

34  
2E



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DUALIDAD Y TRAZA  
EN CATEGORÍAS DE MARAÑAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:

MARTHA SUSANA VÉLEZ ESTÉVEZ

DIRIGIDA POR:  
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



MÉXICO, D. F.

1995

FALLA DE ORIGEN.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE**  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Facultad de Ciencias  
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron LA pasante(s) MARTHA SUSANA VELEZ ESTEVEZ

con número de cuenta 8863044-1 con el Título: \_\_\_\_\_

"DUALIDAD Y TRAZA EN CATEGORIAS DE MARAÑAS"

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
DOCTOR	CARLOS	PRIETO DE CASTRO	
Director de Tesis	RAYMUNDO	BAUTISTA RAMOS	
DOCTOR	MARCELO	AGUILAR GONZALEZ DE LA VEGA	
MAT.	VICTOR	NEUMANN LARA	
Suplente	MARIO	EUDAVE MUÑOZ	
DOCTOR			
Suplente			

*Con cariño :*

*A mis papas, Susana Estevéz y Jorge E. Vélez.*

*A mis hermanos, Norma, Virginia, y Jorge .*

*A mis hijitos, Adriana Carolina y Enrique Alain*

*y a mi esposo Enrique Antoniano Mateos.*

## **Agradecimientos**

Aprovecho estas líneas para agradecer a quienes cooperaron en la elaboración de esta tesis y también a los profesores que contribuyeron en mi formación académica durante la carrera, así como a todas las personas que me apoyaron durante mi estancia en la ciudad de México.

Antes que nada quiero dar las gracias a todos aquéllos que de alguna manera me ayudaron a ingresar a la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Matemáticas de la UNAM. En particular doy las gracias Víctor Neumann, quien me impulsó para que viniera a continuar en la UNAM mis estudios iniciados en la U de G, brindándome su apoyo como asesor; también agradezco en forma muy especial a Carlos Prieto el haber aceptado dirigir esta tesis. Además de su apoyo, atenciones y tiempo que me prestó desde mi llegada al Instituto de Matemáticas, agradezco las revisiones, correcciones y sugerencias que hizo a este trabajo. También quiero agradecer a Raymundo Bautista, Marcelo Aguilar, Mario Eudave y Fico su revisión detallada a este trabajo y sus valiosos comentarios.

Agradezco a todos los miembros del Instituto de Matemáticas que siempre me dieron su apoyo, en particular a Luis Montejano y a Angel Carrillo, por toda su confianza.

A los siguientes profesores quiero agradecerles todos los conocimientos y consejos que me brindaron y que ahora son parte de mi formación, y a los cuales estimo de manera especial: Carlos Hernández Garcíadiego, Emilio Lluís Riera, Luis Montejano, Víctor Neumann, J.A. De la Peña y Carlos Prieto.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a su Facultad de Ciencias hago patente mi agradecimiento por haberme admitido como su estudiante, así como a la Universidad de Guadalajara por permitirme el cambio. En especial doy gracias al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por la beca y todo lo demás que me otorgó y por haberse convertido en mi segundo hogar.

No quiero dejar pasar la ocasión para expresar con mucho cariño mi profundo agradecimiento a Francisco Reynoso, Ziomara de Reynoso, Pancho y Ziomarita por el cariño y apoyo que me dieron al haberme acogido en su hogar; los considero parte de mi familia.

También agradezco a Amparo Galindo su amistad y apoyo.

Por último y con especial cariño, doy las gracias a mi papá, mi mamá y mis hermanos por motivarme a seguir mis estudios en la ciudad de México y en especial a mi esposo y mis pequeños hijos por haberme cedido tanto de su tiempo para la terminación de este trabajo.

## Introducción

El presente trabajo, titulado "*Dualidad y Traza en Categorías de Marañas*", tiene por objeto exponer algunos temas que han surgido como consecuencia del desarrollo reciente de la Teoría de Nudos. Resaltan los trabajos de Vaughan Jones que dieron como resultado el descubrimiento, en la primavera de 1984, de un invariante polinomial en una variable de enlaces. En el otoño del mismo año, se obtuvo una generalización de los polinomios de Alexander-Conway y de Jones, a un solo polinomio en dos variables, el cual es conocido ahora como el polinomio de Jones-Conway. Esto ha tenido un fuerte impacto en el área en la última década.

Estudiamos la ecuación de Yang-Baxter, cuyas soluciones tienen importantes aplicaciones en distintas áreas de la física. Estas soluciones tienen formas muy diversas de aparecer. Entre otras cosas son valores de un funtor en cierto tipo de maraña. Así, el estudio desde el punto de vista categórico de las marañas permite, no sólo describir soluciones a la ecuación de Yang-Baxter, sino estudiar invariantes más generales de marañas y, en particular, como ya se dijo, de enlaces.

En el *Capítulo I* de la tesis se presentan los conceptos generales de trenzas y marañas. Se estudia la estructura de grupo que tiene el conjunto de trenzas y se extiende esta estructura a la de categoría que tienen las marañas.

Ya que en este trabajo se va a explotar la estructura categórica de la colección de marañas, en el *Capítulo II* se estudian algunos conceptos generales de teoría de categorías. Los más relevantes son los conceptos de transformación natural y el de funtor adjunto, que serán indispensables para estudiar cuestiones de dualidad.

En el *Capítulo III* se estudian específicamente las estructuras categóricas de las categorías de marañas. Se introduce el producto tensorial de marañas, que da la estructura de categoría monoidal y se analiza la dualidad y el concepto más rico de pivotalidad. Se presentan las categorías de marañas por generadores y relaciones, lo cual permite estudiar la existencia de funtores de las categorías de marañas en otras categorías. El concepto de entrelazamiento sintetiza la esencia de los operadores de Yang-Baxter, de modo que la existencia de ciertos funtores en categorías adecuadas equivale a la de soluciones de la ecuación de Yang-Baxter.

En el *Capítulo IV* se analizan las relaciones entre dualidad y traza en categorías pivotales. Se recuerdan los conceptos discutidos por Dold y Puppe en el caso de categorías simétricas y se estudia el caso no simétrico. La dualidad en las categorías de marañas, nos permite abordar conceptos como el de traza, el cual resulta ser la manera más natural de asociar un enlace a una maraña. Ésta tiene propiedades similares a las que se tienen en la teoría de transformaciones lineales.

Finalmente en el *Capítulo V* se dan aplicaciones y se presentan algunos invariantes de marañas. Como ya se mencionó, se define un funtor de la categoría de marañas orientadas a una cierta categoría de módulos sobre el anillo de polinomios de Laurent en una variable. El valor de este polinomio en enlaces, que son un caso particular de marañas, es un invariante polinomial para aquéllos. Por otro lado, este polinomio es una traza.

# Índice

Agradecimientos.  
Introducción.  
Índice.

## CAPÍTULO I

### TRENZAS Y MARAÑAS

1.1	Trenzas.....	2
1.2	Categoría de trenzas.....	10
1.3	Marañas.....	11
1.4	Categorías de marañas.....	22

## CAPÍTULO II

### TRANSFORMACIONES NATURALES Y FUNTORES ADJUNTOS

2.1	Transformaciones naturales.....	25
2.1	Funtores adjuntos.....	26

## CAPÍTULO III

### ESTRUCTURAS CATEGÓRICAS ASOCIADAS A MARAÑAS

3.1	Categorías monoidales.....	33
3.2	Categorías pivotales.....	39
3.3	Adjunciones en categorías pivotales.....	45
3.4	Generadores y relaciones en categorías de marañas.....	47

## CAPÍTULO IV

### DUALIDAD Y TRAZA

4.1	Traza.....	58
-----	------------	----



## **CAPÍTULO V**

### **INVARIANTES DE MARAÑAS Y R-MATRICES**

<b>5.1</b>	<b>Tensores abstractos.....</b>	<b>67</b>
<b>5.2</b>	<b>Representaciones lineales de la categoría <math>\mathcal{O}A</math>.....</b>	<b>74</b>
<b>5.3</b>	<b>El polinomio de Jones-Conway.....</b>	<b>88</b>
	<b>Apéndice I.....</b>	<b>90</b>
	<b>Apéndice II.....</b>	<b>90</b>
	<b>Referencias.....</b>	<b>92</b>

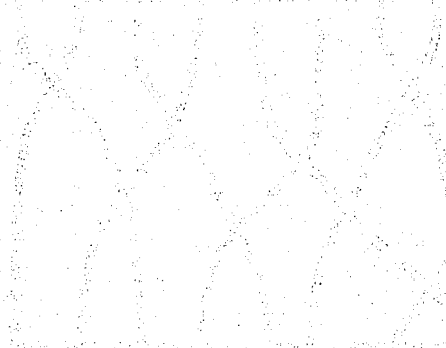
# Case 1:10-cv-00001

## THE UNITED STATES DISTRICT COURT

Case No. 10-10001  
In re: [Redacted]  
[Redacted]

[Redacted]

## EXHIBIT A



## EXHIBIT B

# CAPÍTULO I

---

## TRENZAS Y MARAÑAS

Antes de introducimos a este capítulo, que titulamos trenzas y marañas, hablemos un poco de lo que cotidianamente significa para nosotros la palabra trenza.

Una trenza nos evoca varias imágenes; una de ellas es la de un peinado, en el cual se entrelazan porciones de cabello; otra es la de cordeles, hilos etcétera, entrelazados.

Así, al conceptualizar en matemáticas una trenza, ésta no es más que una abstracción de las ideas anteriores, que intentaremos aclarar en el siguiente ejemplo:

Para tejer una trenza tomemos  $n$  hilos y fijemos cada uno de sus extremos en puntos distintos de una vara, para luego entrelazarlos de manera que no se anude ningún hilo consigo mismo. Finalmente fijemos el otro extremo de cada hilo en puntos distintos de otra vara. El resultado de este proceso es la imagen que queremos tener de una  $n$ -trenza. (figura 1)

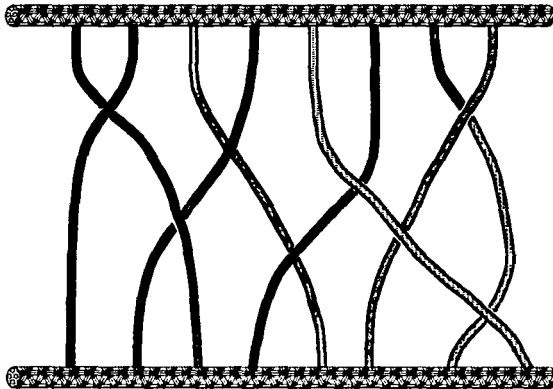


figura 1

Después de esta breve introducción heurística, daremos una descripción matemática del concepto de trenza, conformando así, de una manera general esta teoría, la cual ha tenido un rápido desarrollo en la última década, en el marco de la topología en dimensiones bajas y en la topología algebraica.

## 1.1 Trenzas

### 1.1.1 Conceptos básicos.

Considérense los planos  $P_t = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = t\}$  de cota  $t$ , con  $t \in [0, 1]$  y llámese  $\Omega$  a la región  $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1\}$ , que yace entre los planos  $P_0$  y  $P_1$ , a los cuales llamaremos *plano inferior* y *superior*, respectivamente. Tómense en  $P_0$  y  $P_1$  los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  y  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , de tal forma que  $p_i = (0, i, 0)$  y  $q_i = (0, i, 1)$ .

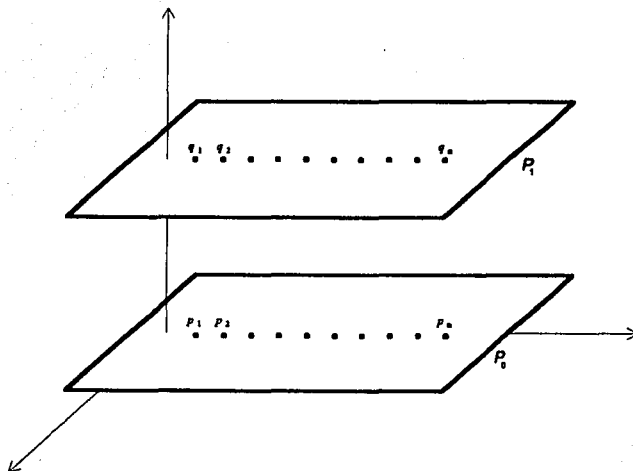


figura 2

Llamaremos arco, a la imagen de una función continua, inyectiva y lineal por pedazos (o diferenciable)  $A : [0,1] \rightarrow R^3$ . Se dice que  $A$  une a los puntos  $P$  y  $Q$ , si  $A(0) = P$  y  $A(1) = Q$  ó  $A(0) = Q$  y  $A(1) = P$ . Identificaremos a la función  $A$  con su imagen.

### 1.1.2 Definición.

Una trenza en  $n$  cuerdas o una  $n$ -trenza, es una familia de  $n$  arcos  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  que yacen en la región  $\Omega$ , tal que el  $i$ -ésimo arco  $A_i$  une a los puntos  $q_i$  y  $p_{\tau(i)}$ , donde  $\tau$  es una permutación de  $\{1, \dots, n\}$ , y que cumplen además las siguientes condiciones:

- (i) Cada arco  $A_i$  intersecta a cada plano  $P_i$  en un solo punto.
- (ii) Cada uno de los planos  $P_i$ , es intersectado por los arcos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  en  $n$  puntos diferentes.

Se dice que la permutación  $\tau$  esta asociada a la trenza  $A$ .

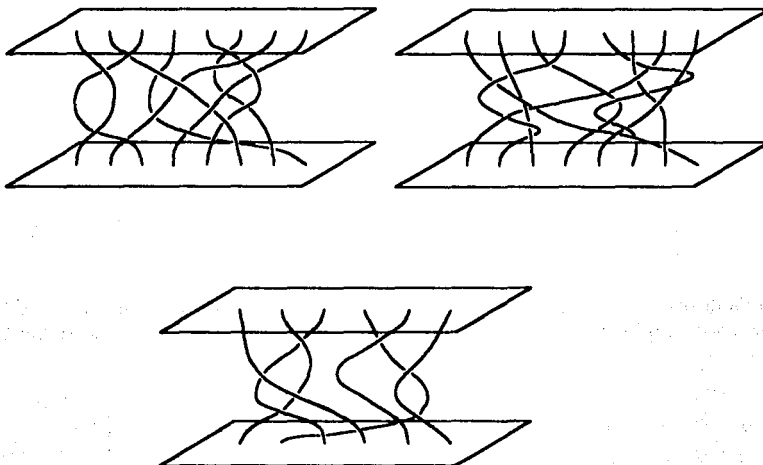


figura 3

### 1.1.3 Ejemplos.

(1) La *n-trenza trivial*  $\varepsilon$ , es la *n-trenza* cuyos arcos son perpendiculares a los planos  $P_i$ .  $\varepsilon$  tiene asociada la permutación trivial.

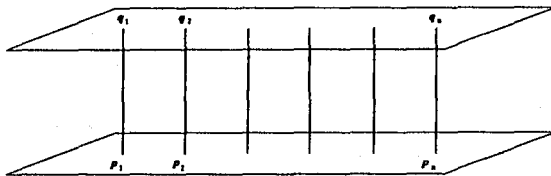


figura 4

(2) La *n-trenza elemental*  $\sigma_i$ , con  $1 \leq i \leq n-1$  es la trenza en la cual el *i-ésimo* arco cruza "por enfrente" del *i+1-ésimo* arco una sola vez, y los arcos restantes son perpendiculares a los planos  $P_i$ , como se ilustra en la figura:

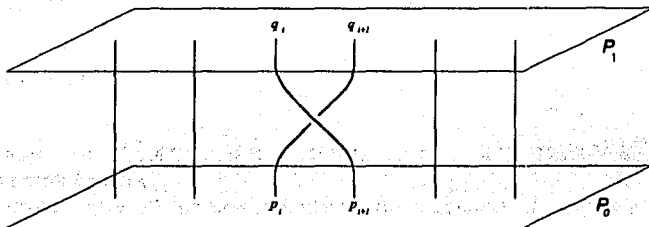


figura 5

La *n-trenza elemental*  $\sigma_i$  tiene asociada a la permutación elemental  $(i, i+1)$ .

(3) La *inversa* de la *n-trenza elemental*  $\sigma_i$ , denotada por  $\sigma_i^{-1}$ , se obtiene al intercambiar su cruce; es decir, colocando el *i-ésimo* arco "por detrás" del *i+1-ésimo* arco.

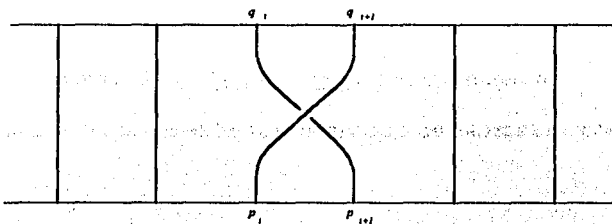


figura 6

(4) La 3-trenza clásica izquierda que denotamos por  $\kappa$ , y su inversa, la 3-trenza clásica derecha denotada por  $\kappa^{-1}$ , se ilustran en la siguiente figura y corresponden a las trenzas que usualmente se hacen con el cabello.

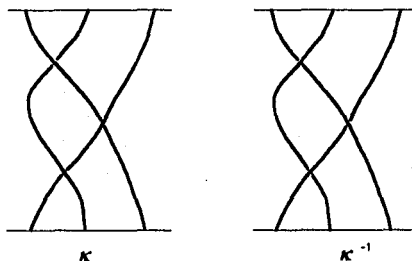


figura 7

Las trenzas clásicas tienen asociada a la permutación  $(1,3)$ .

#### 1.1.4 Definición.

Sean  $A^0 = \{A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0\}$  y  $A^1 = \{A_1^1, A_2^1, \dots, A_n^1\}$  dos trenzas, asociadas a la misma permutación  $\tau$ .

Decimos que  $A^0$  es *equivalente* u *homotópica* a  $A^1$ , denotado por  $A^0 \sim A^1$  si existen  $n$  funciones continuas:

$$F_i: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \Omega \quad \text{con } 1 \leq i \leq n \quad \text{tales que}$$

$$F_i(t,0) = A_i^0(t)$$

$$F_i(t,1) = A_i^1(t)$$

$$F_i(0,s) = q_i \quad \text{con } 0 \leq s \leq 1.$$

$$F_i(1,s) = p_{\tau(i)}$$

y para cada  $s$ ,  $\{F_1(\_,s), \dots, F_n(\_,s)\}$  es una  $n$ -trenza.

El conjunto de tales funciones es llamado *homotopía de trenzas con permutación  $\tau$* .

Aplicando una pequeña homotopía, podemos transformar una  $n$ -trenza en otra con arcos poligonales, que cuando la proyectamos ortogonalmente sobre el plano  $YZ$  tengan cruces transversales en diferentes niveles. De esta manera tendremos el diagrama estándar de la trenza, como se ilustra:

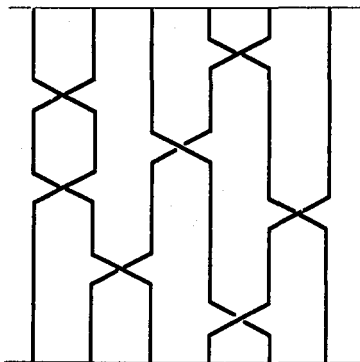
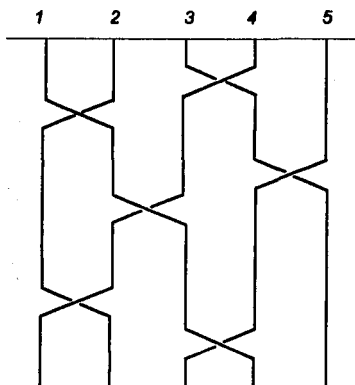


figura 8

Con base en lo anterior, podemos describir una trenza indicando el tipo de cada cruce y su posición en la región  $\Omega$ , como se muestra en la figura:



$$\beta = \sigma_3^{-1} \sigma_1 \sigma_4^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3$$

figura 9



**1.1.5 Definición.**

El **producto o composición** de dos  $n$ -trenzas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  denotado por  $\beta_1 \cdot \beta_2$ , se efectúa colocando la trenza  $\beta_2$  debajo de la trenza  $\beta_1$ , observando para esto que coincidan los puntos del plano inferior de  $\beta_1$  con los del plano superior de  $\beta_2$ , enseguida se "normaliza" la trenza de manera que quede comprendida en la región  $\Omega$  limitada por los planos  $P_0$  y  $P_1$ , es decir, se compone con un homeomorfismo afín adecuado.

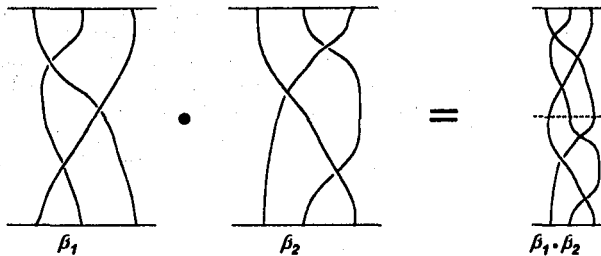


figura 10

**1.1.6 Proposición.** *Cualquier  $n$ -trenza, se puede escribir como producto finito de trenzas elementales  $\sigma_i$  y sus inversos.*

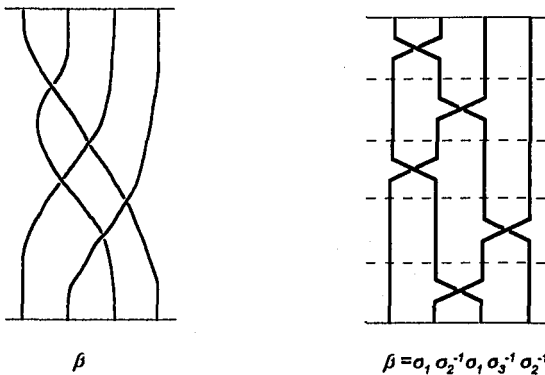


figura 11

**Demostración:** Consideremos cualquier  $n$ -trenza  $\beta$ ; modificando, en su caso por una homotopía, supongamos que  $\beta$  tiene a lo más un cruce en cada nivel. En el caso de que un cruce sea tangencial (los dos arcos se toquen en un punto), por medio de una homotopía se llevará a un cruce transversal. De este modo, podemos subdividir  $\Omega$  en secciones horizontales tal que cada sección contiene un sólo cruce. (véase la figura 11) Este corresponde a una  $n$ -trenza elemental  $\sigma_i$  o a su inversa  $\sigma_i^{-1}$ , con lo cual tenemos, evidentemente, que  $\beta$  es producto de estas  $n$ -trenzas elementales o sus inversas. Así las  $\sigma_i$  generan a cualquier  $n$ -trenza. ♦

Ahora denotemos con  $B_n$  al conjunto de clases de equivalencia (homotopía) de  $n$ -trenzas. La multiplicación de trenzas induce una estructura multiplicativa en  $B_n$ , de manera natural. Nótese que si en la multiplicación, reemplazamos  $\beta_1$  y  $\beta_2$  por trenzas equivalentes  $\beta_1'$  y  $\beta_2'$ , respectivamente, los productos  $\beta_1 \cdot \beta_2$  y  $\beta_1' \cdot \beta_2'$  son equivalentes; de esta forma tenemos que la multiplicación de trenzas está bien definida bajo clases de equivalencia de  $n$ -trenzas, con lo cual se tiene esta multiplicación bien definida en  $B_n$ .

### 1.1.7 Ejemplos.

- (1) La clase de la  $n$ -trenza trivial  $\varepsilon$  es el elemento neutro bajo la multiplicación en el conjunto  $B_n$ .
- (2)  $\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1}$  es equivalente a la  $n$ -trenza trivial  $\varepsilon$ .
- (3) El producto  $\kappa \cdot \kappa^{-1} \sim \kappa^{-1} \cdot \kappa$  es equivalente a la trenza trivial  $\varepsilon$ , si  $\kappa$  es la trenza clásica y  $\kappa^{-1}$  su inversa.
- (4) Sea  $\beta$  una  $n$ -trenza, si  $\beta = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$  entonces su inversa es  $\beta^{-1} = \sigma_k^{-1} \cdot \dots \cdot \sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1^{-1}$

Resumiendo lo anterior, tenemos el siguiente teorema:

**1.1.8 Teorema.** El conjunto  $B_n$  de clases de equivalencia de  $n$ -trenzas, con la estructura multiplicativa definida en 1.1.5, es un grupo cuyo elemento neutro es la  $n$ -trenza trivial. Además,  $B_n$  está generado por las trenzas elementales  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . ♦

Este grupo fue definido por primera vez por E. Artin [ART] en 1925. Por lo cual a  $B_n$  se le conoce como el grupo de Artin de trenzas en  $n$  cuerdas.

1.1.9 **Proposición.** Dada un trenza  $\beta$ , su trenza inversa  $\beta^{-1}$ , se obtiene al reflejar la trenza  $\beta$  con respecto a su plano inferior.

**Demostración:** Utilizando la proposición 1.1.6 descompongamos la trenza  $\beta$  como producto de trenzas elementales  $\sigma_i$  y  $\sigma_i^{-1}$ . Tomando como referencia  $P_0$  reflejemos en el plano  $XY$  a  $\beta$ . La trenza reflejada  $\beta'$  es evidentemente el producto de los inversos de las trenzas elementales que componen  $\beta$ , en orden inverso. Por el ejemplo 1.1.7 (4),  $\beta'$  es la inversa de  $\beta$ .

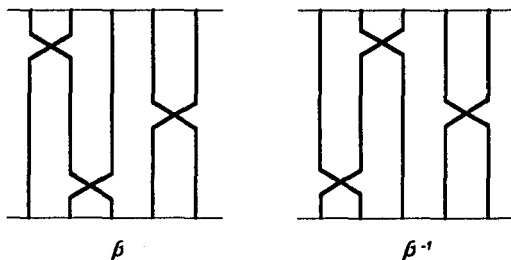


figura 12

1.1.10 Las trenzas elementales  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  generan el grupo  $B_n$  y estos elementos están sujetos a las siguientes relaciones conocidas como las **relaciones de Artin**:

$$(A) \quad \sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i \quad \text{para } |i-j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n-1$$

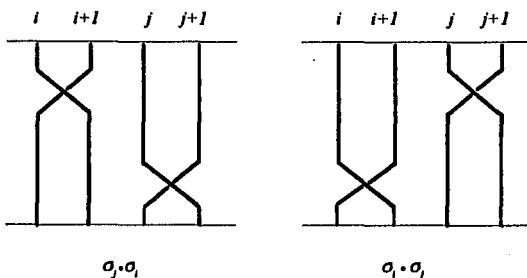


figura 13

$$(B) \quad \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

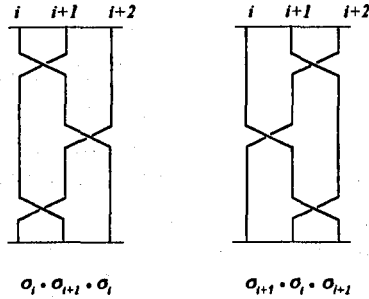


figura 14

Estas relaciones son las únicas que satisfacen los elementos  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in B_n$ . Es decir,  $B_n$  es el grupo generado por  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  con relaciones (A) y (B). (Véase [ART])

## 1.2 Categoría de trenzas

El conjunto de clases de equivalencia de  $n$ -trenzas,  $n \in \mathbb{N}$  constituyen el conjunto de morfismos de una categoría, la **categoría de trenzas**  $\mathcal{B}$ , la cual tiene como objetos a los números naturales incluyendo el cero, y sus morfismos son tales que:

$$\mathcal{B}(n, m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m = 0 \text{ grupo trivial} \\ B_n & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

donde  $B_n$  es el grupo de  $n$ -trenzas de Artin. En esta categoría tenemos definida la operación de composición, la cual, cuando esta definida, está dada por el producto de trenzas.

## 1.3 Marañas

En esta segunda parte del capítulo, introduciremos un concepto que generaliza el concepto de trenza.

### 1.3.1 Conceptos básicos.

Un *circulo en  $\Omega$*  es la imagen de una aplicación inyectiva y lineal por pedazos (o diferenciable) de  $S^1$ , de modo que ésta yace en  $\text{int } \Omega$ . ( $\text{int } \Omega = \{(x,y,z) \mid 0 < z < 1\}$ )

Sea  $\mathfrak{J}$  una familia finita de arcos y círculos, ajenos encajados en  $\Omega$ . Se define su frontera como  $\partial\mathfrak{J} = \{A(0), A(1) \mid A \text{ es arco en } \mathfrak{J}\}$ ; a los puntos  $A(0)$  y  $A(1)$  se les llama puntos frontera de  $\mathfrak{J}$ . La unión de los elementos de  $\mathfrak{J}$  es una 1-subvariedad compacta de  $\Omega$  con frontera.

### 1.3.2 Definición.

Consideremos  $k$  y  $l$  enteros no negativos. Una  $(k,l)$ -*maraña* es una familia  $\mathfrak{J}$  tal que su frontera satisfice:

$\partial\mathfrak{J} = \mathfrak{J} \cap (P_0 \cup P_1) = \{(0, i, 0) \mid i = 1, 2, \dots, l\} \cup \{(0, j, 1) \mid j = 1, 2, \dots, k\}$ , de tal forma que, en cada punto frontera,  $\mathfrak{J}$  es ortogonal a los planos  $P_0$  y  $P_1$ .

A los puntos de la intersección de  $\mathfrak{J} \cap P_0$  les llamamos el *codominio* y a  $\mathfrak{J} \cap P_1$  el *dominio* de la maraña  $\mathfrak{J}$ . Es decir,  $\mathfrak{J}$  es 1-subvariedad con frontera de la 3-variedad con frontera  $\Omega$ .

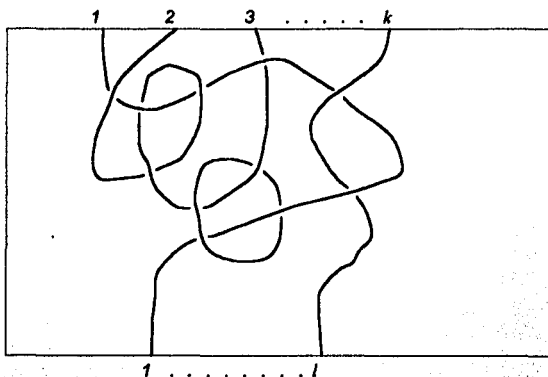


figura 15

Las trenzas son  $(n,n)$ -marañas,  $n \geq 1$ , y los enlaces  $(0,0)$ -marañas; ambos son casos particulares del concepto de maraña.

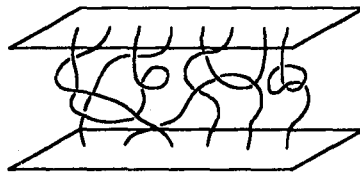
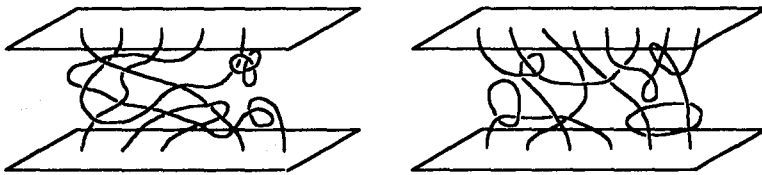
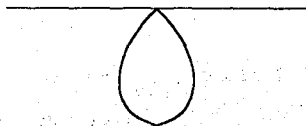


figura 16

Ahora daremos algunos ejemplos que no cumplen las condiciones que definen una maraña:

(1)



(2)

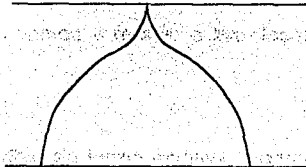


figura 17

En analogía con las trenzas, demostraremos posteriormente, que cada maraña se construye como la composición de un número finito de marañas elementales, las cuales describiremos enseguida:

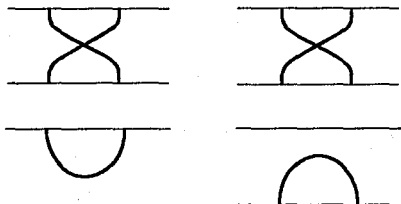


figura 18

### 1.3.3 Definición.

Sea  $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_n \mid A_u \text{ es un arco o un círculo}\}$  y  $\mathfrak{A}' = \{A'_1, \dots, A'_n \mid A'_u \text{ es un arco o un círculo}\}$  dos marañas, tales que  $A_u(v) = A'_u(v)$ ,  $v = 0, 1$ , si  $A_j$  y  $A'_j$  son arcos y  $A_j$  es un círculo si y sólo si  $A'_j$  lo es.

Decimos que  $\mathfrak{A}$  es *isotópica* a  $\mathfrak{A}'$ , si existen  $n$  funciones lineales por pedazos (o diferenciables):

$F_u: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \Omega$  con  $1 \leq u \leq n$  tales que

$$F_u(t, 0) = A_u(t)$$

$$F_u(t, 1) = A'_u(t) \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

$$F_u(0, s) = (0, j, 1), \quad j = 1, \dots, k; \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$F_u(1, s) = (0, i, 0), \quad i = 1, \dots, l$$

y para cada  $s$ ,  $\{F_1(\_, s), \dots, F_n(\_, s)\}$  es una  $(k, l)$ -maraña.

El conjunto de tales funciones es llamado *isotopía de marañas*.

En este contexto, nos vamos a referir a las clases de isotopía de marañas simplemente como marañas.

Ya hemos utilizado arriba, en forma intuitiva, diagramas planos para describir trenzas y marañas. Éstas nos dan una descripción (imagen) abstracta y esquematizada de una maraña en el plano YZ.

### 1.3.4 Definición.

Un *diagrama de maraña* es una figura en el plano  $YZ$ , compuesta de arcos, de modo que:

- (1) Todos se cruzan transversalmente.
- (2) En cada cruce solo concurren dos arcos.
- (3) En cada cruce se indica en forma continua el arco más lejano al plano  $YZ$  y en forma cortada el más cercano, como se indica en la figura.

En otras palabras (3) nos indica cuando un arco pasa "por detrás" o "por enfrente" de otro; por ejemplo en la figura



figura 19

el arco  $a$  cruza "por enfrente" del  $b$ .

### 1.3.5 Definición.

Dado un diagrama de maraña, llamamos *puntos singulares* a:

- (i) Un *cruce*, es decir, un cruce en el cual un arco pasa "por enfrente" o "por detrás" de otro, como se muestra en la figura:



figura 20



(ii) Un *máximo local* o un *mínimo local*, como se ilustra en la figura siguiente:

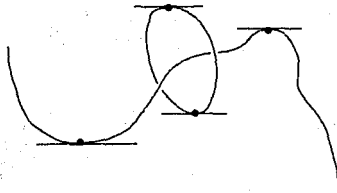


figura 21

### 1.3.6 Definición.

Se dice que un diagrama de maraña esta en posición general si:

- (a) El número de puntos singulares es finito.
- (b) Cada nivel  $R \times \{t\}$ ,  $t \in (0,1)$  contiene a lo más un punto singular.
- (c) Todos los puntos singulares son puntos dobles no tangenciales (es decir no se tocan en un punto), ó máximos ó mínimos locales.

Además dado un diagrama de maraña, éste se puede poner en posición general.

### 1.3.7 Definición.

Dadas dos marañas  $\mathfrak{J}$  y  $\mathfrak{J}'$ , tenemos definidas dos operaciones entre ellas: el producto tensorial " $\otimes$ " y la composición " $\circ$ ".

El producto tensorial  $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{J}'$  de una  $(k,l)$ -maraña  $\mathfrak{J}$  y una  $(k',l')$ -maraña  $\mathfrak{J}'$ , se obtiene colocando  $\mathfrak{J}'$  a la derecha de  $\mathfrak{J}$ , salvo isotopía, como se muestra en la siguiente figura:

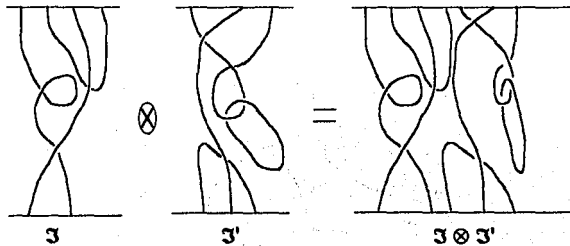


figura 22

La operación  $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{J}'$  es una  $(k+k', l+l')$ -maraña.

Si  $\mathfrak{J}$  es una  $(k,l)$ -maraña y  $\mathfrak{J}'$  es una  $(l,m)$ -maraña,  $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{J}'$  es una  $(k,m)$ -maraña que se obtiene al colocar la maraña  $\mathfrak{J}'$  debajo de  $\mathfrak{J}$ , de tal forma que coincidan el codominio de  $\mathfrak{J}$  con el dominio de  $\mathfrak{J}'$ , salvo un homeomorfismo afín adecuado para "normalizar". Estas operaciones están bien definidas salvo isotopía.

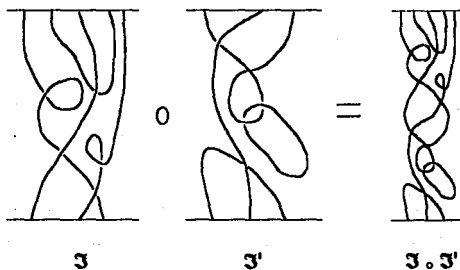


figura 23

A continuación daremos dos definiciones de marañas con estructura adicional.

### 1.3.8 Definición.

Una **orientación de una  $(k,l)$ -maraña**, se obtiene al dar una orientación a cada componente de la variedad  $\mathfrak{J}$ .

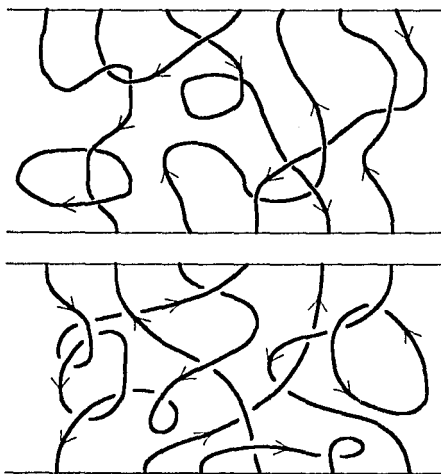


figura 24

Dada una  $(k,l)$ -maraña orientada distinguimos en ella dos sucesiones,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$  y  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$  las cuales corresponden al dominio y codominio respectivamente; en este caso simbolizaremos las orientaciones por los números 1 y -1 bajo el siguiente criterio:

- (a)  $\rho_i = 1$ , si el vector tangente unitario a  $\mathfrak{Z}$  en  $(0, i, 0) \in \partial\mathfrak{Z}$  es igual a  $(0, 0, 1)$ .
- (b)  $\rho_i = -1$ , si el vector tangente unitario a  $\mathfrak{Z}$  en  $(0, i, 0) \in \partial\mathfrak{Z}$  es igual a  $(0, 0, -1)$ .

Esto determina la sucesión  $\{\rho_i\}$ . La sucesión  $\{\nu_j\}$  se define de la misma forma, dependiendo de la dirección del vector tangente unitario a  $\mathfrak{Z}$  en el punto  $(0, j, 1)$ . Si  $k=0$  (resp.  $l=0$ ) entonces el dominio (resp. codominio) de  $\mathfrak{Z}$  es el conjunto vacío  $\emptyset$ .

Denotaremos a las marañas elementales orientadas:

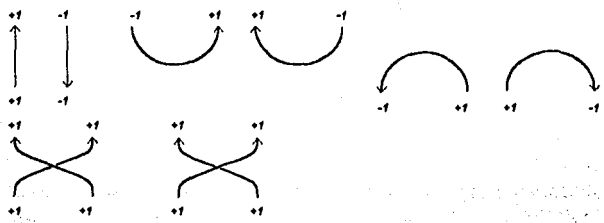
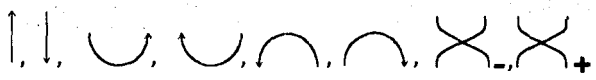


figura 25

por los siguientes símbolos respectivamente:



1.3.9 Definición.

Una  $(k,l)$ -maraña enmarcada es una  $(2k,2l)$ -maraña cuyas componentes aparecen por pares de arcos cercanos, de modo que las  $(k,l)$ -marañas que se obtienen al tomar alguno de los dos arcos de cada par, son equivalentes.

En otras palabras, una  $(k,l)$ -maraña enmarcada, es una  $(k,l)$ -maraña, tal que cada uno de sus arcos tiene una estructura adicional descrita por otro arco que se trenza con él.

Dada una  $(k,l)$ -maraña orientada distinguimos en ella dos sucesiones,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$  y  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$  las cuales corresponden al dominio y codominio respectivamente; en este caso simbolizaremos las orientaciones por los números 1 y -1 bajo el siguiente criterio:

- (a)  $\rho_i = 1$ , si el vector tangente unitario a  $\mathfrak{J}$  en  $(0, i, 0) \in \partial\mathfrak{J}$  es igual a  $(0, 0, 1)$ .
- (b)  $\rho_i = -1$ , si el vector tangente unitario a  $\mathfrak{J}$  en  $(0, i, 0) \in \partial\mathfrak{J}$  es igual a  $(0, 0, -1)$ .

Esto determina la sucesión  $\{\rho_i\}$ . La sucesión  $\{\nu_j\}$  se define de la misma forma, dependiendo de la dirección del vector tangente unitario a  $\mathfrak{J}$  en el punto  $(0, j, 1)$ . Si  $k=0$  (resp.  $l=0$ ) entonces el dominio (resp. codominio) de  $\mathfrak{J}$  es el conjunto vacío  $\emptyset$ .

Denotaremos a las marañas elementales orientadas:

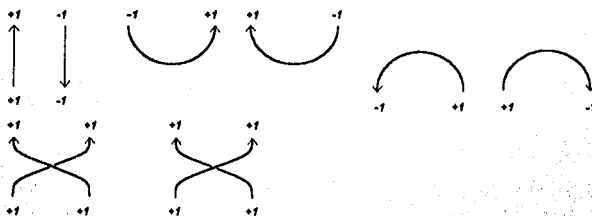


figura 25

por los siguientes símbolos respectivamente:



### 1.3.9 Definición.

Una  $(k,l)$ -maraña enmarcada es una  $(2k,2l)$ -maraña cuyas componentes aparecen por pares de arcos cercanos, de modo que las  $(k,l)$ -marañas que se obtienen al tomar alguno de los dos arcos de cada par, son equivalentes.

En otras palabras, una  $(k,l)$ -maraña enmarcada, es una  $(k,l)$ -maraña, tal que cada uno de sus arcos tiene una estructura adicional descrita por otro arco que se trenza con él.

Una descripción heurística de una  $(k,l)$ -maraña enmarcada se puede dar diciendo que en vez de arcos, la maraña tiene cintas cuyos bordes son los dos arcos del par correspondiente.

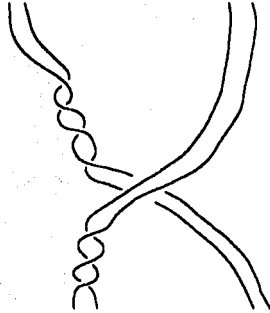


figura 26

Así como en los dos casos anteriores, hay una gran variedad de estructuras adicionales que se les pueden dar a las marañas. Más adelante veremos otros ejemplos.

Antes de dar la definición de las categorías de marañas, estableceremos la relación que guardan los diagramas de marañas (sin estructura adicional), con las marañas propiamente dichas en el espacio.

Una misma maraña, según la forma en que se proyecta en el plano, puede tener representaciones diagramáticas diferentes. Respecto a esto, el matemático alemán Reidemeister introdujo unas modificaciones a los diagramas, que en nuestro caso son de marañas, conocidas como *Jugadas de Reidemeister*, las cuales se pueden llevar a cabo en los cruces del diagrama, como se muestra en la siguiente figura:

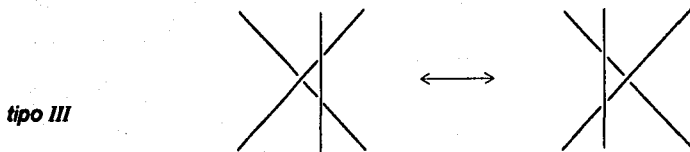
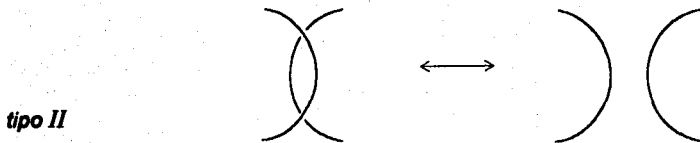
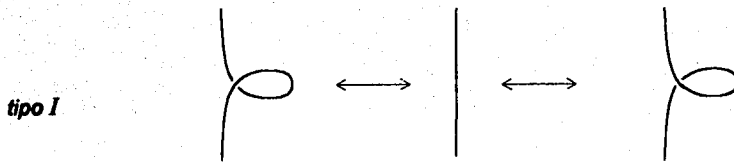


figura 27

Cada jugada se realiza localmente en los cruces, sin modificar el resto del diagrama.

Para tener una visión más clara de cómo se efectúan las jugadas de Reidemeister en los cruces, observemos los siguientes diagramas; que presentan cambios sucesivos de una maraña a través de jugadas de Reidemeister de cada uno de los tres tipos.

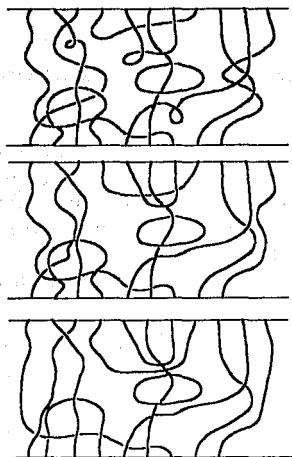


figura 28

Al igual que con los nudos [REI], las jugadas de tipo I, II y III cambian la estructura gráfica del diagrama, sin alterar la estructura topológica de la maraña que representan.

Además de las jugadas anteriores, nos vamos a referir a una deformación topológica del plano, diciendo que es una **jugada de tipo cero**.

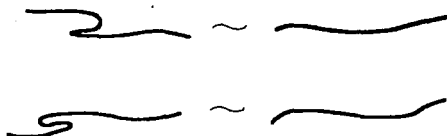


figura 29

### 1.3.10 Definición.

Dos diagramas de maraña son **equivalentes o ambientalmente isotópicos**, si se puede pasar de uno a otro por jugadas de Reidemeister de tipo I, II, III y jugada cero.

### 1.3.11 Teorema.

**Dos marañas son equivalentes si y sólo si cualesquiera dos de sus diagramas son equivalentes .**

Para la demostración, Burde y Zieschang consideran los nudos (en nuestro caso marañas), como rectas poligonales en vez de curvas y a los diagramas de nudo (maraña) en posición general. Como primer paso prueban, utilizando la  $\Delta$ -jugada (véase figura 30) que ésta es equivalente a realizar jugadas de tipo I,II y III en el diagrama, luego demuestran que dados dos de éstos diagramas se puede pasar de uno a otro por jugadas de Reidemeister de tipo I,II y III .

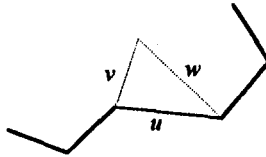


figura 30

En la  $\Delta$ -jugada se cambia el segmento  $u$  por el segmento  $v \cup w$  y viceversa.

Para más detalles de la demostración véase [BZ].

Este teorema fue demostrado por Reidemeister [REI] en el año de 1932, para nudos y enlaces. Ya que sus argumentos son de carácter local, alrededor de los cruces, estos se generalizan directamente al caso de marañas. De hecho Reidemeister demostró que dos nudos o enlaces  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{N}'$  en el espacio tridimensional se pueden deformar uno en el otro continuamente si y sólo si cualquier diagrama del nudo ó enlace  $\mathcal{N}$  se puede transformar en un diagrama de  $\mathcal{N}'$  por jugadas de Reidemeister de tipo I, II, III .

### 1.3.12 Definición.

Se dice que dos diagramas de marañas son **regularmente isotópicos** si se puede pasar de uno a otro por jugadas de Reidemeister de tipo II, III y jugada de tipo cero. Esta relación de equivalencia recibe el nombre de isotopía regular.

Daremos a continuación la definición de las diversas categorías de marañas.



## 1.4 Categorías de marañas

### 1.4.1 Definición.

Las marañas  $\mathfrak{J}$  definen una categoría, la **categoría de las marañas  $\mathfrak{J}\alpha$** , de tal forma, que los objetos son los números naturales incluyendo el cero, y los morfismos del objeto  $k$  a  $l$  son clases de equivalencia de diagramas de  $(k,l)$ -marañas, salvo jugadas de Reidemeister de tipo I, II, III y jugada cero. La composición de morfismos esta dada por la composición de marañas descrita en 1.3.7.

En todos las categorías de marañas que enunciaremos a continuación, la composición de morfismos es la misma que la indicada en la definición 1.4.1.

### 1.4.2 Definición.

La **categoría de marañas bajo isotopía regular  $R\text{-}\mathfrak{J}\alpha$** , es la categoría en la cual los objetos estan definidos por los números naturales incluyendo el cero, y los morfismos entre los objetos  $k$  y  $l$  son clases de equivalencia de diagramas de  $(k,l)$ -marañas salvo jugadas de Reidemeister de tipo II y tipo III, incluyendo la jugada cero.

### 1.4.3 Definición.

Considérense las  $(k,l)$ -marañas orientadas, estas definen la **categoría de las marañas orientadas**, denotada por  $\mathcal{O}\mathfrak{J}\alpha$ . En esta categoría los objetos son sucesiones finitas consistentes de  $1$  y  $-1$ , incluyendo la sucesión vacía. Un morfismo de una sucesión  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  a una sucesión  $(\nu_1, \dots, \nu_l)$  es una clase de equivalencia de diagramas de  $(k,l)$ -marañas orientadas que inducen los signos apropiados en los extremos, salvo jugadas de Reidemeister de tipo I, II, III y jugada cero. De acuerdo con la definición 1.3.8 la composición de dos marañas orientadas, se define como en el caso no orientado, observando que al coincidir la sucesión codominio de la primera con la sucesión dominio de la segunda, las orientaciones de los arcos correspondientes son compatibles, definiendo así una orientación del arco resultante.

#### 1.4.4 Definición.

Denótese por  $ROFa$ , a la categoría de las marañas orientadas bajo isotopía regular. Los objetos, son sucesiones finitas de 1 y -1, además de la sucesión vacía y los morfismos entre los objetos  $k$  y  $l$  de la categoría son clases de equivalencia de diagramas de  $(k,l)$ -marañas orientadas, salvo jugadas de Reidemeister de tipo II y tipo III incluyendo la jugada de tipo cero.

#### 1.4.5 Definición.

Sea  $S$  un conjunto finito -el conjunto de colores-. Définase como  $S-ROFa$ , la categoría de marañas orientadas,  $S$ -cromáticas bajo isotopía regular.

En la categoría  $S-ROFa$  los objetos son sucesiones finitas de elementos en el conjunto  $\{1, -1\} \times S$ , donde  $S$  es el conjunto de colores. Los morfismos entre cualesquiera dos objetos son clases de equivalencia de diagramas de  $(k,l)$ -marañas orientadas coloreadas, salvo jugadas de Reidemeister de tipo II, tipo III y jugada de tipo cero, tal que a cada arco se le asigna el correspondiente color del conjunto  $S$ .

Por ejemplo, si  $S = \{\text{rojo, azul}\}$  los cuales simbolizaremos por  $r$  y  $a$  respectivamente, entonces los objetos de  $S-ROFa$  son los elementos  $(1,r)$ ,  $(1,a)$ ,  $(-1,r)$ ,  $(-1,a)$ ; y los morfismos son las  $(k,l)$ -marañas orientadas coloreadas rojas y azules, como se puede observar en la figura siguiente:

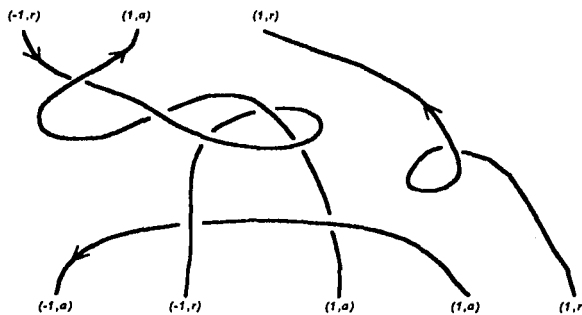


figura 31

#### 1.4.6 Definición.

$\mathcal{F}rO\mathcal{F}a$ , denota la categoría de marañas enmarcadas bajo isotopía ambiental.

En esta categoría los objetos son los números naturales incluyendo el cero y los morfismos son clases de equivalencia de  $(k,l)$ -marañas en las que se sustituye la jugada de Reidemeister de tipo I usual por la de *tipo I enmarcada* la cual se define en el siguiente diagrama:

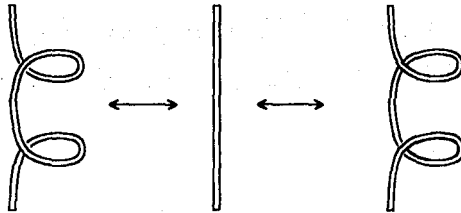


figura 32

# CAPÍTULO II

---

## TRANSFORMACIONES NATURALES Y FUNTORES ADJUNTOS

En esta sección revisaremos algunas nociones básicas de la teoría de categorías, como son la definición de transformación natural y la de funtor adjunto. Esto nos será de gran utilidad posteriormente.

### 2.1 Transformaciones naturales

Dados dos funtores  $S, T: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ , una *transformación natural*  $\tau: S \longrightarrow T$  es una correspondencia que asigna a cada objeto  $X \in \underline{A}$ , un morfismo,  $\tau X \in \text{Mor } \underline{B}$   $\tau X: SX \longrightarrow TX$ , tal que para cada morfismo en  $\underline{A}$ ,  $f: X \longrightarrow X'$  conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{\tau X} & TX \\ \downarrow Sf & & \downarrow Tf \\ SX' & \xrightarrow{\tau X'} & TX' \end{array}$$

Una transformación natural  $\tau$  donde cada componente  $\tau X$  es isomorfismo en  $\underline{B}$ , se dice que es un isomorfismo natural; en símbolos  $\tau: S \cong T$ .

## 2.2 Funtores adjuntos

### 2.2.1 Definición.

Sean  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  dos categorías, una *adjunción*  $\langle F, G, \varphi \rangle$  de la categoría  $\underline{A}$  a la categoría  $\underline{B}$  consiste de dos funtores  $F: \underline{B} \rightarrow \underline{A}$ ,  $G: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$  y de isomorfismos naturales (de bifuntores)  $\varphi_{x,y}: \underline{A}(FX, Y) \cong \underline{B}(X, GY)$ , para cada  $X \in \text{Obj } \underline{B}$ ,  $Y \in \text{Obj } \underline{A}$ . Se dice entonces que  $G$  es *adjunto derecho* de  $F$  y  $F$  es *adjunto izquierdo* de  $G$ .

La naturalidad de  $\varphi$  significa que para cada morfismo  $\varphi_{x',y}: \underline{A}(FX', Y) \rightarrow \underline{B}(X', GY)$  y para cada morfismo  $h: X \rightarrow X'$  en  $\underline{B}$  y  $k: Y \rightarrow Y'$  en  $\underline{A}$ , conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \underline{A}(FX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{x,y}} & \underline{B}(X, GY) \\ \uparrow (Fh)^* & & \uparrow h^* \\ \underline{A}(FX', Y) & \xrightarrow{\varphi_{x',y}} & \underline{B}(X', GY) \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \underline{A}(FX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{x,y}} & \underline{B}(X, GY) \\ \downarrow k_* & & \downarrow (Gk)_* \\ \underline{A}(FX, Y') & \xrightarrow{\varphi_{x,y'}} & \underline{B}(X, GY') \end{array}$$

Si tomamos ahora  $Y = FX$ , tenemos un isomorfismo  $\varphi_{x,x}: \underline{A}(FX, FX) \rightarrow \underline{B}(X, GFX)$ ; se define el morfismo  $\beta_x: X \rightarrow GFX$ , como la imagen de  $\text{Id}_{FX}$  bajo  $\varphi_{x,x}$ .

Análogamente, si hacemos  $X = GY$ , obtenemos otro isomorfismo  $\varphi_{g,y}: \underline{A}(FGY, Y) \rightarrow \underline{B}(GY, GY)$  y definimos el morfismo  $\alpha_y: FGY \rightarrow Y$ , como la imagen inversa de  $\text{Id}_{GY}$  bajo  $\varphi_{g,y}$ .

**2.2.2 Proposición.** Denótese por  $I_{\underline{B}}: \underline{B} \rightarrow \underline{B}$  al funtor identidad de la categoría  $\underline{B}$ . Entonces los morfismos  $\beta_x: X \rightarrow GFX$ , definen una transformación natural,  $\beta: I_{\underline{B}} \rightarrow GF$ , a la cual llamaremos *unidad de la adjunción*.

**Demostración:** Sea  $h : X \rightarrow X'$  un morfismo, demostraremos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\beta_x} & GFX \\
 \downarrow h & & \downarrow GFh \\
 X' & \xrightarrow{\beta_{x'}} & GFX'
 \end{array}$$

es decir, que  $GFh \circ \beta_x = \beta_{x'} \circ h$ .

Tenemos, por la naturalidad de  $\varphi$ , que conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Id}_m & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & \beta_x \\
 \downarrow Fh & & \underline{A}(FX, FX) & \xrightarrow{\varphi_{xy}} & \underline{B}(X, GFX) & \downarrow GFh \circ \beta_x \\
 & & \downarrow (Fh)_* & & \downarrow (GFh)_* & \parallel \\
 Fh & & \underline{A}(FX, FX') & \xrightarrow{\varphi_{xy'}} & \underline{B}(X, GFX') & \beta_{x'} \circ h \\
 & & \uparrow (Fh)^* & & \uparrow h^* & \uparrow \\
 \text{Id}_m & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \underline{A}(FX', FX') & \xrightarrow{\varphi_{x'x'}} & \underline{B}(X', GFX') & \beta_{x'}
 \end{array}$$

Al perseguir  $\text{Id}_m$  e  $\text{Id}_m$  a lo largo de los diagramas, como se indica, concluimos que  $GFh \circ \beta_x = \beta_{x'} \circ h$ . ♦

La siguiente proposición es dual a la anterior, así que, recurriendo a la dualidad, la consideraremos válida, ya que la demostración se obtiene esencialmente invirtiendo las flechas de la demostración anterior.

**2.2.3 Proposición.** Denótese por  $I_A : \underline{A} \rightarrow \underline{A}$  al funtor identidad de la categoría  $\underline{A}$ . Entonces los morfismos  $\alpha_Y : FGY \rightarrow Y$  definen una transformación natural  $\alpha : FG \rightarrow I_A$ , llamada **unidad de la adjunción**. ♦

**2.2.4 Proposición.** Las siguientes composiciones de transformaciones naturales

$$(1) \quad G \xrightarrow{\beta_g} GFG \xrightarrow{G\alpha} G$$

$$(2) \quad F \xrightarrow{F\beta} FGF \xrightarrow{\alpha_f} F$$

son la identidad.

**Demostración:** Considérense los funtores  $F : \underline{B} \rightarrow \underline{A}$  y  $G : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$  y el isomorfismo natural  $\varphi_{xv} : \underline{A}(FX, Y) \rightarrow \underline{B}(X, GY)$  y su inverso  $\psi_{xv} : \underline{B}(X, GY) \rightarrow \underline{A}(FX, Y)$ , que obviamente también es un isomorfismo natural.

(1) Demostraremos que  $G\alpha_v \circ \beta_{ov} = Id_{ov}$ . Sea  $f : Y' \rightarrow Y$  un morfismo en  $\underline{A}$ , por la naturalidad de  $\varphi$  conmuta el siguiente cuadrado:

(2.2.5)

$$\begin{array}{ccc} \underline{A}(FX, Y') & \xrightarrow{\varphi_{xv}} & \underline{B}(X, GY') \\ \downarrow f_* & & \downarrow (Gf)_* \\ \underline{A}(FX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{xv}} & \underline{B}(X, GY) \end{array}$$

Si en el diagrama (2.2.5) consideramos  $X = GY$  y  $Y' = FGY$  y tomamos  $f = \alpha_v : FGY \rightarrow Y$  tenemos:

$$\begin{array}{ccc} Id_{ov} & \xrightarrow{\quad} & \beta_{ov} \\ \downarrow & \begin{array}{ccc} \underline{A}(FGY, FGY) & \xrightarrow{\varphi_{xv}} & \underline{B}(GY, GFGY) \\ \downarrow \alpha_{v*} & & \downarrow (G\alpha_v)_* \end{array} & \downarrow \\ \alpha_v & \xrightarrow{\quad} & \varphi(\alpha_v) = G\alpha_v \circ \beta_{ov} \end{array}$$

el cual conmuta, y al perseguir a  $Id_{ov}$ , a lo largo del diagrama obtenemos

$$(2.2.6) \quad \varphi(\alpha_v) = G\alpha_v \circ \beta_{ov}$$

pero, por definición de  $\alpha_v$ ,  $\varphi(\alpha_v) = Id_{ov}$ ; así,  $G\alpha_v \circ \beta_{ov} = Id_{ov}$

(2) Probaremos ahora que  $\alpha_{FX} \circ F\beta_X = \text{Id}_{FX}$ . Para cualquier morfismo  $g: X \rightarrow X'$ , tenemos que conmuta el siguiente cuadrado:

(2.2.7)

$$\begin{array}{ccc} \underline{B}(X', GY) & \xrightarrow{\psi_{X'Y}} & \underline{A}(FX', Y) \\ \downarrow g^* & & \downarrow (Fg)^* \\ \underline{B}(X, GY) & \xrightarrow{\psi_{XY}} & \underline{A}(FX, Y) \end{array}$$

Si en (2.2.7)  $X' = GFX$ ,  $Y = FX$  y  $g = \beta_X: X \rightarrow GFX$  se tiene:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\text{ofx}} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \alpha_{\text{fx}} \\ \downarrow & \begin{array}{ccc} \underline{B}(GFX, GFX) & \xrightarrow{\psi_{X'Y}} & \underline{A}(FGFX, FX) \\ \downarrow (\beta_X)^* & & \downarrow (F\beta_X)^* \\ \underline{B}(X, GFX) & \xrightarrow{\psi_{XY}} & \underline{A}(FX, FX) \end{array} & \downarrow \\ \beta_X & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \psi(\beta_X) = \alpha_{\text{fx}} \circ F\beta_X \end{array}$$

que el diagrama es conmutativo y al seguir a la  $\text{Id}_{\text{ofx}}$  resulta:

(2.2.8)  $\psi(\beta_X) = \alpha_{\text{fx}} \circ F\beta_X$ .

Y por definición de  $\beta$ , tenemos que  $\psi(\beta_X) = \text{Id}_{\text{fx}}$ ; así,  $\alpha_{\text{fx}} \circ F\beta_X = \text{Id}_{\text{fx}}$ .

**2.2.9 Teorema.** Dada una adjunción  $\langle F, G, \varphi \rangle: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ , existen transformaciones naturales  $\alpha: FG \rightarrow I_A$  y  $\beta: I_A \rightarrow GF$  tales que

(2.2.10)  $G\alpha \circ \beta_0 = \text{Id}_0$  y  $\alpha_r \circ F\beta = \text{Id}_r$ .

Inversamente, si  $\alpha$  y  $\beta$  son transformaciones naturales que satisfacen (2.2.10), entonces determinan una única adjunción  $\langle F, G, \varphi \rangle$  cuya unidad y counidad son  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

**Demostración:** La primera parte del teorema ya quedó demostrada en las proposiciones 2.2.2 y 2.2.3, por lo que probaremos sólo el inverso. Usaremos  $\alpha$  y  $\beta$  para definir  $\varphi$  y  $\psi$ . Definiremos  $\varphi_{X,Y}: \underline{A}(FX, Y) \rightarrow \underline{B}(X, GY)$ , de acuerdo



con (2.2.5) a saber, al tomar  $Y' = FX$  tal que al morfismo  $f : FX \rightarrow Y$  en la categoría  $\underline{A}$  le asigna el morfismo  $(Gf) \circ \beta_x$  en la categoría  $\underline{B}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Id}_x & \xrightarrow{\quad} & \beta_x \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{A}(FX, FX) & \xrightarrow{\varphi_{xy}} & \underline{B}(X, GFX) \\
 \downarrow f_* & & \downarrow (Gf)_* \\
 \underline{A}(FX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{xy}} & \underline{B}(X, GY) \\
 f & \xrightarrow{\quad} & \varphi(f) = Gf \circ \beta_x
 \end{array}$$

Así, una condición necesaria que debe cumplir  $\varphi$  es (2.2.11)  $\varphi(f) = Gf \circ \beta_x$ . En particular esto prueba que dada  $\beta$ ,  $\varphi$  es única.

Tomemos a esta ecuación (2.2.11) como definición.

Definimos, análogamente,  $\psi_x : \underline{B}(X, GY) \rightarrow \underline{A}(FX, Y)$ , conforme a (2.2.7), al tomar  $X' = GY$  tal que al morfismo  $g : X \rightarrow GY$  en la categoría  $\underline{B}$  se le hace corresponder el morfismo  $\alpha_x \circ Fg$  en la categoría  $\underline{A}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Id}_y & \xrightarrow{\quad} & \alpha_y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{B}(GY, GY) & \xrightarrow{\psi_{xy}} & \underline{A}(FGY, Y) \\
 \downarrow g^* & & \downarrow (Fg)^* \\
 \underline{B}(X, GY) & \xrightarrow{\psi_{xy}} & \underline{A}(FX, Y) \\
 g & \xrightarrow{\quad} & \psi(g) = \alpha_y \circ Fg
 \end{array}$$

Luego una condición necesaria que debe cumplir  $\psi$  es (2.2.12)  $\psi(g) = \alpha_y \circ Fg$ ; tomemos a esta ecuación como definición.

Vamos a demostrar que  $\varphi$  es un isomorfismo natural con inverso  $\psi$ .

(a)  $\varphi \circ \psi = \text{Id}$ .

$\varphi \circ \psi(g) = \varphi(\psi(g)) = \varphi(\alpha_y \circ Fg) = G(\alpha_y \circ Fg) \circ \beta_x$ , ya que  $G$  es funtor, entonces  $G(\alpha_y \circ Fg) \circ \beta_x = G\alpha_y \circ GFg \circ \beta_x$  y, por el hecho de que  $\beta$  es natural, tenemos que  $GFg \circ \beta_x = \beta_{Gy} \circ g$ ; así  $\varphi(\psi(g)) = G\alpha_y \circ \beta_{Gy} \circ g$  pero, por hipótesis,  $G\alpha_y \circ \beta_{Gy} = \text{Id}_{Gy}$  por lo tanto  $\varphi(\psi(g)) = g$  y, así,  $\varphi \circ \psi = \text{Id}$ .

(b)  $\psi \circ \varphi = \text{Id}$ .

$\psi \circ \varphi(f) = \psi(\varphi(f)) = \psi(Gf \circ \beta_x) = \alpha_y \circ F(Gf \circ \beta_x)$  y, por ser  $F$  functor,  $\alpha_y \circ F(Gf \circ \beta_x) = \alpha_y \circ FGf \circ F\beta_x$ ; además, por ser  $\alpha$  natural,  $\alpha_y \circ FGf = f \circ \alpha_{rx}$ , por lo que  $\alpha_y \circ FGf \circ F\beta_x = f \circ \alpha_{rx} \circ F\beta_x$ ; pero, por hipótesis,  $\alpha_{rx} \circ F\beta_x = \text{Id}_{rx}$ , luego concluimos que  $\psi(\varphi(f)) = f$  y, así,  $\psi \circ \varphi = \text{Id}$ ; por lo tanto  $\varphi$  es un isomorfismo con inverso  $\psi$ .

Ahora probaremos que  $\varphi$  es una transformación natural; primeramente demostraremos que para todo morfismo  $h: X \rightarrow X'$  el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \underline{A}(FX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{xy}} & \underline{B}(X, GY) \\ \downarrow (Fh)^* & & \downarrow h^* \\ \underline{A}(FX', Y') & \xrightarrow{\varphi_{x'y'}} & \underline{B}(X', GY') \end{array}$$

es decir, que para toda  $f: FX \rightarrow Y$ ,  $\varphi(f \circ Fh) = \varphi f \circ h$ .

Por nuestra definición de  $\varphi$  tenemos que  $\varphi f \circ h = Gf \circ \beta_x \circ h$ ; por la naturalidad de  $\beta$  tenemos que  $\beta_x \circ h = GFh \circ \beta_x$ , por lo cual obtenemos que  $Gf \circ \beta_x \circ h = Gf \circ GFh \circ \beta_x$  y finalmente aplicando la functorialidad de  $G$  y la naturalidad de  $\varphi$ , concluimos que  $G(f \circ Fh) \circ \beta_x = \varphi(f \circ Fh)$ .

Por último, ya que  $\psi$  es inversa de  $\varphi$ , para probar la naturalidad de  $\varphi$  con respecto a  $Y$ , basta probar la naturalidad de  $\psi$  con respecto a  $Y$ . Por lo cual demostraremos que para todo morfismo  $k: Y \rightarrow Y'$  el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \underline{B}(X, GY) & \xrightarrow{\psi_{xy}} & \underline{A}(FX, Y) \\ \downarrow (Gk)^* & & \downarrow k^* \\ \underline{B}(X, GY') & \xrightarrow{\psi_{x'y'}} & \underline{A}(FX, Y') \end{array}$$

es decir, que para toda  $g: X \rightarrow GY$ ,  $\psi(Gk \circ g) = k \circ \psi(g)$ .

Según definimos  $\psi$ ,  $k \circ \psi(g) = k \circ \alpha_Y \circ Fg$ ; por ser  $\alpha$  natural tenemos que  $k \circ \alpha_y = \alpha_{y'} \circ FGk$  luego entonces,  $k \circ \alpha_y \circ Fg = \alpha_{y'} \circ FGk \circ Fg$ ; y utilizando el hecho de que  $F$  es un functor y la naturalidad de  $\psi$  resulta  $\alpha_{y'} \circ F(Gk \circ g) = \psi(Gk \circ g)$  luego  $\varphi$  es una transformación natural.

♦

**2.2.13 Corolario.** Una adjunción puede darse como una tema  $\langle F, G, \varphi \rangle : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$  o como una cuarteta  $\langle F, G, \alpha, \beta \rangle : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ , es decir, hay una correspondencia biunívoca entre temas  $\langle F, G, \varphi \rangle$  tales que  $\varphi$  es un isomorfismo natural,  $\varphi_{x,y} : \underline{A}(FX, Y) \longrightarrow \underline{B}(X, GY)$ , y cuartetos  $\langle F, G, \alpha, \beta \rangle$  tales que  $\alpha$  y  $\beta$  son transformaciones naturales,  $\alpha_y : FG Y \longrightarrow Y$  y  $\beta_x : X \longrightarrow GFX$ , que satisfacen (2.2.10).

◆

# CAPÍTULO III

## ESTRUCTURAS CATEGÓRICAS ASOCIADAS A MARAÑAS

En este capítulo veremos la definición de categoría monoidal y ejemplos, así como la estructura de dualidad que se tiene en una categoría pivotal.

Esto sentará las bases sobre las cuales se desarrollará el tema central a tratar en esta tesis.

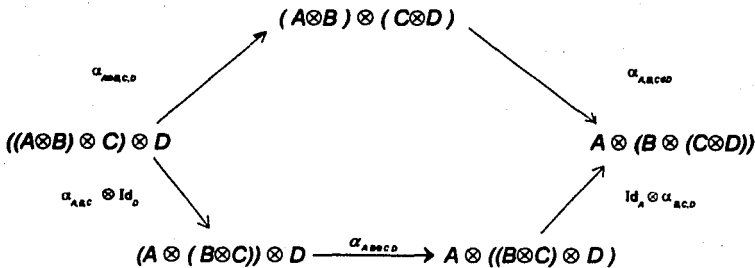
### 3.1 Categorías monoidales

#### 3.1.1 Definición.

Una categoría monoidal  $\underline{M} = \langle M, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda \rangle$ , consiste de una categoría  $M$ , un funtor  $\otimes: M \times M \rightarrow M$ , un objeto fijo  $I$  en  $M$  e isomorfismos naturales:  $\alpha_{A,B,C}: (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$ ,  $\rho_A: A \otimes I \rightarrow A$  y  $\lambda_A: I \otimes A \rightarrow A$ , tales que:

El diagrama

$M$



conmuta.

el diagrama

M2

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A, B}} & A \otimes (I \otimes B) \\
 \rho_A \otimes \text{Id}_B \searrow & & \swarrow \text{Id}_A \otimes \lambda_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

conmuta.

M3

$$\rho_I = \lambda_I : I \otimes I \longrightarrow I$$

Se dice que una categoría monoidal es **estricta** si todas las componentes de  $\alpha$ ,  $\rho$  y  $\lambda$  son morfismos identidad.

Nosotros consideraremos, salvo excepciones que haremos explícitas, categorías monoidales estrictas, ya que las categorías monoidales de origen topológico que estudiaremos lo son. Por otro lado, el teorema de coherencia de MacLane demuestra que cualquier categoría monoidal es equivalente a una categoría monoidal estricta.

Para tener más claro el concepto de categoría monoidal, analizaremos algunos ejemplos, los primeros de los cuales no son categorías monoidales estrictas, pero por ser muy conocidas, ilustran bien el concepto de categoría monoidal.

### 3.1.2 Ejemplos.

(1) La categoría de los espacios topológicos  $\text{Top}$ , y aplicaciones continuas es una categoría monoidal, en la cual el funtor producto tensorial  $\otimes$ , es el producto topológico " $\times$ ", e  $I$  es el espacio singular, que consiste de un solo punto. (Esta categoría no es estricta).

(2) Los  $\mathcal{R}$ -módulos sobre un anillo conmutativo con 1,  $\mathcal{R}$ , forman una categoría monoidal  $\mathcal{R}\text{-Mod}$ , en donde el funtor producto tensorial  $\otimes$ , es el producto tensorial usual y el objeto  $I$  es el anillo  $\mathcal{R}$ . (Esta categoría no es estricta)

(3) Los espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo de los complejos, denotados por  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$ , definen una categoría monoidal, de tal forma que los morfismos en la categoría son las transformaciones lineales. Se define el producto tensorial entre dos elementos  $U$  y  $W$  de  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$ , como el producto tensorial definido para espacios vectoriales  $U \otimes_{\mathbb{C}} W$ , el objeto  $I$  en la categoría es el campo de los números complejos. (Esta categoría no es estricta)

(4) La categoría  $\mathcal{B}$  de trenzas, definida en 1.2, es una categoría monoidal de tal forma que el funtor producto tensorial entre una  $m$ -trenza  $\alpha$  y una  $n$ -trenza  $\beta$ ,

denotado por  $\alpha \otimes \beta$ , se define en los morfismos por yuxtaposición, colocando la trenza  $\beta$  a la derecha de  $\alpha$ , y definiendo en los objetos  $m \otimes n = m + n$ .  $I$  es el cero.

(5) La categoría de marañas orientadas denotada por  $\mathcal{O}Fa$ , descrita en 1.4.3 es otro ejemplo, en el cual el funtor producto tensorial se define en forma análoga a (4) por yuxtaposición. El objeto  $I$  es la sucesión vacía.

(6) En la categoría  $\mathcal{RO}Fa$  de marañas orientadas salvo isotopía regular, el funtor producto tensorial  $\otimes$  e  $I$  se definen de la misma manera que en (5).

(7) En  $\mathcal{FRO}Fa$  la cual simboliza la categoría de marañas enmarcadas salvo isotopía, en la que se sustituye la jugada de Reidemeister tipo I usual por la de tipo I enmarcada (véase 1.4.6), el funtor producto tensorial e  $I$  están descritos como en (4).

(8) La categoría de marañas orientadas  $S$ -cromáticas bajo isotopía regular  $\mathcal{S-RO}Fa$  definida en 1.4.5, representa otro ejemplo, tal que la palabra vacía es el objeto neutro  $I$ .

### 3.1.3 Definición.

Dadas dos categorías monoidales (estrictas)  $\langle \underline{C}, \otimes, I \rangle$  y  $\langle \underline{D}, \otimes, I' \rangle$ , un funtor  $F: \underline{C} \rightarrow \underline{D}$  se dice que es un **funtor monoidal (estricto)**, si respeta la estructura monoidal, es decir, si existen isomorfismos naturales "coherentes": (véase apéndice I)

$$(i) \quad F(A \otimes A') \xrightarrow{\gamma_{AA'}} F(A) \otimes F(A') \quad (\gamma_{AA'} = \text{identidad})$$

$$(ii) \quad F(I) = I'$$

Enseguida daremos algunos ejemplos de funtores monoidales.

### 3.1.4 Ejemplos.

(1) Considérense la categoría de las marañas orientadas  $S$ -cromáticas  $\mathcal{S-RO}Fa$  cuyos objetos son sucesiones de colores pares e impares, es decir, dado  $S$ ,  $S^\circ = \{ +x, -x \mid x \in S \}$ , de tal manera que  $+x \in S^\circ$  es un color par y  $-x \in S^\circ$  es un color impar; los morfismos son las marañas orientadas  $S$ -cromáticas, es decir, cada componente tiene una orientación ( $+1$  ó  $-1$ ) y un color. Tómese también la categoría de las marañas orientadas  $\mathcal{RO}Fa$ . El funtor (que olvida)  $F: \mathcal{S-RO}Fa \rightarrow \mathcal{RO}Fa$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} F(+x) &\text{ se le asigna el valor } 1 \\ F(-x) &\text{ se le asigna el valor } -1 \end{aligned}$$

además al aplicar el funtor a la sucesión vacía, éste le hace corresponder el valor 0. En los morfismos — las  $(k,l)$ -marañas — ,  $F$  olvida el color.

(2) Sea  $\mathcal{O}Ta$  la categoría de marañas orientadas y  $Ta$  la categoría de marañas; el funtor (que olvida)  $F: \mathcal{O}Ta \rightarrow Ta$  se define como:

$F(1,1,-1,\dots) = n$ , si la sucesión  $(1,1,-1,\dots)$  tiene  $n$  elementos; y para la sucesión vacía,  $F(\ ) = 0$ . En los morfismos, las  $(k,l)$ -marañas, el funtor olvida la orientación.

(3) La categoría  $\mathcal{S}\text{-}R\mathcal{O}Ta$  definida en el ejemplo (1) y la categoría  $R\text{-}Ta$ , definen un funtor  $F: \mathcal{S}\text{-}R\mathcal{O}Ta \rightarrow R\text{-}Ta$  con  $F$  el funtor que olvida, actuando en los objetos de la siguiente manera:

$F(1,-1,1,\dots) = n$ , si la sucesión  $(1,-1,1,\dots)$  tiene  $n$  elementos y  $F(\ ) = 0$ . En los morfismos, las  $(k,l)$ -marañas, el funtor  $F$  olvida el color y la orientación.

### 3.1.5 Definición.

Un **trenzamiento** en una categoría monoidal  $\underline{M}$ , es un isomorfismo natural

$$\sigma_{A,B}: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$$

tal que conmutan los diagramas siguientes:

T1

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\sigma_{A,B \otimes C}} & (B \otimes C) \otimes A & & \\
 \alpha_{A,B \otimes C} \nearrow & & & & \searrow \alpha_{B \otimes C, A} & \\
 (A \otimes B) \otimes C & & & & & B \otimes (C \otimes A) \\
 \sigma_{A \otimes B} \otimes \text{Id}_C \searrow & & & & \nearrow \text{Id}_B \otimes \sigma_{C, A} & \\
 & (B \otimes A) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{B, A \otimes C}} & B \otimes (A \otimes C) & & 
 \end{array}$$

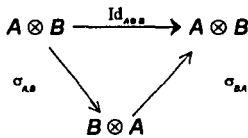
T2

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\sigma_{A \otimes B, C}} & C \otimes (A \otimes B) & & \\
 \alpha_{A \otimes B, C}^{-1} \nearrow & & & & \searrow \alpha_{C, A \otimes B}^{-1} & \\
 A \otimes (B \otimes C) & & & & & (C \otimes A) \otimes B \\
 \text{Id}_A \otimes \sigma_{B, C} \searrow & & & & \nearrow \sigma_{C \otimes A, B} & \\
 & A \otimes (C \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{A, C \otimes B}^{-1}} & (A \otimes C) \otimes B & & 
 \end{array}$$

La propiedad *T1* o "bilinealidad" y *T2* establecen la compatibilidad del trenzado con la asociatividad. Si  $\sigma$  solamente es una transformación natural, decimos que la categoría monoidal  $\underline{M}$  es **pretrenzada**.

### 3.1.6 Definición.

Una categoría monoidal trenzada  $\underline{M}$  es **simétrica** si el trenzamiento  $\sigma_{A,B}$ , es tal que el siguiente diagrama conmuta :



Es decir, si la transformación natural  $\sigma$  es su propia inversa.

Para visualizar más claramente las definiciones de trenzado y simetría, daremos algunos ejemplos de categorías monoidales con estas propiedades.

### 3.1.7 Ejemplos.

(1) La categoría de los  $\mathcal{R}$ -Mod, donde  $\mathcal{R}$  es un anillo conmutativo con 1, es una categoría simétrica, con  $\sigma_{A,B} : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$  el isomorfismo usual, tal que  $\sigma_{A,B}(a \otimes b) = b \otimes a$ .

(2) La categoría de trenzas  $\mathcal{B}$ , es trenzada y el trenzamiento  $\sigma_{A,B}$  está dado por la trenza que se ilustra a continuación:

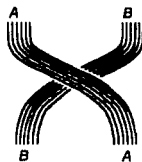


figura 33



pero no es una categoría simétrica, ya que el inverso del trenzamiento  $\sigma_{A,B}^{-1}$  está dado por:



figura 34

que es distinto a  $\sigma_{B,A}$ .

(3)  $\text{Vect}_C$ , la categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo de los complejos es una categoría trenzada donde, como en  $R\text{-Mod}$ ,  $\sigma_{U,W}: U \otimes_C W \rightarrow W \otimes_C U$  es tal que al elemento  $u \otimes w$  se le hace corresponder  $w \otimes u$ , además se tiene que  $\sigma$  es su propio inverso, por lo tanto, esta categoría es simétrica.

(4) Las categorías  $R\text{OTa}$ ,  $\text{OTa}$ ,  $\text{Ta}$ ,  $R\text{-Ta}$ ,  $S\text{-ROTa}$ ,  $\text{FrOTa}$  son categorías trenzadas, en donde el trenzamiento  $\sigma_{A,B}$  es como en el ejemplo (2), gráficamente significa pasar los hilos de A por encima de los hilos de B.

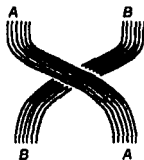


figura 35

### 3.1.8 Definición.

Sean  $\underline{V}$  y  $\underline{W}$  dos categorías monoidales (estrictas) trenzadas. Un functor monoidal  $F: \underline{V} \rightarrow \underline{W}$  se dice que es un **functor trenzado**, si además de satisfacer las condiciones de la definición 3.1.3, cumple que para todo  $A, B \in \text{Obj } \underline{V}$ , el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A \otimes B) & \xrightarrow{\gamma_{A,B}} & F(A) \otimes F(B) \\
 \downarrow F(\sigma_{A,B}) & & \downarrow \sigma_{F(A), F(B)} \\
 F(B \otimes A) & \xrightarrow{\gamma_{B,A}} & F(B) \otimes F(A)
 \end{array}$$

### 3.1.9 Ejemplos.

(1) Sea  $S\text{-ROFa}$  la categoría de las marañas orientadas  $S$ -cromáticas bajo isotopía regular y  $\text{ROFa}$  la categoría de marañas orientadas; el funtor definido en el ejemplo 3.1.4 (1), define un funtor trenzado entre estas categorías.

(2) Tómesese la categoría de marañas orientadas  $\text{OFa}$  y la categoría de marañas  $\mathcal{F}a$ , el funtor definido en el ejemplo 3.1.4 (2), nos muestra un funtor trenzado entre estas categorías.

(3) El funtor definido en el ejemplo 3.1.4 (3) entre la categoría  $S\text{-ROFa}$  y  $\mathcal{R}\text{-Fa}$  es un ejemplo de un funtor trenzado.

(4) Entre la categoría de trenzas  $\mathcal{B}$  y la categoría de los  $\mathcal{R}\text{-Mod}$  tenemos un funtor trenzado  $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}\text{-Mod}$ , el cual, se define en objetos como:

$$F(n) = \mathcal{R}^{\otimes n} = \mathcal{R} \otimes \dots \otimes \mathcal{R} \quad (n \text{ veces})$$

y en los morfismos,  $F$  manda la trenza  $\sigma: m \otimes n \rightarrow n \otimes m$  en la correspondiente función de módulos  $\mathcal{R}^{\otimes m} \otimes \mathcal{R}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{R}^{\otimes n} \otimes \mathcal{R}^{\otimes m}$  tal que si  $a = (a_1, \dots, a_m)$  y  $b = (b_1, \dots, b_n)$  son elementos de  $\mathcal{R}^{\otimes m}$  y  $\mathcal{R}^{\otimes n}$  respectivamente, entonces el elemento  $a \otimes b$  va a dar a  $b \otimes a$  en la correspondiente función de módulos.

## 3.2 Categorías pivotaes

### 3.2.1 Definición.

Una **categoría pivotal (estricta)**, es una categoría monoidal  $\underline{M}$  (estricta), provista de un funtor contravariante, llamado **dualidad**  $(\_)*: \underline{M} \rightarrow \underline{M}$  tal que, dados objetos  $A, B, C$ , y  $D$  y morfismos  $f: A \rightarrow C$  y  $g: B \rightarrow D$  en  $\underline{M}$ , se tienen las identidades:

$(A \otimes B)^* = B^* \otimes A^*$ ,  $(A^*)^* = A$  y  $(f \otimes g)^* = g^* \otimes f^*$ ,  $(f^*)^* = f$ ,  $I = I^*$  y además una familia de morfismos  $\epsilon_A: A \otimes A^* \rightarrow I$  llamados **evaluación**, tales que conmutan los diagramas:

$P1$

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes I^* & \xlongequal{\quad} & I \otimes I \\
 \searrow \epsilon_1 & & \swarrow \lambda_1 \\
 & I & 
 \end{array}$$

P2

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes B) \otimes (B^* \otimes A^*) & \xrightarrow{\alpha_{A,B}} & A \otimes (B \otimes (B^* \otimes A^*)) & \xrightarrow{\text{Id}_A \otimes \alpha^{-1}_{A,B}} & A \otimes ((B \otimes B^*) \otimes A^*) \\
 \parallel & & & & \downarrow \text{Id}_A \otimes (\epsilon_B \otimes \text{Id}_{A^*}) \\
 \parallel & & & & A \otimes (I \otimes A^*) \\
 \parallel & & & & \downarrow \text{Id}_A \otimes \lambda_{A^*} \\
 \parallel & & & & A \otimes A^* \\
 \parallel & & & & \downarrow \epsilon_A \\
 \parallel & & & & I \\
 (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)^* & \xrightarrow{\epsilon_{A \otimes B}} & & & I
 \end{array}$$

y, si se define  $\eta_A = (\epsilon_{A^*})^* : I \rightarrow A^* \otimes A$ , para toda  $f : A \rightarrow B$ , entonces

P3

$$\begin{array}{ccc}
 (A^* \otimes A) \otimes B^* & \xrightarrow{(\text{Id}_{A^*} \otimes f) \otimes \text{Id}_{B^*}} & (A^* \otimes B) \otimes B^* & \xrightarrow{\alpha_{A^*, B, B^*}} & A^* \otimes (B \otimes B^*) \\
 \uparrow \eta_A \otimes \text{Id}_{B^*} & & & & \downarrow \text{Id}_{A^*} \otimes \epsilon_B \\
 I \otimes B^* & & & & A^* \otimes I \\
 \uparrow \lambda_{B^*}^{-1} & & & & \downarrow \rho_{A^*} \\
 B^* & \xrightarrow{f^*} & A^* & & \\
 \downarrow \rho_{B^*}^{-1} & & & & \uparrow \lambda_{A^*} \\
 B^* \otimes I & & & & I \otimes A^* \\
 \downarrow \text{Id}_{B^*} \otimes \eta_{A^*} & & & & \uparrow \epsilon_B \otimes \text{Id}_{A^*} \\
 B^* \otimes (A \otimes A^*) & \xrightarrow{\text{Id}_{B^*} \otimes (f \otimes \text{Id}_{A^*})} & B^* \otimes (B \otimes A^*) & \xrightarrow{\alpha^{-1}_{B^*, B}} & (B^* \otimes B) \otimes A^*
 \end{array}$$

### 3.2.2 Ejemplos.

(1) En  $\mathcal{Vect}_C$ , sea  $V^* = \text{Lin}(V, C)$  el dual usual. Si  $\epsilon : V \otimes V^* \rightarrow C$  es la evaluación usual,  $\epsilon(v \otimes \varphi) = \varphi(v)$ , entonces  $\mathcal{Vect}_C$  tiene la estructura de una categoría pivotal (no estricta).

(2) En  $\mathcal{Fa}$  se define el dual de una maraña  $L : m \rightarrow n$  como la maraña que se obtiene girando  $180$  grados alrededor de un eje paralelo al eje  $X$ .  $L^* : n \rightarrow m$ ; gráficamente se vería así:

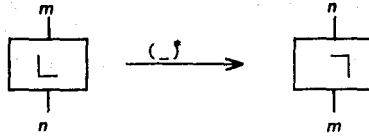


figura 36

y  $m^* = m, n^* = n$ . La evaluación se describe



figura 37

Por ejemplo, el dual de

$$\left( \text{cup} \text{ X } \right)^* = \text{X} \text{ cap}$$

En particular

$$\left( \text{parallel lines} \right)^* = \text{parallel lines}$$

$$\left( \text{X} \right)^* = \text{X}$$

$$\left( \text{cup} \right)^* = \text{circle}$$

$$\left( \text{cap} \right)^* = \text{circle}$$

figura 38

(3) En la categoría de marañas orientadas  $\mathcal{FOa}$ , el dual de una maraña  $L$  se define de manera similar que en  $\mathcal{Fa}$ , como la maraña invertida, considerando a los objetos en este caso, como sucesiones  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$ , donde  $\varepsilon_i$  toma los valores de 1 y -1, y se define el dual de una sucesión  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)^* = (-\varepsilon_k, \dots, -\varepsilon_1)$ . La evaluación se ilustra de la misma manera que en  $\mathcal{Fa}$ , indicando su orientación:



figura 39

En este caso orientado, tenemos los siguientes casos particulares:

$$\left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \dots \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \dots \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}$$

figura 40

(4) En  $\mathcal{FrOa}$  se define la dualidad de manera análoga que en (2), y la evaluación  $\varepsilon$ , se grafica como sigue:



figura 41

(5) Las categorías  $R\mathcal{O}T_a$ ,  $R\text{-}T_a$ , y  $S\text{-}R\mathcal{O}T_a$  son categorías pivotaes tales que el funtor dualidad  $(\_)*$ , actúa en los morfismos dándoles un giro de  $180$  grados alrededor de un eje perpendicular al plano de proyección de la maraña, como se ilustra:

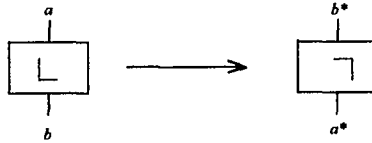


figura 42

Los morfismos evaluación  $\varepsilon_A: A \otimes A^* \rightarrow I$  se describen gráficamente tomando el objeto  $A \otimes A^*$  en el dominio de la maraña, en la cual se uniran por arcos, pares de puntos comenzando con los de enmedio, hasta unir los de los extremos; los arcos así dispuestos, están caracterizados de acuerdo con de la categoría que estemos considerando.

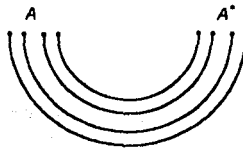


figura 43

La descripción de la coevaluación  $\eta_A: I \rightarrow A^* \otimes A$  es dual a la anterior. En este caso el objeto  $A^* \otimes A$  se toma en el codominio de la maraña .



figura 44

(6) La categoría de trenzas  $\mathcal{B}$  no es una categoría pivotal, ya que todos los morfismos de  $\mathcal{B}$  son isomorfismos y  $\varepsilon$  no puede ser un isomorfismo en este tipo de categoría. En otras palabras, la maraña



figura 45

no es una trenza.

### 3.2.3 Definición.

Sean  $\langle M, \otimes, I, (\_)*, \varepsilon \rangle$  y  $\langle N, \otimes, I', (\_)*, \varepsilon \rangle$  dos categorías pivotales, un functor  $F: M \rightarrow N$  es *pivotal*, si cumple las condiciones de la definición 3.1.3, junto con las siguientes:

$$(i) \quad F(A^*) = F(A)^* \quad \text{y}$$

(ii) el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A^* \otimes A) & \xrightarrow{F(\varepsilon_A)} & F(I) \\ \downarrow \gamma_{M,A} & & \downarrow \\ F(A)^* \otimes F(A) & \xrightarrow{\varepsilon_{F(A)}} & I' \end{array}$$

### 3.2.4 Ejemplos.

(1) Entre  $\mathcal{O}Fa$ , la categoría de marañas orientadas y  $\mathcal{F}a$  la categoría de marañas, hay un functor pivotal  $F: \mathcal{O}Fa \rightarrow \mathcal{F}a$ , el *functor que olvida*, definido como:

$$F(1, -1, 1, \dots) = n, \quad \text{si la sucesión } (1, -1, 1, \dots) \text{ tiene } n \text{ elementos y}$$

$$F(\ ) = 0.$$

$F$  actúa en los morfismos, las  $(k,l)$ -marañas, olvidando la orientación.

(2) Entre las categorías  $\mathcal{S}\text{-Rota}$  y  $\text{Rota}$  hay un funtor pivotal  $F: \mathcal{S}\text{-Rota} \rightarrow \text{Rota}$ , el funtor que olvida, definido en el ejemplo 3.1.4 (1).

(3) El funtor entre las categorías  $\mathcal{S}\text{-Rota}$  y  $\text{R-Ta}$ , definidas en el ejemplo 3.1.4 (3) es pivotal.

### 3.3 Adjunciones en categorías pivotales

Dada una categoría pivotal estricta  $\underline{M}$ , se definen las adjunciones:

$$(1) \quad \underline{M}(X \otimes A, Y) \cong \underline{M}(X, Y \otimes A^*)$$

$$(2) \quad \underline{M}(A \otimes X, Y) \cong \underline{M}(X, A^* \otimes Y)$$

como sigue.

(1) Sea  $FX = X \otimes A$  y  $GY = Y \otimes A^*$ , usando 2.3 bastará con dar  $\alpha$  y  $\beta$ .

Se define  $\alpha_y: Y \otimes A \otimes A^* \rightarrow Y$  como  $\alpha_y = \text{Id}_Y \otimes \varepsilon_A$  y  $\beta_x: X \rightarrow X \otimes A^* \otimes A$  como  $\beta_x = \text{Id}_X \otimes \eta_A$ . Para ver que, en efecto 2.3, se cumple, probaremos lo siguiente.

3.3.1 **Proposición.** (a)  $\alpha$  y  $\beta$  son transformaciones naturales.

$$(b) \quad (\alpha \otimes \text{Id}_{A^*}) \circ (\text{Id}_A \otimes \beta) = \text{Id}_{A \otimes A^*}$$

**Demostración:** (a) Para verificar que  $\beta$  es una transformación natural, tómesese un morfismo  $f: X \rightarrow X'$ ; el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta_x} & X \otimes A \otimes A^* \\ \downarrow f & & \downarrow GFf \\ X' & \xrightarrow{\beta_{x'}} & X' \otimes A \otimes A^* \end{array}$$

lo cual es debido a la proposición 2.2.2. Análogamente sucede con  $\alpha$  utilizando la proposición 2.2.3.



(b) Es consecuencia del siguiente lema, simplemente al tomar el producto tensorial por la izquierda de las composiciones 3.3.1 con  $X$  y  $Y$  respectivamente.

3.3.2 **Lema.** Sean  $\epsilon_\lambda: A \otimes A^* \rightarrow I$  y  $\eta_\lambda: I \rightarrow A^* \otimes A$  tales que

$$(3.3.3) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{Id}_A \otimes \eta_\lambda} & A \otimes A^* \otimes A \xrightarrow{\epsilon_\lambda \otimes \text{Id}_A} A \\ A^* & \xrightarrow{\eta_\lambda \otimes \text{Id}_{A^*}} & A^* \otimes A \otimes A^* \xrightarrow{\text{Id}_A \otimes \epsilon_\lambda} A^* \end{array}$$

son la identidad. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_Y &= \text{Id}_Y \otimes \epsilon_\lambda: Y \otimes A \otimes A^* \rightarrow Y \\ \beta_X &= \text{Id}_X \otimes \eta_\lambda: X \rightarrow X \otimes A^* \otimes A \end{aligned}$$

son la unidad y la counidad en la adjunción de funtores  $\langle - \otimes A, - \otimes A^*, \alpha, \beta \rangle$ .

**Demostración:** Por definiciones expuestas en el capítulo II, la unidad se define como  $\alpha_Y: Y \otimes A \otimes A^* \rightarrow Y$  y la counidad  $\beta_X: X \rightarrow X \otimes A^* \otimes A$ .

Para concluir la demostración vamos a verificar que se cumplen las condiciones (3.3.3), las cuales son consecuencia de la definición de categoría pivotal (estricta).

Así, utilizando la propiedad  $P_3$  en la cual haremos la sustitución  $B = A$  y  $f = \text{Id}_A: A \rightarrow A$ , tenemos que la composición  $(\text{Id}_A \otimes \epsilon_\lambda) \circ (\eta_\lambda \otimes \text{Id}_A) = \text{Id}_A$ , y la composición  $(\epsilon_\lambda \otimes \text{Id}_A) \circ (\text{Id}_A \otimes \eta_\lambda) = \text{Id}_A = (\text{Id}_A \otimes \epsilon_\lambda) \circ (\eta_\lambda \otimes \text{Id}_A)$ .

### 3.3.4 Definición.

Decimos que una categoría pivotal  $\underline{M}$  es **cerrada**, si para todo objeto  $B$  en  $\underline{M}$ , el funtor  ${}_-\otimes B$  tiene un adjunto derecho dado por  ${}_-\otimes B^*$ .

3.3.5 **Lema.** Toda categoría pivotal  $\underline{L}$  es cerrada.

**Demostración:** Para probar el lema, utilizaremos el teorema 2.2.9 el cual afirma que si  $\alpha$  y  $\beta$  son transformaciones naturales que satisfacen ciertas condiciones (2.2.10) entonces determinan una adjunción  $\langle F, G, \varphi \rangle$ , cuya unidad y counidad son  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

Por la proposición 3.3.1 sabemos que  $\alpha_Y: Y \otimes B \otimes B^* \rightarrow Y$  y  $\beta_X: X \rightarrow X \otimes B^* \otimes B$  son transformaciones naturales que cumplen con las condiciones (2.2.10); y por el lema 3.3.2, éstas son la unidad y counidad en la adjunción de funtores  ${}_-\otimes B$  y  ${}_-\otimes B^*$ .

Enseguida, recordaremos la definición de grupo libre en un generador o más, la cual se generalizará de manera natural a categorías.

Las propiedades siguientes caracterizan a los grupos libres en un generador y en un conjunto  $S$  de generadores.

( $GL_1$ ) Sea  $G$  un grupo libre en un generador  $c$ , entonces para todo grupo  $H$  y todo elemento  $x \in H$ , existe un único homomorfismo  $\zeta: G \rightarrow H$ , tal que  $\zeta(c) = x$

( $GL_2$ ) Dado  $G$  un grupo libre en el conjunto  $S$ ,  $S \subset G$ ; entonces para todo grupo  $H$  y toda función  $\zeta_0: S \rightarrow H$  existe un único homomorfismo  $\zeta: G \rightarrow H$ , tal que  $\zeta(s) = \zeta_0(s)$ ,  $s \in S$ ; es decir,  $\zeta_0$  tiene siempre un homomorfismo  $\zeta$  que la extiende.

### 3.3.6 Definición.

(a) Se dice que una categoría  $\underline{M}$  es *libre (trenzada, pivotal)* en un objeto generador  $X$  (tal que  $X=X^*$ ). Si cada vez que se dé una categoría  $\underline{C}$  (trenzada, pivotal) y un objeto  $Y \in \underline{C}$  (tal que  $Y=Y^*$ ), existe un único funtor  $F$  (trenzado, pivotal)

$$F: \underline{M} \rightarrow \underline{C} \quad \text{tal que}$$

$$F(X) = Y$$

(b) Se dice que una categoría  $\underline{M}$  es *libre (trenzada, pivotal)* en un conjunto  $S$  de objetos  $\{X_s\}_{s \in S}$  (fijos bajo  $(\_)^*$ ). Si cada vez que se dé una categoría  $\underline{C}$  (trenzada, pivotal) y objetos  $\{Y_s\}_{s \in S}$  en  $\underline{C}$  (fijos bajo  $(\_)^*$ ), existe un único funtor  $F$  (trenzado, pivotal)

$$F: \underline{M} \rightarrow \underline{C} \quad \text{tal que}$$

$$F(X_s) = Y_s \quad \forall s \in S$$

## 3.4 Generadores y relaciones en categorías de marañas

3.4.1 **Lema.** Cualquier maraña en las categorías  $\mathcal{F}a$ ,  $\mathcal{R}\mathcal{F}a$ ,  $\mathcal{O}\mathcal{F}a$ ,  $\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{F}a$ ,  $\mathcal{S}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{F}a$ , es composición de productos tensoriales de marañas del siguiente tipo:



figura 46

con sus distintas orientaciones.

**Demostración:** Dada un maraña  $\mathfrak{J}$ , y utilizando una homotopía adecuada podemos considerar su diagrama de maraña  $D$  en posición general.

Ahora supongamos que  $D$  tiene  $n \geq 1$  puntos singulares, y tomando como referencia las rectas  $R \times 0$  y  $R \times 1$ , dibujense entre ellas  $n-1$  rectas paralelas de tal forma que al tomar dos rectas consecutivas cualesquiera, tengamos un solo punto singular, como se observa en el siguiente diagrama:

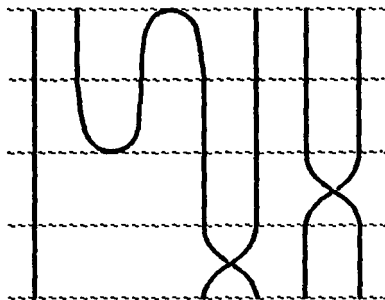


figura 47

Por lo tanto, nuestro diagrama  $D$ , será la composición de productos tensoriales de marañas elementales con la identidad. Además como  $D$  es un diagrama en posición general este no cambia, salvo isotopía en la clase de diagramas en posición general.

### 3.4.2 Definición.

En analogía con una bien conocida técnica en teoría de grupos, se puede describir la clase de morfismos de una categoría monoidal (estricta), por medio de sus "generadores y relaciones". Sea  $(\underline{M}, \otimes, I)$  una categoría monoidal estricta y  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$  una colección de morfismos de  $\underline{M}$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  genera a  $\underline{M}$  si cada morfismo en  $\underline{M}$  se puede obtener de los morfismos en el conjunto  $\mathcal{F}$  y de los morfismos  $\text{Id}_A$ ,  $A \in \text{Ob } \underline{M}$ , después de un número finito de aplicaciones de productos tensoriales y composición.

Introduciremos el concepto de "palabras en el alfabeto  $\mathcal{F}$ ". Una palabra de rango  $\leq 1$  es un símbolo  $f \circ \text{Id}_A$  donde  $f \in \mathcal{F}$  y  $A \in \text{Ob } \underline{M}$ . Si  $a$  es una palabra de rango  $\leq 1$ , entonces denotemos por  $\langle a \rangle$  al morfismo de  $\underline{M}$  representado por esta palabra (esto es, el morfismo  $f \circ \text{Id}_A$ ). La única subpalabra de una palabra  $a$  de rango  $\leq 1$  es la palabra  $a$  misma. Supongamos que las palabras de rango  $\leq n$ , han sido definidas, y que para cada palabra  $a$  de rango  $\leq n$ , sus subpalabras y los morfismos  $\langle a \rangle$  en  $\underline{M}$  están definidos. Entonces las palabras de rango  $\leq n+1$  se definen como las expresiones de la

forma  $\langle a \otimes b \rangle = \langle a \rangle \otimes \langle b \rangle$  y  $\langle a \circ b \rangle = \langle a \rangle \circ \langle b \rangle$ . Por una subpalabra de  $\langle a \otimes b \rangle$  ó  $a \circ b$  entendemos a la palabra misma junto con todas las subpalabras de  $a$  y  $b$ . Por una palabra en el alfabeto entendemos cualquier palabra de rango  $\leq n$  para cualquier  $n$ .

Una **relación** en  $\mathcal{F}$  es una igualdad  $c = d$ , donde  $c$  y  $d$  son palabras en  $\mathcal{F}$ . Sea  $\{c_j, d_j\}_{j \in J}$  una familia de palabras en el alfabeto  $\mathcal{F}$  tal que  $\langle c_j \rangle = \langle d_j \rangle \forall j \in J$ . Decimos que las palabras  $a$  y  $b$  en el alfabeto son equivalentes módulo las relaciones  $c_j = d_j, j \in J$ , si existe una sucesión finita de palabras  $a = a_1, a_2, \dots, a_n = b$  tal que para cada  $i$ , la palabra  $a_{i+1}$  es obtenida de  $a_i$  al reemplazar alguna subpalabra  $x$  por una subpalabra  $y$  donde (salvo una permutación de  $x$  y  $y$ )  $x = c_j$  y  $y = d_j$  donde  $j \in J$ , ó  $x$  y  $y$  están al lado izquierdo y derecho de una de las ecuaciones que caracterizan al producto tensorial y la composición.

Decimos que  $\langle \mathcal{F}: c_j = d_j, j \in J \rangle$  es una presentación de la categoría  $\underline{M}$  por generadores y relaciones si:

- (i)  $\mathcal{F}$  genera a  $\underline{M}$  (esto es, cada morfismo de  $\underline{M}$  es igual a  $\langle a \rangle$  para alguna palabra  $a$  en el alfabeto  $\mathcal{F}$ ), y
- (ii) Para cualesquiera palabras  $a$  y  $b$  en el alfabeto  $\mathcal{F}$  la igualdad  $\langle a \rangle = \langle b \rangle$  se cumple si solo si  $a$  y  $b$  son equivalentes módulo las relaciones  $c_j = d_j, j \in J$ .

**3.4.3 Teorema.** Una presentación de las categorías  $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_A \otimes \mathcal{F}_A, R\mathcal{F}_A, R\text{-}\mathcal{F}_A$  y  $\mathcal{S}\text{-}R\mathcal{F}_A$ , está dada por las marañas elementales  $\text{Id}, \varepsilon, \eta, \sigma$  y  $\sigma^{-1}$  respectivamente,



junto con las siguientes relaciones:

$$\sigma_{A,B} \circ \sigma_{B,A}^{-1} = \text{Id}_{A \otimes B} \tag{1}$$

$$(\sigma_{A,B} \otimes \text{Id}_A) \circ (\text{Id}_B \otimes \varepsilon_A) = (\text{Id}_A \otimes \sigma_{B,A}^{-1}) \circ (\varepsilon_A \otimes \text{Id}_B) \tag{2}$$

$$(\text{Id}_A \otimes \eta_A) \circ (\varepsilon_A \otimes \text{Id}_A) = \text{Id}_A = (\eta_A \otimes \text{Id}_A) \circ (\text{Id}_A \otimes \varepsilon_A) \tag{3}$$

$$(\sigma_{A,B} \otimes \text{Id}_C) \circ (\text{Id}_B \otimes \sigma_{A,C}) \circ (\sigma_{B,C} \otimes \text{Id}_A) = (\text{Id}_A \otimes \sigma_{B,C}) \circ (\sigma_{A,C} \otimes \text{Id}_B) \circ (\text{Id}_C \otimes \sigma_{A,B}) \tag{4}$$

$$(\eta_A \otimes \text{Id}_B) \circ (\text{Id}_A \otimes \sigma_{A,B}) = (\text{Id}_B \otimes \eta_A) \circ (\sigma_{B,A}^{-1} \otimes \text{Id}_A) \tag{5}$$

y en el caso de marañas bajo isotopía ambiental

$$(\text{Id}_A \otimes \eta_A) \circ (\sigma_{A,A} \otimes \text{Id}_A) \circ (\text{Id}_A \otimes \varepsilon_A) = \text{Id}_A \tag{6}$$

donde  $A, B$  y  $C$  son objetos cuya función identidad es un solo arco.

La interpretación geométrica de las relaciones (jugadas) (1) a la (6) está dada en la siguiente figura:

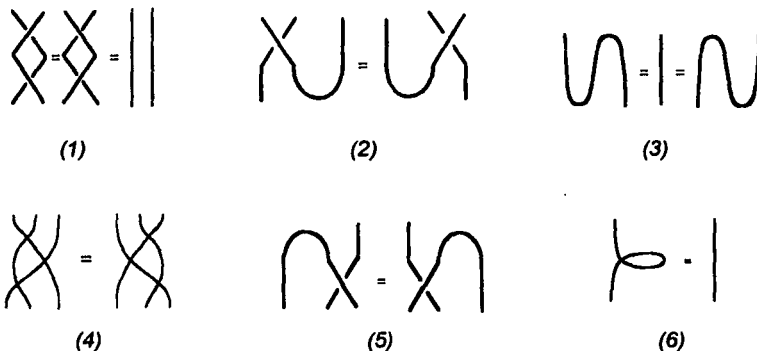


figura 48

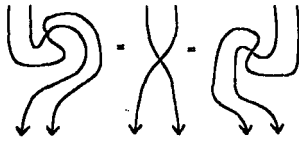
**Demostración:** Para probar que las categorías  $\mathcal{I}a$ ,  $\mathcal{O}a$ ,  $\mathcal{RO}a$ ,  $\mathcal{R}\text{-}\mathcal{I}a$  y  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{RO}a$  son generadas y presentadas por las marañas elementales y las relaciones (1) a la (5) y (6) en el caso de marañas ambientalmente isotópicas, desarrollaremos nuestra demostración en dos pasos:

(a) En primer lugar probaremos que cualquier maraña es generada por las marañas elementales, es decir, que dada una maraña  $\mathfrak{Z}$  ésta es composición de productos tensoriales de éstas.

(b) Dadas dos marañas  $\mathfrak{Z}$  y  $\mathfrak{Z}'$  estas marañas son equivalentes salvo jugadas de Reidemeister I, II, III (dependiendo de la categoría) y jugada cero. En el caso de la jugada cero; cabe mencionar que una jugada cero la podemos ver como composición de las jugadas (2), (3) y (5)

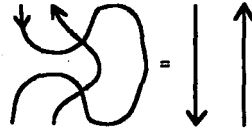
La primera parte de la demostración se probó en el lema 3.4.1. Para la segunda parte utilizaremos el teorema de Reidemeister mencionado en el capítulo I, teorema 1.3.11, en el cual se demuestra que dos marañas son equivalentes si y sólo si cualesquiera dos de sus diagramas son equivalentes; considerando la jugada cero según sea el caso, como composición de jugadas (2), (3) y (5). Así con estos resultados queda demostrado el teorema.

♦



(a)

figura 49



(b)

**Demostración:** Para la prueba es suficiente verificar que las relaciones del teorema 3.4.3 se satisfacen en el teorema 3.4.4 y viceversa, en particular las relaciones (2) y (5), se satisfacen como se puede observar en los siguientes diagramas:

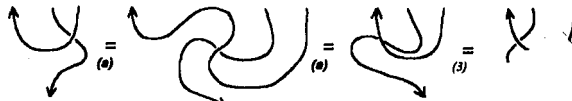


figura 50

Además las relaciones descritas en el teorema 3.4.3, en el que podemos observar que las diagramas  $X_+$  (véase figura 51), generan esta categoría en términos de  $X_+$  y  $X_-$ , con lo cual se puede generar esta categoría,  $\mathcal{P}$ .

51  
TAR

$$\begin{aligned}
 Y_{\pm} &= (\uparrow\downarrow) \circ (\downarrow X_{\pm} \downarrow) \circ (\uparrow\downarrow) \\
 T_{\pm} &= (\uparrow\downarrow) \circ (\downarrow X_{\pm} \downarrow) \circ (\downarrow\uparrow) \\
 Z_{\pm} &= (\downarrow\downarrow) \circ (\downarrow\uparrow\downarrow) \circ (\downarrow X_{\pm} \downarrow)
 \end{aligned}$$

**FALTA PAGINA**

**No. 51**

Page

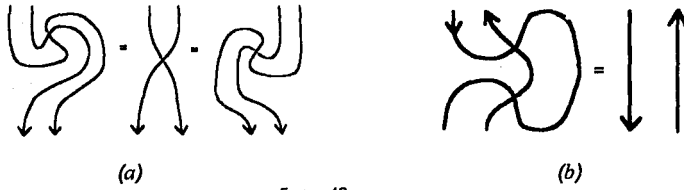


figura 49

**Demostración:** Para la prueba es suficiente verificar que las relaciones del teorema 3.4.3 se satisfacen en el teorema 3.4.4 y viceversa, en particular las relaciones (2) y (5), se satisfacen como se puede observar en los siguientes diagramas:

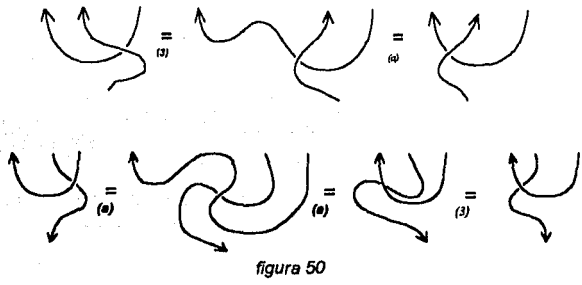


figura 50

Además las relaciones descritas en este teorema se cumplen en el teorema 3.4.3, en el que podemos observar que las diferentes orientaciones de los cruces  $X_+$  y  $X_-$  (véase figura 51), generan esta categoría, pero estos pueden ser expresados en términos de  $X_+$  y  $X_-$ , con lo cual se prueba que que basta con estos generadores para generar ésta categoría, además éstas relaciones se satisfacen en el teorema 3.4.3

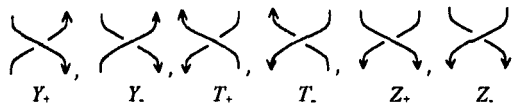


figura 51

$$\begin{aligned}
 Y_{\pm} &= (\downarrow \downarrow \curvearrowright) \circ (\downarrow X_{\pm} \downarrow) \circ (\curvearrowleft \uparrow \downarrow) \\
 T_{\pm} &= (\curvearrowleft \uparrow \downarrow) \circ (\downarrow X_{\pm} \downarrow) \circ (\downarrow \uparrow \curvearrowright) \\
 Z_{\pm} &= (\downarrow \downarrow \curvearrowright) \circ (\downarrow \downarrow \uparrow \curvearrowleft \downarrow) \circ (\downarrow \downarrow X_{\pm} \downarrow \downarrow) \circ (\downarrow \curvearrowleft \uparrow \downarrow \downarrow) \circ (\curvearrowleft \downarrow \downarrow)
 \end{aligned}$$



**3.4.5 Teorema.**  $\mathcal{R}OTa$  (resp.  $\mathcal{R}\text{-}Ta$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}OTa$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}Ta$ ) es una categoría libre, trenzada, pivotal en un objeto generador (resp. en un objeto generador fijo bajo  $(\_)*$ , en un conjunto  $S$  de objetos generadores, en un conjunto  $S$  de objetos generadores fijos bajo  $(\_)*$ ).

**Demostración:** Para la prueba mostraremos que dada cualquier categoría trenzada y pivotal  $C$  y un objeto  $X$  de  $C$  (resp. un objeto  $X$  de  $C$  tal que  $X=X^*$ ; un conjunto de objetos  $\{X_s \mid s \in S\}$  de  $C$ ; un conjunto  $\{X_s \mid s \in S\}$  de  $C$  tal que  $X_s=X_s^*$ ) hay un único funtor pivotal  $F$  de la categoría  $\mathcal{R}OTa$  a  $C$ , que respeta el trenzado y la pivotalidad y lleva el generador  $1$  (resp.  $1$ ,  $(1, s)$  para  $s \in S$ ,  $s$  para  $s \in S$ ) al objeto u objetos de  $C$ .

Observemos que en  $\mathcal{R}OTa$  (resp.  $\mathcal{R}\text{-}Ta$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}OTa$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}Ta$ ), todo objeto es un producto tensorial (finito) de los objetos  $1$  y  $-1$  (resp.  $1$ ,  $(\pm 1, s)$ ,  $s, s \in S$ ).

Sea  $F: \mathcal{R}OTa \rightarrow C$

tal que  $F(1) = X$   
 $F(-1) = X^*$

y a cualquier otro objeto de  $\mathcal{R}OTa$  (resp.  $\mathcal{R}\text{-}Ta$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}OTa$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}Ta$ ) lo aplica en el correspondiente producto tensorial de  $X$  y  $X^*$  (resp.  $X, X_s, X_s$ ).

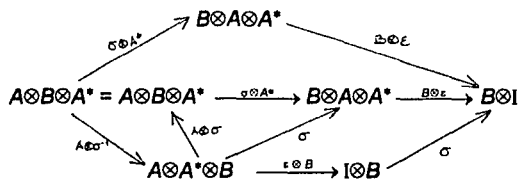
Así también como  $\mathcal{R}OTa$  (resp.  $\mathcal{R}\text{-}Ta$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}OTa$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}Ta$ ) es una categoría trenzada y pivotal por el teorema 3.4.1 cualquier morfismo en la categoría es composición de productos tensoriales de  $\sigma_{A,B}$ ,  $\sigma_{A,A}^{-1}$ ,  $\epsilon_A$  y  $\eta_A$ , para cualesquiera  $A, B$  objetos de la categoría y sus correspondientes duales. Luego existe al menos un funtor pivotal:

$F: \mathcal{R}OTa \rightarrow C$

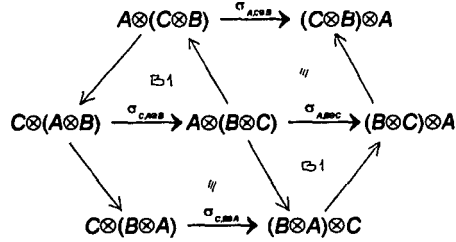
(resp.  $\mathcal{R}\text{-}Ta$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}OTa$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}Ta$ ) que aplica a los objetos  $1$  y  $-1$  (resp.  $1, (\pm 1, s), s$ ), en  $A$  y  $B$ , respectivamente, que respeta el trenzamiento y la estructura pivotal.

Para ver que tal funtor está bien definido, es suficiente probar que las relaciones (1) a la (5) del teorema 3.4.3 se cumplen para cada una de las componentes del trenzamiento ( $\sigma$ ), como para la estructura pivotal ( $\epsilon, \eta$ ) para cualesquiera objetos  $A, B$  y  $C$  en cualquier categoría  $C$  trenzada y pivotal.

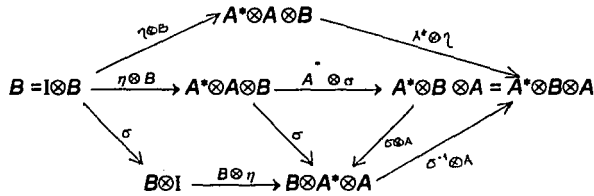
La relación (1) se verifica de inmediato. Para la relación (2) considérese el siguiente diagrama en el cual utilizamos la propiedad  $TI$  del trenzamiento y la naturalidad de  $\sigma$ :



Para (3) utilizamos la propiedad P3 de la definición de categoría pivotal, considerando  $B = A$  y  $f = \text{Id}_A$ . La relación (4) se sigue del siguiente diagrama conmutativo:



en donde utilizamos la propiedad T1 del trenzamiento y la naturalidad de  $\sigma$ . (5) se obtiene del siguiente diagrama:



que es conmutativo en el cual utilizamos la propiedad T2 del trenzamiento y la naturalidad de  $\sigma$ .

Por lo tanto existe un único funtor pivotal  $F: \mathcal{R} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{R}\text{-}\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R} \otimes \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{R}\text{-}\mathcal{A}$ ), que mapea el objeto generador y respeta la estructura del trenzamiento y pivotalidad.

Ahora demostraremos que  $F$  respeta cada una de las componentes del trenzado, cuando éste posee varios arcos, y de la misma forma observaremos que esto también sucede para la evaluación  $\varepsilon$  y la coevaluación  $\eta$ .

Para esto denotemos por  $|A|$  el número de generadores, (1 ó -1) (resp. 1, ( $\pm 1$ ),  $s$ ), del objeto  $A$ , así procederemos a hacer la prueba por inducción sobre el número de generadores. En primer lugar realizaremos nuestra inducción sobre  $A$ , para lo cual consideraremos, sin pérdida de generalidad que  $|B| = 1$ . Entonces, en el caso del trenzamiento, queremos verificar que  $F(\sigma_{AB}) = \sigma_{\mathcal{R} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ .

Si  $|A| = 0$  es decir,  $A = \mathbb{1}$ , tenemos que  $\sigma_{\mathbb{1}B}$  es la identidad para  $\mathbb{1} \otimes B = B = B \otimes \mathbb{1}$ , en este caso tendremos a la maraña identidad. Si  $|A| = 1$ , este caso se cumple ya que así construimos  $F$ .

En el caso de  $|A| = 2$ ,

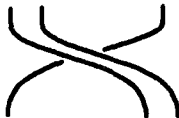
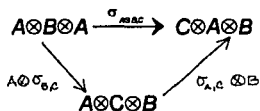


figura 52

tenemos que  $F(\sigma_{2,1}) = F(\text{Id} \otimes \sigma_{1,1}) \circ F(\sigma_{1,1} \otimes \text{Id}) = (X \otimes \sigma_{XX}) \circ (\sigma_{XX} \otimes X) = \sigma_{X \otimes X}$  y esto es cierto por el siguiente diagrama conmutativo:



Ahora si  $|A| = n$ ,



figura 53

entonces  $F(\sigma_{n,1}) = F(\sigma_{n-1,1} \otimes \text{Id}) \circ F(\text{Id}_{n-1} \otimes \sigma_{1,1}) = (\sigma_{X \otimes n-1, X} \otimes X) \circ (X^{\otimes n-1} \otimes \sigma_{XX}) = \sigma_{X \otimes n, X}$  (por el diagrama anterior). Análogamente en el otro caso de la inducción.

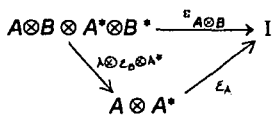
Ahora verificaremos que todas las componentes de  $\varepsilon$  se respetan bajo  $F$ , es decir,  $F(\varepsilon_A) = \varepsilon_{F(A)}$ , procederemos también por inducción.

Si  $|A| = 0$ ,  $\varepsilon_1$  se cumple por la propiedad P2 de la definición de categoría pivotal (estricta). Si  $|A| = 1$  vemos que se satisface por construcción del funtor  $F$ . Para  $|A| = 2$ ,



figura 54

$F(\varepsilon_2) = \varepsilon \circ (\text{Id} \otimes \varepsilon \otimes \text{Id}) = \varepsilon_X \circ (X \otimes \varepsilon_X \otimes X) = \varepsilon_{X \otimes X}$  lo cual se cumple por el siguiente diagrama conmutativo:



En el caso de  $|A| = n$ ,



figura 55

$F(\epsilon_n) = F(\text{Id}_{n-1} \otimes \epsilon \otimes (\text{Id}_{n-1})^*) \circ F(\epsilon_{n-1}) = (X^{\otimes n-1} \otimes \epsilon_X \otimes X^{\otimes n-1}) \circ \epsilon_{X^{\otimes n-1}} = \epsilon_{X^{\otimes n}}$  (por diagrama anterior). De manera dual se demuestra para  $\eta_A$ .

Por lo tanto  $F$  respeta la estructura del trenzamiento y pivotalidad dada por  $(\_)^*$ .

◆

# CAPÍTULO IV

---

## DUALIDAD Y TRAZA

El concepto de traza, nos recuerda de inmediato a los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo  $K$ , toda vez que a una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo, se le puede asociar una matriz tomando alguna base en el espacio. El valor de la traza de esta matriz no depende de la base que elijamos, por lo cual se tiene que es un invariante de la transformación lineal.

En el caso de las  $(m,m)$ -marañas, veremos que la traza, vista gráficamente, se construye cerrando la maraña en el mismo sentido en que se cierra una  $n$ -trenza, es decir, haciendo la construcción que se indica en la figura.

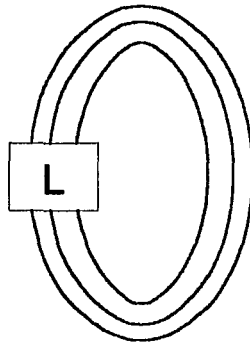


figura 56

La traza es una forma natural de asociar un enlace a una  $(m,m)$ -maraña; (además como vimos anteriormente un enlace es una maraña particular) .

## 4.1 traza

### 4.1.1 Definición.

La **traza** de un endomorfismo  $f : A \rightarrow A$  en una categoría pivotal  $\underline{M}$ , es el endomorfismo de  $I$  dado por la composición:

$$\text{tr}(f) = \varepsilon_A \circ (f \otimes \text{Id}_A) \circ \eta_A$$

esquemáticamente:

$$\text{tr}(f) : I \xrightarrow{\eta_A} A \otimes A^* \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_A} A \otimes A^* \xrightarrow{\varepsilon_A} I$$

Para la mejor comprensión de este concepto, describiremos la traza gráficamente, por lo que utilizaremos una notación diagramática, la cual fue introducida por Penrose y también por Joyal y Street. (Veáse [PEN] y [JS]) .

Independientemente de la categoría a la que nos refiramos, representaremos un morfismo arbitrario  $f$  de  $A$  a  $B$  por el símbolo:

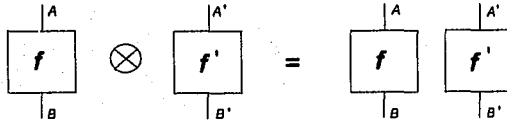


La identidad de  $A$  se representa por



y la composición colocando un morfismo abajo del otro.

El producto tensorial de (dos objetos  $A$  y  $B$  ó de) dos morfismos cualesquiera, lo representaremos colocando uno junto al otro:



Además, si la categoría es pivotal, tenemos dos morfismos asociados: la evaluación  $\epsilon$ , que esta representada por el símbolo:



y la coevaluación  $\eta$ , representada por :



en donde  $A^*$  es el dual de  $A$  en la categoría.

Entonces la definición de traza escrita gráficamente sería la siguiente:

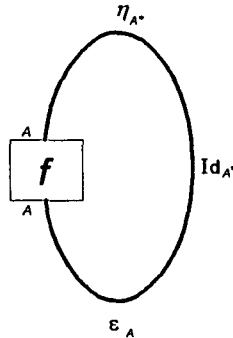


figura 57

#### 4.1.2 Ejemplo.

En el caso de  $\mathcal{R}\text{-Mod}_{\mathcal{R}}^1$ , los módulos libres finitamente generados sobre  $\mathcal{R}$  un anillo conmutativo con 1, tenemos que si  $A \in \mathcal{R}\text{-Mod}_{\mathcal{R}}^1$  y  $f: A \rightarrow A$  tiene una matriz  $(f_i^j)$  correspondiente a una base  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , entonces la traza de  $f$  está dada por:

$$\text{tr}(f) : \mathcal{R} \xrightarrow{\eta_A} A \otimes A^* \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_A} A \otimes A^* \xrightarrow{\epsilon_A} \mathcal{R}$$

donde  $\eta_A : \mathcal{R} \rightarrow A \otimes A^*$  y  $\varepsilon_A : A \otimes A^* \rightarrow \mathcal{R}$  tales que

$$1 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \otimes a^i \quad a_i \otimes a^j \mapsto \delta_i^j$$

$\{a^1, \dots, a^n\}$  representan la correspondiente base dual de  $A^* = \text{Hom}_A(A, \mathcal{R})$ .

Así calculando  $\text{tr}(f)(1)$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{tr}(f)(1) &= \varepsilon_A \circ (f \otimes \text{Id}_A) \circ \eta_A(1) = \varepsilon_A \circ (f \otimes \text{Id}_A) \left( \sum_{i=1}^n a_i \otimes a^i \right) = \varepsilon_A \circ \left( \sum_{i=1}^n f(a_i) \otimes a^i \right) = \\ &= \varepsilon_A \circ \left( \sum_{i,j=1}^n f_i^j a_j \otimes a^i \right) = \sum_{i,j=1}^n f_i^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n f_i^i \quad (\text{ya que } \delta_j^i = 0 \text{ si } i \neq j). \end{aligned}$$

Vemos así que la definición categórica de traza implica la definición usual de traza de una matriz. En particular, esto prueba que la traza de una transformación lineal está bien definida por la traza de la matriz asociada a alguna base y no depende de ésta.

**4.1.3 Lema.** En una categoría pivotal  $\underline{M}$ , sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo arbitrario. Si se denota por  $f^*$  al dual de  $f$ , el siguiente diagrama es conmutativo y caracteriza  $f^*$ :

$$(D) \quad \begin{array}{ccc} A \otimes B^* & \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_A} & B \otimes B^* \\ \downarrow \text{Id}_A \otimes f^* & & \downarrow \varepsilon_B \\ A \otimes A^* & \xrightarrow{\varepsilon_A} & I \end{array}$$

En forma diagramática:

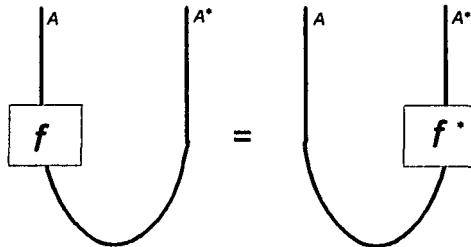


figura 58



**Demostración:** Para la prueba, consideremos el diagrama  $(D^*)$  dual de  $(D)$ . Bastará con demostrar que  $(D^*)$  conmuta.

$$(D^*) \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\eta_B} & B \otimes B^* \\ \downarrow \eta_A & & \downarrow \text{Id}_B \otimes f^* \\ A \otimes A^* & \xrightarrow{\eta_{A^*}} & B \otimes A^* \end{array}$$

Considérese la adjunción  $\varphi : \underline{M}(X \otimes A, Y) \cong \underline{M}(X, Y \otimes A^*)$ ; por ser ésta transformación natural, dado el morfismo  $f: A \rightarrow B$ , tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \underline{M}(X \otimes A, Y) & \xrightarrow{\varphi} & \underline{M}(X, Y \otimes A^*) \\ \uparrow (\text{Id}_X \otimes \eta)^{\wedge} & & \uparrow (\text{Id}_Y \otimes f^*)_{\wedge} \\ \underline{M}(X \otimes B, Y) & \xrightarrow{\varphi} & \underline{M}(X, Y \otimes B^*) \end{array}$$

es conmutativo. ( $g^{\wedge}$  y  $h_{\wedge}$  denotan las correspondientes funciones inducidas).

Si en el diagrama tomo  $X = I$  y  $Y = B$  resulta

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & (f \otimes \text{Id}_A) \circ \eta_A \\ \uparrow & & \parallel \\ \underline{M}(I \otimes A, B) & \xrightarrow{\varphi} & \underline{M}(I, B \otimes A^*) \\ \uparrow (\text{Id}_I \otimes \eta)^{\wedge} & & \uparrow (\text{Id}_B \otimes f^*)_{\wedge} \\ \underline{M}(I \otimes B, B) & \xrightarrow{\varphi} & \underline{M}(I, B \otimes B^*) \\ \text{Id}_B & \xrightarrow{\quad} & \eta_B \end{array}$$

en donde tenemos que, en general, el isomorfismo  $\underline{M}(X \otimes A, Y) \cong \underline{M}(X, Y \otimes A^*)$  manda un morfismo  $g : X \otimes A \rightarrow Y$  en la composición:

$$X \otimes I \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \eta_A} X \otimes A \otimes A^* \xrightarrow{g \otimes \text{Id}_A} Y \otimes A^*$$

como se vió en la demostración del teorema 2.2.8 .

Así, concluimos que  $(f \otimes \text{Id}_A) \circ \eta_A = (\text{Id}_B \otimes f^*) \circ \eta_B$ , y, como el functor dual manda diagramas conmutativos en diagramas conmutativos, la conmutatividad de  $(D)$  queda demostrada.

Ya que la adjunción  $\varphi$  es un isomorfismo, es inmediato probar que la conmutatividad de  $(D)$  caracteriza al dual de  $f^*$  .

**4.1.4 Lema.** Para cualquier categoría pivotal  $\underline{M}$ , y morfismos  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow A$  la traza satisface la siguiente identidad:

$$(4.1.5) \quad \varepsilon_A \circ [(g \circ f) \otimes \text{Id}_A] \circ \eta_A = \varepsilon_A \circ [g \otimes f^*] \circ \eta_B. \text{ es decir,}$$

$$\text{tr}(g \circ f) = \varepsilon_A \circ [g \otimes f^*] \circ \eta_B.$$

en forma diagramática:

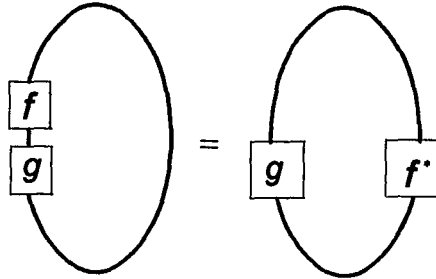


figura 59

**Demostración:** Para la demostración de este lema, vamos a utilizar el dual del lema 4.1.3 manejando nuevamente el hecho de que el funtor dual manda diagramas conmutativos en diagramas conmutativos, de forma que tendremos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$(D^*) \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\eta_B} & B \otimes B^* \\ \downarrow \eta_A & & \downarrow \text{Id}_B \otimes f^* \\ A \otimes A^* & \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_A} & B \otimes A^* \end{array}$$

$A \otimes A^*$

es decir,  $(\text{Id}_B \otimes f^*) \circ \eta_B = (f \otimes \text{Id}_A) \circ \eta_A$ .

Luego componiendo el morfismo  $g \otimes \text{Id}_A$  con los morfismos  $\text{Id}_B \otimes f^*$  y  $f \otimes \text{Id}_A$  y aplicando la funtorialidad del producto tensorial tenemos lo siguiente:

$$(i) \quad (g \otimes \text{Id}_A) \circ (f \otimes \text{Id}_A) = (g \circ f) \otimes \text{Id}_A$$

$$(ii) \quad (g \otimes \text{Id}_A) \circ (\text{Id}_B \otimes f^*) = (g \circ \text{Id}_B) \otimes (\text{Id}_A \circ f^*) = g \otimes f^*$$

Por la conmutatividad de  $(D^*)$  tenemos que  $((g \circ f) \otimes \text{Id}_{A^*}) \circ \eta_{A^*} = (g \otimes f^*) \circ \eta_{A^*}$  y, componiendo al final con  $\varepsilon_{A^*}$ , obtenemos la igualdad deseada.

**4.1.6 Lema.** Para todo morfismo  $\phi: I \longrightarrow I$  tenemos que se cumple la siguiente igualdad  $\phi = \phi^*$ .

**Demostración:** Utilizando el lema 4.1.3, tenemos que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes I^* & \xrightarrow{\phi \otimes I^*} & I \otimes I^* \\
 \downarrow I \otimes \phi^* & & \downarrow \varepsilon_I \\
 I \otimes I^* & \xrightarrow{\varepsilon_I} & I
 \end{array}$$

en donde, por definición  $I^* = I$  e  $I \otimes I^* = I$ . Así, tendremos que el diagrama anterior es igual a:

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\phi} & I \\
 \downarrow \phi^* & & \parallel \\
 I & \xlongequal{\quad} & I
 \end{array}$$

**4.1.7 Teorema.** En cualquier categoría pivotal  $\underline{M}$ , dados morfismos  $f: A \longrightarrow B$  y  $g: B \longrightarrow A$  para cualesquiera objetos  $A$  y  $B$ , la traza satisface la siguiente igualdad:

$$(4.1.8) \quad \text{tr}(g \circ f) = \text{tr}(f \circ g).$$

En forma diagramática:

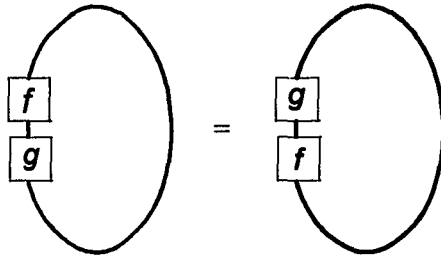


figura 60

A esta propiedad se le conoce como **conmutatividad de la traza**; (y corresponde a la conocida propiedad de la traza en matrices).

**Demostración:** Por definición tenemos que  $\text{tr}(g \circ f) = \varepsilon_A \circ ((g \circ f) \otimes \text{Id}_A) \circ \eta_A$ , y aplicando el lema 4.1.4 resulta  $\text{tr}(g \circ f) = \varepsilon_A \circ [g \otimes f^*] \circ \eta_B$ , y ahora utilizando el lema 4.1.6 tenemos que  $\text{tr}(g \circ f) = [\text{tr}(g \circ f)]^* \circ (\eta_B)^* \circ (g \otimes f^*) \circ (\varepsilon_A)^*$ , de donde, reduciendo esta expresión, obtenemos que  $\text{tr}(g \circ f) = \varepsilon_B \circ (f \otimes g^*) \circ \eta_A$ , expresión, esta última, que corresponde a la definición de  $\text{tr}(f \circ g)$ .

Puesto en forma diagramática, la demostración se lee como sigue:

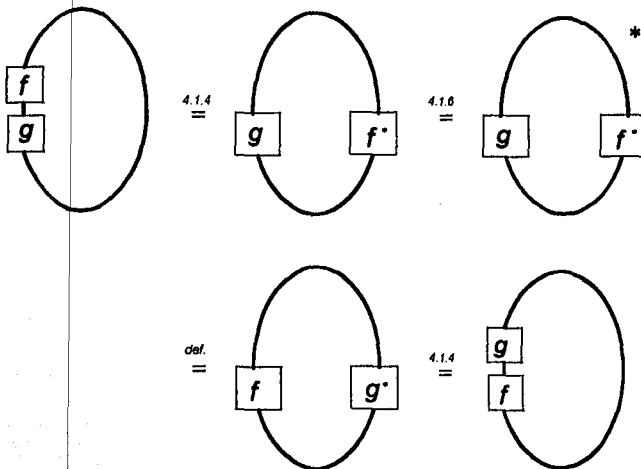


figura 61

**4.1.9 Teorema.** La traza se conserva bajo funtores monoidales que respetan la dualidad  $(\_)*$  y los morfismos evaluación  $\epsilon$ . A estos funtores los llamamos **funtores pivotaes**. Así, para un funtor pivotal  $F$  y un endomorfismo  $f: A \longrightarrow A$ ,

$$(4.1.11) \quad F(\text{tr}(f)) = \text{tr}(F(f))$$

**Demostración:**  $F(\text{tr}(f)) = F(\epsilon_A \circ [f \otimes \text{Id}_A] \circ \eta_A) = F(\epsilon_A) \circ F(f \otimes \text{Id}_A) \circ F(\eta_A)$   
 $= \epsilon_{F(A)} \circ (F(f) \otimes F(\text{Id}_A)) \circ \eta_{F(A)} = \text{tr}(F(f))$ .

# CAPÍTULO V

---

## INVARIANTES DE MARAÑAS Y R-MATRICES

En el primer capítulo, mencionamos una relación la cual tiene interés especial. Es la ecuación de trenza:

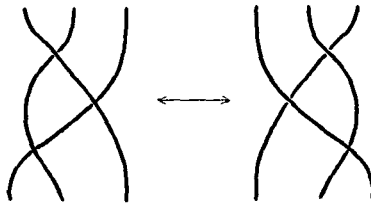


figura 62

A esta ecuación se le llama **la ecuación de Yang-Baxter**, la cual corresponde a la jugada de Reidemeister de tipo III, y se expresa algebraicamente:

$$\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}$$

Lo notable de esta ecuación son sus aplicaciones en la física matemática. En la forma en que esta surge en la física matemática, involucra parámetros adicionales frecuentemente llamados rapidez o momento. De hecho, si interpretamos el vértice

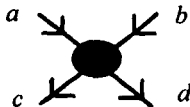


figura 63

como una interacción de partículas con espines (o cargas) entrantes  $a$  y  $b$ , y espines (o cargas) salientes  $c$  y  $d$ , entonces el número  $R_{cd}^{ab}$  puede interpretarse como la amplitud de dispersión para esta interacción. En otras palabras, puede considerarse como la amplitud de probabilidad para esta combinación particular de espines entrantes y salientes. Tenemos así una descripción de la situación del *modelo de Potts* en física estadística, en el que se trata de calcular una función de partición para un sistema físico con una gráfica plana asociada y una familia de estados descritos combinatoriamente. [KAU]

## 5.1 Tensores abstractos

Para introducir este capítulo, mencionaremos una versión de álgebra de matrices introducida por Kauffman, cuando estas poseen varios índices, utilizando notación diagramática análoga a la de Penrose a la cual se le ha llamado **tensores abstractos o diagramáticos**.

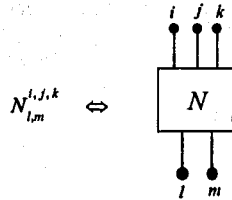
Así con la ayuda de esta teoría podemos describir de una manera sencilla los diagramas de marañas por medio de productos de matrices, relacionando así la topología y el álgebra.

### 5.1.1 Definición.

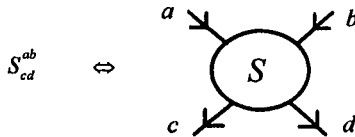
Considérese la matriz  $M = (M'_i{}_j)$  con elementos  $M'_i{}_j$  en un campo  $K$ , con  $i$  y  $j$  en un conjunto de índices  $I$ . La matriz  $M$  en notación de tensores abstractos se denotará por un cuadro con un segmento de recta en la parte superior, para indicar el índice superior y un segmento de recta en la parte inferior, para el índice inferior:

$$M = M'_i{}_j \Leftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \boxed{M} \\ | \\ \bullet \\ j \end{array}$$

En general algunos de estos objetos tensoriales, tendrán varios índices superiores e inferiores, lo cual estará representado por segmentos que emanan del diagrama correspondiente:



Para relacionar adecuadamente los índices de una matriz con su diagrama correspondiente, pondremos la letra del índice respectivo en cada uno de los segmentos y una flecha indicando su dirección, como se puede observar en la siguiente figura:

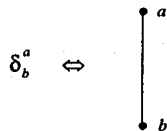


las flechas indican las "entradas"  $\{a,b\}$  y las "salidas"  $\{c,d\}$ .

$$1 \text{ si } a = b$$

Utilizaremos un segmento para denotar la delta de Kronecker  $\delta_b^a =$

$$0 \text{ si } a \neq b$$

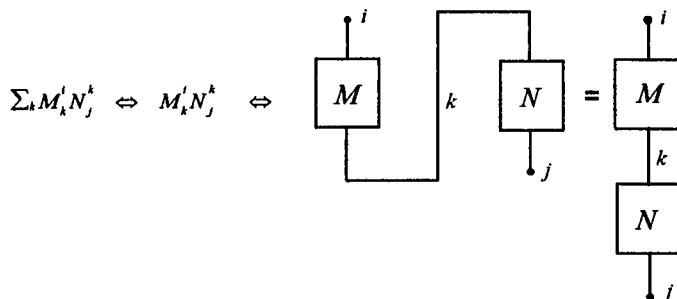


### 5.1.2 Definición.

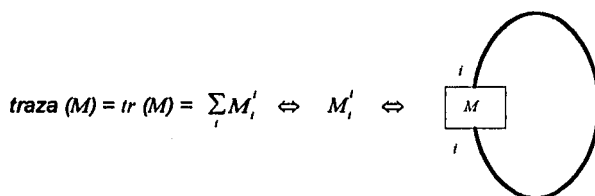
Definimos por  $(MN)_j^i = \sum_k M_k^i N_j^k$  la multiplicación de matrices  $M$  y  $N$ ; según la convención de Einstein, ésta se puede escribir simplemente como  $M_k^i N_j^k$  donde se suma sobre los índices superior e inferior repetidos.



Esto, en el lenguaje de tensores diagramáticos, lo representaremos por un segmento que unirá los correspondientes segmentos en las cuales los índices coinciden:

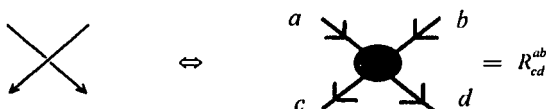


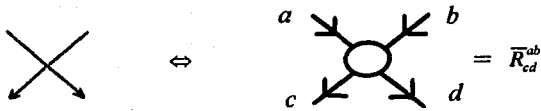
En particular, si consideramos la traza de una matriz  $M$ , ésta se representará por:



Con lo anterior hemos observado que la multiplicación de matrices corresponde a conectar una caja con otra y la traza usual conecta la caja consigo misma; además esta definición diagramática de traza coincide con la definición diagramática de traza de una  $(m,m)$ -maraña.

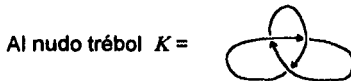
Hasta estos momentos, con lo expuesto anteriormente, es claro que queremos interpretar un diagrama de nudo o enlace como un diagrama de tensores abstractos, para lo cual utilizaremos una notación sencilla basada en diagramas orientados, en la cual asociaremos ciertas matrices a cada uno de los dos tipos posibles de cruces, así:





Con esta notación, podremos representar a cualquier diagrama de enlace orientado  $K$ , como diagrama orientado o tensor abstracto  $T(K)$ .

### 5.1.3 Ejemplo.

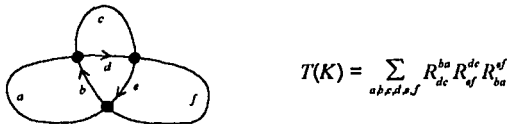


le corresponde el diagrama orientado

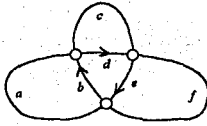


le corresponde  $T(K') =$  . Si a cada segmento del tensor abstracto

$T(K)$  le asignamos una letra, entonces  $T(K)$  corresponde a la suma de los productos formales siguientes:



Análogamente para el tensor abstracto  $T(K')$  tenemos la siguiente suma formal:



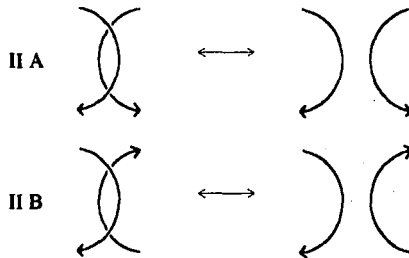
$$T(K^1) = \sum_{a,b,c,d,e,f} \overline{R}_{dc}^{ba} \overline{R}_{ef}^{de} \overline{R}_{ba}^{ef}$$

Para dar una visión matemática más concisa a la suma formal que define el tensor abstracto  $T(K)$ , podemos suponer que  $\mathcal{R}$  es un anillo conmutativo con  $1$ , y que se tiene un conjunto de índices  $I$  tal que  $a, b, c, \dots \in I$  y que cada  $R_{cd}^{ab}$  pertenece a  $\mathcal{R}$ .

La elección de etiquetas o índices de  $I$  para las aristas en  $T(K)$  podemos verla como un estado  $\sigma$  de  $K$ , es decir, como una coloración en donde a las aristas de  $K$  se les asigna un color del conjunto  $I$ .

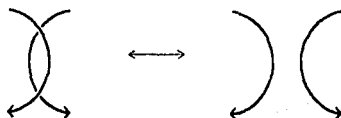
Nuestro interés con respecto a  $T(K)$ , es saber, bajo qué circunstancias  $T(K)$  sería un invariante salvo jugadas de Reidemeister, y en particular, la pregunta de relevancia en este caso, es la invariancia salvo jugadas de Reidemeister de tipo II y tipo III (isotopía regular).

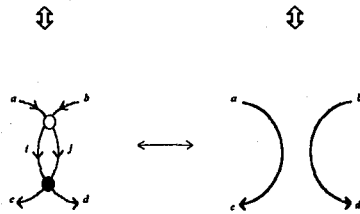
Tenemos dos versiones de la jugada de Reidemeister de tipo II orientada:



Para nuestros fines necesitamos que  $T(K)$  sea invariante bajo las jugadas II A y II B.

La jugada II A expresada en el lenguaje de tensores abstractos es la siguiente:

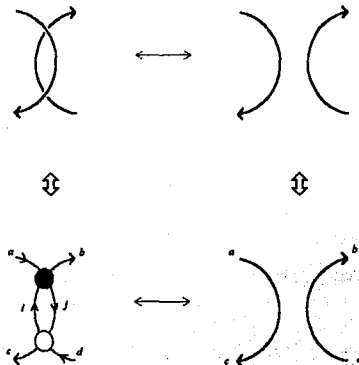




(1)  $\bar{R}_{ij}^{ab} R_{cd}^{ij} = \delta_c^a \delta_b^d$

figura 64

y para la jugada II B, tenemos los siguientes diagramas orientados:

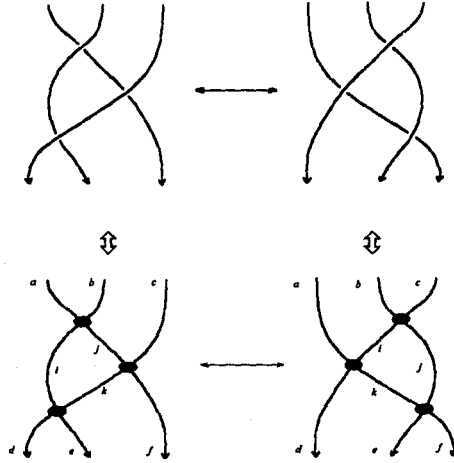


(2)  $R_{jb}^{ia} \bar{R}_{ic}^{jd} = \delta_c^a \delta_b^d$

figura 65

Las dos propiedades anteriores significan que las matrices  $R$  y  $\bar{R}$  son una la inversa de la otra .

Para la jugada de Reidemeister de tipo III orientada, también tenemos dos versiones, la tipo III A:



$$(3) \quad R_{ij}^{ab} R_{kf}^{jc} R_{de}^{ik} = R_{ij}^{bc} R_{dk}^{ai} R_{ef}^{bj}$$

figura 66

a esta ecuación se le conoce como la ecuación de Yang-Baxter correspondiente a la jugada de Reidemeister de tipo III A .

Si cambiamos en la figura la orientación de los cruces se obtiene la ecuación de Yang-Baxter, tipo III B . En resumen:

$$\text{III A: } R_{ij}^{ab} R_{kf}^{jc} R_{de}^{ik} = R_{ij}^{bc} R_{dk}^{ai} R_{ef}^{bj}$$

$$\text{III B: } \bar{R}_{ij}^{ab} \bar{R}_{kf}^{jc} \bar{R}_{de}^{ik} = \bar{R}_{ij}^{bc} \bar{R}_{dk}^{ai} \bar{R}_{ef}^{bj}$$

Con lo anterior, hemos probado el siguiente teorema:

**5.1.4 Teorema. (Kauffman)** Si las matrices  $R$  y  $\bar{R}$  satisfacen II A, II B, y III A III B, entonces el tensor abstracto  $T(K)$  es un invariante de isotopía regular de diagramas orientados  $K$ .

## 5.2 Representaciones lineales de la Categoría $\mathcal{O}Fa$

### 5.2.1 Categorías monoidales estrictas de módulos.

En esta sección denotaremos con  $\mathcal{R}$ , a un anillo conmutativo con 1.

Para el estudio de la categoría de marañas orientadas  $\mathcal{O}Fa$ , es natural considerar sus representaciones lineales, esto es, funtores covariantes que respeten el producto tensorial de la categoría  $\mathcal{O}Fa$  a la categoría de módulos.

La construcción de tales funtores se ve impedida por el hecho de que la categoría de  $\mathcal{R}$ -módulos con el producto tensorial usual  $\otimes_{\mathcal{R}}$  no es estrictamente monoidal, en otras palabras, si  $U, V$  y  $W$  son  $\mathcal{R}$ -módulos entonces los  $\mathcal{R}$ -módulos  $(U \otimes_{\mathcal{R}} V) \otimes_{\mathcal{R}} W$  y  $U \otimes_{\mathcal{R}} (V \otimes_{\mathcal{R}} W)$  aunque son canónicamente isomorfos, difieren como conjuntos.

La siguiente construcción provee categorías de módulos estrictamente monoidales.

Sea  $\{V(i)\}_{i \in I}$  una colección de  $\mathcal{R}$ -módulos. A cada sucesión finita  $j = (i_1, \dots, i_n)$  con  $i_1, \dots, i_n \in I$  le asociamos el  $\mathcal{R}$ -módulo:

$$V(j) = (\dots((V(i_1) \otimes_{\mathcal{R}} V(i_2)) \otimes_{\mathcal{R}} V(i_3)) \otimes \dots) \otimes_{\mathcal{R}} V(i_n)$$

para la sucesión vacía, decimos  $V(\emptyset) = \mathcal{R}$ .

Considérese la categoría cuyos objetos son los pares  $j, V(j)$  para todas las sucesiones finitas  $j$  de elementos de  $I$ .

Los morfismos  $(j, V(j)) \longrightarrow (j', V(j'))$  consisten de todos los  $\mathfrak{R}$ -homomorfismos lineales  $V(j) \longrightarrow V(j')$ , la composición de morfismos es la composición usual de homomorfismos.

Por brevedad denotaremos el objeto  $j, V(j)$  por  $V(j)$ . Definiremos el producto tensorial  $\otimes$  como  $V(j) \otimes V(j') = V(j, j')$ .

Es claro que si  $j = (i_1, \dots, i_n)$  y  $j' = (i'_1, \dots, i'_n)$  tendremos la distribución de paréntesis de la siguiente forma:

$$(\dots((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) \otimes \dots) \otimes v_{n+1} \mapsto [(\dots(v_1 \otimes v_2) \otimes \dots) \otimes v_n] \otimes [(\dots(v_{n+1} \otimes v_{n+2}) \otimes \dots) \otimes v_{n+1}]$$

la cual define un isomorfismo de  $\mathcal{R}$ -módulos  $V(j, j') \longrightarrow V(j) \otimes_{\mathcal{R}} V(j')$  denotamos este isomorfismo por  $u$ , (aquí  $v_s \in V(i_s)$  para  $s \leq n$  y  $v_s \in V(i_{s+n})$  para  $s > n$ ).

Definimos el producto tensorial  $f_1 \otimes f_2$  de morfismos:  $f_1 : V(j_1) \longrightarrow V(j'_1)$  y  $f_2 : V(j_2) \longrightarrow V(j'_2)$  como el  $\mathcal{R}$ -homomorfismo que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V(j_1, j_2) & \xrightarrow{f_1 \otimes f_2} & V(j'_1, j'_2) \\ \downarrow u & & \downarrow u \\ V(j_1) \otimes_{\mathcal{R}} V(j_2) & \xrightarrow{f_1 \otimes f_2} & V(j'_1) \otimes_{\mathcal{R}} V(j'_2) \end{array}$$

De esta manera tenemos que ésta categoría de  $\mathcal{R}$ -módulos junto con el producto tensorial  $\otimes$  y el objeto distinguido  $V(\emptyset) = \mathcal{R}$  forman una categoría monoidal estricta. A ésta categoría se le conoce como categoría generada por el conjunto  $\{V(i)\}_{i \in I}$  y se denota por  $\text{Cat}(\{V(i)\}_{i \in I})$ .

Sea  $F: \mathcal{OFA} \longrightarrow \text{Cat}(V, V^*)$  y  $F(\times) = R$  la jugada de Reidemeister de

tipo III descrita al inicio del capítulo, la cual se escribe como:

$$(X_+ \otimes \uparrow) \circ (\uparrow \otimes X_+) \circ (X_+ \otimes \uparrow) = (\uparrow \otimes X_+) \circ (X_+ \otimes \uparrow) \circ (\uparrow \otimes X_+)$$

implica que  $R$  satisface:

$$(R \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes R) \circ (R \otimes \text{Id}) = (\text{Id} \otimes R) \circ (R \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes R) \quad (5.2.2)$$

### 5.2.3 Definición.

Se dice que  $R$  satisface la ecuación de Yang-Baxter si cumple con la ecuación (5.2.2).

### 5.2.4 Definición

Sea  $\mathcal{K}$  el anillo de polinomios de Laurent  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  y sea  $V$  un módulo finitamente generado con base  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Denotemos con  $V^* = \text{Hom}_{\mathcal{K}}(V, \mathcal{K})$  con base  $\{v^1, \dots, v^m\}$ , la cual es la base dual de  $\{v_1, \dots, v_m\}$ .

Considérense los siguientes  $\mathcal{K}$ -homomorfismos:

- (i)  $\bar{b}: \mathcal{K} \longrightarrow V^* \otimes_x V$  tal que a  $1 \in \mathcal{K}$  le corresponde  $\sum_i v^i \otimes v_i$ .
- (ii)  $\bar{b}: \mathcal{K} \longrightarrow V \otimes_x V^*$  tal que a  $1 \in \mathcal{K}$  le corresponde  $\sum_i q^{2i-m-1} v_i \otimes v^i$ .
- (iii)  $\bar{d}: V \otimes_x V^* \longrightarrow \mathcal{K}$  tal que a  $v_i \otimes v^j$  le corresponde  $\delta_i^j$ .
- (iv)  $\bar{d}: V^* \otimes_x V \longrightarrow \mathcal{K}$  tal que a  $v^i \otimes v_j$  le corresponde  $q^{m+1-2i} \delta_i^j$ .

### 5.2.5 Definición

Considerese  $\mathcal{R}$  un anillo conmutativo con 1.

Sean  $V$  y  $W$   $\mathcal{R}$ -módulos libres finitamente generados y sea  $V^*$  el  $\mathcal{R}$ -módulo  $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(V, \mathcal{R})$ . Dado un  $\mathcal{R}$ -homomorfismo  $\alpha: W \longrightarrow V$  se le puede asociar de manera natural los  $\mathcal{R}$ -homomorfismos  $\alpha^\vee: W \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{R}$  y  $\alpha^\wedge: \mathcal{R} \longrightarrow W^* \otimes V$ , de modo que si  $w \otimes v \in W \otimes V^*$ , entonces  $\alpha^\vee(w \otimes v) = v(\alpha(w))$ . Si  $w_1, \dots, w_m$  es base de  $W$  y  $w^1, \dots, w^m$  es la base dual en  $W^*$ , tenemos que  $\alpha^\wedge(1) = \sum_i w^i \otimes \alpha(w_i) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} w^i \otimes v_j$  donde  $\alpha(w_i) = \alpha_{ij} v_j$ .

Así, si  $\xi: W^* \longrightarrow V$  donde  $\xi(w^i) = \xi^{ij} v_j$ , entonces  $\xi^\wedge: \mathcal{R} \longrightarrow W \otimes V$ , tal que  $\xi^\wedge(1) = \xi^{ij} w_i \otimes v_j$  y si  $\gamma: V \longrightarrow W^*$ , donde  $\gamma(v_i) = \gamma_{ij} w^j$ , entonces  $\gamma^\vee: V \otimes W \longrightarrow \mathcal{R}$  donde  $\gamma^\vee(v_i \otimes w_j) = \gamma_{ij}$ .

### 5.2.6 Definición.

Sea  $V$  un  $\mathcal{R}$ -módulo finitamente generado con base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  y  $V^*$  el  $\mathcal{R}$ -módulo  $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(V, \mathcal{R})$  con  $\{v^1, \dots, v^m\}$  como base. Dado un  $\mathcal{R}$ -homomorfismo  $R: V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$  con matriz  $R_{ij}^{kl}$  tal que  $R(v_i \otimes v_j) = R_{ij}^{kl} (v_k \otimes v_l)$ , podemos asociarle los siguientes  $\mathcal{R}$ -homomorfismos:



(i)  $tr_2(\mathbf{R}): V \longrightarrow V$  llamado **traza parcial**, definido como:

$$tr_2(\mathbf{R})(v_i) = R_{ij}^{kj} v_k \equiv \sum_k R_{ij}^{kj} v_k$$

(ii)  $R^t: V^* \otimes V \longrightarrow V^* \otimes V$  tal que  $R^t(v^k \otimes v_j) = R_{ij}^{kl} v^l \otimes v_i$  o lo que es lo mismo  $R^t(v^i \otimes v_j) = R_{ij}^{kl} (v^k \otimes v_l)$ .

### 5.2.7 Definición.

Si  $V$  y  $W$  son  $\mathcal{R}$ -módulos libres finitamente generados, definimos la **transposición**  $P_{vw}: V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$  como  $P_{vw}(v \otimes w) = w \otimes v$ .

Veremos que una condición necesaria para que una función  $F: ob(\mathcal{A}) \longrightarrow ob(\mathcal{B})$  se extienda a un funtor  $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  tal  $F(\times) = R: F(1) \otimes F(1) \longrightarrow F(1) \otimes F(1)$ , es que el  $\mathcal{R}$ -isomorfismo satisfaga la ecuación de Yang-Baxter. El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para que una tal función  $F$  se extienda a un funtor.

**5.2.8 Teorema.** Tómesese  $\mathcal{K}$  el anillo de polinomios de Laurent  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ . Sea  $V$  un  $\mathcal{K}$ -módulo finitamente generado con base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  y  $V^* = Hom_{\mathcal{K}}(V, \mathcal{K})$  con base  $\{v^1, \dots, v^m\}$ .

Considérese  $F: ob(\mathcal{A}) \longrightarrow ob(\mathcal{B})$  una función tal que, para una sucesión  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , la cual consiste de 1 y -1,  $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = F(\varepsilon_1) \otimes F(\varepsilon_2) \otimes \dots \otimes F(\varepsilon_n)$  y  $F(\emptyset) = \mathcal{K}$ ; además definimos  $F(1) = V$  y  $F(-1) = V^*$ .

Sea  $R: V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$  un  $\mathcal{K}$ -isomorfismo con matriz  $R_{ij}^{kl}$  y sean  $\bar{b}, \bar{b}, \bar{d}$  y  $\bar{d}$  los  $\mathcal{K}$ -homomorfismos definidos en 5.2.4, entonces para que  $F$  se extienda a un funtor:

$$F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$\text{tal que } ( \cup ) = \bar{b}, F( \cup ) = \bar{b}, F( \cap ) = \bar{d}, F( \cap ) = \bar{d},$$

$$F( \times ) = R, F( \times ) = \bar{R} \quad (\text{en donde } \bar{R} \text{ denota a } R^{-1})$$

es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

(i)  $R$  satisface la ecuación de Yang-Baxter.

(ii) (a)  $\sum_j R_{ij}^{kl} q^{2j-m-1} = \delta_i^k$   
 (b)  $\sum_j \bar{R}_{ij}^{kl} q^{2j-m-1} = \delta_i^k$   
 (c)  $(q^{2(k+1)} - q^{2(i+j)}) R_{ij}^{kl} = 0$   
 (d)  $\sum_{i,j} q^{2(i-b)} \bar{R}_{ai}^{bj} R_{ij}^{cl} = \delta_a^c \delta_d^b$

**Demostración:** Para la demostración del teorema verificaremos que las relaciones de  $\mathcal{OFA}$  (teorema 3.4.4) las satisfacen también los valores predeterminados del funtor  $F$  en los generadores dentro de la categoría  $\mathcal{Cat}(V, V^*)$ . Utilizando la definición 5.2.4 tenemos:

(3)  $(\curvearrowright \uparrow)(\uparrow \smile) = \uparrow$

$$(\bar{d} \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes \bar{b})(v_j) = (\bar{d} \otimes \text{Id}_V)(v_j \otimes v^i \otimes v_i) = \delta_j^i v_i = v_j$$

(3)  $(\curvearrowleft \downarrow)(\downarrow \smile) = \downarrow$

$$(\bar{d} \otimes \text{Id}_{V^*})(\text{Id}_{V^*} \otimes \bar{b})(v^k) = q^{2i-m-1} v^k \otimes v_i \otimes v^i = q^{2i-m-1} q^{m+1-2k} \delta_i^k v^i = v^k$$

(a)  $(\downarrow \downarrow \curvearrowright)(\downarrow \downarrow \uparrow \curvearrowleft \downarrow)(\downarrow \downarrow X_{\pm} \downarrow \downarrow)(\downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow)(\smile \downarrow \downarrow)$   
 $= (\curvearrowleft \downarrow \downarrow)(\downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow)(\downarrow \downarrow X_{\pm} \downarrow \downarrow)(\downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow)(\downarrow \downarrow \smile)$

$(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \bar{d})(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \bar{d} \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes R \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V)$   
 $(\text{Id}_V \otimes \bar{b} \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V)(\bar{b} \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V)(v^k \otimes v^i) = v^i \otimes v^j R_{ij}^{xy} \delta_y^k \delta_x^i$  y haciendo los cálculos necesarios resulta  $R_{ij}^{kl} v^k \otimes v^i$   
 $(\bar{d} \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes \bar{d} \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes R \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \bar{b} \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \bar{b})(v^k \otimes v^i) = q^{2(i+j-l-k)} \delta_y^k \delta_x^i R_{ij}^{xy} v^j \otimes v^i$  y calculando obtenemos  $q^{2(i+j-l-k)} R_{ij}^{kl} v^k \otimes v^i$ . Así, relacionando las ecuaciones resulta que  $R_{ij}^{kl} v^k \otimes v^i = q^{2(i+j-l-k)} R_{ij}^{kl} v^k \otimes v^i$  y efectuando cálculos concluimos que  $(q^{2(k+1)} - q^{2(i+j)}) R_{ij}^{kl} = 0$ .

$$(1) \quad X_+ \circ X_- = \uparrow\uparrow$$

$$R \circ \bar{R}(v_i \otimes v_j) = \bar{R}_y^k R_x^y v_x \otimes v_y = \delta_i^x \delta_j^y v_x \otimes v_y = v_i \otimes v_j \text{ si } x = i \text{ y } y = j.$$

$$(4) \quad (X_+ \uparrow) \circ (\uparrow X_+) \circ (X_+ \uparrow) = (\uparrow X_+) \circ (X_+ \uparrow) \circ (\uparrow X_+)$$

$$(R \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes R) \circ (R \otimes \text{Id}_V) = (\text{Id}_V \otimes R) \circ (R \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes R) \text{ así,}$$

$$(R \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes R) \circ (R \otimes \text{Id}_V)(v_i \otimes v_j \otimes v_k) = R_{ij}^{lm} R_{mk}^{pq} R_{lp}^{rs} v_r \otimes v_s \otimes v_q \text{ y}$$

$$(\text{Id}_V \otimes R) \circ (R \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes R)(v_i \otimes v_j \otimes v_k) = R_{jk}^{pl} R_{ip}^{mq} R_{ml}^{rs} v_r \otimes v_s \otimes v_q$$

$$\text{por lo tanto tenemos que } R_{ij}^{lm} R_{mk}^{pq} R_{lp}^{rs} v_r \otimes v_s \otimes v_q = R_{jk}^{pl} R_{ip}^{mq} R_{ml}^{rs} v_r \otimes v_s \otimes v_q.$$

A ésta ecuación se le conoce como ecuación de Yang-Baxter.

$$(6) \quad (\uparrow \curvearrowright) \circ (X_\pm \downarrow) \circ (\uparrow \curvearrowleft) = \uparrow$$

$$- \quad (\text{Id}_V \otimes \bar{d}) \circ (R \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes \bar{b})(v_k) = q^{2i-m-1} \delta_b^i R_{ki}^{ab} v_a \text{ si } i = b \text{ entonces tenemos}$$

$$q^{2b-m-1} R_{kb}^{ab} v_a = v_a \text{ y esto ocurre si } q^{2b-m-1} R_{kb}^{ab} = \delta_k^a$$

$$- \quad (\text{Id}_V \otimes \bar{d}) \circ (\bar{R} \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes \bar{b})(v_k) = q^{2i-m-1} \delta_b^i \bar{R}_{ki}^{ab} v_a = q^{2b-m-1} \bar{R}_{kb}^{ab} v_a = \delta_k^a v_a = v_k.$$

$$(b) \quad (\downarrow \uparrow \curvearrowright) \circ (\downarrow X_\pm \downarrow) \circ (\curvearrowleft \uparrow \downarrow) \circ (\curvearrowright \uparrow \downarrow) \circ (\downarrow X_\pm \downarrow) \circ (\downarrow \uparrow \curvearrowleft) = \downarrow \downarrow$$

$$(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \bar{d}) \circ (\text{Id}_V \otimes R \otimes \text{Id}_V) \circ (\bar{b} \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V) \circ (\bar{d} \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V) \circ$$

$$(\text{Id}_V \otimes \bar{R} \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \bar{b}) =$$

$$(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \bar{b})(v^k \otimes v_l) = q^{2i-m-1} v^k \otimes v_l \otimes v_l \otimes v^i$$

$$(\text{Id}_V \otimes \bar{R} \otimes \text{Id}_V)(q^{2i-m-1} v^k \otimes v_l \otimes v_l \otimes v^i) = q^{2i-m-1} \bar{R}_{li}^{xy} v^k \otimes v_x \otimes v_y \otimes v^i$$

$$(\bar{d} \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V)(q^{2i-m-1} \bar{R}_{li}^{xy} v^k \otimes v_x \otimes v_y \otimes v^i) = q^{2(i-k)} \bar{R}_{li}^{xy} v_y \otimes v^i$$

$$(\bar{b} \otimes \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V)(q^{2(i-k)} \bar{R}_{li}^{xy} v_y \otimes v^i) = q^{2(i-k)} \bar{R}_{li}^{xy} v^j \otimes v_j \otimes v_y \otimes v^i$$

$$(\text{Id}_V \otimes R \otimes \text{Id}_V)(q^{2(i-k)} \bar{R}_{li}^{xy} v^j \otimes v_j \otimes v_y \otimes v^i) = q^{2(i-k)} \bar{R}_{li}^{xy} R_{jy}^{ab} v^j \otimes v_a \otimes v_b \otimes v^i$$

$$(\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \otimes \bar{d})(q^{2(i-k)} \bar{R}_{li}^{xy} R_{jy}^{ab} v^j \otimes v_a \otimes v_b \otimes v^i) = q^{2(b-k)} \bar{R}_{lb}^{xy} R_{jy}^{ab} v^j \otimes v_a$$

$$\text{así concluimos que } q^{2(b-k)} \bar{R}_{lb}^{xy} R_{jy}^{ab} v^j \otimes v_a = v^k \otimes v_l \text{ lo cual sucede si}$$

$$q^{2(b-k)} \bar{R}_{lb}^{xy} R_{jy}^{ab} = \delta_l^a \delta_j^k.$$

De manera análoga se resuelve para el otro caso.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

En seguida daremos otra prueba del teorema 5.2.8, la cual ésta basada en el artículo de Turaev, en la cual daremos ciertos morfismos que satisfacen las condiciones del teorema 5.2.8 .

**5.2.9 Lema 1.** Sean  $\alpha: V^{**} \longrightarrow V$  y  $\beta: V^* \longrightarrow V^*$  tal que  $\alpha(\hat{v}_i) = v_i$  y  $\beta(v^j) = q^{2i-m-1} \delta_i^j v^j$  entonces  $\bar{b} = \alpha^\wedge$ ,  $\bar{b} = \beta^\wedge$ ,  $\bar{d} = (\alpha^{-1})^\vee$ ,  $\bar{d} = (\beta^{-1})^\wedge$ .

**Demostración:** Veamos primeramente  $\alpha^\wedge(1) = v^j \otimes \alpha(v_j) = v^j \otimes v_j = \bar{b}(1)$   
 $\therefore \alpha^\wedge = \bar{b}$ .  $\beta^\wedge(1) = q^{2i-m-1} \delta_i^j v^j = q^{2i-m-1} v_i \otimes v^i = \bar{b}(1) \therefore \beta^\wedge = \bar{b}$ .

Ahora  $(\alpha^{-1})^\vee(v^j \otimes v_j) = \delta_i^j = \bar{d}(v^j \otimes v_j) \therefore (\alpha^{-1})^\vee = \bar{d}$ .  $(\beta^{-1})^\wedge(v^j \otimes v_j) = q^{2i-m-1} \delta_i^j = \bar{d}(v^j \otimes v_j) \therefore (\beta^{-1})^\wedge = \bar{d}$ .

◆

**5.2.10 Lema 2.** Bajo las hipótesis del Teorema 5.2.8 definamos  $\mu = \beta^\wedge \alpha^{-1}: V \longrightarrow V$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son como en el Lema 1, entonces

$$(a) \quad (P_{VV} R^{-1})^{ft} \circ (1 \otimes \mu) \circ (R P_{VV})^{ft} \circ (1 \otimes \mu)^{-1} = \text{Id}_{V \otimes V}$$

$$(b) \quad \text{tr}_2(R^\pm \circ (1 \otimes \mu)) = \text{Id}_V$$

$$(c) \quad R \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ R$$

**Demostración:** Sea  $\mu = \beta^\wedge \alpha^{-1}$  tal que  $\mu(v_i) = \beta^\wedge \alpha^{-1}(v_i) = \beta^\wedge(\hat{v}_i) = q^{2i-m-1} \delta_i^j v^j = q^{2i-m-1} v_i$ .

Tenemos que la composición:

(a)  $(P_{VV} R^{-1})^{ft} \circ (1 \otimes \mu) \circ (R P_{VV})^{ft} \circ (1 \otimes \mu)^{-1} = \text{Id}_{V \otimes V}: V^* \otimes V \longrightarrow V^* \otimes V$ ; si  $v^j \otimes v_j \in (1 \otimes \mu)^{-1}$  entonces  $(1 \otimes \mu)^{-1}(v^j \otimes v_j) \mapsto q^{-2j+m+1} \delta_j^k v^k \otimes v_j = q^{-2j+m+1} v^j \otimes v_j$ , luego  $(R P_{VV})^{ft}(q^{-2j+m+1} v^j \otimes v_j) \mapsto q^{-2j+m+1} R_{jk}^{ij} v^k \otimes v_i$  y componiendo  $(1 \otimes \mu)(q^{-2j+m+1} R_{jk}^{ij} v^k \otimes v_i) \mapsto q^{-2j+m+1} R_{jk}^{ij} v^k \otimes q^{2i-m-1} v^j = q^{2(i-j)} R_{jk}^{ij} v^k \otimes v_i$  finalmente  $(P_{VV} R^{-1})^{ft}(q^{2(i-j)} R_{jk}^{ij} v^k \otimes v_i) \mapsto (q^{2(i-j)} R_{jk}^{ij}) \bar{R}_{ij}^{ik} v^j \otimes v_i$  y por teorema 5.2.8. (d) es igual a  $\delta_i^i \delta_j^j v^j \otimes v_i = v^j \otimes v_j$ .

(b) Queremos probar que  $tr_2(\mathbf{R}^\pm \circ (\mathbf{1} \otimes \mu)) = \text{Id}_V$ , sea  $\mathbf{S} = (\mathbf{R} \circ (\mathbf{1} \otimes \mu))$ , evaluando  $\mathbf{R} \circ (\mathbf{1} \otimes \mu)(v_i \otimes v_j) = \mathbf{R}(v_i \otimes q^{2j-m-1} v_j) = q^{2j-m-1} \mathbf{R}(v_i \otimes v_j) = q^{2j-m-1} R_{ij}^{kl} (v_k \otimes v_l)$  así tenemos que  $S_{ij}^{kl} = q^{2j-m-1} R_{ij}^{kl}$ .

$tr_2(\mathbf{S})(v_i) = S_{ij}^{kj} v_k$  lo cual es igual a  $q^{2j-m-1} R_{ij}^{kj} v_k$ , entonces como observamos se tiene que cumplir que  $q^{2j-m-1} R_{ij}^{kj} v_k = \delta_i^k$ , lo cual es cierto por la condición (ii)(a) del teorema 5.2.8. Análogamente para  $tr_2(\mathbf{R}^{-1} \circ (\mathbf{1} \otimes \mu))$  en donde  $\bar{S}_{ij}^{kl} = q^{2j-m-1} \bar{R}_{ij}^{kl}$  así  $tr_2(\bar{\mathbf{S}})(v_i) = q^{2j-m-1} \bar{R}_{ij}^{kj} v_k$  y por la condición (ii)(b) del teorema se concluye la prueba.

(c) Demostremos que  $\mathbf{R} \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ \mathbf{R}$ , entonces  $\mathbf{R} \circ (\mu \otimes \mu)(v_i \otimes v_j) = \mathbf{R}(q^{2i-m-1} v_i \otimes q^{2j-1-m} v_j) = \mathbf{R}(q^{2i-m-1} q^{2j-1-m} v_i \otimes v_j) = q^{2(i+j)-2(m+1)} \mathbf{R}(v_i \otimes v_j) = q^{2(i+j)-2(m+1)} R_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l$

Ahora  $(\mu \otimes \mu) \circ \mathbf{R}(v_i \otimes v_j) = (\mu \otimes \mu)(R_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l) = R_{ij}^{kl} q^{2k-m-1} v_k \otimes q^{2l-m-1} v_l = R_{ij}^{kl} q^{2k-m-1} q^{2l-m-1} v_k \otimes v_l = q^{2(k+l)-2(m+1)} R_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l$ , por lo tanto se tiene que cumplir  $q^{2(i+j)-2(m+1)} R_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l = q^{2(k+l)-2(m+1)} R_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l$  o lo que es igual  $(q^{2(i+j)-2(m+1)} - q^{2(k+l)-2(m+1)}) R_{ij}^{kl} = 0$  lo cual es cierto por la condición (ii)(c) del teorema 5.2.8.

◆

**Demostración del teorema 5.2.8 basada en el teorema de Turaev.** El lema 1 implica [TUR] 4.3 (i), y el lema 2 implica [TUR] 4.3 (iii). Así mismo, la condición (i) del teorema es la misma que la que se menciona en [TUR] 4.3 (ii), lo cual demuestra el teorema. (Véase apéndice II)

◆

El lema 4.3 del artículo de Turaev (véase [TUR]), es una consecuencia categórica de la presentación de la categoría  $\mathcal{OFA}$  por generadores  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\curvearrowright$ ,  $\curvearrowleft$ ,  $\times$ ,  $\times$  y relaciones. Las relaciones en (i) y (ii) de nuestro teorema corresponden a las relaciones de  $\mathcal{OFA}$ .

### 5.2.11 Definición.

Sea  $\mathcal{K}$  el anillo de polinomios de Laurent de  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ . Sea  $V$  un  $\mathcal{K}$ -módulo libre finitamente generado,  $m \geq 1$  con base  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Considérese el homomorfismo  $\mathcal{K}$ -linear  $R: V \otimes_{\mathcal{K}} V \longrightarrow V \otimes_{\mathcal{K}} V$  definido por:

$$R(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} -q^{-m}(v_j \otimes v_i) & \text{si } i > j \\ q^{-m+1}(v_i \otimes v_j) & \text{si } i = j \\ -q^{-m}(v_j \otimes v_i) + (q^{-m+1} - q^{-m-1})v_i \otimes v_j & \text{si } i < j \end{cases}$$

Así, si calculamos la matriz  $R_{ij}^{kl}$  obtenemos:

$$R_{ij}^{kl} = \begin{cases} -q^{-m}\delta_i^k \delta_j^l & \text{si } i > j \\ q^{-m+1}\delta_i^k \delta_j^l & \text{si } i = j \\ -q^{-m}\delta_j^k \delta_i^l + (q^{-m+1} - q^{-m-1})\delta_i^k \delta_j^l & \text{si } i < j \end{cases}$$

El homomorfismo  $R$  es solución de la ecuación de Yang-Baxter correspondiente a la representación vectorial fundamental del álgebra de Lie simple  $A_{m-1}$  (véase [J1]).

Definimos el homomorfismo  $\bar{R} = q^{2m}R + (q^{m-1} - q^{m+1})\text{Id}_{V \otimes V}$ , calculando

$$\bar{R}(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} -q^m(v_j \otimes v_i) + (q^{m-1} - q^{m+1})v_i \otimes v_j & \text{si } i > j \\ q^{m-1}v_i \otimes v_j & \text{si } i = j \\ -q^m v_j \otimes v_i & \text{si } i < j \end{cases}$$

con lo anterior podemos obtener la matriz correspondiente:

$$\bar{R}_{ij}^{kl} = \begin{cases} -q^m \delta_j^k \delta_i^l + (q^{m-1} - q^{m+1})\delta_i^k \delta_j^l & \text{si } i > j \\ q^{m-1} \delta_i^k \delta_j^l & \text{si } i = j \\ -q^m \delta_j^k \delta_i^l & \text{si } i < j \end{cases}$$

Con un simple cálculo se prueba que  $R\bar{R} = \bar{R}R = \text{Id}$ , es decir, una es la inversa de la otra.

**5.2.12 Teorema.** Sea  $m \geq 2$ . Hay un único funtor  $F = F_m : \mathcal{O}a \longrightarrow \text{Cat}(V, V^*)$  que asocia a cada maraña orientada  $\mathfrak{Z}$  un homomorfismo  $\mathcal{K}$ -lineal  $F(\mathfrak{Z}) : F(\text{dominio } \mathfrak{Z}) \longrightarrow F(\text{codominio } \mathfrak{Z})$  que posee las siguientes propiedades:

- (i)  $F(\mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{Z}') = F(\mathfrak{Z}) \otimes F(\mathfrak{Z}')$  para cualesquiera marañas  $\mathfrak{Z}$  y  $\mathfrak{Z}'$ .
- (ii)  $F(\uparrow) = \text{Id}_V$ ,  $F(\downarrow) = \text{Id}_{V^*}$ ,  $F(\cup) = \bar{b}$ ,  $F(\cap) = \bar{b}$ ,  $F(\curvearrowright) = \bar{d}$ ,  
 $F(\curvearrowleft) = \bar{d}$ ,  $F(X_+) = R$ ,  $F(X_-) = R^{-1}$ .

Así,  $F(\mathfrak{Z})$  es un invariante de isotopía de la maraña  $\mathfrak{Z}$ .

**Demostración:** Por teorema 5.2.8, para la demostración es suficiente probar que la  $R$  definida en 5.2.11 satisface las condiciones (i) y (ii) de ese teorema:

$$(i) \quad R_y^{kl} R_i^{qr} R_k^{ip} = R_j^{qk} R_i^{sl} R_q^{pr}$$

si  $i > j$

$$-q^{-m} (\delta_j^k \delta_i^q \cdot \delta_j^r \delta_i^s \cdot \delta_k^l \delta_q^p) = -q^{-m} (\delta_j^k \delta_i^q \cdot \delta_j^r \delta_q^s \cdot \delta_i^l \delta_k^p) \quad \text{si } j=k, i=l, t=q, l=r, q=s, k=p$$

0 en caso contrario.

si  $i = j$

$$q^{-m+1} (\delta_j^k \delta_j^l \cdot \delta_j^q \delta_i^r \cdot \delta_k^s \delta_q^p) = q^{-m+1} (\delta_j^q \delta_i^k \cdot \delta_j^s \delta_q^l \cdot \delta_k^r \delta_j^p) \quad \text{si } j=k=l=q=s, t=r, q=p.$$

0 en caso contrario.

si  $i < j$

$$-q^{-m} (\delta_j^k \delta_i^l \cdot \delta_j^q \delta_i^r \cdot \delta_k^s \delta_q^p) + (q^{-m+1} - q^{-m-1}) (\delta_j^k \delta_j^l \cdot \delta_j^q \delta_i^r \cdot \delta_k^s \delta_q^p) = -q^{-m} (\delta_j^q \delta_j^k \cdot \delta_q^s \delta_i^l \cdot \delta_k^r \delta_j^p) \\ + (q^{-m+1} - q^{-m-1}) (\delta_j^q \delta_i^k \cdot \delta_j^r \delta_q^l \cdot \delta_k^s \delta_j^p) \quad \text{si } i=l=k=j=q=t=r=s=p.$$

0 en caso en caso contrario.

$$\begin{aligned}
(ii)(a) \quad & \sum_{j=1}^m R_{ij}^{kl} q^{2j-m-1} = \sum_{j=1}^{i-1} -q^{-m} q^{2j-m-1} \delta_i^l \delta_j^k + \sum_{j=i+1}^m -q^{-m} q^{2j-m-1} \delta_i^l \delta_j^k + \\
& + (q^{-m+1} - q^{-m-1}) \sum_{j=i+1}^m q^{2j-m-1} \delta_i^k + q^{-m+1} q^{2i-m-1} \delta_i^k = \left[ (q^{-m+1} - q^{-m-1}) \sum_{j=i+1}^m q^{2j-m-1} + q^{2i-2m} \right] \delta_i^k = \\
& = \left[ (q^{-m+1} - q^{-m-1})(q^{2i-m+1} + q^{2i-m+3} + q^{2i-m+5} + \dots + q^{m-1}) + q^{2i-2m} \right] \delta_i^k = \\
& \left[ (q^{2i-2m+2} + q^{2i-2m+4} + q^{2i-2m+6} + \dots + q^{-2} + 1 - q^{2i-2m} - q^{2i-2m+2} - q^{2i-2m+4} - q^{2i-2m+6} - \dots - q^{-2}) + q^{2i-2m} \right] \delta_i^k = \delta_i^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)(b) \quad & \sum_{j=1}^m \bar{R}_{ij}^{kl} q^{2j-m-1} = \sum_{j=1}^{i-1} (-q^m q^{2j-m-1} \delta_i^k \delta_j^l + q^{2j-m-1} (q^{m-1} - q^{m+1}) \delta_i^l \delta_j^k) \\
& + q^{m-1} q^{2i-m-1} \delta_i^k + \sum_{j=i+1}^m -q^m q^{2j-m-1} \delta_i^k \delta_j^l = \\
& \delta_i^k (1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2i-4} - q^2 - q^4 - \dots - q^{2i-4} - q^{2i-2} + q^{2i-2}) = \delta_i^k
\end{aligned}$$

$$(ii)(c) \quad (q^{2(k+i)} - q^{2(i+j)}) R_{ij}^{kl} =$$

si  $i > j$

$$-q^{-m} (q^{2(k+i)} - q^{2(i+j)}) \delta_i^l \delta_j^k = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq i \text{ ó } k \neq j \\ -q^{-m} (q^{2(j+i)} - q^{2(i+j)}) = 0 & \text{si } i=l \text{ y } j=k \end{cases}$$

si  $i = j$

$$q^{-m+1} (q^{2(k+i)} - q^{2(i+j)}) \delta_i^k \delta_j^l = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \text{ ó } l \neq j \\ q^{-m+1} (q^{4i} - q^{4i}) = 0 & \text{si } i=l=j=k \end{cases}$$

si  $i < j$

$$-q^{-m} (q^{2(k+i)} - q^{2(i+j)}) \delta_i^l \delta_j^k + (q^{-m+1} - q^{-m-1}) (q^{2(k+i)} - q^{2(i+j)}) \delta_i^k \delta_j^l =$$

si  $l = i$  y  $k = j$

$$-q^{-m} (q^{2(j+i)} - q^{2(i+j)}) + (q^{-m+1} - q^{-m-1}) (q^{2(j+i)} - q^{2(i+j)}) = 0$$

si  $k = i$  y  $l = j$

$$-q^{-m} (q^{2(i+j)} - q^{2(i+j)}) + (q^{-m+1} - q^{-m-1}) (q^{2(i+j)} - q^{2(i+j)}) = 0$$

0 en cualquier otro caso



(ii)(d)

Sea  $\Sigma = \sum_{i,j} q^{2(i-b)} \bar{R}_{ai}^{bj} R_{aj}^c = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9$

donde  $\sigma_1 = \sum_{\substack{i < a \\ j < d}}$ ,  $\sigma_2 = \sum_{\substack{i < a \\ j = d}}$ ,  $\sigma_3 = \sum_{\substack{i < a \\ j > d}}$ ,  $\sigma_4 = \sum_{\substack{i = a \\ j < d}}$ ,  $\sigma_5 = \sum_{\substack{i = a \\ j = d}}$ ,  $\sigma_6 = \sum_{\substack{i = a \\ j > d}}$ ,  $\sigma_7 = \sum_{\substack{i > a \\ j < d}}$

$\sigma_8 = \sum_{\substack{i > a \\ j = d}}$ ,  $\sigma_9 = \sum_{\substack{i > a \\ j > d}}$

Calculando cada suma se obtiene lo siguiente:

$\sigma_1 = 0$ .

$\sigma_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } d \geq a \text{ ó } d < a, a \neq b \\ q^{2(d-b)+1} (q^{-1} - q) \delta_c^d & \text{si } d < a, a = b \end{cases}$

$\sigma_3 = \begin{cases} 0 & \text{si } d \geq a \text{ ó } d < a < b \\ \delta_a^c \delta_d^b & \text{si } d < a, b < a. \\ -(\sum_{i=d+1}^{a-1} q^{2(i-b)}) (q^{-1} - q)^2 \delta_d^c & \text{si } d < a, a = b \end{cases}$

$\sigma_4 = 0$

$\sigma_5 = \delta_a^b \delta_d^c \delta_a^d$

$\sigma_6 = \begin{cases} 0 & \text{si } d \geq a \text{ ó } d < a, a \neq b \\ q^{-1} (q - q^{-1}) \delta_d^c & \text{si } d < a, a = b \end{cases}$

$\sigma_7 = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq a \text{ ó } d < a, a \neq b \\ \delta_d^b \delta_a^c & \text{si } a < b \text{ y } a < d \end{cases}$

$$\sigma_g = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq b \\ -q\delta_a^d \delta_a^c \delta_a^b & \text{si } a < b \end{cases}$$

$$\sigma_g = 0$$

De este modo

$$\Sigma = \begin{cases} \delta_a^b \delta_a^c \delta_a^d + \delta_a^b \delta_a^c - q\delta_a^d \delta_a^c \delta_a^b & \text{si } d > a \text{ y } b > a \\ \delta_a^b \delta_a^c \delta_a^d & \text{si } d \geq a \text{ y } a \geq b \\ \delta_a^b \delta_a^c \delta_a^d - q\delta_a^d \delta_a^c \delta_a^b & \text{si } d = a \text{ y } a < b \\ \delta_a^c \delta_a^b & \text{si } d < a \text{ y } b < a \\ \left[ q^{2(d-b)+1}(q^{-1} - q) - \left( \sum_{i=d+1}^{a-1} q^{2(i-b)} \right) (q^{-1} - q)^2 \right] \delta_a^c & \text{si } d < a \text{ y } a = b \end{cases}$$

Ahora bien, si  $c \neq a$  se obtiene fácilmente que

$$\Sigma = \begin{cases} \left[ q^{2(d-b)+1}(q^{-1} - q) - \left( \sum_{i=d+1}^{a-1} q^{2(i-b)} \right) (q^{-1} - q)^2 \right] \delta_a^c & \text{si } d < a \text{ y } a = b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado:

$$\left[ q^{2(d-b)+1}(q^{-1} - q) - \left( \sum_{i=d+1}^{a-1} q^{2(i-b)} \right) (q^{-1} - q)^2 \right] \delta_a^c = 0 \quad \text{si } c = d$$

calculando

$$\begin{aligned} & q^{2(c-a)+1}(q^{-1} - q) - \left[ q^{2(c+1-a)} + q^{2(c+2-a)} + \dots + q^{2(a-1-a)} \right] (q^{-1} - q)^2 + q^{-1}(q - q^{-1}) = \\ & (q^{-1} - q) \left[ q^{2(c-a)+1} - \left( q^{2(c-a)+2} + q^{2(c-a)+4} + \dots + q^{2(c-a)-(2(c-a)+2)} \right) (q^{-1} - q) + q^{-1} \right] = \\ & (q^{-1} - q) \left[ q^{2(c-a)+1} - q^{2(c-a)} (q^2 + q^4 + \dots + q^{-2(c-a)-2}) (q^{-1} - q) + q^{-1} \right] = (q^{-1} - q) \cdot \\ & \left[ q^{2(c-a)+1} - q^{2(c-a)} (q + q^3 + \dots + q^{-2(c-a)-5} + q^{-2(c-a)-3} - q^3 - q^5 - q^{-2(c-a)-3} - q^{-2(c-a)-1}) + q^{-1} \right] = \\ & (q^{-1} - q) \left[ q^{2(c-a)+1} - q^{2(c-a)+1} - q^{-1} + q^{-1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Por lo que  $\Sigma = 0$  si  $c \neq a$ . En el caso  $b \neq d$  se prueba análogamente que  $\Sigma = 0$ .

Supongamos ahora que  $c = a$  y  $b = d$ ; en este caso

$$\Sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } d > b > a \\ \delta_b^a = 1 & \text{si } b = d \geq a \geq b \ (\Rightarrow a = b) \\ 1 & \text{si } a > d = b \end{cases}$$

(Las restricciones  $(d = a, b > a)$  y  $(d < a, a = b)$  son incompatibles con  $(c = a, b = d)$ ).

$$\therefore \Sigma = \delta_a^c \delta_d^b .$$

Una aplicación del operador  $F_m$  es la construcción de polinomios los cuales son invariantes de isotopía de marañas. En el caso de que  $\mathfrak{Z}$  sea un enlace orientado,  $F_m(\mathfrak{Z})$  es un homomorfismo  $\mathcal{K}$ -lineal  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ , esto es, multiplicación por un elemento del anillo  $\mathcal{K}$  y este elemento de nuevo es denotado por  $F_m$ . Si la maraña orientada  $\mathfrak{Z}$  es producto tensorial de un enlace  $\mathfrak{Z}'$  y una maraña  $\mathfrak{Z}''$ , entonces por el teorema 5.2.12,  $F_m(\mathfrak{Z}) = F_m(\mathfrak{Z}') \otimes F_m(\mathfrak{Z}'')$ .

Para calcular el polinomio  $F(\mathfrak{Z})$ , se pueden usar directamente las propiedades de  $F$  enumeradas en el teorema 5.2.12, lo cual es un trabajo laborioso; otra manera de calcular este polinomio se basa en relaciones iterativas del tipo de Conway, las cuales definiremos a continuación.

### 5.2.13 Definición.

Decimos que tres clases de isotopía de marañas  $\ell_+$ ,  $\ell_-$  y  $\ell_0$  forman una **terna de Conway** si estas clases están representadas por marañas, cada una de las cuales difieren dentro de una bola cerrada donde se ven como  $X_+$ ,  $X_-$  y  $\uparrow\uparrow$ , y fuera de ésta coinciden. Por ejemplo  $(X_+, X_-, \uparrow\uparrow)$  es una terna de Conway.

De las propiedades de la función  $F_m$  tenemos las igualdades siguientes:

$$q^m F_m(X_+) - q^{-m} F_m(X_-) = q^m R - q^{-m} R^{-1} = (q - q^{-1}) \text{Id} = (q - q^{-1}) F_m(\uparrow\uparrow)$$

entonces tenemos

$$q^m F_m(\ell_+) - q^{-m} F_m(\ell_-) = (q - q^{-1}) F_m(\ell_0) \tag{5.2.14}$$

para cualquier tema de Conway  $\ell_+$ ,  $\ell_-$  y  $\ell_0$ .

### 5.3 El polinomio de Jones-Conway

**5.3.1 Teorema.** Existe una única función  $P$  del conjunto de enlaces orientados en  $\mathbb{R}^3$  al anillo  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$  que posee las siguientes propiedades:

- (i)  $P(\ell)$  es un invariante del tipo de isotopía de un enlace  $\ell$
- (ii) Si  $\mathcal{O}$  es el nudo trivial, entonces  $P(\mathcal{O}) = 1$
- (iii) Si los enlaces  $\ell_+$ ,  $\ell_-$  y  $\ell_0$  forman una tema de Conway, entonces

$$x P(\ell_+) - x^{-1} P(\ell_-) = y P(\ell_0) \quad (5.3.2)$$

**Demostración:** Denotaremos el anillo  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$  por  $\Lambda$ . Sea  $M$  el conjunto de clases de isotopía de enlaces orientados en  $\mathbb{R}^2 \times (0,1) \approx \mathbb{R}^3$ . Consideremos el  $\Lambda$ -módulo libre  $\Lambda[M]$  generado por el conjunto  $M$ . Sea  $N$  el submódulo generado por los elementos  $x \ell_+ - x^{-1} \ell_- - y \ell_0$  para todas las temas de Conway  $\ell_+$ ,  $\ell_-$ ,  $\ell_0$  del conjunto  $M$ . Simbolizemos con  $\mathcal{O}$  al nudo trivial y denotemos su clase en  $\Lambda(M)/N$  por  $[\mathcal{O}]$ . Para probar el teorema es suficiente con probar que  $\Lambda(M)/N$  es un  $\Lambda$ -módulo libre de rango uno con generador  $[\mathcal{O}]$ .

Primero probaremos que  $[\mathcal{O}]$  genera al módulo  $\Lambda(M)/N$ . Dado un diagrama de enlace  $D$ , se puede transformar en una combinación lineal de enlaces triviales, mediante cambio de cruces utilizando la relación  $x P(\ell_+) - x^{-1} P(\ell_-) = y P(\ell_0)$  (5.3.2). Así, al utilizar repetidas veces (5.3.2) y haciendo inducción sobre el número de cruces de cada enlace probamos que el  $\Lambda$ -módulo  $\Lambda(M)/N$  está generado por los elementos  $[\mathcal{O}_1] = [\mathcal{O}]$ ,  $[\mathcal{O}_2]$ , ..., donde  $\mathcal{O}_n$  es el enlace con  $n$  componentes triviales.

Ahora bien, consideremos la tema de Conway  $\mathcal{O}_{n+1}$ ,  $\mathcal{O}_n$ ,  $\mathcal{O}_n$  (véase la figura). Al utilizar (5.3.2) obtenemos la siguiente relación  $y \mathcal{O}_{n+1} = x \mathcal{O}_n - x^{-1} \mathcal{O}_n$ , es decir,  $[\mathcal{O}_{n+1}] = y^{-1} (x - x^{-1}) [\mathcal{O}_n]$ . Por lo que otra vez, por inducción, podemos probar que  $[\mathcal{O}]$  genera  $\Lambda(M)/N$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \bigcirc \bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc \bigcirc \bigcirc \\ \sigma_n &= \bigcirc \bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc \bigcirc \bigcirc \\ \sigma_n &= \bigcirc \bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc \bigcirc \bigcirc \end{aligned}$$

figura 67

Ahora probaremos que para cualquier  $\lambda$  diferente de cero con  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\lambda[\mathcal{O}] \neq 0$ . De acuerdo a los resultados del teorema a cada  $m = 2, 3, \dots$  y para cada  $\ell \in \mathbf{M}$  le corresponde un polinomio  $F_m(\ell) \in \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ . Denotemos con  $Q$  el campo de cocientes del anillo  $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ . La función  $F_m: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$  se extiende a un homomorfismo aditivo  $\tilde{F}_m: \Lambda[\mathbf{M}] \rightarrow Q$  tal que  $\tilde{F}_m(\lambda(x, y)\ell) \mapsto \lambda(q^m, q^{-q^{-1}})F_m$  para cualquier  $\lambda(x, y) \in \Lambda$  y  $\ell \in \mathbf{M}$ .

Sea  $x\ell_+ - x^{-1}\ell_- - y\ell_0 \in \mathbf{N}$  por la relación  $q^m F_m(\ell_+) - q^{-m} F_m(\ell_-) = (q - q^{-1}) F_m(\ell_0)$  (5.2.14), tenemos que  $\tilde{F}_m(\mathbf{N}) = 0$ . Sea  $g: \Lambda[\mathbf{M}] \rightarrow \Lambda(\mathbf{M})/\mathbf{N}$  el homomorfismo canónico, por lo anterior, tenemos que existe un homomorfismo  $h: \Lambda(\mathbf{M})/\mathbf{N} \rightarrow Q$  tal que  $h \circ g = \tilde{F}_m$ . Por otra parte, si calculamos  $F_m(\mathcal{O})$  tenemos  $F_m(\mathcal{O}) = F_m(\bigcirc \circ \bigcirc)(1) = (\vec{d} \circ \vec{b})(1) = \sum_{i=1}^m q^{2i-m-1} \neq 0$ .

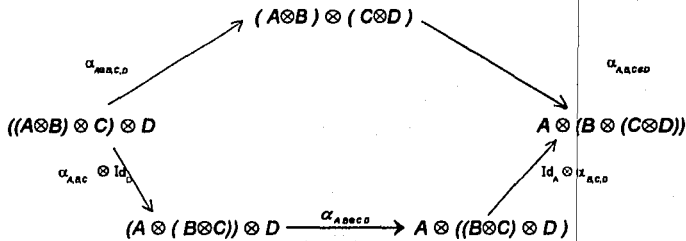
Ahora si  $\lambda[\mathcal{O}] = 0$  en  $\Lambda(\mathbf{M})/\mathbf{N}$ , donde  $\lambda = \lambda(x, y) \in \Lambda$ , entonces  $\lambda\mathcal{O} \in \mathbf{N}$ , así  $0 = \tilde{F}_m(\lambda\mathcal{O}) = \lambda(q^m, q^{-q^{-1}})F_m(\mathcal{O}) \in \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$  así,  $\lambda(q^m, q^{-q^{-1}}) = 0$  para  $\forall m \geq 2$ . Así,  $\lambda$  tendría una infinidad de ceros lo cual es cierto si y sólo si  $\lambda$  es el polinomio cero. ♦

Al polinomio  $P$  se le conoce como el *polinomio de Jones-Conway*, además el *polinomio de Jones* y el *polinomio de Alexander-Conway* (en una variable), son casos especiales del polinomio  $P$ . Formas equivalentes a este teorema fueron demostradas simultánea e independientemente por Freyd, Yetter, Lickorish, Millett, Hoste y Ocneanu, y también por Przytycki y Traczyk. veáse [F] y [Prz].

## Apéndice I

El teorema de coherencia de Mac Lane afirma que en una categoría monoidal, "todos" los diagramas que involucran a  $\alpha$ ,  $\rho$  y  $\lambda$  conmutan. Como ejemplo tenemos el siguiente diagrama:

**M1**



el cual es conmutativo.

## Apéndice II

**Lema.** [TUR 4.3] Considerese  $\mathcal{R}$  un anillo conmutativo con 1.

Sean  $V$  y  $W$   $\mathcal{R}$ -módulos de rango finito. Considérese la función  $F: Ob(\mathcal{F}\mathcal{A}) \rightarrow Ob(\mathcal{G}\mathcal{A}(V,W))$  tal que  $F(\mathcal{O}) = \mathcal{R}$  y para la sucesión  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  la cual consiste de 1 y -1,  $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = F(\varepsilon_1) \otimes F(\varepsilon_2) \otimes \dots \otimes F(\varepsilon_n)$  donde  $F(1) = V$  y  $F(-1) = W$ . Sea  $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  un  $\mathcal{R}$ -isomorfismo y sean  $\bar{b}, \bar{b}, \bar{d}$  y  $\bar{d}$   $\mathcal{R}$ -homomorfismos:

$K \rightarrow W \otimes V, \quad K \rightarrow V \otimes W, \quad V \otimes W \rightarrow K, \quad W \otimes V \rightarrow K$   
respectivamente.

entonces para que  $F$  se extienda a un funtor:

$$F: \mathcal{FA} \longrightarrow \text{Gal}(V, W)$$

$$\text{tal que } F(\cup) = \bar{b}, F(\cup) = \bar{b}, F(\cap) = \bar{d}, F(\cap) = \bar{d},$$

$$F(\times) = R, F(\times) = R^{-1}$$

es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

(i) Existan  $\mathcal{R}$ -isomorfismos  $\alpha: W^* \longrightarrow V$  y  $\beta: V^* \longrightarrow W$  tal que  $\bar{b} = \alpha^\wedge$ ,  $\bar{b} = \beta^\wedge$ ,  $\bar{d} = (\alpha^{-1})^\vee$ ,  $\bar{d} = (\beta^{-1})^\vee$ .

(ii)  $R$  satisface la ecuación de Yang-Baxter.

(iii) Si  $\mu = \beta \alpha^{-1}: V \longrightarrow V$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son isomorfismos como en (i), entonces:

(a)  $(P_{VV} R^{-1})^{tt} \circ (1 \otimes \mu) \circ (R P_{VV})^{tt} \circ (1 \otimes \mu)^{-1} = \text{Id}_{V \otimes V}$

(b)  $t_{R^\pm} (R^\pm \circ (1 \otimes \mu)) = \text{Id}_V$

(c)  $R \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ R$ .

## ***Referencias.***

- [ART] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4(1925), 47-72.
- [BIR] J.S.Birman, *Braids, links and mapping class groups*. Annals of Mathematics Studies 82, Princeton Univ. Press, 1975.
- [BUR] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
- [CF] R.H.Crowell, R.H.Fox, *Introduction to Knot Theory*. Blaisdell Pub.Co., (1963).
- [DIR] P.A.M.Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, (1958).
- [F] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K.C. Millett, and A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of Knots and Links*. Bull. Amer. Math. Soc., 12(1985), 239-246.
- [FRA] G.K.Francis, *A Topologist's Picture Book*. Springer-Verlag (1987).
- [FY] P.Freyd and D.Yetter, *Braided Compact Close Categories with applications to low dimensional topology*. Adv. in Math. 77, 156-182 (1989).
- [JI] Michio Jimbo, *Quantum R matrix for the generalized Toda system*. Comm. Math. Phys. 102 (1986), 537-547.
- [JS] A. Joyal and R. Street, *Planar Diagrams and Tensor Algebra*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1991).
- [KAU] Louis Kauffman, *Knots and Physics*. Series on Knots and Everything. Vol. I, World Scientific.
- [KAU1] Louis Kauffman, *An Invariant of Regular Isotopy*. Trans. of the American Math. Soc. Vol. 318, Num. 2, 1990.
- [LUN] Van Lundsgaard Hansen, *Braids and Coverings, selected topics*. London Mathematical Society.
- [ML] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag (1971).



- [MOR] S. Moran, *The Mathematical Theory of Knots and Braids. An Introduction*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [PEN] R. Penrose, *Applications of negative dimensional tensors*. In *combinatorial Math. and its appl.* Academic Press, 1971, 221-244.
- [PRZ] Józef H. Przytycki and Pawel Traczyk, *Invariants of links of Conway type*. *Kobe J. Math.* 4 (1988), 115-139.
- [REI] K. Reidemeister, *Knotentheorie*. Chelsea Publishing Co., New York (1948). Copyright 1932. Julius Springer, Berlin.
- [TUR] V.G. Turaev, *Operator invariants of tangles, and R-matrices*. *Math. USSR Izvestiya*, vol 35 (1990) No. 2, 411-444.
- [TUR1] V.G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*. *Inventiones Math.* 92, (1988) 527-553.
- [Y] D.N. Yetter, *Quantum groups and representations of monoidal categories*. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1990) 108, 261-289.