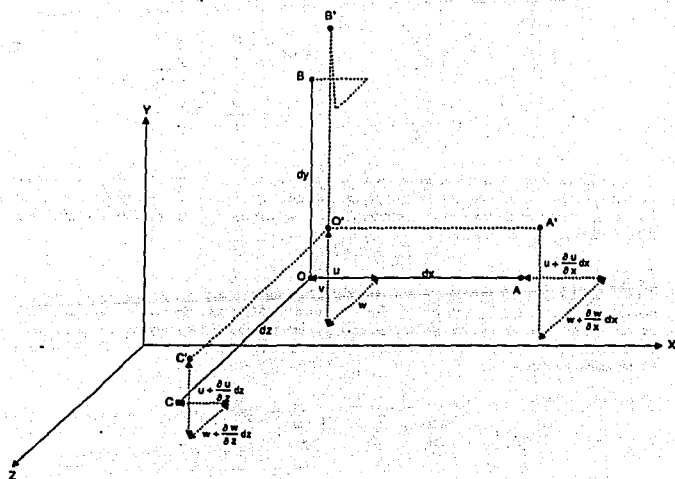


Figura 2-2. Relación geométrica entre desplazamientos y deformaciones

$$\Delta(\angle AOC) = \angle AOC - \angle A'O'C' = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Esta reducción del ángulo recto primitivo, entre esos dos elementos que eran paralelos a los ejes X y Z se llama deformación angular  $\gamma_{xz}$ , así, las seis componentes de la deformación en el punto O (tres deformaciones lineales y 3 angulares) se relacionan de dicho modo con los tres desplazamientos  $u, v, w$  por medio de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se observará que estas seis componentes de la deformación no son independientes, pues están expresadas en función solo de tres cantidades:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Esta interdependencia de las seis componentes de la deformación es muy importante. En la terminología de la literatura de la elasticidad se dice que las deformaciones deben ser compatibles.

### Equilibrio

En el estudio anterior de fuerzas solo se consideraron las relaciones de fuerzas en un punto. Ahora debemos considerar la variación de un punto al contiguo para establecer las exigencias del equilibrio entre las variaciones de las seis componentes de las fuerzas. Consideremos la partícula representada en la figura 2-3 y escribamos primero la ecuación del equilibrio de fuerzas en la dirección  $X$ ,  $\Sigma F_x = 0$ . Esta ecuación simplificada conduce a:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\
 \Sigma F_y &= 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\
 \Sigma F_z &= 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Estas tres ecuaciones son las llamadas ecuaciones diferenciales del equilibrio y deben ser satisfechas en todos los puntos del volumen de un cuerpo. Las fuerzas halladas de las ecuaciones 2.2, deben también estar en equilibrio con las fuerzas dadas en todas las partes del contorno del cuerpo.

### Ecuaciones fuerza - desplazamiento

Hasta ahora no se han introducido relaciones fuerza-deformación específicas. Estas relaciones se pueden estudiar en una forma matemática más rigurosa. Sin embargo, las siguientes se presentarán a base simplemente de la evidencia experimental concerniente a los materiales linealmente elásticos, homogéneos e isotrópicos. Esta evidencia muestra que una fuerza normal tal como  $\sigma_x$  produce una deformación lineal  $\sigma_x / E$  en la dirección  $X$ , deformaciones lineales  $\nu \sigma_x / E$  en las direcciones  $Y$  y  $Z$  y ninguna deformación angular entre los ejes  $X$  y  $Y$ ,  $X$  y  $Z$  o  $Y$  y  $Z$ . De igual forma, una fuerza cortante tal como  $\tau_{xy}$  producen solo una deformación angular  $\tau_{xy}$  y ninguna otra referente a los elementos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Así, se pueden escribir las 6 relaciones fuerza-deformación siguientes, superponiendo las acciones de las seis componentes de la deformación

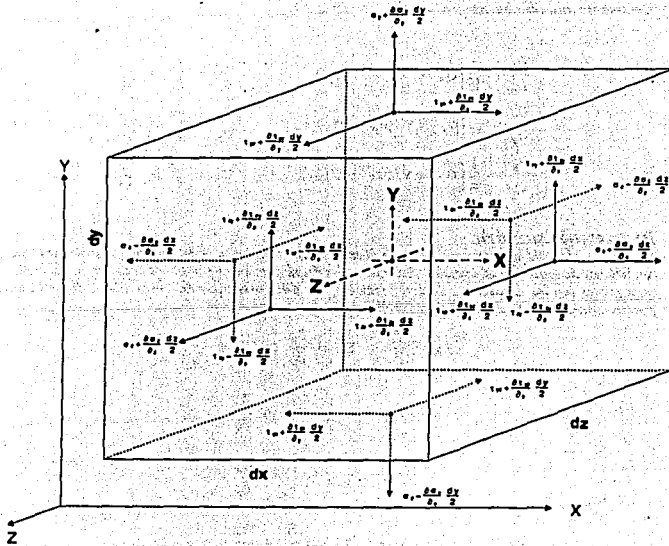


Figura 2-3. Consideraciones sobre el equilibrio de una partícula.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Donde

$E$  = Módulo de elasticidad longitudinal tensión-compresión

$\nu$  = Coeficiente de Poisson

$G = E/2(1 + \nu)$  = Módulo de elasticidad transversal o en corte

Las relaciones fuerza-deformación anteriores se pueden convertir en las ecuaciones fuerza-desplazamiento buscadas, sustituyendo en las ecuaciones 2.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad 2.4$$

### Interpretación matricial.

— Continuidad. Al aplicar un sistema de fuerzas a una estructura, esta se deforma pero conserva las condiciones de continuidad iniciales. Así mismo, los desplazamientos finales en la estructura deberán ser compatibles con las condiciones de deformación de los diferentes tipos de apoyos (las deformaciones se pueden obtener a partir de los desplazamientos)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad 2.5$$

Entonces:

Operador (matriz) de deformación-desplazamiento  
(matriz de continuidad)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\{e\} = [Ia] \{d\}$$

<sup>3</sup> Módulo de Poisson: Expresa la relación que existe entre el esfuerzo que se produce a un cuerpo elástico y las deformaciones que dicho cuerpo experimenta, perpendiculares a la dirección del esfuerzo.

— Ley de Hooke. De acuerdo con los objetivos del análisis estructural es necesario conocer, para una estructura geométrica definida, la relación que existe entre las fuerzas que se le aplican y los desplazamientos que esta tiene.

Si se observa la siguiente figura se deduce que la relación entre fuerzas y desplazamientos puede ser o no lineal.

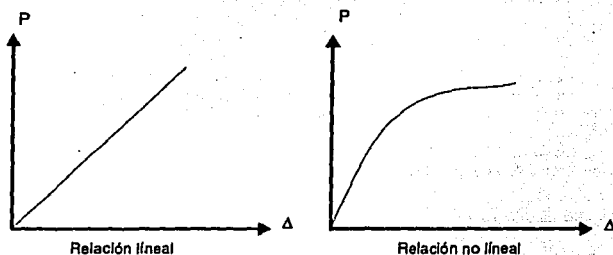


Figura 2-4

En general, se supone la hipótesis de que la relación entre fuerzas y desplazamientos es lineal, por lo que se puede aplicar a las estructuras el principio de superposición.

Dicho principio establece, que los efectos que produce un sistema de fuerzas aplicado a una estructura, son equivalentes a la suma de los efectos producidos por cada una de las fuerzas del sistema actuando independiente. Por lo anterior podemos decir entonces, que la estructura en estudio tiene un comportamiento elástico-lineal. Siendo así, podemos escribir las igualdades, ecuaciones 2.3 en forma matricial como:

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} \\ \text{(e)} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{array} \right\} \\ \text{(S)} \end{matrix} \quad 2.6$$

Donde:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Módulo de cortante}$$

$$E = 2G(1+\nu) \quad \text{Módulo de elasticidad}$$

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad \text{Módulo de Poisson}$$

- **Equilibrio.** Una estructura sujeta a un sistema de acciones externas definido, estará en equilibrio si las reacciones de la misma cumplen las condiciones de equilibrio que son:

En el espacio		En el plano
$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma M_x = 0$	$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma M_y = 0$	$\Sigma F_y = 0$
$\Sigma F_z = 0$	$\Sigma M_z = 0$	$\Sigma M = 0$

De esta forma, si se cumplen las condiciones mencionadas, bajo la acción del sistema de fuerzas externo y el sistema de reacciones, la estructura está en equilibrio. Los elementos que forman la estructura estarán sujetos a fuerzas internas que se desarrollan en ellos debido al sistema de fuerzas externo que se aplica.

Si se hacen diagramas de cuerpo libre, al aislar una parte de la estructura, haciendo uno o varios cortes, estos deberán estar también en equilibrio.

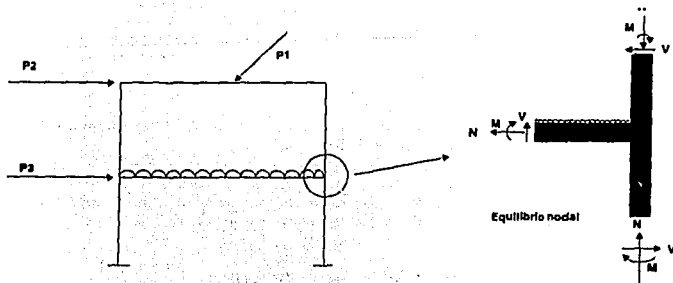


Figura 2-5. Sistema en equilibrio interno.

Si una estructura está en equilibrio, cualquier elemento que se aisle también lo estará, siendo necesario para que esto se cumpla, que en los planos de corte se consideren las acciones internas que la estructura ejerce sobre el elemento que se aisló, (figura 2-5). Esto se escribe como en las ecuaciones 2.2 y en forma matricial queda:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 2.7$$

$(F) + \quad [Ia] \quad (S) = (0)$



Resumiendo lo anterior, se obtienen las siguientes ecuaciones matriciales

$$\{e\} = [Ia] \{d\} \quad (2.5) \quad \text{Principio de continuidad}$$

$$\{e\} = [B] \{S\} \quad (2.6) \quad \text{Ley de Hooke}$$

$$\{F\} + [Ia]^T \{S\} = \{0\} \quad (2.7) \quad \text{Principio de equilibrio}$$

De la ecuación 2.6 despejamos  $\{S\}$

$$\{S\} = [D] \{e\} \quad (2.8)$$

Donde:

$$[D] = [B]^{-1} \quad (2.9)$$

Ahora sustituiremos 2.5 en 2.7 y nos queda

$$\{F\} + [Ia]^T [D] [Ia] \{d\} = \{0\} \quad (2.10)$$

Si hacemos

$$[K] = [Ia]^T [D] [Ia] \quad (2.11)$$

Entonces, despejando podemos escribir 2.9 como

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (2.12)$$

Que establece una relación directa entre las fuerzas externas que actúan en el sistema y sus correspondientes desplazamientos a través de la matriz  $[K]$  que representa la matriz de rigideces global, es decir, corresponde al sistema estructural total, ya que su determinación se hace en función del número de redundantes (desplazamientos) del sistema.

En los capítulos precedentes se estudiará más a fondo la obtención de cada una de las ecuaciones planteadas.

### Formulación de la solución del problema de la elasticidad.

Ahora que disponemos de las definiciones fundamentales y las relaciones de la teoría de la elasticidad, es posible formular el método de resolución de los problemas típicos. Los datos de estos problemas son las características geométricas y del material del cuerpo considerado junto con la definición de las fuerzas y/o los desplazamientos de la superficie contorno del cuerpo. Por tanto, como incógnitas hay nueve funciones desconocidas de  $X, Y, Z$ . Seis de estas funciones —  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  — definen las seis componentes independientes de las fuerzas en el cuerpo; y tres de ellas —  $u, v, w$  — definen los tres componentes de desplazamiento.

Para determinar estas nueve incógnitas se dispone de nueve ecuaciones en derivadas parciales, tres de las cuales son las ecuaciones diferenciales de equilibrio (2.2) y seis son las ecuaciones fuerza-desplazamiento (2.8). Las nueve funciones desconocidas deben satisfacer no solo estas nueve ecuaciones,

sino también las condiciones de fuerza y/o desplazamiento en el contorno, para que sean la solución verdadera de la elasticidad a un problema dado.

Se observará que, en general, el problema de la elasticidad es estáticamente indeterminado. Solo hay 3 ecuaciones de equilibrio estático, que son insuficientes para determinar las seis componentes de las fuerzas que intervienen en esas ecuaciones. Solo puede tenerse una solución única cuando se consideran también las seis ecuaciones fuerza-desplazamiento.

Los problemas de la elasticidad se pueden clasificar en uno de los tres tipos siguientes, según la naturaleza de las condiciones de contorno:

#### Tipo I

Determinar la distribución de fuerzas y los desplazamientos, cuando se dan las fuerzas de volumen y las de contorno y no se dan desplazamientos de contorno. Ejemplo: viga simplemente apoyada.

#### Tipo II

Determinar la distribución de fuerzas y los desplazamientos, cuando se dan las fuerzas de volumen y las de contorno, excepto en puntos aislados en los que, por el contrario se dan los desplazamientos. Ejemplo: viga continua de dos tramos.

#### Tipo III

Determinar la distribución de fuerzas y los desplazamientos, cuando se dan las fuerzas de volumen y los desplazamientos en todo el contorno.

Los problemas de Ingeniería Civil pertenecen generalmente a los tipos I y II, además, utilizando la técnica de la estructura primaria usual, los problemas del tipo II, pueden convertirse en varios del tipo I.

En realidad, se han resuelto relativamente pocos problemas, y los que lo han sido son muy sencillos, comparados con muchos de los problemas prácticos. Sin embargo estas relaciones han sido útiles como medio de aumentar la comprensión y el conocimiento de comportamiento de las estructuras y elementos estructurales.

Nuestro estudio estará enfocado a aquellas estructuras en las cuales sus condiciones de equilibrio (externo e interno) no quedan realmente especificados mediante las ecuaciones de equilibrio estático, es decir, al análisis de estructuras hiperestáticas (ver capítulo 5).

El objetivo del análisis estructural es calcular las fuerzas internas y las deflexiones en un punto cualquiera de una estructura. Existen dos planteamientos de carácter general utilizándose en el análisis de estructuras hiperestáticas. Se trata del método de las fuerzas (o método de flexibilidades) y del método de los desplazamientos (o método de rigideces). En el primero, los elementos supuestamente redundantes son eliminados de la estructura de manera que no se afecte el equilibrio estático. Los errores resultantes en la configuración geométrica se determinan y corrigen, de manera que el equilibrio no resulte alterado. En el segundo, se supone una solución que satisfaga los requisitos geométricos, corrigiendo posteriormente los errores que correspondan al equilibrio estático.

Independientemente del método a seguir, estos parten de los mismos principios e hipótesis fundamentales los cuales forman parte de la teoría de la elasticidad. Estos se establecen a continuación.

### Principios básicos del análisis estructural

La construcción de las matrices asociadas a un sistema estructural se basa en tres hipótesis simplificadores que son:

- 1) Todas las deformaciones son pequeñas y no afectan (significativamente) la geometría de la estructura.
- 2) todas las cargas se aplican gradualmente y el principio de superposición es válido.

3) Las constantes de los materiales se determinan experimentalmente y son independientes del tiempo.

La estructura que se analiza es un modelo matemático representado por los ejes centroidales de sus miembros soportados por reacciones idealizadas y sometidos a cargas simbólicas supuestas. Para el análisis se utilizan cuatro tipos de cantidades básicas:

- *Cantidades geométricas:* Coordenadas, segmentos, ángulos y características de la sección transversal.
- *Cantidades estáticas:* Cargas, reacciones y esfuerzos.
- *Deformaciones:* Desplazamientos lineales y angulares del eje centroidal y los apoyos.
- *Constantes de los materiales:* Módulo de Young, Coeficiente de Poisson y Módulo en cortante en casi todos los casos. ■

---

## Capítulo 3

---

# Vectores estructurales

### 3.1 VECTOR FUERZA Y DESPLAZAMIENTO

Una fuerza se puede definir como una cantidad física que tiende a cambiar el estado de movimiento del cuerpo sobre el que actúa. En general las fuerzas pueden dividirse en dos categorías, fuerzas lineales (fuerzas) y fuerzas rotacionales (momentos). Además pueden expresarse como cantidades vectoriales especificando sus componentes  $P_x, P_y, P_z$ ,  $M_x, M_y, M_z$  en cualquier sistema de coordenadas. A pesar de que un vector aritmético en el espacio tridimensional puede describirse completamente mediante sus tres componentes, un vector fuerza en mecánica de cuerpos rígidos o en mecánica de cuerpos deformables —como en las estructuras elásticas— requiere más de tres números para que quede completamente definida.

Una fuerza  $F$ , independientemente de si es lineal o rotacional, no puede deslizarse sin que se altere el efecto que produce sobre una estructura. Su punto de aplicación es tan importante como su magnitud y dirección. En consecuencia las fuerzas en análisis estructural se clasifican como vectores ligados.

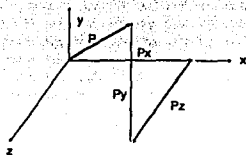
Puesto que las fuerzas lineales y momentos afectan un cuerpo rígido de manera totalmente diferente, no pueden tratarse como vectores del mismo tipo. De hecho, estos se definen en dos espacios diferentes: El espacio de las fuerzas lineales y el espacio de los momentos. Aunque los momentos pueden interpretarse como dos fuerzas lineales iguales y opuestas (par) separadas una distancia "d" en el espacio de las fuerzas lineales, tal interpretación nunca puede ser exacta, excepto en mecánica de cuerpos rígidos, a menos que la distancia "d" sea próxima a cero, caso en el cual la magnitud de las fuerzas iguales y opuestas tiende a infinito.

A pesar de que sus propiedades y comportamiento son totalmente diferentes, un vector fuerza lineal puede combinarse con un vector momento para formar otra cantidad vectorial llamada vector fuerza generalizada. Tal combinación es puramente aritmética, por esta razón los vectores fuerza generalizada se definen en un espacio aritmético. Por ejemplo, para problemas en dos dimensiones (estructuras planas), el espacio de las fuerzas es bidimensional y el espacio de los momentos es unidimensional. Por tanto, el espacio de la fuerza generalizada es tridimensional. Por consiguiente, un vector fuerza generalizada  $P$  puede expresarse como:

$$P = (P_x, P_y, M_z) \quad 3.1$$

Este es un tipo especial de vector tridimensional puesto que el espacio en el cual se define no es un espacio simple, sino la combinación de dos espacios diferentes. En consecuencia, el vector fuerza generalizada no cumple las reglas de los vectores tridimensionales ordinarios. Por ejemplo, la magnitud  $P$  no es

igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus elementos, o sea que no cumple la regla de adición del paralelogramo.



$$P = P_x + P_y + P_z$$

Los conceptos anteriores pueden aplicarse en forma análoga al caso de los desplazamientos, de esta forma tendremos desplazamientos lineales (desplazamientos) y desplazamientos angulares (giros). Por consiguiente un vector de desplazamientos en el espacio de tres dimensiones quedará definido por sus tres componentes  $d = (d_x, d_y, d_z)$  o  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  en cualquier sistema de coordenadas.

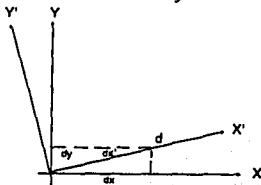
Es obvio pensar que los desplazamientos y giros también afectan un cuerpo rígido de manera diferente y no pueden tratarse como vectores del mismo tipo. Por esto se definen en dos espacios diferentes, el de los desplazamientos y el de los giros. Así, los desplazamientos quedan definidos en un espacio bidimensional y los giros en un espacio unidimensional. Por lo tanto el espacio de los desplazamientos generalizados de una estructura plana es de tres dimensiones y se expresa como:

$$d = (d_x, d_y, \varphi) \quad 3.2$$

Que por consiguiente, tampoco cumple la regla del paralelogramo.

### 3.2 TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Una cantidad física o una ecuación que contenga cantidades físicas puede tener diferentes expresiones en sistemas de coordenadas diferentes, aunque tales expresiones representen el mismo fenómeno físico. Por ejemplo, un vector en un plano puede definirse en un sistema de coordenadas por dos números diferentes de cero, y en otro sistema de coordenadas mediante un número diferente de cero y otro igual a cero.



Plano X, Y  $d = d_x + d_y$

Plano X', Y'  $d = d_x' \quad d_y' = 0$

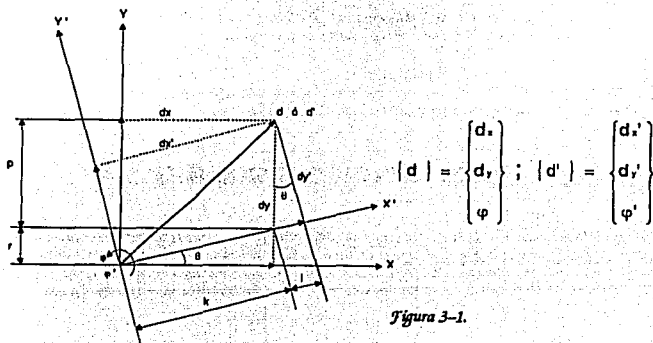
En consecuencia, por simplicidad debe escogerse el segundo sistema de coordenadas para definir el vector.

Hay dos razones para el empleo de las transformaciones de coordenadas. Primera, la compatibilidad de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y desplazamientos que se presentan en forma de sumas e igualdades vectoriales respectivamente, solo pueden escribirse si los vectores fuerza y desplazamiento en el extremo de cada elemento que se une a un nudo en particular se expresan en el mismo sistema de coordenadas. Segunda, una transformación de coordenadas puede simplificar la forma de la ecuación. Por lo tanto es necesario que quede claro el significado y la necesidad de las transformaciones geométricas.

En general, una transformación de coordenadas puede ser de uno de los siguientes tipos.

- Rotación
- Reflexión
- Traslación
- Dilatación
- Combinación

En este trabajo las transformaciones que manejaremos son del tipo de rotación y relacionan conjuntos de ejes ortogonales en sus coordenadas, cuyo origen es el mismo y en los cuales existe un ángulo  $\theta$  cualquiera entre sus ejes como se muestra en la figura 3.1. Por consiguiente, la relación que existe entre dos vectores desplazamiento en diferentes ejes se obtiene como sigue.



$$d_{x'} = k + l$$

$$\tan \theta = \frac{r}{d_x}$$

$$k = \frac{d_x}{\cos \theta}$$

$$r = d_x \tan \theta$$

$$p = d_y - r = d_y - d_x \tan \theta$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{l}{p} = \frac{l}{(d_y - d_x \tan \theta)} \Rightarrow l = \text{Sen } \theta (d_y - d_x \tan \theta)$$

$$dx' = \frac{dx}{\cos \theta} + dy \operatorname{Sen} \theta - dx \frac{\operatorname{Sen}^2 \theta}{\cos \theta} = dx \left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\operatorname{Sen}^2 \theta}{\cos \theta} \right) + dy \operatorname{Sen} \theta$$

$$\operatorname{Sen}^2 \theta + \operatorname{Cos}^2 \theta = 1 \Rightarrow \operatorname{Cos}^2 \theta = 1 - \operatorname{Sen}^2 \theta$$

$$dx' = dx \left( \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta}{\cos \theta} \right) + dy \operatorname{Sen} \theta \Rightarrow dx' = dx \operatorname{Cos} \theta + dy \operatorname{Sen} \theta \quad \text{a)}$$

$$\operatorname{Tan} \theta = \frac{1}{d'} \Rightarrow d' = \frac{1}{\operatorname{Tan} \theta}$$

$$dy' = \frac{\operatorname{Sen} \theta (d' - dx \operatorname{Tan} \theta)}{\operatorname{Tan} \theta}$$

$$dy' = \frac{dy \operatorname{Sen} \theta}{\operatorname{Cos} \theta} - dx \operatorname{Sen} \theta \Rightarrow dy' = dy \operatorname{Cos} \theta - dx \operatorname{Sen} \theta \quad \text{b)}$$

$$y \quad \varphi' = \varphi \quad \text{c)}$$

Si unimos a), b) y c) nos quedará:

$$\begin{aligned} dx' &= dx \operatorname{Cos} \theta + dy \operatorname{Sen} \theta \\ dy' &= -dx \operatorname{Sen} \theta + dy \operatorname{Cos} \theta \\ \varphi' &= \varphi \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{Bmatrix} dx' \\ dy' \\ \varphi' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Cos} \theta & \operatorname{Sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{Sen} \theta & \operatorname{Cos} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad 3.3$$

O simplemente:

$$\{d'\} = [T] \{d\} \quad \text{Donde} \quad [T] = \begin{bmatrix} \operatorname{Cos} \theta & \operatorname{Sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{Sen} \theta & \operatorname{Cos} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.4$$

Que establece la relación entre dos ejes coordenados que definen a un vector generalizado de desplazamientos. Esta relación puede también escribirse en la forma:

$$\{d\} = [T^T] \{d'\} \quad \text{Donde} \quad [T^T] = [T]^{-1} \quad 3.5$$

Como es evidente, al hacer una transformación de coordenadas en el sistema rotacional, esta se verifica solo en el espacio de los desplazamientos ya que el espacio de los giros es ajeno al primero y no permite rotación alguna. Es por esto que  $\varphi' = \varphi$ .

Lo anterior es igualmente aplicable a un vector fuerza generalizada. Por lo tanto podemos relacionar dos vectores  $\{F\}$  y  $\{F'\}$ , referidos a sistemas coordenados diferentes en la forma.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{Bmatrix} ; \{F'\} = \begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ M \end{Bmatrix}$$

$$\{F'\} = [T]\{F\} \quad 3.6$$

$$\{F\} = [T^T]\{F'\} \quad 3.7$$

Es importante señalar que cada elemento de una estructura debe tener definido un eje de coordenadas que será el eje local de cada barra. Este debe ubicarse de tal forma que el eje  $X'$  coincida con el eje longitudinal de la barra y su origen debe coincidir también con el origen de la barra. De aquí se desprende que cada elemento de la estructura tendrá una matriz de transformación cuyo valor es función del ángulo entre los ejes  $X-X'$  global y local respectivamente.

Para el caso en que se tenga una matriz de orden  $m \times n$ , pueden considerarse  $n$  vectores en el espacio  $m$ -dimensional ó  $m$  vectores en el espacio  $n$ -dimensional y los elementos de cada columna pueden interpretarse como las componentes de los vectores de la correspondiente columna. En consecuencia, una matriz en un sistema de coordenadas puede parecer diferente en otro sistema.

Supongamos que una matriz cuadrada, por ejemplo la matriz de rigidez de una barra  $[K_g]$  (ver capítulo 4), que ya se ha definido en un sistema de coordenadas local, se quiere expresar en el sistema global de coordenadas.

Tomemos la ecuación fuerza-desplazamiento, de una barra (que se deduce en el siguiente capítulo) que es:

$$\{F'\} = [K']\{d'\} \quad 3.8$$

Como este sistema es válido en un sistema local de coordenadas, lo será también en el sistema global en la forma:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad 3.9$$

Y según la transformación de coordenadas sobre vectores vista anteriormente, se puede escribir que:

$$\{F\} = [T^T]\{F'\} \quad \text{y} \quad \{d\} = [T]\{d'\}$$

Sustituyendo las anteriores expresiones en 3.9 queda:

$$[T^T]\{F\} = [K][T]\{d'\} \quad 3.10$$



Ahora, de la ecuación 3.8 colocamos el valor de  $\{F'\}$  en el primer miembro de la ecuación 3.10 y tendremos:

$$[T^T][K']\{d'\} = [K][T^T]\{d'\}$$

Que podemos reescribir en la forma:

$$[T^T][K'] = [K][T^T]$$

De donde, premultiplicando ambos lados por  $[T]$  nos quedará:

$$[K] = [T][K][T^T] \quad 3.11$$

O la transformación inversa.

$$[K] = [T^T][K'][T] \quad 3.12$$

Como se vio en el capítulo 2, ecuación 2.12, existe una relación directa entre el sistema de fuerzas y los desplazamientos que sufre una estructura debido a aquellas. Dicha relación queda definida al obtener la matriz de rigidez global de la estructura. Por lo tanto, es conveniente hacer una generalización de los vectores fuerza y desplazamiento correspondientes a un punto cualquiera del sistema estructural (por lo general en un nudo), con lo cual dichos vectores se establecen en la siguiente tabla:

Tipo de Estructura	Vector $\{F\}$	Vector $\{d\}$
Armaduras planas	$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix}$
Armaduras espaciales	$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix}$
Marcos planos	$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ \varphi \end{Bmatrix}$
Marcos espaciales	$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix}$

Los tres primeros serán estudiados en el presente trabajo.

## 3.3 CONTRAGRAFIENCIA

Sea:

$$\{e\} = [a]\{d\} \quad 3.13$$

$$\{F\} = [b]\{p\} \quad 3.14$$

Se dice que dos sistemas algebraicos (como 3.13 y 3.14) son contragredientes si a partir de uno se puede determinar el otro mediante determinadas sustituciones algebraicas. Si para todo  $\{d\}$ ,  $\{p\}$  se cumple:

$$\{d^T\}\{F\} = \{e^T\}\{p\} \quad 3.15$$

Entonces

$$[b] = [a^T]$$

Ya que

$$\{F\} = [b]\{p\} \quad \text{y} \quad \{e^T\} = \{d^T\}[a^T]$$

Sustituimos en 3.15 y

$$\{d^T\}[b]\{p\} = \{d^T\}[a^T]\{p\}$$

Entonces,

$$[b] = [a^T] \quad \text{ó} \quad [b^T] = [a] \blacksquare$$

---

# Elementos estructurales

### 4.1 RELACIÓN CARGA-DESPLAZAMIENTO (LEY DE HOOKE)

Se ha demostrado que cuando una estructura está sujeta a un sistema de cargas aplicadas, se desarrolla un conjunto único de fuerzas reactivas para proporcionar el equilibrio externo. Simultáneamente, se induce un sistema de fuerzas internas que es consistente con las cargas aplicadas y con las reacciones, y que satisface el equilibrio interno.

Cuando se carga una estructura, ésta experimenta deformaciones. Correspondiendo a esas deformaciones, hay un estado interno de deformaciones que produce un estado interno de esfuerzos, de acuerdo con las características esfuerzo-deformación de los materiales constituyentes. Así, la estructura se deforma hasta que ha desarrollado un estado interno de esfuerzos y un conjunto correspondiente de reacciones que sostendrán el equilibrio de toda la estructura como conjunto, ó de cualquier parte de ella.

De lo anterior se desprende que las deformaciones juegan un papel clave en la secuencia de las acciones que llevan a una estructura al equilibrio. Sin embargo, las deformaciones son importantes por derecho propio.

Hay dos razones importantes para determinar las deformaciones en una estructura. La primera tiene que ver con los requerimientos de utilidad. La segunda razón tiene que ver con el proceso de análisis en sí. Para un análisis estáticamente indeterminado, las ecuaciones de equilibrio deben aumentarse mediante condiciones de compatibilidad de deformación (capítulo 2).

Las deformaciones pueden ser recuperables cuando se remueven las cargas o pueden ser de naturaleza permanente o no recuperables. El primer tipo se considera como deformación elástica mientras que el último es una deformación plástica. Aquí examinaremos deformaciones elásticas.

Para cada acción, hay una cantidad de deformación correspondiente que resulta de la acumulación de las deformaciones unitarias cuando el miembro responde a cargas. En esta sección consideraremos los tres componentes básicos de la relación esfuerzo-deformación comunes en el análisis estructural: flexión, de momento flexionante y de fuerza cortante, aunque esta última puede ser despreciable para miembros de proporciones normales.

Considerando que la forma deformada de toda estructura en conjunto depende de las deformaciones de sus elementos, es esencial como punto de partida un buen entendimiento del comportamiento de los elementos individuales sometidos a cargas externas y a fuerzas internas. Ya que, como los métodos matri-

ciales tratan de establecer la relación entre las deformaciones de los nudos y las fuerzas externas que actúan en ellos, podrá ser suficiente un entendimiento de las deformaciones de los elementos debida solamente a las acciones en los extremos (fuerzas internas desarrolladas en los extremos).

Cuando un cuerpo deformable se somete a efectos externos, en todas partes de él se desarrollan esfuerzos y deformaciones. Mientras que los esfuerzos se definen como las fuerzas internas por unidad de área, las deformaciones se definen como los cambios de forma de un elemento unidad en el cuerpo (cubo). Como el cambio de forma en un cubo infinitesimalmente pequeño puede observarse solamente de dos maneras, el cambio de su longitud y el cambio de sus ángulos, las deformaciones correspondientes se identifican como las deformaciones comunes (o lineales)  $\epsilon$  y las deformaciones por esfuerzo cortante  $\gamma$ . Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones que se denominan la ley de Hooke son:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad ; \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad 4.1$$

En las que las constantes  $E$  y  $G$  ya fueron definidas.

Una fuerza interna así como una fuerza generalizada en el espacio tridimensional, pueden cuando máximo tener 6 componentes, es decir tres lineales y tres angulares. A causa de la simultaneidad de sus efectos sobre un elemento, las seis componentes pueden agruparse en tres: fuerza axial  $N$ , momento flexionante  $M$  y fuerza cortante  $V$ , figura 4.1.a. Tomemos  $u$ ,  $\theta$  y  $v$ , respectivamente, como los desplazamientos en las direcciones de  $N$ ,  $M$  y  $V$ , en un extremo del elemento, que resultan de la aplicación de estas fuerzas en el mismo extremo, figura 4.1.b.

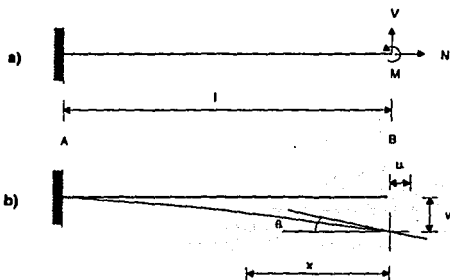


Figura 4-1.

La relación entre estos dos conjuntos de cantidades puede establecerse por la suma de las deformaciones desde un extremo del elemento hasta el otro. La deformación total axial  $u$ , por ejemplo, que representa el alargamiento total del elemento, puede calcularse integrando la deformación axial desde B hasta A como:

$$u = \int_0^l \epsilon \, dx = \int_0^l \frac{N \, dx}{EA} \quad 4.2$$

$$\left( \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} \right)$$

Para un elemento prismático  $E$  y  $A$  son constantes.

Si bien los otros desplazamientos ( $\theta$ ,  $v$ ) pueden evaluarse similarmente por integración de las deformaciones correspondientes a través de toda la longitud y la sección transversal del elemento, su evaluación de esta manera (operando sobre esfuerzos y deformaciones) es más bien campo de la mecánica de materiales. Sin embargo, en lugar de esto, emplearemos los conceptos de energía de deformación, el trabajo virtual, o los teoremas de Castigliano que serán más adecuados al tema que tratamos para establecer tales relaciones.

Si los esfuerzos y deformaciones se expresan en función de las fuerzas, es decir, fuerzas axiales, momento flexionante y fuerza cortante, entonces la energía de deformación de una barra prismática de longitud  $L$  es.

$$U = \int_0^L \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_0^L \frac{V^2 dx}{2GA_c} \quad 4.3$$

Que para la figura 4.1 se ve que es:

$$U = \int_0^L \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^L \frac{(M+Vx)^2 dx}{2EI} + \int_0^L \frac{V^2 dx}{2GA_c} \quad 4.4$$

Pero, de acuerdo con los teoremas de Castigliano.

$$u = \frac{\partial U}{\partial N}; \quad v = \frac{\partial U}{\partial V} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\partial U}{\partial M} \quad 4.5$$

De donde finalmente

$$u = \int_0^L \frac{N dx}{EA}$$

$$v = \int_0^L \frac{V dx}{GA_c} + \int_0^L \frac{(M+Vx)x dx}{EI} \quad 4.6$$

$$\theta = \int_0^L \frac{(M+Vx) dx}{EI}$$

Las ecuaciones 4.6, representan la relación que existe entre las fuerzas en los extremos de un elemento y los desplazamientos en el mismo extremo (en este caso B).

## 4.2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE BARRAS

Generalmente la flexibilidad de un elemento se entiende como la capacidad de ese elemento para cambiar su forma sin romperse. Esta es una cantidad física que queda caracterizada mediante la relación de deflexión a fuerza, es decir, deflexión (o deflexiones) ocasionada por una fuerza unitaria.

Los desplazamientos reales en los extremos de un elemento no pueden determinarse únicamente bajo las cargas dadas en los extremos. Sin embargo, considerando que la configuración deformada de un elemento puede definirse en términos de los desplazamientos relativos, más bien que de los desplazamientos reales, se observa que los coeficientes de flexibilidad de un elemento en un extremo, pueden obtenerse con referencia al otro extremo. Esta a su vez implica que un extremo del elemento podrá mantenerse fijo mientras se introducen cargas unitarias en el otro extremo.

Para la determinación de las deflexiones y los coeficientes de flexibilidad utilizaremos la generalización de los teoremas de Castigliano la cual se plantea como:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i \quad 4.7$$

Donde

$U$  = Energía de deformación del sistema

$P_i$  = Carga externa (generalizada) aplicada en el punto  $i$

$\Delta_i$  = Deflexión (generalizada) del punto  $i$  en dirección de  $P_i$

De lo anterior se desprende que las deflexiones correspondientes están dadas por las ecuaciones 4.6 del inciso anterior, y que están referidas a la figura 4.1, donde  $N$ ,  $V$  y  $M$  valen la unidad. Por lo tanto y para barras prismáticas en las que  $A$ ,  $A_c$ ,  $I$ ,  $G$  y  $E$  son constantes, las ecuaciones de deformación antes mencionadas quedan finalmente como:

$$\begin{aligned} u &= \frac{NL}{AE} \\ v &= \frac{VL}{GA E} + \frac{VL^3}{3EI} + \frac{ML^2}{2EI} \\ \theta &= \frac{ML}{EI} + \frac{VL^2}{2EI} \end{aligned} \quad 4.8$$

En donde, para  $v$ , el primer término (que representa la contribución de la deformación por esfuerzo cortante) es usualmente despreciable en presencia de los otros dos términos.

Las tres ecuaciones antes escritas, pueden reescribirse en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EA & 0 & 0 \\ 0 & L^3(1+C)/3EI & L^2/2EI \\ 0 & L^2/2EI & L/EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} \quad 4.9$$

$$\{d'_B\} = [F'_{BB}] \{F_B\}$$

Donde:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{y} \quad C = \frac{6I(1+\nu)}{L^2 A_c}$$

$[F'_{BB}]$  Es la matriz de flexibilidades de una barra prismática de sección constante y representa la relación entre las fuerzas en el extremo de un elemento y los correspondientes desplazamientos en el mismo. En el caso de no considerar la contribución del cortante, simplemente se elimina el término entre paréntesis.

La matriz  $[F]$  puede interpretarse de la siguiente forma:

$$[F_{BB}] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & F_{23} \\ 0 & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \frac{dx}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \int \frac{x^2 dx}{EI} + \frac{dx}{GA_C} & \int \frac{x dx}{EI} \\ 0 & \int \frac{x dx}{EI} & \int \frac{dx}{EI} \end{bmatrix} \quad 4.10$$

—Primera columna.—Desplazamiento total (lineal) del extremo libre de la barra debido a la aplicación de una fuerza normal  $N$  unitaria aplicada en dicho extremo. La fuerza cortante  $V$  y el momento flexionante  $M$  no causan efecto respecto a la deformación axial, como se puede verificar al integrar  $U$ .



$$u = \frac{\partial U}{\partial N} = \int_0^L \frac{dx}{EA}$$

Figura 4-2

—Segunda columna.—Desplazamiento total (lineal) del extremo libre de la barra debido a la aplicación de una fuerza cortante  $V$  y a la contribución del momento unitario aplicado también en dicho extremo. En este caso, la fuerza normal  $N$  no causa efecto respecto a esta de formación como también se puede verificar al integrar  $U$ .

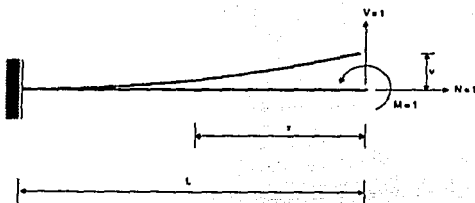


Figura 4-3.

$$v = \frac{\partial U}{\partial V} = \int_0^L \left( \frac{x^2}{EI} + \frac{x}{EI} + \frac{1}{GA_C} \right) dx$$

—Tercera columna.—Desplazamiento total (angular) en el extremo de la barra debido a la aplicación de un momento flexionante unitario  $M$  y a la contribución de la fuerza cortante unitaria  $V$  aplicada en dicho extremo de la barra. Para este caso, se observa que la fuerza normal  $N$  no contribuye a la deformación angular, lo cual también puede ser verificado al integrar  $U$ .

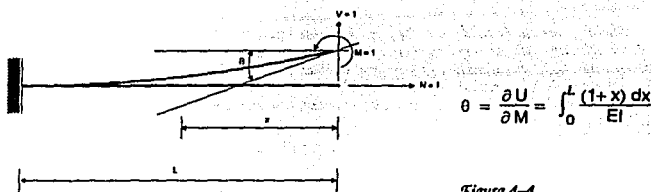


Figura 4-4.

Es importante señalar que la obtención de cada una de las deformaciones antes planteadas, se hace aplicando una a la vez las tres cargas en el extremo libre de la barra ( $N$ ,  $V$  y  $M$ ) y tomando en cuenta la contribución que cada una tiene respecto a las deformaciones encontradas ( $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ ).

En el caso de tener una barra de sección variable, es necesario entonces obtener la variación de  $I$ ,  $A$  y  $A_c$  respecto a la longitud de la barra para; de esta manera, integrar respecto de la función que represente la variación de los parámetros antes mencionados. Es obvio que  $N$ ,  $V$  y  $M$  también están representadas por una función que las hace variar respecto a la longitud de la barra.

### 4.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA

La rigidez de un elemento estructural se entiende comúnmente como la magnitud de la fuerza requerida para producir una cierta deflexión (lineal o angular). Como cada elemento tiene dos extremos, la palabra deflexión se interpretará como deflexión generalizada en los extremos de un elemento.

En el espacio físico de dos dimensiones, el vector que representa la deflexión tiene tres componentes independientes, dos lineales y un rotacional, como se indica en la figura 4.5a. Por consiguiente, la matriz de rigideces  $[K]$  en la ecuación  $F = [K] d$  (que relaciona fuerzas y desplazamientos en el extremo de un elemento) puede en la mayoría de los casos tener tres renglones y tres columnas (estructuras planas).

Es conveniente calcular la matriz de rigideces de un elemento en su sistema local de coordenadas (figura 4.5b) y luego, por transformación de coordenadas, transferirlo al sistema general para calcular la matriz de rigideces global de la estructura (ver capítulo 6). Supondremos que la orientación de los ejes locales coincide con los ejes principales de la sección transversal del elemento (figura 4.5b).

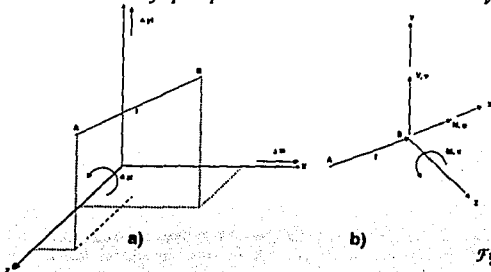


Figura 4-5.



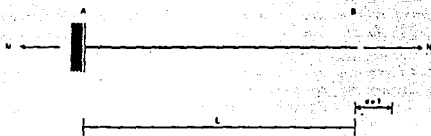
Ahora, la matriz de rigideces  $[K']$  de un elemento puede evaluarse referida a los ejes de coordenadas locales variando los desplazamientos (uno cada vez) y calculando las fuerzas desarrolladas en los extremos, lo que en cierta medida es similar al establecimiento de la inversa de la relación fuerza-desplazamiento dada en la ecuación 4.9. Esta vez, sin embargo, en lugar de referirnos a la variación de energía de deformación como lo hicimos en la sección anterior, simplemente la matriz de rigidez  $[K'_{22}]$  de una barra queda como:

$$[K'] = [J']^{-1} \quad 4.11$$

Lo cual podemos establecer en función de que existe una relación desplazamiento-fuerza y ésta puede interpretarse, como en el caso de la matriz  $[J']$ , en la siguiente forma:

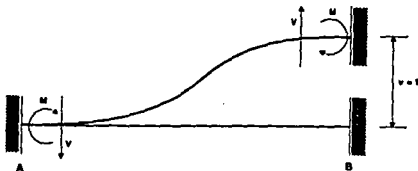
$$[K'_{22}] = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad 4.12$$

—Primera columna.— Fuerza total desarrollada en los extremos de la barra debido a la aplicación de un desplazamiento lineal unitario  $u$ . Como ya se mencionó, los desplazamientos unitarios en el extremo de la barra se aplicarán todos a la vez.



$$N = \frac{EA}{L} u$$

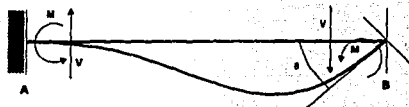
—Segunda columna.— Fuerza total desarrollada en los extremos de la barra, debido a la aplicación de un desplazamiento unitario  $v$ . También se desarrolla un momento en los extremos de la barra debido a la aplicación del mismo desplazamiento.



$$V = \frac{12EI}{L^3(1+4C)} v$$

$$M = \frac{-6EI}{L^2(1+4C)} \dot{v}$$

—Tercera columna.— Momento total desarrollado en los extremos de la barra, debido a la aplicación de un giro unitario  $\theta$ . También se desarrolla una fuerza en los extremos de la barra debido a la aplicación del mismo giro.



$$M = \frac{4EI(1+C)}{L(1+4C)} \theta$$

$$V = \frac{-6EI}{L^2(1+4C)} \theta$$

Que al agrupar nos conforma la matriz de rigideces de la barra. Para un elemento con  $L$ ,  $A$ ,  $E$  constantes (que es el caso que se ilustra) la matriz  $[K_{BB}]$  nos queda.

$$\begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3(1+4C) & -6EI/L^2(1+4C) \\ 0 & -6EI/L^2(1+4C) & 4EI(1+C)/L(1+4C) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad 4.13$$

$$[F_B] = [K_{BB}] [d_B]$$

Y que podemos demostrar también según la ecuación 4.11. Para el caso general, en el cual se desprecia la contribución del cortante, simplemente se eliminan los términos entre paréntesis.

En caso de tener barras de sección variable, el procedimiento a seguir será simplemente obtener la matriz de flexibilidades  $[F_{BB}]$  según la ecuación 4.10 y después invertirla con lo cual tenemos.

$$K_{11} = 1/F_{11}$$

$$K_{22} = F_{33}/\Delta$$

$$K_{23} = K_{32} = -F_{32}/\Delta$$

$$K_{33} = F_{22}/\Delta$$

$$\text{Donde: } \Delta = \text{Determinante} = \begin{vmatrix} F_{22} & F_{23} \\ F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} \quad 4.12'$$

$$\Delta = F_{22}F_{33} - F_{32}F_{23}$$

De acuerdo con el teorema de reciprocidad de Maxwell, sin embargo, las fuerzas desarrolladas en el extremo A del elemento AB debidas a los desplazamientos inducidos en el extremo B, serán iguales a las desarrolladas en el extremo B debidas a desplazamientos análogos en el extremo A. En consecuencia las cantidades de la ecuación 4.13, conjuntamente con sus contrapartes que resultan de los desplazamientos del extremo B pueden escribirse como:

$$\begin{Bmatrix} F_A' \\ F_B' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA}' & K_{AB}' \\ K_{BA}' & K_{BB}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_A' \\ d_B' \end{Bmatrix} \quad 4.14a$$

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} N \\ V \\ M \end{array} \right)^A \\ \left( \begin{array}{c} N \\ V \\ M \end{array} \right)^B \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} u \\ v \\ \theta \\ u \\ v \\ \theta \end{array} \right)^A \\ \left( \begin{array}{c} u \\ v \\ \theta \end{array} \right)^B \end{array}$$

4.14b

Donde el subíndice designa el extremo del elemento en consideración para  $\{d\}$  y  $\{F\}$ . En la que concierne a los subíndices de  $\{K\}$ , el primero designa el extremo donde las fuerzas se desarrollan y el segundo indica el extremo donde se introducen los desplazamientos.

#### 4.4 TRANSFORMACIONES DE FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ

Las ecuaciones que ligan las fuerzas y movimientos de los extremos de una barra de una estructura pueden escribirse de diversas maneras. En el método de rigideces (capítulo 6), la forma apropiada consiste en expresar las fuerzas de extremo  $F_A$  y  $F_B$  en función de los movimientos  $d_A$  y  $d_B$ . Para piezas que presenten un comportamiento lineal, estas expresiones tienen la forma de la ecuación 4.14 en la que el orden de las matrices  $\{K_{AB}\}$ , etc., depende del número de componentes de los vectores fuerza y movimiento.

El método de rigideces mencionado, emplea las condiciones de compatibilidad de movimientos y equilibrio de nudos para obtener el sistema de ecuaciones cargas-movimientos de una estructura completa, a partir de las ecuaciones fuerza-movimiento (4.14) de las piezas individuales. Este sistema de ecuaciones es el representado por la ecuación 2.12 (capítulo 2) como:

$$\{F\} = [K] \{d\}$$

En el cual  $\{F\}$  indica el conjunto total de cargas aplicadas en los nudos y  $\{d\}$  el sistema correspondiente de movimientos desconocidos de dichos nudos.

A primera vista, parece que 4.14 podría escribirse en forma análoga, expresando los movimientos  $d_A$  y  $d_B$  en función de las fuerzas  $F_A$  y  $F_B$ . Sin embargo, esto no es posible. En tanto que las fuerzas de extremo están perfectamente definidas para cualquier par de movimientos de los extremos, la inversa no es verdad, ya que la pieza puede sufrir un movimiento arbitrario de conjunto, como cuerpo rígido, sin modificarse las fuerzas que actúan en sus extremos. Matemáticamente, esto equivale a decir que las ecuaciones 4.14, son necesariamente singulares y por consiguiente no pueden escribirse en forma inversa. Aunque esto suceda, las ecuaciones carga-movimiento 4.13, tendrán siempre una solución única, puesto que las piezas forman una estructura y no un mecanismo. En otras palabras, puede establecerse en términos físicos que la matriz será siempre no singular, de forma que 4.13 "puede invertirse", escribiéndose en la forma.

$$\{d_B\} = [K_{BB}]^{-1} \{F_B\} = [F_{BB}] \{F_B\}$$

4.15

Denominando a  $[F_{BB}]$  matriz de flexibilidad de la barra.

Las matrices  $[K_B]$  y  $[F_B]$ , representan diferentes aspectos matemáticos de las relaciones totales entre cargas y movimientos en una barra. Si consideramos un sistema de cargas  $\{F\}$  en el que una cierta componente  $\{F_A\}$  es igual a la unidad y todas las restantes componentes son nulas, se deduce de 4.15, que la componente de movimiento  $\{d_A\}$  es igual al elemento  $[F_{AA}]$  de la matriz de flexibilidades  $[F]$ . Por otra parte, por el teorema de reciprocidad sabemos que  $F_{BA} = F_{AB}$ , por lo tanto, la matriz  $[F]$  resulta ser simétrica. Por lo tanto,  $[K]$  también lo ha de ser.

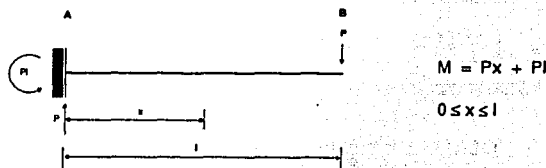
## 4.5 DESPLAZAMIENTO DE BARRA EN CANTILIVER Y OBTENCIÓN EN FUNCIÓN DE ESTOS DE LAS FUERZAS DE FIJACIÓN

Para encontrar los desplazamientos de una barra en cantiliver, se puede utilizar el método del trabajo virtual el cual queda definido por la expresión.

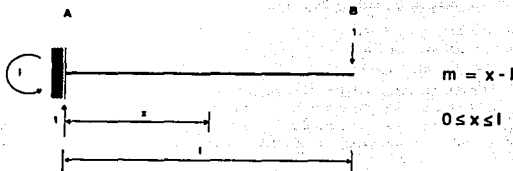
$$\delta = \int_0^l \frac{Nn \, dx}{EA} + \int_0^l \frac{Mm \, dx}{EI} + \int_0^l \frac{Vv \, dx}{GA_c} \quad 4.16$$

En donde  $N$ ,  $V$  y  $M$  son los elementos mecánicos del sistema real y  $n$ ,  $v$ ,  $m$  son los elementos mecánicos producidos por una carga virtual aplicada en el punto y la dirección en la que se desea obtener el desplazamiento. Por ejemplo:

1) Encontrar el desplazamiento lineal de la siguiente viga para el extremo libre.



Aplicando una carga unitaria en el extremo B tenemos que.



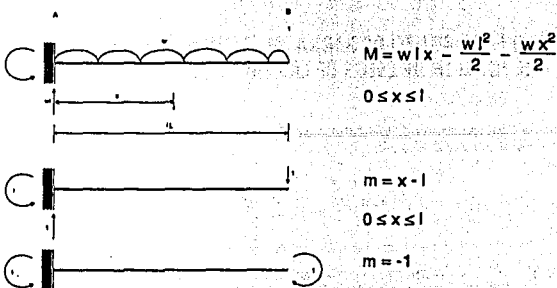
Utilizando la ecuación 4.16 y despreciando la contribución por fuerza cortante nos queda.

$$\delta_B = \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^l (Px - Pl)(x - l) dx$$

Finalmente

$$\delta_B = \frac{Pl^3}{3EI}$$

2) Encontrar el desplazamiento lineal y angular de la siguiente viga para su extremo libre.



Para encontrar el desplazamiento lineal en el punto B utilizamos la carga unitaria lineal tal que.

$$\delta_B = \int_0^l \frac{(wx - wl^2/2 - wx^2/2)(x - l) dx}{EI} \Rightarrow \delta_B = \frac{wl^4}{8EI}$$

Para encontrar el desplazamiento angular en el punto B utilizamos la carga unitaria angular tal que:

$$\theta_B = \int_0^l \frac{(wx - wl^2/2 - wx^2/2)(-1) dx}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{wl^3}{6EI}$$

En caso de que  $l$  no sea constante, habrá que obtener una función donde se exprese la variación de dicho parámetro en función de la longitud de la barra.

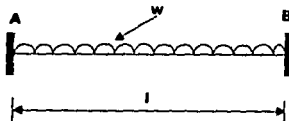
Existen otros métodos para encontrar las deflexiones en estructuras pero hemos escogido el del trabajo virtual por ser de los más sencillos.

La obtención de los desplazamientos en los extremos de una barra nos puede servir para calcular las fuerzas de fijación para una barra doblemente empotrada que es, por sus condiciones de frontera, una estructura hiperestática y en consecuencia no es posible determinar sus reacciones por medio de las ecuaciones de la estática. Las incógnitas se calculan formulando un suficiente número de ecuaciones independientes obtenidas de las condiciones de equilibrio estático y de las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones.

Para obtener las fuerzas de fijación utilizaremos entonces los principios antes mencionados a través del planteamiento tradicional del "método de las flexibilidades" (mismo que utiliza el método matricial (capítulo 7) y que se describe a continuación.

- Primero se determina el número de reacciones en los apoyos de la estructura. El grado de indeterminación se denomina grado de redundancia de la estructura.
- Se considera una estructura denominada primaria que se obtiene de la estructura original eliminando las reacciones redundantes de manera que se tenga una estructura estáticamente determinada. Las reacciones redundantes son las reacciones en exceso de las que se pueden determinar estáticamente.
- Se aplica el principio de superposición de causas y efectos y se van añadiendo las reacciones redundantes, estableciendo una ecuación por cada redundante, de manera que los desplazamientos de la estructura en los puntos en donde se eliminaron las reacciones, se expresen en función de las fuerzas conocidas y de las reacciones redundantes.
- El método considera entonces una estructura isostática, denominada primaria, en la que se calculan los desplazamientos en los apoyos que se eliminaron de la estructura hiperestática inicial, y en las direcciones en las que se eliminaron dichas restricciones. Estos desplazamientos se calculan también en estructuras de la misma geometría que la estructura primaria siendo las cargas las reacciones redundantes correspondientes.
- La corrección de los desplazamientos de la estructura primaria con los producidos por las reacciones redundantes, aplicadas de manera que se cumplan las condiciones geométricas de la estructura original, permite establecer un sistema de ecuaciones cuyo número es igual al de las reacciones redundantes.
- La solución de este sistema de ecuaciones permite determinar los valores de las reacciones redundantes. Una vez determinadas estas reacciones en los apoyos, los elementos mecánicos se pueden calcular en todos los miembros de la estructura por medio de las ecuaciones de equilibrio de la estática, pudiendo aplicarse también el principio de superposición de causas y efectos.

*Ejemplo 1:* Calcular las reacciones para la siguiente viga doblemente empotrada que se muestra en la figura.



$EI = \text{Constante}$

Número de reacciones = 4

Grado de hiperestaticidad =  $NR - NEc$

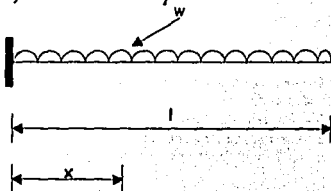
$GH = 4 - 2 = 2$  Redundantes

1) El número de reacciones es para cada nudo 3. Una en  $x$ , otra en  $y$  y otra como giro  $\theta$ . Pero podemos ver que, como no existen cargas en sentido de las  $x$ , entonces no habrá reacción en ese sentido y por lo tanto solo habrá 2 reacciones por nudo, una en  $y$  y otra como giro  $\theta$ . Por lo tanto solo podemos utilizar 2 ecuaciones de la estática que son:

$$\sum F_y = 0$$

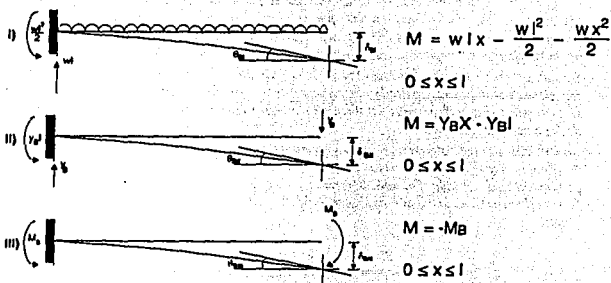
$$\sum M = 0$$

## 2) Estructura isostática primaria



## 3) Aplicación del principio de superposición de causas y efectos

$$\delta_B = \theta_B = 0$$



## Ecuaciones de compatibilidad

$$\delta_B = \delta_{BI} + \delta_{BII} + \delta_{BIII} = 0$$

$$\theta_B = \theta_{BI} + \theta_{BII} + \theta_{BIII} = 0$$

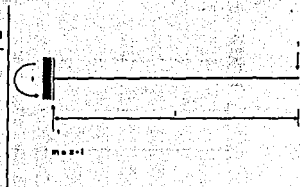
## 4) Cálculo de los desplazamientos. Considerando únicamente el efecto de flexión. Aplicamos el teorema del trabajo virtual para encontrar los desplazamientos.

$$\delta = \int_0^l \frac{M m dx}{EI}$$

$$\delta_{B I} = \int_0^l \frac{(w/x - w^2/2 - wx^2/2)(x-1) dx}{EI} = \frac{wl^4}{8EI}$$

$$\delta_{B II} = \int_0^l \frac{(Y_B x - Y_B l)(x-1) dx}{EI} = \frac{l^3}{3EI} Y_B$$

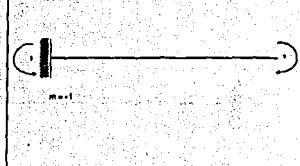
$$\delta_{B III} = \int_0^l \frac{-M(x-1) dx}{EI} = \frac{l^2}{2EI} M_B$$



$$\theta_{B I} = \int_0^l \frac{(w/x - w^2/2 - wx^2/2)(-1) dx}{EI} = \frac{wl^3}{6EI}$$

$$\theta_{B II} = \int_0^l \frac{(Y_B x - Y_B l)(-1) dx}{EI} = \frac{l^2}{2EI} Y_B$$

$$\theta_{B III} = \int_0^l \frac{-M(-1) dx}{EI} = \frac{l}{EI} M_B$$



5) Determinación de los valores de los redundantes. Una vez obtenidas las deformaciones, se sustituyen en las ecuaciones de compatibilidad y se despeja el valor de las redundantes (haciendo ecuaciones simultáneas).

$$\frac{l^3}{3EI} Y_B + \frac{l^2}{2EI} M_B = -\frac{wl^4}{8EI}$$

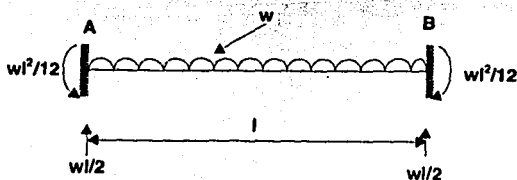
$$\frac{l^2}{2EI} Y_B + \frac{l}{EI} M_B = -\frac{wl^3}{6EI}$$

$$Y_B = -\frac{wl}{2}$$

$$M_B = \frac{wl^2}{12}$$

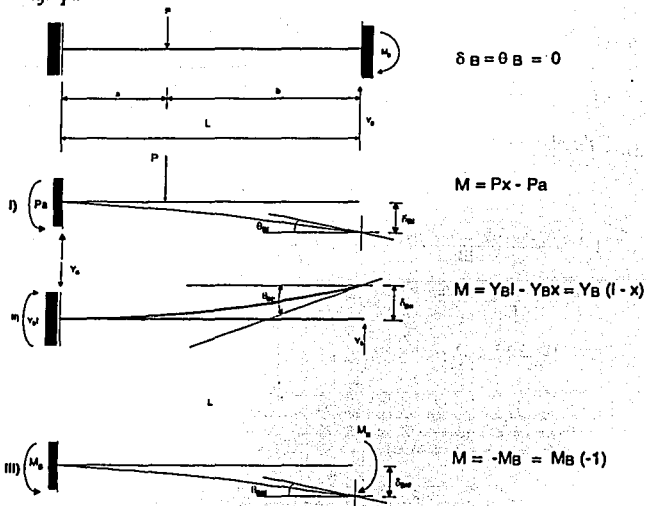
El signo negativo en  $Y_B$  indica que el sentido que se había propuesto para dicha reacción es contrario al indicado en II.

6) Una vez calculados  $Y_B$  y  $M_B$  para el punto B, por medio de las ecuaciones de la estática se llega a la solución total que es:





Ejemplo 2:



Se pueden establecer las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones escribiendo las ecuaciones a partir de los desplazamientos producidos únicamente por cargas virtuales y al final multiplicar tales desplazamientos por la redundante que los produce. Podemos entonces escribir:

$$\delta_{B I} - \delta_{B II} Y_B + \delta_{B III} M_B = 0$$

$$\theta_{B I} - \theta_{B II} Y_B + \theta_{B III} M_B = 0$$

Donde:

$$\delta_{B I} = \int_0^l \frac{(px - pa)(x - l) dx}{EI} = \frac{3pa^2 l - pa^3}{6EI} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \\ \text{---} \\ \end{array} \right\} m = x - l$$

$$\delta_{B II} = \int_0^l \frac{(l-x)(l-x) dx}{EI} = \frac{l^3}{3EI} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \\ \text{---} \\ \end{array} \right\} m = l - x$$

$$\delta_{B III} = \int_0^l \frac{-1(x-l) dx}{EI} = \frac{l^2}{2EI} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \\ \text{---} \\ \end{array} \right\} m = x - l$$

$$\theta_{B I} = \int_0^a \frac{(px - pa)(-1) dx}{EI} = \frac{pa^2}{2EI}$$

$$\theta_{B II} = \int_0^l \frac{(l-x)(1) dx}{EI} = \frac{l^2}{2EI}$$

$$\theta_{B III} = \int_0^l \frac{-1(-1) dx}{EI} = \frac{l}{EI}$$

$$1 \left( \overbrace{\hspace{10em}}^1 \right) m = -1$$

$$1 \left( \overbrace{\hspace{10em}}^1 \right) m = 1$$

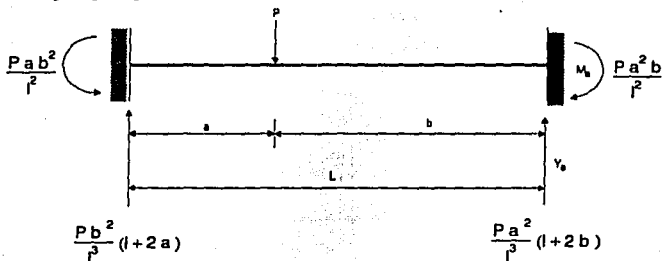
$$1 \left( \overbrace{\hspace{10em}}^1 \right) m = -1$$

Al sustituir los desplazamientos en las ecuaciones de compatibilidad y despejar tenemos que:

$$-\frac{l^3}{3EI} Y_B + \frac{l^2}{2EI} M_B = \frac{pa^3 - 3pa^2l}{6EI} \quad Y_B = \frac{pa^2}{l^3} (l + 2b)$$

$$-\frac{l^2}{2EI} Y_B + \frac{l}{EI} M_B = \frac{pa^2}{2EI} \quad M_B = \frac{pa^2b}{l^2}$$

Utilizando las ecuaciones de la estática ( $\Sigma F_y = \Sigma M = 0$ ) calculamos las reacciones en el extremo A y nos queda que:



A continuación se presentan algunos casos adicionales comúnmente utilizados de momentos de empotramiento para barras de sección constante calculadas análogamente a los ejemplos 1 y 2. En el caso de tener una combinación de los casos citados, se obtendrán los momentos de empotramiento por separado para cada caso y después se utilizará el principio de superposición de causas y efectos para obtener los momentos finales.

Es evidente, aquí también que en los casos en los que A no sea constante a lo largo de la longitud del elemento se tendrá que obtener una función en la cual se haga variar A e I, según sea el caso, a lo largo de la longitud de tal elemento. Estos casos especiales se tratarán con mayor detalle en el capítulo 8.

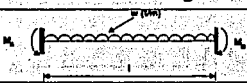
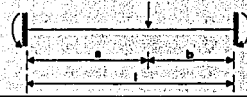

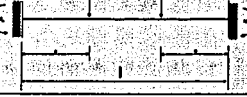

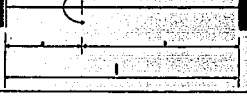
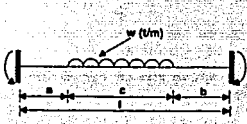
Condición de carga	MA	MB
	$\frac{wl^2}{12}$	$\frac{wl^2}{12}$
	$\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$
	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$
	$\frac{Pa(l-a)}{l}$	$\frac{Pa(l-a)}{l}$
	$\frac{wl}{10}$	$\frac{wl}{15}$
	$\frac{M}{l^2}(4la - 3a^2 - l^2)$	$\frac{M}{l^2}(2la - 3a^2)$
	$\frac{w}{l^2} \left[ \frac{2(a+c)^2 - a^2}{2} - \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} + \frac{(a+c)^4 - a^4}{4} \right]$	$\frac{w}{l^2} \left[ \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} - \frac{(a+c)^4 - a^4}{4} \right]$

Tabla 4-1.

Continuación Tabla 4-1.

Condición de carga	MA	MB
<p>Diagram showing a beam of length <math>l</math> fixed at both ends (<math>M_A</math> and <math>M_B</math>) and subjected to a uniformly distributed load <math>w</math> (U/m).</p>	$\frac{wl^2}{3}$	$\frac{wl^2}{6}$
<p>Diagram showing a beam of length <math>l</math> fixed at both ends (<math>M_A</math> and <math>M_B</math>) and subjected to a point load <math>p</math> at a distance <math>a</math> from the left end and <math>b</math> from the right end.</p>	$\frac{pa}{2} \left( 1 + \frac{b}{l} \right)$	$\frac{pa^2}{2l}$

---

## Capítulo 5

---

# Conceptos estructurales básicos

### 5.1 CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS (CONCEPTOS GENERALES)

Una estructura, en general, está formada por elementos interconectados los cuales, independientemente de su forma, se consideran en una, dos y tres dimensiones. En realidad un elemento tiene siempre tres dimensiones: longitud, ancho y espesor; sin embargo, si el ancho y espesor son pequeños en comparación con su longitud, como en el caso de vigas y columnas, tales elementos pueden considerarse como unidimensionales. En el caso de placas y cascarones, el espesor es normalmente más pequeño que la longitud y el ancho del elemento; de ahí que las placas y cascarones se consideran bidimensionales.

Las estructuras pueden dividirse en las tres categorías siguientes considerando sus elementos como de una, dos o tres dimensiones.

- 1) Estructuras esqueléticas
- 2) Estructuras laminares
- 3) Sólidos

El presente trabajo estudia las estructuras de la primera categoría donde los elementos se consideran como unidimensionales.

La clasificación anterior es el resultado de la idealización de las estructuras reales con ciertas aproximaciones e hipótesis. Por ejemplo, un edificio se idealiza normalmente en tal forma que su entramado, es decir, el conjunto de vigas y columnas de los pisos, se considera como de tipo estructura de esqueleto y las placas son de tipo laminar, aunque el sistema completo es realmente la combinación de los tres tipos antes mencionados.

El tipo de estructura de esqueleto puede a su vez dividirse en los siguientes tipos:

- 1) Armaduras (celosías)
- 2) Sistemas planos
- 3) Sistemas reticulados
- 4) Marcos rígidos tridimensionales

—En las armaduras, los elementos se unen entre sí por articulaciones sin rozamiento y las cargas se aplican en los nudos. En consecuencia los elementos están sometidos únicamente a esfuerzos axiales (tensión o compresión).

- En los sistemas planos, los elementos están unidos entre sí por nudos rígidos lo mismo que por articulaciones sin rozamiento y las cargas se aplican tanto en los nudos como en los elementos. Las rigideces a la flexión de estos elementos normalmente son grandes comparadas con las de las armaduras. Los elementos no están sujetos a torsión, pues la estructura y las cargas están en el mismo plano.
- Los reticulados, son los sistemas planos que están sujetos a cargas en diferentes planos. En otras palabras, la estructura y las cargas no están en el mismo plano y como consecuencia de esto los elementos están sujetos tanto a torsión como a flexión. Corresponden a este tipo de estructura los sistemas de tablero de puentes, los sistemas de piso de edificios, etc.
- Los marcos rígidos tridimensionales, son el tipo más general de estructura de esqueleto. Las cargas están aplicadas en cualquier punto y en cualquier dirección y los elementos pueden estar unidos entre sí en cualquier forma. Este trabajo estudiará las dos primeras categorías y en el caso de armaduras las estudiaremos en dos y tres dimensiones.

Antes de analizar una estructura es importante definir cada uno de los parámetros que la definen y que serán base importante para la obtención de la información que de aquella requerimos (fuerzas y/o desplazamientos). Estos datos pueden ser geometría de la estructura, propiedades mecánicas de los materiales, cargas, etc. También es importante definir claramente los nudos, elementos, desplazamientos, etc. A esta técnica se le llama "topología" y es muy importante en el análisis matricial pues de ella dependerá el orden de ejecución de los pasos para la solución del problema.

Para considerar el sentido en que se toma cada elemento, se supondrá que empieza en uno de los extremos y termina en el otro; para indicarlo se coloca una punta de flecha en el extremo que se considera final orientada hacia ese mismo extremo. Al extremo opuesto se le considera como extremo inicial *A* y al final *B*. El número de elemento se encierra en un cuadrado que irá bajo o a un lado del elemento en cuestión. Figura 5-1.



Figura 5-1.

Enseguida, numeramos los nudos de nuestra estructura en orden creciente según un orden definido y se encierran en un círculo.

También es necesario establecer un sistema de coordenadas para definir nudos y apoyos (figura 5-2).

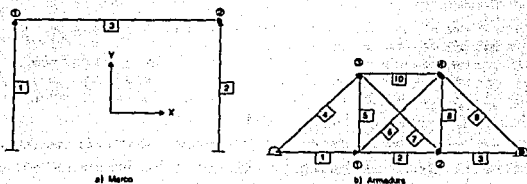


Figura 5-2. Topología de una estructura

Es importante señalar que en este tipo de análisis los apoyos no se numeran como nudos, a menos que estos permitan al menos un grado de libertad, y que este se considere dentro de el análisis. Por ejemplo, los apoyos de la armadura, figura 5.2 b, son articulaciones por lo que permiten el giro de los elementos que concurren a esos apoyos. Sin embargo, en los nudos de una armadura solo se consideran dos desplazamientos lineales ( $dx$ ,  $dy$ ) por cada nudo (nudos 1, 2, 3, 4) y no se considera el desplazamiento angular (giro) por lo tanto, dichos apoyos no se numeran.

En el caso de marcos planos un apoyo se considera o no como nudo si permite al menos un desplazamiento, ver figura 5.3.

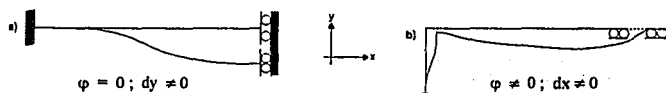


Figura 5-3.

Esto depende de si se consideran las matrices de rigidez modificada de cada elemento (ver capítulo 8)

### 5.1.1 Estabilidad y grado de indeterminación

— **Armaduras.** Una armadura está compuesta por un cierto número de barras unidas en sus extremos mediante articulaciones o pasadores formando una red que consta de una serie de triángulos y montada sobre un número de apoyos, figura 5.4 a.

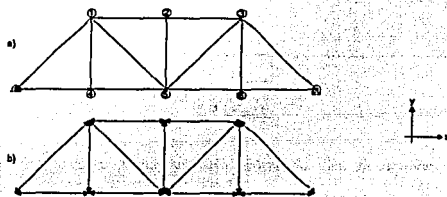


Figura 5-4.

Cada barra de una armadura es un elemento sometido a dos fuerzas, de tal manera que cada una representa una incógnita de fuerza interior. El número total de elementos desconocidos del sistema completo es igual al número de barras más el número de elementos de reacción independiente. Si llamamos  $NB$  al número de barras y  $ND$  al número de desplazamientos independientes, podemos establecer un criterio de estabilidad y grado de indeterminación de la armadura comparando unas y otras.

- Si  $NB < ND \Rightarrow$  El sistema es inestable
- Si  $NB = ND \Rightarrow$  El sistema es estáticamente determinado siempre que sea estable.
- Si  $NB > ND \Rightarrow$  El sistema es estáticamente indeterminado siempre que sea estable.

Y entonces

$$GH = NB - ND$$

Donde  $GI =$  grado de indeterminación.

El cumplimiento de la condición  $NB \geq NI$  no asegura que la armadura sea estable. Para que una armadura sea estable se requiere el cumplimiento de más condiciones. Primero, el valor del número de reacciones debe ser igual o mayor que el de tres requerido para la estabilidad estática de los apoyos. Luego, no debe haber una disposición inadecuada en los apoyos y barras para evitar a la vez inestabilidad geométrica externa e interna.

Básicamente, una armadura estable puede obtenerse partiendo de tres barras unidas por medio de pasadores en sus extremos, formando un triángulo y ampliarse a partir de este añadiendo dos nuevas barras por cada nudo nuevo (figura 5.4).

Puesto que esta estructura satisface que  $NB = NI$ , tendremos una estructura estáticamente determinada (según el inciso anterior, el apoyo derecho de la figura 5-4a se considera como nudo puesto que permite desplazamiento en el eje  $x$  según la figura).

Supongamos que la forma de esta armadura se cambia, como se muestra en la figura 5-5. El número de barras y nudos es el mismo; la ecuación de condición de estabilidad sigue cumpliéndose. Sin embargo, es geoméricamente inestable porque no hay una barra que soporte la fuerza vertical (cortante) en el tramo donde se omitió la diagonal.

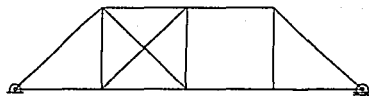


figura 5-5.

Hay ciertos casos en los cuales la estabilidad de una armadura no es clara. Una forma de comprobarlo es la de intentar el cálculo de los esfuerzos y ver si los resultados son compatibles o no. Un resultado incompatible indica que la solución no es única, sino infinita e indeterminada, en tal caso la armadura es inestable.

— Marcos rígidos. Un marco rígido se compone de vigas y columnas unidos rigidamente, tal como el mostrado en la figura 5-6 a. La estabilidad y grado de indeterminación de un marco rígido puede investigarse comparando el número de incógnitas y ecuaciones de la estática (internas y de reacción) disponibles para su solución. Un marco puede separarse en un número de sólidos aislados, igual al de nudos, como se muestra en la figura 5-6 b, lo que requiere separar todos los elementos (vigas y columnas) del marco mediante dos secciones. Existen tres magnitudes desconocidas en cada sección de un elemento,  $N$ ,  $V$  y  $M$ . Sin embargo, si se conocen estas cantidades en una sección, pueden determinarse las correspondientes de la otra sección, esto se explica más adelante.

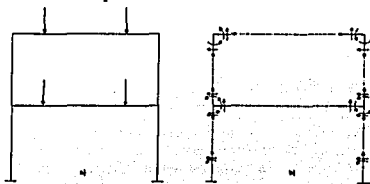


Figura 5-6.



Por tanto, solamente hay tres incógnitas internas e independientes en cada elemento de un marco. Si  $N_B$  representa el número de barras y  $N_R$  el número de elementos de reacción entonces el número total de incógnitas independientes en un marco rígido es  $3N_B + N_R$ . Un nudo rígido separado como sólido aislado se encuentra sometido a un sistema general de fuerzas y momentos como se indica en la figura 5.6, ya que un nudo rígido es capaz de soportar momentos. Para el equilibrio de un nudo, este sistema debe satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio,  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M = 0$ . En esta forma, si el número total de nudos rígidos es  $i$ , entonces podrán escribirse  $3i$  ecuaciones independientes de equilibrio para el sistema completo.

Puede suceder que se introduzcan articulaciones u otros dispositivos de construcción en la estructura con el fin de proveer ecuaciones adicionales de la estática, por ejemplo un total de  $c$ . Así, el número total de ecuaciones de la estática disponibles para la solución de  $3N_B + N_R$  incógnitas será  $3i + c$ . Los criterios para la estabilidad y grado de indeterminación de un marco rígido se establecen comparando el número de incógnitas ( $3N_B + N_R$ ) con el número de ecuaciones independientes ( $3i + c$ ).

- Si  $3N_B + N_R < 3i + c$  El marco es inestable.
- Si  $3N_B + N_R = 3i + c$  El marco es determinado siempre que sea estable.
- Si  $3N_B + N_R > 3i + c$  El marco es indeterminado.

Para el caso de la figura 5-6 hay seis nudos, incluyendo los apoyos, seis barras y seis elementos de reacción, pero ninguna ecuación de construcción. Por lo tanto.

$$(3N_B + N_R = 24) > (3i + c = 18)$$

Por consiguiente.

$$GH = 6$$

Muchos problemas que pueden investigarse mediante una ecuación, pueden fácilmente resolverse por simple investigación ocular cortando los elementos del marco y descomponiendo la estructura en varios mas simples (estructura en árbol).

Para que una estructura de nudos rígidos sea isostática, debe existir solamente un camino a seguir por las cargas aplicadas de cualquier punto hasta la sustentación. Esto implica que la estructura debe estar ligada a la sustentación en un solo punto, y que las barras deben estar dispuestas de tal manera que no formen ningún anillo cerrado. Tales estructuras se denominan en árbol.

## 5.2 CONTINUIDAD Y EQUILIBRIO

Con el fin de poder entender objetivamente los principios de continuidad y equilibrio mencionados en el capítulo 2, la presente sección establece tales relaciones, aplicadas a sistemas estructurales.

- Continuidad. Este principio supone que la deformación y consecuentemente el desplazamiento de cualquier punto particular de una estructura es continuo y tiene un solo valor. Normalmente esta condición se emplea, al igual que las condiciones de equilibrio, para satisfacer que los desplazamientos son únicos en los extremos de los elementos que concurren a un nudo.

Supongamos que algunos elementos están rigidamente unidos entre sí en el nudo  $i$  como se muestra en la figura 5-7. Después de aplicar las cargas sobre el sistema, supongamos que el nudo  $i$  se desplaza una cantidad  $d_i$ . La condición de compatibilidad o continuidad requiere que:

$$d_1 = d_a = d_b = d_c$$

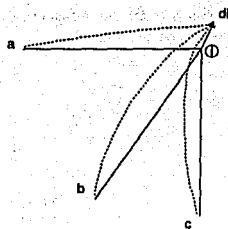


Figura 5-7.

Donde  $d_{ij}$  representa el desplazamiento del extremo  $i$  del elemento  $j$ . La ecuación 5.1 es válida siempre y cuando los elementos estén unidos entre sí rigidamente y no se produzca fluencia ni falla en el nudo.

Una vez conocidos los desplazamientos en los nudos de una estructura, según el principio de continuidad, podemos encontrar las deformaciones en cada uno de los elementos del sistema estructural, ya que unos y otros son compatibles.

— **Equilibrio.** Normalmente hay dos clases de equilibrio, equilibrio estático y equilibrio dinámico. Cuando las cargas están aplicadas sobre una estructura en forma causal (partiendo de cero y alcanzando su valor final gradualmente) la estructura se deforma bajo estas cargas y quedará en reposo en su forma final. Desde este instante la estructura no sufre cambios en su posición ni en su forma deformada. Esta es la llamada posición de equilibrio estático de la estructura. Por el contrario, si las cargas se aplican súbitamente, la estructura alcanzará diferentes deformaciones en diferentes instantes. Si cualquier partícula o porción de la estructura está en equilibrio en cualquier instante bajo la acción de cargas externas, fuerzas gravitacionales, fuerzas elásticas y fuerzas inerciales que actúan sobre ella, entonces se dice que existe el llamado equilibrio dinámico de la estructura el cual no es nuestro objetivo estudiar.

La condición de equilibrio estático establece que la suma de todas las fuerzas externas e internas que actúan sobre la estructura (incluyendo las reacciones) trasladadas a un punto común, será igual a cero.

Supongamos que en un espacio físico bidimensional, el cuerpo elástico mostrado en la figura 5.8 está en equilibrio estático bajo las cargas dadas ( $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ), donde  $P_i$  representa las fuerzas generalizadas (incluyendo los momentos) aplicadas en el punto  $i$ . El equilibrio estático establece que:

$$P'_1 + P'_2 + P'_3 + \dots + P'_n = 0 \quad 5.2$$

Donde  $P'_i$  representa a  $P_i$  trasladada a un sistema de coordenadas comunes localizado en un punto arbitrario tal como el punto  $O$  de la figura 5-8.

Además de todo el equilibrio de la estructura, cualquier parte aislada de ella debe estar también en equilibrio. Supongamos que el nudo  $i$  en la figura 5-8 se aísla de la estructura como se muestra en la figura 5-9.

Representemos por  $P_{ij}$  ( $i = 2, n$  en la figura 5-9) las fuerzas internas desarrolladas en el extremo  $i$  del elemento  $j$  debidas a las cargas aplicadas. El equilibrio del nudo  $i$  establece que la suma de todas las fuerzas internas y externas que concurren a dicho nudo es igual a cero, donde  $m$  es el número de elementos que concurren al nudo  $i$  (ecuación 5.3). Si esta ecuación se satisface en cada nudo de la estructura, la condición

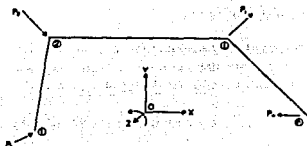


Figura 5-8.

de equilibrio para todo el sistema en conjunto también se cumple (ecuación 5.2). En este trabajo usaremos frecuentemente las ecuaciones de equilibrio de nudos.

$$\sum_{j=1}^m P_{1j} + P_1 = 0 \quad 5.3$$

Otra condición de equilibrio que aplicaremos frecuentemente es el equilibrio de un elemento bajo fuerzas internas desarrolladas en sus extremos que en forma matricial se escribe según la ecuación 5-4:

$$\begin{aligned} P_A + h_{BA} P_B &= 0 & \text{a)} \\ h_{AB} P_A + P_B &= 0 & \text{b)} \end{aligned} \quad 5.4$$

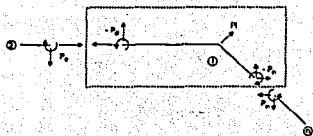


Figura 5-9.

Donde  $h_{ij}$  es una matriz que traslada las fuerzas de un extremo del elemento al otro extremo y donde:

$$h_{BA} = h_{AB}^{-1}$$

Por simplicidad supondremos que:

$$\begin{aligned} h_{BA} &= h \\ h_{AB} &= h^{-1} \end{aligned} \quad 5.5$$

Así, las expresiones 5-4 nos quedan como:

$$\begin{aligned} P_A + h P_B &= 0 & \text{a)} \\ h^{-1} P_A + P_B &= 0 & \text{b)} \end{aligned} \quad 5.6$$

Y llamaremos a  $h$  la matriz de equilibrio de la barra asociada con esta. En nuestro análisis,  $h$ , está asociada con el extremo B de la barra aunque pudo haberse hecho igualmente para el extremo A de esta. En esta forma, los esfuerzos en una barra los definiremos por  $P_A$  y para obtener los esfuerzos  $P_B$  utilizaremos la ecuación 5.6 a).

Por otra parte,  $h$  resultará independiente de las características elásticas de la barra y consiste simplemente en una función de la posición relativa de sus extremos en nuestro eje de referencias. Esto hace suponer que los coeficientes de  $h$  dependerán del sistema particular de coordenadas empleado para expresar las componentes de las cargas  $P_A$  y  $P_B$ .

Consideremos el caso general de una barra en el plano, en la cual el extremo B tiene coordenadas  $b_x, b_y$ , con respecto al extremo A como se muestra con la figura 5-10.

Las ecuaciones de equilibrio de la barra resultarán, según la figura 5.10 como:

$$\begin{aligned} P_{xA} + P_{xB} &= 0 \\ P_{yA} + P_{yB} &= 0 \\ M_A + M_B + l_x P_{yB} - l_y P_{xB} &= 0 \end{aligned}$$

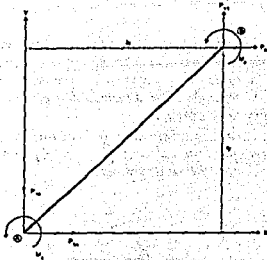


Figura 5-10.

Que se puede escribir como:

$$P_A + h P_B = 0 \quad 5.7 \text{ a}$$

Donde tenemos que:

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -ly & lx & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = 0 \quad 5.7 \text{ b}$$

Si además, el eje de coordenadas se elige de forma que el eje  $x'$  de coordenadas, coincida con el eje de la barra, entonces la ecuación correspondiente será:

$$\begin{Bmatrix} P_{XA}' \\ P_{YA}' \\ M_A' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{XB}' \\ P_{YB}' \\ M_B' \end{Bmatrix} = 0 \quad 5.8$$

En donde  $l$  es la longitud de la barra.

Así, si una fuerza  $P_B$  actúa en el extremo B de la barra, los esfuerzos transmitidos al nudo del extremo A son  $-P_A$  y estos son iguales a  $h P_B$  según la ecuación 5.6 a. La inversa de  $h$  se obtiene cambiando los signos de los elementos exteriores a la diagonal principal.

Utilizando un razonamiento semejante en el caso de los desplazamientos en los extremos de la barra, se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} d_B &= h^T d_A \quad \text{a)} \\ d_A &= h d_B \quad \text{b)} \end{aligned} \quad 5.9$$

Cada una de las tres ecuaciones (5.2, 5.3, 5.4) establecen el mismo hecho en una forma diferente, cual es el equilibrio de una estructura. Si una de ellas se cumple para todos los elementos  $ij$ , las otras dos se satisfacen por este mismo hecho, pudiendo cada una emplearse para diferentes propósitos.

En resumen, el principio de equilibrio establece que:

- 1) La estructura está en equilibrio
- 2) Los nudos están en equilibrio
- 3) Los elementos están en equilibrio

### 5.2.1 Matriz de continuidad y matriz de equilibrio

En la primera parte del método de rigideces (capítulo 6) consideramos este método planteándolo desde un punto de vista ligeramente diferente, introduciendo los conceptos de matriz de continuidad y matriz de equilibrio. Aunque esta formulación del método no se emplea comúnmente para resolver problemas, tiene un interés teórico considerable ya que proporciona un punto de unión entre el método de rigideces y los métodos más sencillos apropiados para el tratamiento de sistemas isostáticos.

Ilustraremos esta idea considerando el cálculo de la matriz de continuidad y de equilibrio, en la estructura de nudos rígidos de la figura 5.11. Esta estructura puede considerarse ya sea en el plano o en el espacio siempre que los diversos vectores y matrices estén convenientemente definidos.

Los vectores que se utilizan son:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix}; \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}; \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix}$$

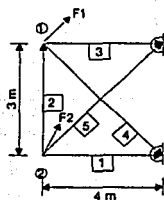
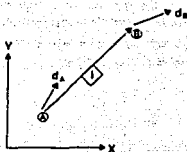


Figura 5-11.

Los elementos de los vectores  $\{p\}$  y  $\{e\}$  están definidos en el correspondiente sistema de coordenadas local de cada barra y corresponden respectivamente a las fuerzas internas y deformaciones en los extremos de las barras. El vector de deformaciones está formado por la deformación de cada elemento, que se obtiene a partir de los desplazamientos que resulten del análisis para los dos extremos de cada barra. Así tendremos que:

$$e_i = d_B - d_A$$



En la cual los desplazamientos están convenientemente definidos en el mismo sistema de coordenadas.

Consideremos ahora el ensamble real de las barras en la estructura. En nuestro ejemplo ilustrativo las ecuaciones de continuidad de deformaciones están referidas al vector movimiento de nudos  $\{d\}$  y se establecen en la forma.

$$\begin{aligned} e_1 &= d_2 \\ e_2 &= d_1 - d_2 \\ e_3 &= d_1 \\ e_4 &= d_1 \\ e_5 &= d_2 \end{aligned}$$

5.10


Debe sin embargo, recordarse que para poder obtener la deformación de una barra (la cual se expresa en sistema local), es preciso transformar los desplazamientos en los nudos al correspondiente sistema local de la barra en cuestión. Así, las expresiones 5.10 pueden escribirse en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_{A1} \\ R_{B2} & R_{A2} \\ R_{A3} & 0 \\ R_{A4} & 0 \\ 0 & R_{A5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad 5.11$$


$$[e] = [a] [d]$$

En donde 0 y R son matrices de dimensiones apropiadas al número de componentes de los vectores movimiento y deformación. Además R permite relacionar las deformaciones, expresadas en sistema local, con los desplazamientos, expresados en el sistema global de coordenadas. Así, en la expresión 5.11, la matriz [a] se define como la matriz de continuidad de la estructura.

La formación de la matriz de continuidad de una estructura varía de un sistema estructural a otro. En el caso de un marco rígido por ejemplo, la deformación  $e_i$  de una barra quedará plenamente definida al conocer los giros  $\theta_{A_i}$  y  $\theta_{B_i}$  de sus extremos, así como la elongación  $\delta_i$ . Por consiguiente, la deformación de una barra estará asociada a un vector de la forma:

$$e_i = \begin{Bmatrix} \theta_{A_i} \\ \theta_{B_i} \\ \delta_i \end{Bmatrix} \quad \text{Donde}$$


En el caso de armaduras planas, la deformación de una barra queda plenamente definida al conocer tan solo la elongación de la misma ya que sus extremos no resisten momentos flexionantes. Por consiguiente la deformación de una barra estará asociada a un vector de la forma:

$$e_i = \{\delta_i\} \quad \text{Donde}$$


En base a lo anterior, es posible obtener la deformación de una barra, para esto consideramos el caso más general, es decir una barra de nudos rígidos en la cual se han obtenido los desplazamientos de sus extremos. Cada desplazamiento asociado al extremo de una barra, se define por dos desplazamientos lineales y un giro (ecuación 3.2). Ahora podemos deducir una expresión general para obtener la deformación de una barra dando como datos su topología y su ángulo de inclinación respecto al eje global de coordenadas. De la figura 5.12 podemos deducir las siguientes igualdades:

$$\delta_1 = -\text{Coseno } \alpha \, dx_A - \text{Seno } \alpha \, dy_A + \text{Coseno } \alpha \, dx_B + \text{Seno } \alpha \, dy_B$$

$$\theta_{A1} = -\frac{\text{Seno } \alpha}{l} dx_A + \frac{\text{Coseno } \alpha}{l} dy_A + \varphi_A + \frac{\text{Seno } \alpha}{l} dx_B - \frac{\text{Coseno } \alpha}{l} dy_B \quad 5.12$$

$$\theta_{B1} = -\frac{\text{Seno } \alpha}{l} dx_A + \frac{\text{Coseno } \alpha}{l} dy_A + \frac{\text{Seno } \alpha}{l} dx_B - \frac{\text{Coseno } \alpha}{l} dy_B + \varphi_B$$

$$\Delta = -\text{Seno } \alpha \, dx_A + \text{Coseno } \alpha \, dy_A + \text{Seno } \alpha \, dx_B - \text{Coseno } \alpha \, dy_B$$

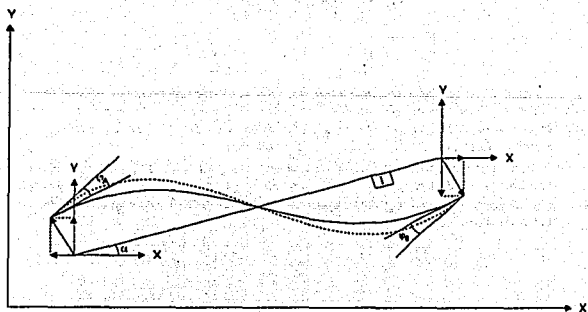


Figura 5-12.

Que podemos escribir en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{Coseno } \alpha & -\text{Seno } \alpha & 0 \\ \frac{\text{Seno } \alpha}{l} & \frac{\text{Coseno } \alpha}{l} & 1 \\ -\frac{\text{Seno } \alpha}{l} & \frac{\text{Coseno } \alpha}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Coseno } \alpha & \text{Seno } \alpha & 0 \\ \frac{\text{Seno } \alpha}{l} & -\frac{\text{Coseno } \alpha}{l} & 0 \\ \frac{\text{Seno } \alpha}{l} & -\frac{\text{Coseno } \alpha}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ \varphi_A \\ dx_B \\ dy_B \\ \varphi_B \end{Bmatrix} \quad 5.13$$

$$e_1 = a \times d$$

Y que es la expresión general para conocer la deformación de una barra según su dirección y sus desplazamientos en los extremos.

En el caso de una barra articulada en sus extremos, la expresión para obtener la deformación de la misma se puede obtener a partir de la expresión 5.13 eliminando el segundo y el tercer renglón, así como los giros  $\varphi_A$  y  $\varphi_B$  del vector de desplazamientos. Por lo tanto, para obtener la deformación en una barra de una armadura utilizaremos la expresión:

$$\{\delta_i\} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dx_B \\ dy_B \end{Bmatrix} \quad 5.14$$

$$e_i = a \times d$$

Por otra parte, la ecuación de equilibrio de nudos para la figura 5.11 resulta ser:

$$F_1 = P_{B2} + P_{A3} + P_{A4} \quad 5.15$$

$$F_2 = P_{A1} + P_{A2} + P_{A5}$$

En este caso debe señalarse también que los diferentes  $P_i$  están expresados en su sistema local de coordenadas y para poder compararlos con las fuerzas exteriores (expresadas en el sistema global) debe haber una transformación de coordenadas que relacione unos y otros (cargas externas y fuerzas internas) según la barra en cuestión. Las ecuaciones 5.15 pueden por lo tanto escribirse en la forma:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & 0 & 0 & Q_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix} \quad 5.16$$

$$\{F\} = \{B\} \{P\}$$

En donde la matriz  $\{B\}$  establece la relación que existe entre las fuerzas externas que se aplican a una estructura y las fuerzas internas de sus elementos. Como se dedujo en el capítulo 2, y se puede demostrar, la matriz  $\{B\}$  se llama matriz de equilibrio de la estructura y es igual a la transpuesta de la matriz de continuidad. Por lo tanto podemos escribir la ecuación 5.16 como:







$$\theta_i = R_{Bj} d_{Bj} - R_{Aj} d_{Aj} \quad 5.18$$

En la cual

Para Armaduras

$$R_{Aj} = \{\mu_j^T\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \end{Bmatrix}^T$$

$$R_{Bj} = \{\mu_j^T\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \end{Bmatrix}^T$$

Para Marcos

$$R_{Aj} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ \frac{\text{sen } \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} & -1 \\ \frac{\text{sen } \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{Bj} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ \frac{\text{sen } \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} & 0 \\ \frac{\text{sen } \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} & 1 \end{bmatrix}$$

En lo que respecta al grado de indeterminación en una estructura, podemos concluir que este depende exclusivamente de si la ecuación general de equilibrio de nudos de la estructura,  $\{F\} = [a^T] \{p\}$ , puede ser resuelta por el vector  $\{p\}$ . Si la matriz  $[a^T]$ , que aparece en esta ecuación, es rectangular resulta imposible obtener una solución única y la estructura es por consiguiente hiperestática. Pero si existe la inversa  $[a^T]^{-1}$  entonces los esfuerzos en la estructura pueden obtenerse inmediatamente al escribir la ecuación de equilibrio de nudos en la forma:

$$\{p\} = [a^T]^{-1} \{F\} \quad 5.19$$

En el siguiente capítulo analizaremos en detalle el procedimiento para el cálculo de la matriz de continuidad e implícitamente la matriz de equilibrio de una estructura. ■

---

# Métodos de los desplazamientos

*La esencia del método del equilibrio o de los desplazamientos, relativo las estructuras reticulares, consiste en considerar como incógnitas básicas los desplazamientos de los nudos. En cualquier aplicación del método, el primer paso es expresar los esfuerzos en los extremos de las piezas, en función de los correspondientes movimientos de dichos extremos. Estas expresiones de los esfuerzos en los extremos resultan, en general, de la integración de las ecuaciones diferenciales apropiadas de elongación, flexión o torsión asociadas con la barra (capítulo 4). Pueden obtenerse por integración directa de estas ecuaciones o por derivación de la adecuada expresión de la energía elástica con respecto a los movimientos del extremo de la barra. Si la estructura es lineal los esfuerzos en los extremos de la barra serán funciones lineales de los movimientos de los mismos, siendo los coeficientes de los movimientos funciones de las propiedades mecánicas y geométricas de las piezas.*

*El paso siguiente utiliza las condiciones de compatibilidad para determinar los movimientos de los extremos de las piezas en términos de los movimientos de los nudos. Así, obtenemos expresiones de los esfuerzos que actúan en los extremos de la pieza, en función de los movimientos incógnitas de estos extremos, los cuales satisfacen las ecuaciones fuerza-movimiento y las ecuaciones de compatibilidad. Estas expresiones de los esfuerzos extremos de las barras, se sustituyen en las ecuaciones de equilibrio del nudo. El resultado es un sistema de ecuaciones —las ecuaciones esfuerzo-movimiento de la estructura— que relacionan los esfuerzos conocidos de los nudos con los movimientos desconocidos de los mismos. Habrá una ecuación para cada componente del movimiento del nudo y el término independiente será la componente de la carga aplicada.*

*Resolviendo este sistema se obtienen los valores de los movimientos incógnitas de los nudos. Una vez hecho esto, las expresiones ya utilizadas al establecer las ecuaciones de equilibrio pueden emplearse para hallar los esfuerzos en los extremos de las barras.*

*Se observará posteriormente, que en la aplicación del método del equilibrio son siempre los movimientos los que primero se deducen. El número de ecuaciones a resolver es igual al número total de movimientos independientes desconocidos, el "grado de libertad" de la estructura como a menudo se llama, y no se ve afectado por si la estructura es isostática o hiperestática.*

### 6. 1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

*El problema fundamental para el método de los desplazamientos es encontrar la matriz de rigidez global de la estructura (definida en el capítulo 2), la cual relaciona las fuerzas externas que obran en la estruc-*

tura con los desplazamientos que producen dichas fuerzas. Para su obtención se pueden establecer tres procedimientos.

- Por medio de la ecuación 2.11  $[K] = [a]^T [k] [a]$  (obtención de  $[a]$ )
- Directamente. Dando desplazamientos unitarios a la estructura, se puede obtener  $[a]$  y  $[K]$  en marcos, y  $[a]$  en armaduras.
- Por medio de la matriz de rigidez acoplada de cada barra.

El primero, es un procedimiento analítico a partir de los planteamientos del capítulo 2, los dos últimos procedimientos corresponden a los enfoques comentados en la introducción.

A continuación analizaremos cada uno de los procedimientos en primer lugar para armaduras y posteriormente en marcos planos.

### 6.1.1 Armaduras planas

Para el caso de armaduras en dos y tres dimensiones, se presenta el enfoque único, el cual toma en cuenta la totalidad de los desplazamientos nodales, dos en el plano y tres en el espacio, obteniéndose de esta forma resultados exactos.

Para poder abordar el problema es necesario establecer una convención de signos apropiada. Cuando se consideran fuerzas que actúan en los nudos, se considera que la componente de una fuerza es positiva cuando actúa en el sentido positivo de los ejes  $X$  y  $Y$ , como indica la figura 6.1 a, esta misma convención será válida en el caso de los desplazamientos. Cuando se calculan esfuerzos, por el contrario, es igualmente razonable suponer positivo un esfuerzo de tensión y negativo un esfuerzo de compresión como se ve en la figura 6.1 b.

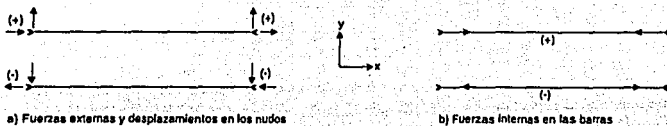


Figura 6-1.

Para este procedimiento, el problema es obtener las matrices  $[a]$  y  $[k]$  y los datos necesarios para construirlos son:

- Topología de la estructura
- Geometría de la estructura
- Sección de las barras
- Módulo de elasticidad de las barras

Para una mejor comprensión del método construiremos la matriz de rigidez global basándonos en la figura y datos siguientes:

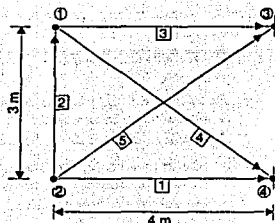
## Ejemplo no. 1

— La topología se expone en la figura

— La geometría se expone en la figura

— Las secciones serán circulares  
 $A = 20 \text{ cm}^2$

— El material será a cero  
 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

6.1.1 a) Obtención de  $[K] = [a]^T [k] [a]$ 

Es importante que las unidades sean compatibles por lo cual y de aquí en adelante expresaremos todo en toneladas y en metros.

La dimensión de la matriz  $[a]$  es igual al número de elementos por el número de desplazamientos incógnitas correspondientes a toda la estructura —en este caso  $N^B \times N^D = 5 \times 4$ — y la manera en que se conformará la matriz de continuidad es como sigue:

$$[a] = \begin{array}{c|cccc} & dx_1 & dy_1 & dx_2 & dy_2 \\ \hline e_1 & & & & \\ e_2 & & & & \\ e_3 & & & & \\ e_4 & & & & \\ e_5 & & & & \end{array}$$

Cada renglón corresponde a la deformación de una barra y es ocasionada por los desplazamientos en sus extremos. Para obtener cada uno de los renglones de la matriz  $[a]$  —uno por elemento— se puede utilizar la ecuación 5.14 (capítulo 5) para la cual se requiere conocer la topología, el ángulo de inclinación y los nudos a los cuales está unida la barra en cuestión. A continuación se hará la obtención de  $[a]$  por renglones, es decir para cada elemento.

Barra 1

Según su topología

Extremo A—nudo 2

Extremo B—nudo 4

$$e_1 = \{ \mu^T \} \{ d_B \} - \{ \mu^T \} \{ d_A \}$$

$$\theta_1 = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \begin{Bmatrix} \cos 0_1 \\ \sin 0_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{Bmatrix} = e_1 = (dx_1 + 0 dy_1) - (dx_2 + 0 dy_2)$$

Pero si observamos la figura, tenemos que el nudo 4 es un apoyo y por lo tanto no se puede desplazar con lo cual, solo se considera la parte correspondiente al nudo 2. La deformación será entonces:

$$e_1 = -dx_2$$

Para las restantes barras se procede igual con lo que nos queda que:

$$e_2 = dy_1 - dy_2$$

$$e_3 = -dx_1$$

$$e_4 = -0.8 dx_1 + 0.6 dy_1$$

$$e_5 = -0.8 dx_2 - 0.6 dy_2$$

Que podemos vaciar en el arreglo matricial de  $[a]$  y nos queda finalmente:

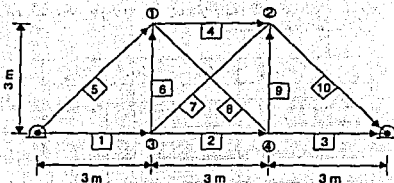
$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo se numeraron los apoyos para ejemplificar la obtención de  $[a]$  pero en adelante los apoyos no se numerarán a menos que permitan desplazamiento relativo.

**Ejemplo no. 2**

Obtener la matriz  $[a]$  para la siguiente armadura.

EA = Constante



Como se pudo observar en el ejemplo anterior, para la obtención de la matriz  $[a]$  solo necesitamos conocer la geometría de la estructura y su topología. A partir de estos datos podemos establecer una secuencia de cálculo que es como sigue.

1) Obtenemos los cosenos directores para cada elemento de la armadura según su topología (la cual puede ser arbitraria). Para nuestro ejemplo tenemos:

Para 1, 2, 3 y 4 
$$\mu = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para 5 y 7 
$$\mu = \begin{Bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Para 6 y 9} \quad \mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Para 8 y 10} \quad \mu = \begin{Bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{Bmatrix}$$

- 2) Una vez que se conocen los diferentes  $\mu_i$  de cada barra, se obtiene cada uno de los renglones de  $[a]$  con ayuda de la ecuación 5.14 en la cual, como es obvio, se desconocen los desplazamientos. La matriz de continuidad entonces, estará formada por los  $\mu_i$  de cada elemento.

$$e_1 = dx_3$$

$$e_2 = dx_4 - dx_3$$

$$e_3 = -dx_4$$

$$e_4 = dx_2 - dx_1$$

$$e_5 = 0.7071 dx_1 + 0.7071 dy_1$$

$$e_6 = dy_1 - dy_3$$

$$e_7 = 0.7071 dx_2 + 0.7071 dy_2 - 0.7071 dx_3 - 0.7071 dy_3$$

$$e_8 = 0.7071 dx_4 - 0.7071 dy_4 - 0.7071 dx_1 + 0.7071 dy_1$$

$$e_9 = dy_2 - dy_4$$

$$e_{10} = -0.7071 dx_2 + 0.7071 dy_2$$

- 3) Por último se construye la matriz de continuidad vaciando los coeficientes de los desplazamientos en los lugares correspondientes dentro de la matriz, según el desplazamiento al que se asocia dicho coeficiente, con su signo obtenido en cada caso. Por lo tanto y para nuestro caso nos quedará:

	$dx_1$	$dy_1$	$dx_2$	$dy_2$	$dx_3$	$dy_3$	$dx_4$	$dy_4$
$e_1$					1	0		
$e_2$					-1	0	1	0
$e_3$							-1	0
$e_4$	-1	0	1	0				
$[a] = e_5$	0.7071	0.7071						
$e_6$	0	1			0	-1		
$e_7$			0.7071	0.7071	-0.7071	-0.7071		
$e_8$	-0.7071	0.7071					0.7071	-0.7071
$e_9$			0	1			0	-1
$e_{10}$			-0.7071	0.7071				

En los lugares restantes se colocan ceros, ya que a excepción de las deformaciones obtenidas, los restantes desplazamientos y deformaciones no guardan ninguna relación.



### 6.1.1.b) Obtención de la matriz de continuidad dando desplazamientos unitarios

La matriz de continuidad de una estructura se puede encontrar también dando desplazamientos unitarios a los nudos en donde se encuentran las incógnitas del problema según los grados de libertad considerados y obteniendo (en función de los desplazamientos desconocidos) los coeficientes que conforman la matriz de continuidad.

Para obtener los signos de los coeficientes se observará el efecto que los desplazamientos unitarios producen en cada uno de los elementos de la estructura. El signo será positivo si produce un alargamiento o esfuerzo de tensión y negativo en caso contrario.

Para este método también es importante tomar en cuenta la posición del elemento, es decir, su inclinación y no será importante en este caso tomar en cuenta una topología, sin embargo también lo relacionamos.

En el caso de elementos inclinados, la deformación de dicho elemento será función de los dos componentes de desplazamiento  $dx$ ,  $dy$ . En el caso de elementos paralelos a los ejes  $x$  o  $y$  su deformación será función solo de una de las dos componentes, ya sea  $dx$  ó  $dy$ .

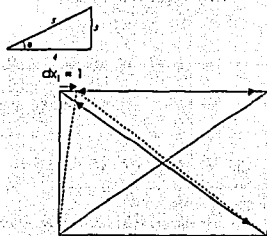
Para ejemplificar lo anterior obtengamos la matriz  $[a]$  de los ejemplos 1) y 2) antes vistos.

Los desplazamientos se producen uno a la vez quedando los demás nudos completamente rígidos según el procedimiento y los principios básicos del método de rigideces.

#### Ejemplo no. 1.

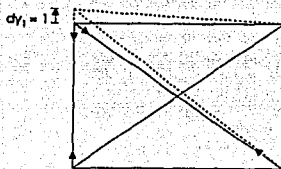
Procederemos dando uno a uno todos los desplazamientos y observando que deformación producen en cada barra.

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 0.8 \\ \text{Sen } \theta &= 0.6\end{aligned}$$



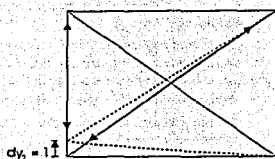
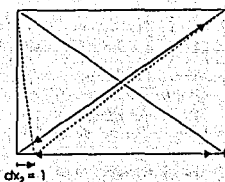
	$dx_1 = 1$	
$e_1$	0	No produce ninguna deformación
$e_2$	0	No produce ninguna deformación
$e_3$	-1	Produce acortamiento
$e_4$	-0.8	Produce acortamiento en $x$
$e_5$	0	No produce ninguna deformación

	$dy_1 = 1$	
$e_1$	0	No produce ninguna deformación
$e_2$	1	Produce alargamiento en $y$
$e_3$	0	No produce ninguna deformación*
$e_4$	0.6	Produce alargamiento en $y$
$e_5$	0	No produce ninguna deformación



$dx_2 = 1$	
$e_1$	-1 Produce acortamiento en X
$e_2$	0 No produce ninguna deformación
$e_3$	0 No produce ninguna deformación
$e_4$	0 No produce ninguna deformación
$e_5$	-0.8 Produce acortamiento en X

$dy_2 = 1$	
$e_1$	0 No produce ninguna deformación
$e_2$	-1 Produce acortamiento en Y
$e_3$	0 No produce ninguna deformación
$e_4$	0 No produce ninguna deformación
$e_5$	-0.6 Produce acortamiento en Y



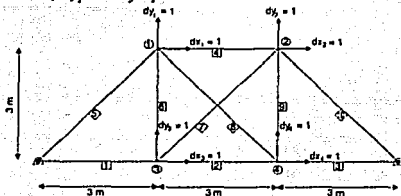
Una vez que se han obtenido todas las deformaciones los colocamos en el lugar correspondiente según el arreglo que a la matriz de continuidad le hallamos dado. En este caso nos quedará:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$$

Que es la misma obtenida por el primer método. Este procedimiento es muy sencillo y bastante práctico, resultando en ocasiones mucho más rápido. En la medida en que se practique se podrá comprobar la facilidad de ejecución.

Por este mismo método obtener la matriz  $[a]$  para el ejemplo no. 2.

Para hacer más rápido el proceso colocamos todos los desplazamientos y vamos ejecutándolos uno por uno, recordando que para cada caso, los restantes nudos quedan rígidos y así obtenemos el valor de las correspondientes deformaciones.



Elemento 1. Su deformación es ocasionada por la componente en X del nudo 3 a la cual le produce un alargamiento. Por lo tanto:

Elemento 2. Su deformación la ocasionan dos desplazamientos. La componente en  $x$  del nudo 3 y la componente en  $x$  del nudo 4, la primera le produce acortamiento y la segunda alargamiento. Por lo tanto:

$$e_2 = -dx_3 + dx_4$$

Elemento 3. Su deformación es ocasionada por la componente en  $x$  del nudo 4 la cual le produce un acortamiento. Por tanto:

$$e_3 = -dx_4$$

Elemento 4. Su deformación es función de la componente en  $x$  de los desplazamientos de los nudos 1 y 2. La primera componente le produce acortamiento y la segunda componente le produce alargamiento. Por lo tanto:

$$e_4 = -dx_1 + dx_2$$

Elemento 5. Su deformación es función de las dos componentes de desplazamiento del nudo 1 y las dos producen alargamiento del elemento. Por lo tanto:

$$e_5 = 0.707dx_1 + 0.707dy_1$$

Elemento 6. Su deformación es función de la componente en  $y$  de los nudos 1 y 3 de las cuales la primera le produce un alargamiento y la segunda acortamiento. Entonces:

$$e_6 = dy_1 - dy_3$$

Elemento 7. Su deformación es función de las dos componentes de desplazamiento de los nudos 2 y 3 donde las primeras producen alargamiento y las segundas acortamiento. Por tanto:

$$e_7 = 0.707dx_2 + 0.707dy_2 - 0.707dx_3 - 0.707dy_3$$

Elemento 8. Su deformación es función de las dos componentes de desplazamiento de los nudos 1 y 4 donde  $dx_1$  produce acortamiento,  $dy_1$  alargamiento,  $dx_4$  alargamiento y  $dy_4$  acortamiento. Por lo tanto:

$$e_8 = -0.707dx_1 + 0.707dy_1 + 0.707dx_4 - 0.707dy_4$$

Elemento 9. Su deformación es función de la componente  $y$  de los nudos 2 y 4, donde la primera produce tensión y la segunda produce compresión. Por lo tanto:

$$e_9 = dy_2 - dy_4$$

Elemento 10. Su deformación es función de las dos componentes de desplazamiento del nudo 2, donde  $dx_2$  produce acortamiento y  $dy_2$  produce alargamiento. Entonces:

$$e_{10} = -0.707dx_2 + 0.707dy_2$$

Una vez obtenidas las deformaciones en función de los desplazamientos, formamos la matriz de continuidad y vaciamos los coeficientes según su correspondiente desplazamiento con lo cual nos quedará como:

				1	0		
				-1	0	1	0
						-1	0
-1	0	1	0				
0.7071	0.7071			0	-1		
0	1						
		0.7071	0.7071	-0.7071	-0.7071		
-0.7071	0.7071					0.7071	-0.7071
		0	1			0	-1
		-0.7071	0.7071				

Como en los casos anteriores, los restantes lugares se llenan con ceros por no haber relación alguna entre desplazamientos y deformaciones.

Resulta conveniente hacer dos observaciones importantes de analizar respecto a la utilización y obtención de la matriz de continuidad.

- El primero se refiere a la forma en que se denomina (ecuación 2.11 capítulo 2) la matriz  $[a]$  como un "operador". Esto se debe a que; por ejemplo, el producto  $\partial/\partial x$ , u se entienda como la derivada parcial de  $u$  respecto a  $x$ , y así para los demás elementos del operador.

La forma que adquiere  $[a]$  dependerá de la discretización que se haga de la estructura. La ecuación 2.11 es el resultado del análisis de un sólido sometido a fuerzas de volumen, por esta razón el planteamiento del operador  $[a]$  es función de tres dimensiones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . En casos concretos su dimensión dependerá del número de elementos en que se discretice a la estructura. La ventaja será que la matriz de continuidad que se obtenga ya no funcionará como un operador, sino simplemente será una matriz de coeficientes los cuales solo dependerán de la geometría de la estructura y cuyo manejo es relativamente fácil si utilizamos las reglas del álgebra matricial. La ecuación 2.11 tiene solución por los métodos de las ecuaciones diferenciales, pero está fuera de este trabajo obtener dicha solución.

- El segundo comentario se refiere a la deformación real de una barra cuando existen desplazamientos en sus extremos. Por simplicidad se acepta que, cuando alguna barra coincide con alguno de los ejes de referencia su deformación solo es función de una de las dos componentes  $X$  ó  $Y$ . Esta hipótesis es válida pero en realidad no sucede así, ya que habrá una contribución a la deformación, por parte de la componente normal al eje de la barra.

Consideremos una barra cualquiera como la que se muestra en la figura 6.2. Después de someterla a un desplazamiento en uno de sus extremos.

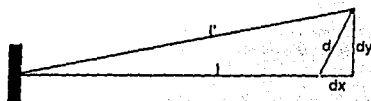


Figura 6-2. Deformación de una barra.

La barra sufrirá una deformación que será:

$$e = l' - l$$

6.1

Y de la figura 6.2 podemos ver que:

$$l' = \sqrt{(l + dx)^2 + dy^2}$$

$$l' = \sqrt{l^2 + 2ldx + dx^2 + dy^2}$$

$$l' = \sqrt{l^2 \left( 1 + \frac{2dx}{l} + \frac{dx^2}{l^2} + \frac{dy^2}{l^2} \right)}$$

$$l' = l \sqrt{1 + \frac{2dx}{l} + \left(\frac{dx}{l}\right)^2 + \left(\frac{dy}{l}\right)^2}$$

Debido a que los desplazamientos son muy pequeños, podemos inferir que el cociente  $(dx/l)$  es muy pequeño y al elevarlo al cuadrado se hace casi imperceptible con lo cual, y por ser normal al eje del elemento, su contribución a la deformación puede despreciarse. Entonces:

$$l' \cong l \sqrt{1 + \frac{2dx}{l} + \left(\frac{dx}{l}\right)^2}$$

$$l' \cong l \sqrt{\left(1 + \frac{dx}{l}\right)^2}$$

$$l' \cong l \left(1 + \frac{dx}{l}\right)$$

$$l' = l + dx$$

6.2

Sustituyendo 6.2 en 6.1 tendremos finalmente que:

$$e = l + dx - l$$

$$e = dx$$

Con lo cual se justifica el despreciar la contribución de la componente (de desplazamiento) normal al eje de la barra, a la deformación de la misma.

Una vez obtenida la matriz de continuidad, ahora debemos de hallar la matriz  $[k_i]$  (minúscula) que es la matriz de rigidez de los elementos de la estructura (armadura) y su valor está directamente relacionado con las características mecánicas  $(E)$  y geométricas  $(A, l)$  de los elementos de la estructura. Su dimensión es igual a  $NB \times NB$  y es una matriz diagonal, en la cual el valor de cada elemento será igual a:

$$k_i = \frac{E_i A_i}{l_i}$$

En donde  $i$  corresponde al número de elemento en cuestión y su ubicación en la matriz dependerá de la numeración que se haya propuesto. Por lo tanto:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & k_3 & \\ 0 & & & \\ & & & & k_n \end{bmatrix} NB \times NB$$

Por facilidad y, según el capítulo 1, escribiremos la matriz  $[k]$  como:

$$[k] = \text{diag.} (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$$

Por consiguiente, para el ejemplo no. 1 tendremos que:

$$\text{Barras 1, 3} \quad k = 2.1 \times 10^7 (0.001) / 4 = 5250 \text{ Tor/m}$$

$$\text{Barra 2} \quad k = 2.1 \times 10^7 (0.001) / 3 = 7000 \text{ Tor/m}$$

$$\text{Barras 4, 5} \quad k = 2.1 \times 10^7 (0.001) / 5 = 4200 \text{ Tor/m}$$

Por lo tanto:

$$[k] = \text{diag. } (5250, 7000, 5250, 4200, 4200)$$

Por facilidad en los cálculos mantendremos constante el producto EA por lo que finalmente escribimos:

$$[k] = \text{diagonal } (0.25, 0.333, 0.25, 0.20, 0.20) EA$$

Para el ejemplo no. 2 tendremos que:

$$\text{Barras 1, 2, 3, 4, 6, 9} \quad k = EA/3 = 0.333 EA$$

$$\text{Barras 5, 7, 8, 10} \quad k = EA/4.243 = 0.236 EA$$

Por lo tanto:

$$[k] = \text{diagonal } (0.333, 0.333, 0.333, 0.333, 0.236, 0.333, 0.236, 0.236, 0.333, 0.236) EA$$

Una vez obtenida la matriz  $[k]$  estamos ya en posibilidad de obtener la matriz global de rigideces, puesto que ya conocemos también la matriz de continuidad. Por lo tanto habrá que resolverse la ecuación:

$$[K] = [a]^T [k] [a]$$

Para cada caso de los antes vistos, por lo tanto:

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.378 & -0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & 0.045 & 0 & -0.332 \\ 0 & 0 & 0.378 & 0.096 \\ 0 & -0.333 & 0.096 & 0.405 \end{bmatrix} EA$$



Para el ejemplo no. 2.

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.569 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 & -0.118 & 0.118 \\ 0 & 0.569 & 0 & 0 & 0 & -0.333 & 0.118 & -0.118 \\ -0.333 & 0 & 0.569 & 0 & -0.118 & -0.118 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.569 & -0.118 & -0.118 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & -0.118 & -0.118 & 0.785 & 0.118 & -0.333 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.118 & -0.118 & 0.118 & 0.451 & 0 & 0 \\ -0.118 & 0.118 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0.785 & -0.118 \\ 0.118 & -0.118 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.118 & 0.451 \end{bmatrix}$$



Podemos comprobar en los dos casos anteriores que, la matriz de rigidez global siempre será simétrica y positiva definida (estructura estable) y su dimensión es función directa del número de desplazamientos incógnitas  $\{D\} \times \{D\}$ .

### 6.1.1C) Obtención de la matriz de rigidez global por medio de la matriz de rigidez acoplada de las barras individuales.

Antes de ilustrar la obtención de  $\{k\}$ , es conveniente hacer algunas consideraciones referentes a la obtención de la matriz de rigidez acoplada para las armaduras, por este motivo, utilizaremos como base la figura y los datos del ejemplo no. 1 (figura 6-3).

La primera parte de nuestro análisis trata de la forma que adquieren las ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \end{Bmatrix}$$

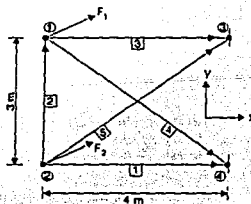


Figura 6-3.

Que corresponde a las ecuaciones 4.14 (capítulo 4) transformadas al sistema de coordenadas locales de cada barra, para el caso de una estructura articulada plana.

Consideremos una barra de longitud  $l$  y sección transversal de área  $A$ . Puesto que una barra articulada en sus extremos puede transmitir únicamente fuerzas en la dirección de su directriz, el sistema de coordenadas local es simplemente unidimensional, como muestra la figura 6-4.

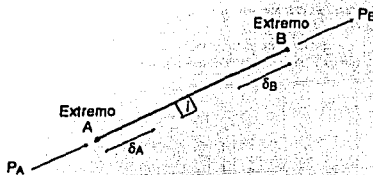


Figura 6-4. Sistema local de coordenadas de una barra biarticulada.

En esta figura, los corrimientos  $\delta_A$  y  $\delta_B$  se suponen medidos a partir de la posición inicial descargada de la barra. Las ecuaciones fuerza-movimiento en este sistema de coordenadas son:

$$P_B = -P_A = (EA/l)(\delta_B - \delta_A) \quad \text{ya que} \quad P_1 = k_1 e_1$$

Que podemos reescribir como:

$$P_A = k\delta_B - k\delta_A$$

$$P_B = -k\delta_B + k\delta_A$$

6.3

En la cual  $k = EA/l$  (no es necesario escribir las ecuaciones relativas a las fuerzas normales a la barra, puesto que sabemos que estas deben ser cero). Estas ecuaciones presentan una forma similar a las ecuaciones 4.14, y aunque en este caso sencillo los vectores  $\{P\}$  y  $\{\delta\}$  tienen solo una componente y  $k$  se reduce a un simple coeficiente.

Las ecuaciones 6.3 definen las fuerzas de extremo  $P_A$  y  $P_B$  para cualquier pareja de corrimientos  $\delta_A$  y  $\delta_B$  dados. Debe señalarse que dichas ecuaciones son simétricas, como podíamos esperar. No es posible, sin embargo, resolver estas ecuaciones y obtener los  $\delta$  en términos de las  $P$  puesto que la matriz

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Es singular. Esto refleja el hecho de que la pieza puede sufrir un movimiento arbitrario de conjunto sin afectar a las fuerzas que actúan en sus extremos. La cantidad  $\{\delta_B - \delta_A\}$ , por el contrario, representa la deformación de la pieza y está definida unívocamente por 6.3 para cualquier pareja de fuerzas de extremo.

Ecuaciones análogas a 6.3 pueden expresarse (en los sistemas de coordenadas locales apropiados) para cada barra de la armadura que se considera. No obstante, antes de que podamos aplicar las condiciones de equilibrio de nudos y compatibilidad de movimientos, es necesario transformar las fuerzas y movimientos que aparecen en 6.3 en los correspondientes al sistema global  $x$ - $y$  que muestra la figura 6.5. Para efectuar esta transformación supondremos que los movimientos de los nudos de la estructura son pequeños en comparación con la longitud de las barras para poder despreciar el cambio de posición de una barra con respecto al sistema global de coordenadas. Esta es la hipótesis aproximada que se emplea usualmente en la teoría lineal de estructuras, y corresponde a escribir las ecuaciones de equilibrio de la estructura no distorsionada, en lugar de hacerlo en la distorsionada, en la cual debería realmente efectuarse. Así, en la figura 6.5 supondremos que el cambio de ángulo  $\alpha$  causado por la carga de la estructura, puede despreciarse y tomar el valor de  $\alpha$  correspondiente a la estructura en su estado inicial.

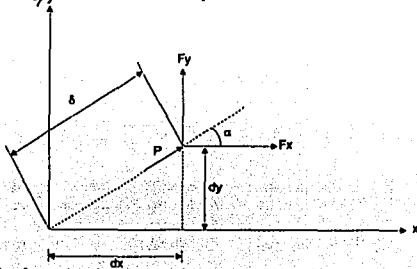


Figura 6-5. Cambio de coordenadas locales a globales en una barra biarticulada inclinada un ángulo  $\alpha$  respecto a  $x$ .



En la figura 6.5 observamos que en el sistema global de coordenadas las dos componentes de un vector fuerza de extremo vienen dadas por:

$$\begin{aligned} F_x &= p \cos \alpha \\ F_y &= p \sin \alpha \end{aligned}$$

Que podemos escribir como:

$$F = \mu p \quad 6.4$$

$$\text{Donde} \quad \bar{\mu}^T = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

Puede apreciarse que aunque  $\bar{\mu}$  no es una matriz cuadrada y, por consiguiente no tiene inversa, la ecuación 6.4 puede escribirse en la forma inversa  $P = \mu^T F$ . De igual manera el corrimiento de un extremo  $\delta$  puede expresarse en función de las componentes del corrimiento en el sistema global en la forma:

$$\delta = dx \cos \alpha + dy \sin \alpha$$

Que puede escribirse:

$$\delta = [\cos \alpha, \sin \alpha] \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \delta = \mu^T d \quad 6.5$$

Puede observarse en la figura que el extremo de una barra puede tener un corrimiento con componente perpendicular al eje de dicha barra y que este puede expresarse en función de los valores de  $d_x$  y  $d_y$ . Tales corrimientos, sin embargo, no tienen efecto sobre la fuerza de extremo y no es necesario incluirlos en el cálculo.

En este caso, resulta sencillo obtener la ecuación 6.5 por consideraciones exclusivamente geométricas. También es posible calcular las mismas ecuaciones utilizando el principio de trabajo virtual. Resulta claro que el trabajo realizado por una fuerza que se mueve una distancia dada debe ser el mismo, independientemente del sistema de coordenadas empleado para medir la fuerza y la distancia. Así, el trabajo realizado por la fuerza  $P$  que se mueve una distancia  $\delta$  en la figura 6.5 es igual a  $P\delta$ , y resulta también igual a:

$$F_x d_x + F_y d_y = p^T \delta$$

Así tenemos que  $P\delta = F^T d$  y si  $F = \mu P$ , resulta que  $F^T = P \mu^T$  de lo cual,  $P\delta = P \mu^T d$ , y puesto que  $P$  es una carga cualquiera, se deduce la ecuación 6.5.

Ahora multiplicamos la ecuación 6.3 por  $\mu$  y empleando la ecuación 6.4 se obtiene:

$$\begin{aligned} F_A &= \mu P_A = \mu k \delta_A - \mu k \delta_B & F_A + F_B &= 0 \\ F_B &= -\mu P_B = -\mu k \delta_A + \mu k \delta_B & F_A &= -F_B \end{aligned}$$

Por que:

Sustituyendo  $\delta_A$  y  $\delta_B$  por los valores resultantes de la ecuación 6.5 se obtiene:

$$\begin{aligned} F_A &= \mu k \mu^T d_A - \mu k \mu^T d_B \\ F_B &= -\mu k \mu^T d_A + \mu k \mu^T d_B \end{aligned}$$

Y si llamamos  $K_{ij} = \mu \kappa \mu^T$  tenemos:

$$F_A = K_{AA} d_A + K_{AB} d_B \quad K_{AA} = K_{BB} \quad 6.6$$

$$F_B = K_{BA} d_A + K_{BB} d_B \quad K_{AB} = K_{BA} = -K_{AA}$$

Y se puede comprobar fácilmente que:

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \text{Sen } \alpha \cos \alpha \\ \text{Sen } \alpha \cos \alpha & \text{Sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \frac{EA}{l}$$

El cambio de coordenadas no altera, por supuesto, el hecho conocido de que las ecuaciones fuerza-movimiento son singulares.

Habiendo obtenido las expresiones generales de las fuerzas de extremo de las barras en el sistema global, procedemos al siguiente paso del cálculo, consiste en la formación de la matriz global de rigidez  $[K]$ . Aplicando la condición de que los movimientos de los extremos de las barras deben ser iguales a los de los nudos correspondientes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{Barra 1} & \delta_A = d_2 & \delta_B = 0 \\ \text{Barra 2} & \delta_A = d_2 & \delta_B = d_1 \\ \text{Barra 3} & \delta_A = d_1 & \delta_B = 0 \\ \text{Barra 4} & \delta_A = d_1 & \delta_B = 0 \\ \text{Barra 5} & \delta_A = d_2 & \delta_B = 0 \end{array} \quad 6.7$$

Sustituyendo estas expresiones de los movimientos de los extremos de la barra en las ecuaciones 6.7 de cada barra, se tiene:

$$\begin{array}{ll} \text{Barra 1} & F_{A1} = K_{AA1} d_2 \\ \text{Barra 2} & F_{A2} = K_{AA2} d_2 + K_{BA2} d_1 \\ & F_{B2} = K_{AB2} d_2 + K_{BB2} d_1 \\ \text{Barra 3} & F_{A3} = K_{AA3} d_1 \\ \text{Barra 4} & F_{A4} = K_{AA4} d_1 \\ \text{Barra 5} & F_{A5} = K_{AA5} d_2 \end{array} \quad 6.8$$

Se han omitido las expresiones de  $F_B$  en el caso de las barras 1, 3, 4 y 5 puesto que al ser reacciones exteriores no van a necesitarse en las ecuaciones de equilibrio de los nudos, los valores para  $d_1$  y  $d_2$  solo pueden referirse al sistema global.

Las condiciones de equilibrio de nudos en este ejemplo resultan, sencillamente:

$$F_1 = F_{B2} + F_{A3} + F_{A4}$$

$$F_2 = F_{A1} + F_{A2} + F_{A5}$$

En las cuales  $F_1$  y  $F_2$  se expresan también respecto al eje global. Sustituyendo en estas ecuaciones los valores de las ecuaciones 6.8 se tiene:

$$F_1 = K_{AB2} d_2 + K_{BB2} d_1 + K_{AA3} d_1 + K_{AA4} d_1$$

$$F_2 = K_{AA1} d_2 + K_{AA2} d_2 + K_{BA2} d_1 + K_{AA5} d_1$$

Que finalmente reagrupamos como:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{BB2} + K_{AA3} + K_{AA4} & K_{AB2} \\ K_{BA2} & K_{AA1} + K_{AA2} + K_{AA5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad 6.9$$

$$\{ F \} = [ K ] \{ d \}$$

Que es la forma de la ecuación 2.12 (capítulo 2) en este ejemplo particular. La ecuación 6.9 es un ejemplo de matriz particionada, siendo sus elementos matrices de  $[2 \times 2]$ . Esta es una característica general del método de rigideces. Se observa que la matriz 6.9 es simétrica, como se mencionó anteriormente.

Aunque las ecuaciones fuerza-movimiento de cada una de las barras en particular son singulares, podemos aducir, basándonos en consideraciones físicas, que las ecuaciones 6.9 deben tener solución única para unas cargas dadas y que por consiguiente, la matriz de rigidez completa de la estructura debe ser no singular. Todo lo que resta, entonces, es la obtención de los movimientos  $d_1$ ,  $d_2$  mediante 6.9, y su inclusión posterior en 6.8 para hallar los esfuerzos en las barras.

Resulta interesante señalar la forma en que la matriz de rigidez refleja la disposición de las barras en la estructura. Las barras 3 y 4 contribuyen exclusivamente a la rigidez directa del nudo 1 y, por esta causa, sus matrices  $K_{AA}$  solamente aparecen en el primer elemento de la diagonal principal, que relaciona el movimiento del nudo 1 con la carga aplicada en el mismo. De igual manera, las barras 1 y 5 contribuyen tan solo a la rigidez del nudo 2 y sus matrices  $K_{AA}$ , consecuentemente aparecen solo en el segundo elemento de la diagonal principal. La barra 2, por el contrario, une los nudos 1 y 2, y contribuye en ambos elementos de dicha diagonal, también proporciona los elementos exteriores a la misma  $K_{AB}$  que constituyen los eslabones matemáticos entre los movimientos  $d_1$  y  $d_2$ , reflejando así la ligazón física entre los dos nudos, que proporciona esta barra y la estructura.

Esta íntima relación entre la forma de la matriz de rigideces y la disposición geométrica de la estructura hace posible escribir la matriz completa en función de las matrices de rigidez acoplada de las barras, por simple inspección, sin necesidad de tener que escribir explícitamente las condiciones de equilibrio y compatibilidad. La regla general consiste en que, si una barra  $i$  une los nudos  $A$  y  $B$ , entonces  $K_{AA}$  se suma a los elementos  $A$ -ésimos y  $B$ -ésimo de la diagonal principal y  $K_{AB}$  se coloca en los correspondientes elementos exteriores de la diagonal principal (es decir, en la fila  $A$ , columna  $B$  y fila  $B$ , columna  $A$ ).

Para concluir nuestro ejemplo, obtengamos las  $K_{AB}$  para cada una de las barras de la estructura. Entonces:

$$K_{AA1} = \begin{bmatrix} 0.250 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA = K_{AA3} \quad K_{AA2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA4} = \begin{bmatrix} 0.128 & -0.096 \\ -0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA \quad K_{AA5} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 \\ 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

Ahora podemos ensamblar la matriz de rigidez global según la ecuación 6.9 y finalmente queda:

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.378 & -0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & 0.045 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0.378 & 0.096 \\ 0 & -0.333 & 0.096 & 0.405 \end{bmatrix} EA$$

Que al compararse con los anteriores resultados es el mismo.

Los subíndices de las diferentes matrices de rigidez acoplada de cada barra tienen el siguiente significado.

$K_{AA}$  = Rigidez en el extremo A de la barra debida a un desplazamiento unitario en el extremo A.

$K_{AB}$  = Rigidez en el extremo A de la barra debida a un desplazamiento unitario en el extremo B.

$K_{BA}$  = Rigidez en el extremo B de la barra debida a un desplazamiento unitario en el extremo A.

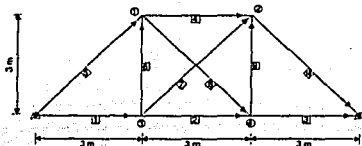
$K_{BB}$  = Rigidez en el extremo B de la barra debida a un desplazamiento unitario en el extremo B.

Aunque en una primera instancia los subíndices y la orientación de las barras no tienen gran importancia, es importante sin embargo, que nos acostumbremos a tratarlos de esta manera ya que, existen ciertos casos en los que dicho procedimiento será muy importante en la obtención de resultados correctos.

Como anteriormente se mencionó, es posible escribir la matriz de rigidez global en función de las matrices de rigidez acoplada de las barras individuales, por simple inspección, sin necesidad de tener que escribir explícitamente las condiciones de equilibrio y compatibilidad. El procedimiento a seguir se resume en los siguientes pasos, mediante los cuales resolveremos el ejemplo no. 2 que volvemos a presentar.

Ejemplo no. 2.

EA = Constante  
 Sen  $\alpha = 1/\sqrt{2} = 0.7071$   
 Cos  $\alpha = 1/\sqrt{2} = 0.7071$



1) Obtener las  $\mu_i$  de cada una de las barras según su inclinación respecto al eje global.

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_5 = \mu_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_7 = \mu_8 = \begin{Bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_9 = \mu_{10} = \begin{Bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{Bmatrix}$$

2) obtener los  $K_{AA}$  para cada barra. Esto implica la obtención de  $K_{AB}$ ,  $K_{BA}$  y  $K_{BB}$  de cada barra para su posterior utilización en los casos que se requiera.

De la ecuación 6.6.  $K_{AA} = \mu k \mu^T$

Por lo tanto.

$$K_{AA1} = K_{AA2} = K_{AA3} = K_{AA4} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA5} = K_{AA7} = \begin{bmatrix} 0.118 & 0.118 \\ 0.118 & 0.118 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA6} = K_{AA9} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA8} = K_{AA10} = \begin{bmatrix} 0.118 & -0.118 \\ -0.118 & 0.118 \end{bmatrix} EA$$

- 3) La dimensión de la matriz  $[K]$  es igual a  $\mathcal{N}(\mathcal{D}) \times \mathcal{N}(\mathcal{D}) = 4 \times 4$  y la obtención de cada uno de sus elementos se hará sumando la contribución de cada una de las barras al equilibrio de los nudos según las ecuaciones 6.6, por lo tanto, podemos interpretar cada uno de sus elementos como la suma de las fuerzas (rigideces) en el nudo  $i$  debida a los desplazamientos (unitarios) de los extremos (A o B) de las barras que concurren a dicho nudo. Por lo tanto y para nuestro caso tendremos que:  
(Por simetría de  $[K]$  solo escribiremos el triángulo superior)

	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>
F <sub>1</sub>	K <sub>AA1</sub> +K <sub>AA6</sub> +K <sub>BB5</sub> +K <sub>BB6</sub>	K <sub>AB4</sub>	K <sub>BA5</sub>	K <sub>BB8</sub>
F <sub>2</sub>		K <sub>BB8</sub> +K <sub>AA10</sub> +K <sub>BB4</sub> +K <sub>BB7</sub>	K <sub>BA7</sub>	K <sub>BA9</sub>
F <sub>3</sub>			K <sub>AA2</sub> +K <sub>AA8</sub> +K <sub>AA7</sub> +K <sub>BB1</sub>	K <sub>AB2</sub>
F <sub>4</sub>				K <sub>AA3</sub> +K <sub>AA9</sub> +K <sub>BB2</sub> +K <sub>BB8</sub>

Recordando que las diferentes  $K_{ij}$  son submatrices de  $2 \times 2$ , efectuamos las correspondientes operaciones que finalmente nos queda.

[K] =	SI	MÉ	TRI	CO	0.569	0	-0.333	0	0	0	-0.118	0.118	EA
					0.569	0	0	0	-0.333	0.118	-0.118		
					0.569	0	-0.118	-0.118	0	0	0		
					0.569	-0.118	-0.118	0	-0.333	0			
					0.785	0.118	-0.333	0	0	0	0		
						0.451	0	0	0	0			
							0.785	-0.118					
								0.451					

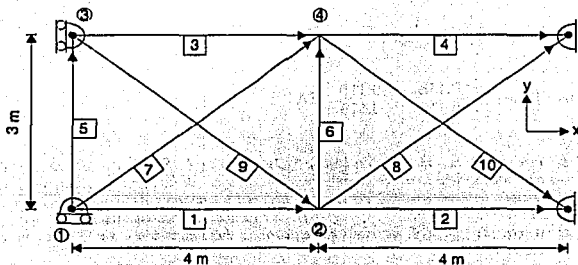
Que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Para hacer un resumen de la utilización de cada método presentado, resolveremos el siguiente problema.

Por medio de  $[K] = [a]^T [k] [a]$

**Ejemplo no. 3.**

Los apoyos 1 y 3 se han numerado como nudos porque no restringen completamente el movimiento en esos lugares. El nudo 2 no impide el movimiento en  $x$  y el nudo 3 no lo impide en el eje  $y$ . Por esta razón se deberán tomar en cuenta para la formación de la matriz de continuidad, cuya dimensión será igual a  $N \times N$ , que en este caso es  $11 \times 6$ .



**a) Obtención de  $[a]$**

**1.- Obtención de los cosenos directores de cada barra**

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mu_7 = \mu_8 = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_5 = \mu_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mu_9 = \mu_{10} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix}$$

**2.- Obtener los diferentes  $e_i$  a partir de la ecuación 5.14.**

$$e_1 = dx_2 - dx_1$$

$$e_2 = -dx_2$$

$$e_3 = dx_4$$

$$e_4 = -dx_4$$

$$e_5 = dy_3$$

$$e_6 = dy_4 - dy_2$$

$$e_7 = dy_4 - dy_2$$

$$e_8 = 0.8dx_4 + 0.6dy_4 - 0.8dx_1$$

$$e_9 = -0.8dx_2 - 0.6dy_2$$

$$e_{10} = 0.8dx_2 - 0.6dy_2 - 0.6dy_3$$

$$e_{11} = -0.8dx_4 + 0.6dy_4$$

3.- Ahora ya podemos construir la matriz [a] vaciando los coeficientes de cada deformación en los lugares correspondientes del arreglo matricial. Esto es:

	$dx_1$	$dx_2$	$dy_2$	$dy_3$	$dx_4$	$dy_4$	
[a] =	-1	1					$\theta_1$
		-1					$\theta_2$
					1		$\theta_3$
					-1		$\theta_4$
			-1	1			$\theta_5$
	-0.8				0.8	0.6	$\theta_7$
		-0.8	-0.6				$\theta_8$
		0.8	-0.6	0.6			$\theta_9$
					-0.8	0.6	$\theta_{10}$

Una vez que se ha obtenido la matriz de continuidad, nos resta solamente obtener la matriz de rigidez de los elementos individuales [K] para lo cual recordamos que:

$$k_i = E_i A_i / l_i$$

Para nuestro caso tendremos que:

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k_3 = k_4 &= EA/4 = 0.25 EA \\ k_5 = k_6 &= EA/3 = 0.333 EA \\ k_7 = k_8 = k_9 = k_{10} &= EA/5 = 0.2 EA \end{aligned}$$

Que finalmente nos queda:

$$[k] = \text{diag. } (0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.333, 0.333, 0.20, 0.20, 0.20, 0.20) EA$$

Como último paso solo nos resta obtener el producto matricial  $[K] = [a]^T [k] [a]$  para lo cual introducimos un procedimiento alternativo el cual solo implicará una conveniente colocación de las matrices a emplear y la utilización de una ecuación básica, esto es como sigue:

[a]							[k]		
-1	1	0	0	0	0	0	0.25		EA
0	-1	0	0	0	0	0	0.25		
0	0	0	0	0	1	0	0.25		
0	0	0	0	-1	0	0	0.25		
0	0	0	1	0	0	0	0.333		
0	0	-1	0	0	0	1	0.333		
-0.8	0	0	0	0.8	0.6	0	0.20		
0	-0.8	-0.6	0	0	0	0	0.20		
0	0.8	-0.6	0.6	0	0	0	0.20		
0	0	0	0	-0.8	0.6	0	0.20		

$$K_{ij} = \sum_{k=1}^{NS} a_{ik} a_{jk} k_k \quad 6.10$$

$a_{ij}$  y  $a_{ji}$  = Se refieren a la matriz  $[a]$ . Recordando que el  $i$ -ésimo renglón de  $[a]$  es igual a la  $i$ -ésima columna de  $[a]^T$ .

$X_j$  = Elemento de la matriz de rigidez global colocado en el renglón  $i$  y la columna  $j$ .

$i$  = Contador que va desde 1 hasta  $NB$  (número de barras).

$a_{ii}$  = Elemento de la matriz  $[a]$  colocado en el  $i$ -ésimo renglón y la  $i$ -ésima columna.

$a_{ij}$  = Elemento de la matriz  $[a]$  colocado en el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna.

Al utilizar la ecuación 6.10 y los arreglos colocados, obtenemos el siguiente resultado (solo el triángulo superior)

$$K = \begin{bmatrix} 0.378 & -0.25 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 \\ & 0.756 & 0 & 0.096 & 0 & 0 \\ & & 0.477 & -0.072 & 0 & -0.333 \\ & & & 0.405 & 0 & 0 \\ & \text{Simetrico} & & & 0.756 & 0 \\ & & & & & 0.477 \end{bmatrix} EA$$

6) Por medio de la matriz de rigidez acoplada de cada barra.

Para este caso supondremos que todos los nudos tienen dos desplazamientos y seguimos el procedimiento descrito anteriormente.

1.- Obtención de los  $\mu_i$  de cada barra.

Ya los obtuvimos en el inciso a).

2.- Obtener los  $K_{\mu\mu}$  para cada barra (matriz de rigidez acoplada).

$$K_{\mu\mu 1} = K_{\mu\mu 2} = K_{\mu\mu 3} = K_{\mu\mu 4} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{\mu\mu 5} = K_{\mu\mu 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{\mu\mu 7} = K_{\mu\mu 8} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 \\ 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{\mu\mu 9} = K_{\mu\mu 10} = \begin{bmatrix} 0.128 & -0.096 \\ -0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

3.- Hacemos el ensamblaje de la matriz  $[K]$  haciendo una inspección visual en la estructura y tomando en cuenta el ángulo de inclinación y la topología de cada barra tal que:  
(solo el triángulo superior)



	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
$F_1$	$K_{AA1}+K_{AA5}+K_{AA7}$	$K_{AB1}$	$K_{AB5}$	$K_{AB7}$
$F_2$		$K_{AA2}+K_{AA6}+K_{AA8}+K_{BB1}+K_{BB8}$	$K_{BA8}$	$K_{BB8}$
$F_3$			$K_{AA3}+K_{AA9}+K_{BB5}$	$K_{BB3}$
$F_4$				$K_{AA4}+K_{AA10}+K_{BB3}+K_{BB6}+K_{BB7}$

Ahora ya podemos formar la matriz  $[K]$  con el ensamble antes obtenido y recordando que las diferentes  $K$  son matrices de  $(2 \times 2)$ .

	$dx_1$	$dy_1$	$dx_2$	$dy_2$	$dx_3$	$dy_3$	$dx_4$	$dy_4$
$F_{X1}$	0.378	0.096	-0.25	0	0	0	-0.128	-0.096
$F_{Y1}$	0.096	0.405	0	0	0	-0.333	-0.096	-0.072
$F_{X2}$			0.756	0	-0.128	0.096	0	0
$F_{Y2}$			0	0.477	0.096	-0.072	0	-0.333
$F_{X3}$					0.378	-0.096	-0.25	0
$F_{Y3}$					-0.096	0.405	0	0
$F_{X4}$							0.756	0
$F_{Y4}$							0	0.477

Pero recordemos que  $dy_1 = dx_2 = 0$  y por lo tanto  $F_{Y1} = F_{X2} = 0$ , por lo que podemos eliminar las correspondientes renglones y columnas del arreglo anterior y finalmente nos queda:

$$K = \begin{bmatrix} 0.378 & -0.25 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 \\ & 0.756 & 0 & 0.096 & 0 & 0 \\ & & 0.477 & -0.072 & 0 & -0.333 \\ & & & 0.405 & 0 & 0 \\ & & & & 0.756 & 0 \\ & & & & & 0.477 \end{bmatrix} \text{ EA}$$

Simetrico

Que resulta ser la misma que se obtuvo anteriormente.

### 6.1.2 Marcos planos

Ahora presentamos un primer enfoque del método de rigidez, método de rigidez simplificado, en este caso se hace una disminución en el número de consideraciones teóricas que puede tener una estructura a las más representativas considerando que cada nudo solo puede tener dos movimientos, un giro y un corrimiento igual al de todos los nudos horizontales colineales a él. Esto significa que no se consideran acortamientos o alargamientos de los elementos por efecto de las cargas.

Al igual que en las armaduras, en los marcos planos el problema fundamental es encontrar la matriz de rigidez global de la estructura, y como ya se mencionó en un principio, los métodos para el cálculo de  $[K]$ , y para el caso del método de rigidez simplificado son:

- a) Por medio de la ecuación 2.11 (obtención de  $[a]$ )
- b) Dando desplazamientos unitarios a la estructura (obtención de  $[a]$ )
- c) Directamente. Dando desplazamientos unitarios a la estructura (obtención de  $[K]$ )

A continuación haremos una descripción detallada de cada uno de los procedimientos mencionados correspondientes a este primer enfoque, pero antes es conveniente establecer una convención apropiada de signos para fuerzas y/o desplazamientos.

Para el caso de momentos flexionantes, estos serán positivos cuando giren en contra de las manecillas del reloj. La misma convención se utilizará en el caso de los giros angulares figura 6-6a.

Cuando se produce un desplazamiento lineal de un extremo de una barra respecto al otro extremo, los desplazamientos, así como los giros y momentos que se producen (figura 6-6 b) estarán regidos por la convención antes establecida.

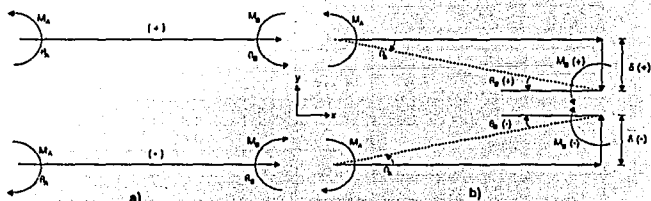


Figura 6-6. Convención de signos para giros y momentos.

Por otra parte, necesitamos también, para la construcción de la matriz global de rigidez, conocer las propiedades mecánicas y geométricas de cada uno de los elementos de la estructura. Estas son:

- 1) Topología de la estructura
- 2) Geometría de la estructura
- 3) Sección de cada elemento
- 4) Momento de inercia de cada elemento
- 5) Módulo de elasticidad y módulo de Poisson

La base del método de los desplazamientos en la solución de una estructura, es determinar las componentes independientes de los desplazamientos que se desconocen. Según el principio de continuidad, podemos encontrar las deformaciones, en este caso de una barra aislada en función de los desplazamientos desconocidos los cuales—para este análisis—solo podrán ser giros en los extremos de la barra (figura 6-7 a) y un desplazamiento lineal de un nudo con respecto al otro que será siempre normal al eje de la barra en cuestión; recordando además que los desplazamientos incógnitas siempre se suponen positivos según la convención de signos establecida. Sin embargo, en el caso del desplazamiento lineal, existen dos posibilidades de movimiento para la barra. El primer caso es que el extremo B de la barra se desplace en sentido positivo (según convención) respecto al extremo A y; el segundo caso es que el extremo A se desplace respecto al extremo B lo cual se puede interpretar como que el extremo B se desplace en sentido negativo respecto al extremo A de la barra (ver figura 6-7 b y c).

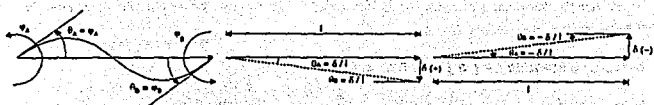


Figura 6-7. Posibles desplazamientos aislados de una barra.

Con lo anterior podemos establecer, por la combinación de desplazamientos antes señalados, las ecuaciones que nos relacionan los desplazamientos en una barra y sus correspondientes deformaciones, que nos quedan finalmente como:

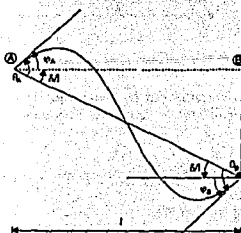


Figura 6-7. a) y b) (combinación)

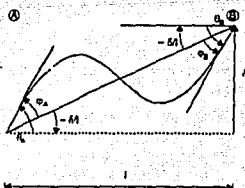


Figura 6-7. a) y c) (combinación)

$$\begin{aligned}\theta_A &= \varphi_A + \delta/l \\ \theta_B &= \varphi_B + \delta/l\end{aligned}$$

O sea:

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/l \\ 0 & 1 & 1/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \delta \end{Bmatrix}$$

$$\{e\} = [a] \quad (d) \quad 6.11$$

$$\begin{aligned}\theta_A &= \varphi_A - \delta/l \\ \theta_B &= \varphi_B - \delta/l\end{aligned}$$

O sea:

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/l \\ 0 & 1 & -1/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \delta \end{Bmatrix}$$

$$\{e\} = [a] \quad (d) \quad 6.11$$

Con estas ecuaciones se establece el principio de continuidad para barras individuales y también es posible, por medio de estas, construir la matriz de continuidad de toda la estructura dando los desplazamientos incógnita de la estructura y analizando cada barra en forma aislada.

Recurriremos a un ejemplo sobre el cual ilustraremos la utilización de las ecuaciones anteriores y al mismo tiempo obtendremos la matriz de rigidez global de la estructura para cada uno de los procedimientos señalados.

### 6.1.2 a) Obtención de $[a]$ ecuación 2.11

Ejemplo no. 4.

Para esta parte recordemos que:

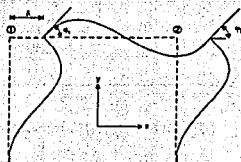
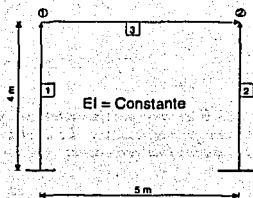
$$dy_1 = dy_2 = 0 \quad \text{y} \quad dx_1 = dx_2 \neq 0$$

Se establece de antemano que cada elemento tendrá dos deformaciones, una en cada extremo, las cuales son provocadas por dos giros y un desplazamiento (ver ecuaciones 6.11). Por lo tanto las deformaciones  $e$  de una barra se consideran como:

$$e_1 = \begin{Bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \end{Bmatrix}$$

Y según las condiciones para los desplazamientos tenemos entonces que las incógnitas serán tres. Dos giros, uno en cada nudo y un corrimiento del cabezal. Por lo tanto el vector de desplazamientos quedará:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \delta \end{Bmatrix}$$



Por lo anterior podemos concluir que la matriz de continuidad será de orden  $2NB \times ND$  y la manera en que se conforma es:

$$[a] = \begin{bmatrix} & \varphi_1 & \varphi_2 & \delta \\ \theta_{A1} & & & \\ \theta_{B1} & & & \\ \theta_{A2} & & & \\ \theta_{B2} & & & \\ \theta_{A3} & & & \\ \theta_{B3} & & & \end{bmatrix} \quad 6 \times 3$$

En donde  $\theta_{Ai}$  y  $\theta_{Bi}$  corresponden a la deformación de la barra  $i$  en sus extremos  $A$  y  $B$  respectivamente.

Así, para la obtención de cada uno de los renglones de la matriz  $[a]$ , utilizamos las ecuaciones 6.11 según el caso. Para su uso, se requiere además el sentido de la barra y los nudos a los que concurre, lo cual se puede ver fácilmente en la correspondiente figura. Enseguida se ilustra la obtención de  $[a]$  por renglones para el ejemplo en cuestión.

**Barra 1**

Extremo A — Apoyo  
Extremo B — Nudo 1

$$\theta_{A1} = 1(0) + 0(\varphi_1) + \delta/4 = 0.25\delta$$

$$\theta_{B1} = 0(0) + 1(\varphi_1) + \delta/4 = \varphi_1 + 0.25\delta$$

**Barra 2**

Extremo A — Apoyo  
Extremo B — Nudo 2

$$\theta_{A2} = 1(0) + 0(\varphi_2) + \delta/4 = 0.25\delta$$

$$\theta_{B2} = 0(0) + 1(\varphi_2) + \delta/4 = \varphi_2 + 0.25\delta$$

**Barra 3**

Extremo A — Nudo 1  
Extremo B — Nudo 2

$$\theta_{A3} = 1(\varphi_1) + 0(\varphi_2) = \varphi_1$$

$$\theta_{B3} = 0(\varphi_1) + 1(\varphi_2) = \varphi_2$$

Y entonces vaciamos los coeficientes de los diferentes desplazamientos según su renglón y columna correspondientes en la matriz  $[a]$  y nos queda que:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo no. 5**

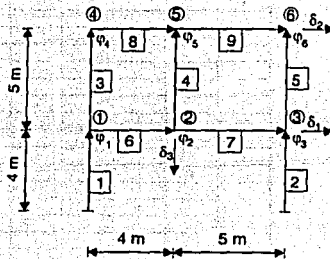
Condiciones de desplazamiento:

$$dy_1 = dy_3 = dy_4 = dy_6 = 0$$

$EI = CTTE$

Podemos observar en general que el número de incógnitas es igual al número de nudos más el número de desplazamientos lineales.  
Para este caso:

$$NN + NDI = 6 + 3 = 9 \text{ incógnitas}$$





El siguiente paso para obtener la matriz de rigidez global es obtener la matriz de rigidez de las barras la cual es función directa de las propiedades mecánicas y geométricas de estos elementos.

Como ya se estableció en el capítulo 2, según el principio de la ley de Hooke las deformaciones son proporcionales a los esfuerzos y según la ecuación 2.8 lo representamos como:

$$\{S\} = [D] \{e\}$$

Que según el sistema de notación que estamos utilizando nos queda también como:

$$\{p\} = [k] \{e\} \quad \text{Donde:} \quad [D] = [k] \quad \text{y} \quad \{S\} = \{p\}$$

Debe de aclararse, sin embargo, que en la primera igualdad  $\{S\}$  representa esfuerzos y en la segunda,  $\{p\}$  representa fuerzas (axiales y/o momentos). No obstante, el cambio es válido ya que en el proceso de análisis se pueden descomponer los esfuerzos factorizando la geometría de la estructura que, para un caso en particular, es constante.

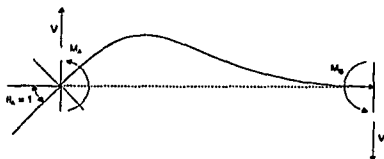
De las ecuaciones anteriores deducimos que:

$$\theta_1 = \begin{Bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad P_1 = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}$$

Por lo que podemos reescribir dicha ecuación como:

$$\begin{Bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA1} & K_{AB1} \\ K_{BA1} & K_{BB1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \end{Bmatrix} \quad 6.12$$

En la que  $K_{ij}$  representa la rigidez a flexión en una barra doblemente empotrada que es sometida a desplazamientos unitarios (giros) en ambos extremos. El primer subíndice designa el extremo del elemento en consideración y el segundo se refiere al extremo en el que se induce el giro unitario. Para barras de sección constante los diferentes  $K_{ij}$  se pueden obtener de la matriz de rigidez que se dedujo en el capítulo 4. En la cual, según su interpretación la tercera columna representa las fuerzas desarrolladas en ambos extremos de la barra, debidos a un giro unitario que en elementos de sección constante se representa como:



(No se considera la contribución del cortante)

Y cuyos valores son para este caso:

$$N = 0 \quad ; \quad V = \frac{6EI}{l^2} \theta_A \quad \text{y} \quad M_A = \frac{4EI}{l} \theta_A$$





Para la estructura total nos queda:

$$[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} EI$$

Y resolviendo  $[a]^T [k] [a]$  queda:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.80 & 0.40 & 0.375 \\ 0.40 & 1.80 & 0.375 \\ 0.375 & 0.375 & 0.375 \end{bmatrix} EI$$



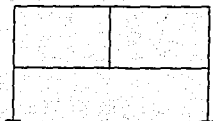
Para el ejemplo no. 5

Para barras 1, 2, 6 y 8

$$k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{4} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} EI$$

Para barra 3, 4, 5, 7 y 9

$$k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{5} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} EI$$



Formamos la matriz  $[k]$  de acuerdo a la ecuación 6.13, y resolviendo  $[a]^T [k] [a]$  queda que:

$$[K] = \begin{bmatrix} 2.8 & 0.5 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.135 & 0.24 & 0.375 \\ & 2.6 & 0.4 & 0 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.24 & 0.135 \\ & & 2.6 & 0 & 0 & 0.4 & 0.135 & 0.24 & -0.24 \\ SI & & & 1.8 & 0.5 & 0 & -0.24 & 0.24 & 0.375 \\ & & MÉ & & 2.6 & 0.4 & -0.24 & 0.24 & 0.135 \\ & & & TRI & & 1.6 & -0.24 & 0.24 & -0.24 \\ & & & & CO & & 0.663 & -0.288 & 0 \\ & & & & & & & 0.288 & 0 \\ & & & & & & & & 0.567 \end{bmatrix} EI$$

### 6.1.2.c) Obtención directa de la matriz de rigidez global dando desplazamientos unitarios a la estructura

Para una buena comprensión de este procedimiento, nuevamente escribiremos la matriz de rigidez acoplada de una barra sin considerar la contribución de la fuerza cortante, y nos queda:

$$\begin{Bmatrix} V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Se eliminó ahora la primera columna y el primer renglón debido a que no se consideran alargamientos y acortamientos y por lo tanto no se considera fuerza normal. La interpretación es:

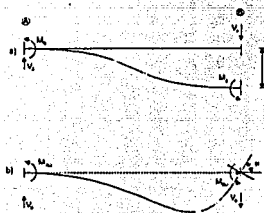


Figura 6-8.

En donde los desplazamientos unitarios  $\delta$  y  $\theta$  se han aplicado solo al extremo B de la barra, pero se puede comprobar por equilibrio, que los valores de las fuerzas en A son los que se establecen en seguida. Las subíndices  $\delta$  y  $\theta$  nos indican el desplazamiento unitario que provoca las fuerzas resultantes.

$$V_{\delta} = \frac{12EI}{l^3} \delta \quad \text{y} \quad M_{\delta} = \frac{6EI}{l^2} \delta$$

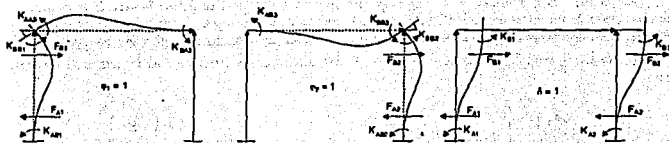
$$M_{\theta} = \frac{4EI}{l} \theta \quad ; \quad M_{\theta} = \frac{2EI}{l} \theta \quad \text{y} \quad V_{\theta} = \frac{6EI}{l^2} \theta$$

Por otra parte, debemos recordar que el análisis de las fuerzas de toda estructura en conjunto depende de las fuerzas que actúan en sus elementos y que dichas fuerzas, en general, se pueden expresar en función de los desplazamientos que las producen, conociéndose como rigidez al valor de dicha fuerza cuando el valor del desplazamiento es unitario. Dichas rigideces se obtienen entonces de la figura 6-8, haciendo  $\delta$  y  $\theta$  iguales a la unidad.

Para construir la matriz global de rigidez de una estructura, debemos entonces, considerar todas las fuerzas (rigideces) de las distintas barras que contribuyen a la deformación de cada nudo y expresarlos en función de dichas deformaciones.

#### Ejemplo no. 4

En este caso sabemos que existen tres desplazamientos  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\delta$  los cuales son desconocidos, pero si suponemos que todos son positivos e iguales a la unidad y los aplicamos uno a la vez podremos obtener las siguientes rigideces según la orientación de cada barra.



Como es de suponerse, los desplazamientos  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\delta$ , dependen del sistema de fuerzas externas  $M_1$ ,  $M_2$  y  $F$  respectivamente así como de sus contrapartes. A su vez las fuerzas en las barras dependerán de dichos desplazamientos.

Por el principio de equilibrio podemos establecer que la suma de las fuerzas internas que provoca cada desplazamiento es igual a las fuerzas externas actuantes para cada nudo. Por lo tanto:

$$M_1 = (K_{AA3} + K_{BB1}) \varphi_1 + (K_{AB3}) \varphi_2 + (K_{B1\delta}) \delta$$

$$M_2 = (K_{BA3}) \varphi_1 + (K_{BB2} + K_{BB3}) \varphi_2 + (K_{B2\delta}) \delta$$

$$F = (F_{B1}) \varphi_1 + (F_{B2}) \varphi_2 + (F_{B1\delta} + F_{B2\delta}) \delta$$

Las fuerzas o rigideces  $a$  que se refiere el sistema planteado se pueden obtener a partir de la figura 6.8 y son función de los desplazamientos que los provocan, lo cual se puede deducir observando la columna en la que se hallen dentro del sistema. Así para cada columna tendremos que:

Para  $\varphi_1 = 1$

$$K_{BB1} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{AA3} = \frac{4EI}{5} = 0.8 EI$$

$$K_{BA3} = \frac{2EI}{5} = 0.4 EI$$

$$F_{B1} = \frac{6EI}{16} = 0.375 EI$$

Para  $\varphi_2 = 1$

$$K_{AB3} = \frac{2EI}{5} = 0.4 EI$$

$$K_{BB2} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{BB3} = \frac{4EI}{5} = 0.8 EI$$

$$F_{B2} = \frac{6EI}{16} = 0.375 EI$$

Para  $\delta = 1$

$$K_{B1\delta} = \frac{6EI}{16} = 0.375 EI$$

$$K_{B2\delta} = \frac{6EI}{16} = 0.375 EI$$

$$F_{B1\delta} = \frac{12EI}{64} = 0.1875 EI$$

$$F_{B2\delta} = \frac{12EI}{64} = 0.1875 EI$$

Debe aclararse ahora que la formación de la matriz de rigideces global completa para una estructura, a partir de las rigideces de las barras aisladas, depende solamente de la forma en que las piezas están unidas entre sí. Una vez que las diferentes rigideces han sido obtenidas para todas las barras de una estructura, la aplicación de las condiciones de equilibrio y compatibilidad no precisa más información sobre las características detalladas de la pieza y puede ser perfectamente resuelta en función de los vectores  $\{F\}$  y  $\{d\}$  y las diferentes rigideces de cada barra.

Por lo anterior concluimos que, al igual que en las armaduras, para construir la matriz de rigidez de la estructura basta hacer una simple inspección en función de la topología de las barras y sus diferentes rigideces; sin necesidad de tener que escribir explícitamente las condiciones de equilibrio y compatibilidad.

Por lo tanto, para el ejemplo número 4 que estamos analizando la disposición de la matriz de rigideces será:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F \end{Bmatrix} = \begin{array}{c|c|c|c} \hline & K_{BB1} + K_{AA1} & K_{AB1} & K_{B1A} \\ \hline & K_{BA1} & K_{BB2} + K_{BB3} & K_{B2A} \\ \hline F_{B1} & & F_{B2} & F_{B1B} + F_{B2B} \\ \hline \end{array} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \delta \end{Bmatrix}$$

De donde resulta finalmente:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.80 & 0.40 & 0.375 \\ 0.40 & 1.80 & 0.375 \\ 0.375 & 0.375 & 0.375 \end{bmatrix} EI$$

Se deja al lector resolver el ejemplo no. 5.

Como en el caso de las armaduras, podemos interpretar cada uno de los elementos de la matriz  $[K]$  como la suma de las fuerzas (fuerzas o momentos) en el nudo  $i$  debido a las rigideces en los extremos ( $A$  ó  $B$ ) de las barras que concurren a dicho nudo y los efectos que en otros nudos se inducen debido a la deformación unitaria de dicho nudo  $i$ .

### 6.1.3 Método general de rigideces

En el análisis de estructuras planas por métodos tradicionales es común efectuar una total distinción entre armaduras y marcos, y emplear diferentes métodos de análisis en los dos casos. Una armadura es, esencialmente una estructura triangular, que continua siendo una estructura aun cuando sus nudos son articulados. Los momentos flexores inducidos por la rigidez de los nudos son, por lo general, pequeños y en algunos casos son considerados a través de los "Esfuerzos secundarios". Un marco por el contrario, es en esencia, una estructura que resiste las acciones por flexión fundamentalmente, resultando absolutamente necesaria la rigidez de sus nudos para el funcionamiento como estructura. En el cálculo convencional de marcos es común despreciar los esfuerzos axiales.

Sin embargo, el método descrito en esta parte es igualmente aplicable a marcos y armaduras. Aclararemos esto, más aislante considerando el cálculo de la armadura mostrada en la figura 6.3 cuando todos sus nudos se suponen rígidos. Encontraremos que el análisis tiene muchas características en común con el descrito para la resolución de armaduras del inciso anterior.

Analizando una estructura articulada resulta innecesario colocar flechas en las barras para indicar su dirección, ya que los elementos de la matriz  $K_B$  que aparecen en las ecuaciones 6.6, no varían si el ángulo  $\alpha$  de la figura 6.5 se incrementa  $180^\circ$ . Sin embargo, al calcular marcos con nudos rígidos, la dirección del elemento sí es importante. Puesto que ahora se han de considerar momentos y fuerzas cortantes, los vectores fuerzas y movimiento tendrán tres componentes en los elementos.

La obtención de la matriz de rigidez global de la estructura se hará por dos procedimientos similares a los antes expuestos.

- a) Por la ecuación matricial  $\{a\}^T [k] \{a\}$  (poco usual)  
 b) Por medio de la matriz de rigidez acoplada de cada elemento

También para esta parte, el primer caso lo descomponemos en dos partes, obtención de la matriz de continuidad y obtención de la matriz de rigidez global. El segundo método utiliza las rigideces de cada barra y las ensambla según la contribución de cada barra a la deformación de un nudo.

La convención de fuerzas y desplazamientos es la misma que se estableció en el inciso anterior para marcos y armaduras.

En resumen, en esta parte se presenta un segundo enfoque (generalización) del método de rigideces en el cual se considera a la estructura tal y como teóricamente se comporta, en donde cada nudo tiene tres grados de libertad en el plano, un giro y dos desplazamientos ortogonales entre sí y paralelos los tres al plano referido. En el caso de estructuras en el espacio —que no forma parte de este trabajo— se tienen 6 grados de libertad, 3 giros y 3 desplazamientos lineales y ortogonales entre sí e independientes de cualquier otro.

### 6.1.3 a) Obtención de la matriz de rigidez global por medio de la ecuación matricial

$$\{K\} = [a]^T [k] [a]$$

Para la obtención de la matriz de continuidad necesitamos conocer la topología y el ángulo de inclinación de cada una de las barras. Es importante recordar que al primer enfoque tratado en el caso de marcos se utiliza, convenientemente, en estructuras con elementos ortogonales entre sí y que coinciden con los ejes de referencia global. Por el contrario en este enfoque se considera que los elementos pueden tener cualquier inclinación e incluso cualquier tipo de sustentación en sus extremos.

Consideremos el caso más general de un elemento el cual tiene sus dos extremos empotrados y está inclinado un cierto ángulo  $\alpha$  respecto del eje global de referencia. En estas condiciones la deformación de un elemento está dada por las ecuaciones 5.13, que representa el caso general de la deformación que se produce en una barra al inducir desplazamientos unitarios en sus extremos.

Como vemos, la deformación de una barra queda completamente definida al encontrar las deformaciones angulares  $\theta_A$  y  $\theta_B$  y una elongación  $\delta$  de la barra en cuestión las cuales a su vez se obtuvieron a partir de los desplazamientos unitarios en los extremos A y B de la barra.

Con las anteriores ecuaciones es posible construir la matriz de continuidad de una estructura cualquiera.

Para ilustrar su utilización, obtendremos la matriz de continuidad para el.

#### Ejemplo no. 4

Para este caso los vectores fuerza, deformación y desplazamiento tendrán tres componentes que quedan como:

$$d_1 = \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} ; \quad F_1 = \begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \theta_1 = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \end{Bmatrix}$$

Para la utilización de las ecuaciones 5.13, como ya se mencionó es necesario conocer el ángulo  $\alpha$  y el sentido de la barra el cual queda implícito al conocer el ángulo. Para este caso tenemos entonces que:

Barras 1 y 2

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

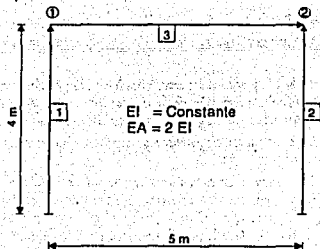
$$\sin 90^\circ = 1$$

Barra 3

$$\alpha = 0^\circ$$

$$\cos 0^\circ = 1$$

$$\sin 0^\circ = 0$$



Por lo que para la barra 1 queda:

$$\delta_1 = -\cos 90 (0) - \sin 90 (0) + 0 (0) + \cos 90 dx_1 + \sin 90 dy_1 + (0) \varphi_1 = dy_1$$

$$\theta_{A1} = -\frac{\sin 90}{4} (0) + \frac{\cos 90}{4} (0) + 1 (0) + \frac{\sin 90}{4} dx_1 - \frac{\cos 90}{4} dy_1 + (0) \varphi_1 = 0.25 dx_1$$

$$\theta_{B1} = -\frac{\sin 90}{4} (0) + \frac{\cos 90}{4} (0) + 0 (0) + \frac{\sin 90}{4} dx_1 - \frac{\cos 90}{4} dy_1 + (1) \varphi_1 = 0.25 dx_1 + \varphi_1$$

Para la barra 2:

$$\delta_2 = -\cos 90 (0) - \sin 90 (0) + 0 (0) + \cos 90 dx_2 + \sin 90 dy_2 + (0) \varphi_2 = dy_2$$

$$\theta_{A2} = -\frac{\sin 90}{4} (0) + \frac{\cos 90}{4} (0) + 1 (0) + \frac{\sin 90}{4} dx_2 - \frac{\cos 90}{4} dy_2 + (0) \varphi_2 = 0.25 dx_2$$

$$\theta_{B2} = -\frac{\sin 90}{4} (0) + \frac{\cos 90}{4} (0) + 0 (0) + \frac{\sin 90}{4} dx_2 - \frac{\cos 90}{4} dy_2 + (1) \varphi_2 = 0.25 dx_2 + \varphi_2$$

Para la barra 3:

$$\delta_3 = -\cos 0 dx_1 - \sin 0 dy_1 + 0 \varphi_1 + \cos 0 dx_2 + \sin 0 dy_2 + 0 \varphi_2 = -dx_1 + dx_2$$

$$\theta_{A3} = \frac{\sin 0}{5} dx_1 + \frac{\cos 0}{5} dy_1 + 1 \varphi_1 + \frac{\sin 0}{5} dx_2 + \frac{\cos 0}{5} dy_2 + (0) \varphi_2 = 0.20 dy_1 + \varphi_1 - 0.20 dy_2$$

$$\theta_{B3} = -\frac{\sin 0}{5} dx_1 + \frac{\cos 0}{5} dy_1 + 0 \varphi_1 + \frac{\sin 0}{5} dx_2 - \frac{\cos 0}{5} dy_2 + (1) \varphi_2 = 0.20 dy_1 - 0.20 dy_2 + \varphi_2$$

Una vez obtenidas las deformaciones en función de los desplazamientos, se vacían los coeficientes obtenidos en los lugares correspondientes del arreglo [a] el cual tendrá ahora una dimensión de  $3 \times 3$  y quedará como:

	$dx_1$	$dy_1$	$\varphi_1$	$dx_2$	$dy_2$	$\varphi_2$
$\delta_1$		1				
$\theta_{A1}$	0.25					
$\theta_{B1}$	0.25		1			
$\delta_2$					1	
$\theta_{A2}$				0.25		
$\theta_{B2}$				0.25		1
$\delta_3$	-1			1		
$\theta_{A3}$		0.20	1		-0.20	
$\theta_{B3}$		0.20			-0.20	1

Como establecimos anteriormente, vamos ahora a resolver el primer problema del capítulo de armaduras figura 6.3, pero considerando todos sus nudos rígidos. Además vamos a establecer un procedimiento para el cálculo de la matriz de continuidad que será el siguiente.

1) Obtenemos el ángulo de inclinación de cada barra y sus cosenos directores.

Para barras 1 y 3

$$\alpha = 0^\circ$$

$$\mu = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para barra 2

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para barra 4

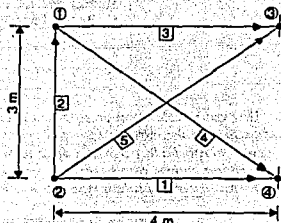
$$\alpha = -36.87^\circ$$

$$\mu = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix}$$

Para barra 5

$$\alpha = 36.87^\circ$$

$$\mu = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix}$$



Nudos y apoyos rígidos

$EI = \text{Constante}$

$EA = 2 EI$

2) Mediante la ecuación 5.13 obtenemos las deformaciones en función de los correspondientes desplazamientos. Por lo tanto:

$$[d] = \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ \varphi_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Para barra 1

$$\delta_1 = -dx_2$$

$$\theta_{A1} = 0.25 dy_2 + \varphi_2$$

$$\theta_{B1} = 0.25 dy_2$$

Para barra 2

$$\delta_2 = -dy_2 + dy_1$$

$$\theta_{A2} = -0.333 dx_2 + \varphi_2 + 0.333 dx_1$$

$$\theta_{B2} = -0.333 dx_2 + 0.333 dx_1 + \varphi_1$$





Para barras 1 y 3

$$k = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} EI$$

Para barra 2

$$k = \begin{bmatrix} 0.666 & 0 & 0 \\ 0 & 1.333 & 0.666 \\ 0 & 0.666 & 1.333 \end{bmatrix} EI$$

Para barra 5

$$k = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} EI$$

Finalmente, una vez obtenida la matriz  $[k]$  podemos obtener el producto  $[a]^T [k] [a]$  que nos permite conocer la matriz de rigidez global que en este caso queda como:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.235 & -0.146 & 0.811 & -0.444 & 0 & 0.666 \\ & 1.060 & 0.567 & 0 & -0.666 & 0 \\ & & 3.133 & -0.666 & 0 & 0.666 \\ & & & 1.235 & 0.146 & -0.811 \\ \text{Simétrico} & & & & 1.060 & 0.567 \\ & & & & & 3.133 \end{bmatrix} EI$$



El lector puede comprobar que en este método, la construcción de  $[a]$ , al igual que en el método simplificado, puede realizarse también por simple inspección ocular; aunque para el caso de marcos no es tan evidente. Se deja al lector verificar dicho procedimiento; lo cual le permitirá tener una idea más clara del procedimiento para deducir las ecuaciones 5.13, resolviendo el primer ejemplo que se planteó y para el cual ya conocemos la matriz de continuidad. El resultado será el siguiente:

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.5875 & 0 & 0.375 & -0.40 & 0 & 0 \\ & 0.596 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ & & 1.8 & 0 & -0.24 & 0.40 \\ & & & 0.5875 & 0 & 0.375 \\ \text{Simétrico} & & & & 0.596 & -0.24 \\ & & & & & 1.80 \end{bmatrix} EI$$



### 6.1.3 b) Obtención de la matriz de rigidez global por medio de la matriz de rigidez acoplada de cada barra

Comenzaremos como antes, considerando las ecuaciones fuerza-movimiento de una barra aislada. El sistema de coordenadas utilizado se muestra en la figura 6.9, y el estudio lo reducimos al caso de hipótesis lineal con pequeñas deformaciones. Así, no consideramos los cambios de longitud entre los extremos de una barra debido a la curvatura de la misma, siendo válidas las ecuaciones antes obtenidas (en armaduras) para las relaciones fuerza-movimiento en dirección  $x$ .

$$F^y x_B = -F^y x_A = EA/I [d^y x_B - d^y x_A] \quad 6.15$$

Los términos debidos a la curvatura se omiten en la ecuación 6.15 porque no son lineales más que porque sean pequeños, pero en la mayoría de las estructuras prácticas, el efecto de la curvatura en la longitud de una barra es despreciable para cargas de trabajo. Aunque es verdad que en ciertos casos el efecto de los términos de la deformación axial lineal pueden ser igualmente pequeños, ello no invalida el empleo de la ecuación 6.15 en el caso de cálculo lineal.

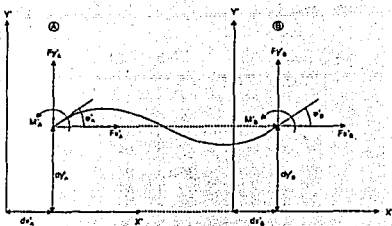


Figura 6-9. Sistema de coordenadas para una pieza de sección constante en flexión plana.

Si reducimos nuestra atención a una barra inicialmente recta de sección transversal constante y suponemos que el esfuerzo axial es pequeño, comparado con la carga de Euler  $P_c$ , los momentos en los extremos vienen dados por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} M^x_A &= \left(\frac{6EI}{l^2}\right) d^y y_A + \left(\frac{4EI}{l}\right) \phi^y_A - \left(\frac{6EI}{l^2}\right) d^y y_B + \left(\frac{2EI}{l}\right) \phi^y_B \\ M^x_B &= \left(\frac{6EI}{l^2}\right) d^y y_A + \left(\frac{2EI}{l}\right) \phi^y_A - \left(\frac{6EI}{l^2}\right) d^y y_B + \left(\frac{4EI}{l}\right) \phi^y_B \end{aligned} \quad 6.16$$

Estas expresiones representan las ecuaciones generales del método de pendiente-deflexión para una barra de sección constante. La deducción de estas ecuaciones se tratará más adelante.

Si sumamos las ecuaciones 6.16 obtendremos:

$$F^y y_B = -F^y y_A = \frac{M^x_A + M^x_B}{l} = \left(\frac{12EI}{l^3}\right) d^y y_A + \left(\frac{6EI}{l^2}\right) \phi^y_A - \left(\frac{12EI}{l^3}\right) d^y y_B + \left(\frac{6EI}{l^2}\right) \phi^y_B \quad 6.17$$

Las ecuaciones 6.15, 6.16 y 6.17 pueden combinarse, dando origen a las ecuaciones matriciales.

$$\begin{bmatrix} F^y x_A \\ F^y y_A \\ M^x x_A \\ F^y x_B \\ F^y y_B \\ M^x x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/I & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l \\ -EA/I & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -EA/I & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ EA/I & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^y x_A \\ d^y y_A \\ \phi^y x_A \\ d^y x_B \\ d^y y_B \\ \phi^y x_B \end{bmatrix} \quad 6.18a$$

<sup>4</sup> Se define así a la carga máxima que es capaz de soportar una columna, o la carga crítica de pandeo y un incremento adicional a la carga provoca la inestabilidad de la columna por pandeo.

Que puede reescribirse como:

$$F'_A = K'_{AA} d'_A + K'_{AB} d'_B$$

$$F'_B = K'_{BA} d'_A + K'_{BB} d'_B \quad 6.18b)$$

La prima (') representa a cada uno de los sistemas obtenidos respecto al eje local de la barra.

Puede también observarse la simetría de estas ecuaciones ya que las matrices  $K'_{AA}$  y  $K'_{BB}$  lo son y además  $K'_{AB}$  y  $K'_{BA}$  son transpuestas. Así mismo, son singulares, puesto que las fuerzas de extremo  $F'_1$  y  $F'_2$  tienen que satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio de la barra y esta puede experimentar un movimiento arbitrario de conjunto (pequeño) sin afectar las fuerzas de extremo.

Las ecuaciones 6.18 son las mismas obtenidas en el capítulo 4 (4.14 a y b) obtenidas mediante otro enfoque.

El siguiente paso para poder utilizar las ecuaciones 6.18 (matriz de rigidez acoplada) consiste en transformar estas ecuaciones al sistema global de coordenadas. Si la barra está inclinada un ángulo  $\alpha$ , respecto al eje global, como se observa en el figura 3.1 (capítulo 3) las ecuaciones que relacionan las componentes de un vector fuerza en los sistemas local y global están representadas por las expresiones 3.3 y 3.4. Empleando estas relaciones podemos eliminar los vectores que nos proporcionan las fuerzas de las barras en sistema local ( $F'_1, F'_2$ ) de las ecuaciones 6.18b, resultando:

$$F_A = K_{AA} d_A + K_{AB} d_B$$

$$F_B = K_{BA} d_A + K_{BB} d_B \quad 6.19$$

En las que, según las ecuaciones 3.5 y 3.6.

$$[K_{ij}] = [T]^T [K'_{ij}] [T]$$

$$[K'_{ij}] = [T] [K_{ij}] [T]^T$$

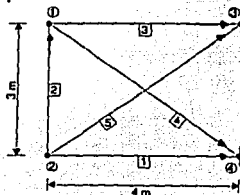
En donde, las ecuaciones 6.18 y 6.19 son simétricas y singulares.

La formación de las ecuaciones de la estructura completa, sigue exactamente el mismo criterio ya descrito para el caso de estructuras articuladas.

Las ecuaciones de compatibilidad de nudos (6.7) no cambian, aunque el vector movimiento incluye en este caso giro entre sus componentes. Sustituyendo estas expresiones de los movimientos de los extremos de barra en las ecuaciones 6.19 para las piezas aisladas del ejemplo no. 1 resulta:

Barra 1	$F_{A1} = K_{AA1} d_2$
Barra 2	$F_{A2} = K_{AA2} d_2 + K_{AB2} d_1$
	$F_{B2} = K_{AB2} d_2 + K_{BB2} d_1$
Barra 3	$F_{A3} = K_{AA3} d_1$
Barra 4	$F_{A4} = K_{AA4} d_1$
Barra 5	$F_{A5} = K_{AA5} d_2$

6.20



$EI = \text{Constante}; EA = 2 EI$

En las cuales, como antes, las primas de los vectores movimiento se omiten, ya que han de venir necesariamente definidos en sistema global.

Las condiciones de equilibrio de nudos son también las mismas que antes:

$$F_1 = F_{B2} + F_{A3} + F_{A4}$$

$$F_2 = F_{A1} + F_{A2} + F_{A5} \quad 6.21$$

Y sustituyendo las ecuaciones 6.20 en 6.21 resulta finalmente que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{BB2} + K_{AA3} + K_{AA4} & K_{BA2} \\ K_{AB2} & K_{AA1} + K_{AA2} + K_{AA5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad 6.22$$

Como en las armaduras, la forma de la matriz de rigidez global refleja la disposición de las barras en la estructura; la aparición de los giros de los nudos, como los grados de libertad adicionales, significa que la ecuación 6.22 representa un sistema de 6 ecuaciones de las 6 componentes de movimiento de los nudos. Al igual que antes, una vez que este sistema se ha resuelto, los esfuerzos en las barras pueden hallarse a partir de las ecuaciones 6.20.

También en este caso, la forma de la matriz de rigidez y la disposición geométrica de la estructura hace posible escribir la matriz completa en función de las matrices de rigidez acoplada de cada barra.

Siguiendo con nuestro ejemplo, y según la ecuación 6.22 primero debemos obtener los diferentes  $K_{ij}$  según ecuación 6.18—y transformarlos a coordenadas globales con lo que tendremos lo siguiente:

Barras 1 y 3

$$\alpha = 0^\circ$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Además y en general } [K_{ij}] = [T]^T [K'_i] [T]$$

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra 2

$$\alpha = 90^\circ$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.666 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.666 \\ 0 & 0.666 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.444 & 0 & -0.666 \\ 0 & 0.666 & 0 \\ -0.666 & 0 & 1.333 \end{bmatrix}$$

Barra 4  $\alpha = -36.87^\circ$ 

$$T = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.291 & -0.146 & 0.144 \\ -0.146 & 0.205 & 0.192 \\ 0.144 & 0.192 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Barra 5  $\alpha = 36.87^\circ$ 

$$T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.291 & 0.146 & -0.144 \\ 0.146 & 0.205 & 0.192 \\ -0.144 & 0.192 & 0.8 \end{bmatrix}$$

**Nota:** Multiplicamos los diferentes  $K_i \times EI$ 

Es importante recordar que en el caso de miembros trabajando por flexión las submatrices que integran la matriz de rigidez acoplada tienen diferentes valores para las diversas  $K_{ij}$  existentes. En este caso solo se obtuvo la submatriz  $K_{AA}$  de cada caso, por consiguiente los demás valores que se necesiten ( $K_{AB}$ ,  $K_{BA}$  y  $K_{BB}$ ) deberán ser obtenidos a partir de los valores de la ecuación 6.18a.

Sustituyendo los diferentes  $K_{ij}$  en la ecuación 6.22 nos queda finalmente:

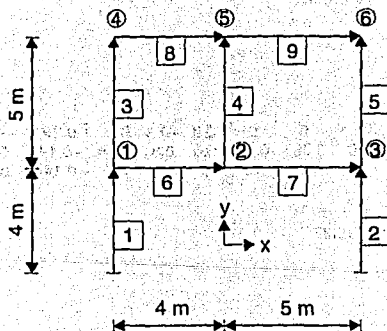
$$[K] = \begin{bmatrix} 1.235 & -0.146 & 0.811 & -0.444 & 0 & 0.666 \\ & 1.060 & 0.567 & 0 & -0.666 & 0 \\ & & 3.133 & -0.666 & 0 & 0.666 \\ & & & 1.235 & 0.146 & -0.811 \\ & & & & 1.060 & 0.567 \\ & & & & & 3.133 \end{bmatrix} EI$$

Que resulta ser la misma obtenida por el método matricial anterior.

Como última parte de este inciso vamos a resolver el ejemplo no. 5, que ya se había resuelto por el método simplificado, ahora por el método general de rigideces.

— Como ya se ha señalado existe una relación entre la forma de la matriz de rigidez global y la disposición geométrica de la estructura. Por este motivo se puede ensamblar la matriz  $[K]$  por simple inspección, dando los desplazamientos correspondientes y observando las diferentes rigideces que se producen.

## Ejemplo No. 5



EI = Constante

EA = 2EI

Para nuestro ejemplo el ensamble de la matriz  $[K]$  será el siguiente:

	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	
$[K] =$	$K_{BB1} + K_{AA3} + K_{AA5}$	$K_{AB6}$	0	$K_{AB3}$	0	0	$F_1$
	$K_{BA6}$	$K_{AA4} + K_{BB6} + K_{AA7}$	$K_{AB7}$	0	$K_{BA4}$	0	$F_2$
	0	$K_{BA7}$	$K_{BB2} + K_{AA3} + K_{BB7}$	0	0	$K_{AB5}$	$F_3$
	$K_{BA3}$	0	0	$K_{BB2} + K_{AA4}$	$K_{AB6}$	0	$F_4$
	0	$K_{BA4}$	0	$K_{BA5}$	$K_{BB4} + K_{BB6} + K_{AA6}$	$K_{AB8}$	$F_5$
	0	0	$K_{BA5}$	0	$K_{BA9}$	$K_{BB5} + K_{BB9}$	$F_6$

—Ahora, como siguiente paso, obtenemos cada una de las submatrices que en el arreglo anterior se enuncian para lo cual utilizamos la expresión 6.18a. Por lo tanto:  
(En sistema local)

Para las barras 1, 2, 6 y 8.

$$[K']_{AA} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 \end{bmatrix}; [K']_{BB} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & -0.375 \\ 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix}; [K']_{AB} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1875 & 0.375 \\ 0 & -0.375 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(K_{BA} = K_{AB}^T)$$

Para barras 3, 4, 5, 7 y 9.

$$K'_{AA} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 \end{bmatrix}; K'_{BB} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \text{ y } K'_{AB} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.4 \end{bmatrix}$$

— Como siguiente paso obtenemos la matriz de transformación para cada barra y transformamos los diferentes  $K'_i$  al sistema global de referencia.

Para barras 1, 2, 3, 4 y 5

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para barras 6, 7, 8 y 9

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tendremos que:

Barras 1 y 2.

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI \text{ y } K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} EI$$

Barras 3, 4 y 5.

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ -0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} EI; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.096 & 0 & 0.24 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} EI \text{ y } K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.096 & 0 & -0.24 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} EI$$

Barras 6 y 8.

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 \end{bmatrix} EI; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & -0.375 \\ 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} EI \text{ y } K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1875 & 0.375 \\ 0 & -0.375 & 0.5 \end{bmatrix} EI$$

Barras 7 y 9.

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 \end{bmatrix} EI; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} EI \text{ y } K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.4 \end{bmatrix} EI$$

Finalmente obtenemos la matriz  $[K]$  según el ensamble obtenido en el primer paso. Finalmente nos quedará:

dx <sub>1</sub>	dy <sub>1</sub>	q <sub>1</sub>	dx <sub>2</sub>	dy <sub>2</sub>	q <sub>2</sub>	dx <sub>3</sub>	dy <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	dx <sub>4</sub>	dy <sub>4</sub>	q <sub>4</sub>	dx <sub>5</sub>	dy <sub>5</sub>	q <sub>5</sub>	dx <sub>6</sub>	dy <sub>6</sub>	q <sub>6</sub>
0.7635	0	0.135	-0.5	0	0	0	0	0	-0.006	0	-0.24	0	0	0	0	0	0
	1.0875	0.375	0	-0.1875	0.375	0	0	0	0	-0.4	0	0	0	0	0	0	0
		2.6	0	-0.375	0.5	0	0	0	0.24	0	0.4	0	0	0	0	0	0
			0.206	0	-0.24	-0.4	0	0	0	0	-0.006	0	-0.24	0	0	0	0
S			0.6435	-0.135	0	-0.006	0.24	0	0	0	0	-0.4	0	0	0	0	0
				2.6	0	-0.24	0.4	0	0	0	0.24	0	0.4	0	0	0	0
					0.6435	0	0.135	0	0	0	0	0	0	-0.006	0	-0.24	0
						0.906	-0.24	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.4	0
							2.6	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0.4
								0.906	0.24	-0.5	0	0	0	0	0	0	0
									0.5475	0.375	0	-0.1875	0.375	0	0	0	0
										1.6	0	-0.375	0.5	0	0	0	0
											0.896	0	0.24	-0.4	0	0	0
												0.6435	-0.135	0	-0.006	0.24	0
													2.6	0	-0.24	0.4	0
														0.496	0	0.24	0
															0.496	-0.24	0
																1.6	0

## 6.2 MÉTODO DE PENDIENTE DEFLEXIÓN

Este procedimiento fue creado por los profesores "Wilson y Mayne", y también se le conoce como "Teoría de las deformaciones angulares de las tangentes a la fibra media deformada de un elemento solicitado por flexión".

La base fundamental del método radica en el hecho de que los momentos en los extremos de miembros estructurales estáticamente indeterminados, se expresan en términos de los giros (o pendiente) en los nudos y los desplazamientos (o deflexiones) de los extremos. Tales giros y desplazamientos pueden ser provocados por alguna de las siguientes situaciones:

- Por efecto de las cargas aplicadas.
- Por asentamiento de uno o ambos apoyos.
- Por efecto de los momentos de empotramiento provocados por las cargas.

Como es de esperarse, la relación entre los momentos y giros obedece a un comportamiento lineal por lo que estarán estrechamente relacionados con las propiedades mecánicas y geométricas de la estructura ( $E, I$  y  $l$ ).

En los métodos matriciales, las ecuaciones pendiente-deflexión (sección final del método pendiente-deflexión) aparecen como una parte de la matriz de rigidez acoplada del elemento. Por lo tanto es posible obtener los momentos de los extremos en función de cada una de las causas antes citadas. Para el caso de los giros y desplazamiento, la deformación general de una barra estará representada por la figura 6-9.

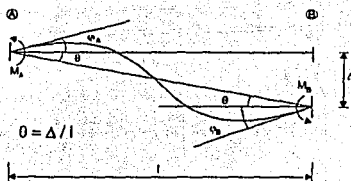


Figura 6-9. Deformación general de una barra.



Para el caso de un elemento de sección constante, los diferentes momentos y fuerzas que resultan se pueden obtener a partir de la ecuación 4.14, en la cual—por ser provocados por giros y desplazamientos unitarios—los hemos denominado rigideces.

En esta parte presentamos la forma general de las ecuaciones pendiente-deflexión y para este caso, los giros y desplazamientos que se provocan en una barra podrán ser de cualquier magnitud y para este caso general, los momentos y fuerzas obtenidos se llamarán factores de rigidez.

Así, los factores de rigidez serán 4, que son:

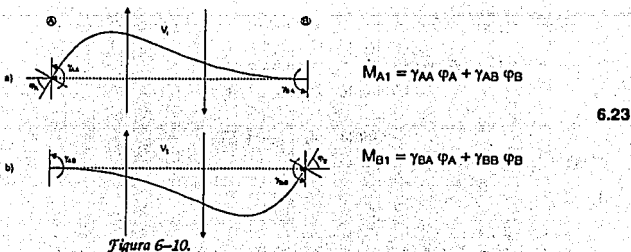
$\gamma_{AA}$  - Factor de rigidez en A debido a un giro en A

$\gamma_{AB}$  - Factor de rigidez en A debido a un giro en B

$\gamma_{BA}$  - Factor de rigidez en B debido a un giro en A

$\gamma_{BB}$  - Factor de rigidez en B debido a un giro en B

Como primer punto, obtengamos los factores de rigidez en los extremos de una barra, considerando solamente los giros que se inducen en dichos extremos. Esto lo podemos representar según la figura 6.10, de donde se obtienen las ecuaciones 6.23.

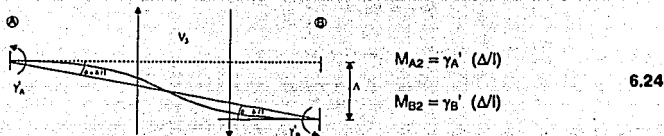


$$M_{A1} = \gamma_{AA} \Phi_A + \gamma_{AB} \Phi_B$$

6.23

$$M_{B1} = \gamma_{BA} \Phi_A + \gamma_{BB} \Phi_B$$

Por otra parte, consideremos el caso de los momentos producidos por los asentamientos de los apoyos. Esta situación está representada por la figura 6.11 y las ecuaciones 6.24 tal que:



$$M_{A2} = \gamma_A' (\Delta/l)$$

6.24

$$M_{B2} = \gamma_B' (\Delta/l)$$

Por consiguiente, para obtener los momentos en los extremos de la barra debido a los giros y desplazamientos sumamos las ecuaciones 6.23 y 6.24 para obtener:

$$M_A = \gamma_{AA} \varphi_A + \gamma_{AB} \varphi_B + \gamma'_A / I \Delta$$

6.25

$$M_B = \gamma_{BA} \varphi_A + \gamma_{BB} \varphi_B + \gamma'_B / I \Delta$$

Sin embargo, vamos a analizar detenidamente la obtención de los factores de rigidez para el caso general que nos ocupa.

Según las ecuaciones 4.12 y 4.12', para la figura 6.10a tenemos los siguientes valores para los factores de rigidez.

$$\text{Momentos } \gamma_{AA} = \mathcal{F}_{22} / \text{DET}$$

$$\text{Cortante } V_1 = -\mathcal{F}_{32} / \text{DET}$$

Por equilibrio deducimos que:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\frac{-\mathcal{F}_{22}}{\text{DET}} - \frac{\mathcal{F}_{32} |}{\text{DET}} - \gamma_{BA} = 0 \quad \text{Por tanto} \quad \gamma_{BA} = \frac{-\mathcal{F}_{32} | - \mathcal{F}_{22}}{\text{DET}}$$

Para la figura 6.11 y según la misma referencia tenemos que:

$$\text{Momento } \gamma'_A = -\mathcal{f}_{32} / \text{DET}$$

$$\text{Cortante } V_3 = \mathcal{f}_{33} / \text{DET}$$

Por equilibrio deducimos:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\frac{-\mathcal{F}_{32}}{\text{DET}} - \frac{\mathcal{F}_{33} |}{\text{DET}} + \gamma'_B = 0 \quad \text{Por tanto} \quad \gamma'_B = \frac{-\mathcal{F}_{32} - \mathcal{F}_{33} |}{\text{DET}}$$

Para la figura 6.10b) y según el teorema de reciprocidad de Maxwell tendremos que:

$$\gamma_{AB} = \gamma_{BA} = \frac{-\mathcal{F}_{12} | - \mathcal{F}_{22}}{\text{DET}}$$

Y por simetría de la matriz de rigidez acoplada tendremos que:

$$V_2 = \frac{\mathcal{F}_{33} | + \mathcal{F}_{32}}{\text{DET}}$$

Y por equilibrio tenemos finalmente que:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\frac{-\mathcal{F}_{32} |}{\text{DET}} - \frac{(\mathcal{F}_{33} | + \mathcal{F}_{32}) |}{\text{DET}} + \gamma_{BB} = 0 \quad \text{Por tanto} \quad \gamma_{BB} = \frac{\mathcal{F}_{33} |^2 + 2\mathcal{F}_{32} + \mathcal{F}_{22}}{\text{DET}}$$

Una vez obtenido los valores de los factores de rigidez  $\gamma_{AA}$ ,  $\gamma_{AB}$ ,  $\gamma_{BA}$  y  $\gamma_{BB}$  podemos establecer las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{-\mathcal{F}_{23}}{\text{DET}} = \frac{\gamma_{AA} + \gamma_{AB}}{\text{DET}} \\ \text{b)} \quad & \frac{\mathcal{F}_{33} l + \mathcal{F}_{32}}{\text{DET}} = \frac{\gamma_{BA} + \gamma_{BB}}{\text{DET}} \end{aligned} \quad 6.26$$

Si observamos las ecuaciones 6.26, nos damos cuenta que los valores de dichas ecuaciones corresponden respectivamente a los momentos en los extremos A y B de una barra cuando existe un asentamiento de sus extremos. Por lo tanto las ecuaciones 6.26 tendrán el siguiente valor:

$$\begin{aligned} M_{A2} &= \frac{\gamma_{AA} + \gamma_{AB}}{l} \Delta \\ M_{B2} &= \frac{\gamma_{BA} + \gamma_{BB}}{l} \Delta \end{aligned} \quad 6.27$$

De lo anterior concluimos que las ecuaciones 6.25 quedan finalmente como:

$$\begin{aligned} M_A &= \gamma_{AA} \varphi_A + \gamma_{AB} \varphi_B + \frac{(\gamma_{AA} + \gamma_{AB})}{l} \Delta \\ M_B &= \gamma_{BA} \varphi_A + \gamma_{BB} \varphi_B + \frac{(\gamma_{BA} + \gamma_{BB})}{l} \Delta \end{aligned} \quad 6.28$$

En donde:

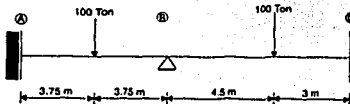
$$\gamma_{AA} = \mathcal{F}_{22}^i / \text{DET} ; \gamma_{AB} = \gamma_{BA} = \frac{-f_{32} l - \mathcal{F}_{22}}{\text{DET}} \quad \text{y} \quad \gamma_{BB} = \frac{\mathcal{F}_{33} l^2 + 2\mathcal{F}_{32} + \mathcal{F}_{22}}{\text{DET}}$$

Las ecuaciones 6.28, son finalmente "Las ecuaciones pendiente-deflexión" para una barra con cualquier sección sometida a giros en sus extremos y asentamiento de sus juntas, como se ilustra en la figura 6.9.

Mediante estas ecuaciones se introdujo uno de los métodos prematriciales, el de la "pendiente-deflexión", que es extensamente utilizado en el análisis de estructuras indeterminadas.

En el caso de tener cargas dentro de la longitud de una viga, bastará sumar los momentos de empotramiento que estos producen, a los momentos que se obtengan de las ecuaciones 6.28, para el extremo correspondiente; estos momentos de empotramiento pueden obtenerse a partir del procedimiento descrito en 4.5, y para barras de sección constante algunos casos comunes pueden obtenerse en la tabla 4.1.

Para ilustrar el uso de las ecuaciones "pendiente-deflexión" analicemos la viga estáticamente indeterminada que se muestra en la figura.



Recordemos que en el caso de empotramiento perfecto, el giro es nulo.

$EI = \text{Constante}$

Para este caso tendremos que:

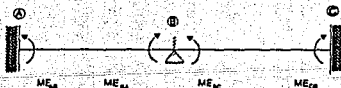
$$\varphi_A = \varphi_C = \Delta_B = 0$$

Cada tramo de la viga debe considerarse por separado y se calculan sus momentos de empotramiento escribiendo una ecuación para el momento en cada extremo del elemento en cuestión. Para el caso de sección constante, las ecuaciones 6.28 nos quedan como:

$$M_A = \frac{4EI}{l} \varphi_A + \frac{2EI}{l} \varphi_B + \frac{6EI}{l^2} \Delta$$

$$M_B = \frac{2EI}{l} \varphi_A + \frac{4EI}{l} \varphi_B + \frac{6EI}{l^2} \Delta \quad 6.29$$

—Momentos de empotramiento (reactivos)



$$M_{EAB} = \frac{Pl}{8} = 93.75 \text{ T-m} ; \quad M_{EBC} = \frac{Pab^2}{l^2} = 72 \text{ T-m}$$

$$M_{EBA} = -\frac{Pl}{8} = -93.75 \text{ T-m} ; \quad M_{ECB} = \frac{Pa^2b}{l^2} = 108 \text{ T-m}$$

—Considerando la ecuación 6.29 para cada barra más los momentos de empotramiento respectivos.

Barra AB

$$M_A = \frac{2EI}{7.5} \varphi_B + 93.75$$

$$M_B = \frac{4EI}{7.5} \varphi_B - 93.75$$

Barra BC

$$M_B = \frac{4EI}{7.5} \varphi_B + 72$$

$$M_C = \frac{2EI}{7.5} \varphi_B - 108$$

Las ecuaciones de momentos por giros se escriben en términos de los valores desconocidos de  $\varphi$  en los apoyos o juntas. La suma de los momentos en un apoyo interior debe ser nula. Por lo tanto:

$$\Sigma M_B = 0 \quad (M_{BA} + M_{BC} = 0)$$

$$\frac{4EI}{7.5} \varphi_B - 93.75 + \frac{4EI}{7.5} \varphi_B + 72 = 0$$

$$\text{Finalmente queda que: } \varphi_B = 20.39 / EI$$

En otros casos, cuando las incógnitas son más de una, se obtendrá un sistema de ecuaciones simultáneas en función de los diferentes giros y desplazamientos desconocidos.

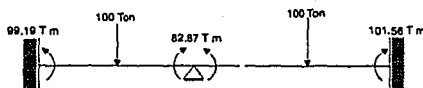
Finalmente, obtenemos los momentos de las barras utilizando las ecuaciones planteadas en el segundo paso. Por lo tanto:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{7.5} \left( \frac{20.39}{EI} \right) + 93.75 = 99.19 \text{ T-m}$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{7.5} \left( \frac{20.39}{EI} \right) - 93.75 = -82.87 \text{ T-m}$$

$$M_{BC} = \frac{4EI}{7.5} \left( \frac{20.39}{EI} \right) + 72 = 82.87 \text{ T-m}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{7.5} \left( \frac{20.39}{EI} \right) - 108 = -102.56 \text{ T-m}$$



### 6.2.1 Factores de rigidez modificados

En el caso de tener una barra con articulación en uno de sus extremos tendremos que los factores de rigidez se modifican de la manera que muestra el capítulo 8, inciso 8.4.4.

El momento en el extremo articulado es cero, ya que debido al tipo de apoyo no se puede inducir un giro que produzca factor de rigidez.

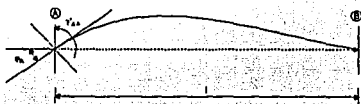


Figura 6-12.

Por lo tanto, para el caso de una viga con un extremo empotrado y otro articulado, el momento resultante en su extremo debido a un giro y un asentamiento será igual a:

$$M_A = \gamma'_{AA} \phi_A + \frac{\gamma'_{AB}}{l} \Delta \quad 6.30$$

Donde

$$\gamma'_{AA} = \gamma_{AA} - \frac{\gamma_{AB}^2}{\gamma_{BB}}$$

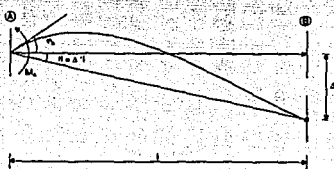
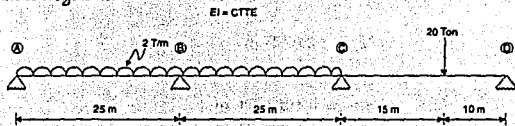


Figura 6-13.

Y para  $EI = \text{Constante}$  tendremos que:

$$M_A = \frac{3EI}{l} \varphi_A + \frac{3EI}{l^2} \Delta \quad 6.31$$

Para ejemplificar el uso de la ecuación "pendiente-deflexión modificada", resolvamos el siguiente ejemplo el cual se representa por la figura y es una combinación de vigas doblemente empotradas y empotrada articulada. Por esta razón podremos utilizar en el mismo problema las ecuaciones 6.28 y 6.30. El procedimiento es el siguiente:



1) Obtención de los momentos de empotramiento.



$$M_{AB} = M_{DC} = 0$$

$$\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = \Delta_D = 0$$

2) Obtención de los momentos para cada tramo en función de los giros y desplazamientos desconocidos en los diferentes apoyos.

$$M_{AB} = M_{DC} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{25} \varphi_B - 156.25$$

$$M_{BC} = \frac{4EI}{25} \varphi_B + \frac{2EI}{25} \varphi_C + 104.17$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{25} \varphi_B + \frac{4EI}{25} \varphi_C - 104.17$$

$$M_{CD} = \frac{3EI}{25} \varphi_C + 84$$

3) Ahora obtenemos la suma de momentos en los apoyos centrales que, por equilibrio, debe ser nula.

$$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad \text{①}$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad \text{②}$$

Que sustituyendo queda finalmente como:

$$0.28 EI \varphi_B + 0.80 EI \varphi_C = 52.08$$

$$\varphi_B = 2.76 / EI$$

$$0.80 EI \varphi_B + 0.28 EI \varphi_C = 20.17$$

$$\varphi_C = 64.15 / EI$$

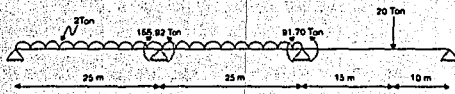
4) Por último, obtenemos los momentos finales en los extremos de cada barra, con las ecuaciones del paso 2. Esto es:

$$M_{BA} = -155.92 \text{ T-m}$$

$$M_{BC} = 155.92 \text{ T-m}$$

$$M_{CB} = -91.70 \text{ T-m}$$

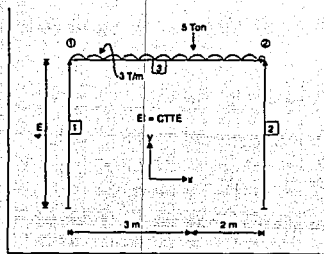
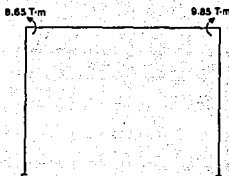
$$M_{CD} = 91.70 \text{ T-m}$$



Las ecuaciones pendiente-deflexión pueden ser utilizadas también en la resolución de marcos. Para ilustrarlo, resolveremos ahora el ejemplo no. 4 con un sistema de cargas establecido.

Ejemplo no. 4.

1) Momentos de empotramiento.



2) Obtención de los momentos en las barras, en función de los giros y desplazamientos desconocidos. Para este caso, igual que en el método de rigidez simplificada, establecemos las siguientes condiciones:

$$dy_1 = dy_2 = 0 \quad \text{y} \quad dx_1 = dx_2 = \Delta$$

$$M_{AB1} = 0.5 EI \varphi_1 + 0.375 EI \Delta$$

$$M_{BA1} = EI \varphi_1 + 0.375 EI \Delta$$

$$M_{AB2} = 0.5 \text{ E} I \varphi_2 + 0.375 \text{ E} I \Delta$$

$$M_{BA2} = \text{E} I \varphi_2 + 0.375 \text{ E} I \Delta$$

$$M_{AB3} = 0.8 \text{ E} I \varphi_1 + 0.4 \text{ E} I \varphi_2 + 8.65$$

$$M_{BA3} = 0.4 \text{ E} I \varphi_1 + 0.8 \text{ E} I \varphi_2 - 9.85$$

$$F_{B1} = 0.375 \text{ E} I \varphi_1 + 0.1875 \text{ E} I \Delta$$

$$F_{B2} = 0.375 \text{ E} I \varphi_2 + 0.1875 \text{ E} I \Delta$$

3) Ahora, utilizando el equilibrio, obtenemos la suma de fuerzas en el cabezal y la suma de momentos en 1 y 2, ambas serán igual a cero. Por lo que:

$$\Sigma M_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{BA1} + M_{AB3} = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{BA2} + M_{BA3} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{B1} + F_{B2} = 0$$

Sustituyendo valores y simplificando resultados nos queda:

$$1.80 \text{ E} I \varphi_1 + 0.40 \text{ E} I \varphi_2 + 0.375 \text{ E} I \Delta = -8.65$$

$$0.40 \text{ E} I \varphi_1 + 1.80 \text{ E} I \varphi_2 + 0.375 \text{ E} I \Delta = 9.85$$

$$0.375 \text{ E} I \varphi_1 + 0.375 \text{ E} I \varphi_2 + 0.375 \text{ E} I \Delta = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = -6.193 / \text{E} I \\ \varphi_2 = 7.021 / \text{E} I \\ \Delta = -0.828 / \text{E} I \end{cases}$$

4) Finalmente, obtenemos los momentos con las ecuaciones del inciso 2.

$$M_{AB1} = -3.407 \text{ T}\cdot\text{m}$$

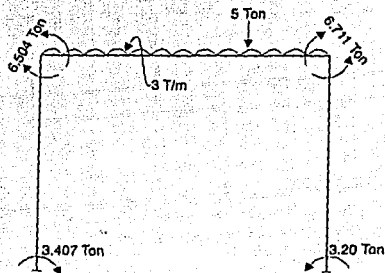
$$M_{BA1} = -6.504 \text{ T}\cdot\text{m}$$

$$M_{AB2} = 3.200 \text{ T}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA2} = 6.711 \text{ T}\cdot\text{m}$$

$$M_{AB3} = 6.504 \text{ T}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA3} = -6.711 \text{ T}\cdot\text{m}$$





### 6.3 ANÁLISIS CON DISTINTOS TIPOS DE SOLICITACIONES

Como se pudo observar en los últimos tres ejemplos, la utilización de las ecuaciones pendiente-deflexión en la resolución de marcos hiperestáticos es relativamente sencilla y además conduce a los mismos resultados que el método de rigideces (simplificada o general) en marcos, ya que el sistema de ecuaciones que se obtiene es el mismo.

Sin embargo, al tratar de considerar todos los giros y desplazamientos en una estructura de gran tamaño, la labor de análisis sería bastante complicada, con lo cual resultaría impráctica la utilización de este método ya que, los anteriores, conducen con mayor facilidad al resultado esperado y con relativa sencillez.

A pesar de lo anterior, resulta muy práctico el uso de las ecuaciones pendiente-deflexión, una vez que se han obtenido las incógnitas por otros métodos (lo más común es el cálculo matricial por medio de computadora). Esto hace posible encontrar los momentos finales en las barras mediante cálculos muy sencillos.

Por lo tanto, se puede establecer un procedimiento de análisis cuya secuencia combine el uso del método de rigidez y el uso de las ecuaciones pendiente-deflexión. A grandes rasgos, este método consta de dos partes generales:

- 1) *Obtención de la matriz de rigidez global de la estructura:* lo cual nos lleva, por consiguiente, a la obtención de los desplazamientos.
- 2) *Obtención de los momentos finales de las barras:* mediante las ecuaciones pendiente-deflexión.

La primera parte implica la obtención de la matriz de rigidez global de la estructura por cualquiera de los procedimientos descritos —es importante señalar las condiciones y/o simplificaciones que se utilizaron al obtenerla, para posteriormente tomarlas en cuenta al obtener los momentos finales—. Una vez conocida, se recurrirá al planteamiento de la ecuación 2.12.

$$\{F\} = [K]\{d\}$$

De la cual se desprende finalmente el vector de desplazamientos.

Cabe aclarar que, el vector de fuerzas  $\{F\}$ , es un dato dentro del análisis y es función del sistema de cargas que obran en la estructura. Su obtención se refiere más adelante.

La segunda parte se refiere exclusivamente a la utilización de las ecuaciones pendiente-deflexión una vez que se han encontrado los desplazamientos.

En ambas partes es muy importante considerar la obtención de los momentos de empotramiento de cada barra. Además, es importante destacar que el vector de fuerzas  $\{F\}$ , puede estar compuesto por fuerzas en los nudos (momentos) y fuerzas sísmicas (las cuales se consideran actuando en los entrepisos).

—Obtención del vector de fuerzas externas  $\{F\}$

Todas las barras que en su interior soporten alguna carga consecuentemente tendrán fuerzas de empotramiento en sus extremos. En el caso de tener dos o más barras que concurren a un mismo nudo y que tengan fuerzas de empotramiento, estas fuerzas las sumamos algebraicamente según el sentido en que actúan. Es muy importante señalar que el signo de las fuerzas de empotramiento corresponderá a la forma en que actúa realmente sobre el elemento, o sea que será la fuerza actuante y no la reactiva. Por ejemplo:

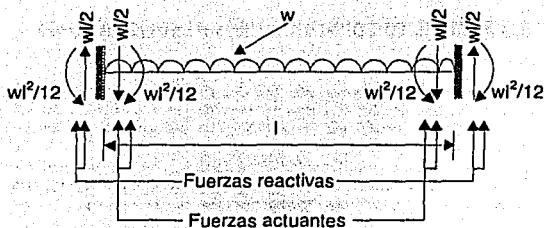


Figura 6-14.

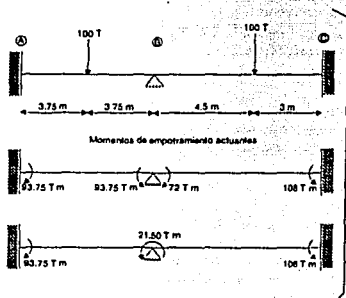
Como es lógico, el valor de las fuerzas actuante es exactamente el mismo que el de las fuerzas reactivas, solo que ambos son de signo contrario, lo cual es obvio si recordamos que un nudo siempre está en equilibrio y por tanto la suma de fuerzas es igual a cero.

Para poder formar el vector de fuerzas externas es muy importante saber que este vector debe ser compatible con el vector de desplazamientos en el sentido de que:

- Un desplazamiento angular (giro) es provocado por un momento.
- Un desplazamiento lineal es provocado por una fuerza lineal que es colineal a dicho desplazamiento.

Por lo tanto y en su forma más general, el vector  $\{F\}$  tendrá tantos momentos como giros haya en el vector  $\{d\}$  y tantas fuerzas como desplazamientos lineales haya en el mismo. Por consiguiente, para su formación será importante observar las simplificaciones que para cada problema se presenten.

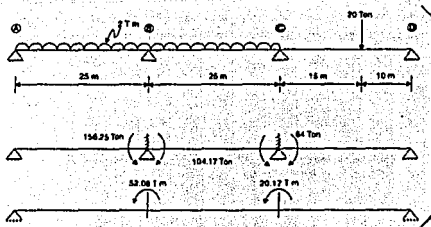
Por ejemplo: para los últimos tres problemas, el vector de fuerzas se integra de la siguiente manera:



$$F = \{ M_B \}$$

$$F = \{ 21.75 \}$$

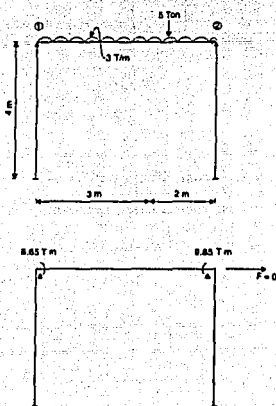
Los apoyos exteriores no se considerarán como nudos porque su desplazamiento es nulo, además  $dy_B = dx_B = 0$



$$\{F\} = \begin{Bmatrix} M_a \\ M_c \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 52.08 \\ 20.17 \end{Bmatrix}$$

No se consideran los apoyos exteriores porque el momento en ambos es cero.



$$\{F\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -8.85 \\ 8.85 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Por otro lado, es importante señalar también que las fuerzas de empotramiento se utilizan en la segunda parte del análisis ya citado, para calcular las fuerzas finales en los extremos de cada barra. Este cálculo se divide en dos partes:

- 1) La primera parte utiliza las ecuaciones pendiente-deflexión para calcular los momentos en las barras, pero "exclusivamente" por efecto de los giros y desplazamientos que sufre la estructura, los cuales utilizaremos para formar un vector de fuerzas finales (momentos en los extremos de las barras) al cual llamamos p estado 1,  $\{PE_1\}$ .
- 2) La segunda parte utiliza los momentos de empotramiento reactivos, para formar un vector de fuerzas al cual llamamos p estado 2,  $\{PE_2\}$ .

Finalmente, para obtener el vector de fuerzas finales p total,  $\{P\}$ , sumamos los estados 1 y 2 de fuerzas. Esto es:

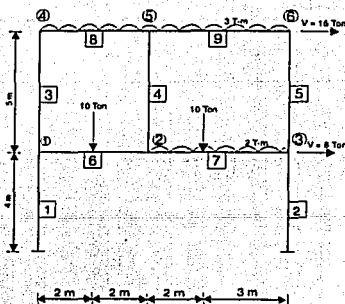
$$\{P\} = \{PE_1\} + \{PE_2\}$$

Para ilustrar más ampliamente el procedimiento general hasta aquí descrito, resolveremos el ejemplo no. 5, citado en el inciso anterior, dándole ahora un sistema de cargas exteriores el cual se ve en la figura siguiente:

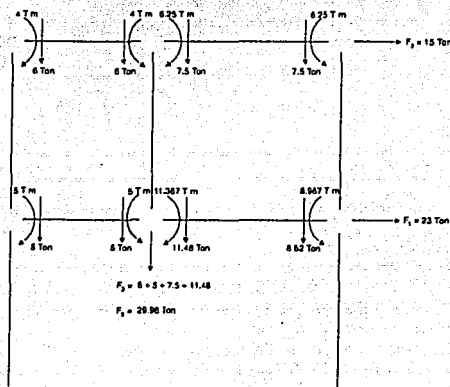
Ejemplo no. 5.

$EI = CTTE$

Usualmente se consideran a las cargas verticales y a las sísmicas por separado, pero para dar un enfoque más general del método consideramos las dos tipos de cargas al mismo tiempo.



1) Momentos de empotramiento y fuerzas debidas a estos, fuerzas sísmicas actuantes.



Para las barras de la 1 a la 5

$$M_{EA} = M_{EB} = 0$$

$F_3$  se considera debido a que los nudos 2 y 5 no tienen restricción al movimiento vertical y por lo tanto, al desplazarse en ese sentido, se consideraran las acciones verticales debidas al sistema de cargas en dichos nudos.

2) Con los datos del inciso anterior podemos formar el vector de fuerzas en las barras, el cual queda como sigue:

$$\begin{aligned} M_1 &= -5 \text{ T-m} & M_4 &= -4 \text{ T-m} & F_1 &= 23 \text{ Ton} \\ M_2 &= -6.367 \text{ T-m} & M_5 &= -2.25 \text{ T-m} & F_2 &= 15 \text{ Ton} \\ M_3 &= 8.967 \text{ T-m} & M_6 &= 6.25 \text{ T-m} & F_3 &= 29.98 \text{ Ton} \end{aligned}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -5.0 \\ -6.367 \\ 8.967 \\ -4.0 \\ -2.25 \\ 6.25 \\ 23.0 \\ 15.0 \\ 29.98 \end{Bmatrix}$$

3) El siguiente paso es la obtención de la matriz de rigideces, la cual ya se obtuvo en el inciso anterior. Por lo tanto, planteamos el sistema de ecuaciones que nos queda en la siguiente forma:

2.8	0.5	0	0.4	0	0	0.135	0.24	0.375
	2.6	0.4	0	0.4	0	-0.24	0.24	0.135
		2.6	0	0	0.4	0.135	0.24	-0.24
SI			1.8	0.5	0	-0.24	0.24	0.375
	MÉ			2.6	0.4	-0.24	0.24	0.135
		TRI			1.6	-0.24	0.24	-0.24
			CO			0.663	-0.288	0
							0.288	0
								0.567

$$EI \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.0 \\ -6.367 \\ 8.967 \\ -4.0 \\ -2.25 \\ 6.25 \\ 23.0 \\ 15.0 \\ 29.98 \end{Bmatrix}$$

$$\{K\} \{d\} = \{F\}$$

De donde obtenemos el vector  $\{d\}$  que queda:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} -45.547193 \\ -6.135579 \\ -26.033613 \\ -28.182328 \\ -14.165980 \\ 6.720012 \\ 172.914139 \\ 319.451374 \\ 98.296326 \end{Bmatrix} 1/EI$$

4) Con los desplazamientos, podemos ya calcular los momentos con las ecuaciones pendiente-deflexión (ecuación 6.29) y construir el vector  $\{p_{r2}\}$ . Al mismo tiempo obtenemos el vector  $\{p_{r2}\}$  utilizando las fuerzas de empotramiento reactivas. Por lo tanto:

$$M_{A1} = 4 / l_1 (0) + 2 / l_1 \varphi_1 + 6 / l_1^2 \Delta_1 = 42.069$$

$$M_{B1} = 2 / l_1 (0) + 4 / l_1 \varphi_1 + 6 / l_1^2 \Delta_1 = 19.296$$

$$M_{A2} = 4 / l_2 (0) + 2 / l_2 \varphi_3 + 6 / l_2^2 \Delta_1 = 51.826$$

$$M_{B2} = 2 / l_2 (0) + 4 / l_2 \varphi_3 + 6 / l_2^2 \Delta_1 = 38.809$$

$$M_{A3} = 4 / l_3 \varphi_1 + 2 / l_3 \varphi_4 + 6 / l_3^2 (\Delta_2 - \Delta_1) = -12.542$$

$$M_{B3} = 2 / l_3 \varphi_1 + 4 / l_3 \varphi_4 + 6 / l_3^2 (\Delta_2 - \Delta_1) = -5.596$$

$$M_{A4} = 4 / l_4 \varphi_2 + 2 / l_4 \varphi_5 + 6 / l_4^2 (\Delta_2 - \Delta_1) = 24.596$$

$$M_{B4} = 2 / l_4 \varphi_2 + 4 / l_4 \varphi_5 + 6 / l_4^2 (\Delta_2 - \Delta_1) = 21.382$$

$$M_{A5} = 4 / l_5 \varphi_3 + 2 / l_5 \varphi_6 + 6 / l_5^2 (\Delta_2 - \Delta_1) = 17.030$$

$$M_{B5} = 2 / l_5 \varphi_3 + 4 / l_5 \varphi_6 + 6 / l_5^2 (\Delta_2 - \Delta_1) = 30.132$$

$$M_{A6} = 4 / l_6 \varphi_1 + 2 / l_6 \varphi_2 + 6 / l_6^2 \Delta_3 = -11.754$$

$$M_{B6} = 2 / l_6 \varphi_1 + 4 / l_6 \varphi_2 + 6 / l_6^2 \Delta_3 = 7.952$$

$$M_{A7} = 4 / l_7 \varphi_2 + 2 / l_7 \varphi_3 + 6 / l_7^2 (-\Delta_3) = -38.917$$

$$M_{B7} = 2 / l_7 \varphi_2 + 4 / l_7 \varphi_3 + 6 / l_7^2 (-\Delta_3) = -46.875$$

$$M_{A8} = 4 / l_8 \varphi_4 + 2 / l_8 \varphi_5 + 6 / l_8^2 \Delta_3 = 1.596$$

$$M_{B8} = 2 / l_8 \varphi_4 + 4 / l_8 \varphi_5 + 6 / l_8^2 \Delta_3 = 8.604$$

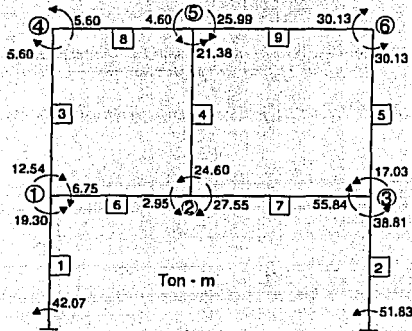
$$M_{A9} = 4 / l_9 \varphi_5 + 2 / l_9 \varphi_6 + 6 / l_9^2 (-\Delta_3) = -32.236$$

$$M_{B9} = 2 / l_9 \varphi_5 + 4 / l_9 \varphi_6 + 6 / l_9^2 (-\Delta_3) = 23.882$$

5) Finalmente obtenemos  $\{P\} = \{P_{12}\} + \{P_{12}\}$  y comprobamos el equilibrio.

$$\begin{Bmatrix} 42.069 \\ 19.296 \\ 51.826 \\ 38.804 \\ -12.542 \\ -5.596 \\ 24.596 \\ 21.398 \\ 17.030 \\ 30.132 \\ -11.754 \\ 7.925 \\ -38.913 \\ -46.872 \\ 1.596 \\ 8.604 \\ -32.236 \\ 23.882 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.0 \\ -5.0 \\ 11.367 \\ -8.967 \\ 4.0 \\ -4.0 \\ 6.25 \\ -6.25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 42.069 \\ 19.296 \\ 51.826 \\ 38.804 \\ -12.542 \\ -5.596 \\ 24.596 \\ 21.398 \\ 17.030 \\ 30.132 \\ -6.754 \\ 2.952 \\ -27.546 \\ -55.839 \\ 5.596 \\ 4.604 \\ -25.986 \\ -30.132 \end{Bmatrix}$$

Comprobando el equilibrio.



$$\Sigma M_1 = \Sigma M_2 = \Sigma M_3 = \Sigma M_4 = \Sigma M_5 = \Sigma M_6 = 0$$

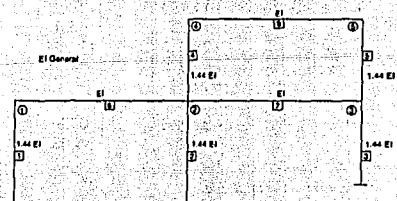
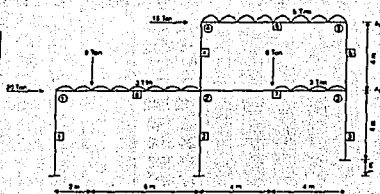
Ejemplo no. 6.

Obtener el vector  $\{P\}$  de fuerzas finales, utilizando el método simplificado y las ecuaciones pendiente-deflexión, para la siguiente estructura. Considere las cargas verticales y las cargas sísmicas por separado.

Columna 30 x 71.1 cm

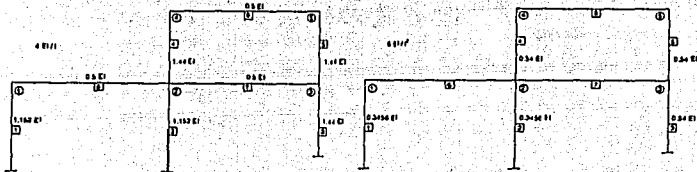


Trabes 30 x 63 cm

Concreto  $F_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  $E_c = 1581140 \text{ Ton/m}^2$  $I_{COL} = 0.0090 \text{ m}^4$  $I_{TRA} = 0.00625 \text{ m}^4$  $E_{COL} / E_{TRA} = 1.44$  $E_{COL} = 1.44 E_{TRA}$ 

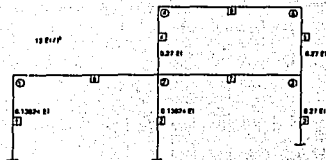
Para esta parte introducimos una variante en el cálculo de las rigideces provocadas por giros y desplazamientos, esto con el fin de no hacer 7 figuras (una por desplazamiento) y ahorrar pasos.

- 1) Obtenemos  $4EI/l$ ,  $6EI/l^2$  y  $12EI/l^3$  para cada barra y representamos en una figura cada caso.



En el segundo y tercer diagrama no es necesario hacer los cálculos para las barras horizontales. En el caso de  $6EI/l^2$  los cálculos no son necesarios y en el caso de  $12EI/l^3$  no existe reacción.





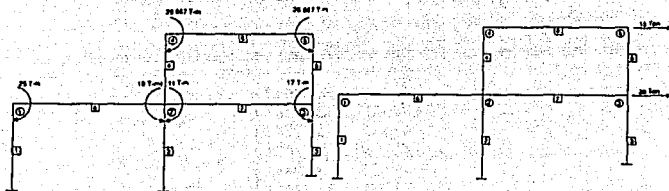
2) Ahora calculamos directamente la matriz de rigidez global. Para esto, provocamos los desplazamientos unitarios en los lugares correspondientes a las incógnitas y obtenemos así las rigideces que resultan de aquellos. Las rigideces que consideraremos están en uno de los siguientes casos:

- Momento debido a giro. En este caso  $4EI/l$  y  $2EI/l$ .
- Momento debido a desplazamiento. En este caso  $6EI/l^2$ .
- Fuerza debida a desplazamiento. En este caso  $12EI/l^3$ .

Los elementos de la diagonal principal se deben a rigideces directas. Los elementos fuera de esta, son debidos al efecto que los desplazamientos unitarios inducen en otros nudos. Por lo tanto nos queda que:

1.652	0.25	0	0	0	0.3456	0	EI
3.592	0.25	0.72	0	-0.1944	0.54	0.54	
	3.38	0	0.72	0	0.54	0.54	
		1.94	0.25	-0.54	0.54	0.54	
Simétrico			1.94	-0.54	0.54	0.54	
				1.08648	-0.54	0.54	
						0.54	

3) Obtención de las fuerzas de empotramiento para calcular  $[F]$  y  $[PE2]$ .



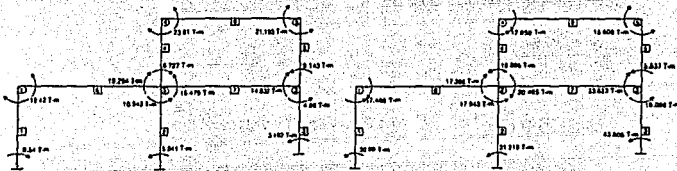
a) Carga vertical

b) Carga por sismo



5) Obtención del vector  $\{p\}$  mediante las ecuaciones pendiente-deflexión y fuerzas finales  $\{p\}$ .

Para $F_1$			Para $F_2$							
$\begin{Bmatrix} -8.54 \\ -18.42 \\ 5.941 \\ 10.542 \\ 3.492 \\ 4.890 \\ -6.727 \\ -23.608 \\ 9.143 \\ 21.193 \\ -6.580 \\ -0.294 \\ 4.479 \\ 2.968 \\ -3.059 \\ 5.474 \end{Bmatrix}$	$+$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25.0 \\ -19.0 \\ 11.0 \\ -17.0 \\ 26.667 \\ -26.667 \end{Bmatrix}$	$=$	$\begin{Bmatrix} -8.54 \\ -18.42 \\ 5.941 \\ 10.542 \\ 3.492 \\ 4.890 \\ -6.727 \\ -23.608 \\ 9.143 \\ 21.193 \\ 18.42 \\ -19.294 \\ 15.479 \\ -14.032 \\ 23.608 \\ -21.193 \end{Bmatrix}$	$\cdot$	$\begin{Bmatrix} 30.99 \\ 17.485 \\ 31.219 \\ 17.943 \\ 43.805 \\ 18.086 \\ 19.898 \\ 17.958 \\ 5.537 \\ 16.608 \\ 18.42 \\ -17.386 \\ -20.455 \\ -23.623 \\ -17.958 \\ -16.608 \end{Bmatrix}$	$+$	$\{0\}$	$=$	$\begin{Bmatrix} 30.99 \\ 17.485 \\ 31.219 \\ 17.943 \\ 43.805 \\ 18.086 \\ 19.898 \\ 17.958 \\ 5.537 \\ 16.608 \\ -17.485 \\ -17.386 \\ -20.455 \\ -23.623 \\ -17.958 \\ -16.608 \end{Bmatrix}$
$P_{E1}$		$P_{E2}$		$P$		$P_{E1}$		$P_{E2}$		$P$



Por carga vertical

Por sismo

Y para los dos casos tenemos que:

$$\Sigma M_1 = \Sigma M_2 = \Sigma M_3 = \Sigma M_4 = \Sigma M_5 = 0$$

Esta forma de análisis resulta muy útil cuando los problemas son resueltos en forma manual. Sin embargo, tal alternativa presenta bastante dificultad al ser utilizado en estructuras grandes y complicadas. En estos casos se recurre a la programación del método de análisis, cosa que resulta relativamente fácil cuando se tienen los conocimientos necesarios. El trabajo de esta forma redunda en una gran eficiencia de los métodos de análisis y un tiempo mínimo de operación (ver referencia 14 de la bibliografía)

### 6.3.1 Sistemas de fuerzas

En esta parte se presenta el procedimiento para obtener las fuerzas finales en estructuras sometidas a distintas condiciones de carga. Para esto utilizaremos el "método general de rigideces". Primeramente, presentamos la secuencia a seguir en el caso en el que se pretenda utilizar la matriz de continuidad. Para esto, el calculista determinará en forma manual los siguientes datos como matrices, que se encuentran a partir de las características mecánicas y geométricas de la estructura, así como de las cargas externas aplicadas. El procedimiento es:

I) Obtención de datos:

$$[a], [k] \{F\} \text{ y } \{P_{E2}\} \text{ (en marcos)}$$

II) Obtención de  $[K]$  matriz de rigidez global

$$[K] = [a]^T [k] [a]$$

III) Obtención de desplazamientos  $\{d\}$

$$\{F\} = [K] \{d\} \Rightarrow \{d\} = [K]^{-1} \{F\}$$

IV) Obtención de  $\{e\}$  deformaciones

$$\{e\} = [a] \{d\}$$

V) Obtención de  $\{p\}$  (estado 2 en marcos)

$$\{p\} = [k] \{e\} \quad (\{p\} = \{P_{E1} + P_{E2}\} \text{ en marcos})$$

Este procedimiento es matricialmente el más lógico, si consideramos el hecho de que se trata de un método matricial. Sin embargo los programas que existen actualmente en el mercado y que versan sobre el método del equilibrio, emplean normalmente las reglas generales de construcción de la matriz de rigidez global (inciso 6.1.36). Esto se debe en parte, a causa del gran número de elementos nulos de la matriz  $[a]$  y  $[k]$ , lo cual determina el que la multiplicación de matrices de la ecuación  $\{K\} = [a]^T [k] [a]$ , resulte una forma poco eficaz para llevar a cabo la obtención de la matriz de rigidez global. El tamaño relativamente grande de la matriz  $[k]$  de rigidez de las barras, puede también producir problemas de capacidad de memoria en una computadora. Una alternativa es aprovechar la ventaja del gran número de elementos nulos y obtener la matriz de rigidez en banda. Sin embargo esta alternativa está fuera de los alcances de este trabajo (ver referencia 14 bibliografía).

El procedimiento antes mencionado, en la resolución de estructuras por el método de rigideces, y con el que generalmente se realizan los programas para computadoras sigue más o menos la siguiente secuencia:

#### En computadora

- 1) Obtención de las diferentes rigideces en su sistema local ( $K_{AA}, K_{AB}$  etc), obtención de los  $\mu$  de cada barra y obtención del vector  $\{F\}$  de cargas exteriores.
- 2) Obtención de  $K_{AA}, K_{AB}$  etc. en sistema global (ecuación 6.6).

- 3) Ensamble de la matriz de rigideces global según la disposición de las barras en la estructura y obtención de esta.
- 4) Obtención del vector de desplazamientos  $\{d\}$ .
- 5) Obtención de las fuerzas en las barras y verificación de equilibrio.

**En marcos planos**

- 1) Obtención de las rigideces  $K_{AA}$ ,  $K_{AB}$ ,  $K_{BA}$ ,  $K_{BB}$  en el sistema local de cada barra, obtención del vector de cargas externas  $\{F\}$  y obtención del vector  $\{p_{E2}\}$ .
- 2) Transformación de las rigideces locales en globales.
- 3) Ensamble de la matriz de rigidez global  $\{K\}$ .
- 4) Obtención del vector de desplazamientos.
- 5) Obtención de  $\{p_{E1}\}$  y de  $\{p\} = \{p_{E1}\} + \{p_{E2}\}$  y verificar equilibrio.

Esto se puede hacer por consideraciones de continuidad y equilibrio (ver ecuación 6.19) o por medio de las ecuaciones pendiente-deflexión.

A continuación presentamos algunos ejemplos, de los cuales tomamos algunos parcialmente resueltos y además se presentan otros para resolverse completos.

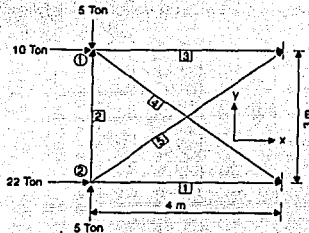
**6.3.1.1 Armaduras****Ejemplo no. 1.**

Obtención de las fuerzas finales en las barras para este ejemplo. Ver figura y datos.

$EA = \text{constante}$ .

Los pasos del 1 al 3 ya se resolvieron. Solo falta el vector  $\{F\}$  y queda:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -5 \\ 22 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

**4) Vector  $\{d\}$** 

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -5 \\ 22 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0.378 & -0.096 & 0 & 0 \\ & 0.45 & 0 & -0.333 \\ & & 0.378 & 0.096 \\ & & & 0.405 \end{vmatrix} EA \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow d = \begin{Bmatrix} 17.994751 \\ -33.312336 \\ 65.994750 \\ -30.687664 \end{Bmatrix} \vee EI$$



Por lo tanto.

$$[d] = \begin{Bmatrix} 32.912593 \\ -100.707204 \\ 19.124931 \\ -57.146256 \\ 19.534405 \\ -104.939559 \\ 37.351822 \\ -67.382616 \end{Bmatrix} 1/EA$$

5) Obtención de fuerzas en las barras y equilibrio.

$$p_1 = 1/3 [(19.5344)] = 6.511 \text{ Ton.}$$

$$p_2 = 1/3 [- (19.5344) + (37.3518)] = 5.999 \text{ Ton.}$$

$$p_3 = 1/3 [- (37.3518)] = - 12.451 \text{ Ton.}$$

$$p_4 = 1/3 [- (32.9126) + (19.1249)] = - 4.596 \text{ Ton.}$$

$$p_5 = 1/4.243 [0.707 (32.9126) + 0.707 (-100.7092)] = - 11.297 \text{ Ton.}$$

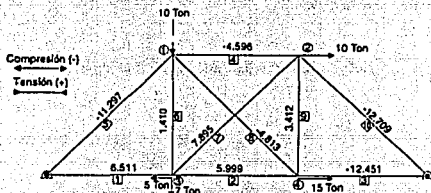
$$p_6 = 1/3 [(-100.7092) - (-104.9396)] = 1.410 \text{ Ton.}$$

$$p_7 = 1/4.243 [0.707 (19.1249) + 0.707 (-57.1463) - 0.707 (19.5344) - 0.707 (-104.9396)] = 7.895 \text{ T.}$$

$$p_8 = 1/4.243 [-0.707 (32.9126) + 0.707 (-100.7092) + 0.707 (37.3518) - 0.707 (-67.3826)] = - 4.813 \text{ T.}$$

$$p_9 = 1/3 [(-57.1463) - (-67.3826)] = 3.412 \text{ Ton.}$$

$$p_{10} = 1/4.243 [-0.707 (19.1249) + 0.707 (-57.1463)] = - 12.709 \text{ Ton.}$$



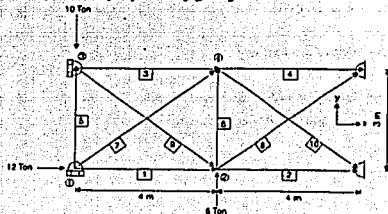
Ejemplo no. 3.

Obtención de las fuerzas finales en las barras para este ejemplo. Ver figura y datos.

$EA = \text{Constante}$

Los apoyos 1 y 3 se han numerado porqueno restringen totalmente el movimiento.

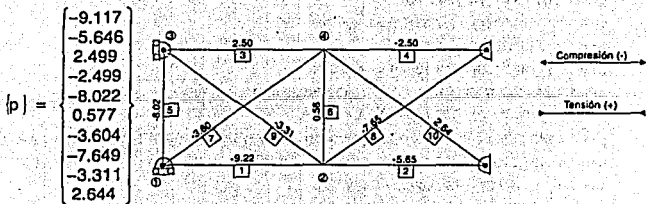
Los pasos del 1 al 3 ya se resolvieron. Solo falta el vector  $\{F\}$  que queda (ver paso 4)



4) Obtención vector  $\{d\}$ 

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.378 & -0.25 & 0 & 0 & -0.128 & 0.096 \\ & 0.756 & 0 & 0.096 & 0 & 0 \\ & & 0.477 & -0.072 & 0 & -0.333 \\ & & & 0.405 & 0 & 0 \\ & & & & 0.756 & 0 \\ & & & & & 0.477 \end{bmatrix} EA \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ dy_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \end{Bmatrix}$$

## 5) obtención de fuerzas en las barras y equilibrio.



El equilibrio se verifica en cada nudo.

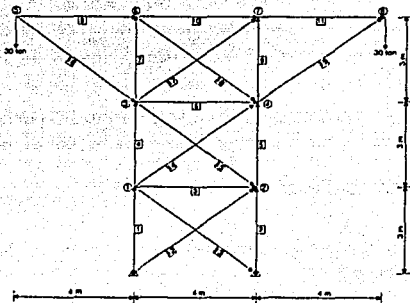
## Ejemplo no. 6.

Obtención de las fuerzas finales en las barras para este ejemplo. Ver figura y datos.

—  $E = 2.1 \times 10^7 \text{ Ton/m}^2$

— Barras verticales y horizontales  
 $A = 15 \text{ cm}^2$

— Barras inclinadas  
 $A = 20 \text{ cm}^2$   
 $EA_{\text{INC}} = 4/3 EA_{\text{V y H}}$   
 $EA_{\text{GENERAL}} = EA_{\text{V y H}}$





1) Obtención de rigideces de las barras, cosenos directores y vector  $\{F\}$ 

## a) Rigideces

Barras 1, 2, 4, 5, 7 y 8

$$k_i = EA/3 = 0.333 EA$$

Barras 3, 6, 9, 10 y 11

$$k_i = EA/4 = 0.25 EA$$

Barras 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19

$$k_i = 4/3 (EA/5) = 0.2667 EA$$

## b) Cosenos directores

Barras 1, 2, 4, 5, 7 y 8 ( $\alpha = 90^\circ$ )

$$\mu_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Barras 3, 6, 9, 10 y 11 ( $\alpha = 0^\circ$ )

$$\mu_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barras 12, 14, 17 y 19 ( $\alpha = 36.87^\circ$ )

$$\mu_i = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix}$$

Barras 13, 15, 16 y 18 ( $\alpha = -36.87^\circ$ )

$$\mu_i = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix}$$

## c) Vector de fuerzas (ver inciso 4)

## 2) Obtención de las rigideces en sistema global.

Recuérdese que:

$$K_{AA} = K_{BB} \quad K_{AB} = K_{BA}^T = -K_{AA}$$

$$K_{AA} = \mu k \mu^T$$

Barras 1, 2, 4, 5, 7 y 8

$$K_{AA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} 0.333 EA \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} EA$$

Barras 3, 6, 9, 10 y 11

$$K_{AA} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} 0.25 EA \begin{bmatrix} 1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

Barras 12, 14, 17 y 19

$$K_{AA} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} 0.2667 EA \{0.8, 0.6\} = \begin{bmatrix} 0.1707 & 0.128 \\ 0.128 & 0.096 \end{bmatrix} EA$$

Barras 13, 15, 16 y 18

$$K_{AA} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix} 0.2667 EA \{0.8, -0.6\} = \begin{bmatrix} 0.1707 & -0.128 \\ -0.128 & 0.096 \end{bmatrix} EA$$

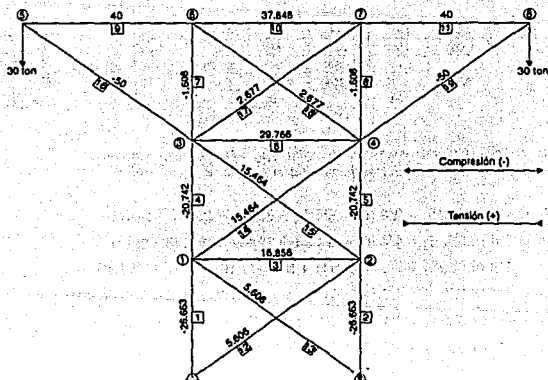
3) Obtención de la matriz de rigidez global  $[K]$  (Obtenido por cualquiera de los métodos antes descritos)

0.5814	0	-0.25	0	0	0	-0.1707	-0.128	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.858	0	0	0	0	-0.333	-0.128	-0.096	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.8716	0	0	-0.1707	0.128	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0.858	0.128	-0.096	0	-0.333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			0.782	-0.128	-0.25	0	-0.1707	0.128	0	0	-0.1707	-0.128	0	0	0	0	0	0	0
				0.854	0	0	0.128	-0.096	0	-0.333	-0.128	-0.096	0	0	0	0	0	0	0
					0.782	0.128	0	0	-0.1707	0.128	0	0	-0.1707	-0.128	0	0	0	0	0
						0.854	0	0	0.128	-0.096	0	-0.333	-0.128	-0.096	0	0	0	0	0
							0.844	0	0	0	0	0	0	0	-0.333	-0.128	-0.096	0	0
								0.4207	-0.128	-0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
									0.096	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
										0.8707	-0.128	-0.25	0	0	0	0	0	0	0
											0.420	0	0	0	0	0	0	0	0
												0.8707	0.128	-0.25	0	0	0	0	0
													0.420	0	0	0	0	0	0
														0.4207	0.128	0	0	0	0
															0.096	0	0	0	0

4) Obtención del vector  $\{d\}$  ( $= [K]^{-1} \{F\}$ ) y fuerzas finales en las barras

$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{d\} = \begin{Bmatrix} -33.7123 \\ -79.9887 \\ 33.7123 \\ -79.9887 \\ 59.5315 \\ -142.2152 \\ -59.5315 \\ -142.2152 \\ -235.6570 \\ -848.2999 \\ -75.6963 \\ -147.0382 \\ 75.6963 \\ -147.0382 \\ 75.6963 \\ -147.0382 \\ 235.657 \\ -848.2999 \end{Bmatrix} \text{ por lo tanto } \{p\} = \begin{Bmatrix} -26.663 \\ -26.663 \\ 16.856 \\ -20.742 \\ -20.742 \\ -29.766 \\ -1.608 \\ -1.608 \\ 40.0 \\ 37.848 \\ 40.0 \\ 5.606 \\ -5.606 \\ -29.848 \\ -29.848 \\ -50.0 \\ 2.677 \\ 2.677 \\ -50.0 \end{Bmatrix}$$

y finalmente



### 6.3.1.2 Marcos rígidos planos

A continuación resolveremos algunas marcos rígidos utilizando el método general de rigideces.

Debemos señalar que la obtención del vector fuerzas en las barras solo contiene momentos finales en este caso, ya que se utilizará solo la ecuación pendiente-deflexión. Si se desea obtener además las fuerzas axiales y cortantes en cada barra, se tendrá que utilizar las ecuaciones fuerza-movimiento (6.18) transformando convenientemente los desplazamientos según ecuaciones 3.4 y 3.5, ver ejemplo no. 8.

#### Ejemplo no. 1.

Obtener las fuerzas finales en las barras (momentos) para este ejemplo, considerando rígidos todos los nudos y apoyos. Ver figura y datos.

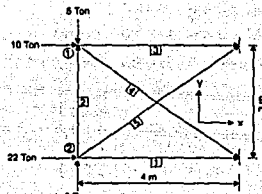
El = Constante ; EA = Constante

EA = 2EI

Los pasos del 1 al 3 ya fueron resueltos. Solo falta el vector  $\{F\}$  y el vector  $\{p_{12}\}$  que quedan como sigue:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \\ 22 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{p_{12}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pues no existen cargas en el interior de los elementos.



4) Obtención del vector  $\{d\}$ 

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \\ 22 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{SI} \\ \text{MÉ} \\ \text{TRI} \\ \text{CO} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{SI} \\ \text{MÉ} \\ \text{TRI} \\ \text{CO} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.235 & -0.148 & 0.811 & -0.444 & 0 & 0.656 \\ & 1.060 & 0.567 & 0 & -0.658 & 0 \\ & & 3.133 & -0.666 & 0 & 0.666 \\ & & & 1.235 & 0.148 & -0.811 \\ & & & & 1.060 & 0.567 \\ & & & & & 3.133 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{EI} \\ \text{EI} \\ \text{EI} \\ \text{EI} \end{matrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \{d\} = \begin{Bmatrix} 11.305825 \\ -11.453148 \\ 4.066092 \\ 29.196849 \\ -9.738009 \\ 6.052473 \end{Bmatrix} \quad \text{1b}$$

- 5) Obtener  $\{p_{21}\}$  (ecuación pendiente-deflexión) y  $\{p\} = \{p_{21}\}$  y  $\{p_{22}\}$  y equilibrio. (Los desplazamientos deben transformarse al sistema local de cada barra)

$$M_{A1} = 4/4 (6.0525) + 2/4 (0) + 6/16 (-9.7380) = 2.401 \text{ Ton-m}$$

$$M_{B1} = 2/4 (6.0525) + 4/4 (0) + 6/16 (-9.7380) = -0.626 \text{ Ton-m}$$

$$M_{A2} = 4/3 (6.0525) + 2/3 (4.0661) + 6/9 (-17.891) = -1.147 \text{ Ton-m}$$

$$M_{B2} = 2/3 (6.0525) + 4/3 (4.0661) + 6/9 (-17.891) = -2.471 \text{ Ton-m}$$

$$M_{A3} = 4/4 (4.0661) + 2/4 (0) + 6/16 (-11.4531) = -0.229 \text{ Ton-m}$$

$$M_{B3} = 2/4 (4.0661) + 4/4 (0) + 6/16 (-11.4531) = -2.262 \text{ Ton-m}$$

Para la barra 4

$$d'_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 11.3058 \\ -11.4531 \\ 4.0661 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{Bmatrix} 15.9165 \\ -2.3790 \\ 4.0661 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Para la barra 5

$$d'_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 29.1968 \\ -9.7380 \\ 6.0525 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{Bmatrix} 17.5146 \\ -25.3058 \\ 6.0525 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

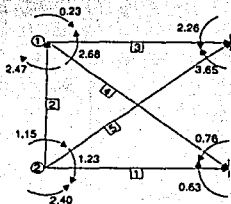
$$M_{A4} = 4/5 (4.0661) + 2/5 (0) + 6/25 (-2.3790) = 2.682 \text{ Ton-m}$$

$$M_{B4} = 2/5 (4.0661) + 4/5 (0) + 6/25 (-2.3790) = 0.758 \text{ Ton-m}$$

$$M_{A5} = 4/5 (6.0525) + 2/5 (0) + 6/25 (-25.3058) = -1.232 \text{ Ton-m}$$

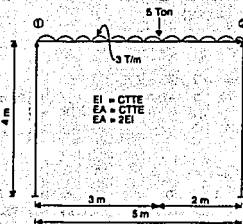
$$M_{B5} = 2/5 (6.0525) + 4/5 (0) + 6/25 (-25.3058) = -3.653 \text{ Ton-m}$$

$$\{p\} = \{p_{21}\} = \begin{Bmatrix} 2.401 \\ -0.626 \\ -1.147 \\ -2.471 \\ 0.229 \\ -2.262 \\ 2.682 \\ 0.758 \\ -1.232 \\ -3.653 \end{Bmatrix}$$



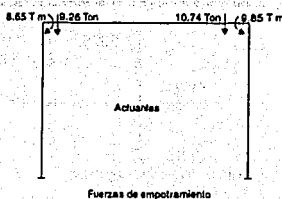
**Ejemplo no. 4.**

Este ejemplo ya se resolvió utilizando el método de rigidez simplificado. Ahora lo resolveremos utilizando el método general de rigideces. Ver figura y datos.



1) Obtener rigideces en sistema local,  $[F]$  y  $[p_{22}]$

$$[F] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9.26 \\ -8.65 \\ 0 \\ -10.74 \\ 9.85 \end{Bmatrix}; [p_{22}] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.65 \\ -9.85 \end{Bmatrix}$$



Fuerzas de empotramiento

Obtención de rigideces.

**Barra 1 y 2**

$$K'_{AA} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 \end{bmatrix} EI; K'_{BB} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & -0.375 \\ 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} EI; K'_{AB} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1875 & 0.375 \\ 0 & -0.375 & 0.5 \end{bmatrix} EI$$

**Barra 3**

$$K'_{AA} \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 \end{bmatrix} EI; K'_{BB} \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} EI; K'_{AB} \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.4 \end{bmatrix} EI$$

2) Transformación de rigideces al sistema global.

$$[K_{ij}] = [T]^T [K'_i] [T]$$

Barras 1 y 2

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra 3

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para barras 1 y 2

$$K'_{AA} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI ; K'_{BB} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} EI ; K'_{AB} = \begin{bmatrix} -0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} EI$$

Para barra 3

$$K'_{AA} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 \end{bmatrix} EI ; K'_{BB} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} EI ; K'_{AB} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.4 \end{bmatrix} EI$$

3) Ensamble y obtención de la matriz de rigidez global.

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.5875 & 0 & 0.375 & -0.4 & 0 & 0 \\ & 0.596 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ & & 1.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ & & \text{Simétrico} & 0.5875 & 0 & 0.375 \\ & & & & 0.596 & -0.24 \\ & & & & & 1.8 \end{bmatrix}$$

4) Obtención del vector  $\{d\} = [K]^{-1} \{F\}$ 

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} 2.637916 \\ -18.984476 \\ -7.277690 \\ -2.948395 \\ -21.015524 \\ 7.432929 \end{Bmatrix} 1/EI$$

5) Obtención de  $\{p_{12}\}$  (ecuaciones pendiente-deflexión)  $\{p\} = \{p_{12}\} + \{p_{22}\}$  y equilibrio.

$$M_{A1} = 4/4 (0) + 2/4 (-7.2775) + 6/16 (2.6379) 1/EI = -2.65 \text{ Ton-m}$$

$$M_{B1} = 2/4 (0) + 4/4 (-7.2775) + 6/16 (2.6379) 1/EI = -6.288 \text{ Ton-m}$$

$$M_{A2} = 4/4 (0) + 2/4 (7.4329) + 6/16 (-2.9484) 1/EI = -2.611 \text{ Ton-m}$$

$$M_{B2} = 2/4 (0) + 4/4 (7.4329) + 6/16 (-2.9484) 1/EI = 6.327 \text{ Ton-m}$$

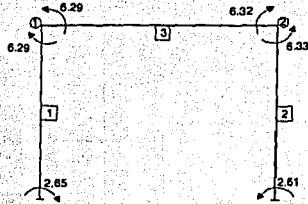
$$M_{A3} = 4/5 (-7.2775) + 2/5 (7.4329) + 6/25 (-18.9845 + 21.0155) 1/EI = -2.361 \text{ Ton-m}$$

$$M_{B3} = 2/5 (-7.2775) + 4/5 (7.4329) + 6/25 (-18.9845 + 21.0155) 1/EI = 3.530 \text{ Ton-m}$$

Por lo tanto.

$$\{pE1\} + \{pE2\} = \{p\}$$

$$\begin{Bmatrix} -2.650 \\ -6.288 \\ 2.611 \\ 6.327 \\ -2.361 \\ 3.53 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.65 \\ -9.85 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.650 \\ -6.288 \\ 2.611 \\ 6.327 \\ 6.285 \\ -6.32 \end{Bmatrix}$$



Ejemplo no. 5.

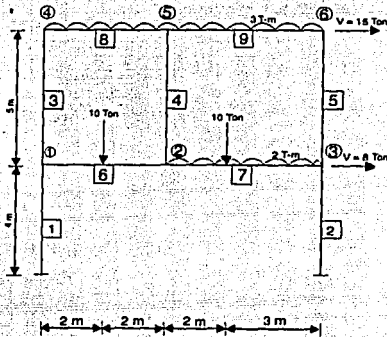
Obtener el vector de fuerzas finales para este ejemplo (ya resuelto por el método simplificado). Ver figura y datos.

EI = Constante

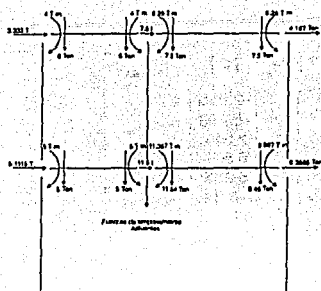
Los pasos del 1 al 3 ya fueron resueltos. Solo falta el vector  $\{F\}$  y el vector  $\{p_{ez}\}$ .

Recordemos también que las cargas verticales y por sismo las estamos considerando actuando al mismo tiempo.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 5.1115 \\ -5 \\ -5 \\ 11.50 \\ -16.54 \\ -6.367 \\ 6.3885 \\ -8.46 \\ 8.967 \\ 3.333 \\ -6.0 \\ -4.0 \\ 7.50 \\ -13.50 \\ -2.25 \\ 4.167 \\ -7.5 \\ 6.25 \end{Bmatrix} ; \{p_{ez}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \\ 11.367 \\ -8.967 \\ 4 \\ -4 \\ 6.25 \\ -6.25 \end{Bmatrix}$$



La fuerza vertical en cada nudo se obtuvo dividiendo la fuerza sísmica según el claro de los elementos que llegan a un nudo.



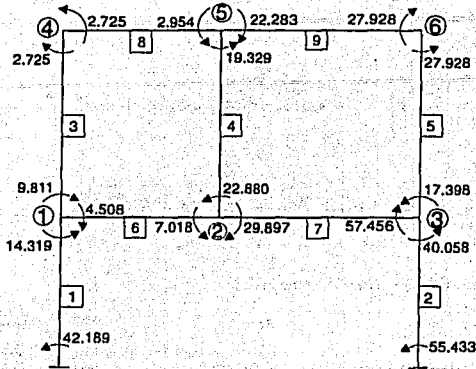
4) Obtención del vector  $\{d\} (= [K]^{-1} \{F\})$  y obtención del vector de fuerzas finales  $\{p\}$

0.37875	0	0.135	-0.1	0	0	0	0	0	-0.096	0	-0.24	0	0	0	0	0	0	0	0
1.0475	0.275	0	-0.1875	0.375	0	0	0	0	-0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.8	0	-0.375	0.5	0	0	0	0	0.24	0	0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.806	0	0	-0.24	-0.4	0	0	0	0	0	-0.096	0	-0.24	0	0	0	0	0	0	0
0.8835	-0.135	0	-0.096	0.24	0	0	0	0	0	0	-0.4	0	0	0	0	0	0	0	0
2.8	0	-0.24	0.4	0	0	0	0	0.24	0	0.4	0	0.4	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.8835	0	0.135	0	0	0	0	0	0	0	-0.096	0	-0.24	0	0	0	0	0
0.8835	-0.135	0	-0.096	0.24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.4	0	0
0.806	0	-0.24	0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.4	0
2.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.4
0.586	0	0.24	-0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.5475	0.375	0	-0.1875	0.375	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	0	-0.375	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.906	0	0.24	-0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.8835	-0.135	0	-0.096	0.24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.8	0	-0.24	0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.496	0	0.24	-0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.496	0	0.24	-0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	0	-0.375	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

En donde:

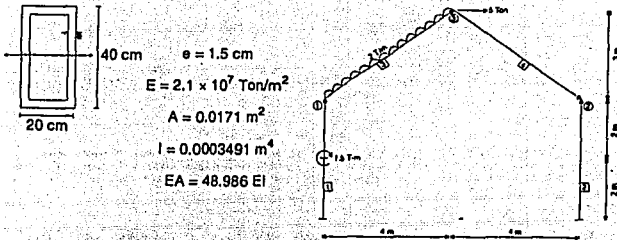
$$\begin{matrix}
 \begin{matrix}
 186.8249 \\
 -26.093 \\
 -55.7400 \\
 209.8704 \\
 -186.2964 \\
 -12.6883 \\
 188.8226 \\
 -87.9060 \\
 -30.7504 \\
 395.1193 \\
 -44.6430 \\
 -38.0238 \\
 383.4391 \\
 -171.3916 \\
 -21.5647 \\
 371.1935 \\
 -131.7617 \\
 -4.4261
 \end{matrix} \\
 \text{\{d\}} =
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \text{entonces} \\
 + \\
 =
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \begin{matrix}
 P_{E1} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 5 \\
 -5 \\
 11.367 \\
 -8.967 \\
 4 \\
 -4 \\
 6.25 \\
 -6.25
 \end{matrix} \\
 + \\
 \begin{matrix}
 P_{E2} \\
 42.189 \\
 14.319 \\
 55.433 \\
 40.058 \\
 -9.811 \\
 -2.725 \\
 22.880 \\
 19.329 \\
 17.398 \\
 27.928 \\
 -9.508 \\
 12.018 \\
 -41.264 \\
 -48.489 \\
 -1.275 \\
 6.954 \\
 -28.533 \\
 -21.678
 \end{matrix} \\
 = \\
 \begin{matrix}
 P \\
 42.189 \\
 14.319 \\
 55.433 \\
 40.058 \\
 -9.811 \\
 -2.725 \\
 22.880 \\
 19.329 \\
 17.398 \\
 27.928 \\
 -4.508 \\
 7.018 \\
 -29.897 \\
 -57.456 \\
 2.725 \\
 2.954 \\
 -22.283 \\
 -27.927
 \end{matrix}
 \end{matrix}$$





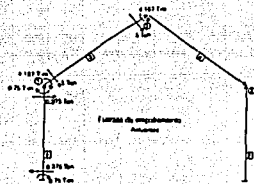
Ejemplo no. 8.

Obtener el vector de fuerzas finales para el siguiente ejemplo. Ver figura y datos.



1) Rigideces en sistema local, y vectores  $\{F\}$  y  $\{pz\}$ .

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 3.375 \\ -4.0 \\ -4.917 \\ 8.0 \\ -4.0 \\ 4.167 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{pz\} = \begin{Bmatrix} \text{Ver.} \\ \text{Inciso} \\ 5 \end{Bmatrix}$$



Las fuerzas en los extremos de las barras se transforman al sistema global mediante la ecuación.

$$F = T^T F^l$$

*Rigideces locales**Barras 1 y 2.*

$$K'_{AA} \begin{bmatrix} 12.247 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 \end{bmatrix} EI ; K'_{BB} \begin{bmatrix} 12.247 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & -0.375 \\ 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} EI ; K'_{AB} \begin{bmatrix} -12.247 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1875 & 0.375 \\ 0 & -0.375 & 0.5 \end{bmatrix} EI$$

*Barras 3 y 4.*

$$K'_{AA} \begin{bmatrix} 9.797 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 \end{bmatrix} EI ; K'_{BB} \begin{bmatrix} 9.797 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} EI ; K'_{AB} \begin{bmatrix} -9.797 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.4 \end{bmatrix} EI$$

2) *Transformación de rigideces al sistema global.**Barras 1 y 2*

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Barra 3*

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Barra 4*

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

*Barras 1 y 2*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & 12.247 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 12.247 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI ; K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & -12.247 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} EI$$

*Barra 3*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 8.3046 & 4.6565 & -0.144 \\ 4.6565 & 3.5884 & -0.192 \\ -0.144 & 0.192 & 0.8 \end{bmatrix} EI ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 8.3046 & 4.6565 & 0.144 \\ 4.6565 & 3.5884 & -0.192 \\ 0.144 & -0.192 & 0.8 \end{bmatrix} EI ; K_{AB} = \begin{bmatrix} -8.3046 & -4.6565 & -0.144 \\ -4.6565 & -3.5884 & 0.192 \\ 0.144 & 0.144 & 0.4 \end{bmatrix} EI$$

*Barra 4*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 8.3046 & -4.6565 & 0.144 \\ -4.6565 & 3.5884 & 0.192 \\ 0.144 & 0.192 & 0.8 \end{bmatrix} EI ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 8.3046 & -4.6565 & -0.144 \\ -4.6565 & 3.5884 & -0.192 \\ -0.144 & -0.192 & 0.8 \end{bmatrix} EI ; K_{AB} = \begin{bmatrix} -8.3046 & 4.6565 & 0.144 \\ 4.6565 & -3.5884 & 0.192 \\ -0.144 & -0.192 & 0.4 \end{bmatrix} EI$$

3) *Ensamble y obtención de [K] global.*

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{BB1} & K_{AB3} & 0 \\ & K_{BB3} + K_{AA4} & K_{AB4} \\ & K_{BB2} + K_{BB4} & \end{bmatrix}$$

El resultado se ve en el paso siguiente.



$$d'2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 66.4358 \\ -3.6577 \\ 11.1733 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{bmatrix} 50.9524 \\ -42.7864 \\ 11.1733 \end{bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Para barra 4

$$d'2 = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 66.4338 \\ -3.6577 \\ 11.1733 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{bmatrix} 55.3417 \\ 36.9341 \\ 11.1733 \end{bmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$d'3 = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 67.5593 \\ -0.5581 \\ -16.1371 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{bmatrix} 54.3823 \\ 40.0891 \\ -16.1371 \end{bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Ahora tendremos lo siguiente:

Barra 1

$$\begin{pmatrix} F_{Ax1} \\ F_{Ay1} \\ M_{A1} \\ F_{Bx1} \\ F_{By1} \\ M_{B1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 12.247 & 0 & 0 & -12.247 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 & 0 & -0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 & 0 & -0.375 & 0.5 \\ -12.247 & 0 & 0 & 12.247 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1875 & -0.375 & 0 & 0.1875 & -0.375 \\ 0 & 0.375 & 0.5 & 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0951 \\ -63.4042 \\ -19.0462 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.165 \\ 4.7460 \\ 14.253 \\ -1.165 \\ -4.746 \\ 4.730 \end{pmatrix}$$

Barra 2

$$\begin{pmatrix} F_{Ax2} \\ F_{Ay2} \\ M_{A2} \\ F_{Bx2} \\ F_{By2} \\ M_{B2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 12.247 & 0 & 0 & -12.247 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 & 0 & -0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1 & 0 & -0.375 & 0.5 \\ -12.247 & 0 & 0 & 12.247 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1875 & -0.375 & 0 & 0.1875 & -0.375 \\ 0 & 0.375 & 0.5 & 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5581 \\ -67.5593 \\ -16.1371 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.835 \\ 6.616 \\ 17.266 \\ -6.835 \\ -6.616 \\ 9.198 \end{pmatrix}$$

Barra 3

$$\begin{pmatrix} F_{Ax3} \\ F_{Ay3} \\ M_{A3} \\ F_{Bx3} \\ F_{By3} \\ M_{B3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -9.797 & 0 & 0 & 9.797 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 50.6663 \\ -38.1186 \\ -19.0462 \\ 50.9524 \\ -42.7864 \\ 11.1733 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.8029 \\ -1.441 \\ -9.647 \\ 2.8029 \\ 1.441 \\ 2.440 \end{pmatrix}$$

Barra 4

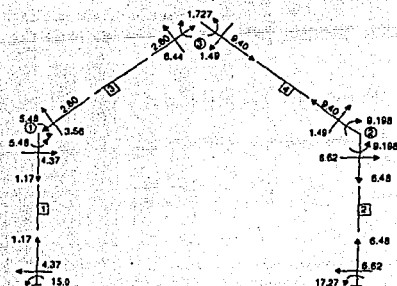
$$\begin{pmatrix} F_{Ax4} \\ F_{Ay4} \\ M_{Ax4} \\ F_{Bx4} \\ F_{By4} \\ M_{Bx4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.797 & 0 & 0 & -9.797 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -9.797 & 0 & 0 & 9.797 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 55.3417 \\ 36.9341 \\ 11.1733 \\ 54.3823 \\ 40.0891 \\ -16.1371 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.399 \\ -1.494 \\ 1.727 \\ -9.399 \\ 1.494 \\ -9.198 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma en la que trabajan comúnmente los programas que se han elaborado en análisis estructural en base al método de rigideces. Como se puede ver, las ecuaciones pendiente-deflexión están implícitas (como ya se había mencionado) en la matriz de rigideces acoplada de cada barra.

Por lo tanto:

$$(PE1) + (PE2) = (P)$$

$$\begin{pmatrix} 1.165 \\ 4.746 \\ 14.253 \\ -1.165 \\ -4.746 \\ 4.730 \\ 6.835 \\ 6.616 \\ 17.200 \\ -6.835 \\ -6.616 \\ 9.198 \\ -2.802 \\ -1.441 \\ -9.647 \\ 2.803 \\ 1.441 \\ 2.44 \\ 9.395 \\ -1.494 \\ 1.727 \\ -9.399 \\ 1.494 \\ -5.198 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.375 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0.375 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.802 \\ 5 \\ 4.167 \\ 0 \\ 5 \\ -4.167 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.165 \\ 4.371 \\ 15.003 \\ -1.165 \\ -4.371 \\ 5.480 \\ 6.835 \\ 6.616 \\ 17.256 \\ -6.835 \\ -6.616 \\ 9.198 \\ -2.803 \\ 3.559 \\ -5.48 \\ 2.803 \\ 6.441 \\ -1.727 \\ 9.399 \\ -1.494 \\ 1.727 \\ -9.399 \\ 1.494 \\ -8.198 \end{pmatrix}$$



El equilibrio se verifica en cada nudo.

Hasta aquí hemos supuesto que todas las piezas de la estructura están descargadas antes de la aplicación de las acciones. Sin embargo, si una estructura es hiperestática, casi seguro se presentarán esfuerzos en esta antes de ser cargada. Estos esfuerzos son, por lo general, debidos a asentamientos de los apoyos o cambios de temperatura. A continuación trataremos el análisis de una estructura sometida a tales efectos.

### 6.3.2 Hundimientos diferenciales

Por muchas razones, los apoyos de las estructuras pueden llegar a tener alguna clase de movimientos esperados. Estos movimientos, a pesar de ser muy pequeños para producir cambios apreciables en la geometría de la estructura, pueden introducir deformaciones y esfuerzos considerables en los sistemas. El

análisis de dichos esfuerzos se basará en el principio de superposición, esto es, puede interpretarse como la superposición de dos análisis: El primero debido al sistema de cargas considerado, que se acaba de tratar, y el segundo debido únicamente a los asentamientos. En esta parte consideraremos el segundo análisis.

Existen ciertas estructuras (estructuras isostáticas) para las cuales los asentamientos de apoyos no introducen nuevos esfuerzos, siempre que estos no sean tan grandes que alteren la geometría de la estructura. En la práctica, sin embargo, para la mayoría de las estructuras pueden sobrevenir graves consecuencias del asentamiento de los apoyos, por esta razón, las estructuras se analizan y diseñan para soportar ciertos asentamientos diferenciales en los apoyos.

Primero se supone que cada nudo de la estructura está completamente fijo (sin giro ni desplazamiento); luego se introducen los desplazamientos conocidos (esperados) en los nudos correspondientes. Debido a estos desplazamientos, ciertos elementos se deformarán, y en los extremos de ellos se desarrollarán fuerzas. A ellas nos referiremos como fuerzas de empotramiento debidas a asentamientos de los apoyos y para su determinación utilizamos la ecuación 4.13 en la que las diferentes rigideces ( $K_{AA}$ ,  $K_{AB}$ , ...) estarán referidas al sistema global de la estructura, así como los desplazamientos, con lo cual el vector de fuerzas que se obtenga estará directamente referido al eje global de coordenadas, por consiguiente, podrá ser incorporado en el vector de fuerzas  $\{F\}$  para hacer el análisis de la estructura debido a asentamientos de los apoyos.

A continuación presentamos un ejemplo ilustrativo. Este será la estructura del ejemplo no. 4 que se resolverá por el método de rigidez general. Ver figura y datos.

$$EI = \text{Constante}; EA = \text{Constante}; EA = 2EI$$

El apoyo B sufre un asentamiento que es:

$$\{d_B\} = \begin{Bmatrix} dx_B \\ dy_B \\ \varphi_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.025 \\ -0.045 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

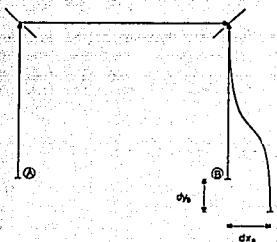
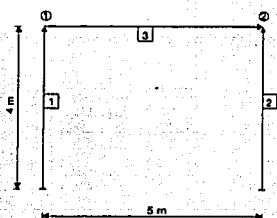
1) Suponemos fijos todos los nudos e introducimos el asentamiento esperado  $\{d\}$ . Esto es:

2) Debido al asentamiento  $\{d_B\}$ , se observa que la barra 2 se deforma y por lo tanto, en los extremos de estos se desarrollan fuerzas. Estas se calculan como:

$$\begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \text{ Donde } \begin{matrix} A = \text{Apoyo B} \\ B = \text{Nudo 2} \end{matrix}$$

Como podemos observar, además, el nudo 2 no se desplaza, por lo tanto tendremos que:

$$\begin{aligned} P_B &= K_{AA2} d_A \\ P_2 &= K_{BA2} d_A \end{aligned}$$



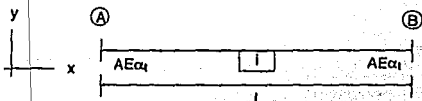


### 6.3.3 Cambios de temperatura

Los cambios de temperatura producen también esfuerzos en las estructuras hiperestáticas y puesto que los cambios de longitud, etc., producidos por temperatura pueden ser calculados con aproximación suficiente, es lógico intentar calcular los esfuerzos que dichos cambios inducen. Estos esfuerzos pueden deberse a que la estructura presenta piezas formadas por diferentes materiales o a la existencia de un gradiente térmico en el interior de la misma.

Los pasos básicos del análisis en el caso de variaciones de temperatura son muy similares a los del caso anterior. La única diferencia es el cálculo de las fuerzas de empotramiento. Por ejemplo, si consideramos el caso de una barra de sección constante, cuya temperatura sufre un aumento de valor  $t$ , la longitud de la pieza descargada experimenta un incremento  $\alpha t l$ , siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación térmica del material. Si los extremos de la pieza tienen impedidos sus movimientos, se producirá la aparición de un esfuerzo axial de compresión  $AE \alpha t$ , mediante el cual podemos escribir la contribución al vector de fuerzas externas producidas por esa barra en particular en la forma:

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{x_A} = AE \alpha t \\ F_{y_A} = 0 \\ M_A = 0 \\ F_{x_B} = -AE \alpha t \\ F_{y_B} = 0 \\ M_B = 0 \end{Bmatrix}$$



En otros casos las fuerzas en los extremos A y B producidas por cambios de temperatura pueden ser más complejas. Un gradiente de temperatura transversal, por ejemplo, determinará componentes de momento no nulas.

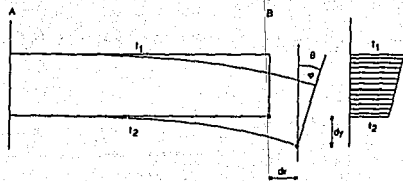


Figura 6-15.

Consideremos la figura 6.15. En esta se observa una barra con un gradiente de temperatura entre su parte superior e inferior. Este gradiente provoca deformaciones  $dx$ ,  $dy$ , y  $\phi$  en el extremo libre de la pieza. Si por el contrario, ambos extremos del elemento fueran fijos, no se observaría desplazamiento en la pieza y en cambio se desarrollarían ciertas fuerzas para mantener fijo el extremo.

Estas son las fuerzas de empotramiento debidas a esfuerzo térmico. Su magnitud se calcula de la siguiente forma.

Si  $\{d_i\}$  representa los desplazamientos libres del extremo B del elemento debidos a los cambios de temperatura, entonces:

$$\{P_B\} = -[K_{BB}]\{d_i\} \quad 6.32$$

Que nos da la fuerza en dicho extremo. El signo (-) indica que los desplazamientos por temperatura y las fuerzas obtenidas son opuestas entre sí.



Recurriendo a las ecuaciones de la energía de deformación tendremos que:

$$\delta_u = \int_0^l du \, dx \quad ; \quad \delta_v = \int_0^l dv \, dx \quad y \quad \theta = \int_0^l d\theta \, dx$$

En las cuales  $u$ ,  $v$  y  $\theta$  son función de la variación de  $x$  con respecto a la longitud de la barra. Si  $T_1$  y  $T_2$  no varían en toda la longitud (así se considera en general) entonces nos queda:

$$\delta_u = \frac{\alpha_1 (t_1 + t_2) l}{2} \quad ; \quad \delta_v = \frac{-\alpha_1 (t_1 - t_2) l^2}{2h} \quad y \quad \theta = \frac{-\alpha_1 (t_1 - t_2) l}{h}$$

Donde  $h$  es el peralte del elemento.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 6.32 nos queda que:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12 EI/l^3 & -6 EI/l^2 \\ 0 & -6 EI/l^2 & 4 EI/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\alpha_1 (t_1 + t_2) l}{2} \\ \frac{-\alpha_1 (t_1 - t_2) l^2}{2h} \\ \frac{-\alpha_1 (t_1 - t_2) l}{h} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-\alpha_1 (t_1 + t_2) EA}{2} \\ 0 \\ \frac{\alpha_1 (t_1 - t_2) EI}{h} \end{Bmatrix}$$

6.33

Estas expresiones se deben sustituir en el vector de cargas  $\{F\}$  para analizar la estructura bajo tal condición de carga como se hace usualmente.

## 6.4 PLANTEAMIENTO MATRICIAL DE ALGUNOS MÉTODOS ITERATIVOS

### 6.4.1 Método de Cross

Es posible expresar el método de distribución de momentos (método de Cross) en un formato matricial. Consideremos la viga continua mostrada en la figura 6.16 que tiene  $n$  momentos en los extremos de sus miembros. Si estos momentos se ensamblan en el vector  $\{P\}$  de fuerzas finales, estos pueden expresarse en la forma.

$$\{P\} = \{P_{E2}\} + [D] \{P_{E2}\} + [C] [D] \{P_{E2}\} + [D] [C] [D] \{P_{E2}\} + [C] [D] [C] [D] \{P_{E2}\} + \dots \quad 6.34$$

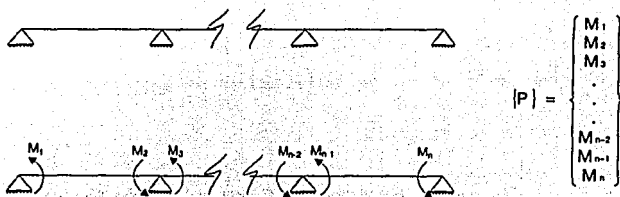
Donde  $\{P_{E2}\}$  representa el vector de momentos de empotramiento reactivos tal y como se obtuvo anteriormente,  $[D]$  es una matriz cuadrada de factores de distribución y  $[C]$  es una matriz cuadrada de factores de transporte.

El primer término de esta serie,  $\{P_{E2}\}$ , da los momentos de empotramiento que se inducen por las cargas sobre las barras o por hundimiento de los apoyos. El segundo término  $\{D\} \{P_{E2}\}$ , da el primer conjunto de momentos equilibrantes que resultan cuando todas las juntas se sueltan simultáneamente. Un elemento individual de la matriz  $\{D\}$ ,  $D_{jk}$ , da el factor por el cual debe multiplicarse la componente  $k$ -ésima de los momentos desequilibrantes para obtener la componente  $j$ -ésima de los momentos equilibrantes. Cada elemento de  $\{D\}$ , se calcula de acuerdo a la ecuación.

$$D_{jk} = \frac{K_{jk}}{\sum K_{jk}}$$

Con signo negativo para obtener los momentos equilibrados. El tercer término de la serie  $\{C\} \{D\} \{P_{E2}\}$ , toma en cuenta los momentos transportados que se inducen a partir de los momentos equilibrantes del segundo término. Cada elemento de la matriz  $\{C\}$ ,  $C_{jk}$ , da el factor de transporte desde la componente de momento  $k$ -ésima hacia la componente de momento  $j$ -ésima. La serie continúa con distribuciones a partir de distribuciones sucesivas y transportaciones hasta que se obtienen los momentos finales.

Después de haber completado el ciclo  $e$ -ésimo de la distribución, la ecuación 6.35 puede escribirse en forma.



$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{Bmatrix}$$

Figura 6-16.

$$\{P\} = (\{I\} + \{D\}) (\{I\} + \{C\} \{D\} + (\{C\} \{D\})^2 + \dots + (\{C\} \{D\})^{e-1}) \{P_{E2}\} \quad 6.35$$

La serie 6.35 puede escribirse en forma cerrada como:

$$\{P\} = (\{I\} + \{D\}) (\{I\} - \{C\} \{D\})^{-1} \{P_{E2}\} \quad 6.36$$

La ecuación 6.36 indica que el método de Cross conduce hacia una solución exacta para los momentos en los extremos de miembros y en esta forma, es equivalente a otras soluciones directas.

La formulación matricial puede extenderse a la solución de problemas de marcos en los que se presenten desplazamientos laterales. Sin embargo, la presentación matricial de este tipo de problemas no tiene ninguna ventaja sobre los otros métodos directos, motivo por el cual se omite.

La presentación matricial, en general, de métodos iterativos no reviste gran importancia ya que, los métodos como el de rigidez o aun el de flexibilidad son más directos y más versátiles para ser aplicados a cualquier tipo de estructura y si a esto le agregamos que los primeros (métodos iterativos) convergen hacia

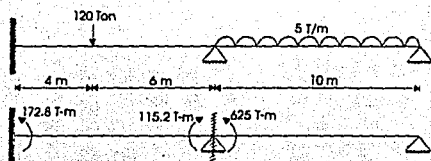
una solución exacta, es mucho mejor estudiar a fondo los métodos exactos. Como se puede ver en la ecuación 6.36 a fin de cuentas también se debe invertir una matriz, por lo que se justifica el anterior argumento ya que, tanto en el método de rigidez como en el de flexibilidad, se invierte la matriz respectiva.

Ejemplo: utilice la expresión 6.36 para obtener los momentos finales en los extremos de la siguiente viga continua.

$EI = \text{Constante}$

1) Obtenemos  $\{P_{E2}\}$

$$\{P_{E2}\} = \begin{Bmatrix} 172.8 \\ -115.2 \\ 625.0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



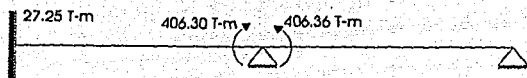
2) Obtención de  $[C]$  y  $[D]$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.571 & -0.571 & 0 \\ 0 & -0.429 & -0.429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Aplicamos la expresión 6.36

$$\begin{Bmatrix} M_{A2} \\ M_{B2} \\ M_{C2} \\ M_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.429 & -0.571 & 0 \\ 0 & -0.429 & 0.571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.2855 & 0.2855 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 172.8 \\ -115.2 \\ 625.0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27.252 \\ -406.30 \\ 406.30 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = ((I) + [D]) \quad ((I) - [C])[D]^{-1} \quad \{P_{E2}\}$$



---

## Capítulo 7

---

### Método de las fuerzas

*En el capítulo anterior, el análisis se ha relacionado principalmente con la determinación en primer lugar de los desplazamientos de los nudos como incógnitas y luego con el cálculo de las fuerzas de los elementos.*

*A pesar de que estos dos pasos, independientemente de su secuencia, son necesarios para hacer un análisis completo, en la práctica las fuerzas en los elementos son el principal interés del calculista. Generalmente el diseño de estructuras se basa en los criterios de resistencia, los cuales dependen de las fuerzas involucradas en los elementos. Si se necesita determinar las deflexiones, los cálculos correspondientes se realizan en las etapas finales del diseño. En otras palabras, la prioridad de los dos pasos anteriores se invierte o el primero se elimina totalmente. Tal concepción conduce hacia un método en el cual las formulaciones se realizan en orden inverso a las presentadas en el método de rigideces. Este método alternativo se conoce como "método de flexibilidad" (debido a que usa las matrices de flexibilidad de los elementos), "método de las fuerzas" (porque supone las fuerzas de los elementos como incógnitas) o "método de compatibilidad" (porque satisface las condiciones de compatibilidad después de establecer las ecuaciones de equilibrio).*

*Este método toma en cuenta el hecho de la relativa facilidad en el cálculo que representa una estructura isostática para expresar el sistema completo de esfuerzos de los extremos de las barras en función de las fuerzas y momentos desconocidos del sistema. Aunque con cierta restricción, estas incógnitas pueden escogerse arbitrariamente (ver capítulo 5, estabilidad). Por lo general se las denomina incógnitas hiperestáticas y se las debe desbloquear o cortar para tener la estructura isostática base.*

*Mientras el método de rigideces emplea las relaciones esfuerzo-deformación para las barras al expresar los esfuerzos de los extremos en función de los movimientos de dichos extremos, el método de flexibilidad las emplea en forma inversa, expresando las deformaciones en función de los esfuerzos extremos. Estos esfuerzos extremos se ponen luego en función de las incógnitas (esfuerzos y reacciones) hiperestáticas, así como las fuerzas propias (exteriores conocidas) por medio de las condiciones de equilibrio. De esta forma obtenemos todas las deformaciones de las piezas como función de las cargas exteriores y las incógnitas hiperestáticas.*

*El paso siguiente lleva consigo la aplicación de las condiciones de continuidad de deformaciones. El resultado es un sistema de ecuaciones que establece la continuidad de la estructura en las secciones en que actúan las fuerzas y momentos hiperestáticos. La resolución del sistema define los valores de las incógnitas hiperestáticas y, a partir de ellas, todos los esfuerzos en los extremos de las barras.*

*Las expresiones de las deformaciones de las barras en función de las cargas exteriores y las hiperestáticas pueden usarse en este momento para encontrar los movimientos de los nudos.*

*Este método posee algunas ventajas sobre el método de rigideces para algunas estructuras, en especial para aquellas en las cuales el grado de indeterminación es alto. Sin embargo, en general se prefiere el*

método de rigideces puesto que es más apropiado para la utilización de computadora y porque elimina el criterio del ingeniero sobre cuestiones tales como la selección de redundantes y el concepto de indeterminación estática del sistema.

## 7.1. ELECCIÓN DE LA ESTRUCTURA PRIMARIA

El primer problema que se enfrenta al utilizar el método de las fuerzas es deducir sobre el número y posición de los cortes o desbloques necesarios para hacer isostática una estructura.

El número de cortes requeridos para hacer isostática una estructura se denomina normalmente grado de hiperestaticidad de la estructura. En la mayoría de las estructuras de ingeniería esto puede realizarse por inspección visual. Para el caso de armaduras planas o espaciales existen reglas bien conocidas que determinan el grado de hiperestaticidad en función del número de barras y nudos.

Si en una armadura conocemos el número de barras y el número de nudos que tengan al menos un grado de libertad, podemos establecer las siguientes relaciones:

ND = Número de desplazamientos (en los nudos)

NB = Número de barras

SI NB < ND El sistema es inestable

SI NB = ND El sistema es isostático (siempre que sea estable)

SI NB > ND El sistema es hiperestático (siempre que sea estable)

De lo anterior observamos que la isostaticidad o hiperestaticidad de una armadura no garantiza su estabilidad ya que esta última tiene reglas bien definidas que la conforman (ver capítulo 5).

En el caso de marcos rígidos resulta relativamente sencillo calcular el grado de hiperestaticidad. Simplemente, introducimos suficientes cortes en la estructura para convertir el marco en una estructura en árbol, que es isostática. Cada corte introduce 3 desbloques en un marco plano, de forma que el grado de hiperestaticidad es sencillamente tres veces el número de cortes. Por otro lado podemos señalar que la directriz de una estructura en árbol no presenta trozos cerrados o anillos. Una estructura hiperestática, por el contrario, tiene siempre un cierto número de anillos, cada uno de los cuales debe cortarse para transformarla en una estructura en árbol. Por tanto, el grado de hiperestaticidad es igual a tres veces el número de anillos independientes de la estructura original. La estructura de la figura 7.1a, por ejemplo, tiene ocho anillos independientes y por consiguiente presenta 24 grados de hiperestaticidad. Puede ser transformada en una estructura en árbol por la introducción de ocho cortes, cuyas posiciones pueden ser escogidas arbitrariamente (la condición de posición de los cortes es tal que todos los anillos sean cortados; de otra forma la estructura sería reducida a una condición de una parte hiperestática y un mecanismo). En la figura 7.1b y 7.1c se muestran dos posibles sistemas de corte.

Aunque es relativamente fácil determinar el número de cortes necesarios para hacer isostática una estructura, es difícil dar reglas fijas para la elección de la posición de dichos cortes.

En general, esto es, para cualquiera de los tipos de estructuras señaladas, el grado de hiperestaticidad se puede calcular por medio de la ecuación de equilibrio de fuerzas externas e internas.

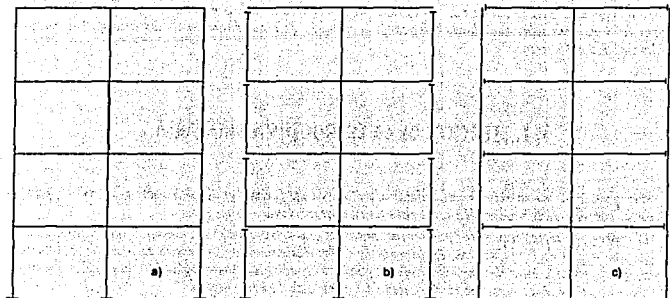


Figura 7-1.

$$(F) = [a]^T (p)$$

Una estructura es isostática si  $[a]^T$  es cuadrada, es decir, si  $NB = ND$ . En el caso de que  $NB > ND$  la matriz de equilibrio ( $[a]^T$ ) será rectangular y por tanto la estructura será hiperestática.

Por consiguiente, el grado de hiperestaticidad de una estructura puede determinarse al obtener la diferencia.

$$GH = NB - ND$$

Y puede interpretarse como el número de columnas en exceso de  $[a]^T$ , respecto al número de renglones para que la matriz de equilibrio sea cuadrada.

Como ejemplo sobre la forma de hacer isostática una estructura, presentamos algunos de los ejemplos resueltos en el capítulo anterior y la forma en que se obtiene una opción de estructura isostática primaria en cada caso.

#### Ejemplo no. 1 (Armadura)

$$NB = 5; ND = 2NN = 4$$

$$GH = 5 - 4 = 1$$

#### Solución

Podemos cortar una de las dos barras diagonales para tener:

$$GH = 4 - 4 = 0$$



**Ejemplo no. 2 (Armadura)**

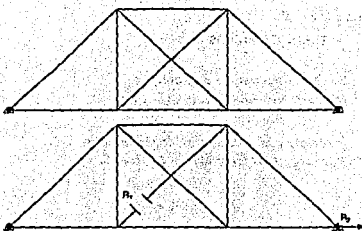
$$NB = 10 ; ND = 2NN = 8$$

$$GH = 10 - 8 = 2$$

**Solución:**

No es posible cortar 2 barras porque la estructura se volvería inestable. Entonces, cortamos solo una de las diagonales del centro y permitimos un grado de libertad a cualquiera de los 2 apoyos y así nos queda:

$$NB = 9 ; ND = 9 \Rightarrow GH = 0$$

**Ejemplo no. 3 (Armadura)**

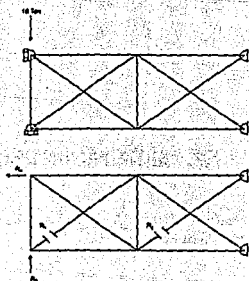
$$NB = 10 ; ND = 6$$

$$GH = 4$$

**Solución:**

Por razones similares al caso anterior no podemos cortar 4 barras. De igual forma, sin embargo, podemos cortar 2 barras y permitimos 2 grados de libertad para tener:

$$NB = 8 ; ND = 8 \Rightarrow GH = 0$$

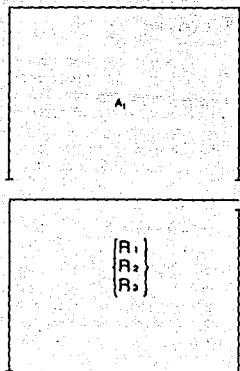
**Ejemplo no. 4 (Marco)**

Número de anillos 1 ( $A_1$ )

Por consiguiente efectuamos un corte para desbloquear dicho anillo. Entonces:

$$GH = 3 (\text{número de cortes}) = 3$$

También se pueden utilizar las fórmulas dadas en el capítulo 5.



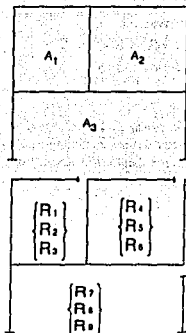
Ejemplo no. 5

Número de anillos = 3

Entonces efectuamos 3 cortes.

GH = 3 (número de cortes) = 9

Y como en la anterior, se puede también comprobar según las fórmulas del capítulo 5.



## 7.2. PARTICIPACIÓN DE LA MATRIZ DE EQUILIBRIO

La presente sección considera la forma en que se deduce el método de flexibilidades para los dos sistemas estructurales tradicionales.

### 7.2.1. Armaduras planas

Considérese la estructura y cargas mostradas en la figura 7.2a. La estructura se deformará bajo la acción de dichas cargas y se desarrollarán fuerzas internas en sus elementos. Si  $F_i$  y  $p_i$  representan respectivamente las cargas sobre el nudo  $i$  y las fuerzas internas en el nudo  $i$  del elemento  $ij$ , el equilibrio en cada nudo quedará definido entonces al establecer:

$$F_i = \sum p_{im}$$

Donde  $m$  representa el número de elementos que concurren al nudo  $i$ . Según lo anterior, para nuestro ejemplo, podemos relacionar las fuerzas en los nudos,  $F_i$  y los esfuerzos en las barras,  $p_{im}$ . Haciendo tales consideraciones de equilibrio obtenemos para figura 7.2a que:

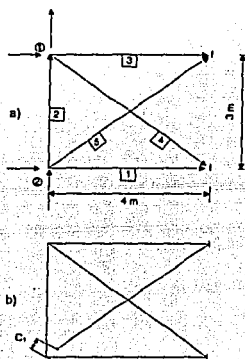


Figura 7-2.



$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -0.8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix}$$

$$(F) = [a]^T (p) \quad 7.1$$

Donde  $[a]^T$  es la matriz de equilibrio que se estudió en el capítulo 5 y su obtención puede hacerse también siguiendo el procedimiento presentado en la sección 6.1.1a y luego transponiendo dicha matriz  $([a])$ .

El conjunto de ecuaciones obtenidas, contiene las cinco fuerzas desconocidas de los elementos en cuatro ecuaciones.

Debido a que  $[a]^T$  es de forma rectangular, las ecuaciones 7.1, no pueden resolverse directamente por el vector  $\{p\}$  y la estructura es hiperestática (de primer grado). Para sistemas estáticamente determinados la matriz de equilibrio es cuadrada y la solución de las ecuaciones 7.1 da las fuerzas desconocidas de los elementos.

Ahora es el momento de escoger cualquiera de las incógnitas de las ecuaciones 7.1 (una) como redundante. Por ejemplo, supóngase que se escoge como redundante  $p_5$ ; entonces las ecuaciones 7.1 pueden pararse como se ve en 7.1 y pueden volver a escribirse como:

$$\{F\} = [a_o]^T [a_R]^T \begin{Bmatrix} p' \\ R \end{Bmatrix} = [a_o]^T \cdot \{p'\} + [a_R]^T \cdot \{R\} \quad 7.2$$

En donde  $\{F\}$ , sigue representando las fuerzas exteriores aplicadas en los nudos (conocidas),  $\{p'\}$  las fuerzas desconocidas en las  $N-D$  barras que forman la estructura isostática primaria y  $\{R\}$  representa las fuerzas desconocidas redundantes. La estructura primaria en ausencia de redundantes, se presenta en la figura 7.2b.

Si escribimos la ecuación 7.2 en la forma:

$$\{p'\} = [a_o^T]^{-1} \{F\} - [a_o^T]^{-1} [a_R]^T \{R\}$$

Y igualamos:

$$[B_o] = [a_o^T]^{-1} ; [B_R] = -[a_o^T]^{-1} [a_R]^T \quad 7.3$$

Tendremos que:

$$\{p'\} = [B_o] \{F\} + [B_R] \{R\} \quad 7.4$$

Esto indica que las fuerzas internas en los elementos son la superposición de dos efectos: las cargas externas y las redundantes. Como las redundantes no son conocidas la ecuación 7.4 no se puede resolver. Sin embargo, esta ecuación puede modificarse de tal manera que el lado izquierdo pueda contener todas las fuerzas en los elementos y también las redundantes.

$$\begin{Bmatrix} p \\ R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [B_o] \\ [0] \end{Bmatrix} \{F\} + \begin{Bmatrix} [B_R] \\ [I] \end{Bmatrix} \{R\} \quad 7.5$$

Si

$$\{b_o\} = \begin{Bmatrix} [B_o] \\ [0] \end{Bmatrix} ; \quad \{b_R\} = \begin{Bmatrix} [B_R] \\ [I] \end{Bmatrix} \quad 7.5'$$

Entonces:

$$\{p\} = \{b_o\} \{F\} + \{b_R\} \{R\} \quad 7.6$$

Una vez que tenemos todos los esfuerzos en función de las cargas exteriores y de las redundantes, podemos calcular el vector de deformación  $\{e\}$  a partir de la flexibilidad de cada barra con la ecuación.

$$\{e\} = [f] \{p\} = [f] [\{b_o\} \{F\} + \{b_R\} \{R\}] \quad 7.8$$

En donde:

$$[f] = [k]^{-1} \text{ Esto es } [f] = \text{diag} \left[ (1/EA)_1, (1/EA)_2, \dots, (1/EA)_{NB} \right]$$

Utilizamos ahora la relación entre cargas y movimientos para obtener el vector  $\{d\}$ , a partir del vector de deformaciones en las barras  $\{e\}$ . A dicho vector debemos sumarle un término correspondiente al movimiento que se produce en los puntos que se mueven, uno con respecto al otro, debido al desbloqueo que se induce para obtener la estructura isostática primaria. A dichos movimientos los llamamos  $\{c\}$  y corresponde a los puntos que se separan debido a los cortes inducidos. Utilizamos  $\{c\}$  en lugar de  $\{d\}$ , debido a que se trata de un movimiento relativo (local) y no absoluto (expresado en coordenadas globales).

Puesto que la ecuación 7.6 se puede escribir como:

$$\{p\} = [b_o] \{F\} + [b_R] \{R\} \quad 7.9$$

Por el principio de contragradencia deducimos que:

$$\begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [b_o^T] \\ [b_R^T] \end{Bmatrix} \{e\} \quad 7.10$$

Y sustituyendo 7.8 en 7.10 tendremos que:

$$\begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [b_o^T] \\ [b_R^T] \end{Bmatrix} [f] [\{b_o\} \{F\} + \{b_R\} \{R\}] \quad 7.11$$

Que podemos reagrupar como:

$$\begin{aligned} (d) &= [b_o^T] [f] [b_o] (F) + [b_o^T] [f] [b_R] (R) \quad a) \\ (c) &= [b_R^T] [f] [b_o] (F) + [b_R^T] [f] [b_R] (R) \quad b) \end{aligned} \quad 7.12$$

Puesto que sabemos que en la estructura real  $(c) = 0$ , la ecuación 7.12 b) resulta:

$$[b_R^T] [f] [b_R] (R) = -[b_R^T] [f] [b_o] (F) \quad 7.13$$

Que podemos escribir como:

$$[F] (R) = -[b_R^T] [f] [b_o] (F) \quad a) \quad 7.14 a)$$

En la que:

$$[F] = [b_R^T] [f] [b_R] \quad b) \quad 7.14 b)$$

La ecuación 7.14 nos permite formar un sistema de  $n$  ecuaciones y la solución nos da el valor de las redundantes del análisis que por consiguiente serán también  $n$ .  $[F]$  es la matriz de flexibilidad del sistema y está referida al sistema de desbloques propuesto.

La ecuación 7.14 puede interpretarse en la siguiente forma: supongamos, para la figura 7.2, que todas las cargas  $(F)$  se aplican a la estructura con la barra 5 desconectada en el nudo 2 y sin transmitir acción. Así  $p_5$  es cero y  $(c) = [b_R^T] [f] [b_o] (F)$ . Es muy importante señalar que  $[b_o]$  y  $[b_R]$  son columnas adecuadas de la matriz inversa  $[a^T]^{-1}$ . En segundo lugar debemos considerar el hecho real de que  $(c)$  es igual a cero. Así, la pareja de fuerzas necesarias para unir los lados del corte (es decir, producir un movimiento negativo  $-(c)$ ) viene dado por la ecuación  $-(c) = [b_R^T] [f] [b_o] (F)$  de la cual se deduce 7.14. Para la figura 7.2, el producto  $[b_R^T] [f] [b_R]$  resulta un simple número por lo que la solución de 7.14 es bastante fácil.

Una vez calculado  $(R)$ , volvemos a la ecuación 7.6 para obtener las restantes fuerzas interiores en la estructura. Así mismo, de la ecuación 7.6 se desprende que el producto  $[b_o] [F]$  da los valores de las fuerzas en las barras cuando  $(R) = 0$ . Los movimientos en los nudos pueden encontrarse ahora mediante la ecuación 7.12a que se puede ya escribir como:

$$(d) = [b_o^T] [f] (p) \quad 7.15$$

Y como comprobación del cálculo podemos determinar el valor de  $(c) = [b_R^T] [f] (p)$  que debe ser cero.

Una característica del método de flexibilidades, es la elección arbitraria de la incógnita hiperestática. Resulta claro que en este ejemplo podríamos haber escogido cualquier otra barra como la redundante del sistema. En cada caso habríamos obtenido matrices  $[b_o]$  y  $[b_R]$  diferentes, pero los valores numéricos finales de los esfuerzos y desplazamientos habrían sido los mismos.

Antes de considerar algún problema es conveniente hacer una serie de observaciones que serán válidas para cualquier problema de armaduras.

Consideremos la ecuación 7.6

$$(p) = [b_o] (F) + [b_R] (R)$$

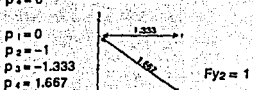
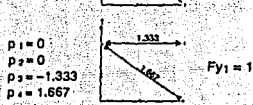
Tenemos ahora que:

a) Si hacemos  $\{R\} = 0$

$$\{p\} = [b_a] \{F\}$$

Y nos quiere decir que podemos obtener la matriz  $[b_a]$  a partir de la estructura primaria base, si a esta la cargamos con fuerzas unitarias aplicadas en cada uno de los nudos según el vector  $\{F\}$ , y obtenemos los valores de  $\{p\}$  para todas las barras. Por ejemplo, para la figura 7.2b, nos queda:

$$[b_a] = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{y1} & F_{x2} & F_{y2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1.333 & 0 & -1.333 \\ 0 & 1.667 & 0 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix}$$



Como es lógico, en todos los casos la barra 5 no tiene esfuerzo.

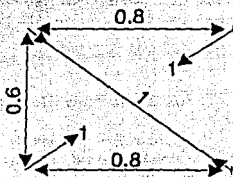
Lo anterior se puede comprobar mediante la expresión 7.5'.

b) Si ahora hacemos  $\{F\} = 0$

$$\{p\} = [b_R] \{R\}$$

Y quiere decir que podemos obtener la matriz  $[b_R]$  a partir de la estructura primaria base, haciendo que  $\{R\}$  sea igual a la unidad (esto es todas las incógnitas) y obteniendo los valores de  $\{p\}$  para cada barra. Para la figura 7.2b tenemos que:

$$[b_R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ -0.8 \\ -0.6 \\ -0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} \quad R_1 = \{1\} \Rightarrow \begin{matrix} p_1 = -0.8 \\ p_2 = -0.6 \\ p_3 = -0.8 \\ p_4 = 1 \\ p_5 = 1 \end{matrix}$$

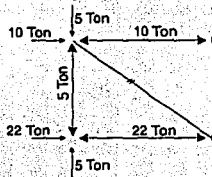


Este resultado también puede comprobarse mediante la expresión 7.5'.

De a) y b) concluimos que es posible obtener las matrices  $[b_a]$  y  $[b_R]$  sin utilizar las ecuaciones 7.5' si hacemos  $\{R\} = 0$  y  $\{F\} = 0$  respectivamente en la ecuación 7.6 y obtenemos los valores de  $\{p\}$  haciendo  $\{F\} = 1$  y  $\{R\} = 1$  también respectivamente.

- c) Otra observación interesante es que, si en la misma ecuación 7.6, hacemos  $R=0$  y sustituimos en la ecuación resultante el valor real de  $\{F\}$ , el producto resultante  $\{b_o\} \{F\}$ , donde  $\{b_o\}$  es igual que en a) es igual al valor de las fuerzas si en la estructura primaria cargamos los nudos con las fuerzas exteriores reales. Esto es para la figura 7.26.

$$\{p_o\} = [b_o] \{F\} = \begin{Bmatrix} -22 \\ -5 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} p_1 = -22 \\ p_2 = -5 \\ p_3 = -10 \\ p_4 = 0 \end{array}$$



Esto significa que no es necesario obtener  $\{b_o\}$  para la ecuación 7.14a si vemos que  $\{p_o\} = [b_o] \{F\}$ . Por lo tanto podemos escribir 7.14 como:

$$\{F\} \{R\} = -[b_R]^T \{F\} \{p_o\} \quad 7.16$$

Hasta esta parte hemos presentado la deducción del método de flexibilidades y algunas consideraciones para el caso de armaduras. Una vez que se plantea la ecuación 7.14 (ó 7.16) se obtienen las redundantes y con la ecuación 7.6 las fuerzas en todas las barras de la estructura. En 7.3 presentaremos algunos ejemplos.

## 7.2.2 Marcos planos

El punto de partida en el caso de marcos planos es el mismo; las ecuaciones de equilibrio de nudos. Sin embargo, en esta parte expondremos una nueva forma de obtener la matriz de equilibrio de la estructura. La diferencia estriba principalmente en dos aspectos: primero, el vector de fuerzas en las barras, en su forma general, estará definido ahora por una fuerza en  $X$ , una fuerza en  $Y$  y un momento flexionante para cada extremo de las barras a considerar. El segundo tiene que ver con el primero y es que dicho vector de fuerzas en las barras solo contendrá los esfuerzos del extremo  $B$  de cada elemento (tal elección es arbitraria) y los esfuerzos en  $A$  se encuentran con la ecuación 5.6.

### 7.2.2.1 Una nueva forma de considerar la matriz de equilibrio

Como punto de partida, consideremos la figura 7.3. Recordando que se trata ahora de fuerzas generalizadas provocadas por cualquier tipo de cargas aplicadas en puntos intermedios de las barras.

Obtenemos primeramente las ecuaciones de equilibrio de nudos para esta figura con lo que tendremos que:

$$\begin{aligned} F_1 &= P_{B1} + P_{A3} \\ F_2 &= P_{B2} + P_{B3} \end{aligned}$$

Enseguida tenemos que las fuerzas en las barras deben ser obtenidas en los extremos  $B$  de cada barra según la ecuación 5.6a que es:

$$P_A = \cdot h P_B$$

Es lógico suponer que, tanto las fuerzas en las barras como las diferentes matrices  $[h]$ , de equilibrio de barras, deben expresarse en el sistema global de coordenadas. Así podemos escribir las ecuaciones que relacionan las cargas externas con las fuerzas en las barras como:

$$F_1 = P_{B1} + h_3 P_{B3}$$

$$F_2 = P_{B2} + P_{B3}$$

Que escrito en forma matricial queda:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{B1} \\ P_{B2} \\ P_{B3} \end{Bmatrix}$$

O simplemente:

$$\{F\} = [a]^T \{p\}$$

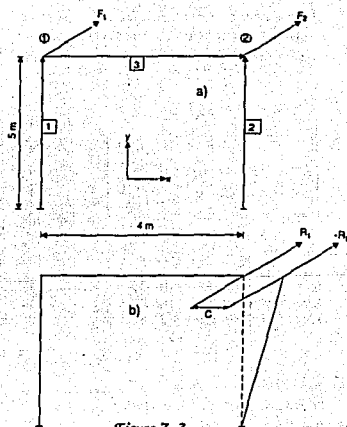


Figura 7-3.

Es fácil, por lo tanto, obtener la matriz de equilibrio de una estructura observando las siguientes reglas. Tomemos como base la misma figura 7.3.

El elemento renglón  $i$ , columna  $j$  de  $[a]^T$  se refiere al nudo  $i$  y la barra  $j$ . Si la barra  $j$  tiene el extremo  $A$  en el nudo  $i$ , entonces el elemento es la matriz  $[h]$ , la cual está asociada a la barra  $j$ . Si la barra tiene el extremo  $B$  en el nudo, entonces el elemento resulta simplemente la matriz unitaria  $[I]$ , de dimensión adecuada. Si ningún extremo está unido al nudo, el elemento es cero o, más precisamente, una matriz nula de tamaño apropiado.

Para la figura 7.3 tendremos que:

$$[h_3] \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ M_1 \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{B1} \\ P_{B2} \\ M_{B1} \\ P_{B2} \\ M_{B2} \\ P_{B3} \\ M_{B3} \\ P_{B3} \\ M_{B3} \end{Bmatrix}$$

Podemos por lo tanto establecer la dimensión de  $[a]^T$  como:

$$[a]^T = \text{DIM} [ \text{NN} \times \text{NB} ] \quad \text{donde} \quad \text{NN} = \text{Número de nudos} \\ \text{NB} = \text{Número de barras}$$

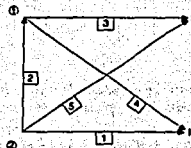
A su vez, cada elemento  $i$  del arreglo, es una submatriz de dimensión  $(3 \times 3)$ . Por lo tanto:

$$\text{DIM} [a]^T = 3NN \times 3NB$$

Obtenemos  $[a^T]$  para algunos de los ejemplos ya tratados.

Ejemplo no. 1

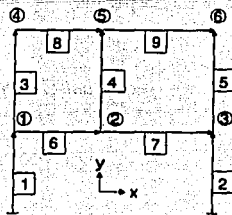
$$\begin{aligned} NN &= 2 \\ NB &= 5 \end{aligned} \quad [a]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -h_3 & -h_4 & 0 \\ -h_1 & -h_2 & 0 & 0 & -h_5 \end{bmatrix}$$



Ejemplo no. 5

$$\begin{aligned} NN &= 6 \\ NB &= 9 \end{aligned}$$

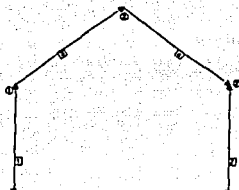
$$[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h_3 & 0 & 0 & -h_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_4 & 0 & 1 & -h_7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -h_5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo no. 8

$$\begin{aligned} NN &= 3 \\ NB &= 4 \end{aligned}$$

$$[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ahora ya podemos considerar el método de flexibilidad en el caso de marcos.

Consideremos nuevamente la estructura y las cargas mostradas en la figura 7.3a. Al igual que en armaduras,  $F_i$  y  $p_i$  representarán respectivamente las cargas sobre el nudo  $i$  y las fuerzas internas en el

extremo  $i$  del elemento  $ij$ . Las fuerzas internas de las barras se consideran solo en las extremos  $B$  de cada barra y las cargas externas se consideran como se ha venido haciendo.

Las ecuaciones de equilibrio son nuevamente el punto de partida y, de acuerdo con las nuevas reglas de formación de  $\{a\}$ , para la figura 7.3a nos quedó que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{B1} \\ P_{B2} \\ P_{B3} \end{Bmatrix} \quad 7.17$$

Aquí también vemos que la matriz de equilibrio es rectangular y por lo tanto singular. Esto significa que la ecuación 7.17 no puede resolverse directamente por el vector  $\{p\}$ .

Consideremos entonces la estructura isostática mostrada en la figura 7.3b, la cual introduce un corte en el nudo 2 al cual se asocia la carga exterior  $R_1$ . Esto se interpreta como que la estructura está rota en ese punto y se introduce una pareja de fuerzas actuando sobre la estructura. Estas fuerzas  $\{R, -R\}$  son además necesarias para mantener la continuidad y el equilibrio de la estructura completa. Por lo tanto debe considerarse la igualdad.

$$R = P_{B3}$$

Lo cual nos permite reescribir ahora la ecuación 7.17 con un renglón más como:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ R_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{B1} \\ P_{B2} \\ P_{B3} \end{Bmatrix} \quad 7.18$$

$$\begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix} = [a_{(i)}]^T \{p\}$$

En donde la matriz  $\{1\}$ , aparece en el último renglón de la ahora "matriz de equilibrio aumentada" por el hecho de haberse considerado a  $\{R\}$  como una carga exterior y por consiguiente expresarse en coordenadas globales.

Ahora podemos ya aplicar la regla del álgebra matricial para invertir  $[a_{(i)}]^T$  la cual es cuadrada y no singular. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 7.18 como:

$$\begin{Bmatrix} P_{B1} \\ P_{B2} \\ P_{B3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h_2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ R_1 \end{Bmatrix} \quad 7.19$$

$$\{p\} = [a_{(i)}^T]^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix}$$



La matriz inversa  $[a_{ij}]^{-1}$  puede ahora partirse en dos submatrices  $[b_o]$  y  $[b_n]$  las cuales están asociadas, la primera con las cargas exteriores conocidas y la segunda con las cargas incógnitas  $\{R\}$ . Esto lo escribimos como:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} [b_o] \\ [b_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix}$$

o

$$\{p\} = [b_o] \{F\} + [b_n] \{R\}$$

7.20

De aquí en adelante, el proceso es completamente análogo al utilizado en el caso de las armaduras. El vector  $\{F\}$  representa las fuerzas exteriores que se aplican en los nudos, el vector  $\{p\}$  representa las fuerzas interiores en los extremos B de las barras y  $\{R\}$  es el vector de fuerzas (equilibrantes  $R$  y  $-R$ ) incógnitas que dan la continuidad requerida en la estructura.

Por el principio de contragradiente podemos escribir:

$$\begin{Bmatrix} d \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_o] \\ [b_n] \end{bmatrix}^T \{e\}$$

Además podemos expresar las deformaciones de las barras en función de las fuerzas de extremo por lo que:

$$\{e\} = [f] \{p\} \quad \text{donde} \quad [f] = \text{diag} (J_{BB1}, J_{BB2}, J_{BB3} \dots J_{BBNB})$$

A su vez  $J_{BB}$  tiene el valor indicado en la ecuación 4.10 para una barra genérica y el valor de la ecuación 4.9 en el caso en que  $EI$  y  $EA$  son constantes a lo largo de la barra.

Haciendo las mismas transformaciones que en el caso de armaduras obtenemos finalmente que:

$$[b_n]^T [f] [b_n] \{R\} = - [b_n]^T [f] [b_o] \{F\}$$

Con esta ecuación obtenemos las redundantes para nuestro problema.

Al igual que en las armaduras, la selección de los desbloques es completamente arbitraria y no importa el lugar en que se hagan los resultados finales serán siempre los mismos.

### 7.3 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE LA ESTRUCTURA

La parte principal del análisis por el método de flexibilidades en una estructura requiere el planteamiento y resolución de la ecuación 7.14a que establece un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas y en donde  $n$  es igual al grado de indeterminación de la estructura. La expresión 7.14b es la ecuación general de la matriz de flexibilidades de una estructura, referida a los cortes que se inducen. Como la matriz de rigideces, la matriz de flexibilidad no está influida por el sistema de cargas exteriores y es simétrica respecto a la diagonal principal.

Así mismo, el movimiento (c) que se induce en los lugares de los desbloques por efecto de las cargas externas es:

$$(c) = [b_n]^T [f] (b_o) (F) \quad 7.21$$

Por lo que podemos escribir la ecuación 7.14a como:

$$[f] (R) = -(c) \quad 7.22$$

Que determina igualmente el valor de (R).

Una de las propiedades más interesantes del método de flexibilidad es la forma en que se asemeja la matriz de flexibilidad, medida en los cortes con la matriz de rigidez medida en los nudos.

Si observamos el sistema de cortes de la figura 7.4, vemos que hay 4 anillos independientes con movimiento  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$  en dichos cortes y las parejas de fuerzas  $\pm R_1, \pm R_2, \pm R_3, \pm R_4$  correspondientes a los desbloques inducidos. Los valores de los diferentes  $C_i$  están relacionados con los correspondientes  $R_j$  por medio de la expresión.

$$(c) = [f] (R)$$

Que para la figura 7.4 se escribe como:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad 7.23$$

Y que podemos interpretar, en forma semejante al método de rigideces en la siguiente forma:

$f_{ij}$  = Coeficiente de flexibilidad de contribución al desplazamiento  $C_i$  provocado por una fuerza redundante  $R_j$ .

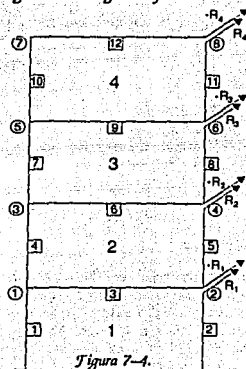
Como en la matriz de rigidez global, si hacemos que  $R = 1$  entonces estaremos obteniendo los coeficientes de flexibilidad de la estructura.

Considerese el cuerpo elástico de la figura 7.5, el cual está sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio (incluyendo resecciones). Si las cargas se aplican gradualmente, la energía de deformación total es igual a (ver capítulo 4).

$$U = 1/2 (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots + P_n \Delta_n) \quad 7.23$$

Y de acuerdo con el segundo teorema de castigliano.

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \Delta_1 = \frac{1}{2} \left( \Delta_1 + P_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_1} + F_2 \frac{\partial \Delta_2}{\partial P_1} + \dots + F_n \frac{\partial \Delta_n}{\partial P_1} \right)$$



Y que es igual a:

$$\Delta_1 = P_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_2} + \dots + P_n \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_n} \quad 7.24$$

Si tenemos que  $i$  varía de 1 hasta  $n$  entonces podemos reagrupar las diferentes fuerzas y deformaciones como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial F_1} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial F_2} & \dots & \frac{\partial \Delta_1}{\partial F_n} \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial F_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial F_2} & \dots & \frac{\partial \Delta_2}{\partial F_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta_n}{\partial F_1} & \frac{\partial \Delta_n}{\partial F_2} & \dots & \frac{\partial \Delta_n}{\partial F_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad 7.25$$

O en forma simple:

$$(\Delta) = [S] (F)$$

Esta ecuación representa la matriz de flexibilidad del sistema antes de aplicar las condiciones de contorno. Sin embargo, es importante la estabilización del sistema para, de esta manera, hacer estable la estructura y para que la matriz de flexibilidad de la estructura sea no singular.

Si analizamos nuevamente la figura 7.4 vemos que los apoyos suministran la estabilización necesaria a la estructura ya que en esos lugares  $\Delta_i = 0$ . De esta manera, al escribir la ecuación matricial de flexibilidad de la estructura obtenemos la expresión:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial R_1} & \frac{\partial c_1}{\partial R_2} & \frac{\partial c_1}{\partial R_3} & \frac{\partial c_1}{\partial R_4} \\ \frac{\partial c_2}{\partial R_1} & \frac{\partial c_2}{\partial R_2} & \frac{\partial c_2}{\partial R_3} & \frac{\partial c_2}{\partial R_4} \\ \frac{\partial c_3}{\partial R_1} & \frac{\partial c_3}{\partial R_2} & \frac{\partial c_3}{\partial R_3} & \frac{\partial c_3}{\partial R_4} \\ \frac{\partial c_4}{\partial R_1} & \frac{\partial c_4}{\partial R_2} & \frac{\partial c_4}{\partial R_3} & \frac{\partial c_4}{\partial R_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad 7.26$$

En donde las derivadas parciales representan desplazamientos causados por cargas unitarias cuyo interpretación puede verse en la figura 7.6.

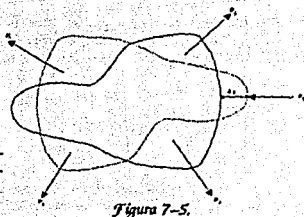


Figura 7-5.

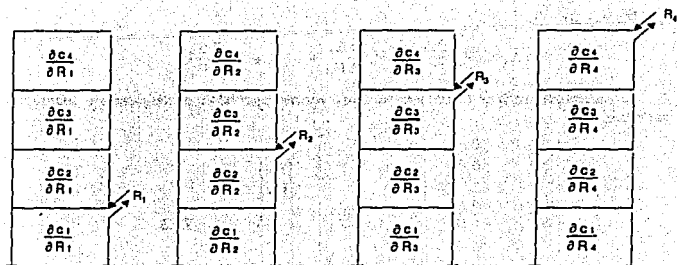


Figura 7-6.

De esta figura podemos hacer las siguientes observaciones:

Para  $C_1$ : Vemos aquí que las barras 1, 2 y 3 contribuyen en forma directa a esta deformación que provoca  $R_1$ . Pero además observamos que también se produce variación en el desplazamiento  $C_2$  a través de la barra 3. Por lo tanto:

$$c_1 = \frac{\partial c_1}{\partial R_1} + \frac{\partial c_2}{\partial R_1} \quad \text{y además} \quad \frac{\partial c_2}{\partial R_1} = \frac{\partial c_1}{\partial R_1} = 0$$

Para  $C_2$ : En este caso, la redundante  $R_2$  provoca la deformación por medio de las barras 3, 4, 5 y 6 que contribuyen directamente. Además podemos ver que se inducen deformaciones en  $C_1$  y  $C_3$  por el efecto de  $R_2$  sobre las barras 3 y 6 respectivamente. Entonces:

$$c_2 = \frac{\partial c_1}{\partial R_2} + \frac{\partial c_2}{\partial R_2} + \frac{\partial c_3}{\partial R_2} \quad \text{y además} \quad \frac{\partial c_1}{\partial R_2} = 0$$

Para  $C_3$ : Aquí observamos que las barras 6, 7, 8 y 9 contribuyen directamente a la deformación, que provoca  $R_3$ . Y además vemos que se provocan deformaciones en  $C_2$  y  $C_4$  por el efecto de  $R_3$  al transmitirse por las barras 6 y 9 respectivamente. Por lo tanto:

$$c_3 = \frac{\partial c_2}{\partial R_3} + \frac{\partial c_3}{\partial R_3} + \frac{\partial c_4}{\partial R_3} \quad \text{y además} \quad \frac{\partial c_2}{\partial R_3} = 0$$

Para  $C_4$ : La deformación directa se produce a través de las barras 9, 10, 11 y 12 debido a  $R_4$ . Además se produce efecto en  $C_3$  por la transmisión de  $R_4$  sobre la barra 9. Entonces:

$$C_4 = \frac{\partial C_3}{\partial R_4} + \frac{\partial C_4}{\partial R_4} \quad \text{y además} \quad \frac{\partial C_1}{\partial R_4} = \frac{\partial C_2}{\partial R_4} = 0$$

Por consiguiente, la ecuación 7.26 que se iguala con 7.23 se puede reescribir como:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ 0 & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ 0 & 0 & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad 7.27$$

En general, cada elemento de la diagonal principal de la matriz de flexibilidad es igual a la suma de las flexibilidades de las barras que forman el anillo correspondiente. Esto puede compararse con el hecho de que en la matriz de rigidez de una estructura, cada elemento de la diagonal principal es la suma de las rigideces directas de las barras que se encuentran en el nudo correspondiente.

En el caso de un elemento exterior a la diagonal principal, este depende de la flexibilidad de la barra (o barras) común a los dos anillos correspondientes. Si los anillos no tienen barras en común, el elemento es cero. Esto se compara con el hecho de que, en la matriz de rigidez de una estructura, un elemento exterior a la diagonal principal es una función de la rigidez de las barras que conectan los nudos correspondientes, y es cero si los nudos no están conectados por ninguna barra.

De lo anterior se debe señalar que los sistemas de cortes deben escogerse de tal forma que los anillos sean tan independientes como sea posible. Por lo tanto, para la figura 7.1 la opción b) es preferible sobre la opción c). Esto se refleja en la disposición de la matriz de flexibilidad de la estructura ya que tenderá a ser en banda, estando agrupados los elementos próximos a la diagonal principal, lo que redundará en considerables ventajas para el cálculo.

El siguiente paso para obtener la matriz de flexibilidad de la estructura (figura 7.4) es la realización de los cálculos que marca la ecuación 7.27 antes definida. Sin embargo, la obtención de las diferentes deformaciones por este método resulta, más bien, laboriosa debido a que cada elemento  $C_i$  es un vector de tres componentes (dos lineales y un angular) por lo tanto cada elemento  $F_{ij}$  de la matriz de flexibilidades es una submatriz de orden  $(3 \times 3)$ . De esto se desprende que para la obtención final de la matriz de flexibilidad de la estructura, por este método, debemos resolver tantas derivadas parciales como elementos tenga la matriz  $[F]$  de la ecuación 7.27 multiplicada por tres. En el caso de la figura 7.4 serán treinta ecuaciones, siendo el procedimiento a seguir, el que se describe en el apartado 4.5, que utiliza el principio del trabajo virtual.

El anterior procedimiento resulta bastante complicado por lo que en su lugar utilizaremos otro procedimiento más práctico y sencillo que utiliza la matriz de flexibilidad de las barras así como la matriz de equilibrio  $f$  de las mismas. Esto requiere, se conozca el siguiente proceso.

### 7.3.1 Matriz de flexibilidad para elementos conectados en serie

Si un grupo de resortes son unidos en serie, como se ve en la figura 7.7, la fuerza en cada resorte es la misma. Así, podemos escribir para cada resorte.

$$\text{Alargamiento} = \text{flexibilidad} \times \text{fuerza}$$

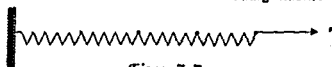


Figura 7-7.

Y sumando todos los alargamientos individuales se tiene que:

$$\text{Alargamiento total} = \text{suma de flexibilidades} \times \text{fuerza}$$

El empleo de la suma de flexibilidades nos permite evitar la introducción de movimientos correspondientes a los puntos de unión, como variables intermedias cuando se presentan piezas unidas en serie.

Demostraremos esta idea considerando el cálculo de la barra compuesta que muestra la figura 7.8a. Esta barra está compuesta por varios trazos cuyas matrices de flexibilidad son conocidas.

El problema consiste en hallar la matriz de flexibilidad de la barra completa 1-4, en función de las flexibilidades de las componentes, de manera que tan solo necesiten emplearse los movimientos de los extremos 1 y 4 en el resto del cálculo de cualquier estructura del cual pueda formar parte dicha barra. Para el cálculo utilizaremos las matrices  $[F]$  y  $[f]$  de cada barra expresadas en el sistema general de coordenadas.

Planteamos el problema considerando separadamente la contribución que cada trazo de la barra aporta al movimiento del extremo 4 con relación a 1. Así, si 1 está empotrado y la carga  $P_4$  se aplica en el extremo 4, entonces el movimiento de 4 viene dado por:

$$d_4 = e_{1,4} = [F]_{1,4} P_4$$

Este movimiento es la suma de los movimientos debidos a las deformaciones de los diferentes trazos. Consideremos, por ejemplo, el movimiento del extremo 4 debido a la deformación del trazo 2. Con este fin, los restantes trazos se suponen como prolongaciones del trazo 2 y son totalmente rígidos (figura 7.8b). Si consideramos el trazo 3 de la barra podemos aplicar la ecuación 4.5a, a las fuerzas que actúan en los extremos. Así, la fuerza aplicada en el extremo A del trazo 3 unido al trazo 2 es:

$$P_{A3} = -[h]_3 P_4$$

Y la carga actuando en el extremo B del trazo 2 es:

$$P_{B2} = [h]_2 P_4$$

Puesto que 1 está empotrado y el trazo 1 se considera rígido, el extremo A del trazo 2 está igualmente fijo, y el movimiento del extremo B viene dado por:

$$d_3 = e_2 = [F]_2 P_{B2} = [F]_2 [h]_2 P_4$$

Ahora, 3 es una barra rígida, y los movimientos de sus extremos han de satisfacer, por consiguiente la ecuación del movimiento de conjunto ( $d_B = h^{-1} d_A$ ) ecuación 5.9. Así pues, el movimiento de 4 debido a la deformación existente en el trazo 2, causada por la fuerza  $P_4$  aplicada en 4 es:

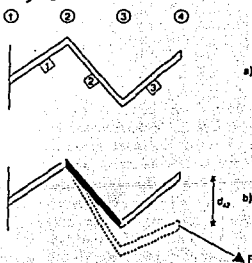


Figura 7-8.

$$d_{42} = [h^T]_3 [F]_2 [h]_3 P_4$$

La matriz de flexibilidad  $[F]_2$  del trozo 2 considerada desde el punto 4, resulta ser  $[F]_2^T [F]_2 [F]_3$ . Idéntico análisis puede hacerse para cada uno de los restantes trozos de 1-4, y sumando todos los movimientos obtenemos la matriz de flexibilidad de 1-4 en la forma:

$$[F]_{1-4} = \sum_{K=1}^4 [h^T]_{K-4} [F]_K [h]_{K-4} \quad 7.28$$

Donde la suma se ha extendido a todas las trozos que forman la barra 4. Para un caso general podemos establecer la ecuación 7.28 como:

$$[F]_{1-N} = \sum_{K=1}^n [h^T]_{(K+1)-(N+1)} [F]_K [h]_{(K+1)-(N+1)} \quad 7.29$$



En donde  $[h]_{(K+1)-(N+1)}$  es igual al producto de las matrices  $[h]$  de todos los trozos comprendidos desde  $(K+1)$  hasta  $(N+1)$ .

Ahora es posible obtener la matriz de flexibilidad para la figura 7.4. Recordando que la matriz de flexibilidad de la estructura es simétrica, solo obtendremos el triángulo inferior de la misma. Por lo tanto:

Para  $C_1$

$$F_{11} = \frac{\partial C_1}{\partial R_1} = [h^T]_3 [F]_1 [h]_3 + [F]_3 + [F]_2$$

Para  $C_2$

$$F_{21} = F_{12}^T = \frac{\partial C_1}{\partial R_2} = [F]_3 [h]_5$$

$$F_{22} = \frac{\partial C_2}{\partial R_2} = [h^T]_6 [F]_4 [h]_6 + [F]_6 + [h^T]_5 [F]_3 [h]_5 + [F]_5$$

Para  $C_3$

$$F_{32} = F_{23}^T = \frac{\partial C_2}{\partial R_3} = [F]_6 [h]_8$$

$$F_{33} = \frac{\partial C_3}{\partial R_3} = [h^T]_9 [F]_7 [h]_9 + [F]_9 + [h^T]_8 [F]_6 [h]_8 + [F]_8$$

Para  $C_4$

$$F_{43} = F_{34}^T = \frac{\partial C_4}{\partial R_4} = [F]_9 [h]_{11}$$

$$F_{44} = \frac{\partial C_4}{\partial R_4} = [h^T]_{12} [F]_{10} [h]_{12} + [F]_{12} + [h^T]_{11} [F]_9 [h]_{11} + [F]_{11}$$

Es muy importante recordar que para la obtención de estos valores, las diferentes matrices  $[F]$  y  $[h]$  de cada barra deben estar expresadas en el sistema global de coordenadas.

$[F]$  y  $[h]$  se transforman de la misma manera que la matriz  $[K]$ , ecuaciones 3.11 y 3.12. De esta manera se obtienen los diferentes factores de flexibilidad de la matriz global  $[F]$ , referidos a los desbloques considerados.

Según lo hasta aquí expuesto, la matriz de flexibilidad de una estructura puede obtenerse en dos formas para el caso de marcos planos:

- a) Obtención de  $[F]$  por la ecuación 7.146.

$$[F] = [b_R]^T [f] [b_R]$$

Para lo cual deben ser definidas de antemano las matrices  $[b_R]$  y  $[f]$ , y cuya obtención será convenientemente hecha en el sistema local de coordenadas de cada barra (matriz de flexibilidad de las barras).

- b) Obtención directa de  $[F]$  utilizando la matriz de flexibilidad de cada barra y usando la ecuación 7.29.

Este procedimiento utiliza las diferentes matrices de flexibilidad y equilibrio de las barras transformadas al sistema global de coordenadas.

En el caso de armaduras planas solo utilizaremos el procedimiento a)

## 7.4 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DIVERSAS

La presente sección muestra el procedimiento a seguir en la obtención de la matriz de flexibilidad de una estructura, así como de las fuerzas finales en las barras de la misma.

Debe reiterarse una vez más que la selección de las redundantes para el análisis es totalmente arbitraria y por tanto, la que se utiliza en los siguientes ejemplos no es la única que puede proponerse.

La secuencia que se propone para analizar una estructura es la siguiente. (armaduras y/o marcos)

- 1.- Se numeran los puntos nodales y se forma el vector de cargas exteriores  $[F]$  de la estructura.
- 2.- Se plantea la ecuación de equilibrio de fuerzas utilizando solo las fuerzas de uno de los extremos (extremo B) de cada barra. Las fuerzas en ambos extremos se relacionan mediante la ecuación 5.6.
- 3.- Se selecciona el número de incógnitas en exceso que hace hiperestática a la estructura, y que se van a desbloquear.
- 4.-

- a) Armaduras. Una vez seleccionadas las redundantes se reagrupan las columnas de la matriz de continuidad en la forma  $[a_0^R]$  y  $[a_0^L]$  (ecuación 7.2)



- b) Marcos. Se incluyen las diferentes redundantes  $[R]$  como cargas exteriores para obtener la matriz aumentada  $[a_{ij}]$ .
- 5.-
- a) Armaduras. Se obtienen  $[b_0]$  y  $[b_R]$ , a partir del paso anterior según las ecuaciones 7.3 y 7.5.
- b) Marcos. Se obtiene la inversa  $[a_{ij}]^{-1}$  y se subdivide en las matrices  $[b_0]$  y  $[b_R]$  según la ecuación 7.19 y 7.20.
- 6.- Obtenemos la matriz de flexibilidad de las barras  $[f]$ .
- a) Armaduras. En coordenadas locales según la ecuación 7.9.
- b) Marcos. En coordenadas globales según 3.11 y 3.12.
- 7.- Se plantea la ecuación 7.14.
- $$[3] (R) = -(c)$$
- y se calculan las redundantes.
- 8.- Se determinan las fuerzas en las barras.
- a) Armaduras. en coordenadas locales. (ecuación 7.6)
- b) Marcos. En coordenadas globales

En el caso de marcos, para obtener el vector de fuerzas finales  $\{p\}$ , se deben de sumar las fuerzas obtenidas en este paso con las fuerzas de empotramiento  $\{p_{e2}\}$ .

- 9.- Si se desea, se calculan los desplazamientos según la ecuación 7.5 y se pueden comprobar los resultados con la ecuación.

$$\{c\} = [b_R]^T \{f\} (p) = \{0\}$$

A continuación se presentan algunos de los problemas ya resueltos mediante el método de rigideces para que se vuelvan a resolver ahora utilizando flexibilidades.

Problemas: obtener la matriz de flexibilidad de la estructura y las fuerzas finales en las barras para los siguientes marcos y armaduras.

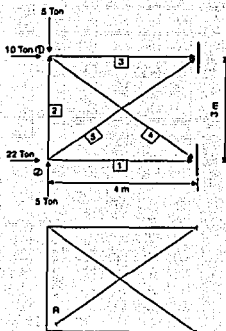
### 7.4.1 Armaduras planas

Ejercicio no. 1  $EA = \text{Constante}$

- 1) Numerar nudos, barras y formar  $[F]$

$$[F] = \begin{Bmatrix} 10 \\ -5 \\ 22 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

- 2) y 3) Plantear las ecuaciones de equilibrio y selección de redundantes.



$$\begin{cases} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix} \begin{cases} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{cases}$$

4) Obtener  $[a_o]^T$  y  $[a_n]^T$

$$[a_o]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [a_n]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

5) y 6) Obtener  $[b_o]$  y  $[b_n]$  según ecuaciones 7.3 y 7.5' y obtener la matriz de flexibilidad de las barras.

$$[b_o] = \begin{bmatrix} [a_o]^T ]^{-1} \\ [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1.333 & 0 & -1.333 \\ 0 & 1.667 & 0 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [b_n] = \begin{bmatrix} -[a_o]^T ]^{-1} [a_n]^T \\ [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ -0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \text{diag. } (4, 3, 4, 5, 5) / EA$$

7) Se plantea el sistema 7.14 tal que:

$$\begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.8 \\ -0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} 1/EA \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ -0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [R] = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ -0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1.333 & 0 & -1.333 \\ 0 & 1.667 & 0 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 22 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[b_n]^T [f] [b_n] \{R\} = [b_n]^T [f] [b_o] \{F\}$$

8) Cálculo de la redundante:

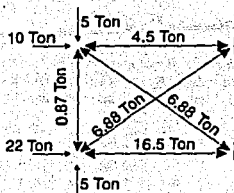
$$16.20 R_1 = -111.40 \Rightarrow R_1 = -6.877 \text{ Ton.}$$

9) Obtención de fuerzas finales:

$$\begin{cases} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1.333 & 0 & -1.333 \\ 0 & -1.667 & 0 & 1.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 22 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ -0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [-6.877] \Rightarrow \{p\} = \begin{bmatrix} -16.498 \\ -0.874 \\ -4.498 \\ -6.877 \\ -6.877 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = b_o F + b_n R$$

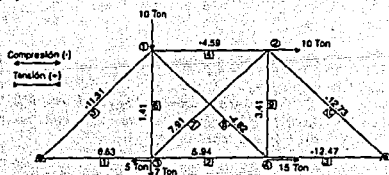
Este resultado se compara con el obtenido por el método de rigideces.



Ejemplo no. 2  $EA = \text{Constante}$

1) Numerar nudos, barras y formar  $[F]$

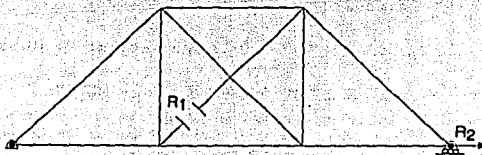
$$[F] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ -10 \\ 0 \\ -5 \\ -7 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



2) y 3) Ecuación de equilibrio y selección de redundantes

$F_{x1}$	0	0	0	-1	0.707	0	0	-0.707	0	0	$p_1$
$F_{y1}$	0	0	0	0	0.707	1	0	0.707	0	0	$p_2$
$F_{x2}$	0	0	0	1	0	0	0.707	0	0	-0.707	$p_3$
$F_{y2}$	0	0	0	0	0	0	0.707	0	1	0.707	$p_4$
$F_{x3}$	1	-1	0	0	0	0	-0.707	0	0	0	$p_5$
$F_{y3}$	0	0	0	0	0	-1	-0.707	0	0	0	$p_6$
$F_{x4}$	0	1	-1	0	0	0	0	0.707	0	0	$p_7$
$F_{y4}$	0	0	0	0	0	0	0	-0.707	-1	0	$p_8$
$H_2$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.707	$p_{10}$

Para hacer isostática esta estructura deberían de cortarse dos barras para que  $N^{\circ}D = N^{\circ}B$ . Si lo anterior se hiciera, tendríamos entonces una estructura inestable. Por consiguiente solo escogemos una barra (barra 7) pero además damos un grado de libertad a cualquiera de los apoyos (apoyo derecho en x).



4) Obtener  $[a_0^T]$  y  $[a_2^T]$ 

Para este caso especial observamos que solo la columna 7, que corresponde a  $R_2$ , forma la matriz  $[a_2^T]^T$  ya que, según la estructura primaria propuesta, la matriz de equilibrio solo presenta una incógnita. La redundante  $R_2$  se obtiene al incluir a esta como una carga externa en el lugar donde se ha liberado al apoyo; de esta forma se hace no singular a la matriz  $[a]$ . Por lo tanto:

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0.707 & 0 & -0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.707 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 \end{bmatrix} ; [a_2^T] = \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \\ 0.707 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5) y 6) Obtener  $[b_0]$ ,  $[b_2]$  y  $[f]$ 

La obtención de  $[b_0]$  según ecuaciones 7.3 y 7.5 solo nos dará una columna de esta matriz, la cual esta asociada a  $R_1$ . La segunda columna de  $[b_0]$  se obtiene de  $[a_2^T]^{-1}$  y corresponde a la última columna de esta matriz, la cual como es obvio, se asocia a  $R_2$ , cuando se expresan las fuerzas en las barras en función de las fuerzas  $\{p\}$  por lo tanto:

$$[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 & -0.667 & 0.667 & -0.333 & 1 & -0.667 & 1 & -0.333 & 1 \\ 0.667 & -0.667 & 0.667 & -0.333 & 0 & -0.667 & 1 & -0.333 & 1 \\ 0.333 & -0.333 & 0.333 & -0.667 & 0 & -0.333 & 0 & -0.667 & 1 \\ -0.333 & 0.333 & 0.667 & 0.667 & 0 & 0.333 & 0 & 0.667 & 0 \\ 0.4714 & 0.9428 & 0.4714 & 0.4714 & 0 & 0.9428 & 0 & 0.4714 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4714 & 0.4714 & -0.4714 & -0.4714 & 0 & 0.4714 & 0 & -0.4714 & 0 \\ 0.333 & -0.333 & 0.333 & 0.333 & 0 & -0.333 & 0 & -0.667 & 0 \\ -0.4714 & 0.4714 & -0.4714 & 0.9428 & 0 & 0.4714 & 0 & 0.9428 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

$$[B_0] = [a_0^T]^{-1} [a_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.707 \\ 0 \\ -0.707 \\ 0 \\ -0.707 \\ 1 \\ -0.707 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Por lo tanto:} \quad [b_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.707 & 1 \\ 0 & 1 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ -1 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vease que en el caso de  $f_7$  queda en el último sitio del arreglo correspondiente a la matriz de flexibilidad de las barras.

$$[f] = \text{diag.} (3, 3, 3, 3, 4.243, 3, 4.243, 3, 4.243, 4.243) 1/EA$$

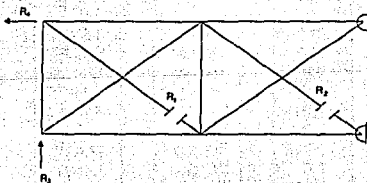
Debe señalarse que  $[b_0]$  tiene tantos renglones como elementos tiene la estructura y tantas columnas como redundantes haya, internas y externas. Esto quiere decir que los últimos renglones, tanto de  $[b_0]$  como de  $[b_2]$  se asocian a las barras redundantes solamente.



2) y 3) Ecuación de equilibrio y selección de redundantes.

$$\begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \\ Fy_3 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.8 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \end{Bmatrix}$$

Como en el caso anterior, en este problema se escogen como redundantes solo 2 barras para mantener la estabilidad y también dos reacciones para hacer completamente isostática a la estructura.



4) Obtener  $[a_0^T]$  y  $[a_R^T]$

Las dos últimas columnas corresponden a  $[a_R^T]$  y el resto a  $[a_0^T]$ .

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [a_R^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.8 & 0 \\ -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 0 & -0.8 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0 \\ -0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

5) y 6) Obtención de  $[b_0]$ ,  $[b_R]$  y  $\{f\}$

Las dos primeras columnas de  $[b_0]$  se obtienen según ecuaciones 7.3 y 7.5. Las otras dos son las 2 últimas columnas de  $[a_0^T]^{-1}$ .

$$[b_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1.333 & 0 & 0 & 1.333 & 0 \\ -1 & -1 & 1.333 & 2.667 & 0 & 1.333 & 2.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1.333 & -1 & 0 & -1.333 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.667 & 0 & 0 & -1.667 & 0 \\ 0 & 0 & -1.667 & -1.667 & 0 & -1.667 & -1.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [b_R] = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 & 1.333 & 0 \\ 0 & -0.8 & 2.667 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -0.8 & -1.333 & -1 \\ -0.6 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & -0.6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1.667 & 0 \\ 0 & 1 & -1.667 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





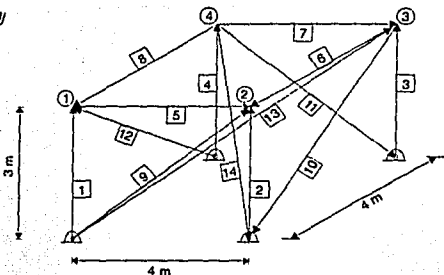




Ejemplo no. 9  $EA = \text{Constante}$

1) Numerar nudos, barras y obtener  $[F]$

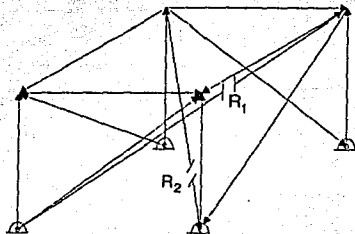
$$[F] = \begin{Bmatrix} 10 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ 20 \\ 18 \\ 0 \\ -9 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



2) y 3) Ecuaciones de equilibrio y selección de redundantes y 4) Formar  $[a_0^T]$  y  $[a_R^T]$

$$\begin{matrix}
 \begin{matrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{matrix} \\
 = \\
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & -0.625 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.625 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.469 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.625 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & -0.625 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.469
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14}
 \end{matrix}$$

$$[F] = [a_0^T] [a_R^T] \left\{ \begin{matrix} p \\ R \end{matrix} \right\}$$



La matriz de equilibrio  $[a^T]$  puede obtenerse formando  $[a]$  según el método de rigideces, por consideraciones de equilibrio o se puede consultar el apartado 8.A.

5) y 6) Obtener  $[b_0]$ ,  $[b_R]$  y  $[f]$  (ecuaciones 7.3, 7.5' y 7.9 respectivamente.)

$$[f] = \text{diag. } (3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6.403, 6.403)1/E A$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -0.75 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.75 & 0 & 0 & -0.75 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.75 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [b_0] = \begin{bmatrix} 0 & -0.180 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7) y 8) Plantear ecuación 7.14 y obtener  $[R]$

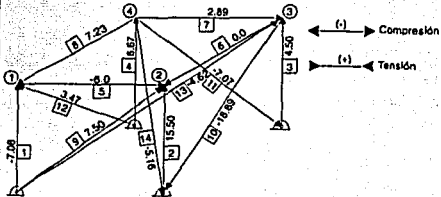
$$\begin{bmatrix} 14.725 & -3.0492 \\ -3.0492 & 14.725 \end{bmatrix} 1/E A \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -52.2435 \\ -61.9413 \end{Bmatrix} \text{VEA} \Rightarrow [R] = \begin{Bmatrix} -4.6170 \\ -5.1626 \end{Bmatrix}$$

$$[F] \quad (R) = \quad \cdot (c)$$

9) Obtener las fuerzas finales.

$$\begin{bmatrix} -9.5 \\ 15.5 \\ 4.5 \\ 4.5 \\ -6.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 4 \\ 7.5 \\ -22.5 \\ -7.5 \\ 7.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.4214 \\ 0 \\ 0 \\ 2.1655 \\ 0 \\ 2.8858 \\ 3.2268 \\ 7.5 \\ 3.6061 \\ 0.4261 \\ -4.0322 \\ -4.5173 \\ -5.1629 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.0786 \\ 15.5 \\ 4.5 \\ 6.665 \\ -6 \\ 0 \\ 2.8858 \\ 7.2268 \\ 7.5 \\ -18.8939 \\ -7.0739 \\ 3.4678 \\ -4.6173 \\ -5.1629 \end{bmatrix}$$

$$[b_0] (F) + [b_0] (R) = (p)$$

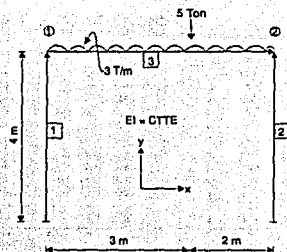


## 7.4.3 Marcos planos

Ejemplo no. 4  $EA = 2EI$   $EI = \text{Constante}$ 1) Numerar nudos, barras y formar  $\{F\}$  y  $\{P_F\}$ 

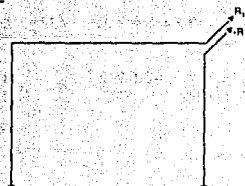
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9.26 \\ -8.65 \\ 0 \\ -10.74 \\ 9.85 \end{Bmatrix}; \quad \{P_F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10.74 \\ -9.85 \end{Bmatrix}$$

(Igual que en rigideces)



2) y 3) Ecuación de equilibrio y selección del lugar del desbloqueo.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{B1} \\ p_{By1} \\ M_{B1} \\ p_{B2} \\ p_{By2} \\ M_{B2} \\ p_{B3} \\ p_{By3} \\ M_{B3} \end{Bmatrix}$$

Se introduce un desbloqueo en el nudo 2 el cual genera la redundante  $R_x$  que es igual a:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{Fy1} \\ R_{Fy1} \\ R_{M1} \end{Bmatrix}$$

4) Obtener  $\{a_{(i)}\}$ 

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{M1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{B1} \\ p_{By1} \\ M_{B1} \\ p_{B2} \\ p_{By2} \\ M_{B2} \\ p_{B3} \\ p_{By3} \\ M_{B3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix} = \{a_{(i)}\}^T \quad (p)$$

5) y 6) Obtener  $[a_{(i)}]^{-1}$ ,  $[b_o]$ ,  $[b_R]$  y  $\{f\}$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline p_{B11} \\ \hline p_{B12} \\ \hline M_{B1} \\ \hline p_{B22} \\ \hline p_{B23} \\ \hline M_{B2} \\ \hline p_{B32} \\ \hline p_{B33} \\ \hline M_{B3} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline F_{x1} \\ \hline F_{y1} \\ \hline M_1 \\ \hline F_{x2} \\ \hline F_{y2} \\ \hline M_2 \\ \hline F_{x3} \\ \hline F_{y3} \\ \hline M_3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Porque  $[a_{(i)}]^{-1} = [[b_o] [b_R]]$

$$\{p\} = \begin{array}{|c|} \hline [b_o] \\ \hline [b_R] \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \{F\} \\ \hline \{R\} \\ \hline \end{array}$$

$$\{f\} = \text{diag. } (J_{BB1}, J_{BB2}, J_{BB3}) \quad ((J) = [T^T] \{J\} [T])$$

$$[J'_{BB1}] = [J'_{BB2}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 21.333 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{VEI} ; [J'_{BB3}] = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 41.667 & 12.5 \\ 0 & 12.5 & 5 \end{bmatrix} \text{VEI}$$

Entonces:

$$[J_{BB1}] = [J_{BB2}] = \begin{bmatrix} 21.333 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{VEI} ; [J_{BB3}] = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 41.667 & 12.5 \\ 0 & 12.5 & 5 \end{bmatrix} \text{VEI}$$

Se omite escribir  $\{f\}$  por ahorro de espacio.

7) y 8) Plantear 7.14 y obtener  $\{R\}$

$$\begin{bmatrix} 45.1667 & -40 & -16 \\ -40 & 145.667 & 32.5 \\ -16 & 32.5 & 13 \end{bmatrix} \cdot 1/EA \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -148.0 \\ 170.04 \\ 74 \end{Bmatrix} \cdot 1/EA \Rightarrow \{R\} = \begin{Bmatrix} -2.2345 \\ -0.2322 \\ 3.5227 \end{Bmatrix}$$

$$\{J\} \quad \{R\} = -\{c\}$$

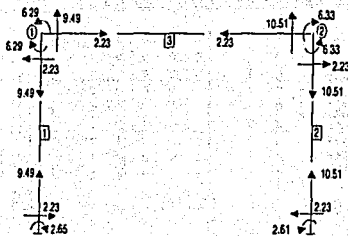
9) Obtención de  $\{p_{x1}\}$  y  $\{p\} = \{p_{x1}\} + \{p_{x2}\}$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -9.26 \\ \hline -9.55 \\ \hline 0 \\ \hline -10.74 \\ \hline 9.85 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline -2.2345 \\ \hline -0.2322 \\ \hline 2.2345 \\ \hline 0.2322 \\ \hline -3.5227 \\ \hline -2.2345 \\ \hline -0.2322 \\ \hline 3.5227 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -2.2345 \\ \hline -9.4922 \\ \hline -8.2687 \\ \hline 2.2345 \\ \hline -10.5078 \\ \hline 6.3273 \\ \hline -2.2345 \\ \hline -0.2322 \\ \hline 3.5227 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 10.74 \\ \hline -9.85 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -2.2345 \\ \hline -9.4922 \\ \hline -8.2687 \\ \hline 2.2345 \\ \hline -10.5078 \\ \hline 6.3273 \\ \hline -2.2345 \\ \hline 10.5078 \\ \hline -6.3273 \\ \hline \end{array}$$

$$[b_o] \{F\} + [b_R] \{R\} = [p_{x1}] + [p_{x2}] = \{p\}$$

Las fuerzas en A se obtienen con la expresión 5.6a para las barras 1 y 2. En el caso de la barra 3 hay que considerar también las cargas sobre la barra.

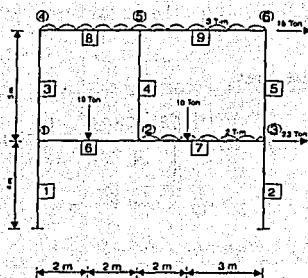
Comparando resultados con rigideces son los mismos (solo momentos)



Ejemplo no. 5  $EI = \text{Constante}$  ;  $EA = 2EI$

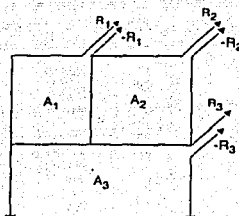
1) Numerar nodos, barras y formar  $[F]$  y  $[P_{12}]$

$$[F] = \begin{bmatrix} 5.1115 \\ -5 \\ -5 \\ 11.50 \\ -16.54 \\ -6.367 \\ 6.3685 \\ -8.46 \\ 8.967 \\ 3.333 \\ -6 \\ -4 \\ 7.50 \\ -13.50 \\ -2.25 \\ 4.167 \\ -7.5 \\ 6.25 \end{bmatrix} ; [P_{12}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \\ 8.46 \\ -8.967 \\ 0 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \\ 7.5 \\ -6.25 \end{bmatrix}$$



2) Por ahorro de espacio se omiten los siguientes pasos y solo se presentan los resultados que se deben obtener siguiendo la secuencia de los anteriores problemas.

$$A_i = \text{Anillo } i \quad [R_i] = \begin{bmatrix} R_{F,i1} \\ R_{F,i2} \\ R_{M,i} \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h_3 & 0 & 0 & -h_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_4 & 0 & 1 & -h_7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -h_5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{B1} \\ p_{B2} \\ p_{B3} \\ p_{B4} \\ p_{B5} \\ p_{B6} \\ p_{B7} \\ p_{B8} \\ p_{B9} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix} = [a_{ij}]^T \quad (p)$$

$$[F_{BB1}] = [F_{BB2}] = \begin{bmatrix} 21.333 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vee EI$$

$$[h_1] = [h_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F_{BB3}] = [F_{BB4}] = [F_{BB5}] = \begin{bmatrix} 41.667 & 0 & -12.5 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ -12.5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \vee EI$$

$$[h_3] = [h_4] = [h_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F_{BB6}] = [F_{BB8}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 21.333 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \vee EI$$

$$[h_6] = [h_8] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F_{BB7}] = [F_{BB9}] = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 41.667 & 12.5 \\ 0 & 12.5 & 5 \end{bmatrix} \vee EI$$

$$[h_7] = [h_9] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[J] = [b_R]^T [f] [b_R]$$

$$-[b_R]^T [f] [b_0] [F]$$

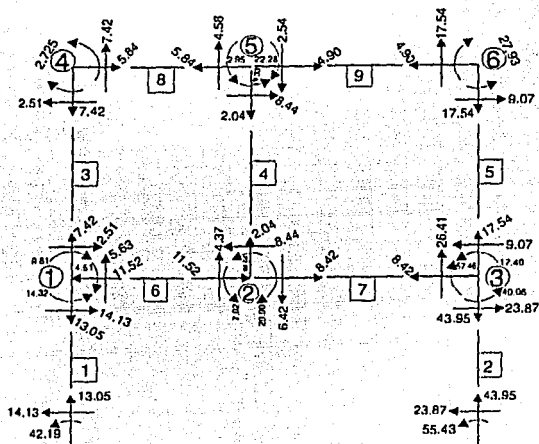
187.3334									
-90	127.6667				SI				
-45	36	18				ME			
-41.6667	0	12.5	213.3334				TRI		
62.5	-2.5	-25	-125	213.3334				CO	
12.5	0	-5	-50	50	20				
-2	0	0	-2.5	0	0	47.1667			
140	-61.3333	-28	62.5	-41.6667	-12.5	-72	571		
20	-8	-4	25	-12.5	-5	-16	76.5	17	

$$\begin{Bmatrix} 3663.7241 \\ -1358.568 \\ -736.466 \\ 599.667 \\ 45.187 \\ -82.513 \\ -2858.793 \\ 17768.061 \\ 2193.563 \end{Bmatrix} \vee EI$$

$$[R] = \begin{Bmatrix} -5.840 \\ -1.420 \\ 6.954 \\ -4.898 \\ 10.042 \\ -21.678 \\ -17.484 \\ 35.493 \\ -31.091 \end{Bmatrix}$$

31.611	-17.484	14.127	0	14.127
-48.540	35.493	-13.047	0	-13.047
-274.027	288.346	14.319	0	14.319
8.369	17.484	23.873	0	23.873
-8.460	-35.493	-43.953	0	-43.953
8.967	-5.840	40.058	0	40.058
3.333	-5.840	-2.507	0	-2.507
-6.0	-1.420	-7.420	0	-7.420
-4.0	1.275	-2.725	0	-2.725
7.5	0.942	8.442	0	8.442
-13.5	11.462	-2.038	0	-2.038
-2.25	21.579	19.329	0	19.329
4.167	4.898	9.065	0	9.065
-7.5	-10.042	-17.542	0	-17.542
6.25	21.678	27.928	0	27.928
23.167	-11.644	11.523	0	11.523
-37.54	36.913	0.627	5	4.373
-98.202	110.219	12.017	-5	7.017
4.167	-12.586	-8.419	0	-8.419
-7.5	25.451	17.951	8.46	26.411
-14.585	-33.905	-48.490	-8.97	-57.458
0	-5.840	-5.840	0	-5.840
0	-1.420	-1.420	6	4.580
0	6.954	6.954	-4	2.854
0	-4.898	-4.898	0	-4.898
0	10.042	10.042	7.5	17.542
0	-21.678	-21.678	-6.15	-27.928

$$[b_1] \{F\} + [b_2] \{R\} = [p_1] + [p_2] = \{p\}$$







$\{p_{Bx1}\}$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	$\{F_{x1}\}$
$\{p_{By1}\}$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	$\{F_{y1}\}$
$\{M_{B1}\}$	0	0	1	-3	4	1	0	8	1	4	8	1	$\{M_1\}$
$\{p_{Bx2}\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	$\{F_{x2}\}$
$\{p_{By2}\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	$\{F_{y2}\}$
$\{M_{B2}\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	0	-1	$\{M_2\}$
$\{p_{Bx3}\}$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	$\{F_{x3}\}$
$\{p_{By3}\}$	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	$\{F_{y3}\}$
$\{M_{B3}\}$	0	0	0	0	0	1	3	4	1	7	4	1	$\{M_3\}$
$\{p_{Bx4}\}$	0	0	0	0	0	1	3	4	1	7	4	1	$\{R_{x1}\}$
$\{p_{By4}\}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	$\{R_{y1}\}$
$\{M_{B4}\}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	$\{R_{M1}\}$
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	0	1	

$$\{p\} = \quad \quad \quad \{[b_0]\} \quad \quad \quad \{[b_R]\} \quad \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} F \\ R \end{array} \right\}$$

$$[\mathcal{J}_{BB1}] = [\mathcal{J}_{BB2}] = \begin{bmatrix} 21.333 & 0 & -8 \\ 0 & 0.08866 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vee EI$$

$$[\mathcal{J}_{BB4}] = \begin{bmatrix} 15.0653 & -19.9510 & -7.5 \\ -19.9510 & 26.7034 & 10 \\ -7.50 & 10 & 5 \end{bmatrix} \vee EI$$

$$[\mathcal{J}_{BB4}] = \begin{bmatrix} 15.0633 & -19.9510 & 7.5 \\ 19.9510 & 26.7034 & 10 \\ -7.5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \vee EI$$

7) y 8) Plantea 7.14 y obtener  $\mathcal{R}$

$$\begin{bmatrix} 352.797 & 284 & 71 \\ 284 & 469.584 & 72 \\ 71 & 72 & 18 \end{bmatrix} 1/EI \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{M1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 832.423 \\ 2574.131 \\ 333.1667 \end{bmatrix} 1/EI \Rightarrow \{R\} = \begin{Bmatrix} -6.6225 \\ 6.8369 \\ 17.2840 \end{Bmatrix}$$

$$\{J\} \quad \quad \quad \{R\} = \quad \quad \quad \{c\}$$

9) Obtener  $P_{12}$  y  $\{P\} = \{P_{12}\} + \{P_{12}\}$

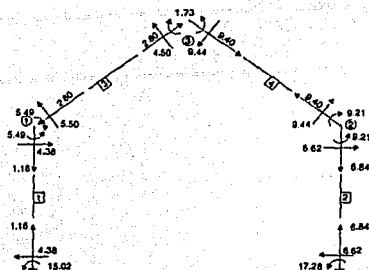
$$\begin{bmatrix} 11.375 \\ -8 \\ -40.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ -4 \\ 4.1667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6.6225 \\ 6.8369 \\ 45.8488 \\ 6.6225 \\ -6.8369 \\ 9.2061 \\ -6.5225 \\ 6.8369 \\ -1.7269 \\ -6.6225 \\ 6.8369 \\ -9.2061 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7525 \\ -1.1631 \\ 4.7388 \\ 6.6225 \\ -6.8369 \\ 9.2061 \\ 1.3775 \\ 2.8369 \\ 2.4405 \\ -6.6225 \\ 6.8369 \\ -9.2061 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.375 \\ 0 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \\ -4.1667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3775 \\ -1.1631 \\ 5.4888 \\ 6.6225 \\ -6.8369 \\ 9.2061 \\ -1.6225 \\ 6.8369 \\ 1.7262 \\ -6.6225 \\ 6.8369 \\ 9.2061 \end{bmatrix}$$

$$\{b_0\} \{F\} + \{b_R\} \{R\} = \{c_1\} + \{c_2\} = \{p\}$$

Para obtener las fuerzas en el extremo A de cada barra utilizamos la ecuación 5.6a.

En el caso de las barras 3 y 4 transformamos las fuerzas al eje local con la ecuación 3.4.

Comparamos con rigideces.



Como parte final, obtenemos la matriz de flexibilidad para el ejemplo no. 4 según lo expuesto en 7.3.1.

Ejemplo no. 4

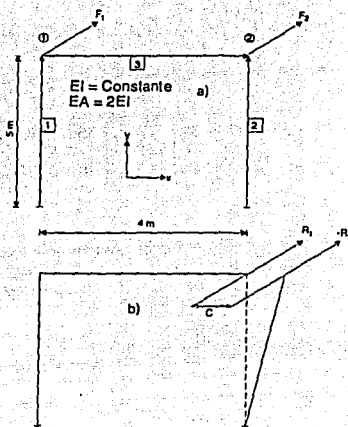
- 1) Selección de redundantes y plantear ecuación 7.25

$$(c) = \begin{bmatrix} \partial C_i \\ \partial R_i \end{bmatrix} (R_i)$$

- 2) Obtención de  $[F_{00}]$  y  $\{h_i\}$  globales para cada barra.

$$[F] = [T^T] [F_{00}] [T]$$

$$\{h\} = [T^T] \{h_i\} [T]$$



Locales

$$F_{001} = [F_{002}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 21.333 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \vee EI$$

$$\{h_i\} = \{h_i'\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F_{BB3}] = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 41.667 & 12.5 \\ 0 & 12.5 & 5 \end{bmatrix} \text{VEI}$$

$$[h_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Globales

$$[F_{BB1}] = [F_{BB2}] = \begin{bmatrix} 21.333 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{VEI}$$

$$[h_1] = [h_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F_{BB3}] = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 41.667 & 12.5 \\ 0 & 12.5 & 5 \end{bmatrix} \text{VEI}$$

$$[h_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3) Obtención de flexibilidades

Por la suma de las diferente  $[F]$  para cada anillo (ecuación 7.29)

$$[F_{11}] = \left[ \frac{\partial c_1}{\partial R_1} \right] = [h_3^T] [F_{BB1}] [h_3] + [F_{BB3}] + [F_{BB2}]$$

$$\begin{bmatrix} 21.333 & 40 & 8 \\ 40 & 102 & 20 \\ 8 & 20 & 4 \end{bmatrix} \text{VEI} + \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 41.667 & 12.5 \\ 0 & 12.5 & 5 \end{bmatrix} \text{VEI} + \begin{bmatrix} 21.333 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{VEI}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 45.1667 & 40 & 16 \\ 40 & 145.667 & 32.5 \\ 16 & 32.5 & 13 \end{bmatrix} \text{VEI}$$

Que es la misma obtenida anteriormente. ■

### Temas especiales

#### 8.1 RELACIÓN ENTRE FLEXIBILIDADES Y RIGIDEZES Y ELECCIÓN DEL MÉTODO ADECUADO

Para poder establecer una relación entre flexibilidades y rigideces es preciso enmarcar los dos niveles de análisis que a esta parte se han tratado: primero a nivel elemento individual y segundo considerando todo el conjunto estructural.

En el primer caso, la comparación resulta lógica ya que en ambos casos (flexibilidad y rigidez), se expresa la relación tan estrecha que existe entre las fuerzas aplicadas en los extremos de una barra y las correspondientes deformaciones en dichos extremos. Esta relación queda como:

$$\{p\} = [K] \{d\} \quad \text{Rigidez}$$

$$\{d\} = [F] \{p\} \quad \text{Flexibilidad}$$

Y como se vio en el capítulo 4, la relación entre estas dos ecuaciones es:

$$[K] = [F]^{-1} \quad \text{ó} \quad [F] = [K]^{-1}$$

En el segundo caso, observamos que los dos métodos satisfacen los principios básicos del análisis, continuidad y equilibrio, aun cuando no lo hacen el mismo orden, ya que en el método de rigidez se satisface el equilibrio mientras que el método de flexibilidad satisface la continuidad de deformaciones. Como resultado de esto, el método de rigidez da los desplazamientos en los nudos y el método de flexibilidad da las fuerzas en las barras. Según esto y lo mencionado en la introducción del capítulo 7, el método de flexibilidad parece el más indicado ya que da prioridad a la obtención de las fuerzas en las barras. Sin embargo, en el método de rigidez el trabajo necesario para obtener las fuerzas es mínimo por lo que los métodos no pueden compararse según esta base.

La diferencia más evidente entre los dos métodos estriba en que el método de rigidez no tiene opciones análogas a la selección de redundantes del método de flexibilidad. Por lo tanto, el método de rigidez sigue una trayectoria definida, sistemática y sin alternativas a lo largo de su solución. Sin embargo, algunos estructuralistas lo consideran desventajoso y prefieren el método de flexibilidad que ofrece la libertad de seleccionar las redundantes. Si por otro lado, se considera que puede existir un gran número de alternativas, entonces será difícil seleccionar la mejor y el análisis para determinar tal selección puede ser muy costoso.

Puesto que un alto porcentaje de trabajo se realiza en la solución de ecuaciones simultáneas, el orden final de la matriz de rigidez global y la matriz de flexibilidad global será aparentemente el principal factor que deberá considerarse. Para estructuras complicadas que involucren muchos elementos y muchas liberaciones es más fácil estimar el grado de libertad que el grado de indeterminación.

En el caso del método de flexibilidad la selección de las redundantes será muy importante ya que a ella va ligado el grado de exactitud en el análisis (ver referencia 2 de la bibliografía), tema que no se trata en este trabajo. A este respecto, las limitaciones de las computadoras tales como aproximaciones o truncaciones pueden ser significativos.

Podemos concluir entonces que el método de rigidez es el más directo y adecuado debido a su accesibilidad para ser programado. La mayoría de los paquetes (programas) sobre análisis estructural actuales, utilizan los principios del método de rigidez debido a su versatilidad indiscutible ya que el mismo programa es utilizado en la solución de estructuras diversas tales como marcos o armaduras.

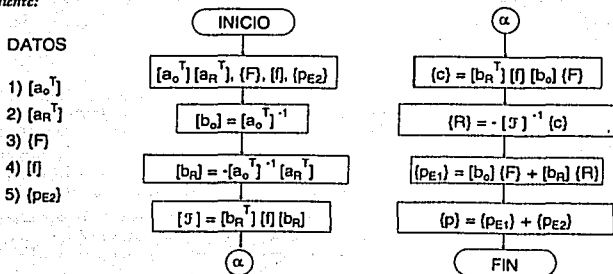
Para utilizar un paquete típico de análisis estructural que verse sobre el método de rigideces se debe proporcionar la siguiente información sobre la estructura:

- Sección y/o dimensiones de las barras
- Módulo de elasticidad
- Módulo de Poisson
- Módulo al esfuerzo cortante
- Momento de inercia de las barras
- Área de cortante de las barras
- Coordenadas de los nudos
- Inclinación de las barras respecto al eje global
- Número de elementos
- Condiciones de carga

Con estos datos suministrados en forma conveniente a la computadora y el paquete previamente introducido, la computadora da los resultados en un tiempo por demás corto.

El método de flexibilidad, debido a la multitud de opciones que para cada problema presenta, no es tan fácil que pueda ser programado y utilizado como paquete.

Para este caso es mejor utilizar paquetes de operaciones matriciales con operaciones tales como suma, multiplicación, transposición, inversión, etc. y suministrar como datos las matrices conocidas que, previamente y en forma manual el calculista debe obtener. Posteriormente se realiza el procedimiento siguiente:



Al igual que el método de rigidez, el método de flexibilidad utilizado en esta forma presenta la desventaja de que las matrices manejadas contienen muchas ceros. Sin embargo resulta más adecuado utilizar el método en esta forma ya que si obtenemos la matriz de flexibilidad en forma directa, de cualquier forma debemos invertir otra matriz (la matriz de equilibrio  $[a_0]$ ) para obtener  $\{b_0\}$   $\{F\}$ . Esto implica a fin de cuentas un trabajo semejante y no conlleva gran ventaja.

El presentar la forma directa de obtener la matriz de flexibilidad global de una estructura, es decir por medio de la flexibilidad de cada barra, tiene como finalidad conocer más a fondo este método y observar la semejanza que tiene con el método de rigidez en cuanto se refiere a la forma de ensamble de  $\{F\}$  y  $\{K\}$  globales respectivamente.

Finalmente podemos decir que, aunque un método tenga aparentes ventajas sobre el otro, el objetivo de este trabajo es presentar para su consideración los principios básicos de "Los dos principales métodos matriciales" utilizados actualmente y que son los que más exactamente se apegan al comportamiento real de una estructura.

## 8.2 RIGIDEZ DE BARRAS CON DISCONTINUIDAD

En muchas ocasiones al analizar una estructura, el calculista se encuentra con el hecho de que muchos de los diseños estructurales utilizados en ingeniería presentan elementos cuya sección no es constante a lo largo de su eje longitudinal. Por esta razón es importante evaluar la matriz de rigidez para barras de este tipo ya que, finalmente, la matriz de rigidez global de una estructura se obtiene por la rigidez de cada elemento que la forma.

En la figura 8.1 se pueden observar las dos formas comunes de elementos discontinuos o no prismáticos que trataremos en esta parte.

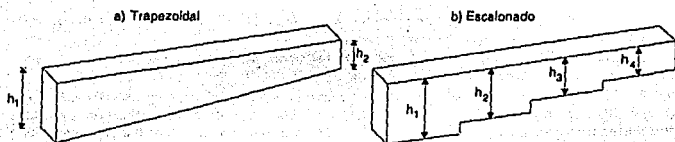
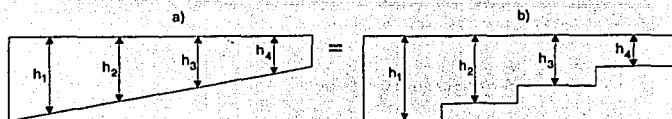


Figura 8-1.

Sea que una estructura tenga elementos prismáticos o no prismáticos, su análisis es básicamente el mismo. El único requisito es el uso de las matrices de rigidez apropiadas de cada elemento de la estructura. Hasta ahora, solo se han analizado estructuras con elementos prismáticos y el conocimiento adquirido en su análisis también es válido para estructuras no prismáticas.

Es posible interpretar un elemento no prismático como elementos prismáticos pequeñas unidos en serie. Sin embargo, es bastante improbable que tal interpretación represente el caso real exactamente (figura 8.2).

Los errores inducidos serían muy difíciles de estimar y se aumentaría el tamaño de la matriz de rigidez final a medida que se aumenta el número de segmentos. Sin embargo, si se dispone de un programa o la variación de las propiedades de los elementos no es integrable, esta es la única forma de analizar una estructura no prismática.



Ancho constante e igual para ambos casos

Figura 8-2

Obtener la matriz de rigidez de un elemento no prismático por integración directa (como la matriz de flexibilidad, capítulo 4) es muy tedioso y tardado ya que las expresiones a integrar, que son función de  $A$ ,  $I$ ,  $E$ ,  $A_c$ , son muy complicadas. En la mayoría de los casos es más fácil obtener primero la matriz de flexibilidad y luego invertirla para obtener la matriz de rigidez. A continuación presentamos esta técnica para las dos formas comunes de elementos discontinuos.

### 8.2.1 Rigidez de elementos escalonados

Con frecuencia parece innecesario que la resistencia de un elemento sea la misma desde un extremo hasta el otro. Se desea que el elemento sea más resistente en algunas partes debido a que las fuerzas internas desarrolladas en el elemento no son constantes de un extremo a otro. Con el fin de conseguir una distribución de esfuerzos aproximadamente uniforme, la resistencia del elemento (área y momento de inercia) requiere que siga tanto como sea posible la misma variación de las fuerzas internas. En lugar de usar secciones transversales constantes (desperdicio de material) o variaciones parabólicas (mayor costo de construcción), lo que generalmente se emplea en la práctica son cambios escalonados en resistencia.

Como se señaló, para obtener la matriz de rigidez de un elemento es mejor obtener primero la matriz de flexibilidad y luego invertirla para obtener la primera. Utilizando esta técnica existen 2 formas de hallar la matriz de flexibilidad de una barra, por integración y por medio de la matriz de flexibilidad de cada tramo de la barra. En ambos casos, el análisis del sistema debido a fuerza axial en los extremos puede separarse del resto del análisis a causa de que el desplazamiento desarrollado en los extremos originados por las fuerzas axiales es:

$$dx_B = [\Sigma VEA] P x_B \quad 8.1$$

Como resultado, el análisis restante de un elemento  $A-B$  se hará sin considerar las fuerzas y los alargamientos axiales.

### 8.2.1a Flexibilidad por integración

Para elementos escalonados, las expresiones a integrar involucran elementos constantes por partes y no es tan difícil como para elementos prismáticos generales. Las expresiones a integrar se obtienen del capítulo 4 y son:

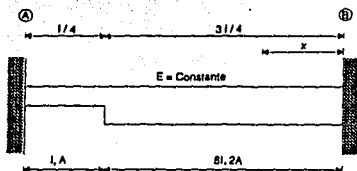
$$[F_{BB}] = \begin{bmatrix} \int \frac{x^2 dx}{EI} + \frac{dx}{GA_c} & \int \frac{xdx}{EI} \\ \int \frac{xdx}{EI} & \int \frac{dx}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$



Si despreciamos la contribución del cortante eliminamos la segunda integral del elemento  $\mathcal{F}_{23}$ . La integración para este caso se realizaría de B hacia A.

## Ejemplo no. 9

Obtener la matriz de rigidez de la siguiente barra:



$$\mathcal{F}_{11} = \frac{1}{4EA} + \frac{31}{4(2EA)} = \frac{51}{8EA}$$

$$K_{11} = 1/\mathcal{F}_{11}$$

$$\mathcal{F}_{22} = \int_0^{3/4} \frac{x^2 dx}{8EI} + \int_{3/4}^1 \frac{x^2 dx}{EI} = \frac{323}{1536EI}$$

$$K_{22} = \mathcal{F}_{33} / \Delta$$

$$\mathcal{F}_{32} = \mathcal{F}_{23} = \int_0^{3/4} \frac{xdx}{8EI} + \int_{3/4}^1 \frac{xdx}{EI} = \frac{65}{256EI}$$

$$K_{32} = K_{23} = -\mathcal{F}_{32} / \Delta$$

$$\mathcal{F}_{33} = \int_0^{3/4} \frac{dx}{8EI} + \int_{3/4}^1 \frac{dx}{EI} = \frac{111}{32EI}$$

$$K_{33} = \mathcal{F}_{22} / \Delta$$

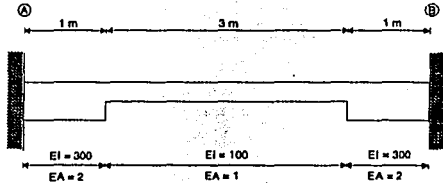
$$\Delta = \mathcal{F}_{22} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{32}^2$$

Finalmente

$$K = \begin{bmatrix} 1.6 EA/l & 0 & 0 \\ 0 & \frac{43.9714 EI}{l^3} & \frac{-32.4789 EI}{l^2} \\ 0 & \frac{-32.4789 EI}{l^2} & \frac{26.8992 EI}{l} \end{bmatrix}$$

## Ejemplo no. 10

Obtener la matriz de rigidez de la siguiente barra:



$$F_{11} = \frac{1}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = 4$$

$$F_{22} = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{300} + \int_1^4 \frac{x^2 dx}{100} + \int_4^5 \frac{x^2 dx}{300} = 0.2789$$

$$F_{32} = F_{23} = \int_0^1 \frac{xdx}{300} + \int_1^4 \frac{xdx}{100} + \int_4^5 \frac{xdx}{300} = 0.0917$$

$$F_{33} = \int_0^1 \frac{dx}{300} + \int_1^4 \frac{dx}{100} + \int_4^5 \frac{dx}{300} = 0.0367$$

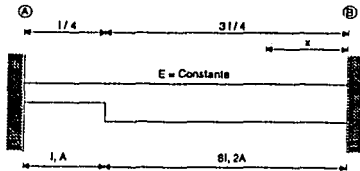
$$[F_{33}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2789 & 0.0917 \\ 0 & 0.0917 & 0.0367 \end{bmatrix} \Rightarrow [K_{BB}] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 20.1073 & -50.2682 \\ 0 & -50.2682 & 152.9435 \end{bmatrix}$$

### 8.2.1b Flexibilidad considerando cada tramo de la barra.

Este método es completamente análogo al descrito en el inciso 7.3.1.

Ejemplo no. 9.

Obtener la matriz de rigidez de la siguiente barra: (Para este caso  $I=8m$ )



$$\{F_{BB}\}_{TOTAL} = [h_2^T] \{F_{BB1}\} [h_2] + \{F_{BB2}\} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

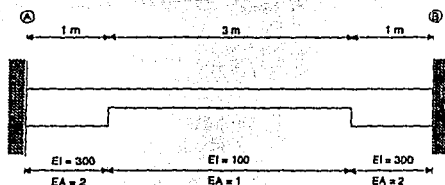
$$\{F_{BB}\}_{TOTAL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/EI & 0 & 0 \\ 0 & 2.667/EI & 2/EI \\ 0 & 2/EI & 2/EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/EI & 0 & 0 \\ 0 & 9/EI & 2.25/EI \\ 0 & 2.25/EI & 0.75/EI \end{bmatrix}$$

$$\{F_{BB}\}_{TOTAL} = \begin{bmatrix} 5/EI & 0 & 0 \\ 0 & 107.667/EI & 16.25/EI \\ 0 & 16.25/EI & 2.75/EI \end{bmatrix} \Rightarrow [K_{BB}] = \begin{bmatrix} 0.2EA & 0 & 0 \\ 0 & 0.08588 EI & -0.50749 EI \\ 0 & -0.50749 EI & 3.3624 EI \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar con el ejemplo resuelto por el método de integración si se hace  $l=8m$ .

Ejemplo no. 10

Obtener la matriz de rigidez de la siguiente barra.



Y por lo tanto:

$$\{F_{BB}\}_{TOTAL} = [h_2 \ h_3]^T \{F_{BB1}\} [h_2 \ h_3] + [h_3]^T \{F_{BB2}\} [h_3] + \{F_{BB3}\}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad h_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F_{BB}\}_{TOTAL} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 6/200 & 3/200 \\ 0 & 3/200 & 1/300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/100 & 1/200 \\ 0 & 1/200 & 3/100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/900 & 1/600 \\ 0 & 1/600 & 1/300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2789 & 0.0917 \\ 0 & 0.0917 & 0.0367 \end{bmatrix}$$

$$[K_{BB}] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 20.1073 & -50.2682 \\ 0 & -50.2682 EI & 152.9435 \end{bmatrix}$$

### 8.2.2 Rigidez para elementos trapezoidales

Por cuestiones de economía o estética, en la práctica muchas estructuras usan elementos trapezoidales. Especialmente en puentes continuos y en marcos simples, son muy comunes los elementos de altura variable. Las alturas de los elementos piramidales son mayores donde los momentos internos son máximos y menores donde los momentos son mínimos. Para ciertos elementos el adelgazamiento no se extiende a todo lo largo del mismo, figura 8.3b, o puede tener lugar en ambos extremos del claro. Estos elementos se denominan acartelados. Sin embargo, en la figura 8.3a, el adelgazamiento se extiende a todo lo largo de el elemento.

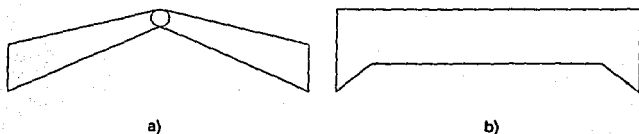


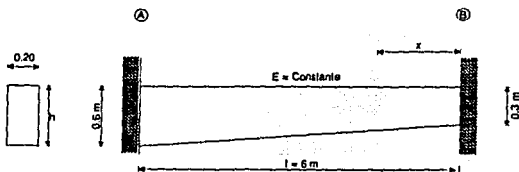
Figura 8-3.

La obtención de la matriz de rigidez para elementos de este tipo por integración, es larga y laboriosa. En vez de esto se considera como aproximación aceptable la idealización de estos elementos como escalonados y hacerlo así no acarrea mucha diferencia si el adelgazamiento es lineal o no. Tal idealización se realiza normalmente dividiendo la longitud adelgazada del elemento en  $R$  tramos iguales. Entonces el momento de inercia del elemento real en la mitad de cada segmento se toma como el momento de inercia de ese segmento. La exactitud de este análisis dependerá del número de tramos en que se divida la barra. Para cálculos manuales, dos o tres segmentos pueden dar resultados suficientemente aceptables.

Una vez hecha la idealización, el resto del análisis sigue pasos idénticos a los presentados en el caso de elementos escalonados.

#### Ejemplo no. 11

Obtener la matriz de rigidez para la siguiente barra. (Despreciar cortante)



a) Por integración:

- Variación del área de 0 a 6 m

$$A = 0.2h \quad ; \quad h = 0.05x + 0.30$$

$$A_x = 0.2(0.05x + 0.3) = 0.01x + 0.06$$

- Variación del momento de inercia de 0 a 6 m

$$I_x = \frac{0.2 h^3}{12} = \frac{0.2}{12} (0.05x + 0.30)^3$$

$$J_{11} = \int \frac{dx}{EA_x} = \int_0^6 \frac{dx}{(0.01x + 0.06) E} = \frac{100}{E} \ln(0.01x + 0.06) \Big|_0^6 = \frac{69.3147}{E}$$

$$J_{22} = \int \frac{x^2 dx}{EI_x} = \int_0^6 \frac{60x^2 dx}{(0.05x + 0.30)^3 E} =$$

$$\frac{60}{E} \left[ \frac{-360}{(0.05x + 0.30)^2} + \frac{4800}{(0.05x + 0.30)} + 8000 \ln(0.05x + 0.30) \right]_0^6 = \frac{32710.646}{E}$$

$$J_{32} = J_{23} = \int \frac{x dx}{EI_x} = \int_0^6 \frac{60 x dx}{(0.05x + 0.3)^3 E} =$$

$$\frac{60}{E} \left[ \frac{60}{(0.05x + 0.3)^2} - \frac{400}{(0.05x + 0.3)} \right]_0^6 = \frac{10000}{E}$$

$$J_{33} = \int \frac{dx}{EI_x} = \int_0^6 \frac{60 dx}{(0.05x + 0.3)^3 E} = \frac{60}{E} \left[ \frac{-10}{(0.05x + 0.3)^2} \right]_0^6 = \frac{5000}{E}$$

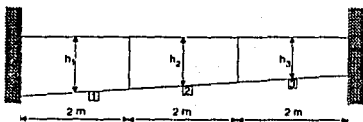
Entonces:

$$[J_{BB}] = \begin{bmatrix} 69.3147/E & 0 & 0 \\ 0 & 32710.646/E & 10000/E \\ 0 & 10000/E & 5000/E \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[K_{BB}] = \begin{bmatrix} 0.01443 E & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000787 E & -0.0001573 E \\ 0 & -0.0001573 E & 0.0005147 E \end{bmatrix}$$

• 6) Como elemento escalonado (3 tramos)

$$h2 = h3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 h_1 &= 0.55 \text{ m} & ; & & h_2 &= 0.45 \text{ m} & ; & & h_3 &= 0.35 \text{ m} \\
 I_1 &= 0.0027729 \text{ m}^4 & ; & & I_2 &= 0.0015188 \text{ m}^4 & ; & & I_3 &= 0.0007146 \text{ m}^4 \\
 A_1 &= 0.11 \text{ m}^2 & ; & & A_2 &= 0.09 \text{ m}^2 & ; & & A_3 &= 0.07 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

$$[J_{BB}]_{\text{TOTAL}} = [h_2 \ h_3]^T [J_{BB1}] [h_2 \ h_3] + [h_3]^T [J_{BB2}] [h_3] + [J_{BB3}]$$

$$[J_{BB}]_{\text{TOTAL}} = \begin{bmatrix} 18.1819 & 0 & 0 \\ 0 & 18272.086 & 3606.3327 \\ 0 & 3606.3327 & 721.26654 \end{bmatrix} 1/EI + \begin{bmatrix} 22.2222 & 0 & 0 \\ 0 & 12290.405 & 3950.4873 \\ 0 & 3950.4873 & 1316.8291 \end{bmatrix} 1/EI \\
 + \begin{bmatrix} 28.5714 & 0 & 0 \\ 0 & 3731.6914 & 2798.7685 \\ 0 & 2798.7685 & 2798.7685 \end{bmatrix} 1/EI$$

$$[J_{BB}] = \begin{bmatrix} 68.9754 & 0 & 0 \\ 0 & 34294.182 & 10355.589 \\ 0 & 10355.589 & 4836.8641 \end{bmatrix} 1/EI$$

$$[K_{BB}] = \begin{bmatrix} 0.01450 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000825 & -0.0001766 \\ 0 & -0.0001766 & 0.0005848 \end{bmatrix} E$$

Comparamos este resultado con el obtenido por el primer método y vemos que la aproximación es aceptable. En caso de querer una mejor aproximación dividimos el elemento en un mayor número de tramos.

Al obtener la matriz de rigidez (o flexibilidad) en elementos escalonados o trapezoidales, solo nos ocupamos de la rigidez (o flexibilidad) en el extremo B debido a un desplazamiento (o fuerza) inducido en el mismo extremo B. Debemos recordar, sin embargo, que la matriz de rigidez acoplada completa de una barra es:

$$M_{RA} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix}$$

Para conocer las demás contrapartes de esta matriz utilizamos las expresiones:

$$[K_{AA}] = [h] [K_{BB}] [h]^T ; [K_{AB}] = -[h] [K_{BB}] ; [K_{BA}] = -[K_{BB}] [h]^T$$

Cuya deducción se omite por ser trivial.

### 8.3 SIMPLIFICACIÓN POR SIMETRÍA Y ANTISIMETRÍA DEL SISTEMA DE SOLICITACIÓN

Los diseños estructurales en ingeniería son el conjunto de una serie de factores y requisitos que se conjugan para hacer de la estructura un elemento que combine satisfactoriamente la estética, la resistencia y un factor muy importante que es la simetría. Esta última se presenta cuando se puede ubicar un eje tal que divida a la estructura en dos partes exactamente iguales y encontradas cuyas propiedades y características son las mismas en uno y otro lado del eje de simetría.

Hay ciertos hechos y principios válidos solo para estructuras simétricas que no son válidos en otra forma. Por tanto, debe darse especial consideración a las propiedades de las estructuras de este tipo y usarlas en su análisis. En realidad, tales estructuras no son la minoría sino más bien la mayoría.

El método consiste en separar la estructura a través del eje de simetría en dos subestructuras y se analiza solamente una de ellas imponiendo determinadas condiciones en los puntos de corte de tal modo que no sea necesario considerar la otra mitad de la estructura.

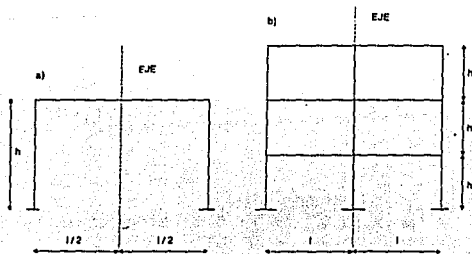


Figura 8-4.

Las condiciones que se imponen al punto de corte dependerán del tipo de carga que obre en la estructura existiendo dos tipos particulares de cargas a considerar simétricas y antisimétricas. Estas deben cumplir las siguientes condiciones respecto al eje de simetría.

a) Carga simétrica.

$$F_{x\text{ izq}} = -F_{x\text{ der}} \quad dx_1 = -dx_2$$

$$F_{y\text{ izq}} = F_{y\text{ der}} \quad dy_1 = dy_2$$

$$M_{\text{izq}} = -M_{\text{der}} \quad \varphi_1 = -\varphi_2$$

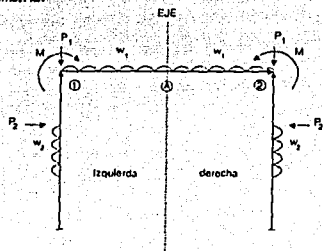


Figura 8-5a.

6) Carga antisimétrica.

$$F_{x\text{ izq}} = F_{x\text{ der}} \quad dx_1 = dx_2$$

$$F_{y\text{ izq}} = -F_{y\text{ der}} \quad ; \quad dy_1 = -dy_2$$

$$M_{\text{izq}} = M_{\text{der}} \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

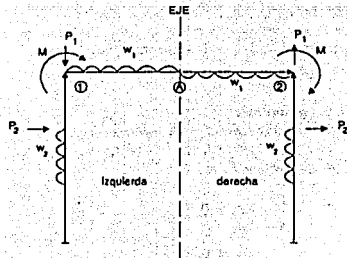


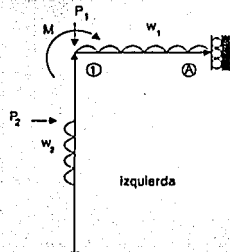
Figura 8-5b.

Para la figura 8.5a, con carga simétrica, el punto A debe satisfacer las siguientes condiciones y la subestructura por analizar será la siguiente:

$$dx_A = 0 \quad F_{x_A} \neq 0$$

$$dy_A \neq 0 \quad F_{y_A} = 0$$

$$\varphi_A = 0 \quad M_A \neq 0$$

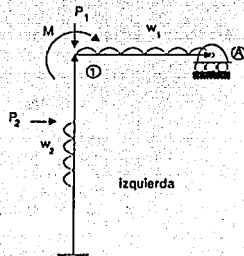


De la misma forma, para la figura 8.5b, con carga antisimétrica el punto A debe satisfacer las siguientes condiciones y la subestructura por analizar será la siguiente:

$$dx_A \neq 0 \quad F_{x_A} = 0$$

$$dy_A = 0 \quad ; \quad F_{y_A} \neq 0$$

$$\varphi_A \neq 0 \quad M_A = 0$$





Por otra parte, puede presentarse el caso de que el eje de simetría divida o pase sobre un elemento a lo largo de su longitud. En este caso las propiedades geométricas del elemento ( $A$ ,  $I$ ) se toman solo a la mitad, es decir  $A/2$ ,  $I/2$ , en la siguiente forma:

a) Carga simétrica

El elemento sobre el eje de simetría se acortará pero el punto  $A$  no se moverá respecto al eje  $x$  ni girará.

$$dx_A = 0 \quad F_{x_A} \neq 0$$

$$dy_A \neq 0 \quad ; \quad F_{y_A} = 0$$

$$\varphi_A = 0 \quad M_A \neq 0$$

b) Carga antisimétrica

El elemento sobre el eje de simetría gira en  $A$  pero no se acorta.

$$dx_A \neq 0 \quad F_{x_A} = 0$$

$$dy_A = 0 \quad F_{y_A} \neq 0$$

$$\varphi_A \neq 0 \quad M_A \neq 0$$

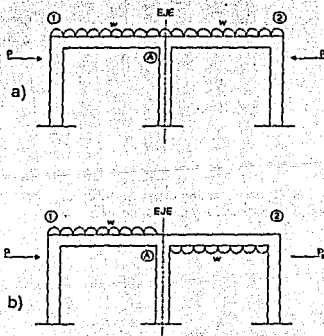


Figura 8-6.

La subestructura a analizar en cada caso se muestra en la figura 8.7.

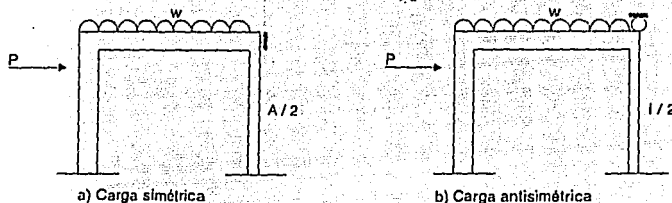


Figura 8-7.

Las ventajas de un análisis de esta naturaleza redundan en que se reduce la cantidad de ecuaciones simultáneas a resolver. Para la figura 8.5a se reduce de  $6 \times 6$  ecuaciones simultáneas a  $4 \times 4$ . En la figura 8.6b se reduce de  $6 \times 6$  ecuaciones simultáneas a  $5 \times 5$ . Para la figura 8.6a se reduce de  $9 \times 9$  a  $4 \times 4$  ecuaciones simultáneas. Para la figura 8.6b se reduce de  $9 \times 9$  a  $5 \times 5$  ecuaciones simultáneas.

En el caso de estructuras pequeñas la diferencia puede no ser muy considerable pero se vuelve bastante apreciable y ventajoso un análisis de este tipo para estructuras de gran tamaño.

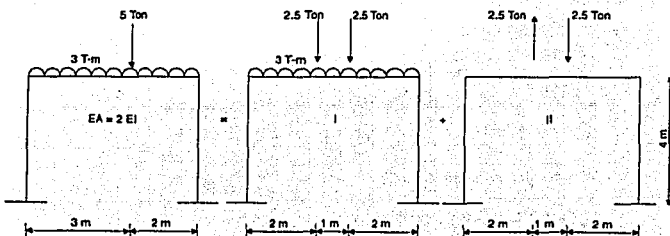
El procedimiento antes descrito no requiere modificaciones o alteraciones a los métodos de análisis ya estudiados. Los cambios se refieren más bien a la estructura.

El tratamiento de una estructura por medio de simetría y antisimetría crea algunas condiciones de apoyo poco comunes y a primera vista imprácticas si consideramos que en la realidad no se pueden generar condiciones de apoyo, como por ejemplo el que genera la carga simétrica. Sin embargo, tales apoyos son bastante útiles al realizar los cálculos en las subestructuras correspondientes.

Para poder trabajar con barras con apoyos poco comunes es necesario modificar su matriz de rigidez acoplada ya que las fuerzas que se producen en dichas barras son desconocidas. En el inciso 8.4.4, se trata con detalle este tema.

Para ilustrar el uso de este método resolvamos el ejemplo no. 1 ya resuelto.

Es importante mencionar que todo marco simétrico que contenga cargas cualesquiera, puede ser transformado en dos marcos, uno con carga simétrica y otro con carga antisimétrica. Así, para el ejemplo no. 1 nos queda que:



Ahora procedemos a resolver cada marco utilizando los conceptos de simetría y antisimetría respectivamente.

### 1) Marco con carga simétrica.

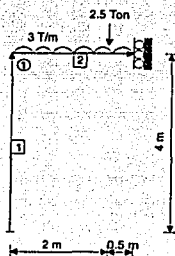
#### 1.- Matriz de rigidez global.

$$[K] = [K_{BB1} + K_{AA2}]$$

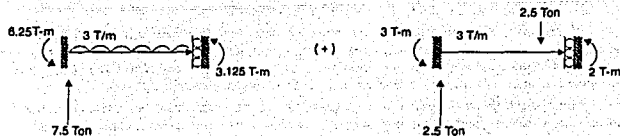
#### 2.- Rigideces globales. (Véase tabla 8.1 inciso 8.4.4)

$$[K_{BB1}] = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI;$$

$$[K_{AA2}] = \begin{bmatrix} 0.80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} EI$$



## 3.- Momentos de empotramiento (capítulo 4)



$$[F] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ -9.25 \end{Bmatrix} ; \quad [P_{E2}] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.25 \\ 9.25 \end{Bmatrix}$$

4.- Obtención de  $\{d\}$ 

$$\begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ -9.25 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{d\} = \begin{Bmatrix} 2.7932 \\ -20.0 \\ -7.3553 \end{Bmatrix} 1/EI$$

$$[K] \{d\} = [F]$$

## 5.- Momentos finales (omitimos los EI)

$$M_{A1} = 2/4 (-7.3553) + 6/16 (2.7932) = -2.6302 \text{ T-m}$$

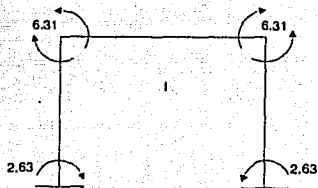
$$M_{B1} = 4/4 (-7.3553) + 6/16 (2.7932) = -6.3080 \text{ T-m}$$

$$M_{A2} = 1/2.5 (-7.3553) = -2.9420 \text{ T-m}$$

$$M_{B2} = -1/2.5 (-7.3553) = 2.9420 \text{ T-m}$$

$$\begin{Bmatrix} -2.630 \\ -6.308 \\ -2.942 \\ 2.942 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.25 \\ 9.25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.630 \\ -6.308 \\ 6.308 \\ 12.192 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

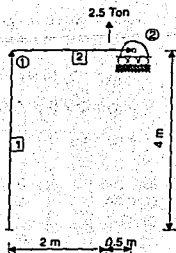
$$\{P_{E1}\} + \{P_{E2}\} = \{P\}$$



11) Marco con carga antisimétrica.

1.- Matriz de rigidez global.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{BB1} + K_{AA2} & K_{AB2} \\ \text{simétrico} & K_{BB2} \end{bmatrix}$$



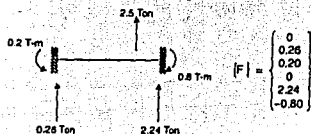
2.- Rigideces globales.

$$[K_{BB1}] = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI ; [K_{AA2}] = \begin{bmatrix} 0.80 & 0 & 0 \\ 0 & 0.768 & 0.96 \\ 0 & 0.96 & 1.60 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_{AB2}] = \begin{bmatrix} -0.80 & 0 & 0 \\ 0 & -0.768 & 0.96 \\ 0 & -0.96 & 0.80 \end{bmatrix} EI ; [K_{BB2}] = \begin{bmatrix} 0.80 & 0 & 0 \\ 0 & 0.768 & -0.96 \\ 0 & -0.96 & 0.80 \end{bmatrix} EI$$

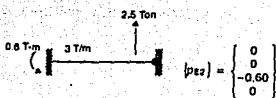
3.- Momentos de empotramiento.

Para {F}



$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.26 \\ 0.20 \\ 0 \\ 2.24 \\ -0.80 \end{bmatrix}$$

Para {p12}



$$[p12] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.- Obtención de {d} ( $d_{j2} = 0$ )

0.9875	0	0.375	-0.80	0	0
	1.208	0.96	0	-0.768	0.96
		2.50	0	-0.96	0.80
			0.80	0	0
				0.768	-0.96
					1.60

{K}

$$EI \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ \varphi_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.26 \\ 0.20 \\ 0 \\ 2.24 \\ -0.80 \end{bmatrix} = \{d\} = \begin{bmatrix} -0.1552 \\ 1.0155 \\ 0.0776 \\ -0.1552 \\ -1.1481 \end{bmatrix} 1/EI$$

{d} = {F}

5.- Momentos finales (omitimos los EI)

$$M_{A1} = 2/4 (0.0776) + 6/16 (-0.1552) = -0.0194 \text{ T-m}$$

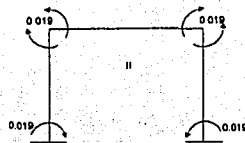
$$M_{B1} = 4/4 (0.0776) + 6/16 (-0.1552) = 0.0194 \text{ T-m}$$

$$M_{A2} = 3/2.5 (0.0776) + 3/6.25 (1.0155) = 0.5806 \text{ T-m}$$

$$M_{B2} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} -0.0194 \\ 0.0194 \\ 0.5806 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.60 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0194 \\ 0.0194 \\ -0.0194 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

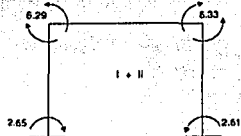
$$(P_{E1}) + (P_{E2}) = (P_{II})$$



El resultado final se obtiene sumando las condiciones I y II. Por lo tanto:

$$\begin{Bmatrix} -2.630 \\ -6.308 \\ 2.630 \\ 6.308 \\ 6.308 \\ -6.308 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.0194 \\ 0.0194 \\ -0.0194 \\ 0.0194 \\ -0.0194 \\ -0.0194 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.649 \\ -6.289 \\ 2.611 \\ 6.327 \\ 6.298 \\ -6.327 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$(P_I) + (P_{II}) = (P)$$



Que es igual al obtenido anteriormente.

## 8.4 PROBLEMAS ESPECIALES

El presente inciso tiene por objeto tratar algunos problemas que resultan de la variación de alguna de las características que usualmente se manejan en un problema tradicional. Como antes, la forma de manejar los métodos de análisis no cambia. Solo cambiarán algunas condiciones de la estructura en sí.

### 8.4.1 Armaduras espaciales (método de rigideces)

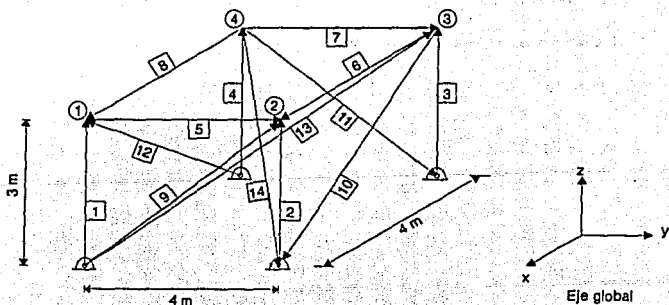
Describiremos a continuación los tres procedimientos antes presentados en la obtención de la matriz de rigidez global de una estructura, pero ahora en una armadura de tres dimensiones.

En esencia, los planteamientos son exactamente los mismos, por lo cual no incurriremos en deducciones tediosas de ninguna índole. La única diferencia se refiere al tipo de sistemas matriciales que se utilizan, pero la forma de manejarlos será igual que en las armaduras planas.

En el caso que nos ocupa, los nudos que se pueden desplazar, lo hacen ahora en tres dimensiones ( $dx_i, dy_i, dz_i$ ). Por consiguiente, el vector de fuerzas tendrá también una dimensión más y las fuerzas para un nudo serán tres ( $F_x, F_y, F_z$ ). Los demás sistemas matriciales variarán en la misma proporción para ser compatibles con los vectores  $\{d\}$  y  $\{F\}$ .

— Obtención de la matriz de rigidez global por la ecuación  $[K] = [a]^T [k] [a]$

Para ilustrar la obtención de  $[K]$ , resolveremos el siguiente ejemplo en 3 dimensiones con  $EA = \text{Constante}$ .



a) La dimensión de la matriz de continuidad es  $N \times B \times N \times D$  que para este caso es  $(14 \times 12)$ . Para su obtención podemos recurrir a la ecuación 5.18, con la variante de que:

$$d_i = \begin{Bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mu = \begin{Bmatrix} \cos \theta_x \\ \cos \theta_y \\ \cos \theta_z \end{Bmatrix} \quad \text{Donde} \quad \begin{cases} \cos \theta_x = (x_B - x_A) / l \\ \cos \theta_y = (y_B - y_A) / l \\ \cos \theta_z = (z_B - z_A) / l \end{cases}$$

Para una mejor comprensión seguiremos el procedimiento descrito en ejemplos anteriores.

1.- Obtención de los cosenos directores de cada barra.

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \begin{Bmatrix} (0-0)/3 \\ (0-0)/3 \\ (3-0)/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_5 = \mu_7 = \begin{Bmatrix} (0-0)/4 \\ (4-0)/4 \\ (0-0)/4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mu_6 = \mu_8 = \begin{Bmatrix} (4-0)/4 \\ (0-0)/4 \\ (0-0)/4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_9 = \begin{Bmatrix} (0-0)/5 \\ (4-0)/5 \\ (3-0)/5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mu_{10} = \begin{Bmatrix} (4-0)/5 \\ (0-0)/5 \\ (-3-0)/5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_{11} = \begin{Bmatrix} (0-0)/5 \\ (4-0)/5 \\ (-3-0)/5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix} ; \quad \mu_{12} = \begin{Bmatrix} (4-0)/5 \\ (0-0)/5 \\ (3-0)/5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_{13} = \begin{Bmatrix} (-4-0)/6.403 \\ (4-0)/6.403 \\ (-3-0)/6.403 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.625 \\ 0.625 \\ 0.469 \end{Bmatrix} ; \quad \mu_{14} = \begin{Bmatrix} (4-0)/6.403 \\ (4-0)/6.403 \\ (-3-0)/6.403 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.625 \\ 0.625 \\ -0.469 \end{Bmatrix}$$

2.- Obtención de los  $e_i$  mediante la ecuación:

$$e_i = \{\mu\}^T \{d_B\} - \{\mu\}^T \{d_A\}$$

$$e_1 = [0, 0, 1] \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{Bmatrix} = dz_1 ; \quad e_2 = [0, 0, 1] \begin{Bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{Bmatrix} = dz_2$$

$$e_3 = [0, 0, 1] \begin{Bmatrix} dx_3 \\ dy_3 \\ dz_3 \end{Bmatrix} = dz_3 ; \quad e_4 = [0, 0, 1] \begin{Bmatrix} dx_4 \\ dy_4 \\ dz_4 \end{Bmatrix} = dz_4$$

$$e_5 = [0, 1, 0] \begin{Bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{Bmatrix} - [0, 1, 0] \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{Bmatrix} = dy_2 - dy_1$$

$$e_6 = [1, 0, 0] \begin{Bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{Bmatrix} - [1, 0, 0] \begin{Bmatrix} dx_3 \\ dy_3 \\ dz_3 \end{Bmatrix} = dx_2 - dx_3$$

$$e_7 = [0, 1, 0] \begin{Bmatrix} dx_3 \\ dy_3 \\ dz_3 \end{Bmatrix} - [0, 1, 0] \begin{Bmatrix} dx_4 \\ dy_4 \\ dz_4 \end{Bmatrix} = dy_3 - dy_4$$

$$e_8 = [1, 0, 0] \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{Bmatrix} - [1, 0, 0] \begin{Bmatrix} dx_4 \\ dy_4 \\ dz_4 \end{Bmatrix} = dx_1 - dx_4$$

$$e_9 = [0, 0.8, 0.6] \begin{Bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{Bmatrix} = 0.8 dy_2 + 0.6 dz_2$$

$$e_{10} = -[0.8, 0, -0.6] \begin{Bmatrix} dx_3 \\ dy_3 \\ dz_3 \end{Bmatrix} = -0.8 dx_3 + 0.6 dz_3$$

$$e_{11} = - \{0, 0.8, -0.6\} \begin{Bmatrix} dx_4 \\ dy_4 \\ dz_4 \end{Bmatrix} = -0.8 dy_4 + 0.6 dz_4$$

$$e_{12} = \{0.8, 0, 0.6\} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{Bmatrix} = 0.8 dx_1 + 0.6 dz_1$$

$$e_{13} = \{-0.625, 0.625, 0.469\} \begin{Bmatrix} dx_3 \\ dy_3 \\ dz_3 \end{Bmatrix} = -0.625 dx_3 + 0.625 dy_3 + 0.469 dz_3$$

$$e_{14} = - \{0.625, 0.625, -0.469\} \begin{Bmatrix} dx_4 \\ dy_4 \\ dz_4 \end{Bmatrix} = -0.625 dx_4 - 0.625 dy_4 + 0.469 dz_4$$

3.- Construimos la matriz de continuidad vaciando los coeficientes de las diferentes deformaciones obtenidas en los lugares correspondientes según se forme el arreglo.

	$dx_1$	$dy_1$	$dz_1$	$dx_2$	$dy_2$	$dz_2$	$dx_3$	$dy_3$	$dz_3$	$dx_4$	$dy_4$	$dz_4$	
$[a] =$			1										e1
						1							e2
									1				e3
												1	e4
		-1			1								e5
				1			-1						e6
								1			-1		e7
	1									-1			e8
					0.8	0.6							e9
							-0.8		0.6				e10
											-0.8	0.6	e11
	0.8		0.6										e12
							-0.625	0.625	0.469				e13
										-0.625	-0.625	0.469	e14

La matriz de rigidez de los elementos individuales es:

$$[k] = \text{Diag.} (0.333, 0.333, 0.333, 0.333, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.20, 0.20, 0.20, 0.20, 0.156, 0.156)EA$$

Ahora ya podemos construir la matriz global de rigidez de la estructura resolviendo la ecuación  $[K] = [a]T[K][a]$  la cual nos arroja finalmente el siguiente resultado.



[K] =	0.378	0	0.096	0	0	0	0	0	0	-0.25	0	0	EA
	0.25	0	0	-0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	
			0.405	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	S			0.25	0	0	-0.25	0	0	0	0	0	
		I			0.378	0.096	0	0	0	0	0	0	
			M			0.405	0	0	0	0	0	0	
				E			0.439	-0.061	-0.142	0	0	0	
					T			0.311	0.046	0	-0.25	0	
						R			0.439	0	0	0	
							I			0.311	0.061	-0.046	
								C			0.439	-0.142	
									O			0.439	

— Obtención de la matriz de rigidez global por medio de la matriz de rigidez acoplada de cada barra.

Finalmente, vamos a considerar la obtención de la matriz de rigidez acoplada de una barra de una armadura espacial. El esfuerzo en tales barras depende, solamente, de las componentes según el eje de los corrimientos de sus extremos, de forma que el sistema de coordenadas local solo necesita ser unidimensional. Así, las ecuaciones que relacionan las fuerzas y los movimientos de extremo en el sistema local son idénticas a las ecuaciones 6.3, obtenidas para barras de una armadura plana. Solamente es preciso transformar estas ecuaciones a las correspondientes en el sistema global.

Como es lógico, el vector  $\{F\}$  tendrá tres componentes (para ser compatible con el vector  $\{d\}$ )  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ; en el caso de una barra cuyos cosenos directores respecto a  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sean  $\cos \theta_x$ ,  $\cos \theta_y$ ,  $\cos \theta_z$ , la fuerza axial  $p$  tiene como componentes.

$$\begin{aligned} F_x &= p \cos \theta_x \\ F_y &= p \cos \theta_y \\ F_z &= p \cos \theta_z \end{aligned} \quad \mu = \begin{Bmatrix} \cos \theta_x \\ \cos \theta_y \\ \cos \theta_z \end{Bmatrix}$$

Que se puede escribir:

$$\{F_i\} = \{\mu_i\} \{p\}$$

Se tiene también que la relación correspondiente de movimientos es  $\delta = \mu^T d$  y las ecuaciones 6.3 se transforman en:

$$\begin{aligned} F_1 &= K_{AA} d_A + K_{AB} d_B \\ F_2 &= K_{BA} d_A + K_{BB} d_B \end{aligned}$$

Donde:

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_x & \cos \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_z \\ \cos \theta_y \cos \theta_x & \cos^2 \theta_y & \cos \theta_y \cos \theta_z \\ \cos \theta_z \cos \theta_x & \cos \theta_z \cos \theta_y & \cos^2 \theta_z \end{bmatrix}$$

Y además:

$$K_{AA} = K_{BB} \quad ; \quad K_{AB} = K_{BA} = -K_{AA}$$

Los elementos antes presentados son suficientes para poder obtener la matriz global de rigidez de una armadura tridimensional. Para ejemplificar su utilización, resolveremos el ejemplo no. 5 antes descrito, para lo cual utilizaremos ahora el procedimiento c.

1) Obtención de los  $k$  de cada barra.

Ya obtenidos en el procedimiento anterior.

2) Obtención de la matriz de rigidez acoplada de cada barra (según ecuación 6.6)

$$K_{AA1} = K_{AA2} = K_{AA3} = K_{AA4} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{EA}{3} [0, 0, 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA5} = K_{AA7} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{EA}{4} [0, 1, 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA6} = K_{AA8} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{EA}{4} [1, 0, 0] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA9} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} \frac{EA}{5} [0, 0.8, 0.6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.128 & 0.096 \\ 0 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA10} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{Bmatrix} \frac{EA}{5} [0.8, 0, -0.6] = \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & -0.096 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.096 & 0 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA11} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix} \frac{EA}{5} [0, 0.8, -0.6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.128 & -0.096 \\ 0 & -0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA12} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{Bmatrix} \frac{EA}{5} [0.8, 0, 0.6] = \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & -0.096 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.096 & 0 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA13} = \begin{Bmatrix} -0.625 \\ 0.625 \\ 0.469 \end{Bmatrix} \frac{EA}{6.403} [-0.625, 0.625, 0.469] = \begin{bmatrix} 0.061 & -0.061 & -0.046 \\ -0.061 & 0.061 & 0.046 \\ -0.046 & 0.046 & 0.034 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AA14} = \begin{Bmatrix} 0.625 \\ 0.625 \\ -0.469 \end{Bmatrix} \frac{EA}{6.403} [0.625, 0.625, -0.469] = \begin{bmatrix} 0.061 & 0.061 & -0.046 \\ 0.061 & 0.061 & -0.046 \\ -0.046 & -0.046 & 0.034 \end{bmatrix} EA$$

3) Obtención de  $[K]$  por ensamble de las diferentes matrices de rigidez de las barras individuales.

$[K] =$	$K_{AA5} + K_{BB1} + K_{BB2} + K_{BB12}$	$K_{AB5}$	0	$K_{BA5}$
		$K_{AB2} + K_{BB5} + K_{BB6} + K_{BB8}$	$K_{BA2}$	0
	SIMÉ		$K_{AA4} + K_{AA10} + K_{BB3} + K_{BB7} + K_{BB13}$	$K_{BA7}$
		TRICO		$K_{A7} + K_{A8} + K_{AA11} + K_{AA14} + K_{BB4}$

Recordemos que para este caso cada submatriz será de  $(3 \times 3)$ .

Con el ensamble antes obtenido estamos en posibilidad de obtener  $[K]$ . Que finalmente nos quedará:

$[K] =$	0.378	0	0.096	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	0	0	EA
		0.25	0	0	-0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			0.405	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	S			0.25	0	0	-0.25	0	0	0	0	0	0	0	
		I			0.378	0.096	0	0	0	0	0	0	0	0	
			M			0.405	0	0	0	0	0	0	0	0	
				É			0.439	-0.061	-0.142	0	0	0	0	0	
					T			0.311	0.046	0	-0.25	0	0	0	
						R			0.439	0	0	0	0	0	
							I			0.311	0.061	-0.046	0	0	
								C			0.439	-0.142	0	0	
									O				0.439	0	

Que es igual a la antes obtenida.

Ahora proponemos un vector de fuerzas externas (ver problema nuevo, inciso 7.4.2) y hallamos las fuerzas en las barras.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Entonces } \{F\} = [K] \{d\} \text{ de donde } \{d\} = \begin{Bmatrix} 37.6346 \\ 35.9651 \\ -21.2665 \\ 128.2890 \\ 11.9651 \\ 46.5465 \\ 128.2890 \\ 70.7981 \\ 13.5771 \\ 8.7371 \\ 59.2685 \\ 20.0866 \end{Bmatrix} \quad \forall EA$$

Ahora podemos obtener las fuerzas finales en las barras que son: (omitimos los EA)

$$p_1 = 0.333 (-21.2665) = -7.082 \text{ Ton}$$

$$p_2 = 0.333 (46.5465) = 15.500 \text{ Ton}$$

$$p_3 = 0.333 (13.5771) = 4.5212 \text{ Ton}$$

$$p_4 = 0.333 (20.0866) = 6.6888 \text{ Ton}$$

$$p_5 = 0.25 (-35.9651 + 11.9651) = -6.0$$

$$p_6 = 0.25 (128.2890 - 128.2890) = 0.0 \text{ Ton}$$

$$p_7 = 0.25 (70.7981 - 59.2685) = 2.882 \text{ Ton}$$

$$p_8 = 0.25 (37.6346 - 8.7371) = 7.224 \text{ Ton}$$

$$p_9 = 0.20 (0.8(11.9651) + 0.6(46.5465)) = 7.500 \text{ Ton}$$

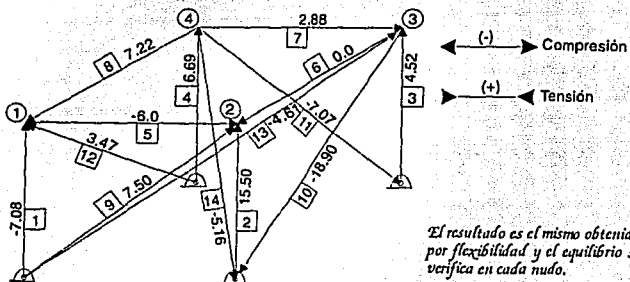
$$p_{10} = 0.20 (-0.8(128.2890) + 0.6(13.5771)) = -18.897 \text{ Ton}$$

$$p_{11} = 0.20 (-0.8(59.2685) + 0.6(20.0866)) = -7.073 \text{ Ton}$$

$$p_{12} = 0.20 (0.8(37.6346) + 0.6(-21.2665)) = 3.470 \text{ Ton}$$

$$p_{13} = 0.156 (-0.625(128.2890) + 0.625(70.7981) + 0.469(13.5771)) = -4.612 \text{ Ton}$$

$$p_{14} = 0.156 (-0.625(8.7371) - 0.625(59.2685) + 0.469(20.0866)) = -5.161 \text{ Ton}$$



### 8.4.2 Armaduras planas con apoyos que no coinciden con el eje global de coordenadas

Como anteriormente se comentó, al parecer los subíndices de las diferentes  $K_{ij}$  de la matriz de rigidez acoplada de una barra para una armadura, no son muy significativos e incluso para los problemas antes

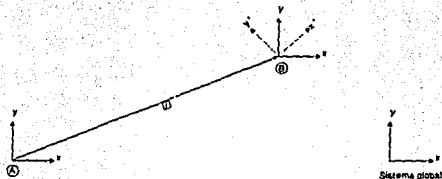


Figura 8-8. Deformación de una barra con diferentes sistemas de referencia en sus apoyos.

tratados, tales subíndices se pueden omitir. Sin embargo, ¿qué sucede en el caso de que alguno de los apoyos no coincida con el eje de referencia global? Analicemos la figura 8-8.

Los desplazamientos de los extremos deben estar referidos a los ejes coordenados del extremo de la barra en cuestión. Para este caso en particular serán:  $x$  y  $y$  para el extremo A y  $x'$  y  $y'$  para el extremo B. Por lo tanto:

$$d_A = \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \end{Bmatrix}$$

$$d'_B = \begin{Bmatrix} dx'_B \\ dy'_B \end{Bmatrix}$$

Por consiguiente los cosenos directores para la barra serán diferentes según el extremo de referencia. Entonces:

$$\mu = \begin{Bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{Bmatrix}$$

$$\mu' = \begin{Bmatrix} \mu'_x \\ \mu'_y \end{Bmatrix}$$

Si deseamos obtener la deformación de la barra esta será:

$$e_i = (\mu')^T (d'_B) - (\mu)^T (d_A) \quad 8.2$$

De la ecuación 6.3 tenemos que:

$$p = k e$$

Por lo tanto:

$$p_i = k_i (\mu')^T (d'_B) - k_i (\mu)^T (d_A) \quad 8.3$$

Recordando también que:

$$\left. \begin{aligned} F'_B &= (\mu') p_i \\ F_A &= -(\mu) p_i \end{aligned} \right\} \text{nos queda: } \begin{cases} F_A = (\mu) k_i (\mu)^T (d_A) - (\mu) k_i (\mu')^T (d'_B) \\ F_B = -(\mu') k_i (\mu)^T (d_A) + (\mu') k_i (\mu')^T (d'_B) \end{cases}$$

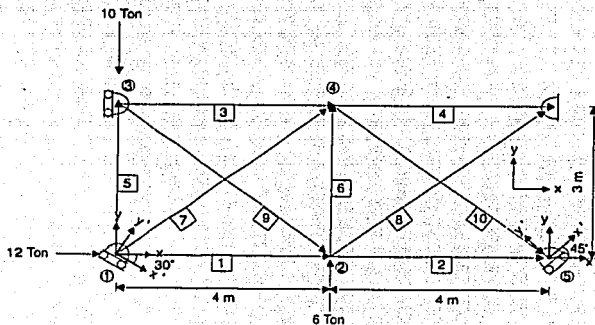
Que podemos escribir como:

$$\begin{Bmatrix} F'_A \\ F'_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_A \\ d'_B \end{Bmatrix} \quad 8.4 \quad \text{donde} \quad \begin{cases} K_{AA} = (\mu) k_i (\mu)^T \\ K_{AB} = -(\mu) k_i (\mu')^T \\ K_{BA} = K_{AB}^T \\ K_{BB} = (\mu') k_i (\mu')^T \end{cases}$$

En caso de que el apoyo desfasado se encuentre en el extremo A se puede demostrar, siguiendo el mismo procedimiento que:

$$\begin{Bmatrix} F'_A \\ F'_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_A \\ d'_B \end{Bmatrix} \quad 8.5 \quad \text{donde} \quad \begin{cases} K_{AA} = (\mu') k_i (\mu')^T \\ K_{AB} = -(\mu') k_i (\mu)^T \\ K_{BA} = K_{AB}^T \\ K_{BB} = (\mu) k_i (\mu)^T \end{cases}$$

Para ilustrar el empleo de la nueva matriz de rigidez acoplada resolveremos el siguiente problema que es igual al ejemplo no. 3 pero con dos de sus apoyos desfasados. El proceso de resolución consta de los mismos pasos que en los casos anteriores.



1.- Obtención de los  $\{\mu_i\}$  de cada barra

$$\mu_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \mu'_1 = \begin{Bmatrix} 0.866 \\ 0.50 \end{Bmatrix} ; \mu_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \mu'_2 = \begin{Bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_3 = \mu_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \mu_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \mu'_5 = \begin{Bmatrix} -0.50 \\ 0.866 \end{Bmatrix} ; \mu_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_7 = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} ; \mu'_7 = \begin{Bmatrix} 0.393 \\ 0.920 \end{Bmatrix} ; \mu_8 = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} ; \mu_9 = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_{10} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix} ; \mu'_{10} = \begin{Bmatrix} 0.141 \\ -0.990 \end{Bmatrix}$$

## 2.- Obtención de la matriz de rigideces acoplada para cada barra a partir de las ecuaciones 8.4 y 8.5 según sea el caso.

## Barra 1

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.1083 \\ 0.1083 & 0.0625 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.2165 & 0 \\ -0.125 & 0 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} -0.2165 & -0.125 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

## Barra 2

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.125 & -0.125 \\ -0.125 & 0.125 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.1768 & 0.1768 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} -0.1768 & 0 \\ 0.1768 & 0 \end{bmatrix} EA$$

## Barras 3 y 4

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

*Barra 5*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.0833 & -0.1443 \\ -0.1443 & 0.25 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1667 \\ 0 & -0.2887 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1667 & -0.2887 \end{bmatrix} EA$$

*Barra 6*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 \end{bmatrix} EA$$

*Barra 7*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.031 & 0.072 \\ 0.072 & 0.169 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 \\ 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.063 & -0.047 \\ -0.147 & -0.110 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} -0.063 & -0.147 \\ -0.047 & -0.110 \end{bmatrix} EA$$

*Barra 8*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 \\ 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 \\ 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.128 & -0.096 \\ -0.096 & -0.072 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} -0.128 & -0.096 \\ -0.096 & -0.072 \end{bmatrix} EA$$

*Barra 9*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.128 & -0.096 \\ -0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.128 & -0.096 \\ -0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.128 & 0.096 \\ 0.096 & -0.072 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} -0.128 & 0.096 \\ 0.096 & -0.072 \end{bmatrix} EA$$

*Barra 10*

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 0.128 & -0.096 \\ -0.096 & 0.072 \end{bmatrix} EA ; K_{BB} = \begin{bmatrix} 0.004 & -0.028 \\ -0.028 & 0.196 \end{bmatrix} EA$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -0.023 & 0.158 \\ 0.017 & -0.119 \end{bmatrix} EA ; K_{BA} = \begin{bmatrix} -0.023 & 0.017 \\ 0.158 & -0.119 \end{bmatrix} EA$$



3.- Con la matriz de rigidez de cada barra hacemos el ensamble de la matriz de rigidez global por inspección visual de la estructura y recordando que ahora la estructura tiene cinco nudos que se pueden desplazar.

	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	
$[K] =$	$K_{AA1} + K_{AA5} + K_{AA7}$	$K_{AB1}$	$K_{AB5}$	$K_{AB7}$		$F_1$
		$K_{AA2} + K_{AA6} + K_{AA8} + K_{BB1} + K_{BB9}$	$K_{BA4}$	$K_{AB6}$	$K_{AB2}$	$F_2$
			$K_{AA3} + K_{AA9} + K_{BB5}$	$K_{AB3}$		$F_3$
				$K_{AA4} + K_{AA10} + K_{BB3} + K_{BB6} + K_{BB7}$	$K_{AB10}$	$F_4$
					$K_{BB2} + K_{BB10}$	$F_5$

En base a lo anterior construimos la matriz  $[K]$  pero recordando que  $dy_1 = dx_3 = dy_5 = 0$  y por lo tanto  $fy_1 = fx_3 = fy_5 = 0$ , que finalmente nos queda:

	$dx_1$	$dx_2$	$dy_2$	$dy_3$	$dx_4$	$dy_4$	$dx_5$	
$[K] =$	0.3018	-0.2165	0	0.1667	-0.063	-0.047	0	$Fx_1$
		0.756	0	0.096	0	0	-0.1768	$Fx_2$
	SI		0.4773	-0.072	0	-0.3333	0	$Fy_2$
		ME		0.4053	0	0	0	$Fy_3 \times EA$
			TRI		0.756	0	-0.023	$Fx_4$
				CO		0.4773	0.017	$Fy_4$
							0.129	$Fx_5$

Ahora proponemos un vector de fuerzas y obtenemos los correspondientes desplazamientos. Entonces:

$$[F] = \begin{Bmatrix} Fx_1 = 0.0 \\ Fx_2 = -5.0 \\ Fy_2 = 0.0 \\ Fy_3 = 6.0 \\ Fx_4 = -21.0 \\ Fy_4 = 0.0 \\ Fx_5 = 0.0 \end{Bmatrix} \Rightarrow [d] = \begin{Bmatrix} dx_1 = -92.724 \\ dx_2 = -64.5015 \\ dy_2 = 12.9636 \\ dy_3 = 70.5225 \\ dx_4 = -38.4161 \\ dy_4 = 3.3300 \\ dx_5 = -95.6903 \end{Bmatrix} \quad \text{VEA}$$

Ahora obtenemos el vector de fuerzas finales en las barras pero por medio de la matriz de continuidad de la estructura. Entonces:

$$[a] =$$

$dx'_1$	$dx_2$	$dy_2$	$dy_3$	$dx_4$	$dy_4$	$dx'_5$	
-0.866	1						$e_1$
	-1					0.707	$e_2$
				1			$e_3$
				-1			$e_4$
0.50			1				$e_5$
		-1			1		$e_6$
-0.393				0.8	0.6		$e_7$
	-0.8	-0.6					$e_8$
	0.8	-0.6	0.6				$e_9$
				-0.8	0.6	0.141	$e_{10}$

$$P_1 = 0.25 (-0.866(-92.7249) + (-64.5015)) = 3.950 \text{ Ton}$$

$$P_2 = 0.25 (-(-64.5015) + 0.707 (-95.6903)) = -0.788$$

$$P_3 = 0.25 (-38.4161) = -9.604 \text{ Ton}$$

$$P_4 = 0.25 (-(-38.4161)) = 9.604 \text{ Ton}$$

$$P_5 = 0.3333 (0.5(-92.7249) + (70.5225)) = 8.053 \text{ Ton}$$

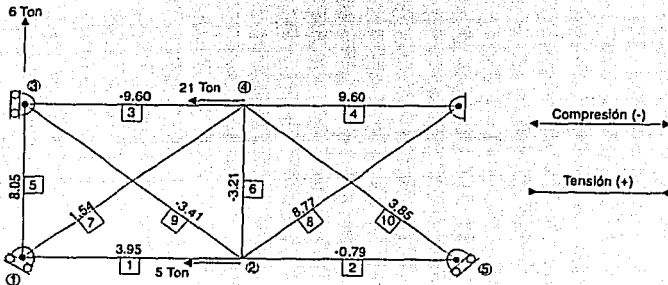
$$P_6 = 0.3333 (-(-12.9636) + (3.3300)) = -3.211 \text{ Ton}$$

$$P_7 = 0.2 (-0.393(-92.7249) + 0.8 (-38.4161) + 0.6 (3.3300)) = 1.541 \text{ Ton}$$

$$P_8 = 0.2 (-0.8 (-64.5015) - 0.6 (12.9636)) = 8.765 \text{ Ton}$$

$$P_9 = 0.2 (0.8 (-64.5015) - 0.6 (12.9636) + 0.6 (70.5225)) = -3.413 \text{ Ton}$$

$$P_{10} = 0.2 (-0.8(-38.4161) + 0.6 (3.3300) + 0.141 (-95.6903)) = 3.848 \text{ Ton}$$



### 8.4.3 Fuerzas de empotramiento para barras discontinuas

La obtención de las fuerzas de empotramiento para barras discontinuas con cargas externas entre sus extremos, se hace aplicando también los conceptos de elementos conectados en serie.

Sean  $P_2, P_3, P_4, \dots, P_{r-1}$ , las cargas equivalentes en los extremos de cada segmento, obtenidas mediante el procedimiento descrito en el inciso 4.5 o la tabla 4.6. Si el extremo B del elemento en cuestión, figura 8.9a, se libera temporalmente habrá un desplazamiento  $\Delta_B$ . Ahora supongamos que se aplica en el extremo B un sistema de cargas  $P_{EMP}$  de tal magnitud que estas producen desplazamientos iguales y opuestos a los ocasionados anteriormente, figura 8.9b. Entonces, la superposición de las figuras 8.9a y 8.9b dará como resultado desplazamientos cero en B. En consecuencia,  $P_{EMP}$  representará las fuerzas de empotramiento en el extremo B, causadas por las cargas intermedias sobre el elemento. Entonces, el problema se reduce en si a determinar  $\Delta_B$  en ambas figuras.

Antes que todo,  $\Delta_B$  en la figura 8.9a, es ocasionado por cada carga como se ilustra en la figura 8.10. Obsérvese que, por ejemplo  $\mathcal{F}_2$  es la matriz de flexibilidad de la porción comprendida entre 2 y el extremo A, y se determina según la ecuación 7.29, que sirve para obtener la matriz de flexibilidad  $\mathcal{F}_{22}$  para elementos conectados en serie, la suma de los desplazamientos en la figura 8.10 resulta.

$$\Delta_B = \mathcal{F}_B P_B + h_{B-1}^T \mathcal{F}_1 P_1 + h_{B-2}^T \mathcal{F}_2 P_2 + \dots + h_{B-(r-1)}^T \mathcal{F}_{(r-1)} P_{(r-1)} \quad 8.6$$

Sin embargo el desplazamiento en la figura 8.9b es:

$$\Delta_B = \mathcal{F}_B P_{EMP} \quad 8.7$$

Por lo tanto si combinamos 8.6 y 8.7 nos queda que:

$$P_{EMP} = -K_B [\mathcal{F}_B P_B + h_{B-1}^T \mathcal{F}_1 P_1 + h_{B-2}^T \mathcal{F}_2 P_2 + \dots + h_{B-(r-1)}^T \mathcal{F}_{(r-1)} P_{(r-1)}] \quad 8.8$$

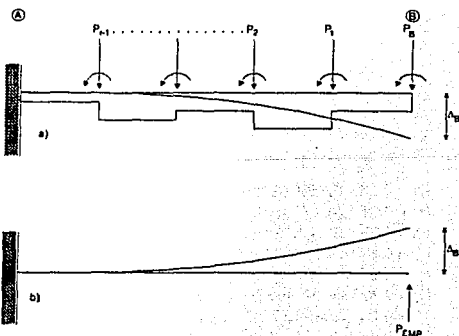


Figura 8-9.

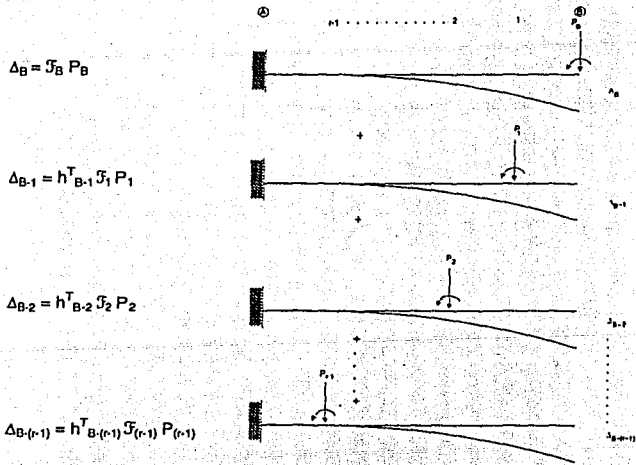


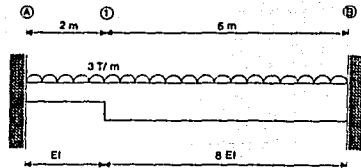
Figura 8-10.

Lo anterior se comprenderá mejor resolviendo los siguientes ejemplos.

**Ejemplo no. 12**

Encontrar las fuerzas de empotramiento para la siguiente viga compuesta.

Para efecto de encontrar las fuerzas de empotramiento no se considera la fuerza axial.



1.- Obtenemos las diferentes flexibilidades. En este caso y según la ecuación 8.8 debemos obtener:

$$[J_B] = \begin{bmatrix} 107.6667 & 16.25 \\ 16.25 & 2.75 \end{bmatrix} \cdot EI \Rightarrow [K_B] = \begin{bmatrix} 0.08598 & -0.50748 \\ -0.50748 & 3.3624 \end{bmatrix} EI ; [f_1] = \begin{bmatrix} 2.6667 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot EI$$

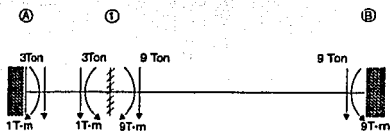
2.- Ahora aplicamos la ecuación 8.8 que nos queda para este caso.

$$P_{EMP} = -K_B [\mathcal{F}_B P_B + h_{B-1}^T \mathcal{F}_1 P_1] \quad \text{además} \quad [h_{B-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- Obtenemos las diferentes fuerzas de empotramiento según el caso.

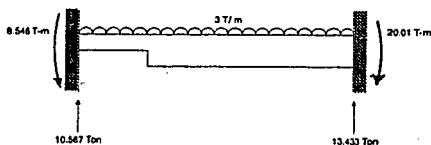
$$P_B = \begin{Bmatrix} -9.0 \\ 9.0 \end{Bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{Bmatrix} -12 \\ -8 \end{Bmatrix}$$



4.- Sustituimos valores en las ecuaciones del paso 2. Y finalmente nos queda:

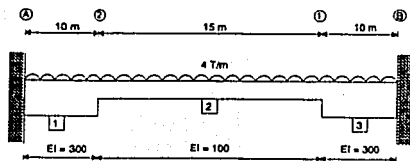
$$P_{EMP} = \begin{Bmatrix} 13.433 \\ -20.010 \end{Bmatrix}$$



Y por equilibrio.

### Ejemplo 13

Encontrar las fuerzas de empotramiento para la siguiente viga.



1.- Aplicamos la ecuación 8.8 y nos queda que:

$$P_{EMP} = -K_B [\mathcal{F}_B P_B + h_{B-1}^T \mathcal{F}_1 P_1 + h_{B-2}^T \mathcal{F}_2 P_2]$$

2.- Ahora obtenemos los datos que arriba se exponen

$$[\mathcal{F}_B] = [h_2 h_3]^T \mathcal{F}_{BB1} [h_2 h_3] + [h_3]^T \mathcal{F}_{BB2} [h_3] + \mathcal{F}_{BB3}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} ; \quad h_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} ; \quad h_2 \quad h_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U_{BB1}] = [U_{BB3}] = \begin{bmatrix} 1.1111 & 0.16667 \\ 0.16667 & 0.0333 \end{bmatrix} ; \quad [U_{BB2}] = \begin{bmatrix} 11.25 & 1.125 \\ 1.125 & 0.15 \end{bmatrix}$$

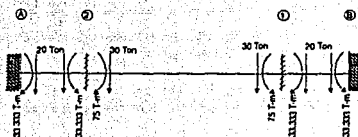
Por lo tanto y según el paso 1.

$$[U_B] = \begin{bmatrix} 80.1370 & 3.7916 \\ 3.7916 & 0.2117 \end{bmatrix} \Rightarrow [K_B] = \begin{bmatrix} 0.0726 & -1.2697 \\ -1.2697 & 26.8347 \end{bmatrix}$$

$$[F_1] = [h_2]^T [U_{BB1}] [h_2] + [U_{BB2}] = \begin{bmatrix} 24.8605 & 1.7916 \\ 1.7916 & 0.1833 \end{bmatrix}$$

$$[F_2] = [U_{BB1}] = \begin{bmatrix} 1.1111 & 0.16667 \\ 0.16667 & 0.0333 \end{bmatrix}$$

### 3.- Fuerzas de empotramiento.

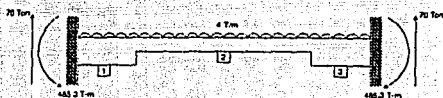


$$P_B = \begin{Bmatrix} -20.0 \\ 33.3333 \end{Bmatrix} \quad P_1 = \begin{Bmatrix} -50.0 \\ 41.6667 \end{Bmatrix} \quad P_2 = \begin{Bmatrix} -50.0 \\ -41.6667 \end{Bmatrix}$$

4.- Ahora reemplazamos en la ecuación del paso 1 y nos queda:

$$P_{EMP} = \begin{Bmatrix} 70.0 \\ -485.295 \end{Bmatrix}$$

Y por equilibrio.



Este tipo de problemas también puede resolverse utilizando el método general de rigidez, colocando nudos en donde se presenta discontinuidad. Sin embargo, el trabajar en esta forma no es muy conveniente ya que se deben de trabajar ecuaciones simultáneas y estas aumentan conforme aumenta el número de discontinuidades lo que hace que el grado de dificultad aumente.

En cambio el procedimiento antes presentado siempre maneja matrices de la misma dimensión, sin importar el número de discontinuidades del elemento.

#### 8.4.4 Matriz de rigidez para elementos con diferentes condiciones en sus extremos

Las condiciones de los extremos de un elemento pueden variar dependiendo de las fuerzas internas que se liberen en ellos.

La evaluación de la matriz de rigidez para cada elemento puede hacerse bien sea como se hizo en el capítulo 4, para un elemento doblemente empotrado típico o bien por modificaciones a la matriz de rigidez conocida de los elementos individuales. El último camino puede ocupar menos tiempo.

Tomemos como ejemplo el elemento figura 8.11a, el cual está empotrado en A y articulado en B.

Si los dos extremos estuvieran empotrados, la matriz de rigidez acoplada de este elemento sería la mostrada en la ecuación 6.18. Sin embargo, para nuestro caso  $M_B$  vale cero. Entonces la matriz de rigidez acoplada de este elemento se obtiene en dos pasos.

Primero suponemos que ambos extremos están empotrados lo que da por resultado la ecuación 6.18.

Segundo, liberamos el extremo B del elemento para el giro y le provocamos un momento tal que el momento resultante en el extremo B, que resulte de los pasos 1 y 2 sea nulo. Estos pasos se muestran en la figura 8.12. Obsérvese que el momento en B del paso 2, tiene que ser igual y opuesto al momento en B del paso 1. Ciertas fuerzas se desarrollarán en los extremos de este elemento como resultado de la aplicación de tales momentos. Tales fuerzas las obtenemos utilizando las ecuaciones pendiente-deflexión y el principio de equilibrio.

Las ecuaciones pendiente-deflexión indican que el momento desarrollado en A, es la mitad del producido en B y por equilibrio de fuerzas cortantes.

$$F_y = 3 M_B/2l$$

Ahora recordemos que  $M_B$  en la figura 8.12c, debe ser igual y opuesto al de la figura 8.12b, el cual está dado por la ecuación 6.18a y es:

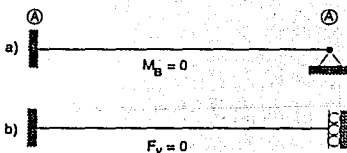


Figura 8-11.

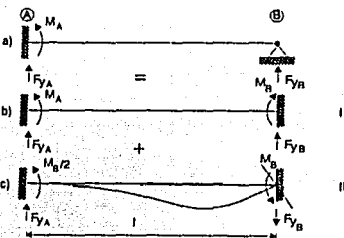


Figura 8-12.

$$M_B = (6EI/l^2) dy_A + (2EI/l) \phi_A - (6EI/l^2) dy_B + (4EI/l) \phi_B$$

Con este valor, encontramos todas las fuerzas de la figura 8.12c, que expresadas en forma matricial quedarán:

Paso I, figura 8-12b.

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ M_A \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 EI/L^3 & 6 EI/L^2 & 0 & -12 EI/L^3 & 6 EI/L^2 \\ 0 & 6 EI/L^2 & 4 EI/L & 0 & -6 EI/L^2 & 2 EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 EI/L^3 & -6 EI/L^2 & 0 & 12 EI/L^3 & -6 EI/L^2 \\ 0 & 6 EI/L^2 & 2 EI/L & 0 & -6 EI/L^2 & 4 EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{xA} \\ d_{yA} \\ \phi_A \\ d_{xB} \\ d_{yB} \\ \phi_B \end{Bmatrix}$$

Paso II, figura 8-12c.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -F_{yA} \\ -M_A \\ 0 \\ -F_{yB} \\ -M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 EI/L^3 & -3 EI/L^2 & 0 & 9 EI/L^3 & -6 EI/L^2 \\ 0 & -3 EI/L^2 & -EI/L & 0 & 3 EI/L^2 & -2 EI/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 EI/L^3 & 3 EI/L^2 & 0 & -9 EI/L^3 & 6 EI/L^2 \\ 0 & -6 EI/L^2 & -2 EI/L & 0 & 6 EI/L^2 & -4 EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{xA} \\ d_{yA} \\ \phi_A \\ d_{xB} \\ d_{yB} \\ \phi_B \end{Bmatrix}$$

La suma de las matrices del paso I y paso II que satisface la figura 8-12 da como resultado.

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{AB} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \end{Bmatrix} \quad 8.9a$$

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ M_A \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3 EI/L^3 & 3 EI/L^2 & 0 & -3 EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3 EI/L^2 & 3 EI/L & 0 & -3 EI/L^2 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3 EI/L^3 & -3 EI/L^2 & 0 & 3 EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{xA} \\ d_{yA} \\ \phi_A \\ d_{xB} \\ d_{yB} \\ \phi_B \end{Bmatrix} \quad 8.9b$$

El análisis de estructuras que están formadas por elementos con diferentes condiciones en los extremos requiere por consiguiente el uso de las matrices de rigidez apropiadas para aquellos elementos.

Las matrices de rigidez para elementos con diversas condiciones en sus extremos pueden obtenerse en forma similar al anterior. Los más comunes se presentan en la tabla 8.1.

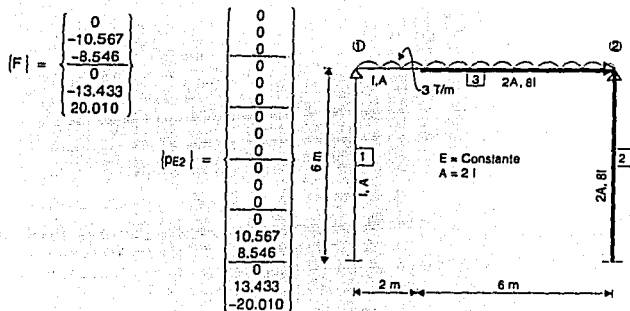


ELEMENTO		$K_{AA}$			$K_{AB} = K_{BA}^T$			$K_{BB}$			
A	B	EA/L	0	0	-EA/L	0	0	EA/L	0	0	
		0	$3EI/L^3$	$3EI/L^2$	0	$-3EI/L^3$	0	0	$3EI/L^3$	0	0
		0	$3EI/L^2$	$3EI/L$	0	$-3EI/L^2$	0	0	0	0	0
A	B	EA/L	0	0	-EA/L	0	0	EA/L	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	0	EI/L	0	0	-EI/L	0	0	EI/L	
A	B	EA/L	0	0	-EA/L	0	0	EA/L	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Tabla 8-1. Matriz de rigidez para diferentes condiciones de apoyo.

## 8.4.5 Problemas finales

Resolver el siguiente marco

1.- Numerar nudos, barras y obtener  $\{F\}$  y  $\{pz\}$ 

2.- Obtención de los diferentes  $K_{ij}$  en sistema global.

Para barra 1

$$[K_{BB1}] = \begin{bmatrix} 0.0556 & 0 & 0.1667 \\ 0 & 0.3333 & 0 \\ 0.1667 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix} EI$$

Para barra 2

$$[K_{BB2}] = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0 & 1.3333 \\ 0 & 0.6667 & 0 \\ 1.3333 & 0 & 5.3333 \end{bmatrix} EI$$

Para barra 3

$$[K_{AA}] = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08588 & 0.17955 \\ 0 & 0.17955 & 0.73888 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_{AB}] = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.08588 & 0.50749 \\ 0 & -0.17955 & 0.69752 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_{BB}] = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08588 & -0.50749 \\ 0 & -0.50749 & 3.3624 \end{bmatrix} EI$$

## 3.- Formación de la matriz de rigideces y obtención de desplazamientos.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{BB1} + K_{AA3} & K_{AB3} \\ K_{BB2} + K_{BB3} & \end{bmatrix}$$

Haciendo las operaciones indicadas resulta.

0.4556	0	0.1667	-0.40	0	0
	0.4192	0.1796	0	-0.0859	0.5075
		1.4056	0	-0.1796	0.6975
			0.8444	0	1.3333
				0.7526	-0.5075
					8.6957

$$[K] = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ \phi_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.567 \\ -8.546 \\ 0 \\ -13.433 \\ 20.010 \end{bmatrix} \Rightarrow [d] = \begin{bmatrix} -9.8304 \\ -33.5209 \\ -5.9209 \\ -13.6643 \\ -19.2402 \\ 5.7046 \end{bmatrix} 1/EI$$

$$[K] \quad [d] = \{F\}$$

## 4.- Obtención de fuerzas finales (por medio de la ecuación fuerza-desplazamiento)

(Omitimos los 'EI')

0.0556	0	-0.1667	-0.0556	0	-0.1667
0	0.3333	0	0	-0.3333	0
-0.1667	0	0.6667	0.1667	0	0.3333
-0.0556	0	0.1667	0.0556	0	0.1667
0	-0.3333	0	0	0.3333	0
-0.1667	0	0.3333	0.1667	0	0.6667

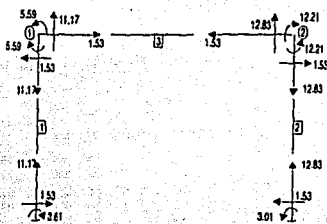
$$\begin{Bmatrix} P_{xA} \\ P_{yA} \\ M_A \\ P_{xB} \\ P_{yB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9.8304 \\ -33.5209 \\ -5.9209 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5336 \\ 11.1725 \\ -3.6122 \\ -1.5326 \\ -11.1725 \\ -5.5862 \end{bmatrix} \text{ Barra 1}$$

$$\begin{matrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0 & -1.3333 & -0.4444 & 0 & -1.3333 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0 & -0.6667 & 0 \\ -1.3333 & 0 & 5.3333 & 1.3333 & 0 & 2.6667 \\ -0.4444 & 0 & 1.3333 & 0.4444 & 0 & 1.3333 \\ 0 & -0.6667 & 0 & 0 & 0.6667 & 0 \\ -1.3333 & 0 & 2.6667 & 1.3333 & 0 & 5.3333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -13.6643 \\ -19.2402 \\ 5.7046 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.5336 \\ 12.8274 \\ -3.0062 \\ 1.5335 \\ -12.8274 \\ 12.2057 \end{Bmatrix} \text{ Barra 2}$$

$$\begin{matrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0 & -0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08588 & 0.17955 & 0 & -0.08588 & 0.50749 \\ 0 & 0.17955 & 0.73888 & 0 & -0.17955 & 0.69752 \\ -0.40 & 0 & 0 & 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.08588 & -0.17955 & 0 & 0.08588 & -0.50749 \\ 0 & 0.50749 & 0.69752 & 0 & -0.50749 & 3.3624 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.8304 \\ -33.5209 \\ -5.9209 \\ -13.6643 \\ -19.2402 \\ 5.7046 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5336 \\ 0.6055 \\ -2.9599 \\ -1.5336 \\ -0.6055 \\ 7.8039 \end{Bmatrix} \text{ Barra 3}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 1.5336 \\ 11.1725 \\ -3.6122 \\ -1.5336 \\ -11.1725 \\ 5.5862 \\ -1.5335 \\ 12.8274 \\ -3.0062 \\ 1.5335 \\ -12.8274 \\ 12.2057 \\ -1.5336 \\ 0.6055 \\ -2.9599 \\ -0.6055 \\ 7.8039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10.567 \\ 8.546 \\ 0 \\ 13.433 \\ -20.010 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5336 \\ 11.1725 \\ -3.6122 \\ -1.5336 \\ -11.1725 \\ 5.5862 \\ -1.5335 \\ 12.8274 \\ -3.0062 \\ 1.5335 \\ -12.8274 \\ 12.2057 \\ -1.5336 \\ 11.1725 \\ 5.5861 \\ -1.5336 \\ 12.8275 \\ -12.2061 \end{bmatrix}$$

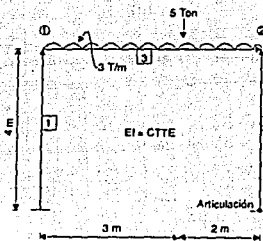


Las fuerzas se obtuvieron en sistema global.  
El equilibrio se verifica en cada nudo.

Resolver el siguiente marco

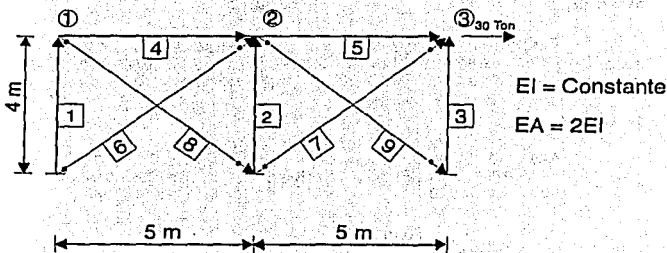
1.- Numerar nudos barras y obtener  $\{F\}$  y  $\{PE2\}$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9.26 \\ -8.65 \\ 0 \\ -10.74 \\ 9.85 \end{Bmatrix} \quad \{PE2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.65 \\ -9.85 \end{Bmatrix}$$





Resolver la siguiente estructura combinada



1.- Numeramos nudos, barras y obtenemos  $\{F\}$  y  $\{P_{ex}\}$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 7.50 \\ 0 \\ 0 \\ 15.0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{P_{ex}\} = \{0\}$$

2.- Obtenemos los diferentes  $K_i$  en sistema global.  
Barras 1, 2 y 3

$$[K_{AA}] = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI \quad [K_{AB}] = \begin{bmatrix} -0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & -0.50 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.50 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_{BB}] = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} EI$$

Barras 4 y 5

$$[K_{AA}] = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.80 \end{bmatrix} EI \quad [K_{AB}] = \begin{bmatrix} -0.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.40 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_{BB}] = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & -0.24 & 0.80 \end{bmatrix} EI$$

Barras 6 y 7

$$[K_{AA}] = \begin{bmatrix} 0.19047 & 0.15238 & 0 \\ 0.15238 & 0.12190 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} EI = [K_{BB}] ; [K_{AB}] = [K_{BA}] = -[K_{AA}]$$

Barras 8 y 9

$$[K_{AA}] = \begin{bmatrix} 0.19047 & -0.15238 & 0 \\ -0.15238 & 0.12190 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} EI = [K_{BB}] ; [K_{AB}] = [K_{BA}] = -[K_{AA}]$$

3.- Formación de la matriz de rigidez y obtención de desplazamientos.

$K_{BB1} + K_{AA4} + K_{AA8}$	$K_{BA4}$	0
	$K_{BB2} + K_{BB4} + K_{AA5} + K_{BB6} + K_{AA9}$	$-K_{AB5}$
		$K_{BB3} + K_{BB5} + K_{BB7}$

Resolviendo las operaciones indicadas resulta.

0.7780	-0.1524	0.375	-0.40	0	0	0	0	0	EI	$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ \varphi_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ \varphi_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.50 \\ 0 \\ 0 \\ 15.0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{d\} = \begin{bmatrix} 30.0643 \\ 9.9754 \\ -6.6914 \\ 29.6496 \\ 0 \\ -4.0591 \\ 30.0643 \\ -9.9754 \\ -6.6914 \end{bmatrix} 1/EI$
	0.7179	0.24	0	-0.096	0.24	0	0	0		
		1.80	0	-0.24	0.40	0	0	0		
			1.3684	0	0.375	-0.40	0	0		
				0.2356	0	0	-0.096	0.24		
					2.80	0	-0.24	0.40		
						0.7780	0.1524	0.375		
							0.7179	-0.24		
								1.80		

Obtención de fuerzas finales en sistema global. (omitimos los EI)

$\begin{bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{bmatrix}$	-0.1875	0	-0.375	=	$\begin{bmatrix} 30.0643 \\ 9.9754 \\ -6.6914 \end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} -3.1278 \\ -4.9877 \\ 7.9284 \\ 3.1278 \\ 4.9877 \\ 4.5827 \end{bmatrix}$	Barra 1
	0	-0.50	0					
	0.375	0	0.50					
	0.1875	0	0.375					
	0	0.50	0					
	0.375	0	1					

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & -0.50 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.50 \\ 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 29.6496 \\ 0 \\ -4.0591 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.0401 \\ 0 \\ 9.0891 \\ 4.0401 \\ 0 \\ 7.0595 \end{Bmatrix} \text{ Barra 2}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & -0.50 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.50 \\ 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30.0643 \\ -9.9754 \\ -6.6914 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.1278 \\ 4.9877 \\ 7.9284 \\ 3.1278 \\ -4.9877 \\ 4.5827 \end{Bmatrix} \text{ Barra 3}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0 & -0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.80 & 0 & -0.24 & 0.40 \\ -0.40 & 0 & 0 & 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.40 & 0 & -0.24 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30.0643 \\ 9.9754 \\ -6.6914 \\ 29.6496 \\ 0 \\ -4.0591 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1659 \\ -1.6225 \\ -4.5827 \\ -0.1659 \\ 1.6225 \\ -3.5293 \end{Bmatrix} \text{ Barra 4}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0 & -0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.80 & 0 & -0.24 & 0.40 \\ -0.40 & 0 & 0 & 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.40 & 0 & -0.24 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 29.6496 \\ 0 \\ -4.0591 \\ 30.0643 \\ -9.9754 \\ -6.6914 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1659 \\ -1.6225 \\ -3.5297 \\ 0.1659 \\ 1.6225 \\ -4.5827 \end{Bmatrix} \text{ Barra 5}$$

$$[F] = [T][F]$$

GLOBAL LOCAL

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1805 & -0.1524 & 0 \\ -0.1524 & -0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1805 & 0.1524 & 0 \\ 0.1524 & 0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 29.6496 \\ 0 \\ -4.0591 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.6474 \\ -4.5180 \\ 0 \\ 5.6474 \\ 4.5180 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.2324 \\ 0 \\ 7.2324 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Barra 6}$$

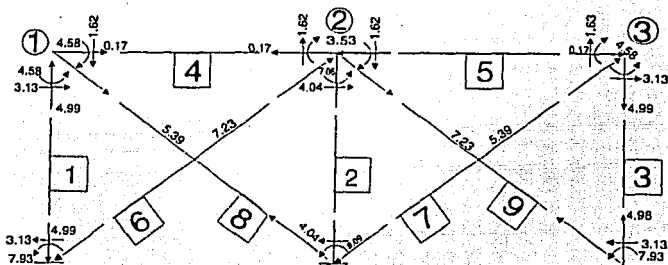
GLOBAL LOCAL

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1905 & -0.1524 & 0 \\ -0.1524 & -0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1905 & 0.1524 & 0 \\ 0.1524 & 0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30.0643 \\ -9.9754 \\ -6.6914 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.2063 \\ -3.3652 \\ 0 \\ 4.2063 \\ 3.3652 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.3869 \\ 0 \\ 0 \\ 5.3869 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Barra 7}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1905 & -0.1524 & 0 \\ -0.1524 & 0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1905 & 0.1524 & 0 \\ 0.1524 & -0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30.0643 \\ -9.9754 \\ -6.6914 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.2063 \\ -3.3652 \\ 0 \\ -4.2063 \\ 3.3652 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5.3869 \\ 0 \\ 0 \\ -5.3869 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Barra 8}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{XA} \\ P_{YA} \\ M_A \\ P_{XB} \\ P_{YB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1905 & -0.1524 & 0 \\ -0.1524 & 0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1905 & 0.1524 & 0 \\ 0.1524 & -0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 29.6496 \\ 0 \\ -4.0591 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.6474 \\ -4.5180 \\ 0 \\ -5.6474 \\ 4.5180 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 7.2324 \\ 0 \\ 0 \\ -7.2324 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Barra 9}$$

Finalmente resulta:



El equilibrio se verifica en cada nudo. ■



# Nociones de análisis plástico en estructuras

### 9.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Hasta esta parte del trabajo se han expuesto una serie de teorías y procedimientos de análisis estructural que son válidas únicamente cuando los materiales que forman el sistema estructural obedecen a un comportamiento elástico (ley de Hooke). Sin embargo, y puesto que algunos materiales estructurales son dúctiles, debe estudiarse el comportamiento de esos materiales más allá del límite elástico.

Los aceros de gran ductilidad presentan las características plásticas más adecuadas desde el punto de vista del análisis plástico.

Como punto de partida, describiremos a continuación los puntos característicos de la curva esfuerzo-deformación típica para un acero dúctil sometiendo una probeta a la acción de una fuerza de tensión, figura 9.1.

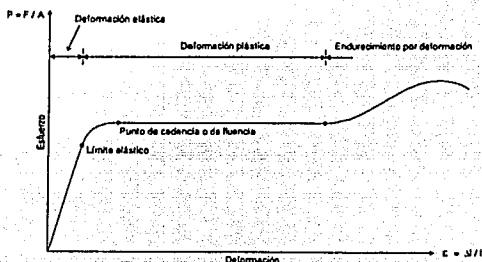


Figura 9-1. Gráfica esfuerzo-deformación.

— Límite elástico. Corresponde al punto máximo esfuerzo-deformación, para el cual las deformaciones crecen en forma proporcional (lineal) al crecer el esfuerzo y antes de este punto las deformaciones son removibles, es decir, desaparecen al retirar el esfuerzo.

- **Punto de cedencia.** Es el punto para el cual se inicia un aumento notable en la deformación sin que se induzca el correspondiente aumento de fuerza unitaria. Este es el primer punto de la gráfica donde la tangente a la curva es horizontal. El punto de cedencia o de fluencia es probablemente la propiedad más importante del acero estructural, pues los procedimientos usuales de diseño se basan en este valor (con excepción de los elementos en compresión donde el pandeo puede ser más importante). Los esfuerzos admisibles empleados en estos métodos, normalmente se toman como una función del esfuerzo de fluencia.
- **Intervalo de fluencia plástica.** Es el intervalo dentro de la curva para el cual se produce un considerable aumento de la deformación sin que exista incremento de esfuerzo. Los valores que esta alcanza generalmente son de 10 a 15 veces los de la deformación elástica.

Si el esfuerzo en algún punto de una estructura de acero alcanza el punto de fluencia, sin parte cederá en ese lugar sin aumento alguno del esfuerzo evitando así una falla prematura. Esta ductilidad permite que se reajusten los valores del esfuerzo en una estructura de acero, si no se tuviera esta capacidad, el acero llegaría a romperse súbitamente como cualquier material frágil.

- **Endurecimiento por deformación.** Es el intervalo para el cual es necesario un esfuerzo adicional. La curva ascenderá luego hasta el máximo valor real del esfuerzo (resistencia última) y descenderá posteriormente hasta el punto de ruptura. Al presentarse la falla en los aceros dúctiles, las deformaciones totales son de 150 a 200 veces las deformaciones elásticas.

En el diseño por deformación plástica, en lugar de tomar como base del análisis el método del esfuerzo permisible, el análisis de una estructura se realiza tomando en cuenta la máxima carga que puede soportar el conjunto. Es muy importante recalcar que si un cierto acero es frágil, la teoría plástica no debe aplicarse.

## 9.2 ARTICULACIONES PLÁSTICAS

Si aplicamos una carga a la viga de la figura 9.2a, y aumentamos esta carga paulatinamente, puede ocurrir una distribución lineal del esfuerzo hasta alcanzar el valor de fluencia ( $F_y$ ) en las fibras extremas (figura 9.2b). El momento de fluencia  $M_{fy}$  para una sección transversal se define como el valor del momento flexionante que producirá el esfuerzo de fluencia plástica en las fibras extremas de la sección.

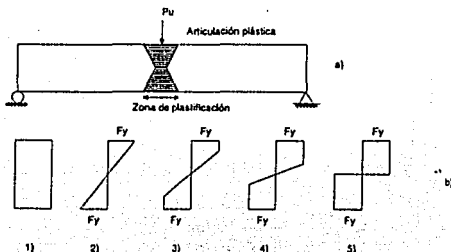


Figura 9-2.

Si se aumenta aun más la intensidad de la carga, y por consiguiente el momento flexionante, las fibras extremas comienzan a ceder y a partir de aquí continuarán teniendo el mismo valor de esfuerzo. La fluencia plástica se va extendiendo a otras fibras próximas a la sección de máximo momento flexionante. A la vez el aumento del momento externo hace que el esfuerzo de cedencia se extienda a fibras más cercanas al eje neutro, figuras 9.26 2) y 9.26 3). Este proceso continua hasta que se tenga una distribución totalmente plástica (figura 9.26 4). En ese momento se ha formado una articulación plástica figura 9.26 4. La longitud de la viga a la cual se extiende esta cedencia depende de las condiciones de carga y de la sección del elemento. Para el caso de una carga concentrada  $P_0$  aplicada con sección rectangular, la cedencia en las fibras extremas en el momento de la formación de la articulación plástica se habrá extendido hasta un tercio del claro. En circunstancias semejantes, la fluencia en una viga de ala ancha (sección I) se extenderá aproximadamente a un octavo del claro. Cualquier momento flexionante posterior ejercido en la sección, hará que la viga gire como cuerpo rígido, con un pequeño incremento del esfuerzo.

El momento de plasticidad es el momento flexionante que produce una distribución totalmente plástica en la sección, creando así una articulación plástica. La relación entre el momento de plasticidad  $M_p$  y el momento de fluencia  $m_y$ , recibe el nombre de factor plástico de forma, esto se escribe como:

$$m_p = \frac{M_p}{M_y} \quad 9.1$$

En las secciones rectangulares,  $M_p$  es igual a 1.50 y varía aproximadamente de 1.10 a 1.20 en las secciones comunes del acero laminado.

### 9.3 TEOREMA FUNDAMENTAL

La base fundamental en la que se apoya la teoría del análisis plástico consiste en afirmar que se producen cambios muy significativos en la distribución de esfuerzos, en la sección de un elemento, una vez que se ha alcanzado el punto de fluencia. Según esta teoría, las puntas de la estructura que han llegado al punto de fluencia no pueden ya soportar esfuerzos adicionales. Sin embargo y en vez de esto cederán lo suficiente para permitir que los esfuerzos se redistribuyan a otras zonas de la estructura en las cuales no se haya alcanzado el punto de fluencia y en donde se pueden recibir esfuerzos adicionales.

Este tipo de análisis supone además que la gráfica esfuerzo-deformación tiene la forma ideal de la figura 9-3.

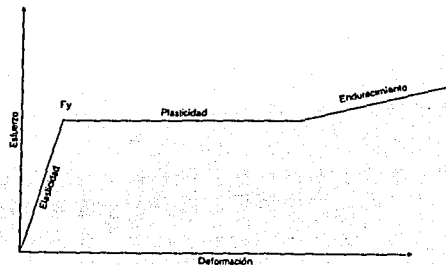


Figura 9-3.

La figura considera que el límite elástico y el punto de fluencia se encuentra en el mismo punto y después de esto la gráfica se vuelve completamente horizontal para el intervalo plástico. Finalmente se presenta la zona de endurecimiento por deformación, donde se incrementa un poco más la resistencia del elemento pero a deformaciones muy grandes.

Ahora se presentan algunas definiciones que son básicas para el entendimiento de la teoría del análisis plástico.

—Módulo de plástico de sección

El momento de fluencia  $M_f$  se define como el producto del esfuerzo de fluencia ( $F_y$ ) por el módulo de sección ( $s = I/y$ ) y puede deducirse a partir de la figura 9.4.

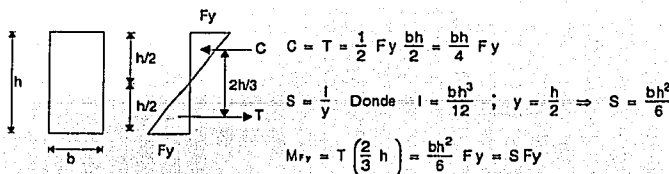


Figura 9-4. Momento de fluencia y módulo elástico.

Puede entonces observarse que el módulo elástico para una sección rectangular es  $bh^2/6$ . El momento resistente de la misma sección rectangular en estado totalmente plástico, por consiguiente se obtendrá en forma semejante, considerase para esto la figura 9.5.

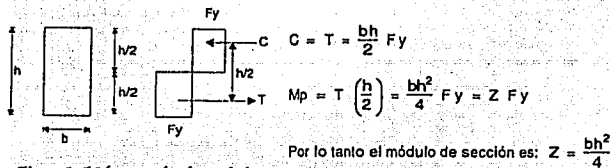


Figura 9-5 Momento de plasticidad y módulo plástico.

Se dice entonces que el momento de plasticidad es igual al producto del esfuerzo de fluencia por el módulo plástico de sección.

El factor plástico de forma para una sección rectangular será entonces (ecuación 9.1)

$$m_p = \frac{M_p}{M_{r_f}} = \frac{Z F_y}{S F_y} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1.5$$

Mediante este análisis inferimos que el módulo plástico de sección es igual al momento estático de las áreas de tensión y compresión respecto al eje neutro. A menos que la sección sea simétrica, el eje neutro para el estado plástico no está en la misma posición que en el caso de condición elástica. La compresión total debe ser igual a la tensión total, por lo tanto las áreas arriba y abajo del eje neutro deben ser las mismas. Es importante señalar sin embargo, que esta situación no es válida para secciones asimétricas en condiciones elásticas.

—Mecanismo de colapso

El diseño plástico es de poca aplicación en el caso de estructuras isostáticas pero de gran utilidad en el caso de las estructuras hiperestáticas. Esto se debe a que, si por ejemplo cargamos una estructura isostática hasta producir una articulación plástica, dicha estructura se vuelve desde ese momento inestable. Consideremos la viga isostática de la figura 9.5. Cualquier incremento adicional de la carga producirá el colapso o ruina de la estructura.

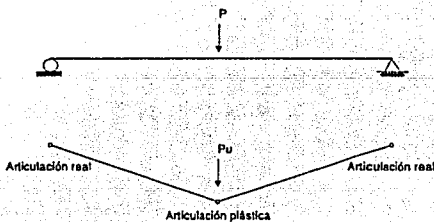


Figura 9-6.

Si consideramos en cambio una estructura hiperestática, para que haya una falla debe haber más de una articulación plástica. Como ejemplo considere las dos vigas hiperestáticas de la figura 9.7. En cualquiera de estas, una vez que aparece la primera articulación plástica (sección de momento máximo) habrá una redistribución de esfuerzos que permitirá un incremento adicional en la carga. El colapso se presentará entonces hasta que haya el número suficiente de articulaciones para hacer inestable a la estructura.

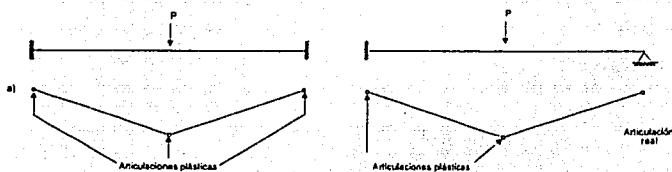


Figura 9-7.

Estas articulaciones pueden ser la combinación de plásticas y/o reales. Así entonces, la disposición de las articulaciones plásticas y quizás de las reales que producen la falla, recibe el nombre de mecanismo de colapso. La figura 9.7 muestra los dos casos más comunes y su mecanismo de colapso respectivo.

## 9.4 MÉTODO DEL EQUILIBRIO

Este procedimiento, basado en la teoría del análisis plástico, se utiliza corrientemente para calcular los momentos de plasticidad, la distribución de momentos cuando se ha formado la articulación plástica y con él se determinan también las cargas últimas que provocan la falla de la estructura. Para su mejor comprensión, se analizan algunos ejemplos simples.

Considérese la siguiente viga doblemente empotrada que se muestra en la figura 9.8. Esta viga soporta una carga repartida  $W = 8.73 \text{ Tm}$ , incluyendo peso propio. Haciendo un análisis elástico normal seleccionamos una viga  $W$  con  $F_y = 2.530 \text{ kg/cm}^2$  y las siguientes características.

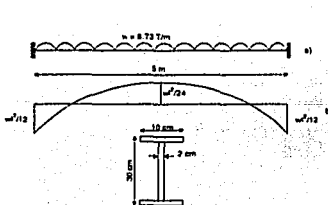


Figura 9-8.

Al seguir incrementando la carga  $W$ , los momentos en los extremos permanecen constantes y aumentará solo en el interior de la viga. La carga puede seguir creciendo hasta que algún punto dentro del claro de la viga, en este caso el centro, alcanza el valor del momento de plasticidad. En ese instante se formará una tercera articulación plástica, la cual crea el mecanismo de colapso que hará fallar a la viga, figura 9.10.

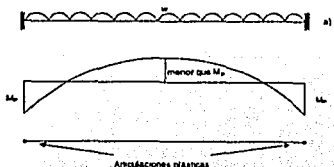


Figura 9-9.

$$\begin{aligned} A &= 92 \text{ cm}^2 \\ I &= 10783 \text{ cm}^4 \\ S &= 718.9 \text{ cm}^3 \\ Z &= 897.92 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Se desea determinar el valor de la carga  $W_u$  que provoca el colapso de la estructura.

Los momentos máximos para la viga en estudio son los mostrados en la figura 9.8b. Si incrementamos la carga  $W$  más allá del límite elástico se formarán articulaciones plásticas primeramente en los extremos de la viga según se ve en la figura 9.9c. A pesar de esto, la viga no puede fallar todavía y además se convertirá en una viga simplemente apoyada (con momentos  $M_p$  en sus extremos) como se observa en la figura 9.9c y c.

Obtenemos ahora la ecuación de momento flexionante en función de la longitud, sobre la figura 9.10a. Esta queda:

$$M = -M_p + \frac{W_u l}{2} (x) - \frac{W_u x^2}{2}$$

Si ahora  $x = l/2$

$$M = -M_p + \frac{W_u l^2}{8}$$

Sin embargo, observando la figura 9.10b vemos que el momento en  $l/2$  vale  $M_p$ . Entonces igualamos a la ecuación anterior.

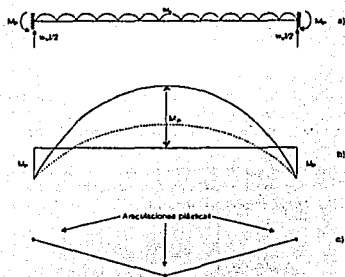


Figura 9-10.

$$M_p = -M_p + \frac{w_u l^2}{8}$$

Y obtenemos que:

$$w_u = \frac{16M_p}{l^2}$$

Ahora obtenemos el momento de plasticidad que queda:

$$M_p = F_y Z = (2530)(897.92) = 2271738 \text{ kg-cm}$$

$$M_p = 22.72 \text{ T}\cdot\text{m}$$

Entonces:

$$w_u = \frac{16(22.72)}{5^2} = 14.54 \text{ Ton/m}$$

Y el factor de seguridad por deformación plástica es:

$$F_s = \frac{w_u}{w} = \frac{14.74}{8.73} = 1.67$$

Sin embargo, el problema anterior puede resolverse también haciendo las siguientes consideraciones según la figura 9.11.

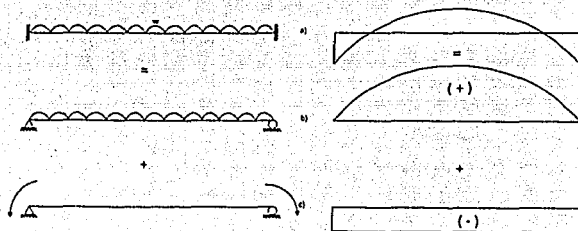


Figura 9-11.

Vemos entonces que una viga doblemente empotrada con carga uniforme es igual a una viga simplemente apoyada con la carga uniforme más otra viga simplemente apoyada con momentos de empotramiento en sus extremos. Por lo tanto, el diagrama de momento flexionante para la viga doblemente empotrada con carga uniforme es igual al diagrama de momentos de la viga simplemente apoyada con carga uniforme más el diagrama de momento de la viga simplemente apoyada con momentos en sus extremos. Así, para nuestro ejemplo, el valor de  $M_p$  se calcula según la figura 9.12 como:

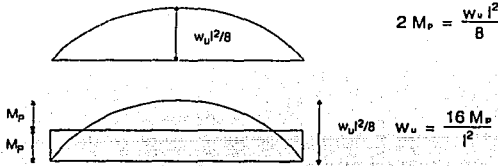


Figura 9-12.

Que es el mismo que se obtuvo anteriormente. Como siguiente ejemplo consideremos la viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro de la figura 9.13.

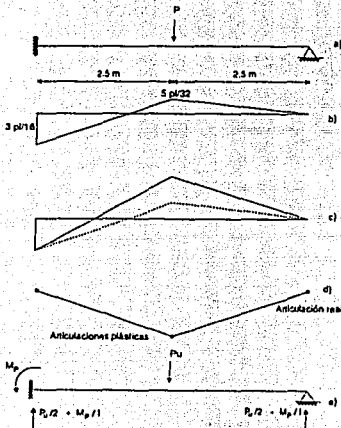


Figura 9-13.

Esta viga tiene la misma sección del ejemplo anterior y al diseñarla por el método elástico vemos que puede soportar una carga  $P = 19.4$  Ton. El diagrama de momentos en condiciones elásticas es el de la figura 9.13b, donde vemos que el momento máximo se localiza en el extremo empotrado. Esto significa que si incrementamos la carga  $P$ , la articulación plástica se formará primeramente en el extremo empotrado y después de esto la viga actuará como simplemente apoyada (con un momento  $M_p$  en el extremo empotrado) ya que tendrá una articulación plástica y una real. Un aumento en la carga  $P$  no modifica el momento en el empotramiento pero si se incrementa en el interior del claro. La carga  $P$  puede crecer hasta que se alcance el momento de plasticidad en algún otro lugar dentro del claro, en este caso en el centro de claro, en ese momento se formará el mecanismo de colapso que hará fallar a la estructura, figura 9.13c y d. Las fuerzas que actúan en el momento de la falla se muestran en la figura 9.13e. Si obtenemos la ecuación de momento flexionante para esta última figura nos queda que:



$$M = \left( \frac{P_u}{2} + \frac{M_p}{l} \right) X - M_p$$

Y si  $x = l/2$

$$M = \frac{P_u l}{4} + \frac{M_p}{2} - M_p$$

Y recordando que en  $x = l/2$   $M = M_p$  podemos igualar

$$M_p = \frac{P_u l}{4} + \frac{M_p}{2} - M_p \quad \text{Para } l = 5 \text{ m nos quedará}$$

$$P_u = \frac{6}{5} M_p$$

$$M_p = 22.72 \text{ Ton-m} \quad P_u = 27.264 \text{ Ton}$$

Si utilizamos el segundo método y consideramos la figura 9.14 tenemos que el momento en el centro del claro es:

$$M_p = \frac{P_u l}{4} - \frac{M_p}{2}$$

Y despejando

$$P_u = \frac{6}{5} M_p$$

El resto del cálculo es el mismo. Además:

$$FS = \frac{27.264}{19.40} = 1.41$$

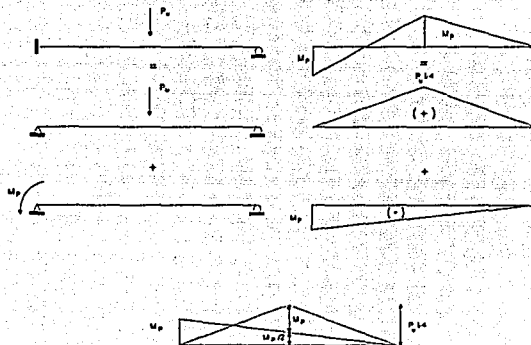


Figura 9-14.

*En épocas anteriores se comenzó a utilizar ese tipo de análisis pero ocurrieron algunas fallas desastrosas por fatiga, por esta razón se detuvo por mucho tiempo el empleo de este tipo de análisis. A pesar de esto, la aceptación de la teoría a ido en aumento aunque en forma muy lenta, y a últimas fechas se cuenta ya con bastante información acerca del acero de tipo dúctil. ■*

---

## Bibliografía

---

1. West, Harry H., *Análisis Estructural*. Edit. CECSA, 1984, México.
2. Hayretin Kardestuncer, *Introducción Análisis estructural*. Edit. Mc Graw Hill, Colombia.
3. Wang, Chu-Kia, *Introducción al análisis estructural*. Edit. CECSA, 1979, México.
4. Gere, Timoshenko, *Mecánica de materiales*. Grupo Editorial Iberoamericano, México.
5. Livesley R. K., *Métodos matriciales para el cálculo de estructuras*. Edit. Blume, 1970, España.
6. Jan J-Tuma, *Análisis estructural*. Edit. Mc Graw Hill, México.
7. Benson, Wilbur, John, *Análisis elemental de estructuras*. México.
8. Albiges, Maurice, *Estudio de las estructuras*. Editores Técnicos Asociados; 1971, España.
9. Mc. Cormac, Jack, *Análisis Estructural*. Edit. Harla; 1983, México.
10. Juang-Ju Hsieh, *Teoría elemental de estructuras*. Edit. Prentice, España.
11. Solar González, Eduardo, *Apuntes de álgebra lineal*. Edit. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. 1987, México.
12. Howard, Anton, *Álgebra lineal*. Edit. Limusa, México.
13. Facultad de Ingeniería, *Apuntes de análisis estructural*. Edit. U.N.A.M., México.
14. Triana Sánchez H. Darío *Tópicos y aplicaciones de microcomputadoras al análisis estructural (Tesis.)* E. N. E. P. Aragón, México. ■