

00384

3



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

ZEJ

**FACULTAD DE CIENCIAS  
División de Estudios de Posgrado**

**CAOS**

**T E S I S**  
Que para obtener el grado Académico de  
**DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)**  
p r e s e n t a

**M. en C. HECTOR MENDEZ LANGO**

Director de Tesis: Dr. Javier Pulido Cejudo

**FALLA DE ORIGEN**

**MEXICO, D. F.**

**1995**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

C A O S

Héctor Méndez Langa

Junio de 1995

---

## PREFACIO

Esta tesis es sobre sistemas dinámicos discretos caóticos.

Los resultados que aquí presentamos se refieren, en su mayoría, a la dinámica generada por funciones definidas en un intervalo de los números reales. Sin embargo al estudiar conjuntos invariantes con dinámica caótica aparecen, de manera inmediata, conjuntos con topología más complicada como el conjunto de Cantor. Por esta razón iniciamos adoptando un punto de vista más general: Consideramos un espacio métrico,  $M$ , y una función continua definida en él,  $f : M \rightarrow M$ .

Las iteraciones de  $f$ ,  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ , generan un sistema dinámico discreto. Los conceptos básicos que utilizamos son los siguientes: Decimos que  $x \in M$  es un punto periódico si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) = x$ , al mínimo del conjunto  $\{n \in \mathbb{N} \mid f^n(x) = x\}$  lo llamamos el periodo de  $x$ . Denotamos por  $Per(f)$  al conjunto de puntos periódicos de  $f$ , y por  $\alpha(x, f)$  a la órbita (positiva) de  $x$ , es decir,  $\alpha(x, f) = \{f^n(x) \mid n \geq 0\}$  donde  $f^0$  es la función identidad. Decimos que  $f$  es topológicamente transitiva en  $M$  si para toda pareja de subconjuntos abiertos,  $A$  y  $B$ , de  $M$ , distintos del vacío, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$ . Por último, decimos que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales si existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x \in M$  y para toda  $\delta > 0$ , existen  $y \in B_\delta(x)$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$ , donde  $d(\cdot, \cdot)$  es la métrica en  $M$ . Llamamos a esta  $\varepsilon$  la constante de sensibilidad.

Antes de presentar nuestra definición de caos conviene aclarar que no existe a la fecha una definición aceptada por todos. Conceptos como transitividad, entropía topológica positiva, sensibilidad a las condiciones iniciales, existencia de puntos homoclinicos, y existencia de puntos periódicos de una cantidad infinita de periodos, aparecen de manera reiterada cuando alguien se refiere a caos.

Hemos decidido partir de la definición dada por R. Devaney en 1985 en *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, ver [11]. Las condiciones por él propuestas para decidir si un sistema es caótico nos parecen sencillas y manejables. Además varios de los ejemplos que han dado origen al estudio de dinámicas complicadas, el corrimiento en dos símbolos, la herradura de Smale, los automorfismos de Anosov en el toro y la función logística principalmente, cumplen esa definición en el espacio donde están definidos o en un subconjunto invariante de él.

**Definición (Devaney).** Decimos que  $f$  es caótica en  $M$  si

- i) El conjunto  $Per(f)$  es denso en  $M$ .
- ii)  $f$  es transitiva en  $M$ .
- iii)  $f$  es sensible a las condiciones iniciales.

De estas tres condiciones, la de la sensibilidad merece algunos comentarios. Existen otras definiciones de sensibilidad, la que nosotros presentamos parte de una idea propuesta por Guckenheimer en 1979 en *Sensitive Dependence to Initial Conditions for One Dimensional Maps*, ver [14]. La expansividad, véase *An Introduction to Ergodic Theory* de P. Walters [35], refleja una idea semejante a la contenida en la sensibilidad, sin embargo su definición implica que  $f$  sea un homeomorfismo, condición que no cumplen varias de las funciones que nosotros estudiamos (por ejemplo la función logística,  $f(x) = 4x(1-x)$ , definida en  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ). De hecho se puede mostrar que la dinámica generada por un homeomorfismo definido en un intervalo de los números reales, o en el círculo, no es caótico.

Por otro lado, la sensibilidad da la impresión de ser una condición débil en el siguiente sentido: dados  $x \in M$  y  $\delta > 0$ , sólo un punto de la  $B_\delta(x)$  está obligado a tener una órbita que se separa, en alguna iteración, de la órbita de  $x$ . La siguiente afirmación, cuya demostración se encuentra al final del capítulo cinco, muestra que la sensibilidad afecta el comportamiento de las órbitas de un conjunto abierto y denso de puntos de  $B_\delta(x)$ . Sean  $\epsilon > 0$  la constante de sensibilidad de  $f$ , y  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $\epsilon_1 < \frac{\epsilon}{2}$ . Entonces para todo  $x \in M$  y para toda  $\delta > 0$ , el conjunto de puntos  $y \in B_\delta(x)$  tales que existe  $n \in \mathbb{N}$  con  $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon_1$  es abierto y denso en  $B_\delta(x)$ .

El último comentario sobre la sensibilidad, y tal vez el más importante, es el siguiente: En 1992, ver *On Devaney's Definition of Chaos* [2], un grupo de matemáticos australianos, Banks et al, demostró que si  $M$  es un espacio métrico perfecto, entonces la densidad de  $Per(f)$  y la transitividad implican que  $f$  tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Este importante resultado nos lleva a adoptar la siguiente definición.

**Definición.** Sean  $M$  un espacio métrico y  $f: M \rightarrow M$  una función continua en él. Decimos que  $f$  es caótica en  $M$  si  $M$  es perfecto y se cumplen las siguientes dos condiciones:

- i)  $Per(f)$  es un conjunto denso en  $M$ .
- ii)  $f$  es transitiva en  $M$ .

Si  $D$  es un conjunto invariante bajo  $f$ ,  $f(D) = D$ , decimos que  $f$  es caótica en  $D$  si  $D$  es perfecto y la restricción de  $f$  a  $D$ ,  $f|_D$ , cumple las condiciones i) e ii) en  $D$ .

Esta definición, y el resultado de Banks et al, nos llevan a la pregunta principal que anima este trabajo: ¿Qué tanto podemos descubrir de la dinámica generada por  $f$

a partir de la presencia simultanea de dos condiciones: densidad de puntos periódicos y transitividad topológica?

La mayoría de los teoremas, proposiciones y ejemplos que presentamos, aunque son respuestas a preguntas y conjeturas particulares, adquieren un sentido y un cierto orden si se piensan como fragmentos de la respuesta a esta pregunta general.

En dos campos se pueden dividir los resultados contenidos en la tesis: Los que se refieren a la dinámica de funciones definidas en un subintervalo de los reales, y los que describen algún aspecto de la dinámica de funciones definidas en un espacio métrico (digamos un estudio más general).

Ambos campos están fuertemente relacionados, sin embargo en esta presentación intentaremos dar cuenta de ellos por separado.

Iniciemos con los resultados para la dinámica de funciones definidas en un subintervalo de  $R$ .

Consideremos  $I = [a, b] \subset R$ , y  $f : I \rightarrow I$  una función continua en  $I$ . Una gran cantidad de resultados sobre la dinámica generada por  $f$  han tomado como punto de referencia la entropía topológica de  $f$ . Existen más de diez condiciones equivalentes al hecho de que la entropía de  $f$  sea positiva, ver los siguientes trabajos: *Periodic Points and Topological Entropy of One Dimensional Maps* de L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz y L. Young [8]; *Dynamics in One Dimension* de L. Block y W. A. Coppel [9]; y *Complejidad en Sistemas Dinámicos* de M. Falconi y J. Pulido [13]. Nuestra primer tarea fué relacionar la presencia de caos con este importante concepto.

El estudio de la dinámica de funciones con entropía cero es muy completo, ver [8] y el trabajo de M. Misiurewicz *Invariant Measures for Continuous Transformations of  $[0, 1]$  with Zero Topological Entropy* [22]. Los posibles conjuntos invariantes donde la función es transitiva sólo pueden ser órbitas periódicas, o conjuntos de Cantor donde  $f$  se factoriza en la función máquina sumadora,  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . De aquí que la dinámica de  $f$  no presente subconjuntos con dinámica caótica. Por tanto la presencia de caos implica entropía positiva,  $ent(f) > 0$ . Es inmediata la siguiente pregunta: ¿entropía positiva implica caos? En el capítulo tres contestamos afirmativamente, y presentamos la demostración del siguiente

**Teorema.** Para funciones en el intervalo,  $f : I \rightarrow I$ , las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

- i) Existe  $D \subset I$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ .
- ii) La entropía topológica de  $f$  es positiva.

Este resultado no sólo liga nuestro trabajo al estudio que se ha venido realizando sobre este tipo de sistemas dinámicos, también nos permite encontrar nuevas relaciones entre la dinámica caótica y otros conceptos.

En el capítulo cuatro estudiamos la relación entre caos y el conjunto  $\omega(x, f)$ , donde  $\omega(x, f)$  es el conjunto de los puntos en  $I$ ,  $y \in I$ , tales que existe  $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$  con  $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ . Al revisar la literatura sobre el tema, ver [8], [9] y [22] nuevamente, nos dimos cuenta que si la  $\text{ent}(f) = 0$ , entonces el conjunto  $\omega(x, f)$  presentaba dos características:

Primera. Su cardinalidad sólo puede ser finita (en el caso de que  $\omega(x, f)$  sea una órbita periódica), o no numerable (en el caso de que  $\omega(x, f)$  sea un conjunto de Cantor).

Segunda. Es conocido que para toda  $x \in I$  el conjunto  $\omega(x, f)$  es invariante bajo  $f$ . Lo interesante es que si  $\text{ent}(f) = 0$ , entonces  $f|_{\omega(x, f)}$  siempre es transitiva.

De estas dos observaciones nacieron dos nuevas preguntas: ¿Existe alguna relación entre la presencia de caos y la existencia de un punto  $x \in I$  tal que la cardinalidad de su  $\omega(x, f)$  sea infinita numerable? ¿Existe alguna entre caos y la posibilidad de que  $f|_{\omega(x, f)}$  no sea transitiva para alguna  $x \in I$ ?

Nuestra respuesta es que sí existen estas relaciones. El resultado al que llegamos, cuya demostración es el contenido del capítulo cuatro, es el siguiente:

**Teorema.** Para funciones en el intervalo las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

- i)  $f$  es caótica en algún subconjunto de  $I$ .
- ii) Existe  $x \in I$  tal que su  $\omega(x, f)$  tiene cardinalidad infinita numerable.
- iii) Existe  $x \in I$  tal que  $f$  restringida a  $\omega(x, f)$  no es transitiva.

De las dos características que forman parte de nuestra definición de caos, densidad de  $\text{Per}(f)$  y la transitividad, es la segunda la que nos da más información sobre la dinámica de  $f$ . Decimos esto en el siguiente sentido: si de  $f$  sólo conocemos que  $\text{Per}(f)$  es denso en  $I$ , a partir de aquí no podemos avanzar mucho, la función identidad cumple esta condición y su dinámica es simple (sin embargo existe un estudio realizado por M. Barge y J. Martin, *Dense Periodicity on the Interval* [5], muy completo e interesante sobre la dinámica de funciones en el intervalo que presentan densidad de puntos periódicos).

Por otro lado de la presencia de la transitividad podemos obtener conclusiones muy importantes. En 1979 Z. Nitecki demostró en *Topological Dynamics on the Interval* que si  $f$  es transitiva en  $I$ , entonces el conjunto de puntos periódicos es denso en  $I$  (véase [24]). Por lo tanto, en intervalos, transitividad implica caos.

Este último resultado no nos es tan útil en esta tesis, como pudiera parecer en un primer momento, ya que los conjuntos invariantes y compactos,  $D \subset I$ , donde hay presencia de caos son sólo de dos tipos (como demostraremos en el capítulo dos):

- i)  $D$  es la unión finita de intervalos ó
- ii)  $D$  es un conjunto de Cantor.

Dada la orientación en que hemos realizado nuestro estudio, cuando aseguramos la presencia de caos en un subconjunto invariante de  $I$ , éste es un conjunto de Cantor.

Siguiendo en este camino, podría parecer que de la sólo presencia de la sensibilidad a las condiciones iniciales no obtendríamos más resultados sobre la dinámica de  $f$ . Sin embargo no es así. En el capítulo cinco demostraremos que, para funciones en el intervalo, la sensibilidad de  $f$  implica que la dinámica es caótica. Nuestro resultado es el siguiente:

**Teorema.** Si  $f : I \rightarrow I$  es sensible a las condiciones iniciales, entonces  $f$  cumple las siguientes tres afirmaciones:

- i)  $f$  es caótica en algún subconjunto de  $I$ .
- ii) El conjunto de los puntos aperiódicos es denso en  $I$ .
- iii) El conjunto de los puntos asintóticamente periódicos es denso en  $I$ .

Recordemos que  $x \in I$  es aperiódico si la cardinalidad de  $\omega(x, f)$  es infinita, y es asintóticamente periódico si la cardinalidad de  $\omega(x, f)$  es finita.

En un nivel distinto se sitúa el estudio del espacio formado por todas las funciones que son caóticas en algún subconjunto del intervalo  $I$ . Denotemos por  $C^0[I, I]$  al conjunto de las funciones continuas de  $I$  en  $I$ , y por  $K[I, I] \subset C^0[I, I]$  al de las funciones para las cuales existe un subconjunto de  $I$  donde son caóticas. Siguiendo los resultados reseñados por Block y Coppel, [9], se puede demostrar que  $K[I, I]$  es abierto y denso en  $C^0[I, I]$ . La métrica considerada en  $C^0[I, I]$  es esta:

$$d(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)|, x \in I\}.$$

La pregunta que nos planteamos fué ¿Cuántas componentes tiene  $K[I, I]$ ?

Escogimos el camino de estudiar la arco-conexidad de  $K[I, I]$ . La respuesta a la pregunta es: una sólo componente. Esta respuesta y algunas otras propiedades de este conjunto están contenidas en el siguiente teorema (su demostración forma el capítulo seis).

**Teorema.** Si  $C^0[I, I]$  representa el conjunto de las funciones continuas en  $I$ , y  $K[I, I] \subset C^0[I, I]$  el conjunto de las funciones que son caóticas en algún subconjunto de  $I$ . Entonces:

- i)  $K[I, I]$  es arco-conexo.
- ii) El complemento de  $K[I, I]$ , las funciones no caóticas, también es un espacio arco-conexo.
- iii) Los conjuntos  $K[I, I]$  y su complemento no son convexos.

Varias de las implicaciones presentadas para intervalos en  $R$  no son validas en otro tipo de espacios. En particular queremos destacar la que se refiere a la entropía

topológica. A. Katok demostró en 1981, en *Lyapunov Exponents, Entropy and Periodic Orbits for Diffeomorphisms* [17], que si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo de clase  $C^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , de una variedad compacta de dimensión dos y la entropía de  $f$  es positiva, entonces existe un subconjunto invariante donde la dinámica es caótica. Este resultado es similar al que nosotros presentamos para funciones del intervalo. Sin embargo, en 1981 también, M. Rees (ver *A Minimal Positive Entropy Homeomorphism of the 2-torus* [28]) demostró la existencia de un homeomorfismo en el toro bidimensional con entropía positiva y sin puntos periódicos. Es decir, en clase  $C^0$ , entropía positiva no implica caos en dimensión mayor que uno. Al final del capítulo cinco mostramos un ejemplo sencillo de un endomorfismo en el toro con entropía positiva y sin caos.

Consideremos ahora  $M$  un espacio métrico perfecto y compacto, y  $f : M \rightarrow M$  una función continua en él. Resultados sobre la dinámica de  $f$  en este nivel de generalidad son menos frecuentes. En esta tesis están contenidos tres que nos parecen interesantes.

1.- Para el primero de ellos nos hacemos la siguiente pregunta: Si  $f$  es caótica en  $M$  ¿qué podemos decir sobre la dinámica de  $f^n$ ?

Puede suceder que  $f^n$  sea caótica en  $M$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Esto se da por ejemplo si  $f$  es un automorfismo de Anosov y  $M$  es el toro de dimensión dos.

Si  $f^n$  no es caótica en  $M$ , obtuvimos el siguiente resultado:

**Teorema.** Si  $f : M \rightarrow M$  es caótica en  $M$ , compacto, y para  $n \in \mathbb{N}$  la función  $f^n$  no es caótica en  $M$ , entonces existe una partición de  $M$  en  $n$  subconjuntos cerrados,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , tales que para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f^n$  es caótica en  $A_i$ . Además  $f(A_i) = A_{i+1}$ , donde los índices se toman módulo  $n$ .

Es inmediato notar la semejanza de este resultado con la descomposición espectral del conjunto de los puntos no errantes demostrada por Smale (ver *Differentiable Dynamical Systems* [32]) para difeomorfismos que cumplen el axioma A.

Vale la pena mencionar que para la demostración de nuestro teorema sólo usamos de  $f$  su continuidad y las dos condiciones de la definición de caos (véase el capítulo uno).

Demostremos en el capítulo tres una afirmación que puede tomarse, en cierto sentido, como recíproca de este teorema: Si para alguna  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $f^n$  es caótica en un subconjunto  $D$  de  $M$ , entonces  $f$  es caótica en  $C$ , donde  $D \subset C \subset M$ .

2.- Para el segundo resultado partimos de la siguiente pregunta: Supongamos que  $f : M \rightarrow M$  es caótica en un subconjunto compacto de  $M$ ,  $D \subset M$  ¿cómo es la topología de  $D$ ?

Ya mencionamos antes que si  $M$  es un intervalo compacto de  $R$ , entonces  $D$  tiene sólo dos opciones: es la unión de una cantidad finita de componentes o es un conjunto de Cantor.

En el capítulo dos mostraremos que si  $M$  es de dimensión dos, la estructura de  $D$  puede tener más opciones. Es decir, la topología de  $D$  tiene la posibilidad de ser más complicada, más rica.

Sin embargo pudimos descubrir lo siguiente:

**Teorema.** Supongamos que  $f : M \rightarrow M$  es caótica en  $D \subset M$ . Si  $D$  es compacto y está formado por una cantidad infinita de componentes, entonces existen  $\widehat{D}$ , un conjunto de Cantor,  $\widehat{f} : \widehat{D} \rightarrow \widehat{D}$ , una función continua y caótica en  $\widehat{D}$ , y  $\pi : D \rightarrow \widehat{D}$ , continua y suprayectiva, tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \widehat{D} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{D} \end{array}$$

Una consecuencia inmediata de este teorema es que si  $f$  es caótica en  $D$ , entonces este conjunto está formado por una cantidad finita de componentes ó por una cantidad no numerable de ellas.

3.- Los capítulos siete y ocho de la tesis pueden considerarse como apéndices en el sentido de que redondean los temas tratados en los seis primeros capítulos. En particular en el siete proponemos una definición alternativa de caos (equivalente a la dada antes). Con ella podemos demostrar lo siguiente: Si  $f$  es caótica en  $M$ , los periodos presentes en  $Per(f)$  forman un conjunto no acotado. Esta afirmación es evidente para funciones en el intervalo. Ahí caos implica entropía positiva y con ello, la presencia de puntos periódicos con periodos, de al menos, todas las potencias de 2. La misma afirmación para funciones definidas en un espacio métrico  $M$  suena también evidente, sin embargo no encontramos una demostración de ella en la literatura que consultamos.

El siguiente teorema, que demostraremos en el capítulo siete, contiene la afirmación anterior. Nos muestra también que caos implica una particular distribución de los puntos periódicos: Todo conjunto abierto distinto del vacío contiene puntos periódicos de periodo tan grande como se quiera.

**Teorema.** Sean  $M$  un espacio métrico y  $f : M \rightarrow M$  continua en  $M$ . Si  $f$  es caótica en  $M$ , entonces para todo  $x \in M$ , para todo  $\delta > 0$ , y para todo  $n \in N$ , existe  $y \in Per(f)$  tal que  $y \in B_\delta(x)$  y el periodo de  $y$  es mayor que  $n$ .

Con la afirmación anterior terminamos la presentación de nuestro trabajo. Ojalá el lector acepte la invitación implícita en esta introducción y siga adelante. Tal vez algunos fragmentos de esta tesis le sean de utilidad. O, mejor aún, tal vez en la lectura de alguna parte de ella encuentre un pequeño disfrute.

**Agradecimientos.**

Esta tesis es el producto de un trabajo colectivo. En su elaboración participaron, en distintos momentos y formas, varias personas. Todas ellas aportaron más, mucho más, de lo que se han dado cuenta. Quiero aquí agradecerles en verdad su tiempo, su apoyo y su colaboración.

Gracias a mi asesor: Javier Pulido, por su confianza, sus consejos y por haberme introducido al tema de la dinámica caótica. Gracias a mis sinodales por sus sugerencias y observaciones. Esta versión final tiene una deuda muy grande con todos ellos: Renato Iturriaga, Federico Sánchez, Guillermo Sienra, Santiago López de Medrano, Héctor Sánchez y Ernesto Rosales.

Gracias a mis amigos Jefferson King, Paz Alvarez y Pilar Martínez. Quiero decirles que sentí su apoyo en todo momento. En particular con Jeff me siento muy agradecido. El y yo formamos un pequeño equipo en el estudio de los sistemas dinámicos, ojalá así sigamos.

Gracias a Eduardo Mora por su ayuda en la computadora. A él le debo la presentación en Scientific Word de la tesis.

Gracias a mis alumnos de Cálculo. Sólo quiero decir que los considero mis amigos.

Gracias a mi familia. En todo momento me hicieron sentir acompañado. Gracias a mis abuelos, a mi hermano y a mis hermanas. En particular el apoyo de mi hermano Edgar fué para mí importantísimo.

Por último, gracias a mi mejor amiga: Pilar Valencia. Le agradezco su apoyo y los momentos de su compañía. Sobre todo le agradezco su amistad. Gracias también a sus dos pequeñas hijas: Adriana y Alicia.

**Héctor Méndez Lango.**

**Junio de 1995.**

# Indice

<b>1</b>	<b>Caos, primeras propiedades</b>	<b>3</b>
1.1	La definición de caos . . . . .	3
1.2	Relación entre las dinámicas caóticas de $f$ y $f^n$ . . . . .	6
1.3	Caos y diagramas que conmutan . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Sobre el conjunto caótico</b>	<b>16</b>
2.1	El conjunto caótico en el intervalo . . . . .	16
2.2	El conjunto caótico. Una aproximación más general . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Caos y entropía positiva en el intervalo</b>	<b>23</b>
3.1	Definiciones y resultados preliminares . . . . .	23
3.2	En intervalos, son equivalentes caos y entropía positiva . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Caos y el <math>\omega(x, f)</math> en el intervalo</b>	<b>30</b>
4.1	El conjunto $\omega(x, f)$ , primeras propiedades . . . . .	30
4.2	La entropía positiva y el conjunto $\omega(x, f)$ . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Sensibilidad implica caos</b>	<b>37</b>
5.1	La sensibilidad, el caos y una digráfica . . . . .	37
5.2	La sensibilidad implica la densidad del conjunto de los puntos aperiódicos . . . . .	41
<b>6</b>	<b>El conjunto de las funciones caóticas</b>	<b>45</b>
6.1	El conjunto de las funciones caóticas, en el intervalo, es arco-conexo . . . . .	45
6.2	El conjunto de las funciones no caóticas también es arco-conexo . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Caos y puntos periódicos</b>	<b>54</b>

7.1	Relación caos y puntos periódicos. . . . .	54
<b>8</b>	<b>Ejemplos de funciones caóticas</b>	<b>58</b>
8.1	Una función caótica en todo $\mathbb{R}$ . . . . .	58
8.2	Una $\epsilon$ -perturbación caótica de la identidad. . . . .	63

# Capítulo 1

## Caos, primeras propiedades

La definición de función caótica,  $f : M \rightarrow M$ , algunas de sus consecuencias iniciales y la presentación de los primeros ejemplos, son el contenido de este capítulo. En particular aquí estudiamos la relación entre las dinámicas caóticas de  $f$  y  $f^n$ . En este terreno demostraremos la siguiente afirmación:

Si  $M$  es compacto y  $f$  es caótica en  $M$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  la dinámica generada por  $f^n$  tiene dos opciones:  $f^n$  es caótica en  $M$ , o existe una partición de  $M$  en  $n$  subconjuntos cerrados,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , tales que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f^n$  es caótica en  $A_i$ . Además  $f(A_i) = A_{i+1}$ , donde los índices se consideran módulo  $n$ .

En la segunda parte del capítulo nos preguntamos sobre el comportamiento de la dinámica caótica ante diagramas que conmutan. En esencia demostramos que si  $g$  es un factor de  $f$ , bajo  $h$ , y  $g$  es caótica, entonces  $f$  es caótica en algún subconjunto de  $M$  si para todo  $y$  en el dominio de  $g$  la cardinalidad de  $h^{-1}(y)$  está acotada.

### 1.1 La definición de caos

A lo largo de este trabajo  $M$  representa un espacio métrico perfecto,  $d(\cdot, \cdot)$  su métrica, y  $f : M \rightarrow M$  una función continua en  $M$ . Decimos que  $x \in M$  es un punto periódico si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) = x$  (donde  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  es la  $n$ -iteración de  $f$ ). Si  $x$  es un punto periódico, al mínimo del conjunto  $\{n \mid f^n(x) = x\}$  le llamamos el periodo de  $x$ . Denotamos por  $Per(f)$  al conjunto de puntos periódicos de  $f$ , por  $Per_n(f)$  al de puntos periódicos de periodo  $n$ , y por  $o(x, f)$  a la órbita (positiva) de  $x$ ,  $o(x, f) = \{f^n(x) \mid n \geq 0\}$ , donde  $f^0$  es la función identidad,  $f^0 = id$ .

**Definición 1.1** Decimos que  $f$  es caótica en  $M$  si:

i)  $Per(f)$  es un conjunto denso en  $M$ .

ii)  $f$  es topológicamente transitiva en  $M$ . Es decir, para toda pareja de conjuntos abiertos no vacíos,  $A$  y  $B$  en  $M$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$ .

Si  $D$  es un conjunto invariante bajo  $f$ ,  $f(D) = D$ , decimos que  $f$  es caótica en  $D$  si  $D$  es perfecto y la restricción de  $f$  a  $D$ ,  $f|_D$ , cumple las condiciones i) e ii) en  $D$ . En este caso llamamos a  $D$  el conjunto caótico.

#### Observaciones:

1.a. La definición anterior se basa en la dada por R. Devaney en 1985, ver [11]. Para él  $f : M \rightarrow M$  es caótica en  $M$  si se cumplen las dos propiedades de nuestra definición y  $f$  tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Es decir, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x \in M$  y para toda  $\delta > 0$ , existen  $y \in B_\delta(x)$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$ .

Sabemos por un resultado reciente (véase [2]) que si  $M$  es perfecto, entonces la densidad de puntos periódicos y la transitividad topológica implican la sensibilidad de  $f$ . Por tanto, en espacios perfectos la definición que proponemos es equivalente a la definición de Devaney.

1.b. Si el espacio  $M$  es completo, entonces la condición ii) de nuestra definición de caos es equivalente a la siguiente:  $f(M) = M$  y existe  $x \in M$  tal que  $\alpha(x, f)$  es densa en  $M$ . Obsérvese que en este caso  $M$  es separable.

1.c. Existen varias formas de definir la estabilidad de una órbita. La siguiente, utilizada por Barge y Martin (ver [4]), nos permite relacionar caos y estabilidad. Decimos que  $x \in M$  es topológicamente estable si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $y \in M$  y  $d(x, y) < \delta$ , entonces  $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . La condición de sensibilidad a las condiciones iniciales nos dice que ningún punto de  $M$  tiene una órbita topológicamente estable. Por lo tanto, caos en  $M$  significa inestabilidad topológica en todos los puntos de  $M$ .

#### Ejemplos:

1.d. Las definiciones y demostraciones que deberían acompañar este párrafo se pueden consultar en Smale [32]. Sea  $M$  una variedad diferenciable y compacta. Sean  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo, y  $\Omega$  el conjunto de los puntos no errantes bajo  $f$ . Supongamos que  $\Omega$  es un conjunto hiperbólico y que  $Per(f)$  es denso en  $\Omega$ . Entonces  $\Omega$  es la unión finita de conjuntos cerrados, invariantes y disjuntos:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n,$$

y en cada uno de ellos  $f$  es transitiva. Por lo tanto para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , donde  $\Omega_k$  es perfecto,

$$f|_{\Omega_k}: \Omega_k \rightarrow \Omega_k$$

es caótica.

1.e. Para este párrafo se pueden consultar [11] y [32]. Sea  $A$  una matriz de  $2 \times 2$  con entradas enteras. Sea  $T^2$  el toro bidimensional,  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Si el determinante de  $A$  es igual a 1,  $A$  induce un difeomorfismo en  $T^2$ :

$$f_A: T^2 \rightarrow T^2.$$

Si  $A$  es hiperbólica, es decir si sus valores propios no pertenecen al círculo unitario, al difeomorfismo inducido lo llamamos automorfismo de Anosov.

Sabemos que si  $f_A$  es un automorfismo de Anosov, entonces  $f_A$  es caótica en  $T^2$ .

1.f. Sea  $S^2$  la esfera de dimensión dos. Existe un difeomorfismo, conocido como la herradura de Smale (ver [32]),

$$f: S^2 \rightarrow S^2,$$

tal que  $\Omega = \{p\} \cup \{q\} \cup D$ . Donde  $p$  es una fuente,  $q$  es un sumidero, y  $D$  es un conjunto de Cantor. Además  $f$  es caótica en  $D$ .

1.g. Consideremos la siguiente familia de funciones:  $F_\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\lambda \in [0, 4]$ , dada por:

$$F_\lambda(x) = \lambda x(1-x).$$

Sabemos (ver [11]) que  $F_4$  es caótica en  $[0, 1]$ . Demostraremos en el capítulo tres que si  $\lambda \in (\lambda_\infty, 4]$ ,  $\lambda_\infty = 3.5699456\dots$ , existe un subconjunto de Cantor  $D$  de  $[0, 1]$ , que depende de  $\lambda$ , tal que  $F_\lambda$  es caótica en  $D$ . La familia  $F_\lambda$  es conocida como la familia logística, y  $F_4$  como la función logística.

1.h. Sea  $G_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\lambda \in [0, 2]$ , la familia dada por:

$$G_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \lambda - \lambda x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

$G_2$ , conocida como la función tienda de campaña, es caótica en  $[0, 1]$ . En forma análoga al ejemplo anterior, para todo  $\lambda \in (1, 2]$ , existe un subconjunto de  $[0, 1]$ , que depende de  $\lambda$ , donde la función  $G_\lambda$  es caótica.

Nos será útil referirnos a funciones del tipo  $G_2$  de la siguiente forma:  $G_2$  es lineal a pedazos definida por  $G(0) = G(1) = 0$  y  $G(\frac{1}{2}) = 1$ .

1.j. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  lineal a pedazos definida por:  $f(0) = f(1) = 0$  y  $f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}) = 1$ .

Se puede mostrar que  $f$  es caótica en  $C$ , donde  $C$  es el conjunto ternario de Cantor.

## 1.2 Relación entre las dinámicas caóticas de $f$ y $f^n$

Iniciamos mostrando que los conjuntos  $Per(f)$  y  $Per(f^n)$  son iguales.

**Lema 1.2** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $Per(f) = Per(f^n)$ .

**Demostración.** Sea  $x \in Per(f)$ , esto implica que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(x) = x \Rightarrow f^{nk}(x) = x$ , por tanto  $x \in Per(f^n)$ . Esto demuestra la contención  $Per(f) \subset Per(f^n)$ . La otra contención es inmediata.  $\square$

**Lema 1.3** Sean  $x \in M$ ,  $x \notin Per(f)$ , y  $A = \overline{o(x, f)}$ . Si  $f(A) = A$ , entonces  $A$  es perfecto.

**Demostración.** Sea  $B \subset M$  un conjunto abierto tal que  $x \in B$ . Como  $f(A) = A$ ,  $f^{-1}(B) \cap A \neq \emptyset$ , esto implica que existe  $n \geq 0$ , tal que  $f^n(x) \in f^{-1}(B) \cap A$ . Por tanto  $f^{n+1}(x) \in B \cap A$  con  $f^{n+1}(x) \neq x$ ,  $x$  es punto de acumulación de  $A$ . De lo anterior se sigue primero que todo elemento de la órbita de  $x$  es punto de acumulación de  $A$ , y luego que en  $A$  todo punto es de acumulación.  $A$  es perfecto.  $\square$

**Teorema 1.4** Sea  $f : M \rightarrow M$  caótica en  $M$ ,  $M$  compacto, si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  no es caótica en  $M$ , entonces existen  $n$  subconjuntos cerrados de  $M$ ,  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ , tales que:

- i)  $M = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ .
- ii) Si  $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ , entonces  $f(A_k) = A_{k+1}$  y  $f(A_{n-1}) = A_0$ .
- iii) Para toda  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , se tiene que  $\text{int}(A_k) \neq \emptyset$  y  $\bigcup_{k=0}^{n-1} \text{int}(A_k)$  es denso en  $M$ .
- iv) Para toda  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $f^n|_{A_k} : A_k \rightarrow A_k$  es caótica en  $A_k$ .

**Demostración.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que la función  $f^n$  no es caótica en todo  $M$ . Sea  $x_0$  tal que  $\overline{\alpha(x_0, f)} = M$ . Si  $\alpha(x_0, f^n)$  es densa en  $M$ , entonces tendríamos que  $f^n$  es topológicamente transitiva en  $M$  y, por el lema 1.2,  $\overline{\text{Per}(f^n)} = \overline{\text{Per}(f)} = M$ . Lo que nos llevaría a que  $f^n$  es caótica en  $M$ . Por tanto  $\overline{\alpha(x_0, f^n)} \neq M$ .

Sean  $x_k = f^k(x_0)$  y  $A_k = \overline{\alpha(x_k, f^n)}$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

**Paso uno.** Demostremos la afirmación i).

Sea  $x \in M$ , como  $\overline{\alpha(x_0, f)} = M$  existe una sucesión infinita de naturales,  $\{n_i\} = S$ , tales que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = x$ . Sean

$$C_k = \{k, n+k, 2n+k, 3n+k, \dots\}, \text{ donde } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Como  $S = (S \cap C_0) \cup (S \cap C_1) \cup \dots \cup (S \cap C_{n-1})$ , existe  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $S \cap C_k$  es infinito numerable, a los elementos de esta intersección les llamamos  $n_i$ . Como  $f^{n_i}(x_0) \rightarrow x$  tenemos que  $x \in A_k$ . Por tanto  $M = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ .

**Paso dos.** Para las afirmaciones  $f(A_k) = A_{k+1}$  y  $f(A_{n-1}) = A_0$ , demostraremos primero la contención " $\subset$ ".

Sean  $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$  y  $y \in f(A_k)$ , existen  $z \in A_k$  con  $f(z) = y$ , y una sucesión de múltiplos de  $n$ ,  $\{n_i\}$ , tales que  $f^{n_i}(z_k) \rightarrow z$ . Esto implica que  $f^{n_i+1}(z_k) \rightarrow y$ , como  $f^{n_i+1}(z_k) = f^{n_i}(z_{k+1})$  tenemos que  $y \in A_{k+1}$ . Por tanto  $f(A_k) \subset A_{k+1}$ .

Si  $k = n-1$  tenemos

$$f^{n_i+1}(z_{n-1}) \rightarrow y, f^{n_i+1}(f^{n-1}(x_0)) \rightarrow y, f^{n_i+n}(x_0) \rightarrow y,$$

por tanto  $y \in A_0$  y  $f(A_{n-1}) \subset A_0$ .

Veamos ahora la contención " $\supset$ ". Sean  $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$  y  $y \in A_{k+1}$ , existe una sucesión de múltiplos de  $n$ ,  $\{n_i\}$ , tal que  $f^{n_i}(x_{k+1}) \rightarrow y$ . Como  $A_k$  es compacto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión  $\{f^{n_i}(x_k)\}$  es convergente. Sea  $z = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_k)$ , por tanto  $z \in A_k$  y

$$f(z) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i+1}(x_k) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_{k+1}) = y.$$

Por tanto  $y \in f(A_k)$  y  $A_{k+1} \subset f(A_k)$ .

Si  $k = n-1$  tomamos  $y \in A_0$ , existe  $\{n_i\}$  una sucesión de múltiplos de  $n$  tal que  $f^{n_i}(x_0) \rightarrow y$ . Podemos suponer que la sucesión  $\{f^{n_i-n}(x_{n-1})\}$  es convergente.

Sea  $z = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i-n}(x_{n-1})$ , entonces

$$f(z) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i-n+1}(x_{n-1}) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i-n+1} \circ f^{n-1}(x_0).$$

Por tanto  $f(z) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y$ ,  $y \in f(A_{n-1})$  y  $A_0 \subset f(A_{n-1})$ . Con esto terminamos la demostración de la afirmación ii).

Obsérvese que, aplicando varias veces la afirmación ii), ya tenemos lo siguiente:

- a) Para toda  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f^m(A_k) = A_{k+m \pmod{n}}$ ,  $y$   
 b) Para toda  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $f^n(A_k) = A_k$ . Cada  $A_k$  es estrictamente invariante bajo  $f^n$ .

**Paso tres.** Dada  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , todo punto de  $A_k$  es punto de acumulación de  $A_k$ .

**Demostración.** De las igualdades:  $f^n(A_k) = A_k$  y  $A_k = \overline{o(x_k, f^n)}$ , del hecho de que  $x_0$  no es punto periódico y del lema 1.3, se sigue que  $A_k$  es perfecto.

De lo anterior se desprende también que  $f^n|_{A_k}$  es transitiva en  $A_k$ .

**Paso cuatro.** El conjunto  $A = \bigcup_{k=0}^{n-1} \text{int}(A_k)$  es denso en  $M$ .

**Demostración.** Sea  $B \subset M$ , un subconjunto abierto y distinto del vacío. Supongamos que  $B \cap A = \emptyset$ . Como  $B \cap \text{int}(A_0) = \emptyset$ , entonces  $B - A_0 \neq \emptyset$ . Sea  $B_1 = B - A_0$ ,  $B_1 \subset B$ ,  $B_1$  es abierto y distinto del vacío. Como  $B \cap \text{int}(A_1) = \emptyset$ ,  $B_1 \cap \text{int}(A_1) = \emptyset$ . Podemos definir  $B_2 = B_1 - A_1 = B - (A_0 \cup A_1)$ , y tener que  $B_2 \subset B$ ,  $B_2$  abierto y distinto del vacío. Continuamos así hasta obtener:

$$B_{n-1} = B - (A_0 \cup \dots \cup A_{n-2}),$$

$B_{n-1}$  abierto y distinto del vacío. Y por último, como

$$B \cap \text{int}(A_{n-1}) = \emptyset \Rightarrow B_{n-1} \cap \text{int}(A_{n-1}) = \emptyset,$$

definimos  $B_n$  así:

$$B_n = B_{n-1} - A_{n-1} = B - (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}),$$

con  $B_n$  abierto y distinto del vacío, lo cual es una contradicción con lo demostrado en el paso uno.

**Paso cinco.** Para cada  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , y cada  $m$  múltiplo de  $n$ , se tiene que  $f^m(x_k) \in \text{int}(A_k)$ .

**Demostración.** Supongamos por el contrario que existen  $m$  y  $k$ , que cumplen las condiciones descritas, tales que  $f^m(x_k) \in \partial A_k$ , entonces existe  $A_j \neq A_k$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , tal que  $f^m(x_k) \in A_j \cap A_k$ . Como ambos conjuntos son invariantes bajo  $f^n$ , tenemos que para todo  $p$  múltiplo de  $n$ ,  $p \geq m$ ,  $f^p(x_k) \in A_j \cap A_k$ . Por tanto  $A_k \subset A_j$ .

Utilizando los resultados del paso dos, obtenemos las siguientes contenciones:

$$A_j \subset A_{j+(n+j-k)} \subset A_{j+2(n+j-k)} \subset \dots \subset A_{j+(n-1)(n+j-k)} = A_{nj+(n-1)n-(n-1)k} = A_k,$$

donde los índices deben considerarse módulo  $n$ .

De ellas concluimos que  $A_j = A_k$ , lo cual es una contradicción.

Los pasos cuatro y cinco demuestran la afirmación iii).

**Paso seis.** Sea  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $f^n$  es caótica en  $A_k$ .

**Demostración.** Es suficiente mostrar la densidad de los puntos periódicos,  $\overline{\text{Per}(f^n|_{A_k})} = A_k$ .

Sea  $B$  abierto y  $B \cap A_k \neq \emptyset$ , sean  $y \in A_k$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $B_\varepsilon(y) \subset B$ . Existe  $m$ , múltiplo de  $n$ , tal que  $f^m(x_k) \in B_\varepsilon(y)$ . Como  $f^m(x_k) \in \text{int}(A_k)$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$B_\delta(f^m(x_k)) \subset B_\varepsilon(y) \cap \text{int}(A_k) \subset B \cap A_k.$$

Como  $\text{Per}(f^n)$  es denso en  $M$ , existe  $z \in \text{Per}(f^n)$  tal que  $z \in B_\delta(f^m(x_k)) \subset B \cap A_k$ . Por tanto  $\text{Per}(f^n|_{A_k})$  es denso en  $A_k$  y  $f^n$  es caótica en  $A_k$ .

Lo anterior demuestra la afirmación iv) y termina nuestro teorema.  $\square$

**Definición 1.5** Decimos que  $f$  es mezclante si para toda pareja de abiertos,  $A$  y  $B$  en  $M$ , distintos del vacío, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 = n_0(A, B)$ , tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**Observación 1.j.**  $f$  mezclante implica  $f$  transitiva.

**Proposición 1.6** Si  $f$  es caótica en  $M$  y es mezclante, entonces para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n$  es caótica en  $M$ .

**Demostración.** Es inmediato demostrar que si  $f$  es mezclante, entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $f^n$  es transitiva en  $M$ . Y por el lema 1.2, obtenemos que  $f^n$  es caótica en  $M$ .  $\square$

Sea  $M$  un intervalo compacto en  $\mathbb{R}$ . Siguiendo el trabajo de Marcy Barge y Joe Martin (véase [6]) se puede demostrar que  $f$  es mezclante en  $M$  si y sólo si para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n$  es caótica en  $M$ .

### 1.3 Caos y diagramas que conmutan

A lo largo de esta sección  $f : M \rightarrow M$ ,  $g : \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}$  y  $h : M \rightarrow \tilde{N}$  serán funciones continuas;  $M$  y  $\tilde{N}$  espacios métricos perfectos;  $h$  suprayectiva, y supondremos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \dots (*) \\ \tilde{N} & \xrightarrow{g} & \tilde{N} \end{array}$$

Es decir, para todo  $x \in M$  se tiene que  $h \circ f(x) = g \circ h(x)$ .

**Definición 1.7** Si  $h$  es un homeomorfismo, decimos que  $f$  y  $g$  son topológicamente equivalentes (o equivalentes) y lo denotamos así:  $f \sim g$ . Si  $h$  no es inyectiva decimos que  $g$  es un factor de  $f$ , o que  $g$  es una semiconjugación de  $f$ .

**Observación 1.k.** Son conocidos los siguientes resultados:

- i) La igualdad  $h \circ f = g \circ h$  implica que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $h \circ f^n = g^n \circ h$ .
- ii) Si  $f \sim g$ , entonces  $f$  es transitiva en  $M$  si y solamente si  $g$  es transitiva en  $\tilde{N}$ .
- iii) Si  $f \sim g$ , entonces  $f$  tiene densidad de puntos periódicos si y solamente si  $g$  tiene densidad de puntos periódicos. Por tanto si  $f$  y  $g$  son equivalentes, entonces  $f$  es caótica en  $M$  si y solamente si  $g$  es caótica en  $\tilde{N}$ .
- iv) En el artículo de Banks et al, [2], aparece un ejemplo donde se muestra que si  $f \sim g$  y  $f$  tiene sensibilidad a las condiciones iniciales, entonces  $g$  no necesariamente tiene sensibilidad. Sin embargo si los conjuntos  $M$  y  $\tilde{N}$  son compactos, y  $f \sim g$ , se puede demostrar que la sensibilidad de  $f$  sí implica la sensibilidad de  $g$ .
- v) Si  $g$  es un factor de  $f$  y  $f$  es caótica en  $M$ , entonces  $g$  es caótica en  $\tilde{N}$  (véase [26]).

vi) Si  $M$  y  $\tilde{N}$  son compactos podemos asignar tanto a  $f$  como a  $g$  un número mayor o igual a cero conocido como su entropía topológica,  $ent(f)$  y  $ent(g)$ . Si  $f \sim g$ , entonces  $ent(f) = ent(g)$ . Si  $g$  es factor de  $f$ , entonces  $ent(f) \geq ent(g)$ .

Los resultados que sobre la entropía topológica de  $f$  en algún momento utilizaremos se pueden consultar en [1] y [9].

Si  $g$  es un factor de  $f$  la parte v) de la observación anterior nos dice que lo caótico de la dinámica de  $f$  se hereda a la dinámica de  $g$ . En el teorema 1.9 analizamos el proceso inverso: si la dinámica de  $g$  es caótica ¿Qué podemos decir sobre la dinámica de  $f$ ?

Para la demostración del teorema 1.9 necesitamos el siguiente lema.

**Lema 1.8** Sean  $p, q$  y  $r$  tres puntos en  $M$ . Si  $q$  es punto de acumulación de la  $\alpha(p, f)$ , y  $r$  es punto de acumulación de la  $\alpha(q, f)$ , entonces  $r$  es punto de acumulación de la  $\alpha(p, f)$ .

**Demostración.** Existen dos sucesiones,  $\{n_i\}$  y  $\{m_j\}$  en  $\mathbb{N}$ , tales que

$$f^{n_i}(p) \rightarrow q \text{ y } f^{m_j}(q) \rightarrow r.$$

Dada  $\varepsilon > 0$ , existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{m_0}(q) \in B_\varepsilon(r)$ . Sea  $\delta > 0$  tal que

$$B_\delta(f^{m_0}(q)) \subset B_\varepsilon(r) \text{ y } r \notin B_\delta(f^{m_0}(q)).$$

Como  $f^{m_0}$  es una función continua, existe  $\gamma > 0$  tal que

$$f^{m_0}(B_\gamma(q)) \subset B_\delta(f^{m_0}(q)).$$

Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_0}(p) \in B_\gamma(q)$ , por las contenciones anteriores  $f^{n_0+m_0}(p) \in B_\varepsilon(r)$  con  $f^{n_0+m_0}(p) \neq r$ . Por lo tanto  $r$  es punto de acumulación de la órbita de  $p$  bajo  $f$ .  $\square$

**Teorema 1.9** Supongamos que  $g$  es factor de  $f$ , que  $M$  y  $\tilde{N}$  son compactos y que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $y \in \tilde{N}$  la cardinalidad de  $h^{-1}(y)$  es menor o igual a  $m$ . Si  $g$  es caótica en  $\tilde{N}$ , entonces existe  $D \subset M$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ .

**Demostración.** Sea  $y_0 \in \tilde{N}$ , tal que  $\overline{\alpha(y_0, g)} = \tilde{N}$ . Como  $h$  es a lo más  $m$  a 1,  $h^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  con  $p \leq m$  y  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ . Sea  $A_k = \overline{\alpha(x_k, f)}$ , para  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

**Paso uno.** Existe  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  tal que  $x_k$  es punto de acumulación de  $\alpha(x_k, f)$ .

**Demostración.** Como  $y_0$  es punto de acumulación de  $\alpha(y_0, g)$ , existe una sucesión  $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$  tal que  $g^{n_i}(y_0) \rightarrow y_0$ . Consideremos la sucesión  $\{f^{n_i}(x_1)\}$ . Como  $A_1$  es compacto, podemos suponer que esta sucesión es convergente,  $f^{n_i}(x_1) \rightarrow z$ . Además

$$h(x) = h\left(\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_1)\right) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} h \circ f^{n_i}(x_1) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} g^{n_i} \circ h(x_1) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} g^{n_i}(y_0) = y_0.$$

Por lo tanto  $z \in \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ .

Seguimos el mismo procedimiento para  $x_2$  y obtenemos que la sucesión  $f^{n_i}(x_2)$  converge a un punto de  $h^{-1}(y_0)$ . En forma análoga con  $x_3$ , y así para todo elemento de  $h^{-1}(y_0)$ .

Definimos una aplicación de  $h^{-1}(y_0)$  en sí mismo,  $P : h^{-1}(y_0) \rightarrow h^{-1}(y_0)$ , definida así:

$$P(x_k) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_k),$$

$k \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Como la cardinalidad de  $h^{-1}(y_0)$  es finita, existen  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  y  $m \in \mathbb{N}$  tales que  $P^m(x_k) = x_k$ . Es decir, tenemos el siguiente esquema:

$$x_k \xrightarrow{P} x_{k_1} \xrightarrow{P} x_{k_2} \xrightarrow{P} \dots \xrightarrow{P} x_k.$$

De aquí se sigue que  $x_{k_1}$  es punto de acumulación de  $\alpha(x_k, f)$ ,  $x_{k_2}$  es punto de acumulación de  $\alpha(x_{k_1}, f)$ , y así sucesivamente. Aplicando el lema 1.8 concluimos que  $x_k$  es punto de acumulación de  $\alpha(x_k, f)$ .

Renumerando los índices, si es necesario, podemos suponer que  $x_1$  es punto de acumulación de  $\alpha(x_1, f)$ .

**Paso dos.**  $f(A_1) = A_1$ .

**Demostración.** Sea  $y \in f(A_1)$ ,  $y = f(z)$  con  $z \in A_1$ . Existe una sucesión de naturales,  $\{n_i\}$ , tales que  $f^{n_i}(x_1) \rightarrow z \Rightarrow f^{n_i+1}(x_1) \rightarrow y$ , por tanto  $y \in A_1$  y  $f(A_1) \subset A_1$ .

Sea  $y \in A_1$ , existe  $f^{n_i}(x_1) \rightarrow y$ , como  $A_1$  es compacto podemos suponer que  $f^{n_i-1}(x_1) \rightarrow z$ . Para este punto tenemos que  $f(z) = y$ , por tanto  $y \in f(A_1)$  y  $A_1 \subset f(A_1)$ .

De las igualdades  $f(A_1) = A_1$  y  $A_1 = \overline{\alpha(x_1, f)}$  y de que  $x_1 \notin \text{Per}(f)$ , se sigue que  $A_1$  es perfecto.

Hasta aquí tenemos que  $A_1$  es compacto, perfecto, estrictamente invariante bajo  $f$ , y que  $f$

en  $A_1$  es transitiva.

**Paso tres.**  $h(A_1) = \tilde{N}$ .

**Demostración.** Es suficiente mostrar que  $\tilde{N} \subset h(A_1)$ . Sea  $y \in \tilde{N}$ , existe una sucesión  $\{g^{n_i}(y_0)\}$  tal que  $g^{n_i}(y_0) \rightarrow y$ . Como  $A_1$  es compacto podemos suponer que la sucesión  $\{f^{n_i}(x_1)\}$  es convergente. Sea  $x = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_1)$ , es inmediato que  $h(x) = y$ . Por tanto  $\tilde{N} \subset h(A_1)$ .

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \tilde{N} & \xrightarrow{g} & \tilde{N}, \end{array}$$

con  $f$  transitiva en  $A_1$ .

**Paso cuatro.** El conjunto  $Per(f|_{A_1})$  es distinto del vacío.

**Demostración.** Sean  $y \in Per_n(g)$  y  $x \in A_1$  tal que  $h(x) = y$ . Como  $h(f^{kn}(x)) = g^{kn}(y) = y$ , se tiene que

$$\{x, f^n(x), f^{2n}(x), \dots\} \subset h^{-1}(y),$$

por tanto existen  $n_1 < n_2$ , ambos múltiplos de  $n$ , tales que  $f^{n_1}(x) = f^{n_2}(x)$ , de aquí obtenemos:

$$f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x)) = f^{n_2}(x) = f^{n_1}(x), \quad f^{n_1}(x) \in Per(f|_{A_1}).$$

Lo anterior también muestra que para todo  $y \in Per(g)$  existe  $x \in Per(f|_{A_1})$  tal que  $h(x) = y$ , es decir,  $Per(g) \subset h(Per(f|_{A_1}))$ . La otra contención es inmediata, de hecho tenemos la igualdad de estos dos conjuntos:

$$Per(g) = h(Per(f|_{A_1})).$$

**Paso cinco.** Sea  $M_1 = \overline{Per(f|_{A_1})}$ , entonces  $h(M_1) = \tilde{N}$  y  $f(M_1) \subset M_1$ .

**Demostración.** Por la parte final del paso anterior tenemos  $Per(g) \subset h(M_1)$ , como  $h(M_1)$  es compacto, tenemos:  $\tilde{N} = \overline{Per(g)} \subset h(M_1)$ .

La segunda afirmación también es inmediata. Sea  $y \in f(M_1)$ , existe  $z \in M_1$ ,  $f(z) = y$ , existe  $\{z_i\} \subset Per(f|_{A_1})$ , tal que  $z_i \rightarrow z \Rightarrow f(z_i) \rightarrow y$  con  $\{f(z_i)\} \subset Per(f|_{A_1})$ . Por tanto  $y \in M_1$ .

**Paso seis.** El final.

Los pasos anteriores nos permiten tener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \dots (**) \\ \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{N}. \end{array}$$

Si tenemos que  $x_1 \in M_1$ , entonces  $A_1 = \overline{\sigma(x_1, f)} \subset M_1 = \overline{\text{Per}(f|_{A_1})} \subset A_1 \Rightarrow A_1 = M_1$ , y por tanto  $f$  sería caótica en  $M_1$ .

Si  $x_1 \notin M_1$ , a partir del diagrama (\*\*), seguimos el mismo camino descrito para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \dots (*) \\ \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{N} \end{array}$$

con la ventaja de que la imagen inversa, bajo  $h$ , de  $y_0$  no contiene a  $x_1$  y por tanto su cardinalidad es estrictamente menor que  $p$ . Ahora obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M_2 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{N} \end{array}$$

con  $A_2 = \overline{\sigma(x_2, f)}$  y  $M_2 = \overline{\text{Per}(f|_{A_2})}$ . Para lo anterior tal vez sea necesario reenumerar los índices de  $h^{-1}(y_0)$ .

Nuevamente si  $x_2 \in M_2$  habremos terminado, en caso contrario seguimos el mismo procedimiento con este último diagrama conmutativo.

Como la cardinalidad de  $h^{-1}(y_0)$  es finita, existe  $k \leq p$ , donde obtenemos que  $f$  es caótica en  $M_k$ . Tomando  $M_k = D$  terminamos.  $\square$

El siguiente ejemplo muestra que bajo las condiciones del teorema anterior no se puede asegurar que  $f$  sea caótica en todo  $M$ .

**Ejemplo 1.1.** Sean  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  y  $h : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 4x(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 4x(1+x) & \text{si } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

$$g(x) = 4x(1-x), \text{ y } h(x) = |x|.$$

Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] & \xrightarrow{f} & [-1, 1] \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ [0, 1] & \xrightarrow{g} & [0, 1], \end{array}$$

con  $g$  caótica en  $[0, 1]$ ,  $h$  a lo más 2 a 1, y  $f$  no caótica en  $[-1, 1]$ .

Con el siguiente ejemplo mostramos que la condición:  $h$  es a lo más  $m$  a 1, en el teorema anterior, es necesaria.

**Ejemplo 1.m.** Sean  $I = [0, 1]$ ,  $S^1 = R/Z$  el círculo, y  $M = I \times S^1$ . Sea  $f : M \rightarrow M$  dada por

$$f(x, y) = (4x(1-x), y + \theta_0 \pmod{1}),$$

con  $\theta_0 \notin Q$ .

Sean  $\pi : M \rightarrow [0, 1]$ ,  $\pi(x, y) = x$ ,  $g : I \rightarrow I$ ,  $g(x) = 4x(1-x)$ . Con estas funciones tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ I & \xrightarrow{g} & I. \end{array}$$

Obsérvese que  $g$  es caótica en  $I$ , pero  $f$  no es caótica en ningún subconjunto de  $M$  ya que  $Per(f) = \emptyset$ .

## Capítulo 2

# Sobre el conjunto caótico

Sea  $f : M \rightarrow M$ , continua en  $M$ , espacio métrico. Supongamos que  $f$  es caótica en  $D \subset M$ ,  $D$  compacto. Describimos en este capítulo algunas de las características de  $D$ . Mostramos que si  $M$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$  (o en el círculo),  $D$  tiene sólo dos opciones: es un conjunto de Cantor o es una unión finita de intervalos. En el caso de que  $M$  no sea una variedad de dimensión uno veremos que el conjunto  $D$  puede tener una estructura más complicada. El capítulo finaliza mostrando que si  $D$  está formado por una cantidad infinita de componentes, entonces existen  $\hat{D}$ , un conjunto de Cantor, y  $\hat{f} : \hat{D} \rightarrow \hat{D}$  caótica en  $\hat{D}$ , tales que  $\hat{f}$  es una semiconjugación de  $f$ .

### 2.1 El conjunto caótico en el intervalo

La siguiente es una caracterización del conjunto de Cantor.

**Definición 2.1** Sea  $C$  el conjunto formado por todos los puntos del intervalo  $[0, 1]$  que, al expresarse en base 3, no tienen al número 1 en su expansión. Llamamos a  $C$  el conjunto de Cantor.

Sabemos que  $C$  es compacto, perfecto, totalmente desconexo y métrico.

**Lema 2.2** Cualquier espacio compacto, perfecto, totalmente desconexo y métrico es homeomorfo al conjunto de Cantor.

**Demostración.** Véase Hocking y Young [16], página 100.  $\square$

**Lema 2.3** Sea  $f : I \rightarrow I$ ,  $I = [a, b]$  en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que  $f$  es caótica en  $D \subset I$ ,  $D$  compacto. Entonces  $D$  es un conjunto de Cantor, es decir homeomorfo a  $C$ , o  $D$  es la unión de una cantidad finita de intervalos,  $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ .

**Demostración.** Sabemos que  $D$  es perfecto. Podemos expresar a  $D$  así:  $D = \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$ , donde cada  $D_\alpha$  es una componente de  $D$ . Además  $D_\alpha \neq D_\beta$  si  $\alpha \neq \beta$ .

Observemos lo siguiente: Si para todo  $\alpha \in A$ ,  $D_\alpha$  está formada por un sólo punto, entonces  $D$  es totalmente desconexo y por tanto  $D$  es de Cantor.

Si existe  $\alpha \in A$  tal que  $D_\alpha$  tiene más de un punto,  $\text{int}(D_\alpha) \neq \emptyset$ . Existen  $x$  y  $y$  en el interior de  $D_\alpha$  tales que  $x \in \text{Per}_n(f)$  y  $\overline{\alpha(y, f)} = D_\alpha$ .

Como  $f$  es continua, la imagen de una componente de  $D$  bajo  $f$  está contenida en otra componente de  $D$ . Esto implica que existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  en  $A$  tales que

$$f(D_\alpha) \subset D_{\alpha_1}, f^2(D_\alpha) \subset D_{\alpha_2}, \dots, f^{n-1}(D_\alpha) \subset D_{\alpha_{n-1}} \text{ y } f^n(D_\alpha) \subset D_\alpha.$$

De estas contenciones se sigue que

$$\alpha(y, f) \subset D_\alpha \cup D_{\alpha_1} \cup \dots \cup D_{\alpha_{n-1}},$$

y, como cada componente es compacta, concluimos que

$$D \subset D_\alpha \cup D_{\alpha_1} \cup \dots \cup D_{\alpha_{n-1}} \subset D.$$

Por tanto  $D$  es la unión finita de subintervalos en  $I$ .  $\square$

**Observación 2.a.** El lema anterior también es válido si  $f$  es un intervalo en el círculo.

Mostramos a continuación una función  $f: R \rightarrow R$ , tal que  $f$  es caótica en  $D \subset R$  y  $D$  tiene exactamente tres componentes.

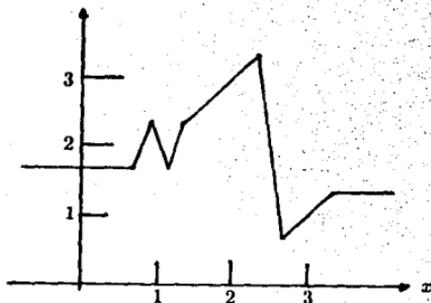
**Ejemplo 2.b.** Nuestra función  $f: R \rightarrow R$  es así: Primero nos aseguramos que  $f$  tiene una órbita de periodo 3,  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f(3) = 1$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que las bolas cerradas de radio  $\varepsilon$  alrededor de estos tres puntos,  $\overline{B_\varepsilon(1)} = D_1$ ,  $\overline{B_\varepsilon(2)} = D_2$ ,  $\overline{B_\varepsilon(3)} = D_3$ , sean ajenas. En nuestro caso tomamos  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ . Definamos  $f$  de tal forma que

$$D_1 \xrightarrow{f} D_2 \xrightarrow{f} D_3 \xrightarrow{f} D_1,$$

y ahí,  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ ,  $f$  sea caótica. La siguiente función cumple estas condiciones.

Sea  $f: R \rightarrow R$  la función lineal a pedazos definida por:  $f(\frac{2}{3}) = \frac{5}{3}$ ,  $f(\frac{8}{9}) = \frac{7}{3}$ ,  $f(\frac{10}{9}) = \frac{5}{3}$ ,  $f(\frac{4}{3}) = \frac{7}{3}$ ,  $f(\frac{7}{3}) = \frac{10}{3}$ ,  $f(\frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$ ,  $f(\frac{10}{3}) = \frac{4}{3}$ ,  $f(x) = \frac{5}{3}$  si  $x < \frac{2}{3}$  y  $f(x) = \frac{4}{3}$  si  $x > \frac{10}{9}$ . Su

gráfica es la figura siguiente.



Obsérvese que la construcción que presentamos en este ejemplo se puede adaptar para mostrar que la siguiente proposición es cierta: Dada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , y  $D$  tiene  $n$  componentes.

**Observación 2.c.** El lema 2.3 también muestra que, para funciones en el intervalo, el conjunto caótico es de Cantor si y solamente si su interior es el vacío. En el siguiente ejemplo vemos que la afirmación  $\text{int}(D) = \emptyset$  no implica que  $D$  sea de Cantor si  $f$  es una función definida en  $M$ , y  $M$  no es una variedad de dimensión uno.

**Ejemplo 2.d.** Sean  $M = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ , y  $f : M \rightarrow M$  con regla de correspondencia  $f(x, y) = (4x(1-x), \sqrt{y})$ . Observemos que  $f$  no es caótica en  $M$ , pero sí es caótica en  $D = [0, 1] \times \{0\}$ . En  $D$ ,  $f$  es esencialmente la función logística. Además  $\text{int}(D) = \emptyset$  y  $D$  está formado por una sola componente.

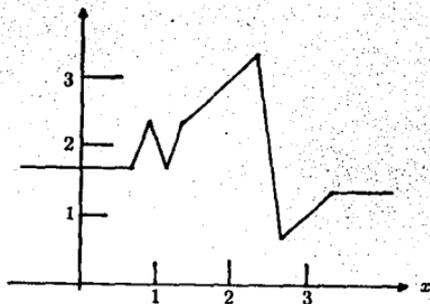
## 2.2 El conjunto caótico. Una aproximación más general

Sean  $f : M \rightarrow M$ ,  $M$  espacio métrico,  $f$  caótica en  $D \subset M$ ,  $D$  compacto.

**Lema 2.4** Si el interior de  $D$ , en  $M$ , es distinto del vacío,  $D$  está formado por una cantidad finita de componentes.

**Demostración.** La argumentación presentada en el lema 2.3 también es válida aquí.  $\square$

gráfica es la figura siguiente.



Obsérvese que la construcción que presentamos en este ejemplo se puede adaptar para mostrar que la siguiente proposición es cierta: Dada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , y  $D$  tiene  $n$  componentes.

**Observación 2.c.** El lema 2.3 también muestra que, para funciones en el intervalo, el conjunto caótico es de Cantor si y solamente si su interior es el vacío. En el siguiente ejemplo vemos que la afirmación  $\text{int}(D) = \emptyset$  no implica que  $D$  sea de Cantor si  $f$  es una función definida en  $M$ , y  $M$  no es una variedad de dimensión uno.

**Ejemplo 2.d.** Sean  $M = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ , y  $f : M \rightarrow M$  con regla de correspondencia  $f(x, y) = (4x(1-x), \sqrt{y})$ . Observemos que  $f$  no es caótica en  $M$ , pero sí es caótica en  $D = [0, 1] \times \{0\}$ . En  $D$ ,  $f$  es esencialmente la función logística. Además  $\text{int}(D) = \emptyset$  y  $D$  está formado por una sola componente.

## 2.2 El conjunto caótico. Una aproximación más general

Sean  $f : M \rightarrow M$ ,  $M$  espacio métrico,  $f$  caótica en  $D \subset M$ ,  $D$  compacto.

**Lema 2.4** Si el interior de  $D$ , en  $M$ , es distinto del vacío,  $D$  está formado por una cantidad finita de componentes.

**Demostración.** La argumentación presentada en el lema 2.3 también es válida aquí.  $\square$

De aquí en adelante supondremos que  $D$ , el conjunto caótico, está formado por una cantidad infinita de componentes:

$$D = \cup_{\alpha \in A} D_{\alpha},$$

donde  $A$  tiene cardinalidad infinita.

La herradura de Smale (ver ejemplo 1.h del capítulo 1), muestra que el conjunto caótico en variedades de dimensión 2, también puede ser un conjunto de Cantor. Los siguientes dos ejemplos muestran nuevas opciones para la estructura de  $D$ .

**Ejemplo 2.e.** Sean  $M = [0, 1] \times [0, 1]$  y  $f : M \rightarrow M$  dada por  $f(x, y) = (g(x), 4y(1 - y))$ . Donde  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es lineal a pedazos definida por  $g(0) = g(1) = 0$ ,  $g(\frac{1}{3}) = g(\frac{2}{3}) = 1$ . Sabemos que  $g$  es caótica en  $\mathbb{C}$ , el conjunto de Cantor, y  $h(y) = 4y(1 - y)$  es caótica y mezclante en todo el intervalo  $[0, 1]$ . Con estas dos últimas condiciones se puede mostrar que  $f$  es caótica en  $D = \mathbb{C} \times [0, 1]$ .

**Ejemplo 2.f.** Sean  $M = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  como en el ejemplo anterior, y  $f : M \rightarrow M$  dada por  $f(x, y) = f_2(f_1(x, y))$ , donde

$$f_1(x, y) = \begin{cases} (g(x), 4y(1 - y)) & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0. \\ (x, 4y(1 - y)) & \text{si } x \leq 0 \text{ y } y \geq 0. \\ (x, y) & \text{si } x \leq 0 \text{ y } y \leq 0. \\ (g(x), y) & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \leq 0. \end{cases}$$

y  $f_2(x, y) = (-x, -y)$ . La función  $f$  es caótica en

$$D = (\mathbb{C} \times [0, 1]) \cup ((-\mathbb{C}) \times [-1, 0]),$$

donde  $-\mathbb{C}$  es el conjunto:  $-\mathbb{C} = \{t \mid t = -x, x \in \mathbb{C}\}$ . Observemos que  $D$ , en este caso, no es el producto de un conjunto de Cantor y un intervalo.

El siguiente lema muestra que las componentes de  $D$  no están aisladas.

**Lema 2.5** Sean  $B \subset M$ , un subconjunto abierto, y  $D_{\alpha}$  una componente de  $D$ . Si  $B \cap D_{\alpha} \neq \phi$ , entonces existe  $\beta \in A$ ,  $\beta \neq \alpha$ , tal que  $B \cap D_{\beta} \neq \phi$ .

**Demostración.** Si  $B \cap D_\alpha \subset D_\alpha$ , existen en  $D_\alpha$  puntos periódicos y puntos con órbita densa en  $D$ . Siguiendo la argumentación del lema 2.3 llegamos a que  $D$  tiene una cantidad finita de componentes, lo cual contradice nuestra hipótesis inicial.  $\square$

**Observación 2.g.** Bajo las hipótesis del lema anterior, si  $B \cap D \neq \emptyset$ , entonces  $B$  intersecciona una cantidad infinita de componentes de  $D$ .

**Demostración.** Una vez que  $B \cap D_\beta \neq \emptyset$ , tomamos  $B_1 = B - D_\beta$ . El conjunto  $B_1$  es abierto, ya que  $D_\beta$  es cerrado, y  $B_1 \cap D_\alpha \neq \emptyset$ . Con esta información podemos repetir el procedimiento para mostrar que  $B$  intersecciona otra componente de  $D$ , y así sucesivamente.  $\square$

Definimos en  $D$  una relación de equivalencia:  $x \sim y$  si ambos puntos están en la misma componente de  $D$ , es decir, existe  $\alpha \in A$  tal que  $x \in D_\alpha$  y  $y \in D_\alpha$ . Denotamos por  $\hat{D}$  al espacio cociente,  $\hat{D} = D / \sim$ , con la topología cociente. La proyección de  $D$  en  $\hat{D}$ , que a cada punto le asocia su clase de equivalencia (su componente), la denotamos por  $\pi : D \rightarrow \hat{D}$ .

Como  $f$  es continua en  $D$  se tiene que  $f(x) \sim f(y)$  si  $x \sim y$ . Por tanto existe  $\hat{f} : \hat{D} \rightarrow \hat{D}$ , continua en  $\hat{D}$  tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \hat{D} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{D} \end{array}$$

De este diagrama tenemos la siguiente información inicial:

- i)  $\pi$  es continua y suprayectiva.  $\hat{D}$  es compacto.
- ii) Como  $\hat{f}$  es un factor de  $f$ ,  $\hat{f}$  es transitiva en  $\hat{D}$  y tiene densidad de puntos periódicos.
- iii) Como  $D$  es separable,  $\hat{D}$  es separable.
- iv) Ya que, por el lema 2.5, las componentes de  $D$  no son aisladas, todo punto de  $\hat{D}$  es punto de acumulación. Por lo tanto  $\hat{D}$  es perfecto.

Los siguientes lemas nos permitirán mostrar que  $\hat{D}$  es un espacio de Hausdorff, y es totalmente disconexo.

**Lema 2.6** Sean  $S$  un espacio de Hausdorff y  $T$  una componente de él. Sea  $U$  abierto tal que  $T \subset U$ , entonces existe  $V$ , abierto, tal que  $T \subset V \subset U$  y  $\partial V = \emptyset$ .

**Demostración.** Ver Hocking y Young [16], página 47.  $\square$

**Lema 2.7** Sea  $B$  un abierto en  $D$  tal que cumple la siguiente condición: Si  $x \in B \cap D$  y  $x$  es elemento de la componente  $D_\alpha$ , se tiene que  $D_\alpha \subset B$ .

Entonces  $\pi(B)$  es abierto en  $\hat{D}$ .

**Demostración.** Mostraremos que  $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$ . Sea  $x \in \pi^{-1}(\pi(B)) \Rightarrow \pi(x) \in \pi(B)$ , existe  $y \in B$  tal que  $\pi(x) = \pi(y)$ , por tanto  $x \sim y$ , ambos puntos están en la misma componente. Esto implica que  $x \in B$  y  $\pi^{-1}(\pi(B)) \subset B$ . La otra contención es inmediata.  $\square$

**Lema 2.8** Sean  $D_\alpha$  y  $D_\beta$  dos componentes distintas de  $D$ . Entonces existen dos abiertos en  $D$ ,  $B_\alpha$  y  $B_\beta$  tales que  $D_\alpha \subset B_\alpha$  y  $D_\beta \subset B_\beta$ ,  $B_\alpha \cap B_\beta = \phi$ ,  $B_\alpha \cup B_\beta = D$  y ambos cumplen la siguiente condición:

Si  $x \in B_i \cap D$  y  $x \in D_\gamma$ , entonces  $D_\gamma \subset B_i$ ,  $i = \alpha, \beta$ . (\*)

**Demostración.** Como  $D_\alpha \cap D_\beta = \phi$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in D_\alpha$  y para todo  $y \in D_\beta$  se tiene que  $d(x, y) \geq \delta$ . Sea  $B = \cup_{x \in D_\alpha} B_\delta(x)$ ,  $B$  es abierto,  $D_\alpha \subset B$  y  $B \cap D_\beta = \phi$ .

Por el lema 2.6, existe  $B_\alpha$  abierto de  $D$  tal que  $D_\alpha \subset B_\alpha \subset B$  con  $\partial B_\alpha = \phi$  (en  $D$ ).

Como  $\partial B_\alpha = \phi$ ,  $B_\alpha$  es cerrado y  $(B_\alpha)^c$  es abierto en  $D$ . Por tanto  $B_\alpha$  y  $(B_\alpha)^c$  forman una desconexión de  $D$ . Cada componente de  $D$  está en uno sólo de estos dos abiertos.

Tomando  $B_\beta = (B_\alpha)^c$  terminamos.  $\square$

**Proposición 2.9** El espacio  $\hat{D}$  es de Hausdorff, y es totalmente desconexo.

**Demostración.** Sean  $\hat{x} \neq \hat{y}$  en  $\hat{D}$ . Consideramos las componentes  $\pi^{-1}(\hat{x}) = D_1$  y  $\pi^{-1}(\hat{y}) = D_2$ ,  $D_1 \cap D_2 = \phi$ . Por el lema 2.8, existen dos conjuntos abiertos,  $B_1$  y  $B_2$ , tales que  $D_1 \subset B_1$  y  $D_2 \subset B_2$ ;  $B_1 \cap B_2 = \phi$ ; ambos cumplen la condición (\*) y  $D \subset B_1 \cup B_2$ .

Por el lema 2.7,  $\pi(B_1)$  y  $\pi(B_2)$  son dos conjuntos abiertos en  $\hat{D}$  tales que:

$$\hat{x} \in \pi(B_1), \hat{y} \in \pi(B_2), \pi(B_1) \cap \pi(B_2) = \phi, \text{ y } \hat{D} = \pi(B_1) \cup \pi(B_2).$$

Por tanto  $\hat{D}$  es de Hausdorff y es totalmente desconexo.  $\square$

**Proposición 2.10** El conjunto caótico está formado por una cantidad no numerable de componentes.

**Demostración.** Con la proposición anterior tenemos que el conjunto  $\hat{D}$  es compacto, perfecto y de Hausdorff, por lo tanto es no numerable. A cada componente de  $D$  le corresponde un único punto de  $\hat{D}$ .  $\square$

Para concluir que  $\hat{D}$  es un conjunto de Cantor sólo falta demostrar que  $\hat{D}$  es metrizable.

**Lema 2.11** Si un espacio de Hausdorff es la imagen continua de un espacio métrico compacto, entonces es metrizable.

**Demostración.** Ver Nadler [23], página 37.  $\square$

Lo anterior nos da en forma inmediata el siguiente corolario.

**Corolario 2.12** El conjunto  $\hat{D}$  es un conjunto de Cantor.  $\square$

El siguiente teorema es un resumen de lo que hemos demostrado.

**Teorema 2.13** Sean  $M$  un espacio métrico,  $f : M \rightarrow M$  continua en  $M$ , y  $D \subset M$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ . Si  $D$  es compacto y está formado por una cantidad infinita de componentes, existen  $\hat{D}$ , un conjunto de Cantor, y  $\hat{f} : \hat{D} \rightarrow \hat{D}$  continua y caótica en  $\hat{D}$  tales que  $\hat{f}$  factoriza a  $f$ . Es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \hat{D} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{D}, \end{array}$$

donde  $\pi : D \rightarrow \hat{D}$  es continua y suprayectiva.  $\square$

## Capítulo 3

# Caos y entropía positiva en el intervalo

Sean  $I = [a, b]$  un subintervalo compacto en  $R$ , y  $f : I \rightarrow I$  una función continua en  $I$ . Recientemente L. S. Block y W. A. Coppel propusieron, ver [9], que el criterio para decidir si la dinámica generada por  $f$  es caótica es que su entropía topológica sea positiva. En este capítulo relacionamos este criterio con nuestra definición de caos. Demostramos que  $f$  tiene entropía topológica positiva si y sólo si existe  $D$ , un subconjunto de  $I$ , tal que  $f$  es caótica en  $D$ .

### 3.1 Definiciones y resultados preliminares

Iniciamos recordando algunas propiedades importantes sobre el espacio de dos símbolos.

Sea  $\Sigma = \{\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ para todo } i \geq 0\}$  con la distancia:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2^n}, \text{ donde } n = \min \{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

Sean  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , el *corrimiento*, y  $s : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , la *máquina sumadora* (o, simplemente *sumadora*), las funciones dadas por:

$$\sigma(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

y por

$$s(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0, x_1, x_2, \dots) + (1, 0, 0, \dots),$$

donde la suma es en módulo 2 coordenada a coordenada, de izquierda a derecha, cargando un uno a la componente de la derecha en caso de que la suma sea  $1+1$ .

Sabemos que  $\Sigma$  es un conjunto de Cantor y que ambas funciones son continuas. El corrimiento es caótico en  $\Sigma$ ; la sumadora es topológicamente transitiva en  $\Sigma$ , pero  $Per(s) = \phi$  (véase [11]), por lo tanto  $s$  no es caótica en ningún subconjunto de  $\Sigma$ . La entropía de la sumadora es cero,  $ent(s) = 0$ , ya que es una isometría (véase [1]). La del corrimiento es  $\ln(2)$ ,  $ent(\sigma) = \ln(2)$  (véase [10]).

**Definición 3.1** Sean  $f : M \rightarrow M$  y  $D \subset M$ . Decimos que  $D$  es minimal si es no vacío, cerrado, invariante bajo  $f$  y ningún subconjunto propio de él tiene estas tres propiedades.

**Observaciones:**

**3.a.** Un conjunto minimal tiene cardinalidad finita si y sólo si es una órbita periódica.

**3.b.** Para la función  $s : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , el conjunto  $\Sigma$  es minimal, ver [11].

**3.c.** Si  $f : M \rightarrow M$  y  $g : \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}$  son topológicamente equivalentes bajo  $h : M \rightarrow \tilde{N}$ , entonces  $D$  es minimal para  $f$  si y sólo si  $h(D)$  es minimal para  $g$ .

Sea  $f : I \rightarrow I$ , donde  $I = [a, b] \subset R$  y  $f$  es continua en  $I$ . El siguiente teorema describe los posibles conjuntos transitivos e invariantes de aquellas funciones que sólo tienen puntos periódicos cuyos periodos son potencias de 2.

**Teorema 3.2** Si todo periodo presente en  $f : I \rightarrow I$  es una potencia de 2, entonces cualquier subconjunto invariante,  $f(D) = D$ , de  $I$  que sea transitivo bajo  $f$  es de una de las siguientes dos formas:

i) Una órbita periódica.

ii) Es minimal y  $f$  en  $D$  es factorizada por  $s : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , mediante  $h : D \rightarrow \Sigma$ . Es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Sigma & \xrightarrow{s} & \Sigma \end{array}$$

Además  $h$  es a lo más 2 a 1.

**Demostración.** Véase Nitecki [24], ó Misiurewicz [22].  $\square$

**Observación 3.d.** Supongamos que  $f : I \rightarrow I$  cumple la condición del teorema anterior. Si  $f$  es topológicamente transitiva en  $D \subset I$ , entonces  $f$  no es caótica en  $D$ . Ya que  $D$ , por ser

invariante, estaría en alguno de los dos casos, i) ó ii), en el primero  $D$  es finito, y en el segundo  $Per(f|_D) = \phi$  ya que  $D$  es minimal y su cardinalidad es infinita.

En el estudio de la dinámica de funciones definidas en intervalos de números reales la entropía topológica positiva es una de las referencias más importantes. El siguiente teorema, resumen del trabajo de varios matemáticos, muestra algunas equivalencias con este importante concepto. Su demostración se puede consultar en Block y Coppel [9].

**Teorema 3.3** Sea  $f : I \rightarrow I$ , continua en  $I = [a, b]$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) La entropía de  $f$  es positiva.

ii) Existe  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m$  no potencia de 2, tal que  $Per_m(f) \neq \phi$ .

iii) Existen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D \subset I$ , compacto e invariante, y  $h : D \rightarrow \Sigma$ , tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f^n} & D \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

donde  $h$  es a lo más 2 a 1. Además el conjunto de puntos donde  $h$  no es inyectiva es a lo más numerable  $\square$ .

**Observación 3.e.** Para Block y Coppel una función  $f : I \rightarrow I$  es caótica si cumple alguna de las afirmaciones del teorema anterior. Para evitar confusiones nosotros seguiremos utilizando la definición 1.1 dada en el capítulo uno para decidir si una función es caótica o no.

### 3.2 En intervalos, son equivalentes caos y entropía positiva

**Proposición 3.4** Sean  $f : I \rightarrow I$ ,  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , y  $D \subset I$ . Si  $f$  es caótica en  $D$ , entonces  $ent(f) > 0$ .

**Demostración.** Supongamos por el contrario que  $ent(f) = 0$ , por el teorema 3.3 los periodos presentes en  $f$  son sólo potencias de 2. Por la observación 3.d,  $f$  no es caótica en  $D$  para todo  $D$  en  $I$ , lo cual contradice la hipótesis.  $\square$

Ahora nuestra meta es demostrar el recíproco de la afirmación anterior: Si  $ent(f) > 0$ , entonces existe  $D \subset I$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ .

El teorema 3.3 nos da una relación entre entropía positiva de  $f$  y la dinámica de  $f^n$ . La siguiente proposición relaciona las dinámicas de  $f^n$  y  $f$ , y es recíproca del teorema 1.4 del capítulo uno.

**Proposición 3.5** Sean  $f : M \rightarrow M$  continua y  $M$  espacio métrico compacto. Si existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $C \subset M$  tales que  $f^n$  es caótica en  $C$ , entonces existe  $D, C \subset D \subset M$ , tal que  $f$  es caótica en  $D$ .

**Demostración.** Como  $f^n$  es caótica en  $C$ , existe  $x_0 \in C$  tal que  $\overline{o(x_0, f^n)} = C$  y  $f^n(C) = C$ . Sea  $D = \overline{o(x_0, f)}$ . Observemos lo siguiente:

- i)  $C \subset D$ . Ya que  $o(x_0, f^n) \subset o(x_0, f)$ .
- ii)  $f(D) = D$ .

**Demostración.** Observemos primero que  $x_0$  es punto de acumulación de  $o(x_0, f^n)$  y, por tanto, punto de acumulación de  $o(x_0, f)$ . De aquí se sigue que para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f^m(x_0)$  es también punto de acumulación de  $o(x_0, f)$ .

Sea  $y \in f(D)$ , existe  $z \in \overline{o(x_0, f)}$  tal que  $y = f(z)$ . Existe  $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$  tal que

$$f^{n_i}(x_0) \rightarrow z \Rightarrow f^{n_i+1}(x_0) \rightarrow y \Rightarrow y \in D.$$

Por lo tanto  $f(D) \subset D$ .

Sea  $y \in D$ , existe  $\{n_i; |n_i| > 1\}$  tal que  $f^{n_i}(x_0) \rightarrow y$ . Como  $D$  es compacto podemos suponer que la sucesión  $\{f^{n_i-1}(x_0)\}$  es convergente,  $f^{n_i-1}(x_0) \rightarrow z$ , con  $z \in D$  y  $f(z) = y$ . Por tanto  $y \in f(D)$ , y  $D \subset f(D)$ .

De las afirmaciones i) e ii) y del lema 1.3 se concluye que  $D$  es perfecto y que  $f$  es transitiva en  $D$ .

- iii)  $Per(f|_D)$  es denso en  $D$ .

**Demostración.** Sea  $A \subset M$  abierto y  $A \cap D \neq \emptyset$ . Como la órbita de  $x_0$  es densa en  $D$ , existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $f^j(x_0) \in A$ . El conjunto  $f^{-j}(A) \cap C$  es abierto en  $C$  y distinto del vacío, ya que  $x_0$  es un elemento de él. Como  $Per(f^n|_C)$  es denso en  $C$ , existe

$$x \in Per(f^n|_C) \cap [f^{-j}(A) \cap C].$$

Sea  $z = f^j(x)$ , tenemos que  $z \in Per(f)$ ,  $z \in D$  y  $z \in A$ , por lo tanto  $Per(f|_D)$  es denso en  $D$ .

De las tres afirmaciones anteriores se sigue que  $f$  es caótica en  $D$ .  $\square$

**Lema 3.6** Sea  $f : I \rightarrow I$ , supongamos que existe  $C \subset I$ , invariante, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

Supongamos además que la función  $h$  es continua, suprayectiva, a lo más dos a uno, y que el conjunto de puntos de  $\Sigma$  que tienen dos preimágenes es a lo más numerable. Entonces existe  $D \subset I$  donde  $f$  es caótica.

**Demostración.** Es inmediata a partir del teorema 1.9 del capítulo uno. De hecho a partir de ese resultado tenemos también que  $D \subset C$ , y que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ h \downarrow & & \downarrow h \quad (*) \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array} \quad \square$$

**Observación 3.f.** En el contexto del lema anterior,  $f|_D : D \rightarrow D$  es a lo más 4 a 1.

**Demostración.** Se sigue de que las funciones  $h$  y  $\sigma$  son a lo más 2 a 1, y del diagrama conmutativo (\*).  $\square$

**Teorema 3.7** Sea  $f : I \rightarrow I$ . Si la entropía de  $f$  es positiva, entonces existe  $D \subset I$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ .

**Demostración.** Por el teorema 3.3,  $ent(f) > 0$  implica que existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $B \subset I$ , compacto e invariante, tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f^n} & B \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

Donde  $h$  es continua, suprayectiva, a lo más 2 a 1, y el conjunto de puntos de  $\Sigma$  con dos preimágenes es a lo más infinito numerable.

Por el lema 3.6, existe  $C \subset I$  donde  $f^n$  es caótica. Por la proposición 3.5, existe  $D \subset I$  donde  $f$  es caótica.  $\square$

**Observación 3.g.** El teorema anterior está en la misma dirección que el siguiente resultado de A. Katok (véase [17] y [21]):

Si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo de clase  $C^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , de una variedad compacta de dimensión dos, y la entropía de  $f$  es positiva. Entonces existe un subconjunto invariante,  $\Gamma$ , tal que la restricción de  $f$  a  $\Gamma$  es topológicamente conjugada a un subshift de tipo finito y  $\text{ent}(f|_{\Gamma}) > 0$ .

Es decir, existe un subconjunto invariante en  $M$  tal que  $f$  es caótica en él.

La hipótesis de que  $f$  es de clase  $C^{1+\alpha}$  es de gran importancia. M. Rees demuestra en [28] la existencia de un homeomorfismo en el toro bidimensional,  $f : T \rightarrow T$ , con las siguientes propiedades:  $\text{ent}(f) > 0$  y  $\text{Per}(f) = \emptyset$ . Por tanto en clase  $C^0$ , en variedades de dimensión dos, entropía positiva no implica caos. Más adelante (capítulo cinco) veremos un ejemplo sencillo de un endomorfismo en el toro donde entropía positiva no implica caos.

**Observación 3.h.** Bajo las hipótesis del teorema 3.7 el conjunto  $C$  donde la función  $f^n$  es caótica satisface el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f^n} & C \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

con  $h$  a lo más 2 a 1. Como el conjunto  $\Sigma$  es de Cantor, el conjunto  $C$  también es de Cantor.

El conjunto  $D$ , donde  $f$  es caótica, es de la forma:

$$D = C \cup f(C) \cup f^2(C) \cup \dots \cup f^{n-1}(C).$$

Por la observación 3.f., la función  $f^n$ , restringida a  $C$ , es a lo más 4 a 1. Esto implica que para todo  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $f$  restringida a  $f^k(C)$  es a lo más 4 a 1. Por lo tanto cada  $f^k(C)$  es un conjunto de Cantor. En resumen el conjunto  $D$  mencionado en el teorema anterior es de Cantor.

En el siguiente teorema reunimos lo que hemos demostrado con la información contenida en el teorema 3.3.

**Teorema 3.8** Sea  $f : I \rightarrow I$ , continua en  $I$ . Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

i)  $f$  es caótica en algún subconjunto de  $I$ .

ii) La entropía topológica de  $f$  es positiva.

iii)  $f$  tiene un punto periódico con periodo no potencia de 2.  $\square$

**Nota final.** La equivalencia de i) con ii) del teorema 3.8 fué anunciada por Shihai Li en 1991 (ver [19]). A fines de 1993 apareció la demostración en [20]. Nosotros la conocimos en 1994 cuando ya habíamos terminado la demostración del teorema 3.8. La demostración de Shihai Li y la nuestra, aunque muestran algunas diferencias, siguen, en esencia, el mismo camino.

## Capítulo 4

# Caos y el $\omega(x, f)$ en el intervalo

Si tenemos  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , y  $f : I \rightarrow I$ . El omega conjunto límite de  $x \in I$ ,  $\omega(x, f)$ , está formado por los puntos a los que converge la órbita de  $x$ . Dos son las características de  $\omega(x, f)$  que nos interesan: su cardinalidad, y la dinámica de  $f$  restringida a este conjunto. Demostraremos en este capítulo que las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

- i) Existe  $D \subset I$ , tal que  $f$  es caótica en  $D$ .
- ii) Existe  $x \in I$ , tal que la cardinalidad de  $\omega(x, f)$  es infinito numerable.
- iii) Existe  $x \in I$ , tal que  $f$  restringida a  $\omega(x, f)$  no es transitiva.

### 4.1 El conjunto $\omega(x, f)$ , primeras propiedades

Sean  $I = [0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ , y  $f : I \rightarrow I$  una función continua. Sea  $x \in I$ , el omega conjunto límite de  $x$ , bajo  $f$ , es:

$$\omega(x, f) = \left\{ y \in I \mid \text{existe } \{n_i\} \subset \mathbb{N}, \text{ tal que } \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y \right\}.$$

Son conocidas las siguientes propiedades de  $\omega(x, f)$ .

- i) Para todo  $x \in I$ ,  $\omega(x, f) \neq \emptyset$ .
- ii)  $\omega(x, f)$  es un conjunto cerrado.
- iii)  $\omega(x, f)$  es estrictamente invariante bajo  $f$ ,  $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$ .

**Definición 4.1** Sea  $x \in I$ , decimos que  $x$  es asintóticamente periódico si existe  $y \in \text{Per}(f)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Por tanto  $\omega(x, f) = \alpha(y, f)$ .

**Lema 4.2** La cardinalidad de  $\omega(x, f)$  es finita si y solamente si  $x$  es asintóticamente periódico.

**Demostración.** Ver Block y Coppel [9], página 72.  $\square$

**Observación 4.a.** Si  $\omega(x, f)$  contiene propiamente una órbita periódica, entonces su cardinalidad es infinita.

**Lema 4.3** Para todo  $x \in I$ , y para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que:

i)  $\omega(x, f) = \omega(x, f^n) \cup \omega(f(x), f^n) \cup \dots \cup \omega(f^{n-1}(x), f^n)$ .

ii) Para  $1 \leq k < n-1$  se tiene que  $f(\omega(f^k(x), f^n)) = \omega(f^{k+1}(x), f^n)$ , y  $f(\omega(f^{n-1}(x), f^n)) = \omega(x, f^n)$ .

**Demostración.** Está contenida en el paso uno del teorema 1.4, del capítulo uno.  $\square$

**Observación 4.b.** El lema anterior implica lo siguiente: Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\omega(x, f)$  tiene cardinalidad infinito numerable si y solamente si  $\omega(x, f^n)$  también la tiene.

Sea  $C^0$  el espacio de las funciones continuas de  $I$  en  $I$ .

Los conjuntos:

$$K(I, I) = \{f \mid \text{existe } D \subset I \text{ donde } f \text{ es caótica}\} = \{f \mid \text{ent}(f) > 0\}, \text{ y}$$

$$NK(I, I) = \{f \mid \text{no existe } D \subset I \text{ donde } f \text{ sea caótica}\} = \{f \mid \text{ent}(f) = 0\},$$

forman una partición de  $C^0(I, I)$ .

Revisemos, a continuación, las posibles características de  $\omega(x, f)$  para funciones que pertenecen al conjunto  $NK(I, I)$ .

**Lema 4.4** Sea  $f \in C^0(I, I)$ . Si existe una potencia de 2,  $n$ , tal que  $\text{Per}_n(f) = \phi$ , entonces para todo  $x \in I$  se tiene que  $\omega(x, f)$  tiene cardinalidad finita.

**Demostración.** Véase Block y Coppel [9].  $\square$

**Observación 4.c.** Si  $f$  cumple las hipótesis del lema anterior, entonces para todo  $x \in I$  se tiene que  $\omega(x, f) = \alpha(y, f)$  para algún  $y \in \text{Per}(f)$ . Por lo tanto para todo  $x \in I$ ,  $f$  restringida a  $\omega(x, f)$  es transitiva.

Sea  $A = \{2^n \mid n \geq 0\}$ , es decir,  $A$  es el conjunto de todas las potencias de 2. Es posible encontrar funciones que cumplen las siguientes dos condiciones:

- i) Para todo  $m \in A$ , existe  $x \in \text{Per}(f)$  cuyo periodo es  $m$ .
- ii) Si  $x \in \text{Per}(f)$ , entonces su periodo pertenece a  $A$ .

Al conjunto de funciones que cumple estas condiciones lo denotamos por  $2^\infty$ .

**Observación 4.d.**  $2^\infty \subset NK(I; I)$ . Esta contención se sigue del teorema 3.8, del capítulo tres.

Así el conjunto  $NK(I, I)$  está formado por funciones de dos tipos: aquellas para las cuales existe una potencia de 2,  $m$ , tal que  $\text{Per}_m(f) = \emptyset$ , y las que pertenecen a  $2^\infty$ .

El siguiente resultado nos da información sobre los posibles omega conjuntos límite para funciones en  $2^\infty$ .

**Proposición 4.5** Sea  $f \in C^0(I, I)$ . Si la entropía topológica de  $f$  es cero, entonces para todo  $x \in I$  se tiene que  $\omega(x, f)$  contiene un único conjunto minimal. Además para todo  $y \in \omega(x, f)$ ,  $\omega(y, f) = \omega(x, f)$ .

**Demostración.** Ver Block y Coppel [9].  $\square$

La proposición anterior implica que si  $f \in NK(I, I)$ , entonces para todo  $x \in I$ ,

$$f|_{\omega(x, f)}: \omega(x, f) \rightarrow \omega(x, f)$$

es transitiva.

Supongamos que  $\text{ent}(f) = 0$  y que existe  $x \in I$  tal que  $\omega(x, f)$  tiene cardinalidad infinita (por lo tanto  $f \in 2^\infty$ ). Entonces por el teorema 3.2 del capítulo tres,  $f|_{\omega(x, f)}$  se factoriza en la función sumadora,  $s: \Sigma \rightarrow \Sigma$ . Por tanto  $\omega(x, f)$  tiene cardinalidad no numerable.

En resumen tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4.6** Si  $f \in NK(I, I)$ , entonces para todo  $x \in I$  se tiene:

- i)  $f|_{\omega(x, f)}$  es transitiva.
- ii) La cardinalidad de  $\omega(x, f)$  sólo puede ser finita o infinita no numerable.  $\square$

Nuestra meta es ahora mostrar lo siguiente: Si  $f \in K(I, I)$ , entonces existe  $x \in I$  tal que:

- i)  $f|_{\omega(x, f)}$  no es transitiva y
- ii) La cardinalidad de  $\omega(x, f)$  es infinito numerable.

## 4.2 La entropía positiva y el conjunto $\omega(x, f)$

Sea  $f \in K(I, I)$ , por el teorema 3.3 del capítulo tres, existen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D \subset I$  y  $h: D \rightarrow \Sigma$  (el espacio de dos símbolos), tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f^n} & D \\ h \downarrow & & \downarrow h \quad (*) \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma, \end{array}$$

donde  $\sigma$  es el corrimiento y  $h$  es suprayectiva y a lo más 2 a 1.

Consideremos en  $\Sigma$  el siguiente punto:

$$\bar{y} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots),$$

donde los bloques de ceros van creciendo según los números naturales.

Sea  $\Gamma \subset \Sigma$  el conjunto:

$$\Gamma = \{\bar{x} \mid \text{existe } i \geq 0 \text{ tal que } x_i = 1 \text{ y } x_j = 0 \text{ para todo } j \neq i\} \cup \{\bar{0}\},$$

donde  $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  y  $\bar{0} = (0, 0, 0, \dots)$ .

**Proposición 4.7**  $\Gamma = \omega(\bar{y}, \sigma)$ .

**Demostración.** La contención  $\Gamma \subset \omega(\bar{y}, \sigma)$  es inmediata. Veamos la otra. Sea  $\bar{x} \in \omega(\bar{y}, \sigma)$ . Podemos suponer que  $\bar{x} \neq \bar{0}$ .

Mostraremos que si  $x_i = 1$ , para alguna  $i$ , entonces para todo  $j > i$ ,  $x_j = 0$ .

Supongamos por el contrario que existen  $i$  y  $j$ ,  $i < j$ , tales que  $x_i = 1$  y  $x_j = 1$ . Sea  $m = j - i$ , si  $n > \frac{(m-1)m}{2} + (m-1)$ , entonces la mínima cantidad de ceros en un bloque de  $\sigma^n(\bar{y})$  es  $m$ .

Por lo tanto para todo  $n \in \mathbb{N}$  que cumpla:

$$n > \frac{(m-1)m}{2} + (m-1),$$

tenemos que

$$d(\sigma^n(\bar{y}), \bar{x}) \geq \frac{1}{2^j}.$$

Esta última desigualdad contradice el hecho de que  $\bar{x} \in \omega(\bar{y}, \sigma)$ .

Por lo tanto si  $\bar{x} \in \omega(\bar{y}, \sigma)$ ,  $\bar{x}$  tiene a lo más un 1 en su expresión. Es decir  $\bar{x} \in \Gamma$ .  $\square$

**Observación 4.e.** La igualdad  $\Gamma = \omega(\bar{y}, \sigma)$  nos dice que la cardinalidad de  $\omega(\bar{y}, \sigma)$  es infinito numerable.

**Proposición 4.8** La función  $\sigma$  restringida a  $\omega(\bar{y}, \sigma)$  no es transitiva.

**Demostración.** Sean  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  los siguientes puntos en  $\omega(\bar{y}, \sigma)$ .

$$\bar{x}_1 = (1, 0, 0, 0, \dots) \text{ y } \bar{x}_2 = (0, 1, 0, 0, \dots).$$

La distancia entre  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  es  $\frac{1}{2}$ . Sean  $A$  y  $B$  los siguientes conjuntos abiertos:

$$A = B_{\frac{1}{4}}(\bar{x}_1) \text{ y } B = B_{\frac{1}{4}}(\bar{x}_2).$$

Es inmediato que  $A \cap \omega(\bar{y}, \sigma) = x_1$  y  $B \cap \omega(\bar{y}, \sigma) = x_2$ . De aquí se sigue que

$$\sigma^n(A \cap \omega(\bar{y}, \sigma)) = \{\bar{0}\},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\sigma^n(A \cap \omega(\bar{y}, \sigma)) \cap (B \cap \omega(\bar{y}, \sigma)) = \emptyset.$$

Lo que nos dice que  $\sigma$  no es transitiva en  $\omega(\bar{y}, \sigma)$ .  $\square$

Regresemos al diagrama (\*). Sea  $y \in D$  tal que  $h(y) = \bar{y}$ . Es inmediato que

$$h(\omega(y, f^n)) = \omega(\bar{y}, \sigma).$$

Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \omega(y, f^n) & \xrightarrow{f^n} & \omega(y, f^n) \\ h \downarrow & & \downarrow h \quad (***) \\ \omega(\bar{y}, \sigma) & \xrightarrow{\sigma} & \omega(\bar{y}, \sigma), \end{array}$$

donde  $h$  es suprayectiva y a lo más 2 a 1.

**Observación 4.f.** Como  $\omega(\bar{y}, \sigma)$  es infinito numerable, la cardinalidad de  $\omega(y, f^n)$  es infinita numerable. Por la observación 4.b, tenemos que el conjunto  $\omega(y, f)$  es infinito numerable. Por tanto tenemos demostrada la siguiente proposición.

**Proposición 4.9** Si  $f \in K(I, I)$ , existe  $x \in I$  tal que  $\omega(x, f)$  tiene cardinalidad infinita numerable.  $\square$

**Observación 4.g.** Del diagrama (\*\*\*) también tenemos la siguiente información:

i) Como  $h$  es a lo más 2 a 1, y  $\omega(\bar{y}, \sigma)$  sólo tiene un punto de acumulación,  $\omega(y, f^n)$  tiene a lo más dos puntos de acumulación. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que son dos,  $t$  y  $r$ .

ii)  $\{t, r\} = h^{-1}(\bar{0})$  y, por tanto,  $f^n(t) \in \{t, r\}$  y  $f^n(r) \in \{t, r\}$ .

iii) La imagen inversa de  $t$  bajo  $f^n$  debe tener al menos un punto de acumulación de  $\omega(y, f^n)$ .

Por lo tanto  $f^{2n}(t) = t$  y  $f^{2n}(r) = r$ .

iv)  $f^n$  no es transitiva en  $\omega(y, f^n)$  ya que  $\sigma$  no es transitiva en  $\omega(\bar{y}, \sigma)$ .

**Proposición 4.10** Si  $f \in K(I, I)$ , existe  $y \in I$  tal que  $f$  restringida a  $\omega(y, f)$  no es transitiva.

**Demostración.** De las hipótesis podemos llegar hasta el diagrama conmutativo (\*\*\*) y a la observación 4.g. Sea  $a \in \omega(y, f^n)$  tal que  $h(a) = \bar{x}_1 = (1, 0, 0, \dots)$ , observemos lo siguiente:

i)  $a \neq r$  y  $a \neq t$ .

ii)  $a$  es punto aislado de  $\omega(y, f^n)$ .

iii)  $h(f^{2n}(a)) = \sigma^2(h(a)) = \sigma(\bar{0}) = \bar{0}$ . Por tanto  $f^{2n}(a) \in \{t, r\}$ ,  $f^{2n}(a) \neq a$ ,  $a$  no es punto periódico de  $f$  pero sí un punto preperiódico, la órbita de  $a$  bajo  $f$  es de cardinalidad finita.

iv)  $a$  es un punto aislado de  $\omega(y, f)$ .

**Demostración.** Supongamos por el contrario que existe una sucesión de elementos  $\{y_i\}$ , distintos entre sí, en  $\omega(y, f)$ , tales que  $y_i \rightarrow a$ . Entonces existe  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , tal que  $a$  es punto de acumulación de  $\omega(f^k(y), f^n)$ . Es decir podemos suponer que  $y_i \rightarrow a$  con  $\{y_i\} \subset \omega(f^k(y), f^n)$ .

Como  $f^k(\omega(y, f^n)) = \omega(f^k(y), f^n)$ , existe una sucesión  $\{z_i\}$  en  $\omega(y, f^n)$  tal que  $f^k(z_i) = y_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Dado que  $\omega(y, f^n)$  es compacto, podemos suponer que esta nueva sucesión es convergente,  $z_i \rightarrow z$ . Esto último nos dice que  $z$  es un punto de acumulación de  $\omega(y, f^n)$ ,  $z \in \{t, r\}$ , y  $f^k(z) = a$ . Por lo tanto  $a \in \sigma(t, f) \cup \sigma(r, f)$  y  $f^{2n}(a) = a$ , lo cual es una contradicción con iii).

Para demostrar que  $f$  no es transitiva en  $\omega(y, f)$ , tomemos los abiertos:

$$A = \{a\} \text{ y } B = \omega(y, f) - \{a, f\}.$$

Para toda  $n \in \mathbb{N}$  tenemos:

$$f^n(A) \cap B = \emptyset. \quad \square$$

El siguiente teorema es un resumen de lo que hemos demostrado.

**Teorema 4.11** Sean  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  y  $f : I \rightarrow I$  una función continua. Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

- i)  $f$  es caótica en algún subconjunto de  $I$ .
- ii) Existe  $x \in I$ , tal que la cardinalidad de  $\omega(x, f)$  es infinita numerable.
- iii) Existe  $x \in I$ , tal que  $f$  restringida a  $\omega(x, f)$  no es transitiva.

**Demostración.** Se sigue del teorema 4.7 y de las proposiciones 4.10 y 4.11.  $\square$

## Capítulo 5

# Sensibilidad implica caos

Sea  $I$  el intervalo  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ . Sabemos que si  $f : I \rightarrow I$  es transitiva en  $I$ ,  $f$  tiene densidad de puntos periódicos y, por tanto,  $f$  es caótica en  $I$  (ver [4]). La transitividad es por ésto una condición que podríamos llamar *fuerte*. Por otro lado, si de  $f$  sabemos solamente que tiene densidad de puntos periódicos, a partir de aquí no podemos avanzar mucho. La función identidad,  $id : I \rightarrow I$ , cumple esta última condición y su dinámica es muy sencilla. La tercera condición de la definición de caos de Devaney, la sensibilidad a las condiciones iniciales, es en apariencia *débil* ya que, como mencionamos en el capítulo uno, es consecuencia de la transitividad y de la densidad de los puntos periódicos. La verdad es que, al menos para funciones en el intervalo, la sólo presencia de la sensibilidad dá vida a una dinámica complicada. En este capítulo mostramos que si  $f$  tiene sensibilidad en  $I$ , entonces  $f$  cumple las siguientes tres afirmaciones:

- i) Existe  $D \subset I$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ . En particular la entropía topológica de  $f$  es positiva.
- ii) El conjunto  $\{x \in I \mid \text{la cardinalidad de } \omega(x, f) \text{ es infinita}\}$  es denso en  $I$ .
- iii) El conjunto  $\{x \in I \mid \text{la cardinalidad de } \omega(x, f) \text{ es finita}\}$  es denso en  $I$ .

### 5.1 La sensibilidad, el caos y una digráfica

Sean  $I = [0, 1]$  y  $f : I \rightarrow I$  una función continua. Decimos que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales (o, simplemente, sensible) si existe  $\delta > 0$  tal que se cumple la siguiente condición: Para todo  $x \in I$  y para toda vecindad de  $x$ ,  $U$ , existen  $y \in U$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ . A esta  $\delta$  le llamamos la *constante de sensibilidad*.

Supondremos a lo largo de este capítulo que  $f : I \rightarrow I$  es sensible en  $I$ , y que  $\delta$  es su

constante de sensibilidad.

Para iniciar asociamos a la función  $f$  una digráfica.

Sea  $P = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_m = 1\}$  una partición de  $I$ , tal que  $t_i - t_{i-1} < \frac{\delta}{3}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\|P\| < \frac{\delta}{3}$ . Los vértices de la digráfica serán los subintervalos  $A_i = [t_{i-1}, t_i]$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Pondremos una flecha de  $A_i$  a  $A_j$  si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(A_i) \supset A_j$  y la longitud del intervalo  $f^n(A_i)$  es mayor o igual que  $\delta$ ,  $\text{long}(f^n(A_i)) \geq \delta$ .

**Lema 5.1** De cada vértice  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  salen al menos dos flechas hacia vértices consecutivos,  $A_j$  y  $A_{j+1}$  con  $1 \leq j < m$ .

**Demostración.** Por la sensibilidad de  $f$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  existe  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{long}(f^{n_i}(A_i)) \geq \delta$ . Por lo tanto existe  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $A_j \cup A_{j+1} \subset f^{n_i}(A_i)$ .  $\square$

**Lema 5.2** Si existe una flecha de  $A_i$  a  $A_j$ , y una de  $A_j$  a  $A_k$ . Entonces existe una flecha de  $A_i$  a  $A_k$ .

**Demostración.** Existen  $n_1$  y  $n_2$  en los naturales tales que  $f^{n_1}(A_i) \supset A_j$  con  $\text{long}(f^{n_1}(A_i)) \geq \delta$ , y  $f^{n_2}(A_j) \supset A_k$ ,  $\text{long}(f^{n_2}(A_j)) \geq \delta$ . Por lo tanto  $f^{n_1+n_2}(A_i) \supset f^{n_2}(A_j) \supset A_k$  y  $\text{long}(f^{n_1+n_2}(A_i)) \geq \delta$ .  $\square$

**Lema 5.3** Sean  $i \neq j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Si existen dos números naturales,  $p$  y  $q$ , tales que

$$A_i \cup A_j \subset f^p(A_i) \text{ y } A_i \cup A_j \subset f^q(A_j),$$

entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$A_i \cup A_j \subset f^n(A_i) \cap f^n(A_j).$$

**Demostración.** La afirmación es inmediata de las siguientes contenciones:

$$A_i \cup A_j \subset f^p(A_i) \subset f^p(A_i \cup A_j) \subset f^{p+q}(A_j),$$

$$A_i \cup A_j \subset f^q(A_j) \subset f^q(A_i \cup A_j) \subset f^{p+q}(A_i).$$

Tomando  $n = p + q$  terminamos.  $\square$

**Definición 5.4** Decimos que  $f : I \rightarrow I$  es turbulenta si existen dos subintervalos de  $I$ ,  $A = [a, b]$  y  $B = [c, d]$ ,  $a < b$  y  $c < d$ , con a lo más un punto en común, tales que

$$A \cup B \subset f(A) \cap f(B).$$

Si  $A \cap B = \emptyset$ , decimos que  $f$  es estrictamente turbulenta.

El camino que seguiremos será mostrar que la sensibilidad de  $f$  implica que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  es turbulenta. La siguiente afirmación, válida para funciones continuas del intervalo en general, nos dice que ésto es suficiente para mostrar que existe  $D \subset I$  donde la función es caótica.

**Lema 5.5** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) Existe  $D \subset I$  donde  $f$  es caótica.
- ii) Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  es turbulenta.

**Demostración.** En [9] Block y Coppel demuestran que la condición ii) es equivalente a que la entropía de  $f$  sea positiva. En el capítulo tres nosotros demostramos que  $ent(f) > 0$  es equivalente a la condición i).  $\square$

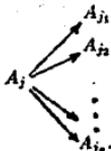
Al número de flechas que salen de  $A_i$  le llamaremos el grado de  $A_i$ ,  $gd(A_i)$ . Y si existe una flecha de  $A_i$  a  $A_j$ , diremos que  $A_j$  es accesible desde  $A_i$ .

**Observación 5.a.** Si  $A_j$  es accesible desde  $A_i$ , entonces  $gd(A_j) \leq gd(A_i)$ . La demostración es inmediata. Por el lema 5.2 todos los vértices accesibles desde  $A_j$  son accesibles desde  $A_i$ .  $\square$

**Teorema 5.6** Si  $f : I \rightarrow I$  tiene sensibilidad a las condiciones iniciales, entonces existe  $D \subset I$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ .

**Demostración.** Sea  $\delta > 0$  la constante de sensibilidad de  $f$ . Asociamos a  $f$  una digráfica de la manera que mencionamos antes.

Sea  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . De los vértices accesibles desde  $A_i$ , sea  $A_j$  el de menor grado,  $gd(A_j) = g$ . Sean  $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_g}$  los vértices accesibles desde  $A_j$ .



Ordenados de tal forma que si  $x \in A_{j_k}$  y  $y \in A_{j_l}$ , entonces  $x \leq y$  si  $k < l$ .

Como cada  $A_{j_k}$ ,  $1 \leq k \leq g$ , es accesible desde  $A_j$ , se tiene que  $gd(A_{j_k}) \geq g$  (por ser  $g$  el mínimo). Además, por la observación 5.a.,  $gd(A_{j_k}) \leq gd(A_j) = g$ . Por tanto para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq g$ , se tiene que  $gd(A_{j_k}) = g$ .

Tomemos el vértice  $A_{j_k}$ ,  $1 \leq k \leq g$ , desde este vértice hay exactamente  $g$  vértices accesibles. Por el lema 5.2, ellos deben ser  $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_g}$ . Por lo tanto tenemos las siguientes flechas en la digráfica:

$$A_{j_1} \rightarrow A_{j_1} \text{ y } A_{j_2} \rightarrow A_{j_1}.$$

Es decir, existen  $p$  y  $q$  números naturales tales que:

$$f^p(A_{j_1}) \supset A_{j_1} \text{ y } f^q(A_{j_2}) \supset A_{j_1}.$$

Como las longitudes de  $f^p(A_{j_1})$  y  $f^q(A_{j_2})$  son mayores que  $\delta$ , entonces cada una de estas imágenes abarca al menos dos intervalos. Dado que los intervalos están ordenados, tenemos las siguientes contenciones:

$$f^p(A_{j_1}) \supset A_{j_1} \cup A_{j_2} \text{ y } f^q(A_{j_2}) \supset A_{j_1} \cup A_{j_2}.$$

Por el lema 5.3, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$A_{j_1} \cup A_{j_2} \subset f^n(A_{j_1}) \cap f^n(A_{j_2}).$$

Por tanto  $f^n$  es turbulenta y, por el lema 5.5, existe  $D \subset I$  tal que  $f$  es caótica en  $D$ .  $\square$

El siguiente ejemplo muestra que si  $f$  es sensible en  $I = [0, 1]$ , el conjunto caótico no es necesariamente todo el intervalo  $I$ .

**Ejemplo 5.b.** Sea  $f: I \rightarrow I$ , lineal a pedazos definida por  $f(0) = 0$ ,  $f(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$  y  $f(1) = 1$ . La constante de sensibilidad de  $f$  es  $\delta = \frac{1}{4}$ ,  $f$  es caótica en  $[\frac{1}{2}, 1]$ , y para todo  $x \in (0, \frac{1}{2})$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

## 5.2 La sensibilidad implica la densidad del conjunto de los puntos aperiódicos

Sean  $I = [0, 1]$ ,  $f: I \rightarrow I$  continua en  $I$ , y  $\Gamma$  y  $\Psi$  los conjuntos:

$$\Gamma = \{x \in I \mid \omega(x, f) \text{ tiene cardinalidad infinita}\},$$

$$\Psi = \{x \in I \mid \omega(x, f) \text{ tiene cardinalidad finita}\}.$$

**Observación 5.c.**  $\Gamma$  es el conjunto de los puntos aperiódicos, y  $\Psi$  es el conjunto de los puntos asintóticamente periódicos (ver [9]).

**Observación 5.d.** Recordemos que para todo  $x \in I$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\omega(x, f) = \omega(x, f^n) \cup \omega(f(x), f^n) \cup \dots \cup \omega(f^{n-1}(x), f^n),$$

y que

$$f(\omega(f^k(x), f^n)) = \omega(f^{k+1}(x), f^n),$$

donde el exponente  $k+1$  se toma módulo  $n$ .

De lo anterior se sigue que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para todo  $x \in I$ , la cardinalidad de  $\omega(x, f)$  es finita si y sólo si la cardinalidad de  $\omega(x, f^n)$  es finita.

**Teorema 5.7** Si  $f$  es sensible a las condiciones iniciales, entonces tanto  $\Gamma$  como  $\Psi$  son conjuntos densos en  $I$ .

**Demostración.** Sean  $x \in I$  y  $\varepsilon > 0$ . Sea  $\delta$  la constante de sensibilidad de  $f$ . Sea  $P$  una partición de  $I$ ,  $P = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_m = 1\}$ , tal que  $\|P\| < \frac{\varepsilon}{3}$  y existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , tal que  $A_j \subset B_\varepsilon(x)$ ,  $A_j = [t_{j-1}, t_j]$ .

Por el teorema 5.6, existe  $p \in N$  tal que  $f^p$  es turbulenta. Sean  $A$  y  $B$  los dos intervalos cerrados de  $I$  tales que

$$A \cup B \subset f^p(A) \cap f^p(B).$$

Siguiendo el trabajo de Block y Coppel, capítulo dos de [9], existen  $q$ , múltiplo de  $p$ , y  $C \subset A \cup B$  tales que  $f^q|_C$  se factoriza por el corrimiento en dos símbolos. Por el lema 3.6 del capítulo tres, existe  $D \subset C$  tal que  $f^q$  es caótica en  $D$ . Esto último implica que existen  $y \in D$  con  $\omega(y, f^q)$  de cardinalidad infinita, y  $z \in D$  con  $\omega(z, f^q)$  de cardinalidad finita. Por la observación 5.c,  $y \in \Gamma$  y  $z \in \Psi$ .

El teorema 5.6 también muestra que existe  $r \in N$  talque  $f^r(A_j) \supset A \cup B$ , por lo tanto

$$f^r(B_\epsilon(x)) \supset D.$$

De esta última contención se sigue que existen  $a$  y  $b$  en  $B_\epsilon(x)$  tales que  $f^r(a) = y$  y  $f^r(b) = z$ . Esto implica que  $\omega(a, f)$  tiene cardinalidad infinita y que  $\omega(b, f)$  tiene cardinalidad finita.

Por lo tanto  $B_\epsilon(x) \cap \Gamma \neq \emptyset$  y  $B_\epsilon(x) \cap \Psi \neq \emptyset$ . Los conjuntos  $\Gamma$  y  $\Psi$  son densos en  $I$ .  $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la densidad de  $\Gamma$  y la densidad de  $\Psi$  no implican que  $f : I \rightarrow I$  sea caótica en algún subconjunto de  $I$ .

**Ejemplo 5.e.** Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = x^2 + c$ , donde  $c = -1.401155189\dots$

La dinámica de  $f$ , ver [21], tiene las siguientes características:

i) Existe  $A \subset [-1, 1]$ , conjunto de Cantor, tal que  $f|_A : A \rightarrow A$  es equivalente a la sumadora,  $s : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .

ii) Para casi todo punto  $x \in [-1, 1]$ ,  $\omega(x, f) = A$ . Por tanto  $\Gamma$  es denso en  $[-1, 1]$ .

iii) Existe un conjunto numerable y denso en  $[-1, 1]$ ,  $B$ , tal que si  $x \in B$ , entonces  $\omega(x, f)$  es una órbita periódica. Por tanto el conjunto  $\Psi$  es denso en  $[-1, 1]$ .

iv) La entropía topológica de  $f$  es cero,  $f$  no es caótica en ningún subconjunto de  $[-1, 1]$ .

Con el siguiente ejemplo,  $f : M \rightarrow M$ , mostramos que sensibilidad no implica la existencia de un subconjunto donde la dinámica sea caótica si  $M$  no es un intervalo en  $R$ .

**Ejemplo 5.f.** Sean  $S^1 = R/Z$ , el círculo, y  $T = S^1 \times S^1$  el toro bidimensional. Sea  $f : T \rightarrow T$  la función dada por

$$f(x, y) = (2x \pmod{1}, y + \theta_0 \pmod{1}),$$

donde  $\theta_0 \notin \mathbb{Q}$ .

Es inmediato que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales. Sin embargo, como  $\text{Per}(f) = \emptyset$ , no existe  $D \subset T$  tal que  $f|_D$  sea caótica.

Observemos, además, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & T \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array}$$

donde  $h(x, y) = x$  y  $g(x) = 2x \pmod{1}$ .

Como la entropía de  $g$  es positiva, la entropía de  $f$  es positiva. Por tanto, en superficies, contrariamente a lo establecido en el capítulo tres para intervalos en  $\mathbb{R}$ ,  $\text{ent}(f) > 0$  no implica caos.

Conviene, también, nuevamente contrastar esta información con el resultado de Katok: Para difeomorfismos de clase  $C^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , en variedades de dimensión dos, entropía positiva implica la existencia de un subconjunto donde el difeomorfismo es caótico.

La siguiente proposición es la parte final de este capítulo. Se puede pensar como un pequeño apéndice donde se muestra de nuevo, y desde otro punto de vista, la fuerza que tiene la sensibilidad a las condiciones iniciales. Regresemos a  $M$ , un espacio métrico, y  $f: M \rightarrow M$ , una función continua. Mostraremos que dada  $x \in M$  la sensibilidad afecta no sólo a un punto de cada vecindad de  $x$ , sino a un conjunto abierto y denso de cada una de esas vecindades.

**Proposición 5.8** Sean  $M$  un espacio métrico perfecto,  $f: M \rightarrow M$  sensible a las condiciones iniciales, y  $\delta > 0$  su constante de sensibilidad. Sean  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_1 < \frac{\delta}{2}$ ,  $x_0 \in M$ , y

$$A = \{x \in M \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(f^n(x), f^n(x_0)) > \delta_1\}$$

Entonces  $A$  es abierto y denso en  $M$ .

**Demostración.** Por la sensibilidad  $A$  es distinto del vacío. Veamos primero que  $A$  es abierto.

Sea  $x \in A$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(x_0)) = \gamma > \delta_1$ . Como  $f^n$  es continua, existe  $\zeta > 0$  tal que para toda  $y \in B_\zeta(x)$  se tiene que  $f^n(y) \in B_{\gamma-\delta_1}(f^n(x))$ . De aquí se sigue que la distancia de  $f^n(y)$  a  $f^n(x_0)$  es mayor que  $\delta_1$ . Por lo tanto  $B_\zeta(x) \subset A$ , y así  $A$  es abierto.

Veamos ahora la densidad.

Sean  $x \in M$  y  $\varepsilon > 0$ , demostraremos que  $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ .

Por la sensibilidad existen  $y \in B_\varepsilon(x)$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $d(f^n(y), f^n(z)) \geq \delta$ . Como

$$d(f^n(y), f^n(z)) \leq d(f^n(y), f^n(x_0)) + d(f^n(x_0), f^n(z)),$$

tenemos que

$$d(f^n(y), f^n(x_0)) \geq \frac{\delta}{2} > \delta_1$$

6

$$d(f^n(x_0), f^n(z)) \geq \frac{\delta}{2} > \delta_1.$$

De aquí que  $y \in A$  ó  $z \in A$ , en ambos casos  $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ .  $\square$

## Capítulo 6

# El conjunto de las funciones caóticas

Las equivalencias establecidas en el teorema 3.8 del capítulo tres nos permiten hacer algunas afirmaciones sobre la topología del espacio que forman las funciones que son caóticas en algún subconjunto del intervalo. Denotemos por  $C^0(I, I)$  al conjunto de las funciones  $f : I \rightarrow I$  que son continuas en  $I$ , y por  $K(I, I) \subset C^0(I, I)$  a aquellas para las cuales existe algún subconjunto de  $I$  donde son caóticas. Siguiendo los resultados contenidos en Block y Coppel [9], es inmediato que  $K(I, I)$  es abierto y denso en  $C^0(I, I)$ . Aquí demostraremos que  $K(I, I)$  es arco-conexo, que su complemento, el conjunto de las funciones no caóticas, también es arco-conexo, y que ambos conjuntos no son convexos.

### 6.1 El conjunto de las funciones caóticas, en el intervalo, es arco-conexo

Sea  $I$  un intervalo compacto en  $R$ , (en algunas ocasiones, por conveniencia en la notación, tomaremos  $I = [0, 1]$ ). Sean  $C^0(I, I)$  el conjunto:

$$C^0(I, I) = \{f : I \rightarrow I \text{ tales que } f \text{ es continua en } I\},$$

y  $K(I, I)$  el conjunto:

$$K(I, I) = \{f \in C^0(I, I) \text{ tales que } f \text{ es caótica en } D, \text{ para algún } D \subset I\}.$$

**Observación 6.a.**  $C^0(I, I)$  es un espacio métrico completo si consideramos la siguiente distancia en él:

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|, x \in I\}.$$

**Definición 6.1** Sean  $f$  y  $g$  en  $C^0(I, I)$ . Si existe  $F: [0, 1] \times I \rightarrow I$ ,  $(\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x) = F_\lambda(x)$ , tal que

i)  $F_\lambda(x)$  es continua en  $[0, 1] \times I$ , y

ii)  $F_0(x) = f(x)$  y  $F_1(x) = g(x)$  para toda  $x \in I$ .

Decimos que  $F_\lambda$  es una familia de funciones en  $C^0(I, I)$  que conecta  $f$  con  $g$ . También nos referiremos a  $F_\lambda$  como un arco.

**Observaciones:**

**6.b.** Sean  $f$  y  $g$  en  $C^0(I, I)$ , entonces para todo  $\lambda \in [0, 1]$  la función  $F_\lambda = (1 - \lambda)f + \lambda g$  es elemento de  $C^0(I, I)$ . Por lo tanto  $C^0(I, I)$  es convexo.

**6.c.** Sean  $f, g$  y  $h$  en  $C^0(I, I)$ . Si existe un arco que conecta  $f$  con  $g$ , y otro que conecta  $g$  con  $h$ , entonces existe un arco que conecta  $f$  con  $h$ .

**Proposición 6.2** La entropía topológica, considerada como una función

$$\text{ent} : C^0(I, I) \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty,$$

es semicontinua inferiormente.

**Demostración.** Ver Block y Coppel [9], página 216.  $\square$

**Corolario 6.3** El conjunto  $K(I, I)$  es abierto en  $C^0(I, I)$ .

**Demostración.** Por el teorema 3.8,  $K(I, I) = \{f \in C^0(I, I) | \text{ent}(f) > 0\}$ . Por la proposición 6.2, este conjunto es abierto.  $\square$

**Proposición 6.4** El conjunto de las funciones,  $f \in C^0(I, I)$ , tales que  $\text{ent}(f) > 0$  es denso en  $C^0(I, I)$ .

**Demostración.** Ver [9], página 216.  $\square$

**Corolario 6.5** El conjunto  $K(I, I)$  es abierto y denso en  $C^0(I, I)$ .  $\square$

Denotemos por  $NK(I, I)$  al complemento de  $K(I, I)$ .  $NK(I, I)$  es el conjunto de las funciones no caóticas. El corolario anterior muestra que  $\partial K(I, I) = NK(I, I)$ .

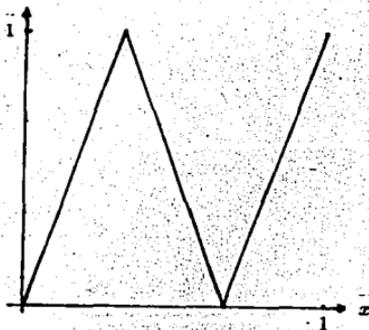
**Lema 6.6** Si  $f \in K(I, I)$ ,  $I = [0, 1]$ , entonces existe  $x \in (0, 1)$  tal que  $f(x) = x$ .

**Demostración.** Si para todo  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) > x$ ,  $f$  es creciente en  $I$ . Esto implica que para todo  $x \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 1$ . Por tanto  $f$  no es caótica en ningún subconjunto de  $I$ , lo que contradice la hipótesis. El otro caso,  $f(x) < x$  para todo  $x \in (0, 1)$ , se trata de manera análoga.  $\square$

**Teorema 6.7** El conjunto  $K(I, I)$ ,  $I = [0, 1]$ , es arco-conexo.

**Demostración.** Sea  $f \in K(I, I)$ , construiremos, en cuatro pasos, un arco en  $K(I, I)$ , que una  $f$  con la siguiente función caótica:

$$g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 2 - 3x & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 3x - 2 & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

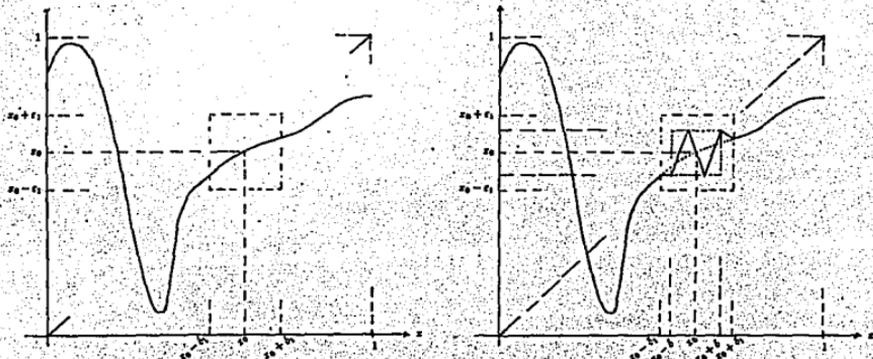


**Paso uno.** Sea  $x_0 \in (0, 1)$  tal que  $f(x_0) = x_0$ . Como  $f \in K(I, I)$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que para toda  $h \in B_\varepsilon(f)$ ,  $h \in K(I, I)$ , y  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset [0, 1]$ . Sea  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$ , existe  $0 < \delta_1 < \varepsilon_1$  tal que  $f(B_{\delta_1}(x_0)) \subset B_{\varepsilon_1}(x_0)$ .

Sea  $\delta$  tal que  $0 < \delta < \delta_1$ . Sea  $f_1 : I \rightarrow I$ , continua en  $I$ , definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \\ \text{lineal a pedazos en } [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] & \text{definida por:} \\ f_1(x_0 - \delta) = f_1(x_0 + \frac{\delta}{3}) = x_0 - \delta, & y \\ f_1(x_0 - \frac{\delta}{3}) = f_1(x_0 + \delta) = x_0 + \delta. \end{cases}$$

En la siguiente figura vemos las gráficas de  $f$  y  $f_1$ .



Tenemos  $f_1 \in K(I, I)$  y  $d(f, f_1) < \epsilon$ .

Sea  $F_\lambda = (1 - \lambda)f + \lambda f_1$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Este arco es tal que para toda  $x \notin (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ ,  $F_\lambda(x) = f(x)$ . Además para todo  $\lambda \in [0, 1]$  y para toda  $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ ,

$$|F_\lambda(x) - f(x)| \leq 2\epsilon_1 < \epsilon.$$

Por lo tanto es un arco en  $K(I, I)$  que une  $f$  con  $f_1$ .

**Paso dos.** Sea  $f_2 \in K(I, I)$  dada por

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ f_1(x) & \text{si } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]. \end{cases}$$

Consideremos ahora el arco  $F_\lambda = (1 - \lambda)f_1 + \lambda f_2$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Como  $F_\lambda(x) = f_1(x)$  para todo  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  y para todo  $\lambda \in [0, 1]$ , se tiene que  $F_\lambda$  es un arco en  $K(I, I)$  que une  $f_1$  con  $f_2$ .

**Paso tres.** La siguiente familia de funciones

$$F_\lambda(x) = f_2(x + \lambda(x_0 - \frac{1}{2})) + \lambda(\frac{1}{2} - x_0),$$

$\lambda \in [0, 1]$ , es un arco, en  $K(I, I)$ , que une  $f_2$  con  $f_3$ , donde

$$f_3(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta] \\ \text{lineal a pedazos si } x \in [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta], & \text{definida por:} \\ f_3(\frac{1}{2} - \delta) = \frac{1}{2} + \delta, \\ f_3(\frac{1}{2} + \delta) = \frac{1}{2} - \delta. \end{cases}$$

**Paso cuatro.** Por último la siguiente es una curva en  $K(I, I)$  que une  $f_3$  con  $g$ :

$$F_\lambda(x) = \lambda f_3\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(\lambda - 1),$$

con  $\lambda \in [1, \frac{1}{2\delta}]$ .

Por lo tanto existe un arco en  $K(I, I)$  que une  $f$  con  $g$ , y así  $K(I, I)$  es arco-conexo.  $\square$

**Nota.** La argumentación seguida en el paso uno del teorema anterior la realicé a partir de la demostración que presentan Block y Coppel a la proposición 31 del capítulo 8 de [9].

## 6.2 El conjunto de las funciones no caóticas también es arco-conexo

Sean  $I = [0, 1]$  y  $f \in C^0(I, I)$ . Consideremos la siguiente familia de funciones:

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq \lambda \\ \lambda & \text{si } f(x) > \lambda, \end{cases}$$

con  $\lambda \in [0, 1]$ .

Obsérvese que  $F_1(x) = f(x)$  y  $F_0(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

**Lema 6.8**  $F_\lambda(x)$  es continua en  $[0, 1] \times I$ .

**Demostración.** Sean  $\lambda_1 < \lambda_2$ , ambas en  $[0, 1]$ . Es inmediato que

$$d(F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}) \leq \lambda_2 - \lambda_1.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es uniformemente continua, existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\text{si } |x - y| < \delta_1 \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la relación entre  $f$  y  $F_\lambda$ , tenemos también lo siguiente:

$$\text{si } |x - y| < \delta_1 \text{ entonces } |F_\lambda(x) - F_\lambda(y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo  $\lambda \in [0, 1]$ .

Sea  $\delta = \min \{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{2} \}$ , y obtenemos lo siguiente:

$$\text{si } \|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\| < \delta, \text{ entonces } |\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |x - x_0| < \delta_1.$$

Esto implica que

$$|F_\lambda(x) - F_{\lambda_0}(x_0)| \leq |F_\lambda(x) - F_{\lambda_0}(x)| + |F_{\lambda_0}(x) - F_{\lambda_0}(x_0)| < |\lambda - \lambda_0| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

De aquí se sigue que  $F_\lambda(x)$  es continua en  $[0, 1] \times I$ .  $\square$

**Lema 6.9** Sea  $\lambda \in [0, 1]$ . Para todo subintervalo cerrado,  $A \subset I$ , distinto del vacío, se tiene que  $F_\lambda(A) \subset f(A)$  ó  $F_\lambda(A) = \{\lambda\}$ .

**Demostración.** Considero tres casos:

i) Si  $\lambda \geq \max \{ f(x) | x \in A \}$ , para todo  $x \in A$  se tiene que  $F_\lambda(x) = f(x)$ . Por lo tanto  $F_\lambda(A) = f(A)$ .

ii) Si  $\lambda \leq \min \{ f(x) | x \in A \}$ , para toda  $x \in A$  se tiene que  $F_\lambda(x) = \lambda$ . Por lo tanto  $F_\lambda(A) = \{\lambda\}$ .

iii) Si  $a = \min \{ f(x) | x \in A \} < \lambda < \max \{ f(x) | x \in A \} = b$ , entonces

$$F_\lambda(A) = [a, \lambda] \cup [\lambda, b] = f(A). \quad \square$$

Para demostrar que la curva  $F_\lambda$  está contenida en el conjunto de las funciones no caóticas si  $f$  es no caótica, utilizamos la siguiente definición y la siguiente proposición.

**Definición 6.10** Decimos que  $f \in C^0(I, I)$  es estrictamente turbulenta si existen dos subintervalos cerrados de  $I$ ,  $A$  y  $B$ , distintos del vacío, tales que  $A \cap B = \emptyset$  y  $A \cup B \subset f(A) \cap f(B)$ .

**Proposición 6.11** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $f \in K(I, I)$ .
- ii) Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  es estrictamente turbulenta.

**Demostración.** La afirmación i) es equivalente a  $\text{ent}(f) > 0$ . Block y Coppel demuestran en [9] que  $\text{ent}(f) > 0$  es equivalente a la afirmación ii).  $\square$

**Lema 6.12** Si para algún  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene que  $F_\lambda \in K(I, I)$ , entonces  $f \in K(I, I)$ .

**Demostración.** Supongamos que  $F_\lambda \in K(I, I)$ . Por la proposición 6.11, existen  $n \in \mathbb{N}$  y dos subintervalos cerrados distintos del vacío,  $A$  y  $B$ , tales que  $A \cap B = \emptyset$  y

$$A \cup B \subset F_\lambda^n(A) \cap F_\lambda^n(B).$$

Como  $A \cup B \subset F_\lambda^n(A)$ , tenemos que para toda  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ,  $F_\lambda^j(A)$  no es un intervalo formado por un sólo punto. Por lo tanto para toda  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ,  $F_\lambda^j(A) \neq \{\lambda\}$ .

Por el lema 6.9, tenemos:

$$F_\lambda^n(A) = F_\lambda \left( F_\lambda^{n-1}(A) \right) \subset f \left( F_\lambda^{n-1}(A) \right) = f \left( F_\lambda \left( F_\lambda^{n-2}(A) \right) \right) \subset f^2 \left( F_\lambda^{n-2}(A) \right) = \dots$$

$$\dots \subset f^{n-1} \left( F_\lambda(A) \right) \subset f^{n-1} \left( f(A) \right) = f^n(A).$$

Por tanto  $A \cup B \subset f^n(A)$ . De manera análoga  $A \cup B \subset f^n(B)$ . Y, por la proposición 6.11,  $f \in K(I, I)$ .  $\square$

**Teorema 6.13** El conjunto  $NK(I, I)$  es arco-conexo.

**Demostración.** Sea  $f \in NK(I, I)$ , consideremos la familia:

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq \lambda \\ \lambda & \text{si } f(x) > \lambda \end{cases}$$

$\lambda \in [0, 1]$ . Por el lema 6.8,  $F_\lambda$  es un arco que une  $f$  con la función constante cero. Por el lema 6.12, para todo  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $F_\lambda \in NK(I, I)$ .  $\square$

Finalizamos mostrando que tanto  $K(I, I)$  como  $NK(I, I)$  no son conjuntos convexos.

**Proposición 6.14**  $K(I, I)$  no es convezo.

**Demostración.** Consideremos la familia  $F_\lambda(x) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , donde  $f(x) = 4x(1 - x)$  y  $g(x) = 1 - f(x)$ . Ambas funciones,  $f$  y  $g$ , son elementos de  $K(I, I)$  y como  $F_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}$  para todo  $x \in [0, 1]$ ,  $F_{\frac{1}{2}} \notin K(I, I)$ .  $\square$

**Proposición 6.15**  $NK(I, I)$  no es convezo.

**Demostración.** Consideremos la familia  $F_\lambda(x) = \lambda g(x)$ ,  $g \in C^0(I, I)$ , donde  $g(x)$  está dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ \text{es lineal a pedazos si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ \text{definida por } f\left(\frac{3}{8}\right) = 1, \end{cases}$$

y  $\lambda \in [0, 1]$ .  $F_\lambda$  es un segmento de recta que une  $g$  con la función constante cero.

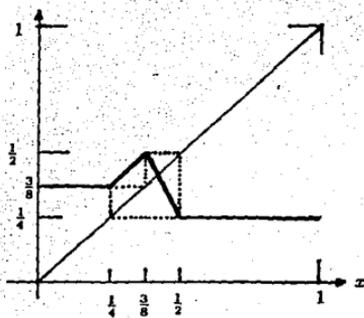
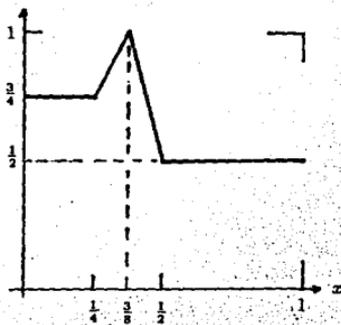
Obsérvese que para todo  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $g(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , (ver la figura al final del capítulo): Por tanto para todo  $x \in [0, 1]$  se tiene que  $g^2(x) = \frac{1}{2}$ , esto implica que  $g \in NK(I, I)$ .

Sin embargo  $F_{\frac{1}{2}}$  evaluada en los puntos  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{8}$  y  $\frac{1}{2}$  es así:

$$F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}, F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2}, F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

La función  $F_{\frac{1}{2}}$  tiene un punto periódico de periodo 3,  $F_{\frac{1}{2}} \notin NK(I, I)$ .  $\square$

Estas son las gráficas de  $g$  y  $F_{\frac{1}{2}}$ .



## Capítulo 7

# Caos y puntos periódicos

Sea  $M$  un espacio métrico perfecto y completo. En este capítulo demostramos la siguiente equivalencia:  $f : M \rightarrow M$  es caótica en  $M$  si y solamente si para todo  $\varepsilon > 0$ , y para todo conjunto  $D$  compacto,  $D \subset M$ , existe un punto periódico tal que su órbita es  $\varepsilon$ -densa en  $D$ . Es decir, la presencia de caos es equivalente a una particular distribución de los puntos periódicos. Como corolario obtenemos que los periodos presentes en una función caótica forman un conjunto no acotado. En el caso de que el espacio  $M$  sea compacto, la equivalencia anterior se puede expresar así:

La función  $f$  es caótica en  $M$  si y solamente si para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in \text{Per}(f)$  tal que su órbita es  $\varepsilon$ -densa en  $M$ .

### 7.1 Relación caos y puntos periódicos.

Sean  $f : M \rightarrow M$ , continua en  $M$ , y  $M$  espacio métrico perfecto y completo.

**Definición 7.1** Sean  $D \subset M$  y  $\varepsilon > 0$ , decimos que  $A \subset M$  es  $\varepsilon$ -denso en  $D$  si para todo  $x \in D$  existe  $y \in A$  tal que  $d(x, y) < \varepsilon$ .

**Observación 7.a.** Si  $D$  es compacto, para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $A$ , de cardinalidad finita, tal que  $A$  es  $\varepsilon$ -denso en  $D$ .

**Proposición 7.2** Si  $f$  es caótica en  $M$ , entonces para todo subconjunto compacto,  $D$ , y para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in \text{Per}(f)$  tal que  $\alpha(x, f)$  es  $\varepsilon$ -densa en  $D$ .

**Demostración.** Sea  $D \subset M$  un conjunto compacto. Dada  $\varepsilon > 0$ , existe una cubierta abierta finita de  $D$  de la siguiente forma:

$$\Theta = \{B_{\frac{\delta}{3}}(x_i) \mid x_i \in D \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, k\}\}, \quad D \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{\delta}{3}}(x_i).$$

Sean  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$  y  $u \in M$  tal que la  $\alpha(u, f)$  es densa en  $M$ . Como cada  $B_{\delta}(x_j)$  es abierta en  $M$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  se tiene que

$$B_{\delta}(x_j) \cap \{u, f(u), f^2(u), \dots, f^{n_0}(u)\} \neq \emptyset. \quad (*)$$

Sea

$$B = B_{\delta}(u) \cap f^{-1}(B_{\delta}(f(u))) \cap \dots \cap f^{-n_0}(B_{\delta}(f^{n_0}(u))).$$

Obsérvese que  $B$  es abierto y distinto del vacío. Por tanto existe  $x \in \text{Per}(f) \cap B$ .

Demostraremos ahora que la órbita de  $x$  es  $\epsilon$ -densa en  $D$ . Sea  $y \in D$ , existe  $j, 1 \leq j \leq k$ , tal que  $y \in B_{\delta}(x_j)$ . Por la ecuación (\*), existe  $i, 0 \leq i \leq n_0$ , tal que  $f^i(u) \in B_{\delta}(x_j)$ . Esto implica que:

$$d(f^i(x), y) \leq d(f^i(x), f^i(u)) + d(f^i(u), x_j) + d(x_j, y) < \delta + \delta + \delta = \epsilon.$$

Por tanto  $d(f^i(x), y) < \epsilon$ .  $\square$

**Proposición 7.3** Si para todo  $D \subset M$  compacto y para toda  $\epsilon > 0$ , existe  $x \in \text{Per}(f)$  tal que  $\alpha(x, f)$  es  $\epsilon$ -densa en  $D$ , entonces  $f$  es caótica en  $M$ .

**Demostración.**

**Paso uno:** La densidad de los puntos periódicos.

Sea  $A \subset M$  un conjunto abierto y distinto del vacío. Sean  $a \in A$  y  $\epsilon > 0$  tales que  $B_{\epsilon}(a) \subset A$ . Como el conjunto  $D = \{a\}$  es compacto, existe  $x \in \text{Per}(f)$  tal que su órbita es  $\epsilon$ -densa en  $D$ , esto implica que existe  $y \in \text{Per}(f) \cap B_{\epsilon}(a) \subset A$ . Por tanto  $\text{Per}(f)$  es denso en  $M$ .

**Paso dos:** La transitividad topológica.

Sean  $A$  y  $B$  abiertos y distintos del vacío. Sea  $a \in A$  y  $b \in B$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_{\epsilon}(a) \subset A$  y  $B_{\epsilon}(b) \subset B$ . Sea  $D = \{a, b\}$ ,  $D$  es compacto en  $M$ . Por hipótesis existe  $x \in \text{Per}(f)$  cuya órbita es  $\epsilon$ -densa en  $D$ , entonces

$$\alpha(x, f) \cap A \neq \emptyset \text{ y } \alpha(x, f) \cap B \neq \emptyset.$$

Por lo tanto existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$ .  $\square$

El siguiente teorema resume los resultados anteriores.

**Teorema 7.4**  $f : M \rightarrow M$  es caótica en  $M$  si y solamente si para todo subconjunto compacto de  $M$ ,  $D$ , y para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in \text{Per}(f)$  tal que  $\sigma(x, f)$  es  $\varepsilon$ -densa en  $D$ .  $\square$

**Corolario 7.5** Si  $f$  es caótica en  $M$ , entonces el conjunto  $\{n \mid \text{Per}_n(f) \neq \emptyset\}$  es no acotado.

**Demostración.** Dada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $n$  puntos distintos en  $M$ ,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = D$ . Sean

$$\delta = \min \{d(x_i, x_j) \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\} \text{ y } \varepsilon = \frac{\delta}{2}.$$

Como  $D$  es compacto, existe  $x \in \text{Per}_m(f)$  tal que su órbita es  $\varepsilon$ -densa en  $D$ , esto implica que  $m \geq n$ .  $\square$

**Observación 7.b.** El teorema 7.4 y el corolario anterior muestran también que si  $f : M \rightarrow M$  es caótica en  $M$ , entonces en todo subconjunto abierto de  $M$  existen puntos periódicos de periodo arbitrariamente grande. Es decir, de manera más formal, la siguiente afirmación es cierta: Si  $f : M \rightarrow M$  es caótica en  $M$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , para todo  $x \in M$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $y \in B_\varepsilon(x) \cap \text{Per}_m(f)$  tal que  $m > n$ .

En el caso de que  $M$  sea compacto, el teorema 7.4 queda de la siguiente forma:

**Teorema 7.6** Sea  $M$  un espacio métrico, compacto y perfecto. Sea  $f : M \rightarrow M$  una función continua en  $M$ . Entonces  $f$  es caótica en  $M$  si y solamente si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in \text{Per}(f)$  tal que su órbita es  $\varepsilon$ -densa en  $M$ .  $\square$

El hecho de que  $f$  sea caótica en  $M$ , con  $M$  compacto, no implica que dada  $\varepsilon > 0$  exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que toda órbita de periodo mayor que  $n_0$  sea  $\varepsilon$ -densa. Consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 7.c.** Sea  $\Sigma = \{\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ para todo } i \geq 0\}$  con la distancia:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2^n} \text{ donde } n = \min \{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

Sea  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  el corrimiento, es decir  $\sigma(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Sabemos (véase [11]) que  $\Sigma$  es compacto y que  $\sigma$  es caótica en  $\Sigma$ .

Dada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , consideremos el siguiente punto de  $\Sigma$ :

$$\bar{x} = (0, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots),$$

donde los 1's forman bloques de  $n - 1$  elementos. Tenemos que  $\bar{x} \in \text{Per}_n(f)$ , y que para todo  $m \geq 0$  la  $d(\sigma^m(\bar{x}), \bar{0}) \geq \frac{1}{2}$ , donde  $\bar{0} = (0, 0, \dots)$ . Por tanto ninguna de las órbitas de este tipo de puntos periódicos puede ser  $\varepsilon$ -densa en  $\Sigma$  si  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ .

## Capítulo 8

# Ejemplos de funciones caóticas

En todos los ejemplos vistos hasta ahora, el conjunto caótico ha sido compacto. En esta parte construiremos una función caótica en todo  $\mathbb{R}$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y con ella mostraremos una que lo es en el intervalo abierto  $(0, 1)$ ,  $g: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ . En la parte final demostraremos que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\varepsilon$ -perturbación de la identidad,  $id: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , caótica en todo  $[0, 1]$ .

### 8.1 Una función caótica en todo $\mathbb{R}$ .

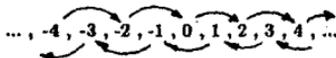
Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  así: si  $z \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$f(z) = \begin{cases} z + 2 & \text{si } z \text{ es par} \\ z - 2 & \text{si } z \text{ es impar.} \end{cases}$$

En cada intervalo de la forma  $(z, z + 1)$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ , definimos a  $f$  en forma lineal de tal forma que  $f$  sea continua en  $\mathbb{R}$ .

**Observación. 8.a.**

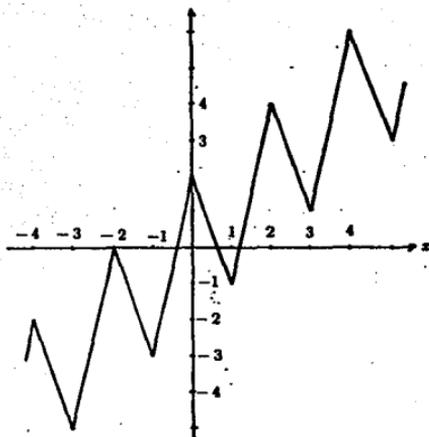
i)  $f$  restringida a los enteros es una función biyectiva, y podemos representar su dinámica de este modo:



Por tanto si  $z$  es par,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty$ , y si  $z$  es impar,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = -\infty$ .

ii) La pendiente de  $f$  en  $[z, z + 1]$  es  $-3$  si  $z$  es par, y es  $5$  si  $z$  es impar.

Esta es la gráfica de  $f$ .



**Lema 8.1** Para todo  $z \in \mathbb{Z}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que:

- i)  $f^{n-1}([z, z+1]) \subset f^n([z, z+1])$  y
- ii)  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n([z, z+1]) = \mathbb{R}$ .

**Demostración.** Sea  $z \in \mathbb{Z}$ , como

$$f([z, z+1]) = \begin{cases} [z-1, z+2] & \text{si } z \text{ es par} \\ [z-2, z+3] & \text{si } z \text{ es impar,} \end{cases}$$

en ambos casos tenemos que  $[z, z+1] \subset f([z, z+1]) = [u, v]$ , con  $u$  entero impar y  $v$  par,  $u < v$ . De aquí se sigue que para toda  $n \in \mathbb{N}$

$$f^n([z, z+1]) = [u - 2(n-1), v + 2(n-1)].$$

De esta igualdad concluimos de manera inmediata las dos afirmaciones del lema.  $\square$

**Proposición 8.2**  $f$  es topológicamente transitiva en  $\mathbb{R}$ .

**Demostración.** Sean  $x \in R$  y  $\varepsilon > 0$ , tales que  $B_\varepsilon(x) \subset [z, z+1]$  para algún  $z \in Z$ .

**Paso uno.** Existe  $n_0 \in N$  tal que  $f^{n_0}(B_\varepsilon(x))$  contiene un entero.

**Demostración.** Si  $A = (a, b) \subset [w, w+1]$ ,  $w \in Z$ , entonces la longitud de  $f(A)$  es mayor o igual a tres veces la longitud de  $A$ ,  $\text{long}(f(A)) \geq 3\text{long}(A)$ . Por tanto si para toda  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $f^k(B_\varepsilon(x)) \cap Z = \emptyset$  tenemos que

$$\text{long}(f^n(B_\varepsilon(x))) \geq 3^n(2\varepsilon).$$

A partir de esta desigualdad es inmediata la afirmación.

**Paso dos.** Existe  $n_1 \geq n_0$  tal que  $[z, z+1] \subset f^{n_1}(B_\varepsilon(x))$  para algún  $z \in Z$ .

**Demostración.** Sabemos que  $f^{n_0}(B_\varepsilon(x))$  contiene un intervalo de la forma  $[w, b)$  con  $w \in Z$  y  $w < b$ ; o de la forma  $(a, w]$  con  $w \in Z$  y  $a < w$ .

Tomemos el caso  $[w, b) \subset f^{n_0}(B_\varepsilon(x))$ . Si  $w+1 \notin [w, b)$ ,  $f([w, b))$  es un intervalo abierto en un extremo y cerrado en el otro, en ambos casos tenemos  $\text{long}(f([w, b))) \geq 3(b-w)$ . Si  $f([w, b))$  contiene a dos enteros consecutivos, terminamos. En caso contrario aplicamos nuevamente  $f$ .

En forma análoga al paso anterior. Si para todo  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $f^k([w, b))$  no contiene dos enteros consecutivos, entonces

$$\text{long}(f^n([w, b))) \geq 3^n(b-w).$$

Y de esta desigualdad se sigue la afirmación.

**Paso tres.** El final.

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos abiertos y distintos del vacío. Por los pasos uno y dos, existe  $n \in N$  tal que  $[z, z+1] \subset f^n(A)$  para alguna  $z \in Z$ . Por el lema 8.1, existe  $m \in N$  tal que  $f^m(A) \cap B \neq \emptyset$ . Por tanto  $f$  es transitiva en  $R$ .  $\square$

La siguiente proposición nos dá información valiosa sobre la dinámica de funciones definidas en un intervalo de  $R$ .

**Proposición 8.3** Sean  $I$  un intervalo en  $R$  y  $f : I \rightarrow I$  una función continua. Si  $f$  es transitiva en  $I$ , entonces  $f$  tiene densidad de puntos periódicos en  $I$ .

**Demostración.** Ver [24], [34], ó [4].  $\square$

**Proposición 8.4** Sean  $I$  un intervalo en  $R$  y  $f : I \rightarrow I$  una función continua. Si  $f$  es transitiva en  $I$ , entonces  $f$  es caótica en  $I$ .  $\square$

Por lo tanto la función  $f: R \rightarrow R$  que hemos construido es caótica en  $R$ .

**Observación 8.b.** En la proposición 8.2 de hecho demostramos que  $f$  es mezclante.

A partir de  $f$  podemos inmediatamente construir una función caótica en el intervalo abierto  $(0,1)$ ,  $g: (0,1) \rightarrow (0,1)$ .

Sea  $h: R \rightarrow (0,1)$ , dada por  $h(x) = (\frac{1}{\pi}) \arctan(x) + \frac{1}{2}$ . La función  $h$  es un homeomorfismo. Sea  $g = h \circ f \circ h^{-1}$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ (0,1) & \xrightarrow{g} & (0,1). \end{array}$$

Por lo tanto  $g$  es caótica en  $(0,1)$ .

**Proposición 8.5** Existe  $G: [0,1] \rightarrow [0,1]$ , continua en  $[0,1]$ , tal que para todo  $x \in (0,1)$  se tiene  $g(x) = G(x)$ .

**Demostración.** Sabemos que para todo  $x \in R$ ,  $f(x)$  cumple las siguientes desigualdades:

$$x - 2 \leq f(x) \leq x + 2. (*)$$

Por tanto para todo  $t \in (0,1)$  tenemos

$$h^{-1}(t) - 2 \leq f \circ h^{-1}(t) \leq h^{-1}(t) + 2.$$

Como  $h$  es creciente,

$$h(h^{-1}(t) - 2) \leq h \circ f \circ h^{-1}(t) \leq h(h^{-1}(t) + 2).$$

Por lo tanto para todo  $t \in (0,1)$  se cumplen las siguientes desigualdades:

$$h(h^{-1}(t) - 2) \leq g(t) \leq h(h^{-1}(t) + 2). (**)$$

Sea  $c \in R$ , tenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(h^{-1}(t) + c) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \tan\left(\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) + c \right] + \frac{1}{2} = 0 \text{ y}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} h(h^{-1}(t) + c) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \tan\left(\pi\left(t - \frac{1}{2}\right) + c\right) \right] + \frac{1}{2} = 1.$$

De estos límites y de la desigualdad (\*\*\*) obtenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow 1} g(t) = 1.$$

Definiendo  $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  así  $G(0) = 0$ ,  $G(1) = 1$  y  $G(x) = g(x)$  para todo  $x \in (0, 1)$  terminamos.  $\square$

**Observación 8.c.**

- i)  $G$  es caótica en  $[0, 1]$ .
- ii)  $G$  es mezclante en  $[0, 1]$ .
- iii) Para todo  $A$  abierto,  $A \subset (0, 1)$ , se tiene que  $\cup_{n=1}^{\infty} G^{-n}(A) = (0, 1)$ .
- iv)  $G^{-1}(0) = \{0\}$  y  $G^{-1}(1) = \{1\}$ .
- v) El conjunto  $\{x \in [0, 1] \mid \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(x) \text{ es denso en } [0, 1]\}$  es el intervalo  $(0, 1)$ , ver [5]. De hecho M. Barge y J. Martin demuestran que si  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es caótica en  $[0, 1]$ , entonces existen a lo más tres puntos en  $[0, 1]$ ,  $x_1, x_2, x_3$ , tales que  $\cup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(x_i)$ ,  $i = 1, 2 \text{ ó } 3$ , no es denso en  $[0, 1]$ .

De las desigualdades en (\*\*\*) obtenemos

$$h(h^{-1}(t) - 2) \leq G(t) \leq h(h^{-1}(t) + 2).$$

para todo  $t \in (0, 1)$ . Sabemos también que para todo  $t \in (0, 1)$  se tiene

$$h(h^{-1}(t) - 2) \leq t \leq h(h^{-1}(t) + 2),$$

por lo tanto para todo  $t \in (0, 1)$

$$|G(t) - t| \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \arctan \left[ \tan\left(\pi\left(t - \frac{1}{2}\right) + 2\right) \right] - \arctan \left[ \tan\left(\pi\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2\right) \right] \right\}.$$

Vamos a encontrar una cota superior para la distancia  $d(G, id)$ .

Sean  $\lambda > 0$  y  $H_\lambda(y) = \arctan(y + \lambda) - \arctan(y - \lambda)$ . La función  $H_\lambda$  alcanza su máximo en  $y = 0$ , y éste es  $\arctan(\lambda) - \arctan(-\lambda) = 2 \arctan(\lambda)$ .

Por lo tanto para todo  $t \in [0, 1]$ ,

$$|G(t) - t| \leq \frac{2}{\pi} \arctan(2).$$

De esta última desigualdad concluimos que  $d(G, id) \leq \frac{2}{\pi} \arctan(2)$ .

## 8.2 Una $\varepsilon$ -perturbación caótica de la identidad.

La siguiente proposición muestra que podemos encontrar funciones caóticas,  $l : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , con conjunto caótico todo el  $[0, 1]$ , tan cercanas como queramos a la función identidad. En su demostración utilizamos las funciones  $f, g, h, G$  y  $H_\lambda$  que hemos construido.

**Proposición 8.6** Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $l : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , continua y caótica en  $[0, 1]$ , tal que  $d(l, id) < \varepsilon$ .

**Demostración.** Sea  $\lambda > 0$ . Consideremos el homeomorfismo  $J_\lambda(x) = \frac{x}{\lambda}$ , y  $f_\lambda : R \rightarrow R$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} R & & f & & R \\ & & \downarrow & & \\ J_\lambda \downarrow & & & & \downarrow J_\lambda \\ R & & f_\lambda & & R. \end{array}$$

La colección  $\{f_\lambda(x) = (\frac{1}{\lambda}) f(\lambda x), \lambda > 0\}$  es una familia de funciones caóticas en  $R$ .

Es inmediato  $|f_\lambda(x) - x| = \frac{1}{\lambda} |f(\lambda x) - \lambda x|$ . De esta desigualdad y de la desigualdad (\*) obtenemos

$$|f_\lambda(x) - x| \leq \frac{2}{\lambda},$$

y de aquí,

$$x - \frac{2}{\lambda} \leq f_\lambda(x) \leq x + \frac{2}{\lambda}.$$

Siguiendo el camino de la proposición 8.5, llegamos a

$$h(h^{-1}(t) - \frac{2}{\lambda}) \leq g_\lambda(t) \leq h(h^{-1}(t) + \frac{2}{\lambda}),$$

donde  $g_\lambda : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ ,  $g_\lambda(t) = h \circ f_\lambda \circ h^{-1}(t)$ .

Cada  $g_\lambda$  es caótica en  $(0, 1)$  y podemos extenderla a una función caótica y continua en el  $[0, 1]$ ,  $G_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

Por último:

$$|G_\lambda(t) - t| \leq h(h^{-1}(t) + \frac{2}{\lambda}) - h(h^{-1}(t) - \frac{2}{\lambda}),$$

para toda  $t \in [0, 1]$ .

Recordando lo que hicimos para  $H_\lambda$  obtenemos

$$|G_\lambda(t) - t| \leq 2 \arctan\left(\frac{2}{\lambda}\right),$$

para toda  $t \in [0, 1]$ . Por lo tanto  $d(G_\lambda, id) \leq 2 \arctan\left(\frac{2}{\lambda}\right)$ .

Dada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que  $2 \arctan\left(\frac{2}{\lambda}\right) < \varepsilon$ . Sea  $l(t) = G_\lambda(t)$ ,  $d(l, id) < \varepsilon$ .  $\square$

**Observación 8.d.** Las familias  $\{g_\lambda\}$  y  $\{G_\lambda\}$  son continuas con respecto a  $\lambda$ .

**Definición 8.7** Sean  $f \in C^0(I, I)$  y  $\varepsilon > 0$ , decimos que  $g \in C^0(I, I)$  es una  $\varepsilon$ -perturbación de  $f$  si  $d(f, g) < \varepsilon$ .

Lo que hemos demostrado en esta parte se puede expresar así:

**Proposición 8.8** Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\varepsilon$ -perturbación de la identidad,  $id : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , tal que es caótica en todo el intervalo  $[0, 1]$ .  $\square$

-fin-

# Bibliografía

- [1] R. L. Adler, A. J. Konheim y M. H. McAndrew, *Topological Entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., 114, (1965), 309-319.
- [2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, Amer. Math. Monthly, (1992), 332-334.
- [3] M. Barge, *Horseshoe Maps and Inverse Limits*, Pacific Journal of Math., Vol. 121, 1, (1986), 29-39.
- [4] M. Barge y J. Martin, *Chaos, Periodicity, and Snakelike Continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 289, (1985), 355-365.
- [5] M. Barge y J. Martin, *Dense Periodicity on the Interval*, Proc. Amer. Math. Soc., 94, (1985), 731-735.
- [6] M. Barge y J. Martin, *Dense Orbits on the Interval*, Michigan Math. J., 34, (1987), 3-11.
- [7] M. Barge y J. Martin, *The Construction of Global Attractors*, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 110, 2, (1990), 523-525.
- [8] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz y L. S. Young, *Periodic Points and Topological Entropy of One Dimensional Maps*, Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Math., 819, (1980), 18-34.
- [9] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lect. Notes in Math. 1513, Springer Verlag, (1991).
- [10] R. Bowen, *Topological Entropy and Axiom A*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1970), 23-41.

- [11] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison Wesley, (1989).
- [12] R. L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Addison Wesley, (1992).
- [13] M. Falconi y J. Pulido, *Complejidad en Sistemas Dinámicos*, Seminario Ex-Mor., Vínculos Matemáticos, 1, Fac. de Ciencias UNAM., (1985).
- [14] J. Guckenheimer, *Sensitive Dependence to Initial Conditions for One Dimensional Maps*, Commun. Math. Phys., 70, (1979), 133-160.
- [15] K. Hiraide, *Expansive Homeomorphisms of Compact Surfaces are Pseudo-Anosov*, Osaka J. Math., 27, (1990), 117-162.
- [16] J. G. Hocking y G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, Inc., New York, (1988).
- [17] A. Katok, *Lyapunov Exponents, Entropy and Periodic Orbits for Diffeomorphisms*, IHES., Publications Mathématiques, No. 53, (1981), 137-173.
- [18] T.-Y. Li y J. A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, Amer. Math. Monthly, 82, (1975), 985-992.
- [19] S. Li, *Dynamical Properties of the Shift Map on the Inverse Limit Space*, Contemporary Math., vol 117, (1991), 125-128.
- [20] S. Li,  *$\omega$ -Chaos and Topological Entropy*, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol 339, 1, (1993), 243-249.
- [21] J. Milnor, *On the Concept of Attractor*, Commun. in Math. Phys., 99, (1985), 177-195.
- [22] M. Misiurewicz, *Invariant Measures for Continuous Transformations of  $[0, 1]$  with Zero Topological Entropy*, Lectures Notes in Math. 729, (1980), 144-152.
- [23] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory: an Introduction*, Marcel Dekker, Inc., (1992).
- [24] Z. Nitecki, *Topological Dynamics on the Interval*, Ergodic Theory and Dynamical Systems II, Proc. Special Year, Maryland 1979-1980 (A. Katok ed.), Birkhäuser, Basel, (1982), 1-73.
- [25] T. O'Brien y W. Reddy, *Each Compact Orientable Surface of Positive Genus Admits an Expansive Homeomorphism*, Pacific Journal of Math., Vol. 35, 3, (1970), 737-741.

- [26] J. Pulido, *Factors of Chaotic Endomorphisms*, en preparación.
- [27] W. Reddy, *The Existence of Expansive Homeomorphisms on Manifolds*, *Duke Math. J.*, 32, (1965), 627-632.
- [28] M. Rees, *A Minimal Positive Entropy Homeomorphism of the 2-Torus*, *J. London Math. Soc.* (2), 23, (1981), 537-550.
- [29] R. M. Schori, *Chaos: An Introduction to some Topological Aspects*, *Contemporary Mathematics* Vol. 117, (1991), 149-161.
- [30] M. Shub, *Endomorphisms of Compact Differentiable Manifolds*, *Amer. Jour. Math.*, 91, (1969), 175-199.
- [31] M. Shub, *Dynamical Systems, Filtrations and Entropy*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80, 1, (1974), 27-41.
- [32] S. Smale, *Differentiable Dynamical Systems*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, (1967), 747-817.
- [33] J. Smital, *Chaotic Functions with Zero Topological Entropy*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297, (1986), 269-282.
- [34] M. Vellekoop y R. Berglund, *On Intervals, Transitivity=Chaos*, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 101, (1994), 353-355.
- [35] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, *Graduate Texts in Math.*, 79, Springer Verlag, (1982).
- [36] R. F. Williams, *A Note on Unstable Homeomorphisms*, *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, vol 6, (1955), 308-309.