5

2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CALCULO EN ESPACIOS DE BANACH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

PRESENTA:

EDUARDO TOMAS ARELLANO ARJONA

MEXICO, D. F. 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"CALCULO EN ESPACIOS DE BANACH"

realizado por EDUARDO TOMAS ARELLANO ARJONA

con número de cuenta 8153400-1 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. ALBERTO LEON KUSHNER SCHNUR	alberto León Kushner
Propietario	DR. MARCELO ALBERTO AGUILAR GONZALEZ	
Propietario	M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA	
Suplente	DR. JAVIER PAEZ CARDENAS	
Suplente	M. en C. ANA IRENE RAMIREZ GALARZA	

Consejo Departamental de Matemáticas
DRA. ISABEL PUGA ESPINOSA

Dedico esta tesis a mi Abuelita :

Ma. del Socorro Pérez Benitez

Por ser la persona más importante y especial en mi vida.

A mi Mamá :

Melba Rosa Arjona Pérez

Por su amor, comprensión y amistad.

A mi esposa e hijos :

Norma

Ixchel

Guiselle

Eduardo

A mis hermanos :

Carlos

Leopoldo

A mi director de Tesis :

Dr. Alberto Leon Kushner Schnur

Por todo lo que he aprendido de él como profesor y ser humano.

CONTENIDO

PROLOGO

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar el cálculo diferencial en espacios de Banach de dimensión infinita, estimulando con ello la generalización de los resultados del cálculo diferencial en espacios normados de dimensión finita. Para lo cual se dan algunos teoremas del análisis funcional: Teorema de Hahn-Banach, Teorema del Mapeo Abierto, Teorema de la Grafica Cerrada, y el Teorema de Acotamiento Uniforme. Por otra parte se da el recíproco del Teorema de Taylor, y como una aplicación de este, se dan versiones simples de dos Teoremas del Análisis Global, i.e, la suavidad del Mapeo Evaluación y el Omega-Lema. Por otra parte se dan ejemplos en los cuales:

(i) No todo subespacio vectorial cerrado, de un espacio de Banach se complementa.

(ii) El Teorema de Isomorfismo de Banach es falso para espacios vectoriales normados no completos.

(iii) El Teorema de la Función Inversa es esencial tener espacios de Banach, en vez de espacios más generales, tales como espacios de Fréchet.

Preliminares

Definición. Un orden en un conjunto A es una relación binaria en A, usualmente denotada por $\leq$, que satisface:

i) $a \leq a \quad \forall\, a \in A$ — reflexivo

ii) $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$ — antisimétrico

iii) $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$ — transitivo.

Un conjunto ordenado A se llama una cadena si para todo $a, b \in A$, $a \neq b$, se tiene $a \leq b$ o $b \leq a$.
Sea $C \subset A$ una cadena, un elemento $a_0 \in A$ es una cota superior de C si $c \leq a_0 \quad \forall\, c \in C$.
Un elemento maximal de A es un $m \in A$ tal que $m \leq a$ implica $m = a$.

Teorema de Zorn. Si A es un conjunto ordenado, para el cual toda cadena tiene una cota superior entonces A tiene almenos un elemento maximal.

Capitulo Uno
Espacios Metricos

1.1.1 Definición. Sea M un conjunto. Una métrica en M es una función $d: M \times M \to \mathbb{R}$ tal que $\forall\, x, y, z \in M$:

M1 $d(x,x)\geq 0$, $d(x,y)=0 \iff x=y$

M2 $d(x,y)=d(y,x)$

M3 $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

Un espacio métrico es un par (M,d), donde d es una métrica en M.

1.1.2. Definición. Sea (M,d) un espacio métrico, para $\varepsilon>0$ y $x\in M$ se definen los siguientes subconjuntos de M:

$$B_\varepsilon(x)=\{y\in M \mid d(x,y)<\varepsilon\} \qquad \text{la bola abierta}$$
$$\overline{B}_\varepsilon(x)=\{y\in M \mid d(x,y)\leq\varepsilon\} \qquad \text{la bola cerrada}.$$

La colección de subconjuntos de M que son uniones de bolas abiertas es la topología inducida por el espacio métrico (M,d). Dos métricas en un conjunto son equivalentes si ellas inducén la misma topológia en M.

1.1.3 Definición. Sea (M,d) un espacio métrico y (x_n) una sucesión en M. Entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon>0$, existe un $K\in\mathbb{N}$ tal que si $m,n\geq K$ entonces $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. Un espacio métrico (M,d) en el cual toda sucesión de Cauchy converge, se dice que es un espacio métrico completo.

Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. En efecto, si $x_n \to x$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, K \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq K$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Así, si $m, n \geq K$ entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

1.1.4. Teorema. Sea S un subespacio de un espacio métrico completo (M, d). S es completo si y solo si es cerrado en M.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea S completo y $x \in cl(S)$ entonces $\exists$ una sucesión (x_n) en S tal que $x_n \to x$. Como (x_n) es de Cauchy y S es completo entonces $x \in S$. Por tanto S es cerrado en M.

$\Leftarrow$) Sea S cerrado en M y (x_n) de Cauchy en S. Como (x_n) es también de Cauchy en M, entonces $x_n \to x$ para algún $x \in M$. Dado que S es cerrado $x \in S$. Así $x_n \to x$ en S, y por tanto S es completo.

1.1.5 Definición. Una función $f: (M, d) \to (N, \bar{d})$ es uniformemente continua cuando, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in M$ y $d(x, y) < \delta$ entonces $\bar{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

1.1.6 Teorema. Sea $f: (M, d) \to (N, \bar{d})$ uniformemente continua. Si (x_n) es de Cauchy en M entonces $(f(x_n))$ es de Cauchy en N.

Demostración.

Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $x,y\in M$ y $d(x,y)<\delta$ entonces $\bar{d}(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Como (x_n) es de Cauchy, para $\delta>0$ existe $K\in\mathbb{N}$ tal que $n,m\geq K$ implica que $d(x_n,x_m)<\delta$, por consiguiente $\bar{d}(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$. Luego $(f(x_n))$ es de Cauchy en N.

1.1.7. Definición. Sea X un conjunto y (M,d) un espacio métrico. Sea $f_n : X \to (M,d)$ una sucesión de funciones. Decimos que la sucesión (f_n) converge uniformemente a una función $f: X\to(M,d)$, si dado $\varepsilon>0$, existe $K\in\mathbb{N}$ tal que $\forall\, n\geq K$ y $x\in X$

$$d(f_n(x), f(x))<\varepsilon.$$

1.1.8. Teorema. Sea X un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Si $f_n : X\to(M,d)$ es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a $f: X\to(M,d)$ entonces f es continua.

Demostración. Sea $V\subset M$ abierto y $x_0\in f^{-1}(V)$. Deseamos encontrar una vecindad $U\subset X$ de x_0 tal que $f(U)\subset V$.

Tome $\varepsilon>0$ tal que $B_\varepsilon(f(x_0))\subset V$. Entonces usando convergencia uniforme, tome $K\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq K$ y todo $x\in X$

$$d(f_n(x), f(x))<\varepsilon/4.$$

Usando la continuidad de f_K tome una vecindad $U\subset X$ de x_0 tal que $f_K(U)\subset B_{\varepsilon/2}(f_K(x_0))$. Afirmamos que $f(U)\subset B_\varepsilon(f(x_0))\subset V$.

Para esto note que si $x\in U$, entonces

$d(f(x), f_k(x)) < \varepsilon/4$ (Por la elección de k)

$d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon/2$ (Por la elección de U)

$d(f_k(x_0), f(x_0)) < \varepsilon/2$ (Por la elección de k).

Así, $d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f_k(x_0)) + d(f_k(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$.

1.1.9 Teorema. Sea (M,d) espacio métrico compacto. Si A es un subconjunto infinito de M, entonces A tiene un punto de acumulación.

Demostración.

Suponga que A no tiene puntos de acumulación. Por demostrar que A es finito.

Como A no tiene puntos de acumulación entonces A es cerrado.

Por consiguiente, como ningún $a \in A$ es punto de acumulación, podemos obtener para cada $a \in A$ una $B_{r_a}(a)$ tal que $B_{r_a}(a) \cap A = \{a\}$.

Así, obtenemos una cubierta abierta de M, $M = (\bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)) \cup (M-A)$, de la cual extraemos una subcubierta finita $B_{r_{a_1}}(a_1), \ldots\ldots, B_{r_{a_n}}(a_n)$, $(M-A)$. Entonces $A \subset B_{r_{a_1}}(a_1) \cup \ldots \cup B_{r_{a_n}}(a_n)$ donde $A = \bigcup_{i=1}^{n} (B_{r_{a_i}}(a_i) \cap A) = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Por tanto A es finito.

1.1.10 Teorema. Si (M,d) es un espacio métrico compacto, entonces toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Demostración.

Sea (x_n) una sucesión en M, si el conjunto de valores x_n

es finito, entonces existe algún valor $x_0 = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = \dots$ que se repite infinitamente y por tanto la sucesión (x_{n_k}) converge a x_0.

Si el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ es infinito entonces tiene un punto de acumulación $x_0 \in M$. Toda bola abierta con centro en x_0 contiene terminos x_n con índices arbitrariamente grandes, luego x_0 es límite de alguna subsucesión de (x_n).

1.1.11. Teorema. (Punto Fijo) Sea (M,d) espacio métrico completo y $f:(M,d) \to (M,d)$ una función. Suponga que existe una constante $0 \le k < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \le k\, d(x,y)$ para toda $x, y \in M$. Entonces f tiene un único punto fijo $z \in M$, es decir $f(z) = z$.

Demostración.

Sea $x_0 \in M$, y defina una sucesión (x_n) por

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, \quad x_n = f(x_{n-1}), \quad x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

Probemos que (x_n) es de Cauchy en M. Note que

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \le k\, d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \le k\, d(x_1, x_2) \le k^2 d(x_0, x_1)$$

en general se tiene: $d(x_n, x_{n+1}) \le k^n d(x_0, x_1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Para $m > n$ se tiene $(m = n+p)$

$d(x_n, x_{n+p}) \le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$

$(k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+p-1})\, d(x_0, x_1) = k^n (1 + k + \dots + k^{p-1})\, d(x_0, x_1) \le \dfrac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1)$.

Como $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$, se tiene que (x_n) es de Cauchy. Así, $x_n \to z$ para algún $z \in M$, por ser M completo. Se afirma que $f(z) = z$, ya que por ser f continua

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z.$$

Veamos que z es único. Si $f(z) = z$ y $f(y) = y$ entonces $d(z,y) = d(f(z), f(y)) \leq k\, d(z,y)$, así $d(z,y) - k\, d(z,y) \leq 0$ $(1-k)\, d(z,y) \leq 0$, y como $(1-k) > 0$, se tiene que $d(z,y) = 0$. Por tanto $z = y$.

1.2. Teorema de Baire.

1.2.1 Definición. Sea (M,d) un espacio métrico, un subconjunto A de M se llama denso, si para todo subconjunto abierto $U \subset M$, no vacío, $A \cap U \neq \phi$.

Si B es un subconjunto acotado de (M,d), definimos el diametro de B como el nº $\operatorname{diam}(B) = \sup\{ d(b_1, b_2) \mid b_1, b_2 \in B \}$.

1.2.2 Teorema. Sea (M,d) un espacio métrico completo y $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots$ una sucesión anidada de conjuntos cerrados no vacíos en M. Si $\operatorname{diam}_{n\to\infty}(C_n) \to 0$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \phi$.

Demostración. Tome $x_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así, obtenemos una sucesión (x_n) en M. Veamos que (x_n) es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $K \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq K$ entonces $\text{diam}(C_n) < \varepsilon$. Como $x_n, x_m \in C_K$ para $n, m \geq K$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Así, (x_n) es de Cauchy y por ser M completo $x_n \to x$ para algún $x \in M$. Entonces, dado k la sucesión $x_k, x_{k+1}, \ldots \in C_k$, también converge a x y $x \in cl(C_k) = C_k$. Por tanto $x \in C_k$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \neq \emptyset$.

1.2.3. Teorema de Baire. Sea (M, d) espacio métrico completo. Toda intersección numerable de abiertos densos en M es un subconjunto denso en M.

Demostración.

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ subconjuntos abiertos densos en M. Queremos probar que $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es denso en M, esto es que toda bola abierta $B_1 \subset M$ contiene un punto de A. Como A_1 es abierto y denso, $B_1 \cap A_1$ es abierto no vacío, luego contiene una bola abierta B_2 de radio menor que $1/2$ y tal que la bola cerrada $\overline{B}_2$ esté contenida en $B_1 \cap A_1$. Por otra parte, siendo A_2 abierto y denso, $B_2 \cap A_2$ es abierto no vacío, luego contiene una bola abierta B_3 de radio menor que $1/3$ y tal que la bola cerrada $\overline{B}_3 \subset (A_2 \cap B_2)$. Prosiguiendo así, obtenemos una sucesión $\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \ldots \supset \overline{B}_n \supset \ldots$ con $\overline{B}_{n+1} \subset (B_n \cap A_n)$ y $\text{diam}(B_n) \to 0$. Por el teorema anterior existe $a \in M$ tal que $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$. La contensión $\overline{B}_{n+1} \subset (B_n \cap A_n)$ muestra que

$a \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ (además $a \in B_1$). Luego $a \in A \cap B_1$, i.e $A \cap B_1 \neq \phi$, como se quería probar.

1.2.4. Corolario. Sea (M,d) espacio métrico completo. Si $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ donde cada F_n es cerrado, entonces existe por lo menos un n tal que $\operatorname{int}(F_n) \neq \phi$.

Demostración.

Note que si $F \subset M$, $F \neq \phi$, es cerrado y $\operatorname{int}(F) = \phi$ entonces $M-F$ es abierto y denso, ya que si $U \subset M$ es abierto se tiene que $U \not\subset F$, pues $\operatorname{int}(F) = \phi$, entonces $U \cap (M-F) \neq \phi$.

Si $\operatorname{int}(F_n) = \phi$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $M-F_n$ es abierto y denso para toda n, luego por Baire $\bigcap_{n=1}^{\infty} (M-F_n) = \phi$ es denso, lo cual es una contradicción.

Por tanto, existe por lo menos un n tal que $\operatorname{int}(F_n) \neq \phi$.

Espacios de Banach.

2.1.1 Definición. Una norma en un espacio vectorial real (o complejo) E es un mapeo, $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ $e \to \|e\|$, tal que :

N1 $\|e\| \geq 0$ $\forall\, e \in E$, y $\|e\| = 0 \leftrightarrow e = 0$

N2 $\|\lambda e\| = |\lambda|\,\|e\|$ $\forall\, e \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$)

N3 $\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$ $\forall\, e_1, e_2 \in E$ (desigualdad del triángulo).

El par $(E, \|\cdot\|)$ se llama un espacio normado.

La desigualdad del triángulo tiene la siguiente consecuencia:

$$\big|\,\|e_1\| - \|e_2\|\,\big| \leq \|e_1 - e_2\| \quad \forall\, e_1, e_2 \in E.$$

En efecto,

$$\|e_1\| = \|(e_1 - e_2) + e_2\| \leq \|e_1 - e_2\| + \|e_2\|$$
$$\|e_2\| = \|(e_2 - e_1) + e_1\| \leq \|e_1 - e_2\| + \|e_1\|,$$

así, de las desigualdades anteriores se obtiene $\big|\,\|e_1\| - \|e_2\|\,\big| \leq \|e_1 - e_2\|$.

Si en 2.1.1 remplazamos N1 por

N1' $\|e\| \geq 0$ $\forall\, e \in E$, y $e = 0$ implica $\|e\| = 0$,

el mapeo $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ se llama una seminorma.

Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ con la norma estandar $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, es un espacio normado. En realidad, la norma estandar de $\mathbb{R}^n$ proviene de una estructura más general, definida enseguida.

2.1.2. Definición. Un producto interno en un espacio vectorial real E es un mapeo $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$; $(e_1, e_2) \to \langle e_1, e_2 \rangle$ tal que:

I1 $\langle e_1 + e_2, e \rangle = \langle e_1, e \rangle + \langle e_2, e \rangle$

I2 $\langle \lambda e_1, e \rangle = \lambda \langle e_1, e \rangle$

I3 $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle$

I4 $\langle e, e \rangle \geq 0$, y $\langle e, e \rangle = 0 \leftrightarrow e = 0$.

El producto interno estandar en $\mathbb{R}^n$ es $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, y I1-I4 se verifican claramente.

Para espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, la definición se modifica como sigue.

2.1.2' Definición. Un producto interno complejo en un espacio vectorial complejo E es un mapeo $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$; $(e_1, e_2) \to \langle e_1, e_2 \rangle$ tal que:

CI1 $\langle e_1 + e_2, e \rangle = \langle e_1, e \rangle + \langle e_2, e \rangle$

CI2 $\langle \lambda e_1, e \rangle = \lambda \langle e_1, e \rangle$

CI3 $\langle e_1, e_2\rangle = \overline{\langle e_2, e_1\rangle}$

CI4 $\langle e, e\rangle \geq 0$ y $\langle e,e\rangle = 0 \leftrightarrow e = 0$.

Note que CI1 y CI3 implican $\langle e_1, \lambda e_2\rangle = \overline{\langle \lambda e_2, e_1\rangle} = \overline{\lambda \langle e_2, e_1\rangle} = \bar{\lambda}\, \overline{\langle e_2, e_1\rangle}$ $= \bar{\lambda} \langle e_1, e_2\rangle$. Así, $\langle e_1, \lambda e_2\rangle = \bar{\lambda}\langle e_1, e_2\rangle$.

Como es costumbre, para $\alpha \in \mathbb{C}$ denotamos por

$$Re(\alpha) = (\alpha + \bar{\alpha})/2 \ , \quad Im(\alpha) = (\alpha - \bar{\alpha})/2 \ , \quad |\alpha| = (\alpha \cdot \bar{\alpha})^{1/2}$$

su parte real, imaginaria y su valor absoluto respectivamente.

El producto interno estandar en $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ está definido por $\langle w, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \bar{z}_i$, y CI1- CI4 se verifican fácilmente.

Tambien $\mathbb{C}^n$ es un espacio normado con norma $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$.

En $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, la propiedad N3 es un poco más difícil de probar directamente. Sin embargo, como veremos en 2.1.4, N3 se obtiene de I1-I4 o CI1-CI4.

En un espacio producto interno (real o complejo) E, dos vectores e_1, e_2 se llaman ortogonales, denotado $e_1 \perp e_2$, siempre que $\langle e_1, e_2\rangle = 0$. Para un subconjunto $A \subset E$, el conjunto $A^{\perp} = \{e \in E \mid \langle e, a\rangle = 0$ $\forall\, a \in A\}$ se llama el complemento ortogonal de A.

Dos conjuntos $A, B \subset E$ se llaman ortogonales, denotado $A \perp B$, si $a \perp b \;\forall\, a \in A$ y $b \in B$.

2.1.3 Desigualdad de Cauchy-Schwartz. En un espacio producto interno real o complejo E se tiene

$$|\langle e_1, e_2\rangle| \leq \langle e_1, e_1\rangle^{1/2} \langle e_2, e_2\rangle^{1/2} .$$

La igualdad se tiene si y solo si e_1 y e_2 son linealmente dependientes.

Demostración.

Es suficiente demostrar el caso complejo. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \alpha e_1 + \beta e_2, \alpha e_1 + \beta e_2\rangle &= \alpha\cdot\bar{\alpha}\langle e_1, e_1\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle e_1, e_2\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle e_2, e_1\rangle + \beta\bar{\beta}\langle e_2, e_2\rangle \\ &= |\alpha|^2\langle e_1, e_1\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle e_1, e_2\rangle + \overline{\alpha\bar{\beta}\langle e_1, e_2\rangle} + |\beta|^2\langle e_2, e_2\rangle \\ &= |\alpha|^2\langle e_1, e_1\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\alpha\cdot\bar{\beta}\langle e_1, e_2\rangle) + |\beta|^2\langle e_2, e_2\rangle . \end{aligned}$$

Si tomamos $\alpha = \langle e_2, e_2\rangle$, y $\beta = -\langle e_1, e_2\rangle$, entonces

$$0 \leq \langle e_2, e_2\rangle^2\langle e_1, e_1\rangle - 2\langle e_2, e_2\rangle\,|\langle e_1, e_2\rangle|^2 + |\langle e_1, e_2\rangle|^2\langle e_2, e_2\rangle \quad , \text{ y así}$$

$$\langle e_2, e_2\rangle\,|\langle e_1, e_2\rangle|^2 \leq \langle e_2, e_2\rangle\langle e_1, e_1\rangle .$$

Si $e_2 = 0$, se tiene la igualdad en la afirmación de la proposición y no hay nada que probar. Si $e_2 \neq 0$, el termino $\langle e_2, e_2\rangle \neq 0$ y se puede cancelar en la desigualdad anterior, con lo que se obtiene $|\langle e_1,e_2\rangle|^2 \leq \langle e_2,e_2\rangle \langle e_1,e_1\rangle$. Tomando raíz cuadrada en está desigualdad se tiene

$$|\langle e_1,e_2\rangle| \leq \langle e_1,e_1\rangle^{1/2} \langle e_2,e_2\rangle^{1/2} .$$

Finalmente, se tiene la igualdad si y solo si $\langle \alpha e_1+\beta e_2, \alpha e_1+\beta e_2\rangle = 0$ i.e si $\alpha e_1+\beta e_2 = \langle e_2,e_2\rangle e_1 - \langle e_1,e_2\rangle e_2 = 0$, $e_1 = \dfrac{\langle e_1,e_2\rangle}{\langle e_2,e_2\rangle} e_2$.

Así, la igualdad se tiene $\leftrightarrow$ e_1 y e_2 son linealmente dependientes.

2.1.4. Proposición. Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio producto interno (real o complejo) y tome $\|e\| = \langle e,e\rangle^{1/2}$. Entonces $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Demostración. Primero veamos que N1 y N2 se cumplen

$\|e\| = \langle e,e\rangle^{1/2} \geq 0$ ya que $\langle e,e\rangle \geq 0$, $\|e\| = \langle e,e\rangle^{1/2} = 0 \leftrightarrow \langle e,e\rangle = 0 \leftrightarrow e = 0$.

$\|\lambda e\| = \langle \lambda e, \lambda e\rangle^{1/2} = (\lambda\cdot\bar{\lambda} \langle e,e\rangle)^{1/2} = (|\lambda|^2 \langle e,e\rangle)^{1/2} = |\lambda| \langle e,e\rangle^{1/2} = |\lambda| \, \|e\|$.

Para ver que N3 se cumple empleamos la desigualdad $Re(\langle e_1,e_2\rangle) \leq |\langle e_1,e_2\rangle|$ y la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

$$\|e_1+e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + 2Re(\langle e_1,e_2\rangle) + \|e_2\|^2 \leq \|e_1\|^2 + 2|\langle e_1,e_2\rangle| + \|e_2\|^2 \leq$$
$$\leq \|e_1\|^2 + 2\|e_1\|\,\|e_2\| + \|e_2\|^2 = (\|e_1\| + \|e_2\|)^2 .$$

A continuación veremos otras afirmaciones importantes en relación al producto interno.

2.1.5 Proposición. Sea $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espacio producto interno y $\|\cdot\|$ la norma correspondiente. Entonces

(i) Polarización.

$$4\langle e_1, e_2\rangle = \begin{cases} \|e_1+e_2\|^2 - \|e_1-e_2\|^2 + i\|e_1+ie_2\|^2 - i\|e_1-ie_2\|^2 & \text{si } E \text{ es complejo} \\ \|e_1+e_2\|^2 - \|e_1-e_2\|^2 & \text{si } E \text{ es real} \end{cases}$$

(ii) Ley del Paralelogramo.

$$2\|e_1\|^2 + 2\|e_2\|^2 = \|e_1+e_2\|^2 + \|e_1-e_2\|^2 .$$

Demostración.

(i) $\|e_1+e_2\|^2 - \|e_1-e_2\|^2 + i\|e_1+ie_2\|^2 - i\|e_1-ie_2\|^2 =$

$\|e_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle e_1,e_2\rangle) + \|e_2\|^2 - \|e_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle e_1,e_2\rangle) - \|e_2\|^2 + i\|e_1\|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\langle e_1,e_2\rangle) + i\|e_2\|^2$

$- i\|e_1\|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\langle e_1,e_2\rangle) - i\|e_2\|^2 = 4\,\mathrm{Re}(\langle e_1,e_2\rangle) + 4\,\mathrm{Im}(\langle e_1,e_2\rangle) = 4\langle e_1,e_2\rangle$

El caso real es similar.

(ii) $\|e_1+e_2\|^2 + \|e_1-e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle e_1,e_2\rangle) + \|e_2\|^2 + \|e_1\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle e_1,e_2\rangle) + \|e_2\|^2$

$$= 2\|e_1\|^2 + 2\|e_2\|^2 .$$

No todas las normas provienen de un producto interno. Por ejemplo en $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

es una norma, pero no existe un producto interno en $\mathbb{R}^n$ que defina a esta norma. Para verlo sólo basta con demostrar que esta norma no satisface la ley del paralelogramo. Para esto considere los siguiente vectores en $\mathbb{R}^n$:

$$x = (1,0,\ldots,0) \quad , \quad y = (0,0,\ldots,0,1)$$

de los que se tiene que $\|x\|_s = 1$, $\|y\|_s = 1$, $\|x+y\|_s = 2$; $\|x-y\|_s = 2$ entonces $2\|x\|_s + 2\|y\|_s = 4$ y $\|x+y\|_s^2 + \|x-y\|_s^2 = 8$.

La siguiente proposición nos da una condición necesaria y suficiente para que un espacio normado sea un espacio producto interno.

2.1.6. Proposición. Un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio producto interno si y solo satisface la ley del paralelogramo.

Demostración.

Es claro que si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio producto interno entonces satisface la ley del paralelogramo (por 2.1.5).

Suponga que en $(E, \|\cdot\|)$ se satisface la ley del paralelogramo, i.e que para todo $e_1, e_2 \in E$ se tiene

$$2(\|e_1\|^2+\|e_2\|^2)=\|e_1+e_2\|^2+\|e_1-e_2\|^2 \qquad (1).$$

Por demostrar que E es un espacio producto interno.

Suponga 1º que $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio normado real y defina

$$\langle e_1,e_2\rangle=\frac{1}{4}\left(\|e_1+e_2\|^2-\|e_1-e_2\|^2\right) \qquad (2),$$

veamos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisface:

I1 $\langle e_1+e_2,e_3\rangle=\langle e_1,e_3\rangle+\langle e_2,e_3\rangle$

I2 $\langle \lambda e_1,e_2\rangle=\lambda\langle e_1,e_2\rangle$

I3 $\langle e_1,e_2\rangle=\langle e_2,e_1\rangle$

I4 $\langle e_1,e_1\rangle\geq 0$, $\langle e,e\rangle=0 \longleftrightarrow e=0$

I3 y I4 se obtienen claramente. De (2) se tiene

$$\langle e_1,e_3\rangle+\langle e_2,e_3\rangle=\frac{1}{4}\left(\|e_1+e_3\|^2+\|e_2+e_3\|^2\right)-\frac{1}{4}\left(\|e_1-e_3\|^2+\|e_2-e_3\|^2\right)$$

aplicando (1) al 1er y 2º sumando, respectivamente, y de la igualdad

$$\frac{1}{2}\|e_1+e_2+2e_3\|^2=\left\|\frac{e_1+e_2+2e_3}{\sqrt{2}}\right\|^2=2\left\|\frac{e_1+e_2}{2}+e_3\right\|^2$$

la cual se cumple, ya que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{e_1+e_2+2e_3}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{e_1+e_2}{2}+e_3\right)$.

Obtenemos

$$\langle e_1,e_3\rangle+\langle e_2,e_3\rangle=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{e_1+e_2}{2}+e_3\right\|^2-\left\|\frac{e_1+e_2}{2}-e_3\right\|^2\right)=2\left\langle\frac{e_1+e_2}{2},e_3\right\rangle.$$

Si tomamos $e_2=0$ en esta igualdad, obtenemos $\langle e_1,e_3\rangle = 2\langle \frac{e_1}{2}, e_3\rangle$ puesto que $\langle 0,e_3\rangle=0$ por (2).

En particular $\langle e_1+e_2, e_3\rangle = 2\langle \frac{e_1+e_2}{2}, e_3\rangle$.

Por tanto $\langle e_1+e_2, e_3\rangle = \langle e_1,e_3\rangle + \langle e_2,e_3\rangle$, lo cual prueba I1.

Note que, si $e_n \to e$ entonces $\langle e_n,w\rangle \to \langle e,w\rangle$, $w\in E$, ya que por (2)

$$\langle e_n,w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|e_n+w\|^2 - \|e_n-w\|^2\right)$$

y como $\|.\|$ es continua y $e_n\to e$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_n,w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|e+w\|^2 - \|e-w\|^2\right) = \langle e,w\rangle.$$

Demostremos que $\langle \lambda e_1, e_2\rangle = \lambda\langle e_1,e_2\rangle$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (*).

Por I1 se tiene $\langle e_1,e_2\rangle + \langle e_1,e_2\rangle = \langle 2e_1,e_2\rangle$, entonces $2\langle e_1,e_2\rangle = \langle 2e_1,e_2\rangle$. Así, por inducción se tiene que $n\langle e_1,e_2\rangle = \langle ne_1,e_2\rangle$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Sean $n,m\in\mathbb{N}$ entonces

$$\frac{n}{m}\langle e_1,e_2\rangle = \frac{n}{m}\langle m\frac{e_1}{m}, e_2\rangle = \frac{n}{m}\cdot m\langle \frac{e_1}{m}, e_2\rangle = n\langle \frac{e_1}{m}, e_2\rangle = \langle \frac{n e_1}{m}, e_2\rangle.$$

Por lo que (*) se cumple para todo racional positivo.

Como $\langle 0,e\rangle=0$ entonces $\langle e_1,e\rangle + \langle -e_1,e\rangle = \langle e_1-e_1,e\rangle = 0$, así, $\langle -e_1,e\rangle = -\langle e_1,e\rangle$. Con lo cual (*) se cumple para todo racional, ya que si $\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}^+$ entonces

$$\langle -\tfrac{n}{m}e_1, e_2\rangle = -\langle \tfrac{n}{m}e_1, e_2\rangle = -\tfrac{n}{m}\langle e_1, e_2\rangle.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces existe una sucesión (α_n) en $\mathbb{Q}$ tal que $\alpha_n \to \lambda$. Entonces $\lambda\langle e_1,e_2\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n\langle e_1,e_2\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\langle \alpha_n e_1, e_2\rangle = \langle \lambda e_1, e_2\rangle$.

Por tanto, para $\lambda\in\mathbb{R}$ $\langle \lambda e_1,e_2\rangle = \lambda\langle e_1,e_2\rangle$, lo cual prueba I4.

Luego, hemos demostrado que, si $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio normado real, el cual satisface la ley del paralelogramo, entonces E es un espacio vectorial con producto interno.

Si $(E,\|\cdot\|)$ es complejo, defina

$$\langle e_1,e_2\rangle = \langle e_1,e_2\rangle_1 + i\langle e_1, ie_2\rangle_1 \qquad (1')$$

donde $i=\sqrt{-1}$, $\langle e_1,e_2\rangle_1 = \frac{1}{4}\left(\|e_1+e_2\|^2 - \|e_1-e_2\|^2\right) \qquad (2')$.

Veamos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$, satisface:

CI1 $\langle e_1+e_2, e_3\rangle = \langle e_1,e_3\rangle + \langle e_2,e_3\rangle$

CI2 $\langle \lambda e_1, e_2\rangle = \lambda\langle e_1,e_2\rangle$

CI3 $\langle e_1,e_2\rangle = \overline{\langle e_2,e_1\rangle}$

CI4 $\langle e,e\rangle \geq 0$, $\langle e,e\rangle = 0 \longleftrightarrow e=0$.

CI4 se obtiene claramente, sólo note que $i\langle e,ie\rangle_1 = 0$, ya que $\langle e,ie\rangle_1 = \frac{1}{4}(\|e+ie\|^2 - \|e-ie\|^2) = \frac{1}{4}\left[\|e\|(|1+i|^2 - |1-i|^2)\right] = 0$.

De (1') y (2') se tiene

$$\langle e_1,e_3\rangle+\langle e_2,e_3\rangle=\langle e_1,e_3\rangle_1+i\langle e_1,ie_3\rangle_1+\langle e_2,e_3\rangle_1+i\langle e_2,ie_3\rangle_1=$$

$$(\langle e_1,e_3\rangle_1+\langle e_2,e_3\rangle_1)+i(\langle e_1,ie_3\rangle_1+\langle e_2,ie_3\rangle_1)=$$

$$\langle e_1+e_2,e_3\rangle_1+i\langle e_1+e_2,ie_3\rangle_1=\langle e_1+e_2,e_3\rangle .$$

Con lo cual se obtiene CI1.

Note que de (2') se tiene $\langle e_1,e_2\rangle_1=\langle e_2,e_1\rangle_1$, $\langle ie_1,ie_2\rangle_1=\langle e_1,e_2\rangle_1$, con lo que se tiene

$$\langle e_1,ie_2\rangle_1=\langle -i\cdot ie_1,ie_2\rangle_1=-\langle ie_1,e_2\rangle_1=-\langle e_2,ie_1\rangle_1 .$$

Entonces

$$\langle e_1,e_2\rangle=\langle e_1,e_2\rangle_1+i\langle e_1,ie_2\rangle_1=\langle e_2,e_1\rangle_1-i\langle e_2,ie_1\rangle_1=\overline{\langle e_2,e_1\rangle}$$

Por lo que se cumple CI3.

Note que $\langle ie_1,e_2\rangle=\langle ie_1,e_2\rangle_1+i\langle ie_1,ie_2\rangle_1=-\langle e_1,ie_2\rangle_1+i\langle e_1,e_2\rangle_1$.
Además, $i\langle e_1,e_2\rangle=i(\langle e_1,e_2\rangle_1+i\langle e_1,ie_2\rangle_1)=i\langle e_1,e_2\rangle_1-\langle e_1,ie_2\rangle_1$.
Por tanto $\langle ie_1,e_2\rangle=i\langle e_1,e_2\rangle$.

Sea $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda=a+ib$ entonces de (1') y (2') se tiene

$$\langle\lambda e_1,e_2\rangle=\langle\lambda e_1,e_2\rangle_1+i\langle\lambda e_1,ie_2\rangle_1=\langle(a+ib)e_1,e_2\rangle_1+i\langle(a+ib)e_1,ie_2\rangle_1=$$

$$(a\langle e_1,e_2\rangle_1 + ib\langle e_1,e_2\rangle_1) + i\,(a\langle e_1, ie_2\rangle_1 + ib\langle e_1, ie_2\rangle_1) =$$

$$(a+ib)\langle e_1,e_2\rangle_1 + (a+ib)\,i\langle e_1, ie_2\rangle_1 = \lambda\langle e_1,e_2\rangle_1 + \lambda\langle e_1, ie_2\rangle =$$

$$\lambda(\langle e_1,e_2\rangle_1 + i\langle e_1, ie_2\rangle) = \lambda\langle e_1,e_2\rangle .$$

Con lo que se tiene CI2.

Por tanto si $(E,\|\cdot\|)$ satisface la ley del paralelogramo, entonces es un espacio con producto interno.

2.1.7 Proposición. Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio normado (o seminormado) y defina $d(e_1,e_2)=\|e_1-e_2\|$. Entonces (E,d) es un espacio metrico.

Demostración.

Primero veremos que M1 y M2 se cumplen:

$$d(e_1,e_2)=\|e_1-e_2\|\geq 0 , \quad d(e_1,e_2)=\|e_1-e_2\|=0 \longleftrightarrow e_1=e_2 .$$

$$d(e_1,e_2)=\|e_1-e_2\|=\|e_2-e_1\|=d(e_2,e_1)$$

Para probar M3, utilizamos N3

$$d(e_1,e_3)=\|e_1-e_3\|=\|(e_1-e_2)+(e_2-e_3)\|\leq\|e_1-e_2\|+\|e_2-e_3\|$$
$$\leq d(e_1,e_2)+d(e_2,e_3) .$$

De las últimas proposiciones, se deduce lo siguiente:

Más General $\longrightarrow$

espacios producto interno $\subset$ espacios normados $\subset$ espacios métricos $\subset$ espacios topológicos

$\longleftarrow$ Más Especial.

Consideremos los siguientes ejemplos, los cuales muestran que:

a) No todo espacio normado es un espacio producto interno.

b) No todo espacio métrico es un espacio normado.

c) No todo espacio topológico es un espacio métrico.

a) El conjunto $E=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ forma un espacio vectorial, con las operaciones $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ y $(a f)(t)=a\cdot f(t)$ con $a\in\mathbb{R}$. Además es un espacio normado, donde la norma de $f\in E$ esta definida por

$$\|f\|=\max_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

Sin embargo E no es un espacio producto interno, ya que no satisface la ley del paralelogramo, para verlo considere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dadas por

$$f(t)=1 \quad y \quad g(t)=\frac{t-a}{b-a} \qquad \text{entonces}$$

$(f+g)(t) = 1 + \dfrac{t-a}{b-a}$, $(f-g)(t) = 1 - \dfrac{t-a}{b-a}$ y

$\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$, $\|f+g\| = 2$ y $\|f-g\| = 1$.

Con lo que se obtiene

$$2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 4 \quad \text{y} \quad \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 5 \ .$$

(b) Sea X un conjunto, el cual no es un espacio vectorial (por ejemplo $\mathbb{Z}$) y defina la siguiente métrica en X.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases} .$$

Así , (X,d) es un espacio métrico , pero no un espacio vectorial .

(c) Sea $X = \mathbb{N}$ y considere la topología $\tau = \{\phi , X\}$ en X.

X no es un espacio métrico, ya que (X,τ) no es Hausdorff .

Dado que los espacios producto interno y los normados son métricos podemos usar los conceptos de los preliminares. Los mapeos de $E\times E \to E$ y $\mathbb{C}\times E \to E$ dados por $(e_1,e_2)\to e_1+e_2$, y $(\alpha,e)\to\alpha e$ respectivamente, son continuos (donde se considera la norma $\|(e_1,e_2)\|_0 = \|e_1\|+\|e\|$ en $E\times E$). Por consiguiente para $e_0\in E$, $\alpha_0\in\mathbb{C}$ $\alpha_0\neq 0$ fijos, los mapeos $e\to e_0+e$, $e\to\alpha_0 e$ son homeomorfismos. Así, $U\subset E$ es una vecindad de $\bar{0}\in E$ si y solo si $e+U=\{e+x \mid x\in U\}$ es una vecindad de $e\in E$. Es decir, todas las vecindades de $e\in E$ son conjuntos que contienen trasladados de bolas abiertas con centro en el origen. Esto proporciona una descripción completa de la topología de un espacio vectorial normado $(E,\|\cdot\|)$. Finalmente note que la desigualdad $|\|e_1\|-\|e_2\||\leq\|e_1-e_2\|$ implica que la norma es uniformemente continua en E. En espacios producto interno, la desigualdad de Cauchy - Schwartz la continuidad del producto interno como función de 2 variables.

2.1.8 Definición. Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio normado. Si la métrica asociada con esta norma es completa, decimos que $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Si $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio producto interno cuya métrica correspondiente es completa, decimos que $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

2.1.9. Definición. Dos normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_0$ en un espacio vectorial E son equivalentes, si ellas inducen la misma topología, i.e si para todo $s>0$ $\exists$ constantes $r,s>0$ ta que

$$B^0_r(x)=\{y\in E \mid \|y-x\|_0<r\}\subset B_\delta(x)=\{y\in E \mid \|y-x\|<\delta\}\subset B^0_s(x)=\{y\in E\mid \|y-x\|_0<s\}.$$

2.1.10 Proposición. Dos normas en un espacio vectorial E son equivalentes si y solo si $\exists$ constantes $M,N>0$ tal que $M\|e\|_0\le\|e\|\le N\|e\|_0$.

Demostración.

Dado que vecindades de un punto arbitrario son traslados de vecindades del origen, las dos topologías son la misma, si y solo si $\forall\ \delta>0$ existen constantes $r,s>0$ tal que

$$B^0_r(0)\subset B_\delta(0)\subset B^0_s(0).$$

De la primera inclusión se tiene que, si $\|x\|_0\le r$ entonces $\|x\|\le\delta$. Así, si $\|x\|_0\le 1$ entonces $\|x\|\le \delta/r$ (ya que $r\|x\|_0=\|rx\|_0\le r\ \to\ \|rx\|\le\delta$). Luego, si $e\neq 0$ entonces

$$\left\|\frac{e}{\|e\|_0}\right\|_0=1 \quad y \quad \left\|\frac{e}{\|e\|_0}\right\|=\frac{\|e\|}{\|e\|_0}\le\delta/r,$$

esto es, $\|e\|\le(\delta/r)\|e\|_0\ \ \forall\ e\in E$. Similarmente la 2ª inclusión es equivalente a la afirmación que $(\delta/s)\|e\|_0\le\|e\|\ \ \forall\ e\in E$. Así, las topologías son equivalentes si existen constantes $M,N>0$ tal que

$$M\|e\|_0\le\|e\|\le N\|e\|_0\qquad\forall\ e\in E.$$

Si E, F son espacios vectoriales normados, la mapa $\|\cdot\|_s : E \times F \to \mathbb{R}$ definido por $\|(e,v)\|_s = \|e\|_E + \|v\|_F$ es una norma en $E \times F$ que induce la topología producto. Otras normas equivalentes en $E \times F$ a $\|\cdot\|_s$, son $\|(e,v)\|_m = \max\{\|e\|_E, \|v\|_F\}$ y $\|(e,v)\| = (\|e\|_E^2 + \|v\|_F^2)^{1/2}$. El espacio vectorial normado se denota usualmente por $E \oplus F$ y se llama la suma directa de E y F. Note que $E \oplus F$ es Banach si y solo si E y F son Banach.

2.1.11 Proposición. Sea E un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita. Entonces

(i) Existe una norma en E.

(ii) Todas las normas en E son equivalentes.

(iii) Todas las normas son completas.

Demostración.

Supongan que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son base de E, donde $n = \dim E$.

(i) Sea $e \in E$ entonces $e = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ con $a_i \in \mathbb{C}$ $i = 1, \ldots, n$ y defina la siguiente norma en E : $\|e\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

Veamos que se cumplen N1-N3

$\|e\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \geq 0$, ya que $|a_i| \geq 0$ $i = 1, \ldots, n$, $\|e\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = 0 \leftrightarrow |a_i| = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ $\leftrightarrow a_i = 0$ $i = 1, \ldots, n \leftrightarrow e = 0$.

$\|\lambda e\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda a_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda||a_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |a_i| = |\lambda| \|e\|$.

$$\|e+w\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |b_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| + \sum_{i=1}^{n} |b_i| = \|e\| + \|w\| \quad , w = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i .$$

ii) Sea $\|\cdot\|'$ cualquier otra norma en E. Demostremos que $\exists$ constantes $M, N > 0$ tal que $M\|e\| \leq \|e\|' \leq N\|e\|$.

Si $e = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, la desigualdad

$$| \|e\|' - \|w\|' | \leq \|e-w\|' \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \, \|e_i\|' \leq \max_{1\leq i\leq n} \{ \|e_i\|' \} \cdot \|(a_1,\dots,a_n)-(b_1,\dots,b_n)\|_s$$

donde $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}$ y $\|(a_1,\dots,a_n)\|_s = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, demuestra que el mapeo $\mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ $(a_1,\dots,a_n) \to \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|'$ es continuo con respecto a la norma $\|\cdot\|_s$ en $\mathbb{C}^n$. Dado que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\|_s = 1\}$ $= \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|x\|_s = 1\}$ es cerrado y acotado, S es compacto. La restricción de este mapeo a S, es una función continua estrictamente positiva (ya que si $x \in S$ y $\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|' = 0 \to \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0 \to x_i = 0 \ \forall \ i=1,\dots,n$), así esta función alcanza su máximo $N > 0$ y su mínimo $M > 0$ en S, esto es

$$0 < M \leq \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|' \leq N$$

para todo $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|(x_1,\dots,x_n)\|_s = 1$. Así

$M\|(x_1,\dots,x_n)\|_s \leq \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|' \leq N\|(x_1,\dots,x_n)\|_s$, i.e $M\|e\| \leq \|e\|' \leq N\|e\|$, donde $e = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Por tanto $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes.

(iii) Note que, si $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ son equivalentes en E y $(E, \|\cdot\|')$ es completo entonces $(E, \|\cdot\|)$ es completo. (En efecto, si (e_n) es de Cauchy en $(E, \|\cdot\|)$ entonces (e_n) es de Cauchy en $(E, \|\cdot\|')$, pues $\exists$ $M>0$ tal que $M\|e\| \leq \|e\|'$ para todo $e \in E$).

Así, para probar que todas las normas en E son completas, es suficiente observar que el mapeo

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$$

es un mapeo que preserva normas entre $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_s)$ y $(E, \|\cdot\|)$, ya que

$$(1) \quad \|(x_1, \ldots, x_n)\|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|$$

luego este mapeo es un homeomorfismo. Así, si (e_k) es de Cauchy en E, donde $e_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k e_i$, entonces $\{(x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}^n$ por (1). Por consiguiente, para algún $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ $(x_1^k, \ldots, x_n^k) \to (a_1, \ldots, a_n)$ y por (1) se tiene que $e_k \to \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Por tanto E es completo y todas las normas en E son completas.

La demostración anterior muestra que la compacidad de la esfera unitaria en espacios de dimensión finita es crucial. Este hecho se utiliza en la siguiente proposición.

2.1.12 Proposición. Un espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$ tiene dimensión finita si y solo si es localmente compacto. (i.e si cada punto de E tiene una vecindad compacta).

Demostración.

Note que la compacidad local en E es equivalente a que la bola cerrada unitaria $\overline{B}_1(0) \subset E$ sea compacta, pues las vecindades compactas de $e \in E$ son traslados de vecindades compactas del $0 \in E$.

($\rightarrow$) Si E tiene dimensión finita, la demostración de 2.1.10-(iii) muestra que E es localmente compacto, ya que E es homeomorfo a $\mathbb{C}^n$, el cual es localmente compacto.

($\leftarrow$) Suponga que la bola unitaria $\overline{B}_1(0) \subset E$ es compacta. Para cada $x \in E$ considere $B_{1/2}(x)$, entonces como $\overline{B}_1(0)$ es compacta, existe un nº finito $x_1, \ldots, x_n \in E$ tal que $\{B_{1/2}(x_i) \mid i=1,\ldots,n\}$ cubren a $\overline{B}_1(0)$. Sea F el subespacio generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces F tiene dimensión finita, por lo tanto es homeomorfo a $\mathbb{C}^k$ (o $\mathbb{R}^k$) para algún $k \leq n$. Siendo F un subespacio completo del espacio métrico $(E, \|\cdot\|)$, F es cerrado. Demostremos que $F=E$. Suponga que $F \neq E$, esto es, $\exists\ v \in E$ tal que $v \notin F$. Dado que $F = cl(F)$, el nº $d = \inf\{\|v-e\| \mid e \in F\}$ es estrictamente positivo. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(v) \cap F \neq \phi$ (tome $r > d$). Note que $\overline{B}_r(v) \cap F$ es cerrado y acotado en el espacio F de dimensión finita, luego es compacto. Además el $\inf\{\|v-e\| \mid e \in F\} = \inf\{\|v-e\| \mid e \in \overline{B}_r(v) \cap F\}$, esto por que $\{\|v-e\| \mid e \in F\} \supset \{\|v-e\| \mid e \in \overline{B}_r(v) \cap F$ implica que

$d \leq \inf\{\|v-e\| \mid e \in \overline{B}_r(v) \cap F\} = \alpha$. Se afirma que $d=\alpha$, si $d>\alpha$ entonces $\exists\ e_0 \in \overline{B}_r(v) \cap F$ tal que $\|v-e_0\| < d$?, ya que $e_0 \in F$ y $d \leq \|v-e\|$ $\forall e \in F$.

El mapeo continuo $e \in \overline{B}_r(v) \cap F \longrightarrow \|v-e\| \in [0,\infty)$ alcanza su mínimo, en algún punto $e_0 \in \overline{B}_r(v) \cap F$, así $d = \|v-e_0\|$. Como $\frac{v-e_0}{\|v-e_0\|}$ esta en $\overline{B}_1(0)$, entonces $\frac{v-e_0}{\|v-e_0\|} \in B_{1/2}(x_i)$, para algún $1 \leq i \leq n$.

Así,

$$\left\| \frac{v-e_0}{\|v-e_0\|} - x_i \right\| < \frac{1}{2} \rightarrow \|v-e_0-(\|v-e_0\|)x_i\| < \frac{1}{2}\|v-e_0\| = \frac{d}{2}.$$

Dado que $e_0 + \|v-e_0\|x_i \in F$, se tiene $\|v-e_0-(\|v-e_0\|)x_i\| \geq d$, lo cual es una contradicción.

Por tanto $E=F$ y E tiene dimensión finita.

2.1.13 Ejemplos

(A) Sea C_b el conjunto de todas las sucesiones reales acotadas. Un elemento de C_b es de la forma $x=(a_j)$ donde $a_j \in \mathbb{R}$ y tal que existe $M>0$ $|a_j| < M$ $\forall j \in \mathbb{N}$. El conjunto C_b es un espacio vectorial con la norma $\|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|$. Demostremos que C_b es un espacio de Banach:

Sea (x_n) de Cauchy en C_b, donde $x_n = (a_1^n, a_2^n, \ldots, a_j^n, \ldots)$.

Como (x_n) es de Cauchy, dado $\varepsilon>0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m \geq K$ entonces $\|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j^n - a_j^m| < \varepsilon$.

Así, para j fijo $|a_j^n - a_j^m| < \varepsilon \quad (n,m \geq K)$ (1).

Por tanto para j fijo, la sucesión $(a_j^1, a_j^2, \ldots, a_j^n, \ldots)$ converge en $\mathbb{R}$, digamos que $a_j^n \to a_j$. Lo anterior se tiene para cada $j \in \mathbb{N}$. Usando estos límites $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ defina $x = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots)$. Demostremos que $x \in C_b$ y que $x_n \to x$.

De (1) con $m \to \infty$ obtenemos que

$$|a_j^n - a_j| < \varepsilon \quad n \geq K \qquad (2).$$

Como $x_n \in C_b$ existe un real $k_n > 0$ tal que $|a_j^n| \leq k_n \ \forall j \in \mathbb{N}$. De la desigualdad del triangulo se tiene que

$$|a_j| = |a_j^n + (a_j - a_j^n)| \leq |a_j^n| + |a_j - a_j^n| \leq k_n + \varepsilon \quad n \geq K .$$

esta desigualdad se cumple para toda $j \in \mathbb{N}$, por tanto la sucesión (a_j) esta acotada y $(a_j) \in C_b$.

De (2) se tiene que $\|x_n - x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j^n - a_j| < \varepsilon \quad n \geq K$, así $x_n \to x$.

Por tanto $(C_b, \|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

(c) Sea c_0 el conjunto de las sucesiones reales (a_n) tal que $a_n \to 0$. Demostremos que c_0 es un subespacio vectorial cerrado de C_b. Como toda sucesión convergente es acotada entonces $c_0 \subset C_b$. Sean $(a_n), (b_n) \in c_0$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} t a_n = t \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, con lo que se tiene que c_0 es un subespacio vectorial de C_b. Para ver que c_0 es cerrado en C_b, basta probar que c_0 es completo.

Sea (x_n) de Cauchy en c_0 y $x_n = (a_1^n, a_2^n, \ldots, a_j^n, \ldots)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq K$ entonces $\|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon$, en particular (x_n) es de Cauchy en C_b. Como C_b es completo existe $x \in C_b$ tal que $x_n \to x$. Sea $x = (a_1, \ldots, a_j, \ldots)$ y probemos que $a_j \to 0$. Por la desigualdad del triangulo se tiene que

$$|a_j| = |a_j^n + (a_j - a_j^n)| \leq |a_j^n| + |a_j - a_j^n| \qquad \forall\ j \in \mathbb{N},$$

tomando el límite cuando $j \to \infty$ se obtiene que $\lim_{j\to\infty} |a_j| = 0$, entonces $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.

Así, c_0 es un subespacio cerrado de C_b y por tanto c_0 es un espacio de Banach.

Como en el caso de espacios vectoriales, los espacios cocientes de espacios vectoriales normados juegan un papel importante.

2.1.14. Proposición. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, F un subespacio vectorial cerrado de E, E/F el espacio vectorial cociente, y $\pi : E \to E/F$ la proyección canonica definida por $\pi(e) = [e] = e + F$.

(i) El mapeo $\|\cdot\|_0 : E/F \to \mathbb{R}$, $[e] \to \|[e]\|_0 = \inf\{\|e+v\| \setminus v \in F\}$ define una norma en E/F.

(ii) π es continuo y la topología en E/F definida por la norma coincide con la topología cociente. En particular, π es un mapeo abierto.

(iii) Si E es un espacio de Banach, tambien lo es E/F.

Demostración. (i) Veamos que N1-N3 se cumplen

N1 Por definición $\|[e]\|_0 = \inf\{\|e+v\| \setminus v \in F\} \geq 0$, $\forall$ $[e] \in E/F$.

Si $[e]=0$ entonces $\|[e]\|_0 = \|[0]\|_0 = \inf\{\|v\| \setminus v \in F\} = 0$.

Si $\|[e]\|_0 = 0$, por definición de infimo, existe $v_n \in F$ tal que $\|e+v_n\| \leq 1/n$ y esto $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|e+v_n\| = 0$. Asi $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -e$ y como F es cerrado $e \in F$, i.e $[e]=0$. Por tanto N1 se verifica y la necesidad de que F sea cerrado se ve claramente.

N2 Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ (o $\lambda \in \mathbb{R}$), por definición $\|\lambda[e]\|_0 = \|[\lambda e]\|_0 = \inf\{\|\lambda e+v\| \setminus v \in F\}$.

Si $\lambda = 0$ $\|[\lambda e]\|_0 = \inf\{\|v\| \setminus v \in F\} = 0 = \lambda \inf\{\|e+v\| \setminus v \in F\} = |\lambda| \, \|[e]\|_0$.

Si $\lambda \neq 0$ $\|[\lambda e]\|_0 = \inf\{\|\lambda e+v\| \setminus v \in F\} = \inf\{\|\lambda e + \lambda(\frac{v}{\lambda})\| \setminus v/\lambda \in F\} =$

$\inf\{ |\lambda| \, \|e+w\| \mid w\in F,\ w=v/\lambda \} = |\lambda| \inf\{ \|e+w\| : w\in F \} = |\lambda| \, \|[e]\|_0$.

N3 Sean $[e_1],[e_2] \in E/F$, por definición de ínfimo, dado $\varepsilon>0$ $\exists$ $v_1, v_2 \in F$ tal que

$$\|e_1+v_1\| \leq \|[e_1]\|_0 + \varepsilon/2 \quad , \quad \|e_2+v_2\| \leq \|[e_2]\|_0 + \varepsilon/2 \qquad (1) .$$

Por la desigualdad del triángulo y (1) se tiene que

$$\|(e_1+e_2)+(v_1+v_2)\| \leq \|e_1+v_1\|+\|e_2+v_2\| \leq \|[e_1]\|_0 + \|[e_2]\|_0 + \varepsilon .$$

Como $(e_1+e_2) \in [e_1]+[e_2]$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\|[e_1]+[e_2]\|_0 \leq \|(e_1+e_2)+(v_1+v_2)\| \leq \|[e_1]\|_0 + \|[e_2]\|_0 + \varepsilon .$$

Por tanto $\|[e_1]+[e_2]\|_0 \leq \|[e_1]\|_0 + \|[e_2]\|_0$; dado que ε fue arbitrario.

(ii) Para ver que π es continua, basta con demostrar que si $e\in E$ y $e=\lim_{n\to\infty} e_n$ entonces $\lim_{n\to\infty} \pi(e_n)=\pi(e)$.

Como $\|[e]\|_0 \leq \|e\|$ entonces $\|\pi(e)-\pi(e_n)\|_0 = \|[e_n]-[e]\|_0 \leq \|e_n-e\|$, y tomando límite cuando $n\to\infty$, por la continuidad de $\|\cdot\|_0$ y $\|\cdot\|$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \pi(e_n)=\pi(e)$.

Recuerde que, para $e_0\in E$ fijo, el mapeo $e \to e_0+e$ en E es un homeomorfismo. Así para probar que la topología de E/F

es la topología cociente, es suficiente demostrar que si $[0] \in U \subset E/F$ y $\pi^{-1}(U) \subset E$ es una vecindad abierta del cero en E, entonces U es una vecindad de $[0]$ en E/F. Dado que $\pi^{-1}(U)$ es una vecindad de cero en E, existe una bola abierta $B_r(0) \subset \pi^{-1}(U)$. Entonces $\pi(B_r(0)) \subset U$ y $\pi(B_r(0)) = \{[e] \mid e \in B_r(0)\} = \{[e] \mid \|[e]\|_0 < r\}$, por consiguiente U es una vecindad del $[0]$ en E/F.

<u>Note</u> que $\{[e] \mid e \in B_r(0)\} = \{[e] \mid \|[e]\|_0 < r\}$, ya que

c) Si $[w] \in \{[e] \mid e \in B_r(0)\}$ entonces como $\|[w]\|_0 \leq \|w\|$ y $\|w\| < r$ se tiene que $[w] \in \{[e] \mid \|[e]\|_0 < r\}$.

d) Si $[w] \in \{[e] \mid e \in B_r(0)\}$ entonces por definición de ínfimo $\exists\ v \in F$ tal que $\|w+v\| < r$, además $[w+v] = [w]$, entonces $[w] \in \{[e] \mid e \in B_r(0)\}$.

(iii) Sea E Banach, y $([e_n])$ una sucesión de Cauchy en E/F. Probemos que $([e_n])$ converge en E/F.
Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\|[e_n] - [e_{n+1}]\|_0 \leq 1/2^n$.
Inductivamente, encontraremos puntos $\hat{e}_n \in [e_n]$ tal que

$$\|\hat{e}_n - \hat{e}_{n+1}\| < 1/2^n .$$

Para $n=1$, de la definición de $\|\cdot\|_0$ y la desigualdad $\|[e_1]-[e_2]\|_0 \le 1/2$ existe $v_1 \in F$ tal que $\|(e_1-e_2)+v_1\| < 1/2$. Sea $\hat{e}_1 = e_1$ y $\hat{e}_2 = e_2 - v_1$; así $\hat{e}_2 \in [e_2]$ ya que $e_2 - \hat{e}_2 = v_1 \in F$, y $\|\hat{e}_1 - \hat{e}_2\| < 1/2$.

De la desigualdad $\|[e_2]-[e_3]\|_0 \le 1/2^2$, existe $v_2 \in F$ tal que $\|(e_2-e_3)+v_2\| < 1/2^2$. Podemos escribir $e_2 - e_3 + v_2 = e_2 - v_1 + v_1 - e_3 + v_2$, y así definimos $\hat{e}_3 = e_3 - (v_1+v_2)$. Por consiguiente $\hat{e}_3 \in [e_3]$, ya que $\hat{e}_3 - e_3 = v_1 + v_2 \in F$. Además $\|\hat{e}_2 - \hat{e}_3\| < 1/2^2$.

Suponga que se han definido $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ tal que $\hat{e}_j \in [e_j]$ y $\|\hat{e}_j - \hat{e}_{j+1}\| < 1/2^j$ $j=1,\ldots,n-1$. Defina $\hat{e}_{n+1}$ como sigue:

Ya que $\|[e_n]-[e_{n+1}]\| < 1/2^n$ entonces existe $v_{n+1} \in F$ tal que $\|(e_{n+1}-e_n)+v_{n+1}\| < 1/2^n$. Podemos escribir $e_{n+1} - e_n + v_{n+1} = e_{n+1} - v_n + v_n - e_n + v_{n+1}$, y así definimos $\hat{e}_{n+1} = e_{n+1} - (v_n + v_{n+1})$. Por consiguiente $\hat{e}_{n+1} \in [e_{n+1}]$, ya que $\hat{e}_{n+1} - e_{n+1} = v_n + v_{n+1} \in F$. Además se tiene que $\|\hat{e}_n - \hat{e}_{n+1}\| < 1/2^n$.

Así, obtenemos una sucesión $(\hat{e}_n)$ en E tal que $\hat{e}_n \in [e_n]$ y $\|\hat{e}_n - \hat{e}_{n+1}\| < 1/2^n$. Por consiguiente $(\hat{e}_n)$ es de Cauchy en E, con lo cual $\hat{e}_n \to e$ para algún $e \in E$. Por la continuidad de π se tiene que $\lim_{n\to\infty} [e_n] = \lim_{n\to\infty} \pi(\hat{e}_n) = \pi(e)$.
Por tanto $([e_n])$ converge, con lo cual E/F es completo.

La codimensión de F en E se define como la dimensión de E/F. Decimos que F tiene codimensión finita si E/F tiene dimensión finita.

2.1.15. Definición. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y F un subespacio vectorial cerrado de E. Se dice que F se complementa en E, si existe un subespacio vectorial cerrado G en E tal que $E = F \oplus G$.

La definición 2.1.15, dice implícitamente que la topología de E coincide con la topología producto de $E \oplus G$. Demostraremos en 2.2.19. que esta condición topológica se puede suprimir, i.e, F se complementa si y solo si E es la suma directa algebraica de F y el subespacio cerrado G.

En espacios normados de dimensión finita cualquier subespacio vectorial es cerrado y se complementa, sin embargo en espacios de dimensión infinita es falso. Como lo muestra el siguiente ejemplo.

2.1.15'. Considere el espacio de Banach $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ formado por todas las sucesiones complejas acotadas. Así si $(x_n) \in l^\infty$ $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Considere también el subespacio cerrado c_0 formado por todas las sucesiones complejas que convergen a cero. Para cada entero positivo fijo k defina el mapeo

$f_k : l^\infty \to \mathbb{C}$ tal que $f_k(x) = f_k((x_n)) = x_k$ para todo $x = (x_n) \in l^\infty$.
Así f_k mapea cada sucesión acotada sobre su k-ésimo término.
Claramente cada f_k es un funcional continuo en $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ y si para $x \in l^\infty$ $f_k(x) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.
Si c_0 tuviera un complemento H en l^∞ entonces habría un isomorfismo lineal continuo ϕ de l^∞/c_0 sobre H, para ver esto considere el mapeo $\pi_2 : l^\infty = c_0 \oplus H \to H$ definido por $\pi_2(c,h) = h$, el cual es lineal, continuo, suprayectivo y con $\ker \phi = c_0$, entonces el mapeo $\phi : l^\infty/c_0 \to H$ definido por $\phi(x + c_0) = \pi(x)$ es un isomorfismo lineal continuo.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $h_k = f_k \circ \phi$. Entonces $\{h_k\}$ es un conjunto contable de funcionales lineales continuos en l^∞/c_0, que tienen la siguiente propiedad:

(*) Si $[x] \in l^\infty/c_0$ y $h_k([x]) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ entonces $[x] = 0$.

Veamos que la familia $\{h_k\}$ cumple (*), sea $[x] \in l^\infty/c_0$ y $[x] = x + c_0$. Suponga que $h_k([x]) = f_k \circ \phi(x + c_0) = f_k(\pi_2(x)) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $\pi_2(x) = 0$ y como $\ker(\pi_2) = c_0$ $x \in c_0$. Así $[x] = [0] = c_0$.

Demostraremos que c_0 no tiene un complemento en l^∞, probando que ningún conjunto contable de funcionales lineales continuos en l^∞/c_0 pueden tener la propiedad (*).

Podemos considerar l^∞ como el espacio de todas las funciones acotadas de $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Sea $U \subset \mathbb{N}$ y denotemos por $\chi_U : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ la función característica, i.e $\chi_U(n)=1$ si $n\in U$ y $\chi_U(n)=0$ si $n\notin U$. Note que cualquiera de estas funciones esta en l^∞.

Veamos a continuación algunos hecho en relación a $\mathbb{N}$ y l^∞/c_0.

(i) Existe una familia no numerable $\{U_a \mid a\in A\}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que cada U_a es un conjunto infinito, y $U_a\cap U_b$ es finito para $a\neq b$.

Sea φ una función 1-1 de los racionales en $(0,1)$ sobre $\mathbb{N}$, y sea A el conjunto de los irracionales en $(0,1)$. Para cada $a\in A$ sea U_a' los términos de cualquier sucesión de racionales que convergen a 'a'. Tomando $U_a=\varphi(U_a')$ para cada $a\in A$, obtenemos una familia de conjuntos con las propiedades deseadas. Veamos que $U_a\cap U_b$ es finito para $a\neq b$, de no ser así tome una subsucesión (x_n) en $U_a\cap U_b$, entonces $x_n\to a$ y $x_n \to b$, luego $a=b$ $\lightning$.

(ii) Para cada $a\in A$ sea $[x_a]$ el elemento de l^∞/c_0 que contiene a la función característica χ_{U_a}, donde U_a esta en la familia definida en (i). Sea g cualquier funcional lineal continuo en l^∞/c_0. Entonces $\{[x_a] \mid g([x_a])\neq 0\}$ es contable.

Observación. Para $a\neq b$ se tiene que $[x_a]\neq[x_b]$.

Suponga, $[x_a]=[x_b] \leftrightarrow (\chi_{U_a}-\chi_{U_b})\in c_0$ (donde $\chi_{U_a}-\chi_{U_b}$ toma los valores $0,1,-1$) $\leftrightarrow$ $\exists$ $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ $(\chi_{U_a}-\chi_{U_b})(n)=0$ $\leftrightarrow$ $[N,\infty)\subset(U_a\cap U_b)\cup(U_a^c\cap U_b^c)$ $\Rightarrow$ $[N,\infty]\subset(U_a\cap U_b)\cup(U_a\cup U_b)^c$. Como $U_a\cap U_b$ es finito $\exists$ $M\geq N$ tal que $[M,\infty]\subset(U_a\cup U_b)^c$ $\Rightarrow$ $(U_a\cup U_b)\subset\{1,2,\ldots,M-1\}$ $\not{\circ}$.

Como $\{[x_a]\mid g([x_a])\neq 0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{[x_a]\mid |g([x_a])|\geq 1/n\}$. Entonces para probar (ii) sólo hay que demostrar que para cada $n\in\mathbb{N}$, $\{[x_a]\mid |g([x_a])|\geq 1/n\}$ es finito.

Tome $n\in\mathbb{N}$ fijo y suponga que $[x_{a_1}],\ldots,[x_{a_r}]$ están en $\{[x_a]\mid |g([x_a])|\geq 1/n\}$. Sea $b_i=\overline{g[x_{a_i}]}\cdot|g[x_{a_i}]|^{-1}$ para $i=1,\ldots,r$, y $[x]=\sum_{i=1}^{r}b_i[x_{a_i}]$. Claramente $[x]\in l^\infty/c_0$, ya que es combinación lineal de elementos en l^∞/c_0, la norma de $[x]$ es menor o igual que 1, y $g([x])\geq r/n$ ya que

$$g([x])=\sum_{i=1}^{r}b_i\,g([x_{a_i}])=\sum_{i=1}^{r}\frac{\overline{g([x_{a_i}])}}{|g([x_{a_i}])|}\cdot g([x_{a_i}])=\sum_{i=1}^{r}|g([x_{a_i}])|\geq r\cdot\frac{1}{n}.$$

Dado que g es continuo r debe ser finito, ya que de no ser así g no estaría acotado, lo cual no es posible por la continuidad de g. Por tanto el conjunto $\{[x_a]\mid |g([x_a])|\geq 1/n\}$ es finito.

Si $\{h_i\}$ es cualquier colección contable de funcionales lineales continuos en l^∞/c_0, entonces por (ii) sólo $\exists$ una colección contable de $[x_a]$ tal que $h_i([x_a])\neq 0$ $\forall$ $i\in\mathbb{N}$. Dado que A es no numerable, esto implica que algún $[x_a]\neq 0$ $h_i[x_a]=0$ $\forall$ $i\in\mathbb{N}$. Por tanto $\{h_i\}$ no tiene la propiedad (*). Así C_0 es un subespacio vectorial cerrado de $(l^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ que no se complementa.

En 2.2.21 se da un criterio general para determinar cuando un subespacio vectorial se complementa en un espacio vectorial normado. Sin embargo la situación más simple se da en espacios de Hilbert.

2.2.16 Proposición. Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert y F un subespacio cerrado de E, entonces $E = F \oplus F^{\perp}$. Así todo subespacio de un espacio de Hilbert se complementa.

La demostración de esta proposición se da en tres pasos.

2.1.17 Lema. Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio de Hilbert. Si C es un conjunto cerrado y convexo en E, entonces existe un único $e_0 \in C$ tal que $\|e_0\| = \inf\{\|e\| \mid e \in C\}$.

Demostración.

Sea $\sqrt{d} = \inf\{\|e\| \mid e \in C\}$. Entonces existe una sucesión (e_n) en E, que satisface la desigualdad $d \le \|e_n\|^2 < d + 1/n$, tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene $\|e_n\|^2 \to d$. Dado que $(e_n + e_m)/2$ esta en C, pues C es convexo, se tiene que $\|(e_n+e_m)/2\|^2 \ge d$. Por la ley del paralelogramo se tiene

$$\left\| \frac{e_n - e_m}{2} \right\|^2 = 2\left\| \frac{e_n}{2} \right\|^2 + 2\left\| \frac{e_m}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{e_n + e_m}{2} \right\|^2$$

$$\le \frac{d}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{d}{2} + \frac{1}{2m} - d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$$

esto es, (e_n) es una sucesión de Cauchy en E. Sea $e_0 = \lim_{n\to\infty} e_n$. La continuidad de la norma implica que $\sqrt{\delta} = \lim_{n\to\infty} \|e_n\| = \|e_0\|$. Por tanto $e_0 \in E$ y $\|e_0\| = \inf\{\|e\| \setminus e \in C\}$.

Finalmente, si $v_0 \in E$ es tal que $\|v_0\| = \|e_0\| = \sqrt{\delta}$, la ley del paralelogramo implica que

$$\left\| \frac{e_0 - v_0}{2} \right\|^2 = 2\left\| \frac{e_0}{2} \right\|^2 + 2\left\| \frac{v_0}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{e_0 + v_0}{2} \right\| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} - \delta = 0$$

Por tanto $e_0 = v_0$ y se tiene la unicidad.

2.1.18. Lema. Sea $F \subsetneq E$, un subespacio cerrado de E. Entonces existe un elemento $e_0 \in E$, $e_0 \neq 0$ tal que $e_0 \perp F$.

Demostración.

Sea $e \in E$, $e \notin F$. Considere el conjunto $e - F = \{e - v \setminus v \in F\}$.

Probaremos que $e - F$ es cerrado y convexo:

Sean $e - v_1, e - v_2 \in F$ y $t \in [0,1]$, entonces $t(e - v_1) + (1-t)(e - v_2) = e - t(v_1 - v_2) - v_2$ esta en $e - F$, ya que $(t(v_1 - v_2) - v_2) \in F$. Luego $e - F$ es convexo.

Sea $w \in cl(e-F)$ entonces existe una sucesión (v_n) en F tal que $\lim_{n\to\infty}(e - v_n) = w$. Así $\lim_{n\to\infty} v_n = e - w$ y como F es cerrado $e - w \in F$ se tiene que $w = e - (e - w) \in F$. Por tanto $e - F$ es cerrado.

Por 2.1.17 $e - F$ contiene un único elemento $e_0 = e - v_0 \in (e - F)$ de norma mínima. Dado que F es cerrado y $e \notin F$, se tiene que $e_0 \neq 0$. Probemos que $e_0 \perp F$:

Como e_0 es de norma mínima en $e-F$, para cualquier $v\in F$ y $\lambda\in\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), tenemos que

$$\|e_0\| = \|e-v_0\| \leq \|e-v_0+\lambda v\| = \|e_0+\lambda v\| \quad \text{entonces}$$
$$\|e_0+\lambda v\|^2 - \|e_0\|^2 = 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle e_0,v\rangle) + |\lambda|^2\|v\|^2 \geq 0 .$$

Si $\lambda = a\langle e_0,v\rangle$, $a\in\mathbb{R}$ $a\neq 0$, entonces sustituyendo en la desigualdad anterior se tiene $a|\langle v,e_0\rangle|^2(2+a\|v\|^2)\geq 0$ para todo $v\in F$ y $a\in\mathbb{R}$ $a\neq 0$. Si tomamos $a\in(-2/\|v\|^2, 0)$ la desigualdad anterior es negativa, por lo cual se debe tener que $\langle v,e_0\rangle = 0$. Por tanto $e_0\perp F$.

Demostración de 2.1.16.

Veamos primero que si F es un subespacio vectorial de E entonces $F^\perp$ es un subespacio de E.

Si $e_1,e_2\in F^\perp$ y $\lambda\in\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) y $e\in F$, entonces $\langle e_1+\lambda e_2,e\rangle = \langle e_1,e\rangle + \lambda\langle e_2,e\rangle = 0$, con lo cual $e_1+\lambda e_2\in F^\perp$ y $F^\perp$ es un subespacio de E.

Si $e_0\in \mathrm{cl}(F^\perp)$ entonces existe una sucesión (e_n) en $F^\perp$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e_0$. Por la continuidad del producto interno se tiene que para cada $e\in F$ $\langle e_0,e\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\langle e_n,e\rangle = 0$.

Por tanto $e_0\in F^\perp$ y $F^\perp$ es cerrado.

Ahora probemos que $F\oplus F^\perp$ es un subespacio cerrado de E. Para hacerlo basta ver que, si (e_n+e_n') es una sucesión de Cauchy ($(e_n)\subset F$, $(e_n')\subset F^\perp$) entonces (e_n+e_n') converge en $F\oplus F^\perp$.

Por la ley del paralelogramo se tiene que

$$\|(e_n+e'_n)-(e_m+e'_m)\|^2 = \|e_n-e_m\|^2+\|e'_n-e'_m\|^2 ,$$

lo cual demuestra que $(e_n+e'_n)$ es Cauchy si y solo si (e_n) y (e'_n) son Cauchy. Así, si $(e_n+e'_n)$ converge entonces existen $e\in F$, $e'\in F^\perp$ tal que $e_n\to e$ y $e'_n\to e'$. Por consiguiente $e_n+e'_n \longrightarrow e+e' \in F\oplus F^\perp$. Por tanto $F\oplus F^\perp$ es cerrado en E.

Si $F\oplus F^\perp \neq E$ entonces por 2.1.18 existe $e_0\in E$, $e_0\notin F\oplus F^\perp$, $e_0\neq 0$, tal que $e_0\perp(F\oplus F^\perp)$. Por consiguiente $e_0\in F^\perp$ y $e_0\in F$, así que $\langle e_0,e_0\rangle=\|e_0\|^2=0$, i.e $e_0=0$, una contradicción. Por tanto $E=F\oplus F^\perp$.

2.2. Mapeos Lineales y Multilineales

Esta sección trata varios aspectos de mapeos lineales y multilineales. Comenzamos con el estudio de mapeos lineales y multilineales continuos, proseguimos a estudiar espacios de mapeos lineales y multilineales continuos y algunos teoremas fundamentales de análisis lineal.

2.2.1 Proposición. Suponga que $A: E \to F$ es un mapeo lineal de espacios normados. Entonces A es continuo si y solo si $\exists$ una constante $M>0$ tal que

$$\|Ae\| \leq M\|e\| \quad \forall\ e \in E.$$

Demostración.

$\rightarrow$) Suponga que A es continuo, en particular es continuo en $\bar{0}$. Dado $\varepsilon=1$ $\exists$ $\delta>0$ tal que, si $\|e\|\leq\delta$ entonces $\|Ae\|\leq 1$. Sea $e\in E$ tal que $e\neq\bar{0}$ entonces $\left\|\frac{\delta e}{\|e\|}\right\|\leq\delta$ y por lo tanto

$$\left\|A\left(\frac{\delta e}{\|e\|}\right)\right\|\leq 1.$$

Esto implica que

$$\|A(e)\| \leq \frac{1}{\delta}\|e\|,$$

y podemos tomar $M=1/\delta$.

$\leftarrow$) Suponga que $\exists$ $M>0$ tal que $\|A(e)\|\leq M\|e\|$ $\forall$ $e\in E$. Como $\|A(e)-A(v)\| = \|A(e-v)\| \leq M\|e-v\|$, dado $\varepsilon>0$ tomando $\delta=\varepsilon/M$ se tiene que A es continua en e y esto $\forall$ $e\in E$.

Por la proposición anterior se dice que un mapeo lineal continuo está acotado.

2.2.2. Proposición. Si E tiene dimensión finita y $A: E \to F$ es lineal entonces A es continuo.

Demostración. Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ base de E y $M_1 = \max_{1\le i\le n}\{\|A(e_i)\|\}$. Sea $e\in E$, luego $e = a_1e_1+\cdots+a_ne_n$ $a_i\in\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) $i=1,\dots,n$ y se tiene que

$$\|A(e)\| = \|a_1A(e_1)+\cdots+a_nA(e_n)\| \le |a_1|\|A(e_1)\|+\cdots+|a_n|\|A(e_n)\|$$
$$\le M_1(|a_1|+\cdots+|a_n|).$$

Como E tiene dimensión finita, todas las normas en E son equivalentes. Dado que $|||e||| = |a_1|+\cdots+|a_n|$ define una norma, se tiene que $\exists$ $c>0$ tal que $|||e|||\le c\|e\|$. Tomando $M = M_1c$ se tiene que $\|A(e)\|\le M\|e\|$ $\forall$ $e\in E$, con lo cual A es continuo.

2.2.3. Definición. Sean E, F espacios normados y $A: E\to F$ un mapeo lineal continuo. Definimos el operador norma de A por

$$\|A\| = \sup\left\{ \frac{\|A(e)\|}{\|e\|} \;\middle|\; e\in E \;\; e\ne\bar{0} \right\}.$$

El cual es finito por 2.2.1. Denotemos por $L(E,F)$ el espacio de todos los mapeos lineales continuos de E a F. Si $F=\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) entonces $L(E,\mathbb{C})$ (o $L(E,\mathbb{R})$) se denota por E^* y se llama el espacio dual complejo (o real) de E.

Las siguientes definiciones de $\|A\|$ son equivalentes.

$$\|A\| = \inf\{M>0 \mid \|A(e)\| \le M\|e\| \ \forall e\in E\}$$
$$= \sup\{\|A(e)\| \mid \|e\|\le 1\} = \sup\{\|A(e)\| \mid \|e\|=1\} .$$

Para verlo note que:

(i) $\inf\{M>0 \mid \|A(e)\| \le M\|e\| \ \forall e\in E\} = \inf\{M>0 \mid \frac{\|A(e)\|}{\|e\|} \le M, e\in E\ e\neq\bar{0}\}$

$= \sup\left\{ \frac{\|A(e)\|}{\|e\|} \mid e\in E, e\neq\bar{0}\right\}$ (la última igualdad se tiene

por definición de supremo)

(ii) $\sup\left\{\frac{\|A(e)\|}{\|e\|} \mid e\in E, e\neq\bar{0}\right\} = \sup\left\{\left\|A\left(\frac{e}{\|e\|}\right)\right\| \mid e\in E, e\neq\bar{0}\right\}$

$= \sup\{\|A(e)\| \mid \|e\|=1\}$.

(iii) Veamos que $\alpha = \sup\{\|A(e)\| \mid \|e\|=1\} = \sup\{\|A(e)\| \mid \|e\|\le 1\} = \beta$.

$\alpha \le \beta$ ya que $\{\|A(e)\| \mid \|e\|=1\} \subset \{\|A(e)\| \mid \|e\|\le 1\}$

Sea $e\in E$ tal que $\|e\|\le 1$.

Si $\|e\|=1$ entonces $\|A(e)\|\le\alpha$

Si $\|e\|<1$ y $e\neq\bar{0}$ $\Rightarrow$ $\alpha \ge \left\|A\left(\frac{e}{\|e\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|e\|}\|A(e)\|$ $\Rightarrow$

$\alpha \ge \alpha\|e\| \ge \|A(e)\|$. Así, si $\|e\|\le 1$ se tiene que $\|A(e)\|\le\alpha$

y entonces $\beta\le\alpha$.

Luego $\alpha=\beta$.

Así por las observaciones anteriores, se tiene que las definiciones de $\|A\|$ dadas antes son equivalentes.

De $\|A\| = \inf\{ M>0 \mid \|A(e)\| \le M\|e\| \ \ \forall e \in E \}$ se obtiene en particular que

$$\|A(e)\| \le \|A\| \, \|e\| \quad .$$

Si $A \in L(E,F)$ y $B \in L(F,G)$, donde E, F, G son espacios normados, entonces

$$\|(B\circ A)(e)\| = \|B(A(e))\| \le \|B\| \, \|A(e)\| \le \|B\|\|A\| \, \|e\| \quad ,$$

y así

$$\|B\circ A\| \le \|B\| \, \|A\| \quad .$$

La igualdad no se tiene en general. Para verlo tome $E=F=G=\mathbb{R}^2$ y $A(x,y) = (x,0)$, $B(x,y) = (0,y)$ entonces $(B\circ A)(x,y) = B(x,0) = (0,0)$ con lo que $\|B\circ A\| = 0$, por otra parte $\|A\| = \|B\| = 1$.

2.2.4. Proposición. $L(E,F)$ con el operador norma es un espacio normado. Es un espacio de Banach si F lo es.

Demostración.

Sean $A, B \in L(E,F)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ o $(\mathbb{C})$, es claro que $A+B$ y $\lambda \cdot A$ son mapeos lineales, donde $(A+B)(e) = A(e) + B(e)$ y $(\lambda\cdot A)(e) = \lambda A(e)$. También es claro que $A+B$ y $\lambda \cdot A \in L(E,F)$ ya que como $A, B \in L(E,F)$ entonces $\exists$ $M_1 > 0$ y $M_2 > 0$ tal que $\|A(e)\| \le M_1\|e\|$, $\|B(e)\| \le M_2\|e\|$ $\forall$ $e \in E$, luego $\|(A+B)(e)\| \le \|A(e)\| + \|B(e)\| \le M_1\|e\| + M_2\|e\| = (M_1+M_2)\|e\|$ $\forall$ $e \in E$

con lo que $A+B \in L(E,F)$. De manera similar se tiene que $\lambda \cdot A \in L(E,F)$. Luego $L(E,F)$ es un espacio vectorial. Ahora veamos que el operador norma define una norma en $L(E,F)$. Para ello consideremos la definición
$\|A\| = \sup\{\|A(e)\| \setminus \|e\|=1\}$.
Es claro de la definición, que $\|A\| \geq 0$ y $\|0\|=0$.
Ahora si $\|A\|=0$, entonces $\forall\, e \in E$ $\|A(e)\| \leq \|A\|\,\|e\| = 0$
con lo que $A(e)=0$ $\forall e \in E$, luego $A=0$. Con lo cual
$\|A\| \geq 0$, $\|A\|=0 \leftrightarrow A=0$ $\forall\, A \in L(E,F)$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$), entonces
$\|\alpha A\| = \sup\{\|\lambda A(e)\| \setminus \|e\|=1\} = \sup\{|\lambda|\,\|A(e)\| \setminus \|e\|=1\} =$
$|\lambda| \sup\{\|A(e)\| \setminus \|e\|=1\} = |\lambda|\,\|A\|$.

Sean $A, B \in L(E,F)$, entonces
$\|A+B\| = \sup\{\|(A+B)(e)\| \setminus \|e\|=1\} \leq \sup\{\|A(e)\| + \|B(e)\| \setminus \|e\|=1\} \leq$
$\sup\{\|A(e)\| \setminus \|e\|=1\} + \sup\{\|B(e)\| \setminus \|e\|=1\} = \|A\| + \|B\|$.

Por lo tanto el operador norma define una norma en $L(E,F)$.

Solo resta probar que si F es un espacio de Banach entonces $L(E,F)$ es un espacio de Banach.
Sea $\{A_n\} \subset L(E,F)$ una sucesión de Cauchy. Como
$\|A_n(e) - A_m(e)\| \leq \|A_n - A_m\|\,\|e\|$ para cada $e \in E$ y $\{A_n\}$ es de Cauchy, se tiene que $\{A_n(e)\} \subset F$ es de Cauchy

y por lo tanto converge. Sea $A(e) = \lim_{n\to\infty} A_n(e)$, esto define un mapeo lineal $A: E \to F$, ya que si $e, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) $A(\lambda e + v) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda e + v) = \lim_{n\to\infty} (\lambda A_n(e) + A_n(v))$ $= \lim_{n\to\infty}(\lambda A_n(e)) + \lim_{n\to\infty} A_n(v) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n(e) + \lim_{n\to\infty} A_n(v) = \lambda A(e) + A(v)$.

Veamos que A es continuo y que $\|A_n - A\| \to 0$.
Como $|\,\|A_n\| - \|A_m\|\,| \leq \|A_n - A_m\|$, la sucesión $\{\|A_n\|\}$ es de Cauchy y por lo tanto acotada, digamos por $K>0$. Luego, para cada $e \in E$ se tiene

$$\|A_n(e)\| \leq \|A_n\|\,\|e\| \leq K\|e\|$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(e)\| = \|A(e)\| \leq K\|e\|$$

o sea $A \in L(E,F)$.
Resta ver que $\|A_n - A\| \to 0$. Dado $\epsilon > 0$, existe un natural $K(\epsilon)$ tal que $\forall\ m,n \geq K(\epsilon)$ se tiene $\|A_n - A_m\| < \epsilon$. Si $\|e\| = 1$, esto implica que $\|A_n(e) - A_m(e)\| < \epsilon$, tomando $m \to \infty$, se tiene por la continuidad de la norma que $\|A_n(e) - A(e)\| < \epsilon$, $\forall\ e \in E$ tal que $\|e\| = 1$. Luego por definición de operador norma, se tiene que $\forall\ n \geq K(\epsilon)$ $\|A_n - A\| < \epsilon$, con lo que $\|A_n - A\| \to 0$.

Si una sucesión $\{A_n\}$ converge a A en $L(E,F)$, i.e., si $A_n \to A$ en la norma topológica, decimos que $A_n \to A$ en norma. Esta frase es necesaria puesto que son posibles otras topologías en $L(E,F)$. Por ejemplo, decimos que $A_n \to A$ fuertemente si $A_n(e) \to A(e)$ para cada $e \in E$. Dado que $\|A_n(e) - A(e)\| \le \|A_n - A\| \|e\|$ convergencia en norma implica convergencia fuerte. La recíproca es falsa como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea

$$E = l^2(\mathbb{R}) = \{ \{a_n\} \setminus \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \}$$

con el producto interno

$$\langle \{a_n\}, \{b_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \ .$$

Que E es un espacio vectorial se obtiene utilizando la desigualdad de Hölder

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \right)^{1/2} .$$

Es claro también que el mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ es un producto interno real en E.

Sea

$$e_n = (0, \ldots, 0, \overset{n}{1}, 0, \ldots) \in E \ , \quad F = \mathbb{R} \ , \quad A_n = \langle e_n, \cdot \rangle \in L(E,F) \ .$$

Que $A_n \in L(E,F)$ se debe a que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal y por el hecho que $|A_n(\{b_n\})| = |\langle e_n, \{b_n\} \rangle| = |b_n| \le 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 1 \, \|\{b_n\}\|$.
La sucesión $\{A_n\}$ en $L(E,F)$ no es de Cauchy con el operador norma, puesto que para $e = e_n$, $\|e_n\| = 1$ y se tiene $|(A_n - A_m)e| = |A_n(e) - A_m(e)| = |\langle e_n, e \rangle - \langle e_m, e \rangle| = 1 \quad (n \ne m)$

Con lo que por definición de operador norma $\|A_n - A_m\| \geq 1$, luego $\{A_n\}$ no es de Cauchy (tome $\varepsilon = 1/2$).
Por tanto $\{A_n\}$ no converge en norma (note que $L(E,F)$ es completo, ya que $F=\mathbb{R}$ lo es).

Sin embargo $\{A_n\}$ converge fuertemente en $L(E,F)$, ya que si $e=\{a_m\} \in E$, $A_n(e) = \langle e_n, e\rangle = a_n \to 0$ (debido a que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge).

Si ambos E y F tienen dimensión finita, convergencia fuerte implica convergencia en norma.

Prueba. Sea $\{e_1,\dots,e_k\}$ base de E y note que convergencia fuerte es equivalente a que $A_n(e_i) \to A(e_i)$ cuando $n\to\infty$ para $i=1,\dots,k$

Es claro que convergencia fuerte implica que $A_n(e_i)\to A(e_i)$ cuando $n\to\infty$ para $i=1,\dots,k$.
Suponga que $A_n(e_i) \to A(e_i)$ cuando $n\to\infty$ para $i=1,\dots,k$.
Sea $e = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k$, dado $\varepsilon>0$ $\exists$ $N_i(\varepsilon)$ con $\|A_n(e_i) - A(e_i)\| < \varepsilon$ $\forall\, n \geq N_i(\varepsilon)$. Sea $N = \max\limits_{1\leq i\leq k}\{N_i(\varepsilon)\}$ entonces
$\|A_n(e) - A(e)\| = \|A_n(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i) - A(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|A_n(e_i) - A(e_i)\| < k\varepsilon$.
$\forall$ $n \geq N$.

Por tanto $|||A||| = \max\{\|A(e_i)\|, i=1,\dots,k\}$ es una norma en $L(E,F)$ la cual produce convergencia fuerte, dado que si $A_n \to A$ con esta norma, entonces como $\|A_n(e_i) - A(e_i)\| \leq |||A_n - A|||$ se tiene que $A_n(e_i) \to A(e_i)$. Luego como $L(E,F)$ tiene dimensión finita y todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes se tiene que convergencia fuerte implica convergencia en norma.

2.2.5. Teorema de Representacion de Riesz. Sea E un espacio de Hilbert real (resp. complejo). El mapeo de $E \to E^*$ dado por $e \to \langle \cdot, e \rangle$ es un isomorfismo lineal (resp. antilineal) que preserva norma. (Un mapeo $A: E \to F$ entre espacios vectoriales complejos es antilineal si se tiene $A(e+e') = A(e) + A(e')$ y $A(\alpha e) = \bar{\alpha} A(e)$).

Demostración.

Sea $f_e: E \to \mathbb{R}$ tal que $f_e(v) = \langle v, e \rangle$. Claramente f_e es lineal y continuo, ya que $|f_e(v)| = |\langle v, e \rangle| \leq \|v\| \, \|e\|$. Con lo que el mapeo $e \to \langle \cdot, e \rangle$ esta bien definido.

Veamos que este mapeo preserva norma, i.e, que $\|f_e\| = \|e\|$.

$\|f_e\| = \sup\{|f_e(v)| \mid \|v\| = 1\} = \sup\{|\langle v, e \rangle| \mid \|v\| = 1\}$

Como $|\langle v, e \rangle| \leq \|v\| \, \|e\|$ entonces $\|f_e\| \leq \|v\|$, y por otra parte $\|f_e\| \geq \left\| \langle \frac{e}{\|e\|}, e \rangle \right\| = \frac{\|e\|^2}{\|e\|} = \|e\|$.

Luego $\|f_e\| = \|e\|$.

Resta ver que el mapeo $A: E \to E^*$ tal que $A(e) = f_e$ es un isomorfismo lineal (resp. antilineal).

$A(\lambda e + v)(\omega) = f_{\lambda e + v}(\omega) = \langle \omega, \lambda e + v \rangle = \langle \omega, \lambda e \rangle + \langle \omega, v \rangle =$

$\bar{\lambda} \langle \omega, e \rangle + \langle \omega, v \rangle = \bar{\lambda} f_e(\omega) + f_v(\omega)$, con lo cual A es lineal (resp. antilineal).

A es inyectivo, ya que si $A(e) = 0$ entonces $f_e = 0$, y como $\|f_e\| = \|e\|$, se tiene que $\|e\| = 0 \iff e = 0$.

Veamos que A es supráyectivo.

Sea $f \in E^*$ P.D que $\exists$ $e \in E$ tal que $A(e) = f$

$\ker(f) = \{e \in E \mid f(e) = 0\}$ es un subespacio cerrado de E, ya que como f es continua $f^{-1}(0) = \ker(f)$ es cerrado en E.

Si $\ker(f) = E$ entonces $f = 0$ y $A(\bar{0}) = f$.

Si $\ker(f) \neq E$ entonces por 2.1.17 existe $e \neq \bar{0}$ en E tal que $e \perp \ker(f)$. Afirmamos que $A\left(\frac{f(e)}{\|e\|^2} e\right) = f$. En efecto, cualquier $v \in E$ se puede escribir como

$$v = v - \frac{f(v)}{f(e)} e + \frac{f(v)}{f(e)} e \qquad \text{donde} \quad v - \frac{f(v)}{f(e)} e \in \ker(f).$$

Así $A\left(\frac{f(e)}{\|e\|^2} e\right) v = \left\langle v - \frac{f(v)}{f(e)} e + \frac{f(v)}{f(e)} e , \frac{f(e)}{\|e\|^2} e \right\rangle =$

$\left\langle v - \frac{f(v)}{f(e)} e , \frac{f(e)}{\|e\|^2} e \right\rangle + \left\langle \frac{f(v)}{f(e)} e , \frac{f(e)}{\|e\|^2} e \right\rangle$, donde el primer término de esta suma es 0, ya que $e \perp \ker(f)$.

Así $A\left(\frac{f(e)}{\|e\|^2} e\right) v = f(v) \quad \forall\, v \in E$.

Por tanto $A\left(\frac{f(e)}{\|e\|^2} e\right) = f$.

Así, en un espacio de Hilbert real E toda función lineal continua $\lambda : E \to \mathbb{R}$ se puede escribir como

$$\lambda(e) = \langle e, e_0 \rangle$$

para algún $e_0 \in E$ y $\|\lambda\| = \|e_0\|$.

En seguida trataremos integración de funciones con valores en un espacio vectorial. Para ello requerimos el siguiente.

2.2.6. Teorema de Extensión Lineal. Sean E, F y G espacios vectoriales normados donde

(i) $F \subset E$;

(ii) G es un espacio de Banach, y

(iii) $T \in L(F, G)$.

Entonces $cl(F)$ es un subespacio vectorial normado de E y T se puede extender de manera única a un mapeo $\mathcal{T} \in L(cl(F), G)$. Ademas se tiene que $\|T\| = \|\mathcal{T}\|$.

Demostración.

Sean $e, v \in cl(F)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces existen sucesiones $\{e_n\}$ y $\{v_n\}$ en F tal que $\lambda e_n \to \lambda e$ y $v_n \to v$, lo cual implica que $(\lambda e_n + v_n) \to \lambda e + v$. Como F es subespacio vectorial se tiene que $\{\lambda e_n + v_n\}$ es una sucesion en F, entonces $\lambda e + v \in cl(F)$. Luego $cl(F)$ es un subespacio vectorial de E y claramente la norma de E restringida a $cl(F)$ define una norma en $cl(F)$. Probemos la existencia de $\mathcal{T}$. Si $e \in cl(F)$, podemos escribir $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$, donde $\{e_n\}$ es sucesión en F, así que

$$\|T(e_n) - T(e_m)\| \leq \|T\| \, \|e_n - e_m\|$$

y como $\{e_n\}$ es de Cauchy, se tiene que $\{T(e_n)\}$ es de Cauchy en el espacio de Banach G. Sea $\mathcal{T}(e) = \lim\limits_{n\to\infty} T(e_n)$.

Este límite es independiente de la sucesión $\{e_n\}$, pues si $e = \lim_{n\to\infty} e_n'$ entonces

$$\|T(e_n) - T(e_n')\| \le \|T\| \left(\|e_n - e\| + \|e_n' - e\| \right).$$

Por continuidad de la norma se tiene que $\lim_{n\to\infty} T(e_n) = \lim_{n\to\infty} T(e_n')$.

$\mathcal{T}$ es lineal, ya que

$$\mathcal{T}(\alpha e + v) := \lim_{n\to\infty} T(\alpha e_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha T(e_n) + T(v_n)) = \alpha \lim_{n\to\infty} T(e_n) + \lim_{n\to\infty} T(v_n) =$$

$\alpha \mathcal{T}(e) + \mathcal{T}(v)$. Como $\mathcal{T}(e) = T(e)$ $\forall\, e \in F$, ya que $e = \lim_{n\to\infty} e$, $\mathcal{T}$ es una extensión de T. Finalmente

$$\|\mathcal{T}(e)\| = \left\| \lim_{n\to\infty} T(e_n) \right\| = \lim_{n\to\infty} \|T(e_n)\| \le \|T\| \lim_{n\to\infty} \|e_n\| = \|T\| \, \|e\|$$

prueba que $\mathcal{T}$ es continua, así $\mathcal{T} \in L(cl(F), G)$ y $\|\mathcal{T}\| \le \|T\|$. La desigualdad $\|T\| \le \|\mathcal{T}\|$ es clara ya que $\mathcal{T}$ extiende a T. Si $\mathcal{T}'$ es otra extensión de T entonces

$$\|\mathcal{T}(e) - \mathcal{T}'(e)\| = \left\| \lim_{n\to\infty} (T(e_n) - T(e_n')) \right\| = \lim_{n\to\infty} \|T(e_n - e_n')\| \le \lim_{n\to\infty} \|T\| \, \|e_n - e_n'\|$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \|T\| \left(\|e_n - e\| + \|e_n' - e\| \right) = 0 .$$

Así $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}'(e)$ $\forall\, e \in cl(F)$.

Por tanto $\mathcal{T}$ es única.

Como una aplicación de este Teorema definimos un espacio de Banach que se usará después. Fije el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y el espacio de Banach E.

Una partición del intervalo $[a,b]$ es una sucesión finita $P=\{a_0,a_1,\dots,a_n\}$ tal que $a=a_0\le a_1\le a_2\le\dots\le a_n=b$. Sea $f:[a,b]\to E$ una función. Diremos que f es una función escalonada respecto a la partición P si existen elementos $w_1,\dots,w_n\in E$ tales que

$$f(t)=w_i \quad \text{si } a_{i-1}\le t<a_i \;,\quad i=1,\dots,n.$$

Decimos que f es una función escalonada en $[a,b]$, si es una función escalonada respecto a alguna partición.

Se dice que una partición R es un refinamiento de P, si todo punto de la partición P es tambien punto de la partición R (i.e $P\subset R$). El refinamiento R de una partición P se puede obtener agregando un numero finito de puntos a P.

Observación. Si $f:[a,b]\to E$ es una función escalonada respecto a la partición P de $[a,b]$ entonces f es escalonada respecto a cualquier refinamiento R de P.

Para probarlo, se considera primero el refinamiento P_c obtenido de P al insertar un punto adicional c entre los puntos de P:

$$P_c=\{a_0,\dots,a_{i-1},c,a_i,\dots,a_n\} \quad \text{con } a_{i-1}\le c\le a_i.$$

Así, si $f(t)=w_i$, $a_{i-1}\le t<a_i$ entonces f tiene el mismo valor constante en cada uno de los intervalos $a_{i-1}\le t<c$ y $c\le t<a_i$, con lo que f es escalonada respecto a P_c.

Ahora bien, si R es un refinamiento cualquiera de P, entonces R se puede obtener a partir de P agregándole, uno a la vez, un numero finito de puntos. De donde, al repetir el argumento anterior, se infiere que f es escalonada respecto a R.

Si $f, g : [a,b] \to E$ son funciones escalonadas respecto a las particiones P y Q respectivamente, entonces $f+g$ y αf, $\alpha \in \mathbb{C}$, son funciones escalonadas.

Para probarlo, considere $R = P \cup Q$ el cual es un refinamiento de P y Q. Suponga que $R = \{c_0, \ldots, c_n\}$, $f(t) = w_i$ y $g(t) = v_i$ en $c_{i-1} \le t < c_i$ $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$(f+g)(t) = w_i + v_i$ y $(\alpha f)(t) = \alpha w_i$ en $c_{i-1} \le t < c_i$ $i = 1, \ldots, n$. Por tanto $f+g$ y αf son funciones escalonadas.

Así el conjunto $S([a,b], E)$ de funciones escalonadas es un subespacio vectorial $B([a,b], E)$, el espacio de Banach de todas las funciones acotadas. La integral de una función escalonada f se define por

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\, f(t_i) \quad .$$

Con un argumento similar al que se dió para demostrar que una función escalonada respecto a una partición P, también es escalonada respecto a cualquier refinamiento $\tilde{P}$ de P, se tiene que la definición de integral de f es independiente de la partición. Tambien note que

$$\left\| \int_a^b f \right\| \le \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}-t_i)\|w_i\| \le \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}-t_i)\|f\|_\infty \le (b-a)\|f\|_\infty$$

donde $\|f\|_\infty = \sup_{a\le t\le b} \|f(t)\|$.

Así, de la definición de integral y de la desigualdad anterior, se tiene que el mapeo

$$\int_a^b : S([a,b], E) \longrightarrow E$$

es lineal y continuo. Por el teorema de extención lineal, este mapeo se extiende a un mapeo lineal continuo

$$\int_a^b \in L(\,cl(S([a,b],E)),\, E\,) .$$

2.2.7. Definición. El mapeo lineal $\int_a^b$ se llama la integral de Cauchy-Bochner.

Observaciones.

(i) Para $f \in cl(S([a,b],E))$

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \qquad \text{con } f_n \in S([a,b),E),$$

ya que $f \in cl(S([a,b],E))$ y el valor de $\int_a^b$ en f se define, como en 2.2.6., precisamente como el límite anterior.

(ii) Por la continuidad de $\|\cdot\|$ y por (i) se tiene que

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq (b-a)\|f\|_\infty .$$

(iii) Las propiedades usuales de la integral tales como

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad y \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

se verifican dado que ellas se cumplen para funciones escalonadas.

El espacio $cl(S([a,b],E))$ contiene funciones lo suficientemente interesantes para nuestros propósitos, es decir

$$C^0([a,b],E) \subset cl(S([a,b],E)) \subset B([a,b],E) .$$

La primera inclusión se prueba de la siguiente manera. Dado que $[a,b]$ es compacto, cada $f \in C^0([a,b],E)$ es uniformemente continua. Para $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por la continuidad uniforme de f para $\epsilon/2$.

Entonces tome una partición $a=t_0<\dots<t_n=b$ tal que $|t_{i+1}-t_i|<\delta$ y defina un función escalonada g por $g|[t_i,t_{i+1}) = f(t_i)$. Entonces el ε-disco

$$D_\varepsilon(f)=\{h\in B([a,b],E) \mid \|h(t)-f(t)\|_\infty<\varepsilon\}$$

contiene a g, ya que para $t\in[t_i,t_{i+1})$

$\|g(t)-f(t)\|_\infty = \|g(t)-f(t_{i+1})+f(t_{i+1})-f(t)\|_\infty \le \|f(t_i)-f(t_{i+1})\|_\infty +$

$\|f(t_{i+1})-f(t)\|_\infty \le \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

Así $D_\varepsilon(f)\cap cl(S([a,b],E))\neq\phi$, con lo que $f\in cl(S([a,b],E))$.

Finalmente, note que si E y F son espacios de Banach, $A\in L(E,F)$ y $f\in cl(S([a,b],E))$, tenemos que $A\circ f\in cl(S([a,b],F))$ puesto que

$$\|A\circ f_k - A\circ f\| \le \|A\|\,\|f_k-f\|_\infty$$

donde $f_k\in S([a,b],E)$ y $f=\lim_{k\to\infty} f_k$.

Además,

$$\int_a^b A\circ f = A\left(\int_a^b f\right)$$

ya que

$$\int_a^b A\circ f = \lim_{k\to\infty}\int_a^b A\circ f_k = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,A\circ f_k(t_i)\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty} A\left(\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,f_k(t_i)\right) = A\left(\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,f_k(t_i)\right)\right) =$$

$$A\left(\int_a^b f\right)$$

2.2.8. Proposición Sean E y F espacios de Banach, se tiene lo siguiente:

(i) Si $f \in cl(S([a,b], L(E;F)))$ y $e \in E$ entonces

$$\int_a^b f(t)\,e\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)(e)$$

Demostración. Defina $\varphi : L(E,F) \to F$ por $\varphi(A) = A(e)$, e fijo, φ claramente es lineal, y continua ya que

$\|\varphi(A)\| = \|A(e)\| \leq \|A\|\,\|e\|$

Sea $f \in cl(S([a,b], L(E,F)))$ entonces $\varphi \circ f \in cl(S([a,b], F))$

y
$$\int_a^b (\varphi \circ f)(t)\,dt = \varphi\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$$

Por otra parte

$$\int_a^b (\varphi \circ f)(t)\,dt = \int_a^b \varphi(f(t))\,dt = \int_a^b f(t)(e)\,dt \qquad \text{y}$$

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)(e)$$

(ii) Si $f \in cl(S([a,b], \mathbb{R}))$ y $v \in F$, entonces

$$\int_a^b f(t)\,v\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)(v).$$

Demostración Defina $\phi : \mathbb{R} \to L(F,F)$ tal que

$$\phi(t)(u) = tu \qquad \forall\ u \in F .$$

ϕ esta bien definida, ya que claramente $\phi(t)$ es lineal y continua. Así $\phi(t) \in L(F,F)$.

Por otra parte ϕ es linea y continua, en efecto
$\phi(t+\lambda s)u = (t+\lambda s)u = tu + \lambda su = tu + \lambda(su) = (\phi(t) + \lambda\phi(s))u$,
además $\|\phi\| = 1$, pues para $t \in \mathbb{R}$ y $u \in F$, con $|t| = 1$ y $\|u\| = 1$ se tiene $\|\phi(t)v\| = |t|\,\|u\| = 1$.
Así $\phi \in L(\mathbb{R}, L(F,F))$.

Note que, si $f \in cl(S([a,b],\mathbb{R}))$ entonces $\phi o f \in cl(S([a,b], L(F,F)))$.

Sea $v \in F$ entonces por (i) se tiene que

$$\int_a^b (\phi o f)(t)\, v\, dt = \left(\int_a^b \phi o f(t)\, dt\right)(v)$$

Por otra parte

$$\int_a^b (\phi o f)(t)\, v\, dt = \int_a^b \phi(f(t))\, v\, dt = \int_a^b f(t)\, v\, dt \qquad y$$

$$\left(\int_a^b \phi o f(t)\, dt\right)(v) = \phi\left(\int_a^b f(t)\, dt\right)(v) = \left(\int_a^b f(t)\, dt\right)(v) .$$

Ya que ϕ es lineal

2.2.7. Proposición. Sea X un espacio topológico, E un espacio de Banach y $f: [a,b]\times X \to E$ continuo. Entonces el mapeo $g: X \to E$ definido por

$$g(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$$

es continuo.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$.

Como f es continua en (t,x) para cada $t \in [a,b]$, existe una vecindad abierta $U_{(t,x)} \subset X$ de x y $\delta(t,x) > 0$ tal que si $y \in U_{(t,x)}$ y $|s-t| < \delta(t,x)$ entonces $\| f(s,y) - f(t,x) \| < \varepsilon$.

En particular con $t=s$ se tiene que

$(*)$ $\| f(s,y) - f(s,x) \| < \varepsilon$ siempre que $y \in U_{(t,x)}$ y $|s-t| < \delta(x,t)$.

Asociemos a cada $t \in [a,b]$ fija el intervalo abierto $V_{\delta(t,x)} = \{ s \in \mathbb{R} \mid |s-t| < \delta(t,x) \}$. Puesto que $[a,b]$ es compacto, podemos cubrir $[a,b]$ con un número finito de tales intervalos. Sean $\delta(t_i,x)$ con $i=1,\dots,r$ los radios de dichos intervalos.

Tomemos $\delta(x) = \inf\{ \delta(t_i,x),\ i=1,\dots,r \}$, y $U_x = \bigcap_{i=1}^{r} U_{(t_i,x)}$ el cual es una vecindad abierta de x en X.

Se afirma que

si $y \in U_x$ entonces $\| f(s,y) - f(s,x) \| < \varepsilon$, para cualquier $s \in [a,b]$.

En efecto, para cada $s \in [a,b]$ existe un $\delta(t_i,x)$ tal que $|s-t_i| < \delta(t_i,x)$ y como $y \in U_{(x,t_i)}$, de $(*)$ se tiene la afirmación.

Luego, dado $\epsilon > 0$ y $x \in X$ existe $U_x \subset X$ vecindad abierta de x, tal que, si $y \in U_x$ entonces

$$\|g(x)-g(y)\| = \left\| \int_a^b f(t,x)-f(t,y)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t,x)-f(t,y)\|\,dt \leq$$

$$\int_a^b c\,dt = c\,(b-a).$$

Por tanto g es continua en x, y como x fue arbitraria se tiene que g es continua en X.

A continuación veremos mapeos multilineales. Si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ y F son espacios normados, un mapeo

$$A : E_1 \times \cdots \times E_k \longrightarrow F$$

es k-multilineal, si A es lineal en cada argumento separadamente. Linealidad en el i-esimo argumento significa que

$$A(e_1,\ldots, e_i+\lambda w_i, \ldots, e_k) = A(e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_k) + \lambda\, A(e_1,\ldots,w_i,\ldots,e_k).$$

Emplearemos mapeos multilineales en la parte de diferenciabilidad, y necesitaremos algunos hechos acerca de ellos para ese propósito.

2.2.10. Definición. El conjunto de mapeos k-multilineales continuos de $E_1 \times \cdots \times E_k$ a F se denota $L(E_1,\ldots,E_k;F)$. Si $E_i = E$, $1 \le i \le k$, este conjunto se denota $L^k(E,F)$.

El conjunto $L(E_1,\ldots,E_k;F)$ es un espacio vectorial real o complejo, con las siguientes operaciones:

$(A+B)(e_1,\ldots,e_k) = A(e_1,\ldots,e_k) + B(e_1,\ldots,e_k)$ y
$(\lambda A)(e_1,\ldots,e_k) = \lambda A(e_1,\ldots,e_k) \quad \lambda \in \mathbb{R} \ (o\ \lambda \in \mathbb{C})$.

Como en 2.2.1, un mapeo k-multilineal A es continuo si y solo si $\exists\ M>0$ tal que

$$\|A(e_1,\ldots,e_k)\| \le M \|e_1\| \cdots \|e_k\|$$

para toda $e_i \in E_i$, $1 \le i \le k$.

Para probarlo note que

$$A(e_1,\ldots,e_k) - A(\omega_1,\ldots,\omega_k) = \sum_{i=1}^{k} A(\omega_1,\ldots,\omega_{i-1}, e_i - \omega_i, e_{i+1},\ldots,e_k)$$

$\rightarrow$) Suponga que $\|A(e_1,\ldots,e_k)\| \le M \|e_1\| \cdots \|e_k\| \quad \forall\ e_i \in E_i$, $1 \le i \le k$.

$$\|A(e_1,\ldots,e_k) - A(\omega_1,\ldots,\omega_k)\| \le \|A(e_1-\omega_1, e_2,\ldots,e_k) + \ldots\ldots + A(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1}, e_k - \omega_k)\|$$

$\leq \|A(e_1-\omega_1, e_2, \dots, e_k)\| + \|A(\omega_1, e_2-\omega_2, e_3, \dots, e_k)\| + \dots\dots + \|A(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, e_k-\omega_k)\|$

$\leq M\left(\|e_1-\omega_1\| \|e_2\| \cdots \|e_k\| + \|\omega_1\| \|e_2-\omega_2\| \|e_3\| \cdots \|e_k\| + \dots\dots + \|\omega_1\| \cdots \|\omega_{k-1}\| \|e_k-\omega_k\|\right)$

Como $\|(e_1, \dots, e_k) - (\omega_1, \dots, \omega_k)\|_s = \|e_1-\omega_1\| + \dots + \|e_k-\omega_k\|$, tomando $\delta_0 = 1$, se tiene que

$$\|e_i - \omega_i\| \leq 1 \quad i=1,\dots,k, \text{ así } \|e_i\| \leq 1 + \|\omega_i\| .$$

Sea $\lambda = \max\{1 + \|\omega_i\|, i=1,\dots,k\}$, entonces

$$\|A(e_1,\dots,e_k) - A(\omega_1,\dots,\omega_k)\| \leq (\lambda^{k-1} M) \sum_{i=1}^{k} \|e_i - \omega_i\| = \lambda^{k-1} M \|(e_1,\dots,e_k)-(\omega_1,\dots,\omega_k)\|_s .$$

Así, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \min\{1, \epsilon/\lambda^{k-1} M\}$.

Por tanto A es continuo.

$\Leftarrow$) Suponga que A es continuo, en particular es continuo en $\bar{0}$.

Dado $\epsilon = 1$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que, si

$\|(e_1,\dots,e_k)\|_s \leq \delta$ entonces $\|A(e_1,\dots,e_k)\| < 1$.

Consideremos primero el caso en el cual $\|e_i\| = 1$ $i=1,\dots,k$.

Si $\|e_i\| = 1$ $i=1,\dots,k$ $\Rightarrow$ $\left\|\frac{\delta}{k} e_1\right\| + \dots + \left\|\frac{\delta}{k} e_k\right\| \leq \delta \Rightarrow \left\|A\left(\frac{\delta}{k} e_1, \dots, \frac{\delta}{k} e_k\right)\right\| < 1$

$\Rightarrow \|A(e_1,\dots,e_k)\| \leq \left(\frac{k}{\delta}\right)^k$, tomando $M = \left(\frac{k}{\delta}\right)^k$ se obtiene la afirmación

Si $e_i \neq \bar{0}$ $i=1,\dots,k$, tomando $\frac{e_i}{\|e_i\|}$ $i=1,\dots,k$, se obtiene por lo anterior que

$\|A(\frac{e_1}{\|e_1\|},\ldots,\frac{e_k}{\|e_k\|})\| \le M$ entonces $\|A(e_1,\ldots,e_k)\| \le M\|e_1\|\cdots\|e_k\|$.

lo que prueba, también este caso.

Si algun $e_i=\bar{0}$, entonces $A(e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_k)=\bar{0}$ y se tiene

$$\|A(e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_k)\|=0=M\|e_1\|\cdots\|e_i\|\cdots\|e_k\| .$$

Portanto $\exists$ $M>0$ tal que $\|A(e_1,\ldots,e_k)\|\le M\|e_1\|\cdots\|e_k\|$ para toda $e_i\in E_i$ $i=1,\ldots,k$.

Sea $A\in L(E_1,\ldots,E_k;F)$ y defina

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|A(e_1,\ldots,e_k)\|}{\|e_1\|\cdots\|e_k\|} \;\middle|\; e_1,\ldots,e_k\ne 0\right\}$$

Con esta norma $L(E_1,\ldots,E_k;F)$ es un espacio normado que es completo si F lo es (La demostración de esta afirmación es similar a la de 2.2.4 , por lo cual se omite).
De manera similar a 2.2.3 se tiene que

$$\begin{aligned}\|A\| &= \inf\{M>0 \mid \|A(e_1,\ldots,e_k)\|\le M\|e_1\|\cdots\|e_k\|\}\\ &= \sup\{\|A(e_1,\ldots,e_k)\| \mid \|e_1\|\le 1,\ldots,\|e_k\|\le 1\}\\ &= \sup\{\|A(e_1,\ldots,e_k)\| \mid \|e_1\|=\cdots=\|e_k\|=1\}\end{aligned}$$

2.2.11. Proposición. Hay isomorfismos que preservan la norma entre los siguientes espacios

$$L(E_1, L(E_2,\dots,E_k;F)) \cong L(E_1,\dots,E_k;F) \cong L(E_1,\dots,E_{k-1};L(E_k,F))$$
$$\cong L(E_{i_1},\dots,E_{i_k};F)$$

donde $(i_1,\dots,i_k)$ es una permutación de $(1,\dots,k)$.

Demostración. Para $A \in L(E_1,L(E_2,\dots,E_k;F))$ defina $A' \in L(E_1,\dots,E_k;F)$ por $A'(e_1,\dots,e_k) = A(e_1)(e_2,\dots,e_k)$, claramente A' es k-multilineal ya que A es lineal y $A(e_1)$ es $(k-1)$-multilineal. Además A' es continua pues

$$\|A'(e_1,\dots,e_k)\| = \|A(e_1)(e_2,\dots,e_k)\| \le \|A(e_1)\|\,\|e_2\|\cdots\|e_k\| \le \|A\|\,\|e_1\|\cdots\|e_k\| .$$

Así el mapeo $A \longrightarrow A'$ esta bien definido.

Veamos que este mapeo es lineal, sean $A,B \in L(E_1,L(E_2,\dots,E_k;F))$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (ó $\lambda \in \mathbb{C}$). Entonces

$(A+\lambda B)'(e_1,\dots,e_k) = (A+\lambda B)(e_1)(e_2,\dots,e_k) = (A(e_1)+\lambda B(e_1))(e_2,\dots,e_k) =$
$A(e_1)(e_2,\dots,e_k) + \lambda B(e_1)(e_2,\dots,e_k) = A'(e_1,\dots,e_k) + \lambda B'(e_1,\dots,e_k)$.

Así $A+\lambda B \longrightarrow A'+\lambda B'$.

Probemos que el mapeo $A \to A'$ es biyectivo.

Es inyectivo, pues $A' = 0 \Rightarrow A(e_1)(e_2,\dots,e_k) = 0 \quad \forall\, e_i \in E_i$, $i=2,\dots,k$. $\Rightarrow A(e_1) = 0 \quad \forall\, e_1 \in E_1 \Rightarrow A = 0$.

Es supráyectivo, si $A' \in L(E_1,\dots,E_k;F)$ defina $A \in L(E_1,L(E_2,\dots,E_k;F))$ por $A(e_1)(e_2,\dots,e_k) = A'(e_1,\dots,e_k)$, el cual por un argumento

similar al anterior, esta bien definido. Así $A \to A'$, y el mapeo es supráyectivo.
El mapeo $A \to A'$ es continuo, ya que tomando el supremo en la desigualdad

$$\|A'(e_1,\ldots,e_k)\| \leq \|A\| \, \|e_1\| \cdots \|e_k\|$$

donde $\|e_1\| = \cdots = \|e_k\| = 1$, se tiene que $\|A'\| \leq \|A\|$.

Por tanto el mapeo $A \to A'$ es un isomorfismo.
Veamos que este mapeo preserva las normas i.e que $\|A'\| = \|A\|$. Para ello solo resta probar que $\|A\| \leq \|A'\|$.

Por definición

$$\left.\begin{aligned} \|A'\| &= \sup\{\|A'(e_1,\ldots,e_k)\| \mid \|e_1\| = \cdots = \|e_k\| = 1\} \\ &= \sup\{\|A(e_1)(e_2,\ldots,e_k)\| \mid \|e_1\| = \cdots = \|e_k\| = 1\} \end{aligned}\right\} \quad ①$$

$$\left.\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|A(e_1)\| \mid \|e_1\| = 1\} \\ \|A(e_1)\| &= \sup\{\|A(e_1)(e_2,\ldots,e_k)\| \mid \|e_2\| = \cdots \|e_k\| = 1\} \end{aligned}\right\} \quad ②$$

De ① se tiene $\|A'\| \geq \|A(e_1)(e_2,\ldots,e_k)\| \;\; \forall \; \|e_1\| = \cdots = \|e_k\| = 1$
entonces por ② $\|A'\| \geq \|A(e_1)\| \;\; \forall \; \|e_1\| = 1 \implies$
$\|A'\| \geq \|A\|$.
Por tanto el mapeo $A \to A'$ es un isomorfismo que preserva la norma.

Para probar que $L(E_1,\ldots,E_k;F) \overset{\psi}{\cong} L(E_1,\ldots,E_{k-1};L(E_k,F))$ y $L(E_1,\ldots,E_k;F) \overset{\phi}{\cong} L(E_{i_1},\ldots,E_{i_k};F)$ considere los

Los mapeos

$$\varphi(A)(e_1,\ldots,e_{k-1})(e_k) = A(e_1,\ldots,e_{k-1},e_k) \quad \text{y}$$

$$\phi(A)(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) = A(e_{\sigma^{-1}(i_1)},\ldots,e_{\sigma^{-1}(i_k)})$$

donde $\sigma:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,k\}$ es la permutación dada por $\sigma(j)=i_j$ $\quad 1\le i_j\le k$.
La prueba de que estos mapeos son isomorfismos y preservan la norma es similar a la anterior.

En forma similar, podemos identificar $L(\mathbb{R},F)$ (o $L(\mathbb{C},F)$ si F es complejo) con F: a cada $A\in L(\mathbb{R},F)$ le asociamos $A(1)\in F$; de nuevo $\|A\|=\|A(1)\|$. Como un caso especial de 2.2.11. note que $L(E,E^*)\cong L^2(E,\mathbb{R})$ (o $L^2(E,\mathbb{C})$ si E es complejo).

A continuación se dan algunos hechos sobre el grupo de permutaciones en k elementos, dado que se emplearán más adelante. El grupo de permutaciones en k elementos, denotado S_k, consiste de todas las biyecciones $\sigma:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,k\}$ junto con la estructura de un grupo bajo la composición. Recuerde que S_k tiene $k!$ elementos. Una transposición es una permutación que sólo cambia dos elementos de $\{1,\ldots,k\}$ y deja los restantes fijos. Una permutación es par (o impar) si se puede escribir como un producto de un nº par (o impar) de transposiciones. La función $sgn: S_k \to \{-1,1\}$ definida por $sgn(\sigma)=1$, si σ es par, y $sgn(\sigma)=-1$, si σ es impar, define un homomorfismo de grupos, i.e, para $\sigma,\tau \in S_k$, $sgn(\sigma\tau)= sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)$. El grupo S_k actua en el espacio $L^k(E;F)$, i.e, cada $\sigma\in S_k$ define un mapeo $\sigma: L^k(E;F)\to L^k(E;F)$ dado por $(\sigma A)(e_1,\dots,e_k)= A(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)})$, este mapeo está bien definido pues $(\sigma A)(e_1,\dots,e_i+\lambda w_i,\dots,e_k)= A(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(i)}+\lambda w_{\sigma(i)},\dots,e_{\sigma(k)})$ $= A(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(i)},\dots,e_{\sigma(k)})+\lambda A(e_{\sigma(1)},\dots,w_{\sigma(i)},\dots,e_{\sigma(k)}) = (\sigma A)(e_1,\dots,e_i,\dots,e_k)$ $+ \lambda (\sigma A)(e_1,\dots,w_i,\dots,e_k)$, así $\sigma(A)\in L^k(E;F)$. Note que $(\tau\sigma)A=\tau(\sigma A)$ $\forall\, \tau,\sigma\in S_k$. Diremos que $A\in L^k(E;F)$ es simetrico (antisimetrico) si para cualquier permutación $\sigma\in S_k$, $\sigma A= A$ (resp. $\sigma A= sgn(\sigma) A$).

Sean $L^k_s(E;F)=\{A\in L^k(E;F) \mid A$ es simétrica $\}$ y $L^k_a(E;F)=\{A\in L^k(E;F)\mid A$ es antisimétrica$\}$, los cuales son subespacios de $L^k(E,F)$. En efecto, sean $A,B\in L^k_s(E,F)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (o $\lambda\in\mathbb{C}$) y $\sigma\in S_k$, entonces

$$\sigma(A+\lambda B)(e_1,e_2,\dots,e_k) = (A+\lambda B)(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)}) = A(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)}) + \lambda B(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)}) = A(e_1,\dots,e_k)+\lambda B(e_1,\dots,e_k) = (A+\lambda B)(e_1,\dots,e_k)$$

así $(A+\lambda B)\in L^k_s(E;F)$. De manera similar se prueba que, si $A,B\in L^k_a(E;F)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (o $\lambda\in\mathbb{C}$) y $\sigma\in S_k$ entonces $(A+\lambda B)\in L^k_a(E;F)$.

Note que $L_s^k(E;F)$ y $L_a^k(E;F)$ son cerrados en $L^k(E;F)$:
Sea $A \in cl(L_s^k(E;F))$ entonces existe una sucesión $\{A_n\}$ en $L_s^k(E;F)$ tal que $A_n \to A$. Sea $\sigma \in S_k$ entonces $(\sigma A)(e_1,\ldots,e_k) = A(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(k)}) = \lim_{n\to\infty} A_n(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(k)}) = \lim_{n\to\infty} A_n(e_1,\ldots,e_k) = A(e_1,\ldots,e_k)$.
Así $\sigma A = A$ y $A \in L_s^k(E;F)$, con lo cual $L_s^k(E;F)$ es cerrado. De manera similar se tiene que $L_a^k(E;F)$ es cerrado.
Si F de Banach entonces $L_s^k(E;F)$ y $L_a^k(E;F)$ lo son, ya que son cerrados en $L^k(E;F)$ el cual de Banach.

2.2.12. Definición. Sean E y F espacios vectoriales normados. Denote $S^0(E,F) = F$ y $S^k(E,F) = \{P : E \to F \mid P(e) = A(e,\ldots,e)$ para algún $A \in L^k(E;F)\}$. $S^k(E,F)$ se llama el espacio de polinomios homogéneos de grado k de E a F.

2.2.13. Proposición. (i) $S^k(E,F)$ es un espacio vectorial normado con respecto a la siguiente norma:

$$\|f\| = \inf\{M>0 \mid \|f(e)\| \le M\|e\|^k\} = \sup\{\|f(e)\| \mid \|e\| \le 1\}$$
$$= \sup\{\|f(e)\| \mid \|e\| = 1\}$$

Demostración. Sean $f, P \in S^k(E,F)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\lambda \in \mathbb{C}$). Suponga que $A, B \in L^k(E;F)$ definen a f y P. Entonces defina

$$(f+P)(e) = (A+B)(e,\ldots,e) \quad \text{y}$$
$$(\lambda P)(e) = (\lambda B)(e,\ldots,e)$$

Como $A+B, \lambda B \in L^k(E;F)$, se tiene que $f+P, \lambda P \in S^k(E,F)$. Así con estas operaciones $S^k(E,F)$ es un espacio vectorial.

La demostración de que $\|f\| = \sup\{\|f(e)\| \mid \|e\|=1\}$ es una norma en $S^k(E,F)$ es similar a la dada en 2.2.4. por lo cual se omite su prueba.

(ii) Si $f \in S^k(E,F)$ y $g \in S^n(E,F)$, entonces $g\circ f \in S^{kn}(E,F)$ y $\|g\circ f\| \leq \|g\|\,\|f\|^n$.

Demostración. Sean $f \in S^k(E,F)$ y $g \in S^n(F,G)$. Suponga que $A \in L^k(E,F)$ y $B \in L^n(F,G)$ definen a f y g. Entonces

$$g\circ f(e) = g(A(e,\dots,e)) = B(A(e,\dots,e),\dots\dots,A(e,\dots,e)).$$

Demos un elemento $C \in L^{kn}(E,G)$ tal que $g\circ f(e) = C(e,\dots,e)$.

Defina C como

$$C(e_{11},\dots,e_{1k},\dots\dots,e_{n1},\dots,e_{nk}) = B(A(e_{11},\dots,e_{1k}),\dots\dots,A(e_{n1},\dots,e_{nk})),$$

es claro que $g\circ f(e) = C(e,\dots,e)$, así $g\circ f \in S^{kn}(E,G)$.

Ahora, probemos que $\|g\circ f\| \leq \|g\|\,\|f\|^n$

$$\|g\circ f(e)\| = \|g(f(e))\| \leq \|g\|\,\|f(e)\|^n \leq \|g\|\,(\|f\|\,\|e\|^k)^n = \|g\|\,\|f\|^n\,\|e\|^{kn}.$$

Tomando el supremo, sobre todos los $e \in E$ tal que $\|e\|=1$, en la desigualdad anterior, obtenemos que

$$\|g\circ f\| \leq \|g\|\,\|f\|^n.$$

(iii) (Polarización). El mapeo $\theta : L^k(E;F) \to S^k(E,F)$ definido por $\theta(A)(e) = A(e,\dots,e)$ es lineal y restringido a $L^k_s(E;F)$ tiene un inverso $\theta^{-1} : S^k(E,F) \to L^k_s(E;F)$ dado por

$$\Theta^{-1}(f)(e_1,\dots,e_k) = \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0} f(t_1e_1+\cdots+t_ke_k)$$

donde $t=(t_1,\dots,t_k)$ (Note que $f(t_1e_1+\cdots+t_ke_k)$ es un polinomio en $t_1,\dots,t_k$, así la derivada del lado derecho tiene sentido)

Demostración. Θ es lineal. Sean $A,B\in L^k(E;F)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ (o $\lambda\in\mathbb{C}$) entonces

$\Theta(A+\lambda B)(e) = (A+\lambda B)(e,\dots,e) = A(e,\dots,e)+\lambda B(e,\dots,e) = \Theta(A)(e)+\lambda\,\Theta(B)(e)$
$= (\Theta(A)+\lambda\,\Theta(B))(e)$

Así, $\Theta(A+\lambda B) = \Theta(A)+\lambda\,\Theta(B)$.

Ahora veamos que Θ^{-1} es la inversa de $\Theta\,|\,L^k_s(E;F)$.

Para $A\in L^k_s(E;F)$ se tiene, debido a que A es k-multilineal y simétrica, que

$$\Theta(A)(t_1e_1+\cdots+t_ke_k) = \sum_{a_1+\cdots+a_i=k} \frac{k!}{a_1!\cdots a_i!}\, t_1^{a_1}\cdots t_i^{a_i}\, A(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{a_1},\dots\dots,\underbrace{e_i,\dots,e_i}_{a_i})$$

donde cada e_j aparece a_j-veces.

Note que

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0} t_1^{a_1}\cdots t_i^{a_i} = \begin{cases} a_1!\cdots a_k!\,, & \text{si } k=i \\ 0\,, & \text{si } k\neq i\end{cases}$$

Luego

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0} \frac{1}{a_1!\cdots a_i!}\, t_1^{a_1}\cdots t_i^{a_i}\, A(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{a_1},\dots\dots,\underbrace{e_i,\dots,e_i}_{a_i}) = \begin{cases} A(e_1,\dots,e_k)\,, & k=i \\ 0\,, & k\neq i\end{cases}$$

$(a_1+\cdots+a_i=k)$, y

$$\theta^{-1}(\theta(A))(e_1,\dots,e_k) = \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\,\theta(A)(t_1e_1+\cdots+t_ke_k) =$$

$$\frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0}\Big(\sum_{a_1+\cdots+a_i=k}\frac{k!}{a_1!\cdots a_i!}\,t_1^{a_1}\cdots t_i^{a_i}\,A(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{a_1},\dots\dots,\underbrace{e_i,\dots,e_i}_{a_i})\Big) =$$

$$\sum_{a_1+\cdots+a_i=k}\Big(\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0}\,\frac{1}{a_1!\cdots a_i!}\,t_1^{a_1}\cdots t_i^{a_i}\,A(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{a_1},\dots\dots,\underbrace{e_i,\dots,e_i}_{a_i})\Big) =$$

$A(e_1,\dots,e_k)$. Así, $\theta^{-1}(\theta(A)) = A$.

Veamos, ahora que $\theta(\theta^{-1}(f)) = f$, $f \in \mathcal{S}^k(E,F)$.

Sea $A \in \mathbb{L}^k(E,F)$ tal que $f(e) = A(e,\dots,e)$.

$$\theta(\theta^{-1}(f))(e) = \theta^{-1}(f)(e,\dots,e) = \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0} f((t_1+\cdots+t_k)e) =$$

$$\frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0} f(ce) = \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0} A(ce,\dots,ce) =$$

$$\frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Big|_{t=0} c^k A(e,\dots,e) = \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k} = (t_1+\cdots+t_k)^k\, f(e) = f(e)$$

$(c = \sum_{i=1}^{k} t_i)$. Así, $\theta(\theta^{-1}(f)) = f$.

(iv) Para $A \in \mathbb{L}^k(E;F)$, $\|\theta(A)\| \le \|A\| \le \frac{k^k}{k!}\|\theta(A)\|$, lo cual implica que θ y θ^{-1} son continuos.

Demostración. La 1ª parte de la desigualdad es clara, ya que

$$\|\theta(A)(e)\| = \|A(e,\dots,e)\| \le \|A\|\,\|e\|^k$$

y al tomar el supremo sobre todos los $e \in E$ tal que $\|e\|=1$, se tiene $\|\theta(A)\| \le \|A\|$.

Para probar la 2ª parte de la desigualdad, note que si $A \in L_s^k(E,F)$, entonces

$$A(e_1,\ldots,e_k) = \frac{1}{k!\,2^k} \sum \varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\, \theta(\varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_k e_k)$$

donde la suma se toma sobre todas las 2^k posibilidades $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_k = \pm 1$. Tomando $\|e_1\| = \cdots = \|e_k\| = 1$, se tiene

$$\|\theta(A)(\varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_k e_k)\| \le \|\theta(A)\|\,\|\varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_k e_k\|^k \le \|\theta(A)\|\,(\|e_1\| + \cdots + \|e_k\|)^k$$
$$= \|\theta(A)\|\,k^k .$$

Por consiguiente

$$\|A(e_1,\ldots,e_k)\| = \frac{1}{k!\,2^k}\,\|\sum \varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\, \theta(A)(\varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_k e_k)\| \le$$

$$\frac{1}{k!\,2^k} \sum \|\theta(A)(\varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_k e_k)\| \le \frac{1}{k!\,2^k} \sum \|\theta(A)\|\,k^k = \frac{1}{k!\,2^k}\, 2^k\, \|\theta(A)\|\,k^k$$

$$= \frac{k}{k!}\,\|\theta(A)\| .$$

y al tomar el supremo sobre todos los $(e_1,\ldots,e_k)$ tal que $\|e_1\| = \cdots \|e_k\| = 1$ se tiene

$$\|A\| \le \frac{k^k}{k!}\,\|\theta(A)\|$$

Sólo resta probar que Θ y Θ^{-1} son continuos.

Que Θ es continuo se obtiene de la 1ª parte de la desigualdad, en efecto, tomando $M=1$

$$\|\Theta(A)\| \leq M\|A\| \quad \forall \; A \in L^n(E,F).$$

Así Θ es continua.

Veamos que Θ^{-1} es continua. Dado $f \in S^k(E,F)$ existe $A \in L_s^k(E;F)$ tal que $\Theta(A)=f$, entonces

$$\|\Theta^{-1}(f)\| = \|\Theta^{-1}(\Theta(A))\| = \|A\| \leq \frac{k^k}{k!}\|\Theta(A)\| = \frac{k^k}{k!}\|f\|.$$

Tomando $M' = \frac{k^k}{k!}$, se tiene

$$\|\Theta^{-1}(f)\| \leq M'\|f\| \qquad \forall \; f \in S^k(E,F).$$

Así Θ^{-1} es continua.

Por tanto $\Theta : S^k(E,F) \to L_s^k(E;F)$ es un isomorfismo continuo.

A continuación veremos los tres teoremas fundamentales del análisis lineal (Teorema de Hahn-Banach, Teorema del mapeo abierto, y el Teorema de Acotamiento Uniforme), y se dan algunos colorarios que se usan posteriormente.

2.2.14. Teorema de Hahn Banach. Sea E un espacio vectorial real o complejo, $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ una seminorma, y $F \subset E$ un subespacio. Si $f \in F^*$ satisface que $|f(e)| \leq \|e\|$ para todo $e \in F$, entonces existe un mapeo lineal $\tilde{f}: E \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tal que $\tilde{f}|F = f$ y

$$|\tilde{f}(e)| \leq \|e\| \quad \forall\, e \in E . \qquad (*)$$

Demostración.

(Caso Real). La idea de la demostración es utilizar el Lema de Zorn para construir una extención maximal de f, y entonces mostrar que esta extención satisface $(*)$.

Sea S el conjunto de todos los pares de la forma (G, g) donde

(i) G es un subespacio de E tal que $F \subseteq G \subseteq E$.

(ii) $g \in G^*$, $g|F = f$, y $|g(e)| \leq \|e\|$ $\forall\, e \in G$.

Note que $S \neq \phi$, pues $(F, f) \in S$. Definamos el siguiente orden parcial en S:

$$(G_1, g_1) \leq (G_2, g_2) \iff G_1 \subseteq G_2 \text{ y } g_2|G_1 = g_1 .$$

Para aplicar el Lema de Zorn debemos checar 1º que cualquier cadena $C = \{(G_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} \subset S$ tiene una cota superior. Para verlo tome $G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, y considere el funcional lineal h en G tal que $h|G_\alpha = g_\alpha$. Note que h esta bien definido, en efecto, para $e \in G_\alpha \cap G_\beta$ se tiene $g_\alpha(e) = g_\beta(e)$ dado que $(G_\alpha, g_\alpha) \leq (G_\beta, g_\beta)$ o $(G_\beta, g_\beta) \leq (G_\alpha, g_\alpha)$, por ser C una cadena. Entonces por definición de (G, h), es claro que (G, h) es cota superior de C. Así por el Lema de Zorn, S tiene un elemento maximal (E_1, g_1).

Por definición de S, g_1 es una extención lineal de f, la cual satisface $(*)$.

Probemos que $E_1 = E$.

Suponga que $E_1 \neq E$, sea $e_0 \in E \setminus E_1$, y considere el subespacio $E_1 \oplus \langle e_0 \rangle$. Se afirma que g_1 se puede extender a un funcional lineal g en $E_1 \oplus \langle e_0 \rangle$ tal que $|g(e)| \leq \|e\|$ $\forall\ e \in E_1 \oplus \langle e_0 \rangle$. En efecto, para $e_1, e_2 \in E_1$

$$g_1(e_1) + g_1(e_2) = g_1(e_1 + e_2) \leq \|e_1 + e_2\| \leq \|e_1 + e_0\| + \|e_2 - e_0\|$$

$$\Longrightarrow \qquad g_1(e_2) - \|e_2 - e_0\| \leq \|e_1 + e_0\| - g_1(e_1) \qquad \Longrightarrow$$

$$\sup\{g_1(e_2) - \|e_2 - e_0\| \mid e_2 \in E_1\} \leq \inf\{\|e_1 + e_0\| - g_1(e_1) \mid e_1 \in E_1\}.$$

Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que a esta entre el sup y el inf de la ultima desigualdad, y defina $g: E_1 \oplus \langle e_0 \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(e + te_0) = g_1(e) + ta$. Es claro que g es un mapeo lineal tal que $g|_{E_1} = g_1$.

Veamos que $|g(e + te_0)| \leq \|e + te_0\|$.

Note que por definición de a,

$$g_1(e_2) - \|e_2 - e_0\| \leq a \leq \|e_1 + e_0\| - g_1(e_1) \qquad (1).$$

Para $t = 0$, se tiene que $|g(e)| = |g_1(e)| \leq \|e\|$.

Si $t > 0$. Multiplicando por t la 1ª desigualdad de (1) tenemos $g_1(te_2) - \|te_2 - te_0\| \leq ta$, entonces tomando $e_2 = -e/t$ se tiene

$$-g_1(e) - ta \leq \|e + te_0\| \qquad (2).$$

Multiplicando por t, la 2ª desigualdad de (1), obtenemos

$$ta \leq \|te_1 + te_0\| - g_1(te_1),$$

entonces tomando $e_1 = e/t$ se obtiene que

$$ta + g_1(e) \leq \|e + te_0\| \quad (3).$$

Así, por las desigualdades (2) y (3) vemos que $|g(e+te_0)| \leq \|e+te_0\| \quad \forall\ e+te_0 \in E_1 \oplus \langle e_0 \rangle$.

Luego g_1 se puede extender al subespacio $E_1 \oplus \langle e_0 \rangle \supset E_1$, pero esto contradice la maximalidad de (E_1, g_1).

Por tanto $E = E_1$, y (E_1, g_1) es una extensión de f, que satisface (*).

(Caso complejo). Suponga que $f \in L(F, \mathbb{C})$ y $|f(e)| \leq \|e\|$ $\forall\ e \in F$.

Note que $f = \mathrm{Re}f + i\,\mathrm{Im}f$, por ser f de valores complejos.

Por otra parte $i\mathrm{Re}f(e) - \mathrm{Im}f(e) = if(e) = f(ie) = \mathrm{Re}f(ie) + i\,\mathrm{Im}f(ie)$, lo cual implica que las partes reales de ambos lados deben ser iguales.

Así, $\mathrm{Im}f(e) = -\mathrm{Re}f(ie)$ y podemos escribir a f como $f(e) = \mathrm{Re}f(e) - i\,\mathrm{Re}f(ie)$.

Por el caso real $\mathrm{Re}f$ se extiende a un mapeo lineal continuo $(\mathrm{Re}f)' : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|(\mathrm{Re}f)'(e)| \leq \|e\|$ $\forall\ e \in E$. Defina $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$ por

$$\tilde{f}(e) = (\mathrm{Re}f)'(e) - i\,(\mathrm{Re}f)'(ie)$$

Probemos que $\tilde{f}$ es lineal, sean $e_1, e_2 \in \tilde{E}$ y $(a+ib) \in \mathbb{C}$

$\tilde{f}(e_1+e_2) = (\mathrm{Re}f)'(e_1+e_2) - i(\mathrm{Re}f)'(ie_1+ie_2) = (\mathrm{Re}f)'(e_1) + (\mathrm{Re}f)'(e_2) - i(\mathrm{Re}f)'(ie_1)$
$- i(\mathrm{Re}f)'(ie_2) = (\mathrm{Re}f)'(e_1) - i(\mathrm{Re}f)'(ie_1) + (\mathrm{Re}f)'(e_2) - i(\mathrm{Re}f)'(ie_2)$
$= \tilde{f}(e_1) + \tilde{f}(e_2)$.

$\tilde{f}((a+ib)e) = (\mathrm{Re}f)'((a+ib)e) - i(\mathrm{Re}f)'(i(a+bi)e) = a(\mathrm{Re}f)'(e) +$
$b(\mathrm{Re}f)'(ie) - ia(\mathrm{Re}f)'(ie) + ib(\mathrm{Re}f)'(e) =$
$(a+ib)((\mathrm{Re}f)'(e) - i(\mathrm{Re}f)'(ie)) = (a+ib)\tilde{f}(e)$.

Veamos que $\tilde{f}|_F = f$, sea $e \in F$ entonces

$\tilde{f}(e) = (\mathrm{Re}f)'(e) - i(\mathrm{Re}f)'(ie) = (\mathrm{Re}f)(e) - i(\mathrm{Re}f)(ie) = f(e)$,
ya que $(\mathrm{Re}f)'|_F = (\mathrm{Re}f)$.

Solo resta ver que $|\tilde{f}(v)| \leq \|v\| \quad \forall\, v \in E$.

Para cualquier $v \in E$ tal que $\tilde{f}(v) = 0$, se tiene claramente que $|\tilde{f}(v)| = 0 \leq \|v\|$.
Sea $v \in E$ tal que $\tilde{f}(v) \neq 0$, entonces podemos escribir $\tilde{f}(v) = |\tilde{f}(v)| e^{i\theta}$, así $|\tilde{f}(v)| = \tilde{f}(v) e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta} v)$.
Como $|\tilde{f}(v)|$ es real se tiene que $\tilde{f}(e^{-i\theta} v)$ es real, y así $\tilde{f}(e^{i\theta} v) = (\mathrm{Re}f)'(e^{i\theta} v)$. Entonces
$|\tilde{f}(v)| = (\mathrm{Re}f)'(e^{i\theta} v) \leq \|e^{i\theta} v\| = |e^{i\theta}|\,\|v\| = \|v\|$.
Luego $|\tilde{f}(v)| \leq \|v\| \quad \forall\, v \in E$.

2.2.15. Corolario. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $F \subset E$ un subespacio, y $f \in F^*$. Entonces existe $\tilde{f} \in E^*$ tal que $\tilde{f}|F = f$ y $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Demostración.

Si $f=0$ entonces $\tilde{f}=0$.

Suponga que $f \neq 0$. Entonces $|||e||| = \|f\|\,\|e\|$ es una norma en E y $|f(e)| \leq \|f\|\,\|e\| = |||e|||$ $\forall\ e \in F$. Aplicando el teorema anterior, se tiene un mapeo lineal $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tal que $\tilde{f}|F = f$ y $|\tilde{f}(e)| \leq |||e||| = \|f\|\,\|e\|$. Entonces $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$, y dado que $\tilde{f}$ extiende a f, se tiene que $\|f\| \leq \|\tilde{f}\|$. Por tanto $\exists\ \tilde{f} \in E^*$ tal que $\tilde{f}|F = f$ y $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

2.2.16. Corolario. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $e \neq 0$. Entonces existe $f \in E^*$ tal que $f(e) \neq 0$. Es decir, si $f(e)=0$ $\forall\ f \in E^*$ entonces $e=0$.

Demostración. Sea $F = \langle e \rangle$ y $g : F \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) definida por $g(ae) = a$. Claramente $g \in F^*$ y $g(e) = 1$. Entonces por el corolario 2.2.15. existe $f \in E^*$ tal que $f|F = g$ y $\|f\| = \|g\|$. Así $f(e) \neq 0$, dado que $f|F = g$.

<u>Notación</u>. Sea E un espacio vectorial, $A \subset E$, $k \in \mathbb{N}$ y $e_0 \in E$. Se define:

$$kA = \{ke \mid e \in A\} \quad \text{y} \quad A + e_0 = \{e + e_0 \mid e \in A\}.$$

2.2.17. Lema. Sean E y F espacios de Banach y $T: E \to F$ un mapeo lineal continuo supraryectivo. Si $B_1(0) \subset E$ entonces $T(B_1(0))$ contiene una bola abierta con centro en $0 \in F$.

Demostración. Se procede como sigue:

i) $T(cl(B_{1/2}(0))) \subset F$ contiene una bola abierta B.

ii) $T(cl(B_{1/2^n}(0))) \subset F$ contiene una bola abierta V_n con centro en $0 \in F$.

iii) $T(B_1(0)) \subset F$ contiene una bola abierta con centro en el $0 \in F$.

i) Consideremos la bola abierta $B_{1/2}(0) \subset E$. Dado $e \in E$, se tiene que $e \in kB_{1/2}(0)$, para $k > 2\|e\|$. Por consiguiente $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} k B_{1/2}(0)$. Dado que T es lineal y supraryectiva

$$F = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} k B_{1/2}(0)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_{1/2}(0)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} cl(kT(B_{1/2}(0))).$$

La completez de F implica que para algún k, $cl(kT(B_{1/2}(0)))$ debe contener una bola abierta (por el Teorema de Baire). Esto implica que $cl(T(B_{1/2}(0)))$ también contiene una bola abierta, digamos $B_\varepsilon(f_0) \subset cl(T(B_{1/2}(0)))$. Entonces

$$B_\varepsilon(f_0) - f_0 = B_\varepsilon(0) \subset cl(T(B_{1/2}(0))) - f_0 \qquad (1).$$

(ii) Probemos que $B_\varepsilon(f_0) - f_0 \subset cl(T(B_1(0)))$.

Para probarlo veamos que

$$cl(T(B_{1/2}(0))) - f_0 \subset cl(T(B_1(0))) \qquad (2).$$

Sea $f \in cl(T(B_{1/2}(0))) - f_0$. Entonces $f + f_0 \in cl(T(B_{1/2}(0)))$, y recuerde que $f_0 \in cl(T(B_1(0)))$. Por lo que existen sucesiones

$$\{T(w_n)\} \subset T(B_{1/2}(0)) \text{ tal que } T(w_n) \to f + f_0$$

y

$$\{T(z_n)\} \subset T(B_{1/2}(0)) \text{ tal que } T(z_n) \to f_0 .$$

Como $w_n, z_n \in B_{1/2}(0)$, se tiene que $\|w_n - z_n\| \leq \|w_n\| + \|z_n\| < 1/2 + 1/2 = 1$, así $w_n - z_n \in B_1(0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} T(w_n - z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} T(w_n) - \lim\limits_{n\to\infty} T(z_n) = (f + f_0) - f_0 = f$,

entonces $f \in cl(T(B_1(0)))$, ya que $T(w_n - z_n) \in T(B_1(0))$ y $\lim\limits_{n\to\infty} T(w_n - z_n) = f$. Puesto que $f \in cl(T(B_{1/2}(0)))$ fue arbitrario, esto prueba (2). De (1) y (2) se tiene

$$B_\varepsilon(f_0) - f_0 = B_\varepsilon(0) \subset cl(T(B_1(0))) \qquad (3).$$

Sea $B_{1/2^n}(0) \subset E$. Dado que T es lineal $cl(T(B_{1/2^n}(0))) = \frac{1}{2^n} cl(T(B_1(0)))$. Con esta igualdad y (3) obtenemos

$$V_n = B_{\varepsilon/2^n}(0) \subset cl(T(B_{1/2^n}(0))) \quad , n \in \mathbb{N} \qquad (4).$$

(iii) Demostremos que $V_1 = B_{\epsilon/2}(0) \subset T(B_1(0))$.

Sea $f \in B_{\epsilon/2}(0)$. De (4) con $n=1$ tenemos $B_{\epsilon/2}(0) \subset cl(T(B_{1/2}(0)))$. Por consiguiente $f \in cl(T(B_{1/2}(0)))$, y con lo cual existe $v \in T(B_{1/2}(0))$ tal que $\|f - v\| < \epsilon/4$. Como $v \in T(B_{1/2}(0))$ $v = T(e_1)$ para algún $e_1 \in B_{1/2}(0)$. Entonces

$$\| f - T(e_1) \| < \epsilon/4 .$$

De esto y (4) con $n=2$ vemos que $f - T(e_1) \in B_{\epsilon/4}(0) \subset cl(T(B_{1/4}(0)))$. Como antes concluimos que existe un $e_2 \in B_{1/4}(0)$ tal que

$$T(e_2) \in B_{\epsilon/8}(f - T(e_1)) .$$

De esto y (4) con $n=3$ vemos que $f - T(e_1) - T(e_2) \in B_{\epsilon/8}(0) \subset cl(T(B_{1/8}(0)))$, y así sucesivamente. En el n-simo paso podemos tomar $e_n \in B_{\epsilon/2^n}(0)$ tal que

$$T(e_n) \in B_{\epsilon/2^{n+1}}\left(f - \sum_{k=1}^{n-1} T(e_k)\right) .$$

Por consiguiente

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} T(e_k) \right\| < \epsilon/2^{n+1} \qquad (5)$$

y esto se puede hacer para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $z_n = e_1 + \cdots + e_n$. Dado que $z_k \in B_{1/2^k}(0)$, tenemos $\|e_k\| < 1/2^k$.

Así, para $n>m$ $\quad \| z_n - z_m \| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \| e_k \| < \sum_{k=m+1}^{n} 1/2^k$.

Por consiguiente $\{z_n\}$ es de Cauchy, ya que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$, y como E es completo $z_n \to e$, para algún $e \in E$.
Además $e \in B_1(0)$, ya que $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k\| < 1$.

Por otra parte, de (5) se tiene que

$$\| f - T(z_n) \| < \epsilon/_{2^{n+1}}.$$

Así al tomar el límite cuando $n \to \infty$, y por la continuidad de T, se obtiene que $T(e) = f$.
Entonces $f \in T(B_1(0))$, y esto $\forall\, f \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$.
Por tanto $B_{\epsilon/2}(0) \subset T(B_1(0))$.

2.2.18. Teorema (Mapeo Abierto). Sean E, F espacios de Banach y suponga que $T \in L(E,F)$ es suprayectivo entonces T es un mapeo abierto.

Demostración. Sea $U \subset E$ abierto; demostremos que $T(U)$ es abierto en F.

Sea $f_0 \in T(U)$, así $f_0 = T(e_0)$ con $e_0 \in U$.
Sea $r>0$ tal que $B_r(e_0) \subset U$ i.e $e_0 + B_r(0) \subset U$. Se tiene entonces

$$f_0 + T(B_r(0)) \subset T(U) \qquad (1).$$

Pero por el Lema 2.2.17 se obtiene una $B_c(0) \subset T(B_1(0))$. Entonces

$$B_{rc}(0) \subset T(B_r(0)) \qquad (2).$$

Por consiguiente de (1) y (2) se tiene

$$B_{rc}(f_0) = f_0 + B_{rc}(0) \subset T(U).$$

Lo cual prueba que $T(U)$ es abierto en F.

2.2.19. Teorema (Isomorfismo de Banach). Sean E, F espacios de Banach y $T: E \to F$ un isomorfismo lineal continuo entonces T es un homeomorfismo.

Demostración. Como T es continuo y biyectivo solo resta probar que T^{-1} es continuo.

Sea $W \subset E$ abierto; probemos que $(T^{-1})^{-1}(W) \subset F$ es abierto.

Como $(T^{-1})^{-1}(W) = T(W)$ y T en particular es supreyectivo entonces $T(W)$ es abierto en F.

Luego T^{-1} es continuo.

Así, si F y G son subespacios cerrados de el espacio de Banach E y E es la suma directa algebraica de F y G, entonces el mapeo de $F \times G \to E$

tal que $(e,e') \to e+e'$, es un isomorfismo lineal continuo, y por consiguiente un homeomorfismo; i.e $E = F \oplus E$; esto prueba lo comentado en 2.1.15.

2.2.20. Teorema (Gráfica Cerrada). Sean E, F espacios de Banach. Un mapeo lineal $A: E \to F$ es continuo si y solo si su gráfica $T_A = \{(e, A(e)) \in E \times F \mid e \in E\}$ es un subespacio cerrado de $E \oplus F$.

Demostración.

$\rightarrow$) Por la linealidad de A, es claro que T_A es un subespacio de $E \oplus F$. Probemos que T_A es cerrado en $E \oplus F$. Sea $(e,f) \in cl(T_A)$, entonces existe una sucesión $\{(e_n, A(e_n))\}$ en T_A tal que $(e_n, A(e_n)) \to (e,f)$. Por consiguiente $e_n \to e$ y $A(e_n) \to f$. Ademas por la continuidad de A se tiene $\lim_{n\to\infty} A(e_n) = A(e) = f$.

Por tanto $(e,f) \in T_A$, y T_A es cerrado.

$\leftarrow$) Si T_A es cerrado, entonces es un subespacio de Banach de $E \oplus F$, ya que $E \oplus F$ es Banach.

Puésto que el mapeo $\pi_1 : T_A \to E$, dado por $\pi_1(e, A(e)) = e$, es un isomorfismo lineal continuo, su inversa $\pi_1^{-1} : E \to T_A$ es también continua por 2.1.19.

Dado que el mapeo lineal $\pi_2 : T_A \to F$, dado por $\pi_2(e, A(e)) = A(e)$, es continuo, tambien lo es la composición $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} : E \to F$.

Por tanto $A = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ es continuo.

Observación. El Teorema 2.2.20 por lo regular se emplea de la siguiente forma.
Para probar que un mapeo lineal $A: E \to F$ es continuo, para E y F espacios de Banach, es suficiente probar que; si $e_n \to 0$ y $A(e_n) \to f$ entonces $f = 0$. $(*)$.
En efecto, para ver que A es continuo solo hay que probar que T_A es cerrado. Suponga $(*)$.
Sea $(e,f) \in cl(T_A)$, entonces existe una sucesión $\{(e_n, A(e_n))\}$ en T_A tal que $(e_n, A(e_n)) \to (e,f)$.
Por otra parte, considere la sucesion $\{z_n = e_n - e\}$ y note que $z_n \to 0$ y $A(z_n) \to f - A(e)$. Entonces por hipotesis $f - A(e) = 0$. Por tanto $(e,f) \in T_A$ y T_A es cerrado.

2.2.21. Corolario. Sea E espacio de Banach y $F \subset E$ un subespacio cerrado de E. Entonces F se complementa si y solo si existe $P \in L(E,E)$ tal que $P \circ P = P$ y $F = \{e \in E \mid P(e) = e\}$.

Demostración.

$\to$) Suponga que F se complementa, así $E = F \oplus G$, donde G es un subespacio cerrado en E.

Defina $P: E = F \oplus G \to E$ por $P(e) = e_1$ donde $e = e_1 + e_2$, $e_1 \in F$ y $e_2 \in G$. P es claramente lineal, $P \circ P(e) = P(e_1) = e_1 = P(e)$ y $F = \{e \in E \mid P(e) = e\}$ por definición de P.

Solo resta probar que P es continua.

Suponga que $e_n = e_{1n} + e_{2n} \to 0$ y $P(e_n) = e_{1n} \to e'$. Entonces $-e_{2n} \to e'$, ya que $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} e_{1n} + \lim_{n\to\infty} e_{2n} = 0$, y dado que F y G son cerrados esto implica que $e' \in F \cap G = \{0\}$. Luego $e' = 0$ y P es continua.

$\leftarrow$) Si tal P existe entonces $\ker P$ es un subespacio cerrado de E, ya que por ser P continua $P^{-1}(0) = \ker P$ es cerrado en E.

Afirmamos que $\ker P$ es un complemento algebraico de F. En efecto, cualquier $e \in E$ es de la forma $e = e - P(e) + P(e)$, con $e - P(e) \in \ker P$ y $P(e) \in F$, además $F \cap \ker P = \{0\}$. Por tanto F se complementa en E.

2.2.22. Teorema (Fundamental de Isomorfismo). Sea $A \in L(E,F)$ suprayectiva donde E y F son espacios de Banach. Entonces $E/\ker A$ y F son espacios de Banach isomorfos.

Demostración.

Como A es continua, se tiene que $\ker A$ es un subespacio cerrado de E y esto implica que $E/\ker A$ es un subespacio de Banach, ya que E es Banach.

Defina el mapeo

$$h : E/\ker A \longrightarrow F$$

por $h[e] = A(e)$. h es claramente lineal

h es continua, ya que $\|h[e]\| = \|A(e)\| \le \|A\|\,\|e\|$.
Veamos que h es biyectiva.
h es supravectiva: ya que, si $f \in F$ entonces $\exists\, e \in E$ tal que $A(e) = f$, así $h[e] = f$.

h es 1-1: ya que, si $h[e] = 0 = A(e)$ entonces $e \in \ker A$ y así, $[e] = \ker A = [0]$.
Luego h es un isomorfismo.

2.2.23. Teorema (Acotamiento Uniforme). Sean E y F espacios vectoriales normados, con E completo, y sea $\{A_i\}_{i\in I} \subset L(E;F)$. Si para cada $e \in E$ el conjunto $\{\|A_i(e)\|\}_{i\in I}$ es acotado en $\mathbb{R}$, entonces $\{\|A_i\|\}_{i\in I}$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$.

Demostración.
Para $k \in \mathbb{N}$, sea $E_k = \{e \in E \mid \|A_i(e)\| \le k,\ \forall\, i \in I\}$, $E_k \ne \phi$ pues $0 \in E_k$.
E_k es cerrado, en efecto, para cualquier $e \in cl(E_k)$ existe una sucesión $\{e_j\} \in E_k$ tal que $e_j \to e$. Entonces para cada $i \in I$ tenemos $\|A_i(e_j)\| \le k$ con i fijo. Así al tomar el límite cuando $j \to \infty$ se tiene $\|A_i(e)\| \le k$ $\forall\, i \in I$, ya que tanto A_i como $\|\cdot\|$ son continuas.
Por consiguiente $e \in E_k$ y E_k es cerrado.
Además como $\{\|A_i(e)\|\}_{i\in I}$ esta acotado para $e \in E$, entonces existe $C_e > 0$ tal que $\|A_i(e)\| \le C_e$ $\forall\, i \in I$.

Sea $k_e \in \mathbb{N}$ tal que $c_e \leq k_e$, así, cada $e \in E$ pertenece a algún E_k y

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k .$$

Dado que E es completo, el Teorema de Baire implica que algún E_k contiene una bola abierta, digamos,

$$B_r(e_0) \subset E_{k_0} .$$

Sea $e \in E$, con $e \neq 0$, arbitrario y tome

$$z = e_0 + \frac{r}{2\|e\|} e \qquad (1),$$

entonces $\|z - e_0\| < r$, y así $z \in B_r(e_0) \subset E_{k_0}$.
Por definición de E_{k_0} se tiene $\|A_i(z)\| \leq k_0 \quad \forall i \in I$, y también $\|A_i(e_0)\| \leq k_0 \quad \forall i \in I$ ya que $z \in B_r(e_0)$.
De (1) tenemos $e = \frac{2\|e\|}{r}(z - e_0)$, entonces

$$\|A_i(e)\| = \frac{2\|e\|}{r} \|A_i(z - e_0)\| \leq \frac{2\|e\|}{r} (\|A_i(z)\| + \|A_i(e_0)\|) \leq$$

$$\frac{2\|e\|}{r}(k_0 + k_0) = \frac{4k_0}{r}\|e\| \text{ , y esto } \forall i \in I .$$

Por consiguiente $\|A_i\| = \sup\{\|A_i(e)\| \mid \|e\| = 1\} \leq \frac{4}{r} k_0 \quad \forall i \in I$.
Por tanto $\{\|A_i\|\}_{i \in I}$ está acotado.

Para finalizar esta parte, se da una aplicación del Téorema de Acotamiento Uniforme.

Demostremos que el Teorema de Isomorfismo de Banach (2.2.19), es falso para espacios normados no completos, para lo cual se da el siguiente espacio.

Sea E el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$, y considere la siguiente norma en E

$$\|a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\| = \max\{|a_0|,\ldots,|a_n|\}.$$

(i) Probemos que E no es completo.
La idea de la demostración es suponer que E es completo, y entonces construir una sucesión $\{f_k\} \subset L(E;\mathbb{R})$, tal que para cada $P(x) \in E$ el conjunto $\{|f_k(P(x))|\}_{k\in\mathbb{N}}$ este acotado en $\mathbb{R}$, pero que $\{\|f_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ no sea un conjunto acotado en $\mathbb{R}$. Lo cual sería una contradicción por el Teorema de Acotamiento Uniforme.
Suponga que E es completo. Note que todo polinomio P de grado n y $\neq 0$, se puede escribir como

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{con } a_i = 0 \text{ para } i > n.$$

Defina la sucesión $\{f_k\} \subset L(E;\mathbb{R})$ por:

$$f_k(P) = \begin{cases} a_0+a_1+\cdots+a_{k-1} & \text{si } P(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } P(x) = 0 \end{cases}$$

f_k es lineal y también continua, dado que

$$|f_k(P)| = |a_0 + \cdots + a_{k-1}| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |a_i| \leq k \, \| P \| .$$

Por consiguiente $f_k \in L(E;\mathbb{R})$.

Además para cada $P(x) \in E$ fijo, $\{|f_k(P(x))|\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, ya que, si $P(x)$ tiene grado n entonces $n+1$ coeficientes y así

$$|f_k(P)| = |a_0 + \cdots + a_{k-1}| \leq (n+1)\| P \| \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} .$$

Por lo tanto $\{|f_k(P)|\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotado.

Demostremos que $\{\|f_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ no está acotado.
Suponga que $\exists\ M>0$ tal que $\|f_k\| \leq M \ \forall\, k\in\mathbb{N}$.
Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > M$ y considere el polinomio

$$P(x) = 1 + x + \cdots + x^m \quad , \quad \text{así} \quad \| P(x) \| = 1 .$$

Evaluando f_m en $P(x)$ se tiene

$$f_m(P) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m} = m \, \| P \| .$$

Entonces, por definición de la norma de $f_m \in L(E;\mathbb{R})$

se tiene $\quad \|f_m\| \geq \dfrac{|f_m(P)|}{\|P\|} = \dfrac{m\|P\|}{\|P\|} = m > M$ ⚡

Por consiguiente $\{\|f_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ no está acotado.

(ii) Definimos $A: E \to E$ por $A\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} x^i$,
se prueba que $A \in L(E,E)$ y que $A^{-1}: E \to E$ existe.
Demostración.
La linealidad de A se sigue del hecho, de que cualquier $P \in E$ se puede escribir como $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ con $a_i = 0$ para $i >$ grado (P).
Veamos que A es continua.

$$\left\|A\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\right\| = \left\|a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} x^i\right\| = \max\left\{|a_0|, |a_1|, \frac{|a_2|}{2}, \dots, \frac{|a_n|}{n}\right\}$$

y como $|a_i| \leq i|a_i|$ $\quad i = 1,\dots,n$, entonces

$$\left\|A\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\right\| \leq \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\} = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right\|,$$

así $\|A(P)\| \leq \|P\|$ y A es continua.

Por otra parte, la inversa de A esta dada por $A^{-1}: E \to E$ tal que

$$A^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i y^i\right) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} i b_i y^i .$$

(iii) Demostremos que A^{-1} no es continua.
Suponga que A^{-1} es continua. Entonces $\exists$ $M>0$ tal que

$$\| A^{-1}(\sum_{i=0}^{n} b_i \varphi^i) \| \leq M \| \sum_{i=0}^{n} b_i \varphi^i \| .$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > M$, y considere el polinomio $P(\varphi) = 1+\varphi+\cdots+\varphi^m$. Note que $\| P \| = 1$, y

$$A^{-1}(1+\varphi+\cdots+\varphi^m) = 1+\varphi+2\varphi+\cdots+m\varphi^m .$$

Entonces $\| A^{-1}(1+\varphi+\cdots+\varphi^m) \| = m = m \| P \| > M \| P \|$!
Por consiguiente A^{-1} no es continua.

Por tanto de (i), (ii) y (iii) se tiene que el Teorema de Isomorfismo de Banach, no se cumple para espacios no completos.

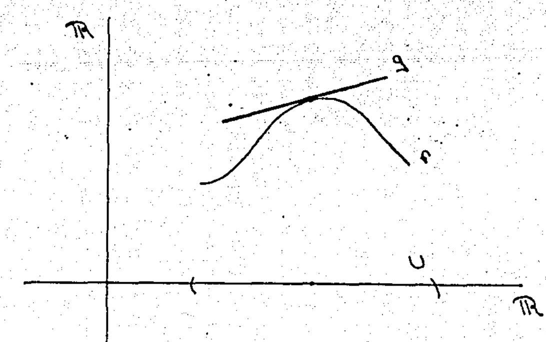
CALCULO DIFERENCIAL

En esta sección se extiende la teoría del cálculo en espacios euclídeanos a espacios vectoriales normados.

Para una función derivable $f: U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ abierto, la interpretación usual de la derivada de f en un punto $u_0 \in U$, es como la pendiente de la línea tangente a la gráfica de de f en $(u_0, f(u_0))$. Para generalizar esto, interpretamos a $Df(u_0) = f'(u_0)$ como un mapeo lineal actuando en el vector $(u-u_0)$. Entonces podemos decir que $Df(u_0)$ es el único mapeo lineal de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tal que el mapeo

$$g: U \to \mathbb{R} \quad \text{dado por} \quad g(u) = f(u_0) + Df(u_0)(u-u_0)$$

es tangente a f en u_0. Esto se puede generalizar para mapeos entre espacios vectoriales normados.



3.1.1. Definición. Sean E, F espacios vectoriales normados, $U \subset E$ abierto y $f, g : U \subset E \to F$ mapeos. Decimos que f y g son tangentes en el punto $u_0 \in U$ si

$$\lim_{u \to u_0} \frac{\| f(u) - g(u) \|}{\| u - u_0 \|} = 0,$$

donde $\| \cdot \|$ representa la norma en el espacio apropiado.

3.1.2. Proposición. Para $f : U \subset E \to F$ y $u_0 \in U$ existe a lo más un $L \in L(E, F)$ tal que el mapeo $g_L : U \subset E \to F$ definido por $g_L(u) = f(u_0) + L(u - u_0)$ es tangente a f en u_0.

Demostración.

Suponga que $L_1, L_2 \in L(E, F)$ cumplen la condición de la proposición. Sea $e \in E$ tal que $\|e\| = 1$, y $u = u_0 + \lambda e$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), entonces para λ pequeño y $u \in U$, tenemos

$$\| L_1(e) - L_2(e) \| = \frac{\| L_1(u - u_0) - L_2(u - u_0) \|}{\| u - u_0 \|} \leq$$

$$\frac{\| f(u) - f(u_0) - L_1(u - u_0) \|}{\| u - u_0 \|} + \frac{\| f(u) - f(u_0) - L_2(u - u_0) \|}{\| u - u_0 \|}$$

Tomando el límite cuando $u \to u_0$ el lado derecho de la desigualdad tiende a cero, así que $\| L_1(e) - L_2(e) \| = 0$ para toda $e \in E$ tal que $\|e\| = 1$; por consiguiente $\| L_1 - L_2 \| = 0$ y $L_1 = L_2$.

3.1.3. Definición. Sean E, F espacios vectoriales normados y $U \subset E$ abierto. Se dice que $f : U \subset E \to F$ es derivable en $u_0 \in U$ si existe $L \in L(E,F)$ tal que $g_L : U \subset E \to F$ es tangente a f en u_0, i.e

$$\lim_{u \to u_0} \frac{\| f(u) - f(u_0) - L(u-u_0) \|}{\| u - u_0 \|} = 0 .$$

Por la proposición 3.1.2. se tiene que L es única, y se denota por $Df(u_0) = L$. El valor de $Df(u_0)$ en $e \in E$ se denotara $Df(u_0)e$. Si f es derivable en cada $u \in U$, el mapeo

$$\begin{aligned} Df : U \subset E &\longrightarrow L(E,F) \\ u &\longrightarrow Df(u) \end{aligned}$$

se llama la derivada de f.

3.1.4 Definición. Se dice que $f : U \subset E \to F$ es de clase C^1 si

i) f es derivable en U, y

ii) $Df : U \subset E \longrightarrow L(E,F)$ es continuo.

3.1.5. Definición. Se dice que $f : U \subset E \longrightarrow F$ es 2-veces derivable en $u_0 \in U$, si f es derivable en una vecindad $V \subset U$ de u_0 y $Df : V \subset E \longrightarrow L(E,F)$ es derivable en u_0.

La derivada de Df en u_0 se denota por $D^2f(u_0) \in L(E, L(E,F))$, la cual se llama la derivada de orden 2 de f en u_0.
Si Df es derivable en cada $u \in U$, el mapeo

$$D^2f : U \subset E \to L(E, L(E,F))$$

se llama la derivada de orden 2 de f. Se dice que f es de clase C^2 si

i) Df es derivable en U, y
ii) $D^2f : U \subset E \to L(E, L(E,F))$ es continua

Es decir, si f es derivable en U y Df es de clase C^1 en U.

Observación. Dado que $L(E, L(E,F)) \cong L^2(E,F)$. La imagen de $D^2f(u_0) \in L(E, L(E,F))$ bajo este isomorfismo es un mapeo bilineal continuo de $E \times E \to F$, el cual esta definido por $(e_1, e_2) \to (D^2f(u_0)e_1)e_2$: $D^2f(u_0)$ hace corresponder a $e_1 \in E$ el mapeo $D^2f(u_0)e_1 \in L(E,F)$, y la imagen de $e_2 \in E$ bajo este último mapeo es $(D^2f(u_0)e_1)e_2$, el cual denotamos como $D^2f(u_0)(e_1, e_2)$.

Por lo anterior podemos suponer que $D^2f : U \subset E \to L^2(E,F)$, donde para $u_0 \in U$ y $(e_1, e_2) \in E \times E$

$$Df(u_0)(e_1, e_2) = (Df(u_0)e_1)e_2$$

Procediendo inductivamente se tiene la siguiente:

3.1.6 Definición. Sea $U \subset E$ abierto y $f: U \subset E \to F$. Decimos que f es r-veces derivable en $u_0 \in U$ si f es $(r-1)$-veces derivable en una vecindad $V \subset U$ de u_0 y $D^{r-1}f : V \subset E \to \underset{1}{L}(E, \underset{2}{L}(E, \ldots, \underset{r-1}{L}(E,F)\underset{1}{)}\underset{2}{)}\ldots\underset{r-1}{)}$ es derivable en u_0.

La derivada de $D^{r-1}f$ en u_0 se denota por $D^r f(u_0)$, la cual esta en $\underset{1}{L}(E, \underset{2}{L}(E, \ldots, \underset{r}{L}(E,F)\underset{1}{)}\underset{2}{)}\ldots\underset{r}{)}$ y se llama la derivada de orden r de f en u_0.

Dado que $\underset{1}{L}(E, \underset{2}{L}(E, \ldots, \underset{r}{L}(E,F)\underset{1}{)}\underset{2}{)}\ldots\underset{r}{)} \cong L^r(E,F)$, podemos suponer que $D^r f : U \subset E \to L^r(E,F)$ donde para $u_0 \in U$ y $(e_1, e_2, \ldots, e_r) \in E \times \cdots \times E$

$$D^r f(u_0)(e_1, \ldots, e_r) = D^r f(u_0)\, e_1 \cdot e_2 \ldots e_r$$

con $D^r f(u_0)\, e_1 \in \underset{1}{L}(E, \underset{2}{L}(E, \ldots, \underset{r-1}{L}(E,F)\underset{1}{)}\underset{2}{)}\ldots\underset{r-1}{)}$

$$D^r f(u_0)\, e_1 \cdot e_2 \in \underset{1}{L}(E, \underset{2}{L}(E, \ldots, \underset{r-2}{L}(E,F)\underset{1}{)}\underset{2}{)}\ldots\underset{r-2}{)}$$

$$\vdots$$

$$D^r f(u_0)\, e_1 \cdot e_2 \cdots e_{r-1} \in L(E,F)$$

3.1.7. Definición. Se dice que el mapeo $f: U \subset E \to F$ es de clase C^r si

i) f es r-veces derivable, y

ii) $D^r f: U \subset E \to L^r(E,F)$ es continuo.

Diremos que un mapeo $f: U \subset E \to F$ es de clase C^∞ si f es de clase C^r para toda $r \in \mathbb{N}$.

A continuación damos algunos ejemplos de mapeos C^∞.

1. Sea $f: E \to F$ un mapeo constante. Entonces para todo $e \in E$ $Df(e) = 0 \in L(E,F)$. Así $D^r f(e) = 0$ para todo $e \in E$ y $r \in \mathbb{N}$.

2. Sea $L \in L(E,F)$ entonces L es derivable en E y $DL(e) = L$ para toda $e \in E$. Luego

$$\begin{aligned} DL: E &\longrightarrow L(E,F) \\ e &\longrightarrow L \end{aligned}$$

es constante y $D^r L(e) = 0 \in L^r(E,F)$ para $r \geq 2$.

3. Sean E_1, E_2 y F espacios vectoriales normados. Sea $B: E_1 \times E_2 \to F$ bilineal y continua. Entonces B es derivable en $E_1 \times E_2$ y $DB(e_1,e_2)(h,k) = B(e_1,k)+B(h,e_2)$.

Demostración.

De la bilinealidad de B se tiene

$$B(e_1+h, e_2+k) - B(e_1,e_2) - B(e_1,k) - B(h,e_2) = B(h,k).$$

Tomando la norma del maximo en $E \times F$, se tiene que $\|B(h,k)\| \le \|B\| \, \|h\| \, \|k\| \le \|B\| \, \|(h,k)\|_M^2$ y

$$\frac{\|B(h,k)\|}{\|(h,k)\|_M} \le \frac{\|B\| \, \|h\| \, \|k\|}{\|(h,k)\|_M} = \|B\| \, \|(h,k)\|_M .$$

Entonces $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|B(h,k)\|}{\|(h,k)\|_M} = 0 .$$

Solo resta ver que $DB(e_1,e_2) \in L(E_1 \times E_2, F)$. Es claro que $DB(e_1,e_2)$ es lineal. Veamos que $DB(e_1,e_2)$ es continua

$$\|DB(e_1,e_2)(u,v)\| = \|B(e_1,v)+B(u,e_2)\| \le \|B(e_1,v)\| + \|B(u,e_2)\| \le$$
$$\le \|B\| \, \|e_1\| \, \|v\| + \|B\| \, \|u\| \, \|e_2\|$$

Sea $K = \max\{\|B\| \, \|e_1\|, \|B\| \, \|e_2\|\}$, entonces

$$\|DB(e_1,e_2)(u,v)\| \le K\|v\| + K\|u\| \le 2K \, \|(u,v)\|_M$$

Por tanto $DB(e_1,e_2)$ es continua.

De manera similar se prueba que $DB: E_1 \times E_2 \to L(E_1 \times E_2, F)$ es lineal y continua y por lo tanto su derivada es constante, luego $D^r B(e_1, e_2) = 0 \in L^r(E_1 \times E_2, F)$ para $r \geq 3$.

4. Sean E y F espacios vectoriales normados y considere el mapeo $ev: L(E,F) \times E \to F$ tal que $ev(A,u) = A(u)$. Entonces ev es C^∞.

Demostración.

Veamos que ev es un mapeo bilineal continuo, con lo cual por el ejemplo anterior ev es C^∞.

Sean $A, B \in L(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y $u, v \in E$.

$ev(A+\lambda B, u) = (A+\lambda B)(u) = A(u) + \lambda B(u) = ev(A,u) + \lambda\, ev(B,u)$

$ev(A, u+\lambda v) = A(u+\lambda v) = A(u) + \lambda A(v) = ev(A,u) + \lambda\, ev(A,v)$.

Luego ev es bilineal.

Veamos que ev es continuo.

$\|ev(A,u)\| = \|A(u)\| \leq \|A\|\,\|u\|$, tomando $M=1$ se tiene que $\|ev(A,u)\| \leq M\,\|A\|\,\|u\|$ $\forall\, A \in L(E,F)$ y $u \in E$. Por tanto ev es continuo.

5. Sean E, F, G espacios vectoriales normados y considere el mapeo $comp: L(E,F) \times L(F,G) \to L(E,G)$ tal que $comp(A,B) = B \circ A$. Entonces comp es C^∞.

Demostración.

Se prueba de forma similar, al ejemplo anterior, que comp es bilineal y continuo. Por tanto comp es C^∞.

A continuación damos una definición tecnica que será de gran utilidad.

3.1.8. Definición. Sean E, F espacios vectoriales normados y $W \subset E$ una vecindad abierta del $\bar{0} \in E$. Se dice que un mapeo continuo $\phi: W \subset E \to F$ es $o(e^k)$ $(k \in \mathbb{N})$, si

$$\lim_{e \to 0} \frac{\phi(e)}{\|e\|^k} = \bar{0} .$$

Reformulemos la definición de derivada con la ayuda de la definición anterior. Un mapeo $f: U \subset E \to F$ es derivable en $u_0 \in U$ si y solo si $\exists$ $Df(u_0) \in L(E,F)$ y un mapeo continuo $\phi: W \subset E \to F$ como en 3.1.8, tal que

$$f(u_0 + e) = f(u_0) + Df(u_0)e + \phi(e) \qquad (\text{con } k=1).$$

3.1.9. Linealidad de la Derivada. Sean $f,g: U \subset E \to F$ mapeos r-veces derivables y $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Entonces $\lambda f, f+g: U \subset E \to F$ son r-veces derivables con

$$D^r(f+g) = D^r f + D^r g \quad \text{y} \quad D^r(\lambda f) = \lambda D^r f .$$

Demostración.

Por inducción sobre r. Sea $u \in U$ y $e \in E$ entonces por ser f y g derivables en u se tiene

$$f(u+e) = f(u) + Df(u)e + \phi_1(e) \quad \text{y} \quad g(u+e) = g(u) + Dg(u)e + \phi_2(e)$$

donde $\lim_{e \to 0} \frac{\phi_i(e)}{\|e\|} = \bar{0} \quad i=1,2.$

Sumando las relaciones anteriores se tiene

$$(f+g)(u+e) = (f+g)(u) + (Df(u) + Dg(u))e + (\phi_1(e) + \phi_2(e))$$

noto que $\phi_1 + \phi_2$ es $o(e)$. Por tanto $f+g$ es derivable en u y $D(f+g)(u) = Df(u) + Dg(u)$.

Suponga que la proposición se cumple para los mapeos $(r-1)$-veces derivables.

Como f y g son r-veces derivables en U, en particular f y g son $(r-1)$-veces derivables. Entonces por hipótesis de inducción $f+g$ es $(r-1)$-veces derivable en U y

$$D^{r-1}(f+g) = D^{r-1}f + D^{r-1}g \quad .$$

Además como $D^{r-1}f$ y $D^{r-1}g$ son derivables en U, entonces, por la 1º parte de la demostración, $D^{r-1}(f+g)$ es derivable en U y

$$D^r(f+g) = D(D^{r-1}(f+g)) = D(D^{r-1}f + D^{r-1}g) = D(D^{r-1}f) + D(D^{r-1}g) = D^r f + D^r g \; .$$

Por tanto $f+g$ es r-veces derivable y $D^r(f+g) = D^r f + D^r g$.

De manera similar se prueba que λf es r-veces derivable .

3.1.10. Derivada de un Producto Cartesiano. Sean $f_i : U \subset E \to F_i$, $1 \le i \le n$, mapeos r-veces derivables. Entonces $f = f_1 \times \cdots \times f_n : U \subset E \longrightarrow F_1 \times \cdots \times F_n$ definido por $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u))$ es r-veces derivable en U y

$$D^r f = D^r f_1 \times \cdots \times D^r f_n \quad .$$

Demostración.

Por inducción sobre r. Sea $u \in U$ entonces por ser f_i, $1 \le i \le n$ derivable en u

$$f(u+e) = (f_1(u+e), \ldots, f_n(u+e)) = (f_1(u) + Df_1(u)e + \phi_1(e), \ldots, f_n(u) + Df_n(u)e + \phi_n(e))$$

$$= (f_1(u), \ldots, f_n(u)) + (Df_1(u)e, \ldots, Df_n(u)e) + (\phi_1(e), \ldots, \phi_n(e)) \quad =$$

$$f(u) + (Df_1(u)e, \dots, Df_n(u)e) + \phi(e) \quad , \text{ donde } \quad \phi(e) = (\phi_1(e), \dots, \phi_n(e)) .$$

Considerando la norma del máximo en $F_1 \times \cdots \times F_n$, se tiene

$$\lim_{e \to 0} \frac{\|\phi(e)\|}{\|e\|} = \lim_{e \to 0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|\phi_i(e)\|}{\|e\|} \right) = 0$$

ya que por ser cada f_i, $1 \leq i \leq n$, derivable se tiene que $\lim_{e \to 0} \frac{\|\phi_i(e)\|}{\|e\|} = 0$.

Por tanto f es derivable en u y $Df(u) = (Df_1(u), \dots, Df_n(u))$.

Suponga que la proposición se cumple para los mapeos $(r-1)$-veces derivables.

Como los f_i, $1 \leq i \leq n$, son r-veces derivables, en particular son $(r-1)$-veces derivables. Entonces por hipótesis de inducción $f = f_1 \times \cdots \times f_n$ es $(r-1)$-veces derivable en U y

$$D^{r-1} f = D^{r-1} f_1 \times \cdots \times D^{r-1} f_n .$$

Además como los $D^{r-1} f_i$, $1 \leq i \leq n$, son derivables en U, entonces, por la 1ª parte de la demostración, $D^{r-1} f_1 \times \cdots \times D^{r-1} f_n = D^{r-1} f$ es derivable en U y

$$D^r f = D(D^{r-1} f) = D(D^{r-1} f_1) \times \cdots \times D(D^{r-1} f_n) = D^r f_1 \times \cdots \times D^r f_n .$$

Por tanto f es r-veces derivable en U y $D^r f = D^r f_1 \times \cdots \times D^r f_n$.

3.1.11. Definición. (i) Sea E un espacio vectorial normado, $U \subset E$ abierto y $f: U \subset E \to \mathbb{R}$ derivable, así $Df(u) \in L(E,\mathbb{R}) = E^*$. En este caso se denota $df(u)$ por $Df(u)$ y se llama la diferencial de f. Luego $df: U \to E^*$.

(ii) Si E es un espacio de Hilbert real, el gradiente de f es el mapeo $\operatorname{grad} f = \nabla f : U \to E$ caracterizado por

$$\langle \nabla f(u), e \rangle = df(u)e \, .$$

Note que la existencia de $\nabla f(u)$ requiere el Teorema de Representación de Riesz, ya que como $df(u) \in E^*$ el Teorema garantiza que $\exists$ un $e_u \in E$ tal que $\langle e_u, \cdot \rangle = df(u)$, así $e_u = \nabla f(u)$.

3.1.12. Proposición. Sea $U \subset E$ abierto y $f: U \subset E \to F$ derivable en U. Entonces para cada $u_0 \in U$ existe una constante $M > 0$ y una $\delta_0 > 0$ tal que $\|u - u_0\| < \delta_0$ implica $\|f(u) - f(u_0)\| \leq M \|u - u_0\|$. En particular f es continua en U.

Demostración.

Sea $u_0 \in U$ y $\varepsilon_0 = 1$. Por ser f derivable en u_0 $\exists$ $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|u - u_0\| < \delta \ \text{ implica } \ \|f(u_0) - f(u) - Df(u_0)(u - u_0)\| \leq \|u - u_0\| .$$

Por consiguiente

$$\|f(u)-f(u_0)\| \leq \|Df(u_0)(u-u_0)\| + \|u-u_0\| \leq$$

$$\|Df(u_0)\|\,\|u-u_0\| + \|u-u_0\| = (\|Df(u_0)\|+1)\,\|u-u_0\|.$$

El resultado se sigue tomando $M = \|Df(u_0)\|+1$.

3.1.13. Teorema (Regla de la Cadena). Suponga que $f: U\subset E \to F$ y $g: V\subset F \to G$, con $f(U)\subset V$, son derivables (respectivamente C^r). Entonces $g\circ f: U\subset E \to G$ es derivable (respectivamente C^r) y

$$D(g\circ f)(u) = Dg(f(u))\circ Df(u).$$

Demostración. Sea $u_0\in U$.

Por hipótesis, dado ε tal que $0<\varepsilon<1$, existe $r>0$ tal que, para $\|e\|\leq r$ y $\|v\|\leq r$, podemos escribir

$$f(u_0+e) = f(u_0) + Df(u_0)e + O_1(e)$$

$$g(f(u_0)+v) = g(f(u_0)) + Dg(f(u_0))v + O_2(v)$$

con $\|O_1(e)\|\leq \varepsilon\|e\|$ y $\|O_2(v)\|\leq\varepsilon\|v\|$. Por otra parte, como $Df(u_0)$ y $Dg(f(u_0))$ son continuos, existen constantes $a>0$ y $b>0$ tal que, para cualquier $e\in E$ y $v\in F$,

$$\|Df(u_0)e\| \leq a\|e\| \quad \text{y} \quad \|Dg(f(u_0))v\| \leq b\|v\|$$

por consiguiente

$$\|Df(u_0)e + o_1(e)\| \leq (a+1)\|e\|$$

para $\|e\| \leq r$. Por tanto, para $\|e\| \leq r/(a+1)$, tenemos que

$$\| o_2(Df(u_0)e + o_1(e))\| \leq (a+1)\varepsilon \|e\|$$

y

$$\| Dg(f(u_0))\cdot o_1(e)\| \leq b\varepsilon \|e\| .$$

Por consiguiente podemos escribir

$$\begin{aligned} g\circ f(u_0+e) &= g(f(u_0) + Df(u_0)e + o(e)) \\ &= g\circ f(u_0) + Dg(f(u_0))\circ Df(u_0)e + Dg(f(u_0))\, o_1(e) + o_2(Df(u_0)e + o_1(e)) \end{aligned}$$

con $\| Dg(f(u_0))\, o_1(e) + o_2(Df(u_0)e + o_1(e))\| \leq (a+b+1)\,\varepsilon \|e\|$.

Lo cual prueba que $g\circ f$ es derivable en u_0 y $D(g\circ f)u_0 = Dg(f(u_0))\circ Df(u_0)$.
Dado que $u_0 \in U$ fue arbitraria se tiene lo afirmado.

Ahora demostremos que si f y g son de clase C^r entonces $g\circ f$ es de clase C^r.
Lo probaremos por inducción sobre r.
Suponga que f y g son C^1 y veamos que $g\circ f$ es C^1.
Por la 1ª parte de la demostración $g\circ f$ es derivable.

Para ver que $D(g \circ f) : U \subset E \to L(E,G)$ es continua considere los siguientes mapeos:

$comp : L(F,G) \times L(E,F) \to L(E,G)$ tal que $comp(B,A) = B \circ A$, el cual es C^r, $\forall\, r \in \mathbb{N}$.

$[(Dg) \circ f] \times Df : U \subset E \to L(F,G) \times L(E,F)$ tal que $([(Dg)\circ f] \times Df)(u) = (Dg(f(u)), Df(u))$, el cual es continuo ya que f y g son C^1.

Por tanto $comp \circ [(Dg) \circ f) \times Df] = D(g \circ f) : U \subset E \to L(E,G)$ es continuo. Luego $g \circ f$ es C^1.

Suponga que la afirmación se cumple para mapeos C^{r-1}. Como f y g son C^r entonces Dg es C^{r-1}, así por hipótesis de inducción

$$(Dg) \circ f : U \subset E \to L(F,G) \quad \text{es} \quad C^{r-1}.$$

Además Df es C^{r-1}, con lo cual se tiene, por 3.1.10, que

$$[(Dg) \circ f] \times Df : U \subset E \to L(F,G) \times L(E,F) \quad \text{es} \quad C^{r-1}.$$

Por otra parte como el mapeo $comp$ es C^r, entonces por hipótesis de inducción

$$\mathrm{comp} \circ ([(Dg) \times f] \times Df) = D(g \circ f) : U \subset E \to L(E, G)$$

es C^{r-1}. Por tanto $g \circ f$ es C^r.

3.1.14. Proposición (Regla de Leibniz). Sean $f_i : U \subset E \to F_i$, $i = 1, 2$, mapeos derivables (respectivamente C^r) y $B : F_1 \times F_2 \to G$ un mapeo bilineal y continuo. Entonces $B \circ (f_1 \times f_2) : U \subset E \to G$ es derivable (respectivamente C^r) y

$$D(B \circ (f_1 \times f_2))(u)e = B(Df_1(u)e, f_2(u)) + B(f_1(u), Df_2(u)e).$$

Demostración.

Por 3.1.10 $f_1 \times f_2 : U \subset E \to F_1 \times F_2$ es C^r, además B es C^r para toda $r \in \mathbb{N}$. Entonces por la regla de la cadena $B \circ (f_1 \times f_2)$ es C^r y

$D(B \circ (f_1 \times f_2))(u)e = DB((f_1 \times f_2)(u)) \circ D(f_1 \times f_2)(u)e =$

$DB((f_1(u), f_2(u)))(Df_1(u)e, Df_2(u)e) = B(Df_1(u)e, f_2(u)) + B(f_1(u), Df_2(u)e).$

3.1.15. Definición. Sea $f : U \subset E \to F$ un mapeo, $u \in U$ y $e \in E$ fijo. Definimos la derivada direccional de f en u en la dirección e como

$$\frac{d}{dt} f(u + te) \Big|_{t=0}$$

si existe. (Denotada $D_e f(u)$)

Sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto y $c : U \subset \mathbb{R} \to E$. Si c es derivable, entonces $Dc(t) \in L(\mathbb{R}, E)$. Recuerde que el espacio $L(\mathbb{R}, E)$ es isomorfo a E $(A \mapsto A(1), 1 \in \mathbb{R})$. Por consiguiente denotamos

$$c'(t) = Dc(t) \cdot 1 \quad , 1 \in \mathbb{R}$$

donde
$$c'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} .$$

3.1.16. Proposición. Si $f : U \subset E \to F$ es derivable en $u \in U$, entonces las derivadas direccionales de f en u existen y están dadas por

$$\frac{d}{dt} f(u+te)\Big|_{t=0} = Df(u)e \quad , \quad \|e\| = 1 .$$

Demostración.

Sea $e \in E$ tal que $\|e\| = 1$, y $c : \mathbb{R} \to E$ definido por $c(t) = u + te$. Como c es continuo y $U \subset E$ abierto existe $\lambda > 0$ tal que $c(-\lambda, \lambda) \subset U$. Además c es derivable, en particular en 0, así por la regla de la cadena se tiene que $f \circ c$ es derivable en $0 \in (-\lambda, \lambda)$ y

$$\frac{d}{dt} f(u+te)\Big|_{t=0} = D(f \circ c)(0) = Df(u) \circ Dc(0) \cdot 1 = Df(u) e .$$

3.1.17. Teorema Fundamental del Calculo.

(i) Si $g:[a,b]\to F$ es continuo, con F un espacio normado real, entonces el mapeo $f:(a,b)\to F$ definido por

$$f(t)=\int_a^t g(s)\,ds \quad \text{es derivable} \quad y \quad f'=g.$$

(ii) Si $f:[a,b]\to F$ es continuo, derivable en (a,b), y f' se extiende a un mapeo continuo en $[a,b]$, entonces

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(s)\,ds .$$

Demostración.

(i) Sea $\varepsilon>0$ y $t_0\in(a,b)$. Como g es continua en t_0 existe $\delta>0$ tal que, si $|s-t_0|<\delta$ entonces $\|g(s)-g(t_0)\|<\varepsilon$. Por otra parte, dado que la integral es un mapeo lineal y continuo, se tiene que

$$\|f(t_0+h)-f(t_0)-h\,g(t_0)\|=\left\|\int_{t_0}^{t_0+h}(g(s)-g(t_0))\,ds\right\| \leq$$

$$\leq |h|\ \sup\{\|g(s)-g(t_0)\| \mid t_0\leq s\leq t_0+h\}$$

Por consiguiente: si $|h|<\delta$ entonces

$$\|f(t_0+h)-f(t_0)-h\,g(t_0)\|\leq \varepsilon|h|$$

Luego f es derivable y $f'(t_0)=g(t_0)$.

(ii) Defina $h:[a,b]\to F$ por $h(t)=\left(\int_a^t f'(s)\,ds\right)-f(t)$.

Por (i), $h'(t)=0$ en (a,b) y h es continua en $[a,b]$.
Se afirma que $h(t)=h(a)$ $\forall$ $t\in[a,b]$. Si para algún $t\in[a,b]$ $h(t)\neq h(a)$, entonces por 2.2.16 (consecuencia del Teorema de Hahn-Banach) existe $\lambda\in F^*$ tal que $l(h(t)-h(a))\neq 0$ i.e $l\circ h(t)\neq l\circ h(a)$. Además, $l\circ h$ es derivable en (a,b) y su derivada es cero, ya que $D(l\circ h)(t)=l(h'(t))$.
Así por calculo elemental, $l\circ h$ es constante en $[a,b]$, una contradicción. Por consiguiente $h(t)=h(a)$ $\forall$ $t\in[a,b]$.
En particular $h(a)=h(b)$, i.e

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(s)\,ds.$$

3.1.18. Proposición. Sean E y F espacios vectoriales reales, $f:U\subset E\to F$ un mapeo C^1, y $x,y\in U$. Suponga que el segmento de recta $\overline{(x,y)}=\{(1-t)x+ty \mid t\in[0,1]\}$ esta contenido en U. Entonces

$$f(y)-f(x)=\int_0^1 Df((1-t)x+ty)\cdot(y-x)\,dt=\left(\int_0^1 Df((1-t)x+ty)\,dt\right)\cdot(y-x).$$

Demostración. Sea $c:[0,1]\to U$ tal que $c(t)=(1-t)x+ty$.
Si $g(t)=f\circ c(t)$ entonces por el Teorema Fundamental del Calculo, y la regla de la cadena se tiene que

$$g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(t)\,dt=\int_0^1 Df(c(t))\cdot c'(t)\,dt \qquad \text{i.e}$$

$$f(y)-f(x)=\int_0^1 Df((1-t)x+ty)\cdot(y-x)\,dt=\left(\int_0^1 Df((1-t)x+ty)\,dt\right)\cdot(y-x).$$

La última igualdad se tiene por 2.2.8-(I).

3.1.19. Desigualdad del Valor Medio. Suponga que $U\subset E$ es abierto y convexo. Si $f: U\subset E\to F$ es de clase C^1, entonces para todo $x,y\in U$

$$\|f(y)-f(x)\|\le \sup_{z\in\overline{(x,y)}}\{\|Df(z)\|\}\cdot\|y-x\|.$$

Demostración. Sean $x,y\in U$. Como U es convexo $\overline{(x,y)}\subset U$. Así, por la proposición anterior se tiene que

$$\|f(y)-f(x)\|=\left\|\left(\int_0^1 Df((1-t)x+ty)\,dt\right)(y-x)\right\|\le$$

$$\le\left(\int_0^1\|Df((1-t)x+ty)\|\,dt\right)\|y-x\|\le \sup_{z\in\overline{(x,y)}}\{\|Df(z)\|\}\,\|x-y\|.$$

3.1.20 Corolario. Sea $U\subset E$ abierto; las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) U es conexo

(ii) Si $f: U\subset E\to F$ es derivable y $Df(u)=0$ en U entonces f es constante.

Demostración. (i) $\to$ (ii). Suponga que U es conexo, y sea $f: U \subset E \to F$ derivable tal que $Df = 0$ en U. Probemos que f es constante. Sea $u_0 \in U$ fijo y considere el conjunto $S = \{u \in U \mid f(u) = f(u_0)\}$. Entonces $S \neq \phi$, dado que $u_0 \in S$, y S es cerrado, ya que por ser f continua $f^{-1}(f(u_0)) = S$ es cerrado. Veamos que S también es abierto. Si $u \in S$, existe una bola abierta $B_r(u) \subset U$. Se afirma que $B_r(u) \subset S$. Para verlo considere $e \in B_r(u)$ y aplique 3.1.19 para obtener que

$$\|f(u) - f(e)\| \leq \sup_{z \in \overline{(u,e)}} \{\|Df(z)\|\} \|u - e\| = 0$$

Así, $f(u) = f(e) = f(u_0)$ y $B_r(u) \subset S$. Luego S es abierto. La conexidad de U implica que $S = U$. Por tanto f es constante.

(ii) $\to$ (i). Suponga que se cumple (ii), y que $U = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \phi$, donde V_1 y V_2 son abiertos no triviales en E. Entonces el mapeo $f: U \subset E \to F$ definido por

$$f(u) = \begin{cases} \bar{0} & \text{si } u \in V_1 \\ \omega & \text{si } u \in V_2 \end{cases}$$

donde $\omega \in F$ es fijo y $\neq \bar{0}$. Dado que $V_1 \cap V_2 = \phi$ f está bien definida, es derivable y $Df = 0$, lo cual contradice (ii). Por tanto U es conexo.

3.1.21. Corolario. Sea $f : U \subset E \to F$ un mapeo C^1 y $x, y \in U$. Suponga que el segmento de línea $\overline{(x,y)}$ esta contenido en U. Entonces, para cada $u_0 \in U$, se tiene

$$\| f(y) - f(x) - Df(u_0)(y-x) \| \leq \|y-x\| \cdot \sup_{z \in \overline{(x,y)}} \{ \| Df(z) - Df(u_0) \| \}$$

Demostración. Considere el mapeo $g : U \subset E \to F$ definido por $g(x) = f(x) - Df(u_0)x$, el cual es C^1, y $Dg(x) = Df(x) - Df(u_0)$ para cualquier $x \in U$. Aplicando la desigualdad del valor medio a este mapeo se obtiene que

$$\| f(y) - f(x) - Df(u_0)(y-x) \| \leq \|y-x\| \cdot \sup_{z \in \overline{(x,y)}} \{ \| Df(z) - Df(u_0) \| \} .$$

3.1.22. Proposición. Sean E, F espacios de Banach, $U \subset E$ abierto y conexo. Sea $f_n : U \subset E \to F$ una sucesión de funciones derivables que satisfacen :

a) Existe $u_0 \in U$ tal que $(f_n(u_0))$ converge.

b) Para cada $u \in U$ existe una bola abierta $B(u) \subset U$ con centro en u tal que (Df_n) converge uniformemente en $B(u)$.

Entonces :

i) Para cada $u \in U$, la sucesión $(f_n(u))$ converge uniformemente en $B(u)$.

ii) Sea $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. Entonces f es derivable y $Df = \lim_{n \to \infty} Df_n$.

Demostración.

(i) Sea $W=\{x\in U \mid (f_n(x))$ es convergente $\}$. Veamos que W es abierto y cerrado en U. Como U es conexo y $u_0\in W$ tendremos que $W=U$.

Sea $u\in U$ y considere la bola abierta $B_r(u)$ dada por (b). Para $x\in B_r(u)$, se tiene por la desigualdad del valor medio aplicada a f_n-f_m, que:

$$(*)\qquad \|f_n(x)-f_m(x)-[f_n(u)-f_m(u)]\| \leq \sup_{z\in B_r(u)} \|Df_n(z)-Df_m(z)\|\,\|x-u\|$$

$$\leq r\cdot \sup_{z\in B_r(u)} \|Df_n(z)-Df_m(z)\| \,.$$

Como la sucesión (Df_n) converge uniformemente en $B_r(u)$, y F es completo, esto prueba que si la sucesión $(f_n(x))$ es convergente en algún punto de $B_r(u)$, también es convergente en todo punto de $B_r(u)$. Este razonamiento prueba que W es abierto y cerrado en U, como W es no vacío y U es conexo, se tiene que $W=U$.

El mismo razonamiento prueba que (f_n) converge uniformemente en $B_r(u)$. En efecto, como la sucesión (Df_n) converge uniformemente en $B_r(u)$ y (f_n) converge en un punto de $B_r(u)$, entonces al tomar el límite cuando $m\to\infty$, en $(*)$, se obtiene la afirmación.

Por tanto se satisface (i).

(iii) Sea $g = \lim_{n\to\infty} Df_n$. Finalmente probaremos que g es la derivada de $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $u \in U$. Por la hipótesis (b) existe una bola abierta $B_r(u) \subset U$ tal que (Df_n) converge uniformemente en $B_r(u)$. Por consiguiente existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, si $m, n \geq K$ entonces

$$\| Df_n - Df_m \| < \varepsilon/r \quad \text{y} \quad \| Df_n - g \| < \varepsilon .$$

Si en (*) tomamos el límite cuando $m \to \infty$, vemos que para $n \geq K$ y $x \in B_r(u)$ se tiene, por la convergencia uniforme de (Df_n), que

(1) $\qquad \| f_n(x) - f(x) - [f_n(u) - f(u)] \| \leq \| x - u \| \varepsilon.$

Fije $n \geq K$. Entonces por el teorema del valor medio existe $\delta > 0$ tal que, si $\| x - u \| < \delta$ entonces

(2) $\qquad \| f_n(x) - f_n(u) - Df_n(u)(x-u) \| \leq \| x - u \| \varepsilon .$

Finalmente, utilizando que $\| Df_n - g \| < \varepsilon$. Concluimos de (1) y (2) que

$\| f(x) - f(u) - g(u)(x-u) \| = \| f(x) - f(u) - g(u)(x-u) + f_n(x) - f_n(u) - Df_n(u)(x-u)$
$- f_n(x) + f_n(u) + Df_n(u)(x-u) \| \leq \| f_n(x) - f(x) - [f_n(u) - f(u)] \| + \| f_n(x) - f_n(u) -$
$Df_n(u)(x-u) \| + \| Df_n(u)(x-u) - g(u)(x-u) \| < \varepsilon + \varepsilon + \| Df_n - g \| < 3\varepsilon .$

Esto prueba que f es derivable en u y $Df(u) = g(u)$.

3.1.23. Definición. Sea $U \subset E_1 \times \cdots \times E_n$ abierto, $f : U \to F$ un mapeo y $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U$. Sea $I_u^i : E_i \to E_1 \times \cdots \times E_n$, $1 \le i \le n$, el mapeo definido por $I_u^i(v_i) = (u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ el cual es claramente continuo (de hecho $I_u^i(v_i) = (u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_n) + (0, \ldots, v_i, \ldots 0)$). Consideremos el mapeo parcial $f \circ I_u^i : (I_u^i)^{-1}(U) \subset E_i \to F$ donde $f \circ I_u^i(v_i) = f(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)$. Si este mapeo parcial es derivable en u_i, llamamos a su derivada en u_i la derivada parcial de f con respecto a la i-ésima variable en el punto u, y se denota por $D_i f(u) \in L(E_i, F)$.

3.1.24. Proposición. Sea $U \subset E_1 \times \cdots \times E_n$ abierto y $f : U \to F$ un mapeo.

(i) Si f es derivable, entonces las derivadas parciales existen y están dadas por

$$D_i f(u) e_i = Df(u)(0, \ldots, e_i, \ldots, 0) \qquad 1 \le i \le n.$$

(ii) Si f es derivable, entonces

$$Df(u)(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(u) e_i$$

(iii) f es de clase C^r si y solo si $D_i f : U \to L(E_i, F)$, $1 \le i \le n$, existen y son de clase C^{r-1}.

Demostración.

Daremos la prueba para $n=2$, ya que el caso general se demuestra de manera similar. Sea $u \in U$.

(i) Note que el mapeo $I_u^1 : E_1 \to E_1 \times E_2$, con $I_u^1(v_1) = (0, u_2) + (v_1, 0)$ es C^∞ y $DI_u^1(u_1) = I_1 \in L(E_1, E_1 \times E_2)$ esta dada por $I_1(e_1) = (e_1, 0)$. Entonces por la regla de la cadena

$$D_1 f(u) e_1 = D(f \circ I_u^1)(u_1) e_1 = Df(u) \circ DI_u^1(u_1) e_1 = Df(u) \circ I_1(e_1)$$

De manera similar se prueba que $D f_2(u) e_2 = Df(u) \circ I_2(e_2)$ donde $DI_u^2(u_2) = I_2$, y $I_2(e_2) = (0, e_2)$.

(ii) Sean $P_i : E_1 \times E_2 \to E_i$, $i = 1,2$ las proyecciones canonicas, las cuales son lineales y continuas. Considere el mapeo $(I_1 \circ P_1) + (I_2 \circ P_2) =$ identidad en $E_1 \times E_2$. Entonces

$$Df(u) = Df(u) \circ [(I_1 \circ P_1) + (I_2 \circ P_2)] \quad y$$

$$Df(u)(e_1, e_2) = Df(u)(I_1 \circ P_1(e_1, e_2) + I_2 \circ P_2(e_1, e_2)) = Df(u)(I_1(e_1) + I_2(e_2)) =$$

$$= Df(u)((e_1, 0) + (0, e_2)) = Df(u)(e_1, 0) + Df(u)(0, e_2)$$

Asi, por (i) se tiene que $Df(u)(e_1, e_2) = D_1 f(u) e_1 + D_2 f(u) e_2$.

(iii) Probemos la afirmacion primero para $r = 1$.

$\Rightarrow$) Como f es C^1 se tiene del inciso (i) que las derivadas parciales $D_i f : U \to L(E_i, F)$ $i = 1,2$, existen. Para ver que son continuas considere los siguientes mapeos

$\Phi_i : L(E_1 \times E_2, F) \to L(E_i, F)$ $i=1,2$, donde $\Phi_i(A) = A \circ I_i$, los cuales son mapeos lineales y continuos. Como Df es continuo y $D_i f = \Phi_i \circ Df$ $i=1,2$, entonces $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuos.

$\Leftarrow$) Suponga que $D_i f : U \to L(E_i, F)$ $i=1,2$, existen y son continuos. Probemos que f es derivable, y Df continuo. Sea $u=(u_1,u_2) \in U$ y $e=(e_1,e_2) \in E$ tal que $u+e \in U$. Aplicando consecutivamente 3.1.18 a los dos argumentos, obtenemos

$$f(u_1+e_1, u_2+e_2) - f(u_1,u_2) - D_1 f(u_1,u_2)e_1 - D_2 f(u_1,u_2)e_2 =$$

$$f(u_1+e_1,u_2+e_2) - f(u_1,u_2+e_2) - D_1 f(u_1,u_2)e_1 + f(u_1,u_2+e_2) - f(u_1,u_2) - D_2 f(u_1,u_2)e_2 =$$

$$\left(\int_0^1 (D_1 f(u_1+te_1, u_2+e_2) - D_1 f(u_1,u_2))\, dt\right)e_1 + \left(\int_0^1 (D_2 f(u_1,u_2+te_2) - D_2 f(u_1,u_2))\, dt\right)e_2 .$$

Tomando normas y usando en cada término la desigualdad $\|e_1\|, \|e_2\| \le \|(e_1,e_2)\| = \max\{\|e_1\|, \|e_2\|\}$, obtenemos que

$$\|f(u_1+e_1,u_2+e_2) - f(u_1,u_2) - D_1 f(u_1,u_2)e_1 - D_2 f(u_1,u_2)e_2\| \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le t\le 1} \|D_1 f(u_1+te_1, u_2+e_2) - D_1 f(u_1,u_2)\| \right.$$

$$\left. + \sup_{0\le t\le 1} \|D_2 f(u_1,u_2+te_2) - D_2 f(u_1,u_2)\| \right) \|(e_1,e_2)\| .$$

Dado $\varepsilon>0$, por la continuidad de las derivadas parciales existen $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ tal que, si $\|e_1\|<\delta_1$ y $\|e_2\|<\delta_2$ entonces

$$\|D_1f(u_1+te_1,u_2+e_2)-D_1f(u_1,u_2)\|<\varepsilon/2 \quad y \quad \|D_2f(u_1,u_2+te_2)-D_2f(u_1,u_2)\|<\varepsilon/2 .$$

Así, si $\|(e_1,e_2)\|=\max\{\|e_1\|,\|e_2\|\}\leq \inf\{\delta_1,\delta_2\}$, entonces

$$\|f(u_1+e_1,u_2+e_2)-f(u_1,u_2)-D_1f(u_1,u_2)e_1-D_2f(u_1,u_2)e_2\|\leq\varepsilon\|(e_1,e_2)\| .$$

Por tanto f es derivable en $u=(u_1,u_2)\in U$. La continuidad de Df se obtiene como un caso particular de lo siguiente.

Probemos la afirmación para r. Considere los siguientes mapeos: $\Phi_i : L(E_1\times E_2,F)\to L(E_i,F)$ y $\Psi_i : L(E_i,F)\to L(E_1\times E_2,F)$ $i=1,2$, definidos por

$$\Phi_i(A)=A\circ I_i \quad y \quad \Psi_i(B_i)=B_i\circ P_i \quad i=1,2.$$

Note que Φ_i y Ψ_i son lineales y continuos. Por tanto Φ_i y Ψ_i son de clase C^r. Por otra parte

$$D_if=\Phi_i\circ Df \quad y \quad Df=(\Psi_1\circ D_1f)+(\Psi_2\circ D_2f),$$

en efecto:

$$(\Phi_i\circ Df)(u)=\Phi_i(Df(u))=Df(u)\circ I_i=D_if(u) \quad y$$

$$[(\Psi_1\circ D_1f)+(\Psi_2\circ D_2f)](u)=\Psi_1(D_1f(u))+\Psi_2(D_2f(u))=(D_1f(u)\circ P_1)+(D_2f(u)\circ P_2)=$$
$$=Df$$

Por tanto, f es $C^r \iff D_1f$ y D_2f existen y son C^{r-1}.

Encontremos una expresión para $D^r f(u)$ en términos de sus derivadas parciales de orden r. Pero antes probemos el siguiente Lema.

3.1.25 Lema. Sea $\phi : \mathbb{R} \to L(E,F)$ un mapeo derivable y $w \in F$ fijo. Entonces

$$\left(\frac{d}{dt} \phi(t) \Big|_{t=0} \right) w = \frac{d}{dt} \phi(t) w \Big|_{t=0}$$

Demostración. Considere el mapeo $ev : L(E,F) \to F$ definido por $ev(A) = A(w)$. Note que ev es un mapeo lineal y continuo, así ev es derivable y $Dev(A) = ev$, $A \in L(E,F)$. Por otra parte

$$\frac{d}{dt} \phi(t) w \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (ev \circ \phi)(t) \Big|_{t=0} = Dev(\phi(0)) \frac{d}{dt} \phi(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= ev\left(\frac{d}{dt} \phi(t) \Big|_{t=0} \right) = \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \Big|_{t=0} \right) w .$$

Sea $f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ un mapeo de clase C^r, en la proposición 3.1.24 vimos que las derivadas parciales $D_i f : U \to L(E_i, F)$ $1 \le i \le n$, existen y son de clase C^{r-1}. Además para $u \in U$ y $e = (e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ se tiene

$$Df(u)e = \sum_{i=1}^{n} D_i f(u) e_i$$

Encontremos una formula similar para $D^r f(u)$, en primer lugar para $r=2$. Sea $u\in U$ y $v,w\in E_1\times\cdots\times E_n$, entonces como el mapeo $Df: U\to L(E_1\times\cdots\times E_n, F)$ es derivable se tiene

$$D^2f(u)v = D(Df)(u)v = \frac{d}{dt}Df(u+tv)\Big|_{t=0}$$

El cual es un elemento en $L(E_1\times\cdots\times E_n, F)$ y al evaluarlo en w se tiene

$$D^2f(u)(v)(w) = \left(\frac{d}{dt}Df(u+tv)\Big|_{t=0}\right)w = \frac{d}{dt}Df(u+tv)\,w\Big|_{t=0}.$$

La última igualdad se tiene por el lema anterior.

Además $Df(u+tv)w = \sum_{i=1}^{n} D_if(u+tv)w_i$, así

$$D^2f(u)(v)(w) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} D_if(u+tv)\,w_i\right)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}D_if(u+tv)\Big|_{t=0}\right)w_i .$$

Por otra parte como cada derivada parcial $D_if: U\to L(E_i, F)$ es derivable, se tiene

$$\frac{d}{dt}D_if(u+tv)\Big|_{t=0} = D(D_if)(u)v = \sum_{k=1}^{n} D_k(D_if)(u)v_k .$$

Por consiguiente

$$D^2f(u)(v)(w) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} D_k(D_if)(u)v_k\right)w_i = \sum_{i,k=1}^{n} D_k(D_if)(u)(v_k)(w_i).$$

Denotando $D_k(D_if)(u) = D^2_{ki}f(u)\in L(E_k, L(E_i,F)) \cong L(E_k, E_i; F)$,

$$D^2f(u)(v,w)=\sum_{i,k=1}^{n} D^2_{ki}f(u)(v_k)(w_i)=\sum_{i,k=1}^{n} D^2_{ki}f(u)(v_k,w_i) \; .$$

En general se tiene

$$D^r f(u)(v^1,\ldots,v^r)=\sum_{i_1,\ldots,i_r}^{n} D^r_{i_1,\ldots,i_r} f(u)(v^1_{i_1},\ldots,v^r_{i_r})$$

con $v^i=(v^i_1,\ldots,v^i_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ $i=1,\ldots,r$ y $D^r_{i_1,\ldots,i_r}f(u)$ en $L(E_{i_1},\ldots,E_{i_r};F)$.

3.1.26. Lema. Suponga que $f:U\subset E$ es un mapeo 2-veces derivable. Entonces para cada $u_0\in U$ $\dfrac{\|f(u_0+u+v)-f(u_0+u)-f(u_0+v)-f(u_0)-D^2f(u_0)(u,v)\|}{(\|u\|+\|v\|)^2}$ tiende a cero cuando u y v tienden a cero. En particular, $D^2f(u_0)\in L^2_s(E,F)$, i.e $\forall\, u,v\in E$

$$D^2f(u_0)(u,v)=D^2f(u_0)(v,u) \; .$$

Demostración.

Puesto que Df es derivable en u_0, dado $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ tal que si $\|e\|<2\delta$ entonces

$$\|Df(u_0+e)-Df(u_0)-D^2f(u_0)e\|\le\varepsilon\|e\| \qquad (1).$$

Escoja v tal que $\|v\|<\delta$ y defina el mapeo $g_v: B_\delta(0)\to F$ por

$$g_v(u)=f(u_0+u+v)-f(u_0+u)-f(u_0+v)-f(u_0)-D^2f(u_0)(v)(u) \; .$$

Note que $D^2f(u_0)(v):E\to F$ es un mapeo lineal continuo y su derivada en cualquier punto v es $Df^2(u_0)(v)$. Por consiguiente

$$Dg_v(u) = Df(u_0+u+v) - Df(u_0+u) - D^2f(u_0)(v) =$$
$$= [Df(u_0+u+v) - Df(u_0) - D^2f(u_0)(u+v)] - [Df(u_0+u) - Df(u_0) - D^2f(u_0)u],$$

así, por la desigualdad (1) se tiene que $\|Dg_v(u)\| \leq 2\varepsilon(\|u\|+\|v\|)$.
Como $g_v(0)=0$, aplicando la Desigualdad del Valor Medio se tiene que

$$\|g_v(u)\| = \|g_v(u) - g_v(0)\| \leq 2\varepsilon(\|u\|+\|v\|)\|u\| \leq 2\varepsilon(\|u\|+\|v\|)^2 .$$

Con lo que se tiene la 1ª afirmación del Lema.
Note que $f(u_0+u+v) - f(u_0+u) - f(u_0+v) - f(u_0)$ es simétrico en u y v. Veamos que para $u,v \in E$ $D^2f(u_0)(u,v) = D^2f(u_0)(v,u)$.
Es claro que si u o v es cero la igualdad se cumple.
Fije u,v y suponga que son distintos de cero. Sea $t \in \mathbb{R}$ $t \neq 0$. Entonces

$$\|D^2f(u_0)(u,v) - D^2f(u_0)(v,u)\| = \left\|D^2f(u_0)\left(\frac{tu}{|t|},\frac{tv}{|t|}\right) - D^2f(u_0)\left(\frac{tv}{|t|},\frac{tu}{|t|}\right)\right\| =$$

$$\frac{1}{|t|^2}\|D^2f(u_0)(tu,tv) - D^2f(u_0)(tv,tu)\| \leq \frac{1}{|t|^2}\left(\|D^2f(u_0)(tu,tv) - g_{tu}(tv)\| +\right.$$

$$\left.\|D^2f(u_0)(tv,tu) - g_{tv}(tu)\|\right).$$ Así, dado $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ tal que

si $|t| < \delta/\|(u,v)\|$ entonces $\|D^2f(u_0)(v,u) - D^2f(u_0)(u,v)\| \leq \varepsilon$ y esto $\forall\, \varepsilon>0$. Por tanto $D^2f(u_0)(v,u) = D^2f(u_0)(u,v)$.
Dado que u,v fueron arbitrarios se tiene la afirmación.

3.1.27. Lema. Sea $f: U \subset E \to F$ n-veces derivable, y $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1} \in E$ fijos. Entonces el mapeo $g: U \subset E \to F$ definido por

$$g(u) = D^{n-1}f(u)\, e_1 e_2 \cdots e_{n-1}$$

es derivable y

$$Dg(u)e = D^n f(u)\, e \cdot e_1 \cdots e_{n-1}.$$

Demostración.

Defina el mapeo $\lambda: L^{n-1}(E,F) \to F$ por $\lambda(A) = A(e_1, \ldots, e_{n-1})$

λ es un mapeo lineal y continuo, por tanto C^∞.

Como $Df^{n-1}: U \to L^{n-1}(E,F)$, entonces $g = \lambda \circ D^{n-1}f$,

en efecto, $g(u) = \lambda \circ D^{n-1}f(u) = D^{n-1}f(u)\, e_1 e_2 \cdots e_{n-1}$.

Por consiguiente

$$Dg(u) = D(\lambda \circ D^{n-1}f) = \lambda \circ D^n f(u) \quad , \quad \text{así}$$

$$Dg(u)e = \lambda \circ D^n f(u)(e) = D^n f(u)(e)\, e_1 \cdots e_{n-1}.$$

3.1.28 Proposición. Sea $f: U \subset E \to F$ un mapeo de clase C^r, entonces $D^r f(u) \in L^r_s(E,F)$, i.e $D^r f(u)$ es simétrico.

Demostración.

Por inducción sobre r. Para $r=2$ es el Lema 3.1.26.

Suponga que f es r-veces derivable en $u \in U$, y que la n-ésima derivada de cualquier mapeo es simétrica.

Sea σ una permutación en $\{2, \ldots, r\}$, así por hipótesis de inducción

$$D^{r-1}f(u)(v_2, \ldots, v_3) = D^{r-1}f(u)(v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(r)})$$

Tomando la derivada, en la igualdad anterior, respecto a u y manteniendo fijos $v_2, \ldots, v_3$ obtenemos por 3.1.27 que

$$D(D^{r-1}f)(u)(v_2,\ldots,v_r)v_1 = D^r f(u)(v_1, v_2, \ldots, v_r) = D^r f(u)(v_1, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(r)}).$$

Así $D^r f(u)$ es una mapeo simétrico en $v_2, \ldots, v_r$.
Como el grupo simetrico S_r es generado por la transposición $(1,2)$ y la permutaciones en $\{2,\ldots,n\}$. La afirmación se tendrá si vemos que $D^r f(u)(v_1,\ldots,v_r)$ no cambia cuando v_1 y v_2 se permután.
Para verlo tome $g = D^{r-2}f$ la cual es 2-veces derivable. Sabemos por 3.1.26 que para $v_1, v_2 \in E$

$$D^2 g(u)(v_1, v_2) = D^2 g(u)(v_2, v_1) \quad ,$$

y como $D^r f = D^2(D^{r-2}f)$ se tiene que

$$\begin{aligned} D^r f(u)(v_1, v_2, \ldots, v_r) &= D^2(D^{r-2}f)(u)\ (v_1, v_2)\ (v_3, \ldots, v_r) = \\ &= D^2(D^{r-2}f)(u)\ (v_2, v_1)\ (v_3, \ldots, v_r) \\ &= D^r f(u)(v_2, v_1, v_3, \ldots, v_r) \end{aligned}$$

Lo cual prueba la afirmación.

Suponga que $U \subset E$ es abierto. Entonces como $+ : E \times E \to E$ es continuo, existe un abierto $\tilde{U} \subset E \times E$ con las siguientes propiedades:

i) $U \times \{0\} \subset \tilde{U}$

ii) $u + th \in U$ para todo $(u,h) \in U$ y $t \in [0,1]$

iii) Si $(u,h) \in \tilde{U}$ entonces $u \in U$.

Para verlo considere $V = \{(u,h) \in +^{-1}(U) \mid u + th \in U \ \forall\, t \in [0,1]\}$. Se afirma que $V \subset E \times E$ es abierto. En efecto, sea $(u_0, h_0) \in V$ y defina $\sigma : [0,1] \to U$ por $\sigma(t) = u_0 + th_0$, σ es continuo. Como $\sigma([0,1]) \subset U$ es compacto $\exists\ \delta > 0$ tal que la bola abierta $B_\delta(u_0 + th_0) \subset U$ para cada $t \in [0,1]$. Así $B_{\delta/2}(u_0) \times B_{\delta/2}(h_0) \subset V$, ya que si $(u,h) \in B_{\delta/2}(u_0) \times B_{\delta/2}(h_0)$ entonces $u + th \in B_\delta(u_0 + th_0) \subset U$, para cada $t \in [0,1]$. Luego V es abierto, pues (u_0, h_0) se tomó arbitrario.
Ahora defina $\tilde{U} = V \cap (U \times E)$, es claro que $\tilde{U}$ satisface las propiedades (i)-(iii). El abierto $\tilde{U}$ se denomina un engrosamiento de U.

El recíproco del siguiente Teorema tiene su origen con Marcinkiewicz y Zigmund [1936], Whitney [1934a] y Glaeser [1958]. La demostración que se dá del recíproco se debe a Nelson [1969].

3.1.29. Teorema de Taylor. Un mapeo $f: U \subset E \to F$ es de clase C^p si y sólo si existen mapeos continuos

$$\varphi_r : U \to L_s^r(E,F) \ , \ r = 1, \dots, p \quad y \quad R : \tilde{U} \to L_s^p(E,F)$$

donde $\tilde{U}$ es un engrozamiento de U, tal que $\forall\ (u,h) \in \tilde{U}$,

$$f(u+h) = f(u) + \varphi_1(u)\cdot h + \frac{1}{2!}\varphi_2(u)\cdot h + \dots + \frac{1}{p!}\varphi_p(u)\cdot h^p + R(u,h)\cdot h^p \ ,$$

donde $h^r = (h,\dots,h)$ (r-veces) y $R(u,0)=0$. Si f es C^r entonces necesariamente $\varphi_r = D^r f$ y

$$R(u,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} \left(D^p f(u+th) - D^p f(u) \right) dt \ .$$

Demostración. $\Rightarrow$) Suponga que f es C^p, y probemos la afirmación por inducción sobre p. Si $p=1$ entonces por 3.1.

$$f(u+h) = f(u) + \left(\int_0^1 Df(u+th)\,dt\right)\cdot h = f(u) + Df(u)\cdot h + \left(\int_0^1 (Df(u+th) - Df(u))\,dt\right)\cdot h$$

lo cual prueba la afirmación para $p=1$.

La Regla de Leibnitz da la siguiente fórmula de integración por partes: Sea $V \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $[0,1] \subset V$, y $\psi_1 : V \to \mathbb{R}$, $\psi_2 : V \to F$ mapeos definidos por

$$\psi_1(t) = -\frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} \quad y \quad \psi_2(t) = D^{p-1} f(u+th)\cdot h^{p-1} \quad (h \text{ fijo}),$$

los cuales son C^1. Sea $B : \mathbb{R} \times F \to F$ el mapeo definido por

$B(t,v) = tv$, B es un mapeo bilineal continuo. Así

$$DB(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) = B(\varphi_1'(t),\varphi_2(t)) + B(\varphi_1(t),\varphi_2'(t)) ,$$

e integrando se tiene

$$\int_0^1 B(\varphi_1'(t),\varphi_2(t))\,dt = B(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\Big|_0^1 - \int_0^1 B(\varphi_1(t),\varphi_2'(t))\,dt \quad , \Rightarrow$$

$$\left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} D^{p-1}f(u+th)\,dt\right)\cdot h^{p-1} = \frac{1}{(p-1)!} D^{p-1}f(u)\cdot h^{p-1} + \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(u+th)\,dt\right)\cdot h^p .$$

Suponga que la afirmación se cumple para $p-1$, entonces

$$f(u+h) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} D^i f(u)\cdot h^i + R(u,h)\cdot h^{p-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} D^i f(u)\cdot h^i + \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} D^{p-1}f(u+th)\,dt\right)\cdot h^{p-1} - \frac{1}{(p-1)!} D^{p-1}f(u)\cdot h^{p-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} D^i f(u)\cdot h^i + \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(u+th)\,dt\right)\cdot h^p$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} D^i f(u)\cdot h^i + \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} \left(Df^p(u+th) - D^p f(u)\right)dt\right)\cdot h^p \qquad (*)$$

como se quería probar. $\left((*) \quad \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}\,dt = \frac{1}{p!} \right)$

($\Leftarrow$) Suponga que existen mapeos continuos $\varphi_r : U \to L_s^r(E,F)$ $r=1,\dots,p$ y $R : \tilde{U} \to L_s^p(E,F)$ que cumplen las hipótesis del Teorema. La prueba se hará por inducción sobre p.

Para $p=1$, existen mapeos continuos $\varphi_1 : U \to L(E,F)$ y $R : \tilde{U} \to L(E,F)$ tal que para todo $(u,h) \in \tilde{U}$

$$f(u+h) = f(u) + \varphi_1(u)\cdot h + R(u,h)\cdot h .$$

Además como R es continua y $R(u,0)=0$, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R(u,h)\cdot h\|}{\|h\|} \le \lim_{h\to 0} \frac{\|R(u,h)\|\,\|h\|}{\|h\|} = 0 .$$

Por tanto f es derivable y $Df(u)=\varphi_1(u)$, además f es C^1 ya que φ_1 es continuo.

Suponga que la afirmación se cumple para $p-1$. Así $\varphi_r = D^r f$, $1\le r\le p-1$. Ahora fije $u\in U$ y tome $\delta>0$ tal que $B_{2\delta}(u)\subset U$. Sean $h,k\in E$ tal que $\|h\|,\|k\|<\delta$ entonces $u+h+k\in U$. Escriba la fórmula del Teorema para $f(u+h+k)$ en dos formas distintas:

$$f(u+h+k) = f(u+h) + Df(u+h)\cdot k + \dots + \frac{1}{(p-1)!} D^{p-1}f(u+h)\cdot k^{p-1} + \frac{1}{p!}\varphi_p(u+h)\cdot k^p + R_1(u+h,k)\cdot k^p$$

$$f(u+h+k) = f(u) + Df(u)(h+k) + \dots + \frac{1}{(p-1)!} D^{p-1}f(u)\cdot(h+k)^{p-1} + \frac{1}{p!}\varphi_p(u)(h+k)^p + R_2(u,h+k)\cdot(h+k)^p$$

Por la r-linealidad y la simetría de $D^r f$ $r=2,\dots,p-1$, y la p-linealidad y simetría de φ_p, al restarle la 2ª igualdad a la 1ª y agrupando términos en k^r $r=1,\dots,p$ se obtiene

$$g_0(h) + g_1(h)\cdot k + \dots + g_{p-1}(h)\cdot k^{p-1} + g_p(h)\cdot k^p + R_1(u+h,k)\cdot k^p + R_2(u,h+k)\cdot(h+k)^p = 0$$

donde $g_r(h)\in L^r(E,F)$, $g_r(0)=0$ y

$$g_r(h) = \frac{1}{r!}\left[D^r f(u+h) - D^r f(u) - \sum_{i=1}^{p-1-r} \frac{1}{i!} D^{r+i} f(u)\cdot h^i - \frac{1}{(p-r)!}\varphi_p(u)\cdot h^{p-r} \right]$$

$0 \le r \le p-2$.

$$g_{p-1}(h) = \frac{1}{(p-1)!}\left[D^{p-1} f(u+h) - D^{p-1} f(u) - \varphi_p(u)\cdot h \right] \qquad y$$

$$g_p(h) = \frac{1}{p!}\left[\varphi_p(u+h) - \varphi_p(u) \right] .$$

Por continuidad de φ_p se tiene que $g_p(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Suponga que $\|k\|$ satisface que $\frac{1}{4}\|h\| \le \|k\| \le \frac{1}{2}\|h\|$. Dado que

$$\| g_p(h)\cdot k^p + R_1(u+h,k)\cdot k^p + R_2(u,h+k)\cdot(h+k)^p \| \le$$
$$(\|R_1(u+h,k)\| + \|g_p(h)\|)\cdot\|k\|^p + \|R_2(u,h+k)\|(\|h\|+\|k\|)^p \le$$
$$\{ \|R_1(u+h,k)\| + \|g_p(h)\| + \|R_2(u,h+k)\| \} (1+3^p)\frac{\|h\|^p}{2^p}$$

y la cantidad en corchetes $\to 0$ cuando $h \to 0$, ya que $g_p(h) \to 0$ y $R_1(u+h,0)=0$, $R_2(u,0)=0$, se sigue que

$$R_2(u,h+k)\cdot(h+k)^p - R_1(u+h,k)\cdot k^p - g_p(h)\cdot k^p = O(h^p) .$$

Por consiguiente $g_0(h) + g_1(h)\cdot k + \ldots + g_{p-1}(h)\cdot k^{p-1} = O(h^p)$. Afirmamos que sujeto a la condición $\frac{1}{4}\|h\| \le \|k\| \le \frac{1}{2}\|h\|$, cada $g_r(h)\cdot k^r = O(h^p)$ $r=0,\ldots,p-1$. En efecto, sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ números reales distintos entre sí, escogidos de tal forma que

$$\frac{1}{4}\|h\| \le \|\lambda_r k\| \le \frac{1}{2}\|h\| \quad y \quad 0<|\lambda_r|\le 1 .$$

Entonces para cada $r=0,1,\ldots,p-1$

$$g_0(h)+g_1(h)\cdot(\lambda_r k)+\ldots+g_{p-1}(h)(\lambda_r k)^{p-1}=o(h^p)$$

Así obtenemos un sistema lineal de ecuaciones en las incognitas $g_0(h), g_1(h)\cdot k,\ldots,g_{p-1}(h)k^{p-1}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{p-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0(h) \\ g_1(h)\cdot k \\ \vdots \\ g_{p-1}(h)\cdot k^{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o(h^p) \\ o(h^p) \\ \vdots \\ o(h^p) \end{bmatrix}$$

Como la matriz asociada al sistema es de Vandermonde entonces su determinante es $\prod_{0\le i<j\le p}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$. Por consiguiente

$$\begin{bmatrix} g_0(h) \\ g_1(h)\cdot k \\ \vdots \\ g_{p-1}(h)\cdot k^{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{p-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{p-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} o(h^p) \\ o(h^p) \\ \vdots \\ o(h^p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{o}(h^p) \\ \tilde{o}(h^p) \\ \vdots \\ \tilde{o}(h^p) \end{bmatrix}$$

así $g_r(h)\cdot k^r=\tilde{o}(h^p)$ $\quad r=0,1,\ldots,p-1$. En particular

$$\frac{1}{(p-1)!}\left(D^{p-1}f(u+h)-D^{p-1}f(u)-\varphi_p(u)h\right)\cdot k^{p-1}=g_{p-1}(h)\cdot k^{p-1}=\tilde{o}(h^p).$$

Usando polarización 2.2.13 (iii-iv) obtenemos

$$\|D^{p-1}f(u+h)-D^{p-1}f(u)-\varphi_p(u)\cdot h\|\le\frac{(p-1)^{p-1}}{(p-1)!}\|\partial\left(D^{p-1}f(u+h)-D^{p-1}f(u)-\varphi_p(u)\cdot h\right)\|=$$

$$\frac{(p-1)^{p-1}}{(p-1)!}\sup_{\|e\|=1}\|\left(D^{p-1}f(u+h)-D^{p-1}f(u)-\varphi_p(u)\cdot h\right)\cdot e^{p-1}\|=$$

$$\frac{(p-1)^{p-1}}{(p-1)!}\sup_{\|k\|\le\frac{\|h\|}{2}}\left\|\left(D^{p-1}f(u+h)-D^{p-1}f(u)-\varphi_p(u)\cdot h\right)\cdot\left(\frac{2k}{\|h\|}\right)^{p-1}\right\|=$$

$$\frac{(2(p-1))^{p-1}}{(p-1)!\ \|h\|^{p-1}}\sup_{\|k\|\le\frac{\|h\|}{2}}\left\|\left(D^{p-1}f(u+h)-D^{p-1}f(u)-\varphi_p(u)\cdot h\right)\cdot k^{p-1}\right\|=\frac{(2(p-1))^{p-1}}{\|h\|^{p-1}}\,\bar{o}(h^p).$$

Por consiguiente al dividir ambos lados de la desigualdad entre $\|h\|$ y tomar el límite cuando $h\to 0$, se tiene que $D^{p-1}f$ es derivable y $D^pf(u)=\varphi_p(u)$, además como $\varphi_p(u)$ es continuo se tiene que f es C^p.

Como una aplicación del Teorema de Taylor se daran versiones simples de dos teoremas del Analisis Global, a saber la suavidad del mapeo evaluación y el "omega lema".

Sean $I=[0,1]$ y E un espacio de Banach. El conjunto $C^r(I,E)=\{f:I\to F \mid f \text{ es } C^r\}$ $r\geq 0$, forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ y $(\lambda f)(t)=\lambda\cdot f(t)$ con $f,g\in C^r(I,E)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. De hecho es un espacio de Banach con la siguiente norma

$$\|f\|_r=\max_{0\le i\le r}\ \sup_{t\in I}\|D^if(t)\|$$

Si $U\subset E$ es abierto, entonces el conjunto $C^r(I,U)=\{f\in C^r(I,E)\mid f(I)\subset U\}$

es abierto en $C^r(I,E)$. En efecto, sea $f \in C^r(I,U)$ como $f(I) \subset U$ es compacto y U abierto existe un número finito de puntos $t_i \in I$ y números $\delta_i > 0$ $i=1,\dots,n$ tal que $B_{2\delta_i}(f(t_i)) \subset U$ y $f(I) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_i}(f(t_i))$. Sea $\delta = \min\{\delta_i \mid i=1,\dots,n\}$, se afirma que $B_\delta(f) = \{g \in C^r(I,E) \mid \|f-g\|_r < \delta\} \subset C^r(I,U)$. En efecto, sea $g \in B_\delta(f)$ entonces $\|f-g\|_r < \delta$, en particular $\|f(t)-g(t)\| < \delta$ $\forall\, t \in I$, así para t fijo $\exists$ $1 \le i \le n$ tal que $f(t) \in B_{\delta_i}(f(t_i))$. Veamos que $g(t) \in B_{2\delta_i}(f(t_i)) \subset U$:

$\|g(t)-f(t_i)\| \le \|g(t)-f(t)\| + \|f(t)-f(t_i)\| < \delta + \delta_i \le \delta_i + \delta_i = 2\delta_i$.

Lo anterior es valido para cada $t \in I$, por tanto $g(I) \subset U$ y $C^r(I,U)$ es abierto en $C^r(I,E)$.

3.1.28 Lema. El mapeo evaluación $ev: C^r(I,U) \times (0,1) \to U$ definido por $ev(f,t)$ es continuo.

Demostración.

Para $(g,s) \in C^r(I,U) \times \mathbb{R}$ defina $|||(g,s)||| = \max\{\|g\|_r, |s|\}$, la cual es una norma en $C^r(I,U) \times \mathbb{R}$.

Sea $(f,t) \in C^r(I,U) \times (0,1)$ y considere

$$\|ev(f,t) - ev(g,s)\| = \|f(t) - g(s)\| \le \|f(t) - f(s)\| + \|f(s) - g(s)\|$$
$$\le \|f(t) - f(s)\| + |||(f-g, s)|||.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua existe $\delta_0 > 0$ tal que si $|t-s| < \delta_0$ entonces $\|f(t) - f(s)\| < \varepsilon/2$. Tome $\delta = \min\{\varepsilon/2, \delta_0\}$.

Así, si $\|(f,t)-(g,s)\|\leq\delta$ entonces $\|ev(f,t)-ev(g,s)\|<\varepsilon$.
Por tanto el mapeo ev es continuo.

3.1.29 Proposición. El mapeo $ev: C^r(I,U)\times(0,1)\to U$ es de clase C^r y su k-ésima derivada esta dada por

$$D^k ev(f,t)\cdot((g_1,s_1),\ldots,(g_k,s_k)) = D^k f(t)(s_1,\ldots,s_k)+\sum_{i=1}^{k} D^{k-1}g_i(t)(s_1,\ldots,\hat{s}_i,\ldots,s_k)$$

donde $(g_i,s_i)\in C^r(I,E)\times\mathbb{R}$ $i=1,\ldots,k$ ($\hat{s}_i$ significa que se omite el iésimo termino).

Demostración.
Para $(g,s)\in C^r(I,U)\times\mathbb{R}$ defina $\|(g,s)\|=\max\{\|g\|_r,|s|\}$. Note que el lado derecho de la formula de la proposición es simetrico en los argumentos (g_i,s_i) $i=1,\ldots,k$, ya que $D^k f(t)\in L^k_s(\mathbb{R},E)$.
Denotemos el lado derecho de la fórmula por

$$\varphi_k: C^r(I,U)\times(0,1)\to L^k_s(C^r(I,E)\times\mathbb{R},E)$$

Sea $(f,t)\in C^r(I,U)\times(0,1)$. Por el Teorema de Taylor aplicado a f y g se tiene

$$ev((f,t)+(g,s)) = f(t+s)+g(t+s) = \sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}D^k f(t)\cdot s^k + R_f(t,s)\cdot s^r +$$
$$\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}D^k g(t)\cdot s^k + R_g(t,s)\cdot s^r = f(t)+\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}\varphi_k(f,t)\cdot(g,s) + R((f,t),(g,s))\cdot(g,s)^r.$$

Donde $\quad R((f,t),(g,s))\cdot((g_1,s_1),\dots,(g_r,s_r)) = R_f(t,s)\cdot(s_1,\dots,s_r) +$

$R_g(t,s)\cdot(s_1,\dots,s_r) + \frac{1}{r\cdot r!}\cdot\sum_{i=1}^{r} D^r g_i(t)(s_1,\dots,s_r)$

Note que R es simétrico en $((g_1,s_1),\dots,(g_r,s_r))$, ya que sus sumandos son simétricos. Además $R((f,t),(0,0))=0$. Así $R:\tilde{\omega}\to L_s^r(C^r(I,E)\times\mathbb{R},E)$, donde $\tilde{\omega}$ es un engrozamiento de $C^r(I,U)\times(0,1)$. Por el Teorema de Taylor ev será C^r si probamos que cada φ_k $1\le k\le r$ es contínuo y R es contínuo.

Para ver que R es contínuo, note que

$$\|R((f_0,t_0),(g_0,t_0)) - R((f,t),(g,s))\| =$$

$$\sup_{\substack{\|(h_i,s_i)\|=1\\ i=1,\dots,r}} \|(R((f_0,t_0),(g_0,t_0)) - R((f,t),(g,s)))\cdot((h_1,s_1),\dots,(h_r,s_r))\| \le$$

$$\sup_{\substack{\|(h_i,s_i)\|=1\\ i=1,\dots,r}} \Big(\|R_f(t_0,s_0)(s_1,\dots,s_r) - R_f(t,s)(s_1,\dots,s_r)\| + \|R_g(t_0,s_0)(s_1,\dots,s_r) - R_g(t,s)(s_1,\dots,s_r)\|$$

$$+ \frac{1}{r!}\sum_{i=1}^{r}\|D^r h_i(t_0)(s_1,\dots,s_r) - D^r h_i(t)(s_1,\dots,s_r)\| \Big) \le$$

$$\|R_f(t_0,s_0)-R_f(t,s)\| + \|R_g(t_0,s_0)-R_g(t,s)\| + \frac{1}{r\cdot r!}\sup_{\|h_i\|\le 1}\sum_{i=1}^{r}\|D^r h_i(t_0) - D^r h_i(t)\|$$

y R_f, R_g y $D^r h_i$ $i=1,\dots,r$ son contínuos.

Ahora probemos que cada φ_k $1\le k\le r$ es contínuo.
Sean $(g_i,s_i)\in C^r(I,E)\times\mathbb{R}$ $\quad i=1,\dots,k$, tal que $\|(g_i,s_i)\|=1$ y considere

$$\|(\varphi_k(f,t)-\varphi_k(g,s))\cdot((g_1,s_1),\dots,(g_k,s_k))\| \le \|D^k f(t)-D^k g(s)\|\,|s_1|\cdots|s_k| +$$

$$\sum_{i=1}^{k}\|D^{k-1}g_i(t)-D^{k-1}g_i(s)\|\,|s_1|\cdots|s_{i-1}||s_{i+1}|\cdots|s_k| .$$

Por la Desigualdad del Valor Medio se tiene que

$$\|D^{k-1}g_i(t)-D^{k-1}g_i(s)\| \le |t-s|\sup_{u\in I}\|D^k g_i(u)\| \le |t-s|\,\|g_i\|_r \le |t-s| ,$$

la última desigualdad se tiene porque $\|g_i\|_k \le \|(g_i,s)\| = 1$.

Así

$$\|\varphi_k(f,t)-\varphi_k(g,s)\| \le \|D^k f(t)-D^k g(s)\| + k|t-s| \le$$

$$\|D^k f(t)-D^k f(s)\| + \|D^k f(s)-D^k g(s)\| + k|t-s| \le$$

$$\|D^k f(t)-D^k f(s)\| + \|(f,t)-(g,s)\| + k\|(f,t)-(g,s)\| \le$$

$$\|D^k f(t)-D^k f(s)\| + 2k\|(f,t)-(g,s)\|$$

Sea $\varepsilon>0$. Como $D^k f$ es uniformemente continua en I existe $\delta_1>0$ tal que, si $|t-s|<\delta_1$ entonces $\|D^k f(t)-D^k f(s)\|<\varepsilon/2$.

Tome $\delta=\min\{\varepsilon/2 , \varepsilon/4k\}$.

Si $\|(f,t)-(g,s)\|<\delta$ entonces $\|\varphi_k(f,t)-\varphi_k(g,s)\|<\varepsilon$.

Por tanto φ_k $1\le k\le r$ es continuo, y ev es C^r.

Consideremos ahora el omega lema. Sea M un espacio topológico compacto y E, F espacios de Banach. El conjunto $C^0(M,E)=\{f: M\to E \mid f \text{ es continuo}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones $(f+g)(m)=f(m)+g(m)$ y $(\lambda f)(m)=\lambda f(m)$ con $f,g\in C^0(M,E)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Con respecto a la siguiente norma

$$\|f\| = \sup_{m\in M}\|f(m)\| \quad ,$$

$C^0(M,E)$ es un espacio de Banach. Si $U\subset E$ es abierto, se puede ver que $C^0(M,U)=\{f\in C^0(M,E)\mid f(M)\subset U\}$ es abierto en $C^0(M,E)$. La prueba de este hecho es similar a la del caso del mapeo evaluación.

3.1.30. Lema. Sea $g: U\subset E\to F$ un mapeo continuo. El mapeo

$$\Omega_g : C^0(M,U)\to C^0(M,F) \quad \text{definido por} \quad \Omega_g(f)=g\circ f$$

es continuo.

Demostración. Sea $\varepsilon>0$ y $f_0\in C^0(M,U)$.

Como g es continuo en $f_0(m)\in f_0(M)$, existe $\delta(\varepsilon, f_0(m))$ tal que

(1) si $\|z-f_0(m)\|<\delta(\varepsilon,f_0(m))$ entonces $\|g(z)-g(f_0(m))\|<\varepsilon/2$.

Así $f_0(M)\subset \bigcup_{m\in M} B_{\delta(\varepsilon,f_0(m))}(f_0(m))$, y como $f_0(M)\subset U$ es compacto se tiene que $f_0(M) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\delta(\varepsilon, f_0(m_i))}(f_0(m_i))$. Sea $\delta = \min_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{\delta_i(\varepsilon, f_0(m_i))}{2} \right\}$ y considere f tal que $\|f - f_0\| < \delta$.

Si $m \in M$ $\exists$ m_i, $1 \leq i \leq s$, tal que $f_0(m) \in B_{\delta(\varepsilon, f_0(m_i))}(f_0(m_i))$, entonces de (1) se tiene que

(2) $$\|g(f_0(m)) - g(f_0(m_i))\| < \varepsilon/2 .$$

Por otra parte como

$$\|f_0(m_i) - f(m)\| \leq \|f_0(m_i) - f_0(m)\| + \|f_0(m) - f(m)\| < \frac{\delta(\varepsilon, f_0(m_i))}{2} + \delta \leq$$
$$< \delta(\varepsilon, f_0(m_i)),$$

y también se tiene que $\|g(f_0(m_i)) - g(f(m))\| < \varepsilon/2$.

Por consiguiente

$$\|g(f_0(m)) - g(f(m))\| \leq \|g(f_0(m)) - g(f_0(m_i))\| + \|g(f_0(m_i)) - g(f(m))\| <$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Dado que m fue arbitrario, al tomar el supremo sobre todas las $m \in M$ en la desigualdad anterior, se tiene que $\|g \circ f - g \circ f_0\| \leq \varepsilon$.

Por tanto si $\|f - f_0\| < \delta$ entonces $\|\Omega_g(f) - \Omega_g(f_0)\| < \varepsilon$, así Ω_g es continuo.

3.1.31 Omega Lema. Sea $g : U \subset E \to F$ un mapeo C^r, $r > 0$. El mapeo

$$\Omega_g : C^0(M,U) \to C^0(M,F) \quad \text{definido por } \Omega_g(f) = g \circ f$$

es de clase C^r. La derivada de Ω_g en $f \in C^0(M,U)$ es

$$D\Omega_g(f)\cdot h = [(Dg)\circ f]\cdot h \quad , \quad \text{i.e}$$
$$[D\Omega_g(f)\cdot h](m) = Dg(f(m))\cdot h(m)$$

Demostración.

Dado que los mapeos $D^i g : U \to L^i_s(E,F)$, $1 \le i \le r$, son continuos, se tiene por el lema 3.1.30 que los mapeos

$$\Omega_{D^i g} : C^0(M,U) \to C^0(M, L^i_s(E,F))$$

son continuos.

Ahora considere los mapeos

$$A_i : C^0(M, L^i_s(E,F)) \to L^i_s(C^0(M,E), C^0(M,F)) \quad , 1 \le i \le r,$$

definidos por $A_i(H)(h_1,\ldots,h_i)(m) = H(m)(h_1(m),\ldots,h_i(m))$.

Observaciones:

i) $A_i(H)(h_1,\ldots,h_i) \in C^0(M,F)$, ya que los mapeos H y $h_1,\ldots,h_i$ son continuos.

ii) $A_i(H)$ es un mapeo i-multilineal y simétrico, ya que $H(m)$ lo es.

Veamos que $A_i(H)$ es continuo.

$$\|A_i(H)(h_1,\dots,h_i)\| = \sup_{m\in M}\|A_i(H)(h_1,\dots,h_i)(m)\| = \sup_{m\in M}\|H(m)(h_1(m),\dots,h_i(m))\|$$

$$\leq \sup_{m\in M}\{\|H(m)\|\cdot\|h_1(m)\|\cdots\|h_i(m)\|\} = \|H\|\cdot\|h_1\|\cdots\|h_i\|$$

Así, $\|A_i(H)(h_1,\dots,h_i)\| \leq \|H\|\cdot\|h_1\|\cdots\|h_i\|$ (*), y $A_i(H)$ es continuo.

Los mapeos A_i son lineales y continuos, en efecto

$A_i(\alpha H+K)(h_1,\dots,h_i)(m) = (\alpha H+K)(h_1(m),\dots,h_i(m)) = \alpha H(h_1(m),\dots,h_i(m))$ $+ K(h_1(m),\dots,h_i(m)) = \alpha A_i(H)(h_1,\dots,h_i)(m) + A_i(K)(h_1,\dots,h_i)(m)$.
Así, $A_i(\alpha H+K) = \alpha A_i(H) + A_i(K)$, i.e A_i es lineal.

Veamos que los mapeos A_i son continuos. Como

$\|A_i(H)\| = \sup\{\|A_i(H)(h_1,\dots,h_i)\| \mid \|h_1\| = \cdots = \|h_i\| = 1\}$,

entonces al tomar el supremo en (*) sobre los $\|h_1\| = \cdots = \|h_i\| = 1$, se tiene que

$$\|A_i(H)\| \leq \|H\|.$$

Por consiguiente los mapeos A_i son continuos.

Por tanto los mapeos

$$A_i \circ \Omega_{D^i g} : C^0(M,U) \to L^i_s(C^0(M,E), C^0(M,F)) \qquad 1 \le i \le r,$$

son continuos y $(A_i \circ \Omega_{D^i g})(f)(h_1,\ldots,h_i)(m) = D^i g(f(m))(h_1(m),\ldots,h_i(m))$.

Sea $f \in C^0(M,U)$ y $h \in C^0(M,E)$. Aplicando el Teorema de Taylor a g se tiene

$$g(f(m)+h(m)) = g(f(m)) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} D^i g(f(m)) \cdot h(m)^i + R(f(m),h(m)) \cdot h(m)^r .$$

Defina

$$([(D^i g) \circ f] \cdot h^i)(m) = D^i g(f(m)) \cdot h(m)^i \qquad \text{y}$$

$\widetilde{R} : \widetilde{C^0(M,U)} \to L^r_s(C^0(M,E), C^0(M,F))$ donde

$\widetilde{C^0(M,U)} \subset C^0(M,U) \times C^0(M,E)$ es un engrozamiento de $C^0(M,U)$ y

$$\widetilde{R}(f,h)(h_1,\ldots,h_r)(m) = R(f(m),h(m))(h_1(m),\ldots,h_r(m)) .$$

Note que $\widetilde{R}$ es r-lineal y simétrica, ya que R lo es. Además $\widetilde{R}(f,0) \cdot h(m)^r = R(f(m),0) \cdot h(m)^r = 0$, así $\widetilde{R}(f,0) = 0$. La prueba de la continuidad de $\widetilde{R}$ es similar a la del Lema 3.1.30.

Por consiguiente

$$\Omega_g(f+h) = g\circ(f+g) = (g\circ f) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!}(D^i g\circ f)\cdot h^i + R(f,h)\cdot h^i$$

$$= \Omega_g(f) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!}(A_i \circ \Omega_{D^i g})(f)\cdot h^i + R(f,h)\cdot h^i .$$

Luego por el Teorema de Taylor $D^i\Omega_g = A_i \circ \Omega_{D^i g}$ y Ω_g es de clase C^r.

Teoremas de la Funcion Inversa e Implicita

En esta sección suponemos que todos los espacios vectoriales $E, F, G, \ldots,$ son espacios de Banach.

4.1.1 Definición. Sean $U \subset E$, $V \subset F$ abiertos. Un mapeo $f: U \to V$ es un C^r difeomorfismo sí y solo sí f es de clase C^r, biyectivo y f^{-1} es de clase C^r.

Para espacios de Banach de dimensión infinita es necesario tener presente el Teorema de Isomorfismo de Banach: Si $T: E \to F$ es un mapeo lineal, biyectivo y continuo, entonces $T^{-1}: F \to E$ es un mapeo lineal continuo.
Note que si E, F no son Banach el mapeo T^{-1} puede no ser continuo.

Denotemos por $GL(E,F)$ el conjunto de todos los isomorfismos lineales continuos en $L(E,F)$.

4.1.2 Lema. Si $\varphi \in L(E,E)$ y $\|\varphi\| < 1$, entonces $(I-\varphi) \in GL(E,E)$.
Demostración.
Considere la siguiente sucesión:
$A_0 = I$, $A_1 = I + \varphi$, $A_2 = I + \varphi + \varphi \circ \varphi$, $\ldots$, $A_n = I + \varphi + \cdots + \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n}$
denote $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \varphi}_{n}$.

Usando la desigualdad del triangulo y la desigualdad $\|A\circ B\| \le \|A\|\,\|B\|$, se tiene que la sucesión $(A_n) \subset L(E,E)$ es una sucesión de Cauchy. En efecto,

$$\|A_{n+m} - A_n\| = \|\varphi^{n+1} + \dots + \varphi^{n+m}\| \le \|\varphi\|^{n+1} + \dots + \|\varphi\|^{n+m} = \|\varphi\|^{n+1}(1 + \dots + \|\varphi\|^{m-(n-1)})$$

$$\le \|\varphi\|^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\|\varphi\|} \quad , \text{ y como } \|\varphi\|<1 \quad \lim_{n\to\infty} \|\varphi\|^{n+1} = 0 .$$

Así se tiene que $\|A_n - A_m\| \to 0$. Por consiguiente $A_n \to A$ para algún $A \in L(E,E)$, ya que $L(E,E)$ es completo. De afirma que A es la inversa de $(I-\varphi)$:

$$(I-\varphi)\circ A = (I-\varphi)\circ \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (I-\varphi)\circ A_n = \lim_{n\to\infty} I - \varphi^{n+1} =$$

$$= I - \lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1} = I$$

(note que $\varphi^{n+1} \to 0$, ya que $\|\varphi\|<1$).

De forma similar, se tiene que $A\circ(I-\varphi) = I$.
Por tanto $I-\varphi$ es invertible.

4.1.3 Lema. $GL(E,F)$ es un conjunto abierto en $L(E,F)$.

Demostración.

Consideremos en $L(E,F)$ la norma $\|A\| = \sup\{\|A(e)\| \mid \|e\|=1\}$.
Podemos suponer que $E=F$. En efecto, si $\varphi_0 \in GL(E,F)$ el mapeo lineal $h: L(E,F) \to L(E,E)$ definido por

$h(\psi) = \varphi_0^{-1} \circ \psi$ es continua, ya que $\|h(\psi)\| = \|\varphi_0^{-1} \circ \psi\| \leq \|\varphi_0^{-1}\| \, \|\psi\|$.
Por otra parte $h^{-1}(GL(E,E)) = \{\psi \in L(E,F) \setminus \varphi_0^{-1} \circ \psi \in GL(E,E)\} =$ $GL(E,F)$, en efecto, $\psi \in h^{-1}(GL(E,E)) \Longleftrightarrow \varphi_0^{-1} \circ \psi \in GL(E,E)$ $\Longleftrightarrow \psi = \varphi_0 \circ (\varphi_0^{-1} \circ \psi) \in GL(E,F)$.
Por tanto para probar que $GL(E,F)$ es abierto basta con demostrar que $GL(E,E)$ es abierto en $L(E,E)$.
Sea $\varphi \in GL(E,E)$ y considere la bola abierta $B(\varphi) = \{\psi \in L(E,E) \mid \|\psi - \varphi\| < \|\varphi^{-1}\|^{-1}\}$. Veamos que $B(\varphi) \subset GL(E,E)$, sea $\psi \in B(\varphi)$

$$\| I - \psi \circ \varphi^{-1} \| = \| (\varphi - \psi)\varphi^{-1} \| \leq \|\varphi - \psi\| \, \|\varphi^{-1}\| < 1, \quad \text{entonces}$$

$$I - (I - \psi \circ \varphi^{-1}) = \psi \circ \varphi^{-1} \in GL(E,E) \quad (\text{por } 4.1.2.), \text{ así } \psi \in GL(E,E).$$

Por tanto $B(\varphi) \subset GL(E,E)$ y $GL(E,E)$ es abierto.

4.1.4 Lema. Suponga que el mapeo $\mathcal{J} : GL(E,F) \to GL(F,E)$ está definido por $\mathcal{J}(\varphi) = \varphi^{-1}$. Entonces $\mathcal{J}$ es de clase C^∞ y $D\mathcal{J}(\varphi) : L(E,F) \to L(F,E)$ esta dada por $D\mathcal{J}(\varphi)\psi = -\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}$.

Demostración. Sea $\varphi \in GL(E,F)$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\varphi) \subset GL(E,F)$. Sea $r = \min\{\delta, \|\varphi^{-1}\|^{-1}\}$ y $\psi \in B_{\frac{r}{2}}(0)$ entonces $\psi + \varphi \in GL(E,F)$ ya que $\|\psi + \varphi - \varphi\| = \|\psi\| < \delta$.
Se afirma que $\|(\psi+\varphi)^{-1}\| \leq 2/r$. En efecto,
$\|e\| = \|\varphi^{-1} \circ \varphi(e)\| \leq \|\varphi^{-1}\| \, \|\varphi(e)\| \implies r\|e\| \leq \|\varphi(e)\|$.

Así, $\|(\varphi+\psi)e\| \geq \|\varphi(e)\| - \|\psi(e)\| \geq r\|e\| - \frac{r}{2}\|e\| = \frac{r}{2}\|e\|$. Luego

$\|e\| = \|(\varphi+\psi)(\varphi+\psi)^{-1}(e)\| \geq \frac{r}{2}\|(\varphi+\psi)^{-1}(e)\|$ y $\|(\varphi+\psi)^{-1}\| < \frac{2}{r}$.

Veamos que $\mathcal{I}$ es derivable, sea $\varphi \in GL(E,F)$ y $\psi \in B_{\frac{r}{2}}(0)$.

Sea $(\varphi+\psi)^{-1} - \varphi^{-1} = -\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} + o(\psi)$ y probemos que
$\lim\limits_{\psi\to 0} \frac{\|o(\psi)\|}{\|\psi\|} = 0$.

Componiendo en ambos lados de la igualdad anterior con $\varphi+\psi$ se tiene

$$0 = -\psi\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} + (\varphi+\psi)\,o(\psi), \text{ así } o(\psi) = (\varphi+\psi)^{-1}(\psi\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}).$$

Entonces $\|o(\psi)\| \leq \|(\varphi+\psi)^{-1}\|\,\|\psi\|^2\,\|\varphi^{-1}\|^2 \leq \frac{2}{r}\|\psi\|^2\,\|\varphi^{-1}\|^2$.

Por consiguiente $\lim\limits_{\psi\to 0} \frac{\|o(\psi)\|}{\|\psi\|} = 0$.

Por tanto $\mathcal{I}$ es derivable y $D\mathcal{I}(\varphi)\psi = -\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}$.

Solo resta probar que $\mathcal{I}$ es de clase C^∞.
Note que como $\mathcal{I}$ es derivable, en particular es continuo.
Consideremos los siguientes mapeos:
$\mathcal{I}\times\mathcal{I} : GL(E,F) \longrightarrow L(F,E)\times L(F,E)$ con $(\mathcal{I}\times\mathcal{I})(\varphi) = (\varphi^{-1}, \varphi^{-1})$
$\mathcal{I}\times\mathcal{I}$ es continuo.

$B : L(F,E) \times L(F,E) \to L(L(E,F), L(F,E))$ con

$B(\varphi_1, \varphi_2)(A) = -\varphi_1 \circ A \circ \varphi_2$, B es bilineal. Además

$\| B(\varphi_1, \varphi_2)(A) \| = \| -\varphi_1 \circ A \circ \varphi_2 \| \leq \|\varphi_1\| \, \|\varphi_2\| \, \|A\|$, entonces

$\| B(\varphi_1, \varphi_2) \| \leq \|\varphi_1\| \, \|\varphi_2\|$ y B es continuo.

Por otra parte $D\delta = B \circ (\delta \times \delta)$, con lo cual $D\delta$ es continuo, y por tanto δ es de clase C^1.

Suponga que δ es de clase C^r, y veamos que δ es C^{r+1}. Como δ es C^r entonces $\delta \times \delta$ es C^r, además B es C^r $\forall r \in \mathbb{N}$. Por consiguiente $D\delta = B \circ (\delta \times \delta)$ es C^r, lo que prueba que δ es C^{r+1}.
Por tanto δ es C^∞.

4.1.5 Teorema de la Función Inversa. Sea $f : U \subset E \to F$ un mapeo de clase C^r $r \geq 1$, y $u_0 \in U$. Suponga que $Df(u_0) \in GL(E,F)$, entonces existen vecindades abiertas $U' \subset U$ de u_0, $V \subset F$ de $f(u_0)$ tal que $f : U' \to V$ es un C^r difeomorfismo. Además $Df^{-1}(v) = [Df(f^{-1}(v))]^{-1}$ para todo $v \in V$.

Demostración. Primero haremos algunas reducciones al problema.
Primero, sea $\lambda = Df(u_0) \in GL(E,F)$ y considere $\lambda^{-1} \circ f : U \subset E \to E$, la derivada de $\lambda^{-1} \circ f$ en u_0 es $\lambda^{-1} \circ Df(u_0) = I$. Si podemos probar que $\lambda^{-1} \circ f$ es localmente un C^r difeomorfismo, entonces se tendrá que f es localmente un C^r difeomorfismo, pues $f = \lambda \circ (\lambda^{-1} \circ f)$.

Esto reduce el teorema al caso donde $f: U \subset E \to E$ y $Df(u_0) = I$.

Después, sea $f_1(x) = f(x+u_0) - f(u_0)$. Entonces f_1 está definida en una vecindad abierta del cero y $f_1(0) = 0$. En efecto, f_1 es la composición

$$U_{-u_0} \xrightarrow{\tau_{-u_0}^{-1}} U \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\tau_{-f(u_0)}} E$$

donde $\tau_{-u_0}: E \to E$, $\tau_{-u_0}(e) = e - u_0$ el cual es un C^r difeomorfismo. Bastará probar que f_1 es un localmente un C^r difeomorfismo, pues $f_1 = \tau_{-f(u_0)} \circ f \circ \tau_{-u_0}^{-1}$ y entonces $f = \tau_{-f(u_0)}^{-1} \circ f_1 \circ \tau_{-u_0}$ es la composición de mapeos que son localmente C^r difeomorfismos. Hemos reducido la demostración al caso en que $u_0 = 0$, $f(0) = 0$ y $Df(0) = I$, lo cual supondremos en adelante.

Ahora, sea $g: U \subset E \to E$ definida por $g(x) = x - f(x)$, g es de clase C^r, $g(0) = 0$ y $Dg(0) = 0$. Como Dg es continua, en particular en 0, dado $\varepsilon = 1/2$ existe $r > 0$ tal que si $x \in \bar{B}_{2r}(0)$ entonces $\|Dg(x)\| \leq 1/2$. Así por la Desigualdad del Valor Medio, $\|x\| \leq 2r$ implica que $\|g(x)\| = \|g(x) - g(0)\| \leq \|x\|/2 \leq r$. Por consiguiente $g(\bar{B}_{2r}(0)) \subset \bar{B}_r(0)$.

Sea $y \in \bar{B}_r(0)$, probemos que existe un único $x \in \bar{B}_{2r}(0)$ tal que $f(x) = y$. Considere el mapeo $g_y: \bar{B}_{2r}(0) \to E$ definido por $g_y(x) = y + x - f(x)$, note que $\|g_y(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq 2r$, así $g_y: \bar{B}_{2r}(0) \to \bar{B}_{2r}(0)$. Además para $x_1, x_2 \in \bar{B}_{2r}(0)$ se tiene, por la Desigualdad del Valor Medio, que

$$\text{(i)} \qquad \|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Por (i) g_y es una contracción, entonces como $\bar{B}_{2r}(0)$ es completo g_y tiene un único punto fijo. Así $x = g_y(x) = y + x - f(x)$, i.e, $f(x) = y$. Por consiguiente $f_{|f^{-1}(\bar{B}_r(0))}$ tiene una inversa

$$f^{-1} : B_r(0) \longrightarrow f^{-1}(B_r(0)) \subset \bar{B}_{2r}(0) .$$

Demostremos que f^{-1} es continua, sean $y_1, y_2 \in B_r(0)$ y $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$, entonces por (i) se tiene

$$\| y + x_1 - f(x_1) - y - x_2 + f(x_2) \| \leq \frac{1}{2} \| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) \| \quad , \text{ así}$$

$$\| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) \| - \| y_1 - y_2 \| \leq \frac{1}{2} \| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) \| \quad \text{entonces}$$

(ii) $$\| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) \| \leq 2 \| y_1 - y_2 \| \quad , \text{ así } f^{-1} \text{ es continuo.}$$

Probemos que f^{-1} es derivable.
Como $Df : U \to L(E,E)$ es continuo e $\delta : GL(E,E) \to GL(E,E)$, es continuo, entonces $\delta \circ Df : U \to GL(E,E)$ es continuo, en particular en $u_0 = 0$. Por consiguiente existe $B_s(0) \subset U$ tal que $\forall\, x \in B_s(0)$ $[Df(x)]^{-1}$ existe, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $s = 2r$. Además, por continuidad de $\delta \circ Df$ en $u_0 = 0$ existe $M > 0$ tal que $\forall\, x \in B_{2r}(0)$ $\| [Df(x)]^{-1} \| \leq M$. Sean $y_1, y_2 \in B_r(0)$ y $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, entonces

$$\| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - Df(x_2)^{-1}(y_1 - y_2) \| = \| x_1 - x_2 - Df(x_2)^{-1}(f(x_1) - f(x_2)) \| =$$

$$\| Df(x_2)^{-1} (Df(x_2)(x_1-x_2) - f(x_1) + f(x_2)) \| \leq M \| f(x_1) - f(x_2) - Df(x_2)(x_1-x_2) \| .$$

Por otra parte de (ii) se tiene que

$$\| x_1 - x_2 \| = \| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) \| \leq 2 \| y_1 - y_2 \| .$$

Así

$$\frac{\| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - Df(x_2)^{-1}(y_1-y_2) \|}{\| y_1 - y_2 \|} \leq 2M \frac{\| f(x_1) - f(x_2) - Df(x_2)(x_1-x_2) \|}{\| x_1 - x_2 \|} .$$

Por tanto como f^{-1} es continua y f derivable se tiene que $y_1 \to y_2 \Longleftrightarrow x_1 \to x_2$ y

$$\lim_{y_1 \to y_2} \frac{\| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - Df(x_2)^{-1}(y_1-y_2) \|}{\| y_1 - y_2 \|} = 0 .$$

Así, f^{-1} es derivable en y_2 y $Df^{-1}(y_2) = [Df(f^{-1}(y_2))]^{-1}$.

Note que $D(f^{-1}) = \mathcal{J} \circ Df \circ f^{-1}$ en $B_r(0)$. Por consiguiente $D(f^{-1})$ es continuo y f^{-1} es de clase C^1.

Suponga que f^{-1} es de clase C^{r-1}, f de clase C^r y por ende de clase C^{r-1}. Entonces por ser $\mathcal{J}$ y Df de clase C^{r-1} se tiene que $D(f^{-1}) = \mathcal{J} \circ Df \circ f^{-1}$ es de clase C^{r-1}. Por tanto f^{-1} es de clase C^r.

Observación. La hipótesis sobre la continuidad de Df en el teorema 4.1.5 es necesaria. Para verlo considere la siguiente función: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\,\mathrm{sen}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases},$$

la cual es derivable y $f'(0)\neq 0$. Sin embargo, f no es invertible en cualquier intervalo abierto que contenga al cero. Probemos lo siguiente:

(i) f es continua. Para $x\neq 0$ f es claramente continua.

f es continua en 0: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+x^2\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}+\lim_{x\to 0}x^2\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}=0$,

ya que $\lim_{x\to 0}\left|x^2\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right|\leq\lim_{x\to 0}x^2=0$. Así f es continua.

(ii) f es derivable en $\mathbb{R}$. Para $x\neq 0$ $f'(x)=\frac{1}{2}+2x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+x^2\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}=\frac{1}{2},\quad \text{así}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+2x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}.$$

Pero f' no es continua en 0, ya que $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ no existe.

(iii) De $f'(x)=\frac{1}{2}+2x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ con $x\neq 0$, se tiene que:

$f'(x) > 0$ para $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ $k \in \mathbb{N}$, y

$f'(x) < 0$ para $x = \frac{1}{2k\pi}$ $k \in \mathbb{N}$.

Así $\forall \varepsilon > 0$, existen $x, z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. Por consiguiente f no es monótona en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Ya que, si f fuese creciente tome $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $f'(x) < 0$. Por otra parte

$$f'(x) = \lim_{x \to y} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 ,$$

lo cual es una contradicción. Un argumento similar prueba que f no es decreciente.

Por tanto f no es inyectiva en ningún intervalo abierto que contenga al 0, ya de serlo sería monótona.

4.1.6. Teorema de la Función Implícita. Sean $U \subset E$, $V \subset F$ abiertos y $f : U \times V \subset E \times F \to G$ un mapeo de clase C^r $r \geq 1$. Suponga que para $(x_0, y_0) \in U \times V$ $D_2 f(x_0, y_0) \in GL(F, G)$. Entonces existen vecindades abiertas $U_0 \subset U$ de x_0 y $W_0 \subset G$ de $f(x_0, y_0)$ y un único mapeo C^r $g : U_0 \times W_0 \subset E \times F \to V$ tal que $\forall$ $(x, w) \in U_0 \times W_0$

$$f(x, g(x, w)) = w .$$

Demostración.

Defina el mapeo $\Phi : U \times V \subset E \times F \to E \times G$ por $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$, el cual es de clase C^r. Además $D\Phi(x_0, y_0)$ esta dado por

$$D\Phi(x_0, y_0)(x, y) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(x_0, y_0) & D_2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

el cual es un isomorfismo lineal continuo con inversa

$$D\Phi(x_0, y_0)^{-1}(u, v) = \left(u, D_2 f(x_0, y_0)^{-1} \left(v - D_1 f(x_0, y_0) u \right) \right).$$

Así por 4.1.5 Φ tiene localmente una inversa C^r, digamos $\Phi^{-1} : U_0 \times W_0 \subset E \times G \to U \times V$ definida por $\Phi^{-1}(x, w) = (x, g(x, w))$.

Por tanto $g : U_0 \times W_0 \subset E \times F \to V$ es el mapeo deseado, ya que $(x, w) = \Phi \circ \Phi^{-1}(x, w) = \Phi(x, g(x, w)) = (x, f(x, g(x, w)))$, entonces $f(x, g(x, w)) = w$ $\forall$ $(x, w) \in U_0 \times W_0$.

Sólo resta ver que el mapeo $g: U_0 \times W_0 \subset E \times G \to V$ es único. Sea $\hat{g}: U_0 \times W_0 \subset E \times G \to V$ tal que para todo $(x,w) \in U_0 \times W_0$ satisface que $f(x, \hat{g}(x,w)) = w$. Entonces $\Phi(x, g(x,w)) = (x,w) = \Phi(x, \hat{g}(x,w))$ y al aplicarle Φ^{-1} a la igualdad se obtiene que $(x, g(x,w)) = (x, \hat{g}(x,w))$ $\forall (x,w) \in U_0 \times W_0$. Por tanto $\hat{g} = g$.

Aplicando la regla de la cadena a $f(x, g(x,w)) = w$ se obtiene la derivada de g:

$$D(f \circ \Phi^{-1})(x,w) = Df(\Phi^{-1}(x,w)) \circ D\Phi^{-1}(x,w) = P_2 \quad , \text{ así}$$

$$Df(x, g(x,w)) \circ (P_1, Dg(x,w)) = D_1 f(x, g(x,w)) \circ P_1 + D_2 f(x, g(x,w)) \circ Dg(x,w) =$$

P_2 , entonces

$$Dg(x,w) = D_2 f(x, g(x,w))^{-1} \circ [\, P_2 - D_1 f(x, g(x,w)) \circ P_1 \,] \quad ,$$

donde $P_1 : E \times G \to E$ y $P_2 : E \times G \to G$ son la proyecciones canónicas.

4.1.7 Corolario. Sea $f : U \subset E \to F$ un mapeo C^r $r \geq 1$. Suponga que para $u_0 \in U$ $Df(u_0)$ es supra yectivo y el $\ker Df(u_0)$ se complementa. Entonces $f(U)$ contiene una vecindad abierta de $f(u_0)$.

Demostración.

Sea $E_1 = \ker Df(u_0)$. Por hipótesis existe $E_2 \subset E$ subespacio vectorial cerrado tal que $E = E_1 \oplus E_2$. Note que $E_1 \times E_2$ es

es isomorfo a $E_1 \oplus E_2$ (de hecho difeomorfo).
Como $Df(u_0)$ es suprayectivo y

$$Df(u_0)(e_1,e_2) = Df(u_0)((e_1,0)+(0,e_2)) = Df(u_0)(0,e_2) = D_2f(u_0)e_2 ,$$

entonces $D_2f(u_0): E_2 \to F$ es suprayectivo. Además $D_2f(u_0)$ es 1-1, ya que si $D_2f(u_0)e_2 = Df(u_0)(0,e_2) = 0$ entonces $e_2 \in E_1$ y como $E_1 \cap E_2 = 0$ se tiene que $e_2 = 0$.
Por consiguiente $D_2f(u_0) \in GL(E_2,F)$, y las hipótesis de 4.1.6 se cumplen. Así $f(U)$ contiene a la vecindad abierta $W_0 \subset F$ de $f(u_0)$ dada por 4.1.6.

4.1.8 Teorema de Supravectividad Local. Suponga que $f: U \subset E \to F$ es un mapeo C^1 y $Df(u_0)$ es supravectivo para algún $u_0 \in U$, entonces f es localmente supravectivo ; i.e, existen vecindades abiertas $U_1 \subset U$ de u_0 y $V_1 \subset F$ de $f(u_0)$ tal que $f|U_1 : U_1 \to V$ es supravectivo. En particular, si $Df(u)$ es supravectivo $\forall\, u \in U$, entonces f es un mapeo abierto.
Demostración.
Dado que $\ker Df(u_0)$ es un subespacio cerrado se tiene de 2.1.14 que $E/\ker Df(u_0) = E_0$ es un espacio de Banach con norma $\|[e]\|_0 = \inf\{\|e+v\| \mid v \in \ker Df(u_0)\}$. Por otra parte como $Df(u_0)$ supravectivo entonces por el Teorema Fundamental de Isomorfismo $Df(u_0)$ induce un isomorfismo continuo $T: E_0 \to F$, así $T^{-1} \in L(F, E_0)$.

Sea $c = 1/4\|T^{-1}\|$. Dado que Df es continua, en particular en u_0, existe $B_{2r}(u_0) \subset U$ tal que si $\|u-u_0\| < 2r$ entonces $\|Df(u) - Df(u_0)\| < 1/4\|T^{-1}\|$.

Probemos que si $y \in B_{\frac{r}{4\|T^{-1}\|}}(f(u_0))$ entonces existe $x \in B_{3r}(u_0)$ tal que $f(x) = y$.

Para resolver está ecuación se definen sucesiones $([e_n])$ en E_0 y (w_n) en E con $[w_n] = [e_n]$, inductivamente.

Sea $[e_0] = \ker Df(u_0)$ y tome $w_0 \in \ker Df(u_0)$ tal que $\|w_0\| = r$.

Defina $[e_1] = [e_0] + T^{-1}(y - f(u_0))$ y tome $w_1 \in [e_1]$ tal que

$$\|w_1 - w_0\| \leq 2\|[e_1] - [e_0]\|_0 = 2\|[e_1]\|_0 \quad .$$

Lo anterior es posible ya que

$$\begin{aligned}\|[e_1]-[e_0]\|_0 = \|[e_1 - w_0]\|_0 &= \inf\{\|e_1 - w_0 + v\| \mid v \in \ker Df(u_0)\} \\ &= \inf\{\|(e_1+v) - w_0\| \mid v \in \ker Df(u_0)\} \\ &= \inf\{\|w - w_0\| \mid w \in [e_1]\} \quad ,\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene dado que $w \in [e_1] \leftrightarrow w = e_1 + v$, $v \in \ker Df(u_0)$.

Note que

$$\|w_1 - w_0\| \leq 2\|[e_1]\|_0 \leq 2\|T^{-1}(y - f(u_0))\| \leq 2\|T^{-1}\|\,\|y - f(u_0)\| < \frac{r}{2} \quad ,$$

así $\quad \|w_1\| < \frac{r}{2} + \|w_0\| = (1 + \frac{1}{2})r \quad$ y $\quad w_1 + u_0 \in B_{3r}(u_0)$.

Defina $[e_2]=[e_1]+T^{-1}(y-f(u_0+w_1))$ y tome $w_2\in[e_2]$ tal que

$$\|w_2-w_1\|\leq 2\|[e_2]-[e_1]\|_0 .$$

Lo anterior es posible ya que

$$\begin{aligned}\|[e_2]-[e_1]\|_0=\|[e_2-w_1]\|_0&=\inf\{\|e_2-w_1+v\| \setminus v\in \ker Df(u_0)\}\\&=\inf\{\|(e_2+v)-w_1\| \setminus v\in\ker Df(u_0)\}\\&=\inf\{\|w-w_1\| \setminus w\in[e_2]\}\end{aligned},$$

la última igualdad se tiene dado que $w\in[e_2]\leftrightarrow w=e_2+v$ $v\in\ker Df(u_0)$.
Dado que $T:E_0\to F$ está definido por $T[e]=Df(u_0)e$, entonces $T^{-1}(Df(u_0)w_1)=[e_1]$ pues $w_1\in[e_1]$ y $T^{-1}(Df(u_0)w_0)=[e_0]$ pues $w_0\in[e_0]$. Así

$$[e_2]=[e_1]+T^{-1}(y-f(u_0+w_1))=T^{-1}(Df(u_0)w_1+y-f(u_0+w_1))$$ y
$$[e_1]=[e_0]+T^{-1}(y-f(u_0))=T^{-1}(Df(u_0)w_0+y-f(u_0)).$$

Restando $[e_1]$ de $[e_2]$ se tiene

$$[e_2]-[e_1]=-T^{-1}(f(u_0+w_1)-f(u_0)-Df(u_0)(w_1-w_0)).$$

Entonces aplicando la Desigualdad del Valor Medio al mapeo $g(x)=f(u_0+x)-Df(u_0)x$ se tiene

$$\|[e_2]-[e_1]\|_0\leq\|T^{-1}\|\frac{1}{4\|T^{-1}\|}\|w_1-w_0\|=\frac{1}{4}\|w_1-w_0\|.$$

Así $\|w_2-w_1\| \le 2\|[e_2]-[e_1]\|_0 \le \frac{1}{2}\|w_1-w_0\|$ y ,

$$\|w_2\| \le \frac{1}{2}\|w_1-w_0\| + \|w_1\| \le \frac{r}{4} + \left(1+\frac{1}{2}\right)r = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)r \quad \text{y} \quad w_2+u_0 \in B_{3r}(u_0)$$

Suponga que se han definido inductivamente $[e_i]$ y w_i $i=2,\dots,n-1$ tal que $w_i \in [e_i]$, $\|w_i-w_{i-1}\| \le \frac{1}{2}\|w_{i-1}-w_{i-2}\|$, $\|w_i-w_{i-1}\| \le \frac{1}{2^{i-1}}\|w_1-w_0\|$ y $\|w_i\| < (1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^i})r$. Defina :

(1) $[e_n] = [e_{n-1}] + T^{-1}(y-f(u_0+w_{n-1}))$ y tome $w_n \in [e_n]$ tal que :

(2) $\|w_n-w_{n-1}\| \le 2\|[e_n]-[e_{n-1}]\|_0$.

La última igualdad es posible ya que

$$\begin{aligned}\|[e_n]-[e_{n-1}]\|_0 &= \|[e_n-w_{n-1}]\|_0 = \inf\{\|e_n-w_{n-1}+v\| \setminus v\in \ker Df(u_0)\} \\ &= \inf\{\|(e_n+v)-w_{n-1}\| \setminus v\in\ker Df(u_0)\} \\ &= \inf\{\|w-w_{n-1}\| \setminus w\in[e_n]\} .\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene dado que $w\in[e_n] \leftrightarrow w=e_n+v$ $v\in\ker Df(u_0)$.
Dado que $T : E_0 \to F$ está definido por $T[e] = Df(u_0)e$, entonces $T^{-1}(Df(u_0)w_{n-1}) = [e_{n-1}]$ y $T^{-1}(Df(u_0)w_{n-2}) = [e_{n-2}]$. Así

$$[e_n] = [e_{n-1}] + T^{-1}(y-f(u_0+w_{n-1})) = T^{-1}(Df(u_0)w_{n-1}+y-f(u_0+w_{n-1}))$$
$$[e_{n-1}] = [e_{n-2}] + T^{-1}(y-f(u_0+w_{n-2})) = T^{-1}(Df(u_0)w_{n-2}+y-f(u_0+w_{n-2})) .$$

Restando $[e_{n-1}]$ de $[e_n]$ se tiene

$$[e_n]-[e_{n-1}] = -T^{-1}\left(f(u_0+w_{n-1}) - f(u_0+w_{n-2}) - Df(u_0)(w_{n-1}-w_{n-2}) \right).$$

Entonces por la Desigualdad del Valor Medio aplicada al mapeo $g(x) = f(u_0+x) - Df(u_0)x$ se tiene

$$\|[e_n]-[e_{n-1}]\|_0 \leq \|T^{-1}\| \frac{1}{4\|T^{-1}\|} \|w_{n-1}-w_{n-2}\| = \frac{1}{4}\|w_{n-1}-w_{n-2}\|.$$

Así $\|w_n - w_{n-1}\| \leq 2\|[e_n]-[e_{n-1}]\|_0 \leq \frac{1}{2}\|w_{n-1}-w_{n-2}\|$.

Note que $\|w_{n-1}-w_{n-2}\| \leq \frac{r}{2^{n-1}}$, entonces

$$\|w_n\| \leq \frac{1}{2}\|w_{n-1}-w_{n-2}\| + \|w_{n-1}\| < \frac{r}{2^n} + \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)r = \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)r,$$

así $w_n+u_0 \in B_{3r}(u_0)$.

Por consiguiente (w_n) es una sucesión de Cauchy y converge a un punto $w \in E$, ya que E es completo. Además $w+u_0 \in B_{3r}(u_0)$ ya que por ser $\|\cdot\|$ continua $\lim_{n\to\infty}\|w_n\| = \|w\| < 3r$.

Correspondientemente $[e_n]$ converge a un punto $[e] \in E_0$ y $w \in [e]$, ya que como $w_n \in [e_n]$ entonces $w_n = e_n + v_n$ con $v_n \in \ker Df(u_0)$ y $w = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}(e_n+v_n) = e+v$ con $v \in \ker Df(u_0)$, pues $\ker Df(u_0)$ es cerrado.

Dado que $[e_n] = [e_{n-1}] + T^{-1}(y - f(u_0+w_{n-1}))$ y T^{-1} es continuo, entonces al tomar el límite cuando $n\to\infty$ se obtiene que $0 = T^{-1}(y - f(u_0+w))$.

Por tanto $y = f(u_0+w)$.

Solo resta probar que, si para todo $u \in U$ $Df(u)$ es suprayectivo, entonces f es un mapeo abierto.

Sea $W \subset U$ abierto y $z \in f(W)$. Veamos que existe una vecindad abierta $V \subset F$ de $z = f(x)$ tal que $V \subset f(W)$.
Aplicando la primera afirmación del Teorema a f/W en el punto x se tiene que existen vecindades abiertas $U_0 \subset W$ de x y $V \subset F$ de $f(x) = z$ tal que $f_1 : U_0 \to V$ es sobre, por consiguiente $z \in V \subset f(W)$. Por tanto $f(W)$ es abierto y f es un mapeo abierto.

4.19. Teorema de Inyectividad Local. Sea $f : U \subset E \to F$ un mapeo de clase C^1. Suponga que para $u_0 \in U$ $Df(u_0)(E)$ es un subespacio cerrado de F y que $Df(u_0) \in GL(E, Df(u_0)(E))$, entonces existe una vecindad abierta $V \subset U$ de u_0 tal que f/V es inyectivo. Además $f^{-1} : f(V) \to U$ es Lipschitz continuo.
Demostración.
Como $Df(u_0) \in GL(E, Df(u_0)(E))$ entonces

$$\|e\| = \| Df^{-1}(u_0) \circ Df(u_0)(e) \| \leq \| Df^{-1}(u_0) \| \, \| Df(u_0) e \| .$$

Sea $M = \| Df^{-1}(u_0) \|^{-1} > 0$. Así $M \|e\| \leq \| Df(u_0) \|$ $\forall e \in E$.
Por la continuidad de Df existe $B_{3r}(u_0)$ tal que, si $\| u - u_0 \| < 3r$ entonces $\| Df(u) - Df(u_0) \| < M/2$.
Sean $e_1, e_2 \in B_r(u_0)$. Aplicando la Desigualdad del Valor Medio al mapeo $g(x) = f(x) - Df(u_0)x$, se tiene

$$\| f(e_2) - f(e_1) - Df(u_0)(e_2-e_1) \| \leq \sup_{t\in[0,1]} \{ \| Df(e_1+t(e_2-e_1)) - Df(u_0) \| \} \| e_2-e_1 \|$$

$$\leq \frac{M \| e_1-e_2 \|}{2}$$

dado que $\| u_0 - e_1 - t(e_2-e_1) \| < 3r$. Así

$$M\| e_2-e_1 \| \leq \| Df(u_0)(e_2-e_1) \| \leq \| f(e_2)-f(e_1) \| + \frac{M}{2} \| e_2-e_1 \| \quad , \text{ i.e,}$$

$$\frac{M}{2} \| e_2-e_1 \| \leq \| f(e_2)-f(e_1) \| .$$

Lo cual prueba que f es inyectiva en $B_r(u_0)$.
Veamos que $f^{-1} : f(B_r(u_0)) \to U$ es Lipschitz contínua.
Sean $v_1, v_2 \in f(B_r(u_0))$ y $e_1 = f^{-1}(v_1)$, $e_2 = f^{-1}(v_2)$ entonces por la desigualdad anterior se tiene

$$\| f^{-1}(v_2) - f^{-1}(v_1) \| \leq \frac{2}{M} \| e_2-e_1 \| .$$

Lo cual prueba la afirmación.

La siguiente serie de consecuencias del Teorema de la Función Inversa son herramientas importantes en el estudio de Variedades. Los primeros dos resultados dan, rigurosamente hablando, condiciones suficientes para que f se "vea" localmente como una inclusión (resp. una proyección).

4.1.10 Teorema de Inmersión Local. Sea $f : U \subset E \to F$ un mapeo del clase C^r, $r \geq 1$, $u_0 \in U$. Suponga que $Df(u_0)$ es inyectivo y tiene imagen cerrada $Df(u_0)(E) = F_1$ que se complementa con un subespacio cerrado F_2 de F. Entonces existen vecindades abiertas $U' \subset F$ de $f(u_0)$, $V \subset E \times F_2$ de $(u_0, 0)$ y un C^r difeomorfismo $\varphi : U' \to V$ tal que $\varphi \circ f : f^{-1}(U') \cap U \to E \times F_2$ está dado por

$$\varphi \circ f(e) = (e, 0) \quad .$$

Demostración.

Defina el mapeo $g : U \times F_2 \subset E \times F_2 \to F$ por $g(u,v) = f(u) + v$, el cual es de clase C^r, en efecto $g = B \circ (f \times I_{F_2})$ donde $B : F \times F \to F$ está dado por $B(v,w) = v + w$ y $f \times I_{F_2} : U \times F_2 \to F \times F$ por $(f \times I_{F_2})(u,v) = (f(u), v)$ los cuales son C^r.

Note que $g(u_0, 0) = f(u_0)$ y $Dg(u_0,0) : E \times F_2 \to F$ dado por $Dg(u_0,0)(e,v) = Df(u_0)e + v$ es un isomorfismo continuo con inverso $Dg(u_0,0)^{-1} : F \to E \times F_2$ dado por $Dg(u_0,0)^{-1}(v_1 + v_2) = (Df(u_0)^{-1} v_1, v_2)$. Así por el Teorema de la Función Inversa existen vecindades abiertas $V \subset E \times F_2$ de $(u_0, 0)$, $U' \subset F$ de $f(u_0)$ tal que $g : V \to U'$ es un C^r difeomorfismo.

Sea $\varphi = g^{-1} : U' \to V$ entonces para $e \in f^{-1}(U') \cap U$ se tiene que

$$(\varphi \circ f)(e) = \varphi(f(e)) = \varphi(g(e,0)) = (e, 0) \quad .$$

4.1.11 Teorema de Submersión Local. Sea $f : U \subset E \to F$ de clase C^r, $r \geq 1$, $u_0 \in U$. Suponga que $Df(u_0)$ es supráyectivo y que $\ker Df(u_0) = E_2$ se complementa con un subespacio cerrado E_1 de E. Entonces existen vecindades abiertas $V \subset F \times E_2$ de $(f(u_{01}, u_{02}), u_{02})$, $U' \subset E$ de u_0 y un C^r difeomorfismo $\Psi : V \subset F \times E_2 \to U' \subset E$ tal que

$$f \circ \Psi(w, e_2) = w \qquad \forall (w, e_2) \in V.$$

Demostración.

Defina el mapeo $g : U \subset E_1 \oplus E_2 \to F \times E_2$ por $g(u) = (f(u), u_2)$ donde $u = u_1 + u_2$. Note que g es C^r, en efecto $g = f \times I_{E_2}$, donde $I_{E_2} : E_1 \oplus E_2 \to E_2$ está definido por $I_{E_2}(e_1 + e_2) = e_2$ el cual es C^r.

Además $Dg(u_0) : E_1 \oplus E_2 \to F \times E_2$ dado por $Dg(u_0)(e_1 + e_2) = (Df(u_0)e_1, e_2)$ es continuo. Veamos que $Dg(u_0) \in GL(E, F \times E_2)$.

Si $Dg(u_0)(e_1 + e_2) = 0$, entonces $Df(u_0)e_1 = 0$ y $e_2 = 0$, así $e_1 \in E_1$ y como $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, se tiene que $e_1 = 0$. Luego $Dg(u_0)$ es inyectivo.

Sea $(w, e_2) \in F \times E_2$, entonces como $Df(u_0)$ es supráyectivo existe $x = x_1 + x_2 \in E$ tal que $Df(u_0)(x) = Df(u_0)x_1 = w$, así $Dg(u_0)(x_1 + e_2) = (w, e_2)$. Luego $Dg(u_0)$ es supráyectivo.

Entonces por el Teorema de la Función Inversa existen vecindades abiertas $U' \subset U$ de u_0, $V \subset F \times E_2$ de $(f(u_{01}, u_{02}), u_{02})$ tal que $g : U' \to V$ es un C^r difeomorfismo.

Tomando $\Psi = g^{-1} : V \to U'$ se tiene que $(w, e_2) = g \circ \Psi(w, e_2) = (f \circ \Psi(w, e_2), \Psi_2(w, e_2))$, donde $\Psi_2(v, e_2) = e_2$. Por tanto $f \circ \Psi(w, e_2) = w \quad \forall (w, e_2) \in V$. Además $f(\Psi_1(w, e_2), e_2) = w$.

4.1.12 Teorema de Representación Local. Sea $f: U \subset E \to F$ un mapeo de clase C^r, $r \geq 1$, $u_0 \in U$. Suponga que $Df(u_0)$ tiene imagen cerrada F_1 la cual se complementa con un subespacio cerrado $F_2 \subset F$, y que el $\ker Df(u_0) = E_2$ se complementa con un subespacio cerrado $E_1 \subset E$. Entonces existen vecindades abiertas $U' \subset U$ de u_0, $V \subset F_1 \times E_2$ de $(f_1(u_{01}, u_{02}), u_{02})$ y un C^r difeomorfismo $\Psi: V \subset F_1 \times E_2 \to U' \subset E$ tal que $f \circ \Psi(v_1, e_2) = (v_1, \eta(v_1, e_2))$, donde $\eta: V \subset F_1 \times E_2 \to F_2$ es un mapeo de clase C^r tal que $D\eta(f_1(u_{01}, u_{02}), u_{02}) = 0$.

Demostración.

Dado que $F = F_1 \oplus F_2$ es isomorfo (de hecho difeomorfo) a $F_1 \times F_2$, podemos pensar a $f = f_1 \times f_2$, donde $f_i: U \subset E \to F_i$, $i = 1, 2$. Entonces $Df(u_0) = (Df_1(u_0), Df_2(u_0))$ y como $Df(u_0)(E) = F_1$ se tiene que $Df_2(u_0) = 0$. Así $Df_1(u_0)(E) = F_1$, i.e. $Df_1(u_0)$ es suprayectivo.

Por consiguiente $f_1: U \subset E \to F_1$ satisface las condiciones de 4.1.11., así existen vecindades abiertas $V \subset F_1 \times E_2$ de $(f_1(u_{01}, u_{02}), u_{02})$, $U' \subset U$ de u_0 y un C^r difeomorfismo $\Psi: V \subset F_1 \times E_2 \to U' \subset E$ tal que $f_1 \circ \Psi(v_1, e_2) = v_1$.

Sea $\eta = f_2 \circ \Psi$, el cual es C^r ya que f_2 y Ψ lo son. Entonces $f \circ \Psi: V \subset F_1 \times E_2 \to F$ está definido por

$$f \circ \Psi(v_1, e_2) = (f_1 \circ \Psi(v_1, e_2), f_2 \circ \Psi(v_1, e_2)) = (v_1, \eta(v_1, e_2)) .$$

Sólo resta ver que $D\eta(f_1(u_{01}, u_{02}), u_{02}) = 0$.

Como $\Psi(f_1(u_{01}, u_{02}), u_{02}) = u_0$ y $Df_2(u_0) = 0$, entonces $D\eta(f_1(u_0), u_{02}) = Df_2(\Psi(f_1(u_0), u_{02})) \circ D\Psi(f_1(u_0), u_{02}) = Df_2(u_0) \circ D\Psi(f_1(u_0), u_{02}) = 0$.

4.1.13 Teorema de Rango. Sea $f : U \subset E \to F$ un mapeo de clase C^r, $r \geq 1$, $u_0 \in U$. Suponga que $Df(u_0)$ tiene imagen cerrada F_1 la cual se complementa con un subespacio cerrado $F_2 \subset F$, y que el $\ker Df(u_0) = E_2$ se complementa con un subespacio cerrado $E_1 \subset E$. Además suponga que existe una vecindad abierta $W \subset U$ de u_0 tal que para cada $u \in W$ $Df(u)(E_1)$ es subespacio cerrado de F y $Df(u) \in GL(E_1, Df(u)(E))$. Entonces existen vecindades abiertas $U_1 \subset F_1 \oplus E_2$ de $(f_1(u_0), u_{02})$, $U_2 \subset U$ de u_0, $V_1 \subset F$ de $f(u_0)$, $V_2 \subset F$ y C^r difeomorfismos $\Psi : U_1 \subset F_1 \times E_2 \to U_2 \subset E$, $\varphi : V_1 \subset F \to V_2 \subset F$ tal que

$$\varphi \circ f \circ \Psi(x, y) = (y, 0) .$$

Demostración.

Por el Teorema de Representación Local 4.1.12 existen vecindades abiertas $U_1 \subset F_1 \times E_2$ de $(f_1(u_0), u_{02})$, $U_2 \subset U$ de u_0 y un C^r difeomorfismo $\Psi : U_1 \subset F_1 \times E_2 \to U_2 \subset E$ tal que $\bar{f}(x,y) := f \circ \Psi(x,y) = (x, \eta(x,y))$.

Note que podemos tomar U_1 y U_2 de tal forma que $Df(\Psi(x,y))(E)$ sea subespacio cerrado de F y $Df(\Psi(x,y))|_{E_1} \in GL(E_1, Df(\Psi(x,y))E)$, para esto basta tomar $U_2' = U_2 \cap W$ y $U_1' = \Psi^{-1}(U_2')$.

Sea $P_1 : F_1 \times F_2 \to F_1$ la proyección. Como $D\bar{f}(x,y)(w,e) = (w, D\eta(x,y)(w,e))$, se tiene que $P_1 \circ D\bar{f}(x,y)|_{F_1 \times \{0\}} = I_{F_1}$, lo cual prueba que $D\bar{f}(x,y)|_{F_1 \times \{0\}} : F_1 \times \{0\} \longrightarrow D\bar{f}(x,y)(F_1 \times E_2)$ es inyectivo. Se afirma que $D\bar{f}(x,y)|_{F_1 \times \{0\}}$ es un isomorfismo lineal continuo, en efecto, por hipótesis $Df(\Psi(x,y))|_{E_1} \in GL(E_1, Df(\Psi(x,y))E)$, además $D\Psi(x,y)|_{F_1 \times \{0\}} : F_1 \times \{0\} \to E_1$ es isomorfismo lineal continuo, así $Df(\Psi(x,y)) \circ D\Psi(x,y)|_{F_1 \times \{0\}} : F_1 \times \{0\} \to D\bar{f}(x,y)(F_1 \times E_2) = Df(\Psi(x,y))E$

es isomorfismo lineal continuo. Luego $D\bar{f}(x,y)\circ P_1|_{D\bar{f}(x,y)(F_1\times E_2)} = Id$.
Sea $(w, D\eta(x,y)(w,e)) \in D\bar{f}(x,y)(F_1\times E_2)$. Dado que

$$(w, D\eta(x,y)(w,e)) = (D\bar{f}(x,y)\circ P_1)(w, D\eta(x,y)(w,e)) = D\bar{f}(x,y)(w,0) =$$
$$= (w, D\eta(x,y)(w,0)) = (w, D_1\eta(x,y)w),$$

debemos tener que $D_2\eta(x,y)e = 0$ para toda $e\in E_2$. Por consiguiente $D_2\bar{f}(x,y)e = (0, D_2\eta(x,y)e)$, lo cual dice que $D_2\bar{f}(x,y) = 0$, i.e, $\bar{f}$ no depende de la variable $y\in E_2$.
Defina $\hat{f}(x) = \bar{f}(x,y) = f\circ\Psi(x,y)$, así $\hat{f}: P_1'(U_1)\subset F_1 \to F$ donde $P_1': F_1\times E_2 \to F_1$ es la proyección. Ahora $\hat{f}$ satisface la condiciones del Teorema de Inversion Local en $P_1'(\Psi^{-1}(u_0)) = P_1'(f_1(u_0), u_{02})$, ya que $D\hat{f}(f_1(u_0)) = D\bar{f}(f_1(u_0), u_{02})|_{F_1\times\{0\}}$ es inyectivo con imagen cerrada $D\bar{f}(f_1(u_0), u_{02})(F_1\times E_2) = Df(\Psi(f_1(u_0), u_{02})) = Df(u_0)(E) = F_1$, la cual se complementa con el subespacio cerrado $F_2\subset F$.
Note que $\hat{f}(P_1(f_1(u_0), u_{02})) = \bar{f}(f_1(u_0), u_{02}) = f\circ\Psi(f_1(u_0), u_{02}) = f(u_0)$.
Por consiguiente existen vecindades abiertas $V_1\subset F$ de $f(u_0)$, $V_2\subset F$ y un C^r difeomorfismo $\varphi: V_1\to V_2$ tal que

$$\varphi\circ\hat{f}(x) = (x,0),$$

esto es, tenemos que

$$\varphi\circ f\circ\Psi(x,y) = (x,0).$$

Anexo

En este anexo veremos que en el Teorema de la Función Inversa es esencial tener espacios de Banach, en vez de espacios más generales, tales como espacios de Fréchet.

1. Definición. Un espacio localmente convexo $(E, \|\cdot\|_i)$ consiste de un espacio vectorial E junto con una colección de seminormas $\{\|\cdot\|_i\}_{i\in I}$ tal que

$$e=0 \longleftrightarrow \|e\|_i = 0 \quad \text{para toda } i\in I.$$

Un subconjunto $U\subset E$ es abierto si y solo si para cada $u\in U$ existen $\varepsilon>0$ y una colección finita de índices $i_1,\ldots,i_n\in I$ tal que el conjunto

$$\{e\in E \mid \|e-u\|_{i_k}<\varepsilon \quad , k=1,\ldots,n\}$$

está contenido en U. Estos conjuntos abiertos forman una topología en E.

Una sucesión (x_j) en E converge a $x\in E$ si y solo si $\|x_j - x\|_i \to 0$ cuando $j\to\infty$, para cada $i\in I$.

Una sucesión (x_j) en $(E, \|\cdot\|_i)$ se llama de Cauchy si y solo si $\|e_n - e_m\|_i \to 0$ cuando n y $m \to \infty$, para cada $i \in I$.

El espacio $(E, \|\cdot\|_i)$ es completo si y solo si toda sucesión de Cauchy converge.

2. Definición. Un espacio localmente convexo $(E, \|\cdot\|_i)$ es metrizable si y solo si su topología está inducida por a lo más una colección contable de seminormas. Entonces su metrica está dada por

$$d(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\|x-y\|_i}{2^i(1+\|x-y\|_i)}.$$

3. Definición. Un espacio de Fréchet es un espacio localmente convexo, metrizable y completo.

Ejemplo. Sea $C^\infty[a,b]$ el espacio vectorial de todas las funciones suaves de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Tome

$$\|f\|_n = \sum_{i=0}^{n} \sup_{x \in [a,b]} |D^i f(x)| \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $(C^\infty[a,b], \|\cdot\|_n)$ es un espacio de Fréchet.

4. Definición. Sean E, F espacios de Fréchet, $U \subset E$ abierto y $P: U \subset E \to F$ un mapeo continuo (no lineal). La derivada de P en el punto $u \in U$ en la dirección $h \in E$ está definida por

$$DP(u)h = \lim_{t \to 0} \frac{P(u+th) - P(u)}{t} \quad . \quad (*)$$

Decimos que P es derivable en u en la dirección h, si el límite existe. Decimos que P es C^1 en U si el él límite en $(*)$ existe para toda $u \in U$ y toda $h \in E$, y si el mapeo $DP: U \times E \to F$ es continuo. El mapeo DP se llama la derivada de P.

Note que esta definición no coincide con la definición usual dada para espacios de Banach.

En seguida damos un contraejemplo para el Teorema de la Función Inversa en espacios de Fréchet.

Contraejemplo. Considere el espacios de Fréchet $C^\infty[-1,1]$, y sea P el operador diferencial

$$P: C^\infty[-1,1] \longrightarrow C^\infty[-1,1] \qquad \text{definido por}$$

$$P(f) = f - xf\frac{df}{dx} \quad .$$

Veamos que : (i) P es continuo

(ii) P es C' en $C^\infty[-1,1]$

(i) Sea $f \in C^\infty[-1,1]$ tal que $f_k \to f$ P.D. que $P(f_k) \to P(f)$

Recuerde que $\|f\|_n = \sum_{j=0}^{n} \sup_{x\in[-1,1]} |D^j f(x)|$ $(n \in \mathbb{N})$ y que

$f_k \to f \iff \|f_k - f\|_n \to 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y considere

$$\|P(f_k) - P(f)\|_n = \left\| f_k - x f_k \frac{df_k}{dx} - f + x f \frac{df}{dx} \right\|_n \leq$$

$$\|f_k - f\|_n + \left\| f_k - x f_k \frac{df_k}{dx} - f + x f \frac{df}{dx} + x f_k \frac{df}{dx} - x f_k \frac{df}{dx} \right\|_n \leq$$

$$\|f_k - f\|_n + |x| \, \|f_k\|_n \left\| \frac{df_k}{dx} - \frac{df}{dx} \right\|_n + |x| \, \|f_k - f\|_n \left\| \frac{df}{dx} \right\|_n ,$$

como $f_k \to f \iff \|f_k - f\|_n \to 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{\|f_k\|_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada. Luego tomando el límite cuando $k \to \infty$ se tiene que $\|P(f_k) - P(f)\|_n \to 0$, y esto para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto P es continua, ya que f se tomó arbitrario.

(ii) Ahora calculemos la derivada de P en $f \in C^\infty[-1,1]$.

Sea $g \in C^\infty[-1,1]$

$$DP(f)(g) = \lim_{t\to 0} \frac{P(f+tg) - P(f)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(f+tg) - x(f+tg)\left(\frac{df}{dx} + t\frac{dg}{dx}\right) - f + x\frac{df}{dx}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(g - xf\frac{dg}{dx} - xg\frac{df}{dx} - txg\frac{dg}{dx}\right)$$

$$= g - xf\frac{dg}{dx} - xg\frac{df}{dx}$$

Por tanto $\quad DP(f)(g) = g - xf\dfrac{dg}{dx} - xg\dfrac{df}{dx}$.

Probemos que $DP : C^\infty[-1,1] \times C^\infty[-1,1] \to C^\infty[-1,1]$ es un mapeo continuo.

Considere las seminormas $|||(f,g)|||_n = \|f\|_n + \|g\|_n \quad (n \in \mathbb{N})$ en $C^\infty[-1,1] \times C^\infty[-1,1]$.

Suponga que $(f_k, g_k) \to (f,g)$ P.D $DP(f_k)(g_k) \to DP(f)(g)$

Sea n fijo y considere:

$$\|DP(f_k)(g_k) - DP(f)(g)\|_n = \left\| g_k - xf_k\frac{dg_k}{dx} - xg_k\frac{df_k}{dx} - g + xf\frac{dg}{dx} + xg\frac{df}{dx}\right\|_n \leq$$

$$\|g_k - g\|_n + \left\| xg\frac{df}{dx} - xg_k\frac{df_k}{dx}\right\|_n + \left\| xf\frac{dg}{dx} - xf_k\frac{dg_k}{dx}\right\|_n =$$

$$\|g_k - g\|_n + \left\| xg\frac{df}{dx} - xg_k\frac{df_k}{dx} + xg_k\frac{df}{dx} - xg_k\frac{df}{dx}\right\|_n +$$

$$\left\| xf\frac{dg}{dx} - xf_k\frac{dg_k}{dx} + xf_k\frac{dg}{dx} - xf_k\frac{dg}{dx}\right\|_n \leq$$

$\|g_k - g\|_n + |x|\, \|g_k\|_n \left\| \frac{df}{dx} - \frac{df_k}{dx} \right\|_n + |x| \left\| \frac{df}{dx} \right\|_n \|g - g_k\|_n +$

$|x|\, \|f\|_n \left\| \frac{dg}{dx} - \frac{dg_k}{dx} \right\|_n + |x| \left\| \frac{dg}{dx} \right\|_n \|f - f_k\|_n$,

como $(f_k, g_k) \to (f, g)$, entonces $f_k \to f$ y $g_k \to g$. Además las sucesiones $\{\|g_k\|_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{\|f_k\|_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ están acotadas. Entonces al tomar el límite cuando $k \to \infty$ se tiene que $\|DP(f_k)(g_k) - DP(f)(g)\|_n \to 0$, y esto para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto DP es continuo y P es C^1!

En $f=0$ tenemos que $DP(0)(g) = g$, así que $DP(0) = I$ es el mapeo identidad, el cual es invertible.

Dado que $P(0)=0$, si el Teorema de la Función Inversa fuese cierto, entonces la imagen de P debería contener contener una vecindad abierta del 0. Pero no es así.

Sea $g_k = \frac{1}{k} + \frac{x^k}{k!}$, como

$$\|g_k\|_n = \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[-1,1]} |D^i g(x)| = \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{x^{k-i}}{(k-i)!} \right| ,$$

entonces $\lim_{k\to\infty} \|g_k\|_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto $g_k \to 0$ en $C^\infty[-1,1]$.

Demostraremos que g_n no está en la imagen de P para cualquier $n>1$. Así la imagen de P no contiene ningúna vecindad del 0. Ya que de contener algúna vecindad del 0, entonces para algúna $n>1$ g_n estaría en dicha vecindad.

Más general, si $b_n \neq 0$ entonces $\frac{1}{n} + b_n x^n$ no pertenece a la imagen de P. Esto se puede ver examinando series de potencias. Toda función suave en $[-1,1]$ tiene una expanción en series de potencias en el cero (la cual no converge a menos que la función sea analítica).

Sea $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots$ entonces

$$P(f) = f - x f \frac{df}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - x\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)(a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + \dots\dots) =$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots) - (c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots\dots)$$

donde $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$ y $b_0 = 0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = 2a_2$, ..., $b_n = na_n$.

Así $P(f) = a_0 + (a_1 - c_1)x + (a_2 - c_2)x^2 + (a_3 - c_3)x^3 + \dots\dots =$

$$= a_0 + (a_1 - a_0 a_1)x + (a_2 - a_1^2 + 2a_0 a_2)x^2 + (a_3 - 3a_1 a_2 - 3a_0 a_3)x^2 + \dots$$

Suponga que $P(f) = \frac{1}{n} + b_n x^n$.

Comparando las expresiones anteriores para $P(f)$, se tiene que $a_0 = \frac{1}{n}$.
Si $n>1$, entonces $a_0 \neq 1$ y $(1-a_0)a_1 = 0$, así $a_1 = 0$. El siguiente termino es entonces $(1-2a_0)a_2x^2$. Si $n=2$ entonces $a_0 = 1/2$ y este termino es 0 , lo cual contradice que $P(f) = \frac{1}{2} + b_2X^2$ cuando $b_2 \neq 0$.
Si $n>2$ entonces $a_0 \neq 1/2$ y de $(1-a_0)a_1 = 0$ se tiene que $a_1 = 0$, entonces de $(a_2 - a_1^2 - 2a_0a_2) = (1-2a_0)a_2 = 0$ se tiene $a_2 = 0$ y se procede al siguiente termino, el cual es $(1-3a_0)a_3X^3$. Si $n=3$ entonces $a_0 = 1/3$ y este termino es cero , lo cual contradice que $P(f) = \frac{1}{3} + b_3X^3$ cuando $b_3 \neq 0$.
En general, suponga que $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0$, y llegamos al termino $(1-ka_0)a_kx^k$ (*). Si $k<n$ entonces $a_0 \neq 1/k$; concluimos que $a_k = 0$ y procedemos al siguiente termino. Cuando $k=n$ entonces dado que $a_0 = 1/n$ el termino en (*) debe ser 0 . Así este no puede ser igual a b_nx^n para $b_n \neq 0$. Esto da una contradicción . Por tanto $\frac{1}{n} + b_nx^n$ no puede ser $P(f)$ para cualquier función suave f si $b_n \neq 0$ y $n>1$.

BIBLIOGRAFIA

1. R. Abraham y J.E. Marsden, Manifolds Tensor Analysis, and Applications, Springer-Verlag (1988).

2. Shirley Bromberg y J. J. Rivaud, ANALISIS DIFERENCIAL FONDO DE CULTURA ECONOMICA (1976).

3. J. Dieudonné, FOUNDATIONS OF MODERN ANALYSIS, ACADEMIC PRESS (1960).

4. S. Lang, REAL ANALYSIS, ADDISON-WESLEY (1969).

5. R. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Am. Math. Soc. 7, 65-222 (1982)

6. H. Whitney, Differentiability of the remainder term in Taylor's formula, Duke Math. J. 10, 514-517 (1943a)