

01168
5
207



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingenieria

UNA APLICACION AL MODELO DE
REDES GENERALIZADO

JOSE DOLORES MAGAÑA ZAMORA

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE

MAESTRO EN INVESTIGACION
DE OPERACIONES

FALLA DE ORIGEN

CIUDAD UNIVERSITARIA

1 9 9 5



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A la memoria de mis padres.
Con gratitud y respeto.**

**A mi hijo José.
Por el gran amor que le tengo.**

**A Cristina.
Por su apoyo.**

**A mis hermanos: Raúl, Magdalena, Josefina, Mario
y Verónica.
Por su apoyo moral y porque sigamos unidos.**

**A mis sobrinos y sobrinas.
Con amor y esperanza.**

Agradecimientos:

Al Dr. Sergio Fuentes Maya por la valiosa y desinteresada ayuda que me ha brindado desde que lo conozco, y por su gran calidad humana.

A las autoridades del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua por el apoyo que recibí para la realización e impresión de este trabajo.

ÍNDICE

RESUMEN.....	4
INTRODUCCIÓN.....	5
<u>Antecedentes.....</u>	6
<u>Problemática.....</u>	8
<u>Objetivo.....</u>	9
<u>Metodología.....</u>	10
1.- DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN.....	11
1.1- <u>Conducción y almacenamiento de agua.....</u>	11
1.1.1.- Conservación de flujo.....	11
1.1.2.- Cotas en almacenamientos de agua y en corrientes y flujo en canales.....	13
1.1.3.- Costos por transporte de agua.....	14
1.1.4.- Beneficios derivados del abastecimiento de agua.....	15

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	16
2.1.- <u>Formulación matemática</u>	16
3.- METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN	20
3.1.- <u>Estructura de redes</u>	20
3.1.1.- Componentes del modelo.....	20
3.2.- <u>Formulación del problema de redes</u>	23
3.3.- <u>Descripción matemática del problema de redes</u>	25
3.4.- <u>Algoritmo de solución</u>	27
4.- PROGRAMA "MODELO DE ASIGNACIÓN (MAS)"	29
4.1.- <u>Modelo conceptual</u>	29
4.2.- <u>Descripción matemática</u>	32
4.3.- <u>Información requerida</u>	36
4.4.- <u>Costos</u>	38
4.5.- <u>Capacidades y limitaciones</u>	38
4.6.- <u>Estructura del programa</u>	40

5.- APLICACIÓN DEL MODELO DE ASIGNACIÓN	43
5.1.- <u>Sistema Hidráulico Interconectado del Noroeste</u>	43
5.2.- <u>Sistema actual</u>	46
5.3.- <u>Área de estudio</u>	47
5.4.- <u>Aplicación del modelo a la primera fase del S.H.I.N.O.</u>	48
5.4.1.- <u>Datos del programa</u>	52
5.4.2.- <u>Resultados obtenidos</u>	55
5.4.3.- <u>Aplicación del modelo al sistema Culiacán-Humaya-Mocorito</u>	65
5.4.3.1.- <u>Resultados</u>	66
6.- CONCLUSIONES	73
BIBLIOGRAFÍA	74
ANEXO A Conceptos generales de redes	
ANEXO B Modelo de asignación de recursos	
ANEXO C Algoritmo de incremento de flujo	

RESUMEN

El presente trabajo tuvo como principal objetivo, el de obtener las reglas de operación distribución del Sistema Hidráulico Integrado del Noroeste que en su conjunto permitan satisfacer dentro de márgenes de déficits tolerables, las demandas asignadas en cada una de las zonas de riego consideradas.

La descripción del modelo de asignación de recursos hidráulicos se presenta en el capítulo 3, la cual es el marco de referencia de este trabajo. En el capítulo 4 se tiene la descripción de un modelo de asignación de recursos hidráulicos basado en un modelo de optimización de sistemas de aprovechamientos hidráulicos. La metodología de solución al modelo de asignación en términos de teoría de redes se presenta en el capítulo 5. Por otro lado, en capítulo 6 se describen las características del programa que resuelve este modelo el cual está diseñado para simular la operación multiperódica de cualquier configuración de vasos, plantas de generación hidroeléctrica, canales de bombeo, gravedad y tuberías; y que en este caso se aplica para encontrar el plan de operación distribución a costo mínimo del sistema que consiste de varios vasos, confluencias de ríos y canales.

En el capítulo 7 de este reporte se presenta la descripción del Sistema Hidráulico Integrado del Noroeste como actualmente funciona, sus características hidráulicas y su problemática, así como la estructura del sistema en su primera etapa de desarrollo, considerando tanto los proyectos de infraestructura hidráulica, como los de ampliación en distritos de riego y los proyectos de aperturas de nuevas áreas de riego.

También, en el capítulo 7 se presenta la aplicación del programa mencionado al Sistema Hidráulico Integrado del Noroeste, con objeto de analizar la operación-distribución del sistema en su conjunto para su primera fase. Además, se aplica el programa de asignación de recursos al subsistema Culiacán-Humaya-Mocorito para estimar las

políticas de operación de las presas Sanalona, Adolfo López Mateos y E. Buelna y el uso de estas políticas, tomando en consideración traspasos de agua constantes de la presa Adolfo López Mateos a las zonas de Culiacán y Mocorito bajo la premisa de tener déficits tolerables en Humaya.

Finalmente, en el capítulo 8 se presentan algunas conclusiones del uso del programa de simulación y las recomendaciones que se deducen de las aplicaciones.

INTRODUCCIÓN

En este estudio se tiene como propósito considerar únicamente el problema de establecer políticas de operación-distribución óptimas a largo plazo en sistemas hidráulicos de distribución de agua. Esas políticas generalmente se traducen en niveles deseados de almacenamiento mensuales o estacionales en vasos, controlando la distribución del agua almacenada en un sistema tal que puedan ser derivados beneficios máximos de la operación del sistema sobre un período prolongado de escasez de agua. Este período usualmente corresponde a la sequía histórica mas intensa registrada, pero puede ser un intervalo que incluya lluvias intensas u ocurrencia de huracanes el seleccionado como condiciones de diseño del sistema.

Los sistemas de aprovechamientos hidráulicos superficiales a considerar en este análisis consisten de vasos de almacenamiento, presas derivadoras, ríos, canales (que funcionen por bombeo o por gravedad) y tuberías. Los beneficios derivados de la operación de tales sistemas incluyen la oferta de agua para diversos usuarios y la conservación de volúmenes deseados en presas de almacenamiento. Otros beneficios como el uso del agua para la recreación, la generación de energía hidroeléctrica y el control de avenidas no se estudian explícitamente.

Antecedentes

La operación de un sistema de aprovechamientos hidráulicos, que consiste de varios vasos interconectados y canales, para abastecer de agua a distintos usuarios, requiere la coordinación de numerosas acciones administrativas para determinar la política más eficiente, que difícilmente se puede dar. Además, por la gran complejidad de esas interconexiones resulta impráctico evaluar de embargo, por la importancia que representa para los países, que cuentan con grandes sistemas de distribución, operar eficientemente tales sistemas, evaluar técnicamente la construcción de infraestructura

complementaria al sistema, determinar las dimensiones de canales y/o vasos y el orden de construcción de estos, a nivel mundial se han estado investigando técnicas de análisis de sistemas en relación a estas actividades y su posteriormente aplicación a casos particulares.

Para el análisis a largo plazo de sistemas de aprovechamientos hidráulicos se han usado técnicas para establecer su operación, basadas en modelos matemáticos, que consideran la condición de estado estacionario del flujo, y que representan adecuadamente los sistemas reales. La simulación dinámica se ha empleado en la modelación y control de sistemas de distribución y oferta de agua (3, 4, 10, 15, 16), en el uso en la modelación de sistemas de vasos para propósitos múltiples (5, 17, 28), ésta técnica, usualmente, no proporciona directa o indirectamente los elementos suficientes para medir el funcionamiento del sistema cuando consideran criterios generales como el máximo beneficio que alcanza el sistema, y cuando sí los considera, se requieren una gran cantidad de simulaciones para alcanzar resultados aceptables.

Con la aplicación de las técnicas de optimización se pretende subsanar este problema, al sistematizar la evolución de la criterios generales de operación del sistema. Como parte de estas técnicas usadas en el análisis de sistemas hidráulicos superficiales, se encuentra la programación dinámica (9, 22, 26, 47, 48), que aun cuando representan adecuadamente los sistemas reales y garantizan una solución óptima, por su gran consumo de tiempo de computadora se restringe sus uso a sistemas con un pequeño número de vasos; en un caso similar está la programación no lineal, con la diferencia de que se dificulta garantizar una solución óptima al problema (13),

Las técnicas de redes de flujo se han aplicado con éxito en problemas de simulación-optimización de sistemas de distribución de agua, así como en la determinación de políticas de operación (7, 8, 11, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 41, 44, 45). Esto se debe a la facilidad que presenta la teoría de redes en el manejo de problemas de optimización

con gran cantidad de componentes del sistema, y que consideran la evolución del sistema a través del tiempo (problemas de gran escala). Además, la estructura especial que tienen los modelos de redes es propicia para el desarrollo de algoritmos que aceleran el logro de la solución.

Los sistemas expertos recientemente se han empleado para encontrar la solución de esos problemas (12, 50), pero por el momento no se comenta su uso en el contexto de este trabajo.

Problemática

En México existen sistemas de distribución de agua para diferentes usuarios, quienes por el aumento de la población y las actividades que hacen uso del agua (industrial, agrícola, abastecimiento de agua potable, generación de energía, recreativo), así como los efectos que se derivan por estos usos (contaminación, desperdicio, sobreconsumo, escasez) y las ocurrencia de fenómenos naturales (grandes avenidas y sequías), ocasiona gran competencia por el agua y plantea la necesidad de realizar un uso racional y eficiente del agua. Una herramienta de planeación que toma en cuenta parcialmente la problemática anterior, son los modelos de redes de flujo propuestos para sistemas de distribución de agua, que en nuestro país se han aplicado, con éxito, para diseñar, planear y proponer políticas de operación y distribución del agua en el Programa Hidráulico Interconectado del Noroeste (34); políticas de asignación de agua para llevar dotaciones de éste líquido de un sistema de presas a la ciudad de Monterrey (30); y en la determinación de políticas de asignación de agua para riego del sistema de presas de la cuenca del río Bravo y un acuífero (38).

Recientemente (en el país) se ha retomado la idea de trabajar sistemas de aprovechamientos hidráulicos para determinar políticas de operación-distribución de sistemas con varios vasos interconectados, con la idea de propiciar el uso eficiente del

agua, bajo esquemas de programación lineal (6) lo que no han dado los resultados esperados, porque los algoritmos de solución de este tipo de optimización requiere de grandes recursos, en tiempo y precisión, de computación cuando el horizonte de planeación consta de varios años y se requiere de un análisis mensual.

Por tanto, se requiere de una herramienta para el análisis de sistemas que consistan de varios vasos interconectados y canales y/o ríos para varios períodos de tiempo, que sea sencilla en concepto y en su aplicación, a situaciones reales, y que sea eficiente computacionalmente. Un aspecto importante a considerar es aplicar esta herramienta en sistemas multiperiodicos con gran cantidad de vasos, como el caso donde se usó el esquema de programación lineal y en uno de sus subsistemas con alguna problemática particular, para mostrar la viabilidad del método.

Objetivo

El presente trabajo tuvo como principal objetivo, el de obtener las reglas de operación y distribución del Sistema Hidráulico Integrado del Noroeste que en su conjunto permitan satisfacer, dentro de márgenes de déficits tolerables las demandas asignadas a cada una de las zonas de riego consideradas.

Metodología

Se describe el sistema de distribución de agua por medio de un tipo particular de modelo de redes, llamado modelo de asignación, que permite determinar la distribución del flujo a costo mínimo, en una red en la que se toleran pérdidas de flujo (como son las evaporaciones en los vasos y las filtraciones en la distribución del agua). Para encontrar la solución al modelo de redes se usa un programa, que ya con anterioridad ha sido usado en condiciones similares (30, 34).

Antes de describir el procedimiento de solución (31, 44), es necesario detallar completamente las suposiciones del modelo utilizadas en la representación matemática de sistemas de aprovechamiento de agua superficial.

1.- DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE AGUA

1.1.- Conducción y almacenamiento de agua

1.1.1.- Conservación de flujo

El tránsito del agua bajo condición de estado estacionario a través de un sistema de vasos y canales artificiales o naturales requiere que se cumpla el principio de conservación de masa. Por tanto, para cada almacenamiento de agua, confluencia o bifurcación de corrientes o canales, el gasto que sale debe ser igual al gasto total que entra en cada período de tiempo. Esta condición puede expresarse matemáticamente para cada uno de los elementos mencionados -denominados uniones o puntos de unión j- por la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^m A_{ji} Q_{ik} + \sum_{i=1}^m A_{ji} Q_{ki} - \frac{(S_{j,k+1} - S_{jk})}{\Delta t} = D_{jk} + E_{jk} (S_{j,k+1} - S_{jk}) - U_{jk} - I_{jk}$$

donde:

D_{jk} demanda de agua en la unión j suministrada en el período k

E_{jk} perdida por evaporación en unión j durante el período k

I_{jk} agua importada por la unión j en el período k

m numero de canales

q_{ik} flujo que entra al canal i durante el período k

q'_{ik} flujo que sale del canal i durante el período k

S_{jk} agua almacenada en la unión j al inicio del período k

$S_{j,k+1}$ agua almacenada en la unión j al final del período k

U_{jk} flujo por área de drenaje, entra por unión j en período k

Dt duración del período

$$A_{ji} = \begin{cases} +1, & \text{flujo en canal } i \text{ entra por unión } j \\ 0, & \text{canal } i \text{ no conecta con unión } j \\ -1, & \text{flujo en canal } i \text{ sale por unión } j \end{cases}$$

El gasto o la razón del flujo que entre por un canal, puede no ser igual al que se descarga debido a las pérdidas o ganancias de agua resultados de la evaporación, la recarga de agua subterránea, o los aportes de escurrimientos estacionales con que contribuye la cuenca o área de drenaje. Por otro lado, en los ramales de los ríos y canales, los cambios en los gastos son altamente complejos, una aproximación razonable es expresar el cambio de gasto como una fracción del gasto de entrada, con el factor de proporcionalidad que represente su variación en cada período de simulación (i.e. mensual o estacionalmente). Esto es expresado matemáticamente para cada canal i en el período k como:

$$q'_{ik} = (1 - \alpha_{ik}) q_{ik}$$

donde, α_{ik} es la fracción del gasto (q_{ik}) de entrada al canal i que se pierde en el período de tiempo k . Esa ecuación representa solo el cambio en el flujo de agua desde que entra hasta que sale del canal. Cualquier escurrimiento adicional con el que contribuya el área de drenaje que pudiera entrar en algún punto a lo largo del canal, puede ser sumado al sistema como flujo irregular en el punto terminal del canal de conducción.

1.1.2.- Cotas en almacenamientos de agua y en corrientes y flujo en canales.

El nivel de almacenamiento de agua en un vaso variará entre sus capacidades de diseño, las cuales dependen de los límites estacionales deseados para actividades tales como: conservación de agua, recreación, control de avenidas o actividades de pesca. Así el almacenamiento en la unión j en el fin de algún período de tiempo k deberá satisfacer las siguientes relaciones restrictivas

$$V_{jk}^{\min} \leq S_{j,k+1} \leq V_{jk}^{\max}$$

donde:

V_{jk}^{\max} es el máximo almacenamiento permitido en la unión j en el fin del período k ,

V_{jk}^{\min} es el mínimo almacenamiento permitido en la unión i en el fin del período k .

De manera similar puede ser deseable para navegación, control de avenidas, conservación de la vida silvestre, derechos del agua, u otros propósitos especificar límites inferiores y superiores sobre los gastos, en canales de conducción naturales o artificiales sobre una base estacional. Tales restricciones pueden expresarse para cada canal i en el período de tiempo k por las desigualdades

$$l_{ik} \leq q_{ik} \leq u_{ik}$$

donde

l_{ik} es el límite inferior del gasto que entra por el canal i en el período de tiempo k ,

u_{ik} es el límite superior del gasto que entra por el canal i en el período de tiempo k .

1.1.3.- Costos por transporte de agua

En términos de impacto económico, la operación de bombas y motores en estaciones de bombeo, es con mucho el más significativo de todos los costos de operación y mantenimiento. La energía eléctrica requerida para bombear agua por una tubería o un canal, varía proporcionalmente con el gasto y con la altura de bombeo y la pérdida de agua por fricción en tuberías y canales.

Para cuantificar la pérdida de agua causada por la fricción que existe al transportar el agua a presión a través de conductos cerrados, se emplean relaciones empíricas que dependen, en razón directamente proporcional, del gasto y de la longitud del conducto, e indirectamente proporcional del diámetro de la tubería.

En tramos de canales abiertos donde se supone el agua en estado estacionario, las pérdidas por fricción son constantes para cualquier gasto menor que la capacidad del canal.

En tuberías y canales diseñados para proporcionar un gasto máximo Q sobre una altura H la energía requerida por bombeo es

$$E = f(Q, H)$$

el desembolso mensual por bombeo se calcula con una expresión de la forma

$$B = v C E$$

donde

C costo por electricidad (\$/kilowatt-hora),

v tiempo, en horas, de operación del canal para transportar un gasto Q por mes.

1.1.4.- Beneficios derivados del abastecimiento de agua

Los beneficios que se logran por satisfacer parte de la demanda total del agua, a los sectores usuarios como el municipal, industrial o agrícola, se expresan generalmente como una función cóncava de la oferta de agua (42). Esto es, los usos del agua que reportan mayores beneficios económicos son prioritarios para alcanzar sus demandas, aun si no todas las demandas de agua pueden satisfacerse. La función de beneficios del agua puede aproximarse por una función lineal por partes; la pendiente de cada componente lineal decrece en la medida en que la cantidad de agua disponible se aproxima a la cantidad máxima necesitada. Esto refleja el decremento del beneficio marginal por suministrar agua adicional cercana al máximo deseado. Entonces, la demanda total de agua se puede representar por un conjunto de demandas de agua, separadas entre sí, cada una formulada como una función lineal del beneficio. Por tanto, sin pérdida de generalidad, la función del beneficio asociado a cumplir una demanda de agua, se puede expresar como:

$$WB_{jk} = P_{jk} D_{jk}$$

donde:

P_{jk} es el beneficio por unidad de agua suministrada al punto de unión j en el período de tiempo k ,

D_{jk} es el volumen total de agua demandado en el punto de unión j en el período de tiempo k .

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN

El problema operativo planteado al fluir el agua en estado estacionario en un sistema de vasos y canales y/o tuberías, consiste en determinar el agua que sale de cada vaso, en cada período de tiempo, tal que maximice el beneficio neto derivado del agua abastecida y del agua distribuida, en todos los períodos de tiempo, bajo las siguientes restricciones:

- * Conservación del flujo en todos los puntos de confluencia, de bifurcación y vasos,
- * Los almacenamientos en los vasos están acotados por niveles estacionales máximos y mínimos,
- * Los flujos en los canales están acotados por gastos estacionales máximos y mínimos,
- * La oferta de agua debe satisfacer demandas máximas y mínimas.

2.1.- Formulación matemática del problema

Sea un sistema de vasos y canales que consiste de n uniones de las cuales R son vasos, también, se tienen m canales. Si Q_{rk} es la descarga instantánea de agua del vaso r en el período de tiempo k , por medio de un valor constante se puede convertir esa descarga en unidades de flujo o gasto (q_{rk}) para ese mismo período de tiempo. Así, q_{ik} es el gasto que entra al río i en el período k .

El flujo que opera en el sistema a costo mínimo es el conjunto de valores Q_{rk} y q_{ik} , que

se calculan para todos los vasos, puntos de confluencia y canales, en cada uno de los períodos de tiempo L que comprenda el horizonte de simulación.

$$\text{maximizar } \sum_{k=1}^L \left(- \sum_{i=1}^m C_{ik} Q_{ik} \right) + \sum_{j=1}^n P_{jk} D_j$$

costo por
 conducción
 de agua

beneficios por
 suministrar
 agua

Sujeto a

Conservación de flujo en uniones

$$\sum_{i=1}^m A_{ji} Q_{ik} + \sum_{i=1}^m A_{ji} Q'_{ki} - \frac{(S_{j,k+1} - S_{jk})}{\Delta t} = D_{jk} + E_{jk} (S_{j,k+1} - S_{jk}) - U_{jk} - I_{jk}$$

k = 1,.....,L

j = 1,.....,n

Cotas de almacenamiento en uniones

$$V_{jk}^{\min} \leq S_{j,k+1} \leq V_{jk}^{\max}$$

k = 1,.....,L

j = 1,.....,n

Cotas de flujo en canales

$$i_{ik} \leq q_{ik} \leq u_{ik}$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$k = 1, \dots, L$$

Perdidas de flujo en canales

$$q'_{ij} - (1 - \alpha_{ij}) q_{ij} = 0$$

$$k = 1, \dots, L$$

$$i = 1, \dots, n$$

Cotas en las demandas de agua en cada unión j y cada período k

$$D_{jk}^{\min} \leq D_{j,k} \leq D_{jk}^{\max}$$

$$k = 1, \dots, L$$

$$j = 1, \dots, n$$

No negatividad de todos los flujos

$$q_{ik} \geq 0$$

$$q'_{ik} \geq 0$$

$$k = 1, \dots, L$$

$$i = 1, \dots, m$$

donde:

c_{ik} costo por unidad de flujo conducido en el canal i , en el período k

P_{jk} costo por unidad de déficit, por falla en la entrega de agua en la unión j , durante el período de tiempo k ,

- D_{jk} demanda de agua suministrada en la unión j , en el período k ,
 D_{jk}^{\max} demanda máxima de agua en la unión j en el período k ,
 D_{jk}^{\min} demanda mínima de agua en la unión i en el período k ,
 E_{jk} pérdida por evaporación en la unión j durante el período k ,
 I_{jk} agua importada por la unión j en el período k ,
 m número de canales,
 n número de vasos,
 L número de períodos de tiempo,
 q_{ik} flujo que entra al canal i durante el período k ,
 q'_{ik} flujo que sale del canal i durante el período k ,
 S_{jk} agua almacenada en la unión j en al inicio del período k ,
 $S_{j,k+1}$ agua almacenada en la unión j al final del período k ,
 i_{ik} limite inferior para el flujo que circule en el canal i , en el período k ,
 u_{ik} limite inferior para el flujo que circule en el canal i , en el período k ,
 U_{jk} flujo generado por área de drenaje, entra por unión j en período k ,
 Δt duración del período,
 V_{jk}^{\max} es el máximo almacenamiento permitido en la unión j en el fin del período k ,
 V_{jk}^{\min} es el mínimo almacenamiento permitido en la unión i en el fin del período k ,
 α_{ik} fracción de agua que se pierde en el canal i , en el período k ,

$$A_{ji} = \begin{cases} +1, & \text{flujo en canal } i \text{ entra por unión } j \\ 0, & \text{canal } i \text{ no conecta con unión } j \\ -1, & \text{flujo en canal } i \text{ sale por unión } j \end{cases}$$

3.- METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

El problema operativo del sistema de vasos y canales, planteado a través de las ecuaciones de la sección anterior, representa un problema de programación matemática. Por otro lado, la configuración de ese problema basada en ríos y canales se puede reproducir por medio de una red (Apéndice A). A continuación, se establecen los elementos necesarios para representar la estructura general del modelo operativo en redes, y darle solución en estos términos.

3.1.- Estructura de redes

3.1.1.- Componentes del modelo

a) Geometría del sistema. La configuración básica de ríos, canales y vasos puede ser representada espacialmente por una red, esto es, un conjunto de nodos unidos por medio de arcos dirigidos. Los nodos comúnmente representan los puntos de confluencia y/o de bifurcación de ríos o canales, o bien vasos de almacenamiento o de derivación dentro de la red. Por tanto, un nodo es análogo a ambos un vaso o punto de unión (unión de canales, confluencia de ríos, etc) en el sistema físico. Además, un nodo es una componente de la red que se considera tiene la capacidad de almacenar una cantidad acotada de agua conducida en la red. Los vasos se representan por nodos que tienen una capacidad de almacenamiento, así como la habilidad para servir como puntos de bifurcación o derivación. Un punto de unión que físicamente no almacene agua se maneja de manera similar a un vaso, excepto que su capacidad de almacenamiento es siempre cero, en este caso se consideran las presas derivadoras. Las demandas de agua requeridas al sistema deberán ser siempre localizadas en puntos nodal. Además, cualquier agua que entre al sistema, de manera natural como la producida por el área de drenaje o de manera artificial a través de importación de agua, también deberá introducirse en un punto nodal. Finalmente, todos los vasos y/o puntos de confluencia,

deberán tener una salida para derramar cualquier exceso de agua que entra en ellos; el flujo derramado no está disponible para otros usos dentro del sistema.

Asimismo, los arcos que realizan la transferencia de agua entre los varios nodos de la red, en una dirección de flujo especificada, representan ríos, canales o tuberías . Comúnmente, los arcos tienen asociados ciertos parámetros como capacidades fijas máximas y mínimas, costo de bombeo (si existe) o costo por transferencia de agua y factor de ganancias debido a infiltraciones en canales. La figura 1 ilustra una representación de red para una configuración espacial de un sistema de agua superficial.

b) Replica de la red. Para determinar la operación de un sistema de aprovechamientos para varios períodos, usando la técnica de redes, lo que procede es hacer replicas de la geometría o representación espacial de la red del sistema y conectar estas replicas por medio de arcos que unen un mismo vaso en períodos consecutivos y cuyo flujo respectivo, representa cambios de almacenamiento en los vasos en períodos consecutivos, a estos arcos se les llaman "arcos de almacenamiento final". De esta manera, la representación espacio-tiempo del problema puede ser visualizada como una red compuesta por capas, en donde cada capa representa un período de tiempo, con arcos de almacenamiento conectandolas. Así, en el caso de sistemas multiperíodos, a cada representación en el espacio se le asocia una representación en el tiempo; y equivalentemente para cada período se tiene una red espacial en términos de nodos y arcos. En la figura 2 se ilustra la expansión a cuatro períodos de tiempo del sistema de la figura 1.

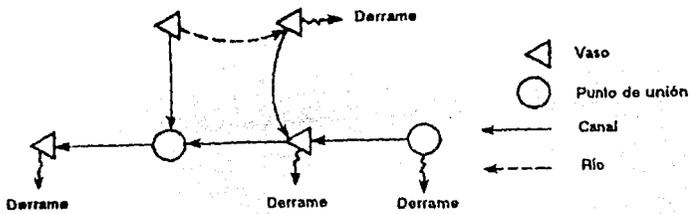


Figura 1.-Representación espacial de un sistema de agua superficial

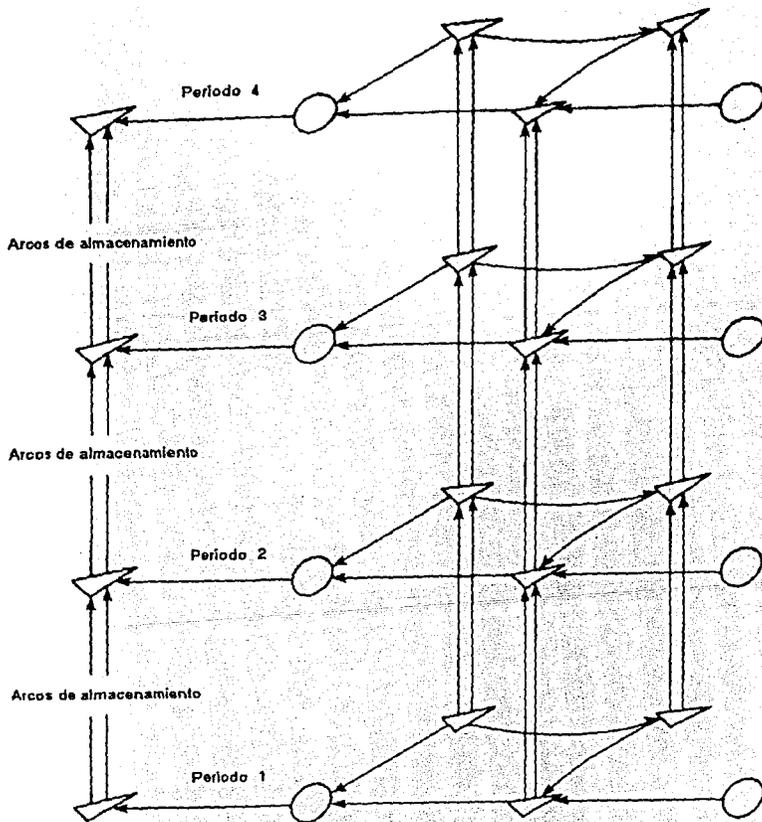


Figura 2.- Representación espacial de la configuración del sistema expandido a cuatro periodos de tiempo.

3.2.- Formulación del problema de redes

Por lo expuesto anteriormente, un sistema físico de vasos interconectados entre sí por medio de canales y ríos se puede representar como un modelo de redes. Para que ese sistema se represente completamente por un modelo generalizado de redes con ganancia es necesario especificar un nodo fuente (origen) y un nodo sumidero (terminal) y los cuatro parámetros asociados con cada arco (anexo B). El nodo fuente suministra una cantidad ilimitada de flujo al sistema, como el agua de importación y de entrada a los vasos; el nodo sumidero, demanda una cantidad específica de flujo, en las zonas de demanda, por derrames y almacenamiento final en los vasos.

El flujo en los arcos, la capacidad de cada arco y el costo por transportar flujo en los arcos son tres parámetros relacionados con cada arco. El cuarto parámetro en los modelos generalizados de redes es el factor de ganancia, que se define como la razón de flujo que sale de un arco, al flujo que entra.

La incorporación del factor de ganancia permite que los modelos de redes tomen en cuenta las pérdidas de agua que se presentan en los sistemas de distribución, debidas a la evaporación, la infiltración del agua en canales y al bombeo indiscriminado del agua del canal hacia afuera de este. Para un canal el valor $1 - \alpha$ representa el factor de ganancia, donde α es la pérdida neta de agua, por unidad de gasto, a lo largo del canal; para un canal conectado con un centro de demanda, el factor de ganancia es la razón del agua que se va por el drenaje a la que entra al canal.

El uso del factor de ganancia en los arcos de almacenamiento es más complicado ya que su valor dependerá de la evaporación en los vasos. La evaporación en los vasos de almacenamiento depende en forma directamente proporcional de la superficie de agua expuesta y no del volumen almacenado. Sin embargo, se puede expresar la pérdida de agua (complemento del factor de ganancia) en forma proporcional al volumen

almacenado, aproximando la curva área-capacidad de cada vaso, por medio de dos segmentos lineales; así, la superficie del agua expuesta $A(V)$ la podemos definir como

$$A(V) = \left\{ \begin{array}{ll} C_1 V & \text{si } 0 \leq V \leq PC \\ C_2 (V - PC) + C_1 PC & \text{si } PC \leq V \end{array} \right\}$$

donde V es el volumen de agua almacenada; PC es la abscisa del punto de intersección de los segmentos lineales; C_1 , la pendiente del segmento definido para V menor o igual a PC y C_2 la pendiente del otro segmento.

Al separar el volumen V en dos componentes V_1 y V_2 , almacenamientos por abajo y por arriba de PC , respectivamente. El volumen evaporado E se aproxima justamente por una relación directamente proporcional al almacenamiento, luego

$$\begin{aligned} \text{Volumen evaporado} &= \text{lámina de evaporación} \times \text{área media del vaso} \\ &\quad \{ \text{valores promedio durante un período} \} \end{aligned}$$

$$E = e (C_1 V_1 + C_2 V_2)$$

donde e es la lamina de evaporación promedio durante un período (volumen/unidad de área/período). Asimismo, los porcentajes de los volúmenes V_1 y V_2 , perdidos por evaporación en los arcos que los transportan son eC_1 y eC_2 , respectivamente. Las componentes V_1 y V_2 están representados en la red, por dos arcos de almacenamiento (figura 2). Los factores de ganancia para estos arcos se calcula restando a la unidad cada uno de los porcentajes de pérdida. Estos factores varían periódicamente (digamos mes a mes) al hacer variar el valor de e .

Un beneficio de una unidad se asigna al arco de almacenamiento asociado al almacenamiento bajo V_1 , pero al arco relacionado con el almacenamiento alto no se le asigna beneficio. Esto obliga a que el flujo pase primero por el arco de almacenamiento bajo hasta saturarlo (en caso necesario); después, lo que reste del flujo pasa por el arco de almacenamiento alto.

3.3.- Descripción matemática del problema de redes

La estructura matemática del modelo de redes se describe por cuatro conjuntos de ecuaciones de restricción y una función objetivo. Un conjunto de ecuaciones de restricción obliga al cumplimiento de continuidad en todos los nodos de la red, a excepción del nodo fuente y del nodo sumidero. El segundo indica el volumen de agua perdido en las conducciones a través de cada uno de los arcos, los otros dos describen los límites superior e inferior del flujo en los arcos de la red. Así, existe una ecuación para cada nodo y tres para cada arco.

Las relaciones matemáticas del problema de flujo en redes se pueden interpretar como el encontrar el conjunto de valores q_{ij} tales que

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_{ij} C_{ij} \dots \dots \dots (1)$$

costo por transporte
de agua

sujeto a

Balance de flujo en todos los nodos

$$\sum_{i=1}^N (q_{ij} - q'_{ji}) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$j=1, \dots, N$

Pérdidas de flujo en los arcos

$$q'_{ij} - (1 - \alpha_{ij}) q_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

para toda i, j,

Cotas sobre el flujo transportado a lo largo de los arcos

$$L_{ij} \leq q_{ij} \leq U_{ij}, \quad \dots\dots\dots (4)$$

para toda i, j,

Donde

q_{ij} *flujo que entra al arco del nodo i al j,*

q'_{ji} *flujo que sale del arco del nodo i al j,*

L_{ij} *límite inferior del flujo por el arco que va del nodo i al j,*

U_{ij} límite superior del flujo por el arco que va del nodo i al j ,

C_{ij} costo por transportar una unidad de flujo q_{ij} del nodo i al j ,

α_{ij} factor de pérdidas.

Al calcular la operación óptima del sistema de vasos y canales se debe tener presente su representación en redes por las ecuaciones anteriores, y que este modelo generalizado de redes con ganancia se puede resolver al encontrar la distribución del flujo en la red a costo mínimo. Equivalentemente, conocidas las demandas de flujo en uno o varios puntos de la red, se desea asignar flujos en la red de distribución que proporcionen costo mínimo.

Este modelo conocido como de asignación de recursos (agua, energía o dinero), tiene una representación algebraica en términos de la teoría de redes, donde se especifican explícitamente todas las suposiciones del modelo, que se presenta en el anexo B.

3.4.- Algoritmo de solución

Existen códigos de computación para métodos dual y primal del modelo generalizado de redes con ganancia con los que se pueden calcular los flujos en los arcos a costo mínimo (18).

El método de incremento de flujo que le da solución al problema de flujo a costo mínimo generalizado (18,19), se describe en el anexo C. Este algoritmo para encontrar la

operación óptima del sistema se codificó en fortran para ejecutarse automáticamente como parte del programa MAS. En el siguiente capítulo se describe el programa, las consideraciones adicionales que hacen al modelo de asignación y la forma de utilizarlo, para encontrar solución a problemas específicos.

4.- PROGRAMA "MODELO DE ASIGNACIÓN (MAS)"

El "Modelo de asignación" (MAS) es un programa diseñado para determinar la operación multiperfódica a costo mínimo de un sistema de distribución de agua con varios vasos y canales.

4.1.- Modelo conceptual

Para usar el programa es necesario construir una red que represente la problemática analizada, lo cual se hace siguiendo los lineamientos establecidos en la sección 5.1 del capítulo 5. En resumen, primero, se debe representar el sistema físico por una configuración nodos-arcos; a continuación, para sistemas multiperfódicos, se construye la red extendida, en donde a cada período de tiempo se le asocia una configuración espacial del sistema, y viceversa.

Esta red extendida no representa todavía completamente el problema, pues el sistema deberá tener inicialmente agua almacenada en los vasos, así como las entradas y las demandas de agua en cada período. Sin embargo, estos requisitos se satisfacen insertando nodos y arcos adicionales. La red completa, incluyendo estas adiciones, se muestra esquemáticamente en la figura 3.

El contenido inicialmente almacenado en los vasos entran al sistema a través de un conjunto de arcos que son conectados a todos los vasos en el primer período de tiempo. Como los datos de almacenamiento inicial son datos de entrada, los flujos en los "arcos de almacenamiento inicial" son fijos. En los demás períodos, las entradas al sistema, son flujos conocidos en cada vaso y entran al sistema a través de un conjunto de arcos de entrada.

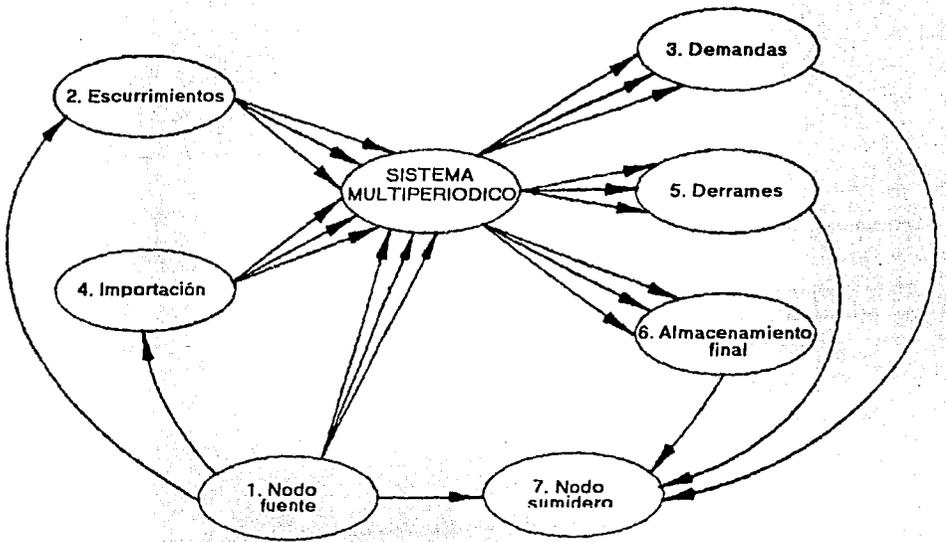


Figura 3. Red del modelo de asignación.

Los arcos de demanda, importación, derrame y almacenamiento final son de flujo variable. Las demandas en el sistema se obtienen por medio de arcos de demanda. Si se requiere agua importada en el sistema, puede entrar por medio de un conjunto de arcos, uno por cada período de tiempo, estos arcos se conectan al mismo nodo en todos los períodos de tiempo. Además, los nodos que son puntos de confluencia o uniones tienen un arco que sale de ellos en todos los períodos de tiempo. Finalmente, los almacenamientos en los vasos, al final del último período de tiempo, dejan el sistema a través de un conjunto de arcos. Los arcos tanto de flujo variable como de flujo fijo, se conectan con siete nodos y cinco arcos adicionales, como se muestra en la figura 3. En suma, hay nueve diferentes tipos de nodos dentro de la red:

- 1.- Un nodo fuente,
- 2.- Un nodo de entradas,
- 3.- Un nodo de demandas,
- 4.- Un nodo de importación,
- 5.- Un nodo de derrames,
- 6.- Un nodo de almacenamiento final,
- 7.- Un nodo sumidero,
- 8.- Nodos que representan vasos,
- 9.- Nodos unión.

El número total de nodos en la red es:

$$N = LN + 7$$

donde L es el número de períodos de tiempo, N es el número de nodos en la red espacial y hay 7 nodos especiales en el problema.

Para conectar estos nueve nodos existen diez diferentes tipos de arcos: río, canal,

almacenamiento, almacenamiento meta, almacenamiento inicial, entrada, demanda, importación, derrame y distribución del agua.

Los arcos de entrada y de almacenamiento inicial tienen cotas inferior y superior iguales. Esto obliga a que las entradas al sistema y el almacenamiento inicial en los vasos sean constantes. Los arcos de demanda poseen cotas inferior y superior que permitan una escasez tolerable y el máximo previsto.

Un arco adicional, llamado arco de flujo auxiliar, se inserta en la red entre el nodo fuente y el nodo sumidero, pues el método de solución usado para solucionar el modelo de asignación requiere que un flujo fijo sea suministrado en el sumidero. Este arco abastece cualquier cantidad de agua requerida en el nodo sumidero que no pueda proveerse a través del sistema.

4.2.- Descripción matemática

La descripción matemática del problema de asignación se expresa a través de las ecuaciones 1 a 4 de la sección 5.3. Las ecuaciones de continuidad para los nodos mencionados en la sección 6.1, con excepción del nodo fuente y del nodo sumidero, son:

Nodo de entrada:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{jk} = x_i$$

Nodo de demanda:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n D_{jk} = X_d$$

Nodo de importación:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \delta_j I_k = X_m$$

Nodo de derrame:

$$\sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^n \theta_j P_{jk} = X_o$$

Nodo de almacenamiento final:

$$\sum_{j=1}^{n_r} \frac{S_{j,L+1}}{\Delta t} = X_f$$

Nodo de vasos:

$$\sum_{i=1}^N Q'_{ijk} - \sum_{i=1}^N Q_{jik} - \theta_j P_{jk} - \frac{S_{j,k+1}}{\Delta t} + \frac{S_{jk}}{\Delta t} + \delta_j I_k + \alpha_{jk} - D_{jk} - \beta_{ij} = 0$$

$$j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, L$$

Nodos de unión:

$$\sum_{i=1}^N Q'_{ijk} - \sum_{i=1}^N Q_{jik} - \theta_j P_{jk} + \delta_j I_k - D_{jk} = 0$$

$$j = n+1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, L$$

donde:

Q'_{ijk} flujo del vaso o nodo de unión j al i en el período k

Q_{ijk} flujo del vaso o nodo de unión i al j
en el período k

P_{jk} nivel de derrame del vaso j en
el período k

S_{jk} almacenamiento en el vaso j al
inicio del período k

I_k tasa de importación de agua en el
período de tiempo k

D_{jk} demanda en el nodo j en el período k

α_{jk} flujo de entrada al nodo j en el
período k

β_{jk} evaporación

$\theta_j = 1$ si j es un nodo de derrame,
 $= 0$ si no lo es

δ_j = 1 si j es un nodo de importación,
= 0 si no lo es

n_r número de vasos

n número de vasos más uniones

N número total de nodos en la red

L número de períodos en la red

k período de tiempo

i, j nodos

La función objetivo, ecuación 1, representa la minimización de los costos por transferir agua a través de la red.

4.3.- Información requerida

Los datos que requiere el programa son físicos relativos al sistema, de uso del agua y económicos.

Estructura del sistema

- 1.- Dimensiones de la red.
- 2.- Lista de arcos que entran en cada nodo.
- 3.- Lista de nodos al final de cada arco.

Nodos

- 1.- Nombre
- 2.- Capacidad máxima de vasos.
- 3.- Capacidad mínima de vasos.

Canales

- 1.- Nombre.
- 2.- Capacidad máxima.
- 3.- Capacidad mínima permitida.
- 4.- Costo unitario de bombeo.
- 5.- Porcentaje de pérdida de flujo.

Costos

- 1.- Unitario por déficit en cada nodo de demanda por período.
- 2.- Unitario por derramar en cada nodo y período.
- 3.- Unitario por importación de agua.

Hidrológicos e hidráulicos

- 1.- Escurrimiento de entrada en cada vaso y período.
- 2.- Volumen de agua demandado en los nodos correspondientes, para cada período.
- 3.- Lámina de evaporación en cada vaso y período.

Simulación

- 1.- Delimitación de períodos de tiempo y número de años de simulación.
- 2.- Lista de nodos donde puede haber derrames.

- 3.- Distribución estacional y suma total de agua de importación disponible.
- 4.- Fracción de la capacidad máxima de los vasos a usarse como almacenamiento inicial al empezar la simulación.

4.4.- Costos

En esta red, los arcos que representan canales o tuberías y los canales de demanda son los únicos tipos de arcos que tiene costos asociados. En los arcos asociados a canales la unidad de costo representa el costo de la energía necesaria para bombear una unidad de flujo; mientras que en los arcos de demanda existe una unidad de costo negativa asociada con cada unidad de déficit. Los demás arcos no incluyen ningún tipo de costos. No obstante, para prever que los vasos derramen cuando no sea posible almacenar más agua, se asigna un costo unitario al agua derramada por el sistema.

4.5.- Capacidades y limitaciones

El modelo de redes planteado en el programa de asignación tiene la habilidad de "ver" hacia adelante en el tiempo, específicamente, si se resuelve una red con n períodos y sucede que existe un período crítico de sequía cuya duración es de s períodos ($s < n$), entonces el modelo puede prever tal período; almacenando agua antes de la ocurrencia del período crítico y asignándola cuando más se requiere. Por esto resulta conveniente resolver redes con un número de períodos mayor que el número de períodos de sequía históricos del sistema.

El programa puede utilizarse como herramienta en la planeación de los sistemas de aprovechamientos hidráulicos, para determinar el tamaño y período de construcción de vasos y canales y el tamaño de tuberías, aplicándose en combinación con otros

programas (43). Además, este tipo de modelos de redes tiene una amplia aplicación en problemas de planeación financiera y de generación y distribución de energía eléctrica.

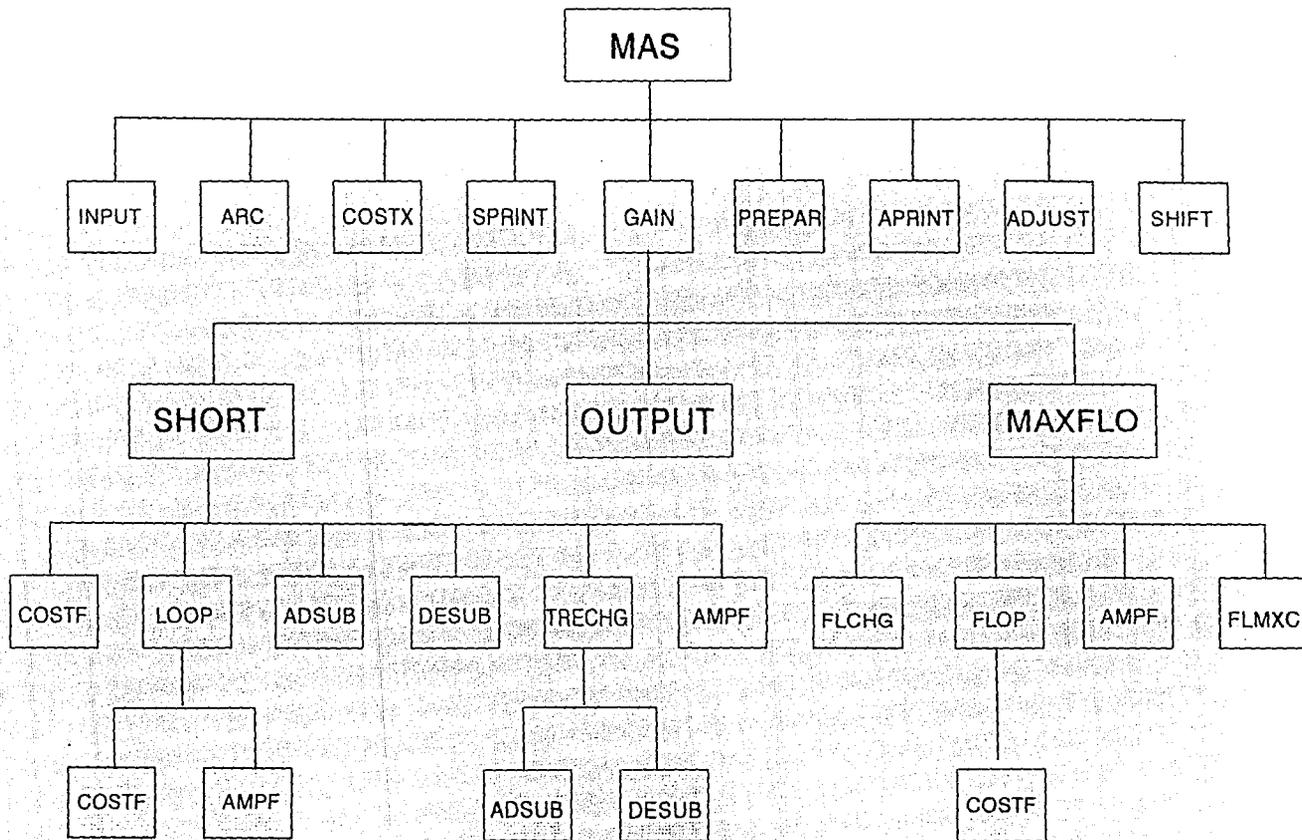


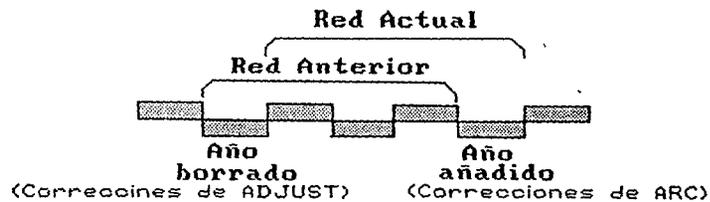
Figura 4.- Diagrama de interacción entre subprogramas.

4.6.- Estructura del programa.

La solución del modelo de asignación se realiza con la combinación de los algoritmos de trayectoria a costo mínimo y de flujo máximo de la teoría de redes, por medio del programa "MAS", que consta de un programa principal y 20 subrutinas, cuya estructura se presenta en la figura 4.

El programa principal lee los datos generales del sistema (INPUT), la subrutina ARC construye la red, define los parámetros de los arcos y los arcos de balance neto. El problema de asignación es resuelto en la subrutina GAIN, por medio de la subrutina SHORT que establece la trayectoria de costo mínimo, y la subrutina MAXFLO que examina la trayectoria a costo mínimo actual y determina el flujo máximo (de fuente a sumidero) y que a su vez usa la subrutina OUTPUT la cuál termina si el total del flujo es igual al requerido. Para eliminar un año y añadir otro, es decir, borrar un año de la red e inicializar los flujos para cada año que entra a la red, se hace también con la subrutina ARC que como se mencionó ajusta los arcos de balance y actualiza los datos de los arcos y nodos cuando se añade un año (SHIFT). Finalmente, la subrutina APRINT calcula los costos asociados con los flujos e imprime los resultados periódicos en toda la red.

Cuando el número de períodos (meses o bimestres) en que se divide el año es muy grande, el resultado del algoritmo solo podrá utilizarse por partes, esto es, el problema se irá resolviendo en forma parcial; estos resultados serán óptimos para el primer o primeros años. Así, primero se resuelve para un número de años menor que el período de simulación, se quita el año inicial de este período y se agrega otro al final del período, y así sucesivamente hasta el final del período de simulación (figura 5).



Actualización de la red

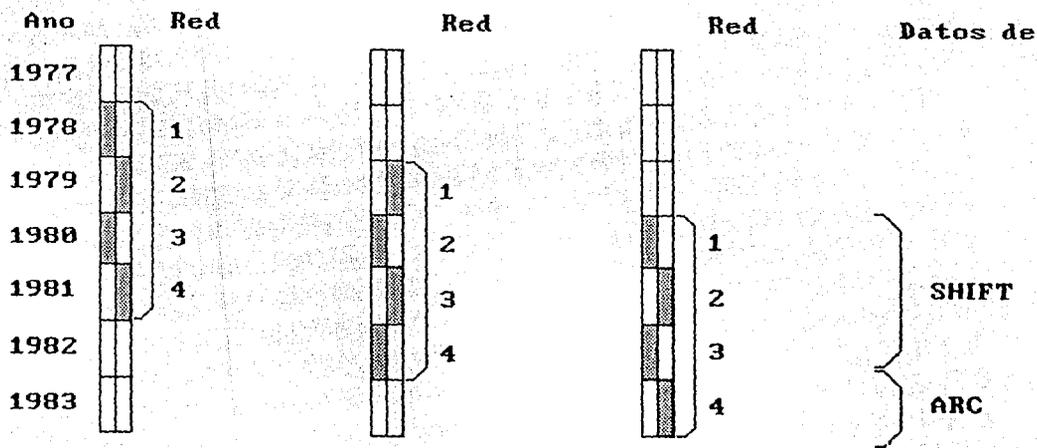


Figura 5.- Ejemplos de actualización de la red

Acuíferos

Los acuíferos se manejan de dos maneras: declararlos como vasos con entrada constante (recarga) o incorporarlos a un nodo unión declarando la recarga del acuífero como un flujo de oferta en dicho nodo.

Adecuación

El programa "MAS" fue codificado inicialmente en lenguaje FORTRAN IV para ejecutarse en una computadora CYBER 3600-70/72 UNIVAC 1106. Este programa se modificó para ejecutarse tanto en una computadora tipo PC como en la CYBER 930 del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua; además, se amplió su capacidad para resolver una red más grande que puede integrarse de hasta 40 nodos, 45 arcos, 12 períodos por año, 20 puntos de derrame y un período de simulación de 40 años.

Resultados

Con el programa se obtiene la siguiente información:

- Niveles de almacenamiento en cada vaso y en cada período.
- El valor de los déficits de agua en los vasos (si existe) en cada período.
- Derrame en cada vaso, para cada período y su correspondiente promedio anual.
- El flujo máximo registrado en cada arco en el período de simulación realizado.

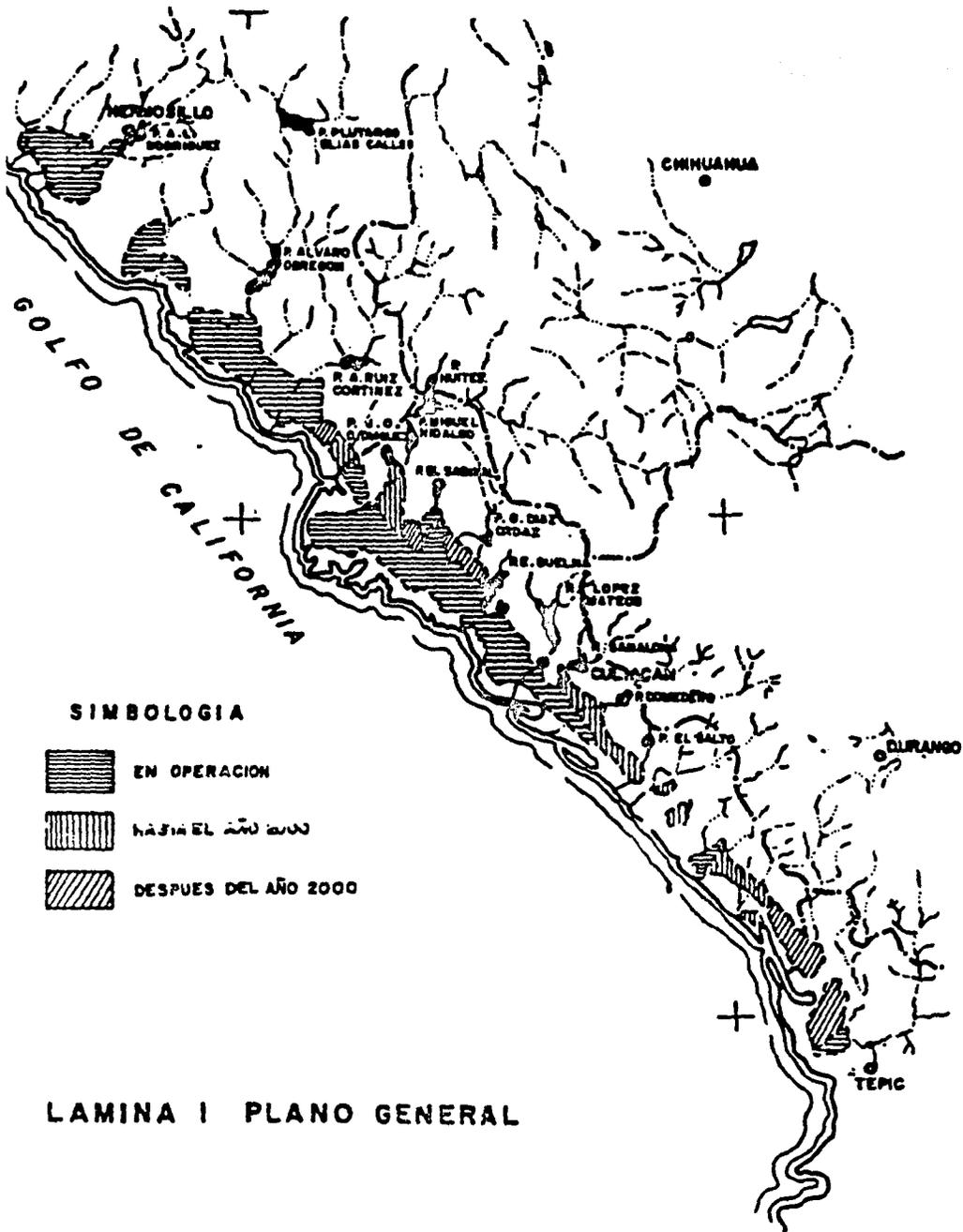
5.- APLICACIÓN DEL MODELO DE ASIGNACIÓN

La aplicación del programa mencionado se hará en el Sistema Hidráulico Integrado del Noroeste, con objeto de analizar la operación-distribución del sistema en su conjunto para su primera fase. Además, se aplica el programa de asignación de recursos al subsistema Culiacán-Humaya-Mocorito para estimar las políticas de operación de las presas Sanalona, Adolfo López Mateos y E. Buelna y el uso de estas políticas, tomando en consideración traspasos de agua constantes de la presa Adolfo López Mateos a las zonas de Culiacán y Mocorito bajo la premisa de tener déficits tolerables en Humaya.

5.1.- Sistema Hidráulico Interconectado del Noroeste.

El Sistema Hidráulico Interconectado del Noroeste- SHINO- se localiza en el noroeste de la República Mexicana y a su terminación comprenderá la mayor parte de los estados de Nayarit y Sinaloa y el sur de Sonora. En la primera fase del SHINO, las acciones y el sistema de interconexión en su conjunto se realizarán en el área comprendida entre la margen izquierda del río Baluarte en Sinaloa, hasta la zona de riego del río Yaqui en Sonora (lamina 1).

Para éste sistema se han generado proyectos que en conjunto incorporan 520000 hectáreas nuevas en dicha zona; además, se cuenta con los estudios de factibilidad de proyectos que permitirán incrementar la superficie bajo riego en 223000 has y la superficie cosechada en 401000 ha ubicadas hacia el norte del río Baluarte; también, se han estudiado las alternativas para mejorar la producción agrícola de riego en las 976052 ha que actualmente se encuentran bajo riego en los 7 distritos de riego que componen el área.



Fisiografía

Por su ubicación, la topografía del área que comprende el proyecto es casi plana en su mayor parte. El 80% de la superficie presenta una pendiente suave hacia la costa donde se localizan las zonas de riego existentes así como la mayor parte de las áreas susceptibles de incorporarse al riego. En el resto de la superficie se presentan pendientes que van del 2% al 20% incrementándose en las estribaciones de la Sierra Madre Occidental.

Agua superficial

El área total de las cuencas, desde el río Baluarte hasta el río Yaqui, sobrepasa los 185532 km² y tiene un escurrimiento medio anual de 22416 Mm³. Por su importancia sobresalen los ríos Culiacán, Fuerte y Yaqui, cuyas aportaciones en conjunto representan el 46% del escurrimiento; en el río Fuerte se han presentado escurrimientos equivalentes al 50% del total de la región. Del escurrimiento total, se utiliza un volumen de aproximadamente 10682 Mm³ para riego, por lo que se estima que se tiene una disponibilidad de agua superficial de poco más de 11734 Mm³.

Acuíferos

En general la calidad del agua de los acuíferos es buena, exceptuando aquella atrapada en depósitos evaporíticos comunes a todos los acuíferos costeros. Se cuenta con 800 pozos cuyo volumen de extracción anual es de 1100 Mm³.

La recarga media anual de agua subterránea estimada en el área de estudio es de 1696 Mm³. La extracción asciende a 980 Mm³ y el almacenamiento estimado, incluyendo los valles del Yaqui y el Mayo, es de 16300 Mm³. Localizándose el 62% de esa recarga total en el estado de Sinaloa y el resto en los acuíferos de los valles del

Yaqui y Mayo. Debido al alto potencial de aguas superficiales en el estado de Sinaloa, solo se utiliza el 5% de aguas subterráneas, mientras que en el sur del estado de Sonora se utiliza el 30% para uso agrícola. Por tanto, existe disponibilidad de agua subterránea en el estado de Sinaloa.

En términos generales, se puede establecer que existe un volumen de agua aprovechable de unos 13000 Mm³ al año, suficiente para regar las cerca de un millón de hectáreas que conforman al SHINO.

5.2.- Sistema actual.

Por lo que se refiere a la infraestructura hidráulica existente en la región del proyecto, esta se compone de 12 presas de almacenamiento, 12 presas derivadoras y más de 11980 Km de canales, que abastecen a los 7 grandes sistemas de riego que existen en la zona. Además, se cuenta con 4 presas de almacenamiento para pequeños desarrollos agrícolas.

La zona de Culiacán-Humaya-San Lorenzo (255000 ha) cuenta con tres presas de almacenamiento: José López Portillo, Sanalona y Adolfo López Mateos con capacidades útiles de 2100, 804 y 2400 Mm³ respectivamente y abastecen al riego por medio de las derivadoras: San Lorenzo, Culiacán y A. Weiss, esta última, también deriva parcialmente hacia el área de Güamuchil, para auxiliar a la presa Eustaquio Buelna con capacidad útil de 133 Mm³ y conjuntamente regar 36000 ha.

La presa Gustavo Díaz Ordaz con capacidad útil de 1720 Mm³ atiende, con apoyo de la derivadora Sinaloa de Leyva, la zona de riego de Guasave, que comprenderá a su terminación una superficie cultivable de 105000 ha.

La presa Miguel Hidalgo con capacidad útil de 3190 Mm³ satisface, con auxilio de las

derivadoras Sufragio y Cahuinahua las demanda de 223000 ha de la zona de riego del Fuerte. Además, transfiere volúmenes importantes a la presa Josefa Ortiz de Domínguez, cuya capacidad útil es de 463 Mm³, para el riego de 42800 has del valle El Carrizo.

La presa Adolfo Ruiz Cortínez con capacidad útil de 969 Mm³, se auxilia de las derivadoras Tesia y Bacobampo para surtir agua a 92000 ha de la zona de riego del valle del Mayo. Las 220000 has del valle del Yaqui se satisfacen con tres presas, con una capacidad útil agregada de 5149 Mm³.

5.3.- Área de estudio.

En el largo plazo, las acciones de apertura de nuevas tierras al riego, así como la consolidación de las ya existentes, así como las que plantean los proyectos de modernización tendientes al aprovechamiento de los recursos hidráulicos, desde el río Santiago en Nayarit hasta el valle de Güaymas en Sonora, comprenden 5 zonas. Para este estudio como primera fase del SHINO se considerarán las siguientes:

La primera zona es la denominada Acaponeta-Presidio-San Lorenzo, que se extiende a lo largo de 235 km desde el río Acaponeta en Nayarit hasta el río San Lorenzo en Sinaloa. Incluye la construcción de las presas Cucharas en el río Acaponeta, Santa María en el Baluarte, Picachos en el Presidio, Zábila en el Quelite y Las Juntas en el Piaxtla, además de la presa El Salto en el Elota y de las obras de conducción. Comprende asimismo la incorporación de 76000 has nuevas de riego en los proyectos El Quelite, Coyotitán, Concordia, El Chele y Elota-Piaxtla, además de atender las 105000 has de Culiacán (alto y bajo) y 59000 ha de San Lorenzo.

La siguiente zona llamada San Lorenzo-Tamazula-Humaya que se extiende a lo largo de 250 km desde la derivadora Santa Cruz en el río San Lorenzo hasta el canal valle del

Fuerte. Contempla la interconexión de los caudales controlados en las presas Comedero, Sanalona, Adolfo López Mateos y Eustaquio Buelna ya en operación, y la sobreelevación y prolongación del canal Humaya, así como la construcción de la zona de riego Alto San Lorenzo para beneficio de 25000 ha. Además se atenderían las zonas de riego del Humaya, Mocorito y parcialmente Gúasave y valle del Fuerte.

En el sistema Sinaloa-Fuerte-Mayo que se extiende desde el río Sinaloa hasta la zona denominada Fuerte-Mayo en el sur de Sonora. Comprende las presas Huites en el río Fuerte y las Higueras en Sinaloa. Asimismo se incluye la construcción de la zona de riego Alto Sinaloa, Alto Mocorito y Fuerte-Mayo 1a y 2a, etapa para beneficio de 170000 ha; también se atenderían las zonas de Gúasave, valle de Fuerte y valle del Carrizo.

5.4.- Aplicación del programa a la primera fase del S.H.I.N.O.

El sistema considerado esta formado por 12 presas: Picachos, Zábila, Las Juntas, El Salto, Comedero, Sanalona, Adolfo López Mateos, E. Buelna, Bacurato, Miguel Hidalgo, Huites y Josefa Ortiz. También, 14 zonas de riego: Siqueiros, Quelite, Piaxtla, Elota, San Lorenzo, Alto San Lorenzo, Culiacán, Humaya, Mocorito, Sinaloa, Alto Sinaloa, El Fuerte, El Carrizo y Fuerte-Mayo 1a etapa. Así como 32 canales o ríos. Este sistema se representó mediante una red, la cuál se muestra en las figuras 6a, 6b y 6c.

El propósito que se persiguió al aplicar el modelo de asignación (MAS) al Sistema Hidráulico Interconectado del Noroeste (SHINO) fue el de observar el funcionamiento total del sistema para las condiciones de operación sin considerar la disponibilidad del agua subterránea en la región considerada. Se presentan los derrames, déficits y gastos medios y máximos que pasan por los arcos del sistema para las condiciones de operación mencionadas.

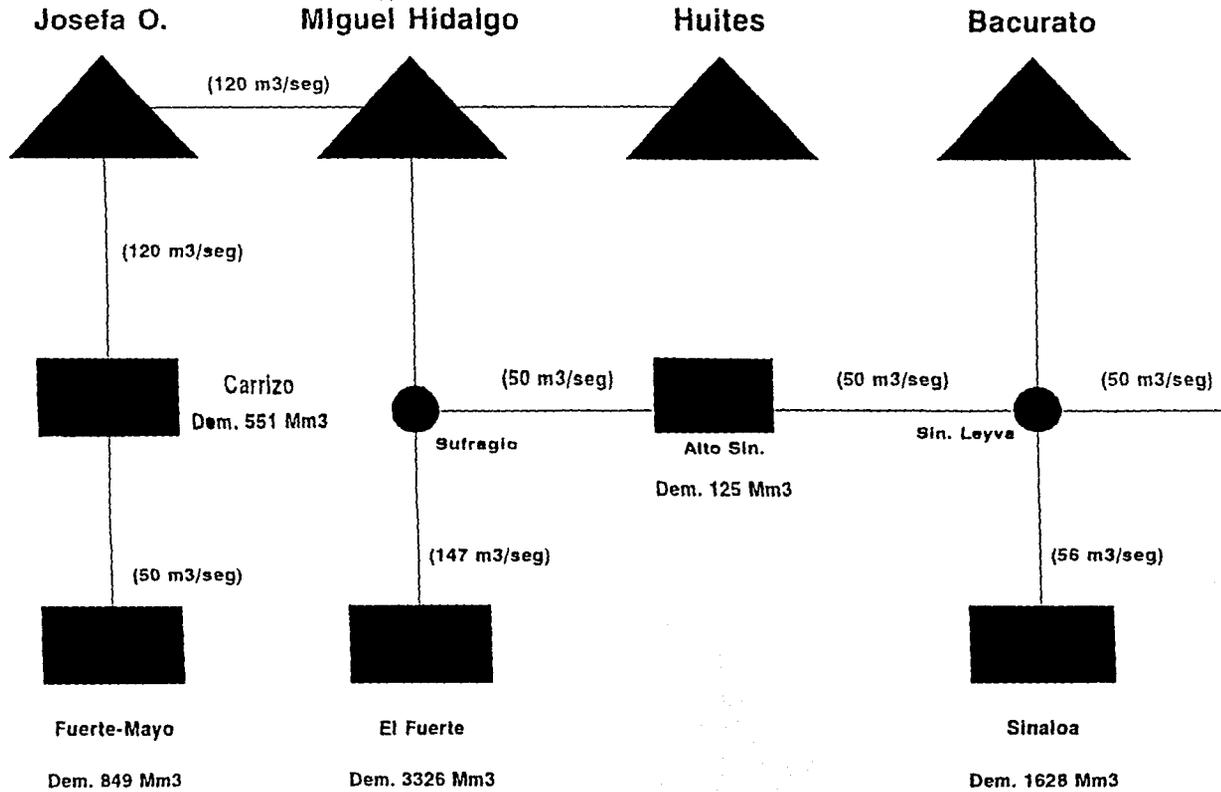


Figura 6a

SISTEMA CULIACAN-HUMAYA-MOCORITO

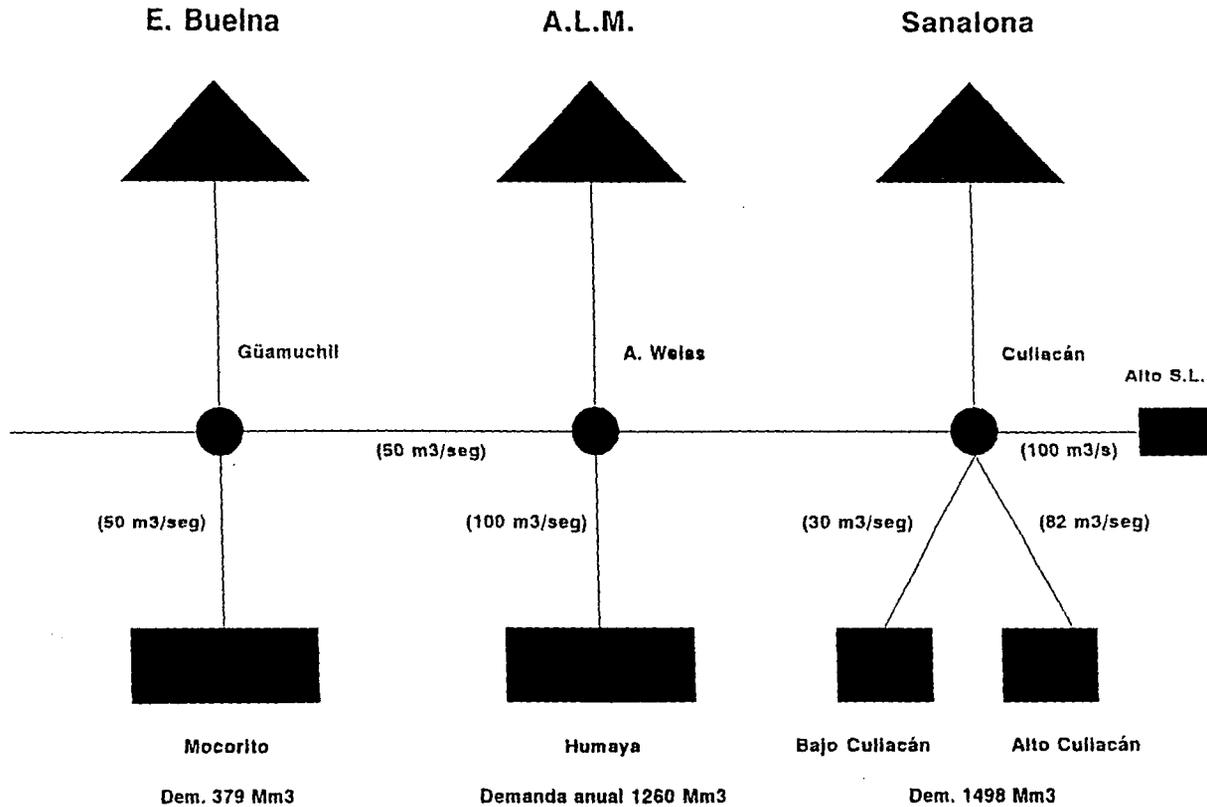


Figura 6b

SISTEMA SIQUEIROS-SAN LORENZO

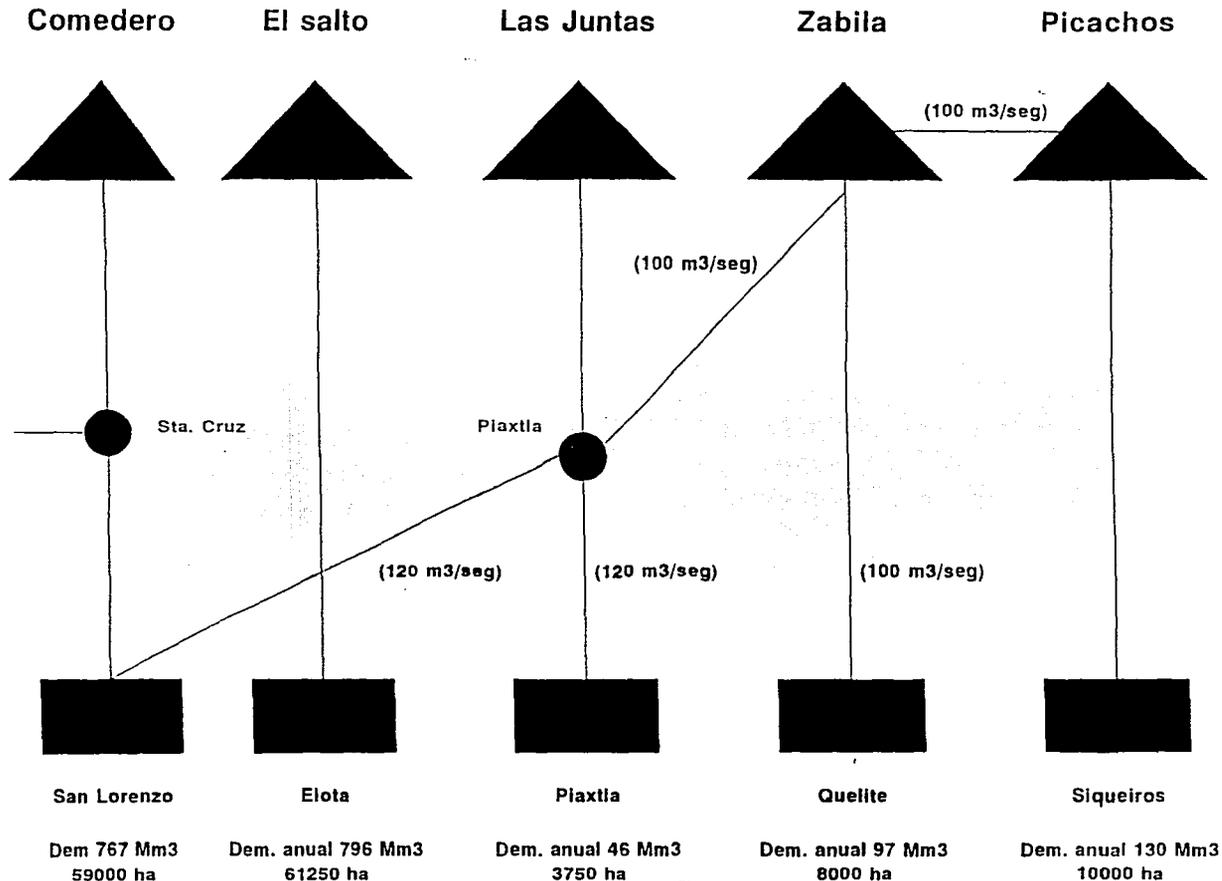


Figura 6c

5.4.1.- Datos del programa.

Los datos principales que requirió el programa MAS para su aplicación en el área que abarca el SHINO, fueron los siguientes:

a) Capacidad de los vasos

Presa	Volumen muerto (Mm³)	Capacidad máxima (Mm³)
Picachos	343	1243
Zábila	10	176
Las Juntas	10*	176*
El Salto	60	415
Comedero	700	2800
Sanalona	41	845
A. L. M.	48	3150
E. Buelna	17	150
Bacurato	80	1800
Huites	238	2900
Miguel Hidalgo	100	3290
Josefa Ortíz	22	485

*Suponiendo los mismos datos de Las Juntas para Zábila.

Se consideró inicialmente para todas las presas un almacenamiento, al principio de la simulación, del 75% de su capacidad útil, sin embargo se hicieron otras corridas con distintas capacidades iniciales con el objeto de observar el comportamiento del sistema, al variar este parámetro.

b) Escurrimientos de entrada a los vasos

Los volúmenes de entrada a los vasos se tomaron de los escurrimientos históricos registrados durante el período 1949-1978, en las estaciones hidrométricas aguas arriba del vaso o cuando fue posible de las estaciones que están aguas abajo. Así, se simuló un período de 30 años y cada año con 12 períodos (meses).

Como se mencionó las aportaciones de los acuíferos ubicados en la zona de estudio no se incluyeron.

c) Costos

Para las presas del sistema no se consideraron costos de inversión, debido a que no se disponía de esta información, de manera que se consideraron que todas se encuentran construidas. En cuanto a los costos de construcción de canales tampoco fueron incluidos y se supuso ya construidos. Debido a que el programa toma en cuenta los costos por transferir el agua de un punto del sistema a otro, es necesario introducir al mismo algunos parámetros económicos. Sin embargo, los costos que se metieron al programa no son estrictamente reales ya que solo se pretendía obtener la operación del sistema en su conjunto. Así, los costos por derrame se consideraron muy grandes para simular que el agua abandona el sistema. Los beneficios por almacenamiento en las presas se consideró igual en todos los vasos; y el costo por déficit de agua en las zonas de riego se tomó constante, para no establecer preferencias en el uso del agua por algún distrito de riego.

d) Demandas

Las demandas anuales de los distrito de riego fueron:

Distrito de riego	Demanda anual (Hm³)
Piactla	45.5
Siqueiros	130
Quelite	97.0
Elota	796.0
San Lorenzo	767.0
Alto San Lorenzo	325.0
Culiacán	1498.4
Humaya	1260.0
Mocorito	379.9
Sinaloa	1628.3
El Fuerte	3326.4
Carrizo	551.0
Alto Sinaloa	125.0
Fuerte-Mayo (1 a y 2a)	649.0

Finalmente se suministraron al programa los datos de escurrimientos, demandas y evaporaciones registrados durante el período 1949-1978.

5.4.2.- Resultados obtenidos

Con todos los datos antes mencionados se efectuaron varias corridas. En la tabla 1 se muestran los déficits asociados a cada una de las zonas de riego. Se observa que las deficiencias en la entrega de agua se presentan durante todos los años de simulación en la zona de riego Elota, acentuándose en los años 3, 9, 18 y 24; en el año 5 en las zonas Alto San Lorenzo y Humaya, y en el año 6 en las zonas Elota, Siqueiros y Quelite, en las dos últimas los déficits son de casi el 100% ; en el año 10 en las zonas Siqueiros, Quelite, Piaxtla, Elota, San Lorenzo, Culiacán y Alto San Lorenzo. Para todos los demás años de la simulación no se presentan déficits considerables; más aún del año 11 de la simulación en adelante solo en la zona Elota se presentan déficits.

Los resultados de los derrames ocurridos en el sistema durante el período de simulación se presentan en la lámina 2, y nos indican que en el sistema esta derramando agua porque el costo por tirarla es pequeño y por tanto no tiene punto de comparación entre tirarla o guardarla para los años futuros de la simulación.

Los valores de los flujos máximos, asociados a en cada uno de los ríos o canales que integran al sistema, no alcanzan el valor de su respectiva capacidad máxima, para cada período (mes) de cada año de simulación; luego puede pensarse que las capacidades de diseño de los canales propuestos en los estudios son adecuadas.

Tabla 1.- Déficit en zonas de demanda del SHINO

año	zona	% medio anual	año	zona	% medio anual	año	zona	% medio anual
1	24	57	9	24	70	18	24	72
1	30	6	9	30	6	18	30	6
2	24	67	10	21	81	19	24	56
2	30	6	10	22	77	19	30	6
3	24	95	10	23	77	20	24	46
3	30	6	10	24	91	20	30	6
4	24	71	10	25	68	21	24	52
4	30	6	10	26	52	21	30	6
5	24	45	10	27	62	22	24	69
5	26	12	10	28	2	22	30	6
5	27	48	10	29	3	23	24	57
5	28	44	10	30	7	23	30	6
5	29	22	10	34	6	24	24	66
5	30	6	11	24	46	24	30	6
6	21	8	11	30	6	25	24	37
6	22	95	12	24	61	25	30	6
6	23	94	12	30	6	26	24	57

6	24	67	13	24	53	26	30	6
6	26	6	13	30	6	27	24	46
6	29	1	14	24	48	27	30	6
6	30	7	14	30	6	28	24	57
6	34	6	15	24	47	28	30	6
7	24	57	15	30	6	29	24	46
7	30	7	16	24	46	29	30	6
7	34	6	16	30	6	30	24	50
8	24	54	17	24	59	30	30	6
8	30	6	17	30	6			

Tabla 2.- Derrames (Mm³) en cada uno de los vasos del SHINO

año	vaso	jul.	ago.	sep.	año	vaso	jul.	ago.	sep.
1	1	0	0	963	18	7	0	0	1038
1	2	0	0	655	18	12	0	0	231
1	3	0	252	41	18	17	0	0	199
1	11	803	0	0	18	18	0	60	0
1	12	254	375	238	18	19	0	0	235
1	13	297	0	0	18	20	0	4717	4389
1	17	19	950	199	19	1	0	531	273
1	18	18	0	0	19	3	0	0	213
1	19	0	0	437	19	12	0	198	209
1	20	0	1697	4568	19	17	15	37	99
2	1	320	457	426	19	20	0	0	3073
2	2	0	0	623	20	1	0	387	1017
2	11	307	647	0	20	2	98	156	792
2	12	236	208	222	20	3	282	0	355
2	17	0	46	134	20	4	0	0	333
2	20	0	0	3124	20	5	1051	478	140
3	3	0	0	117	20	6	231	721	156
4	11	0	0	540	20	11	2194	3256	0

4	12	0	0	219	20	12	252	307	238
5	12	0	0	527	20	13	588	0	0
5	20	0	0	127	20	17	344	2757	308
6	12	0	0	224	20	19	0	0	507
6	20	0	0	2245	20	20	0	0	4295
7	1	0	0	299	21	1	0	64	8
7	4	0	0	39	21	3	0	0	50
7	11	0	603	0	21	3	0	0	50
7	12	0	360	213	21	11	0	0	1705
7	20	0	0	3423	21	12	0	0	209
8	12	0	0	216	22	1	175	340	536
8	20	0	0	702	22	2	182	0	784
10	1	0	325	654	22	6	0	136	0
10	2	0	0	973	22	12	0	0	220
10	3	0	0	41	22	20	0	0	2779
10	4	0	87	141	23	1	0	440	136
10	12	0	0	252	23	3	4	0	185
10	20	0	0	3237	23	12	0	123	220
11	1	39	13	300	23	13	107	0	0
11	11	0	1069	0	23	20	0	0	2471
11	12	0	262	215	24	1	0	83	132

11	17	0	0	54	24	11	0	1361	0
11	18	0	63	0	24	12	118	290	221
11	20	0	0	3118	24	19	0	0	289
12	10	0	0	494	24	20	0	0	5000
12	11	0	795	0	25	1	477	730	399
12	12	0	214	226	25	2	220	521	113
12	20	0	0	5000	25	3	18	0	317
13	1	607	507	448	25	4	0	0	25
13	2	0	496	352	25	5	522	0	0
13	4	0	0	122	25	6	0	679	0
13	6	115	347	0	25	7	0	474	0
13	12	0	195	213	25	11	0	2828	0
13	17	18	1297	199	25	12	55	247	221
13	19	0	0	400	25	17	18	0	1534
13	20	0	0	4462	25	19	0	0	386
14	1	0	0	17	25	20	0	0	4402
14	12	0	0	223	26	1	0	221	347
14	20	0	0	2289	26	12	0	17	247
15	1	276	336	232	26	20	0	0	3884
15	2	49	299	135	27	1	408	408	145
15	3	0	0	328	27	2	217	340	0

15	4	0	0	184	27	3	0	0	334
15	11	0	170	0	27	4	0	0	35
15	12	0	301	218	27	11	0	1206	0
15	17	89	105	68	27	12	0	244	220
15	19	0	0	18	27	17	0	0	230
15	20	0	0	4177	27	19	0	0	24
16	1	321	187	444	27	20	0	0	4832
16	2	0	228	0	28	1	0	0	42
16	3	0	0	354	28	20	0	0	1101
16	6	0	249	0	29	1	142	278	144
16	11	0	682	4505	29	2	120	21	0
16	12	0	222	218	29	3	0	0	307
16	17	0	795	199	29	4	0	0	25
16	19	0	0	151	29	11	0	370	0
17	20	0	0	813	29	12	0	246	223
18	1	126	748	400	29	19	0	0	76
18	2	0	318	47	29	20	0	0	3291
18	3	0	259	295	30	1	3	162	283
18	4	0	0	128	30	4	0	0	122
18	5	0	160	0	30	11	0	0	2989
18	6	0	845	0	30	12	0	0	246

NUMERO ASOCIADO A LOS VASOS

- 1 LAS JUNTAS
- 2 PICACHOS
- 3 ZABILA
- 4 EL SALTO
- 5 COMEDERO
- 6 SANALONA
- 7 ADOLFO LOPEZ MATEOS
- 8 E BUELNA
- 9 BACURATO
- 10 HUITES
- 11 MIGUEL HIDALGO
- 12 JOSEFA ORTIZ DE DOMINGUEZ

NUMERO ASOCIADO A LAS DERIVADORAS

- 13 PIAXTLA
- 14 SAN LORENZO
- 15 STA. CRUZ
- 16 JOTAGUA
- 17 A WEISS
- 18 GUAMUCHIL
- 19 SIN. LEYVA
- 20 SUFRAGIO

NUMEROS ASOCIADOS A LAS ZONAS DE RIEGO

- 21 ZR PIAXTLA
- 22 ZR SIQUEIROS
- 23 ZR QUELITE
- 24 ZR ELOTA
- 25 ZR SAN LORENZO
- 26 ZR CULIACAN
- 27 ZR ALTO SINALOA
- 28 ZR HUMAYA
- 29 ZR MOCORITO
- 30 ZR SINALOA
- 31 ZR FUERTE
- 32 ZR CARRIZO
- 33 ZR FM1
- 34 ZR FM2
- 35 ZR ALTO SINALOA
- 36 ZR V. FUERTE

NUMEROS ASOCIADOS A LOS RIO O CANALES

- 1 R. PIC-SIQ
- 2 C. PIC-ZAB
- 3 C. ZAB-QUE
- 4 C. ZAB-DPI
- 5 R. PIA-DPI
- 6 C. DPI-PIA

- 7 R. SAL-ELO
- 8 C. DPI-PUN
- 9 C. SAL-PUN
- 10 C. PUN-SLZ
- 11 C. SLZ-CUL
- 12 R. COM-CRU
- 13 R. CRU-SLZ
- 14 C. CRU-ASL
- 15 C. ASL-JOT
- 16 R. PSA-JOT
- 17 R. JOT-CUL
- 18 C. JOT-WES
- 19 R. ALM-WES
- 20 C. WES-HUM
- 21 R. WES-CUL
- 22 C. WES-GUA
- 23 R. BUE-GUA
- 24 C. GUA-MOC
- 25 C. GUA-LEY
- 26 R. BAC-LEY
- 27 C. LEY-SIN
- 28 C. LEY-ASI
- 29 C. ASI-SUF
- 30 R. HUI-MHC
- 31 C. SUF-FUE
- 32 C. MHC-JOD
- 33 C. JOD-CAR
- 34 C. CAR-FM

5.4.3.- Aplicación del modelo de asignación al sistema Culiacán-Humaya-Mocorito.

Otro aspecto importante de este estudio fue el de observar el funcionamiento conjunto del sistema compuesto por las zonas de riego Alto y Bajo Culiacán, Humaya y Mocorito, regados con las presas Sanalona, Adolfo López Mateos y E. Buelna, respectivamente; y auxiliadas por las derivadoras Culiacán, A. Weiss y Güamuchil. En este caso se determinó con la simulación del programa "MAS" la política conjunta de los vasos involucrados, de tal manera que con déficits tolerables en la zona de riego de Humaya, se realizara el traspaso de agua constante, a las zonas de riego Culiacán y Mocorito.

La geometría de este sistema con sus características de demanda y de interconexión de vasos, canales, ríos y acuíferos, y cotas de canales se presenta en la figura 7.

La operación del sistema se simuló para 24 años, en un período que abarca de 1955 a 1978. Para la simulación, de los 30 años de datos de escurrimientos de la presa Adolfo López Mateos que originalmente se tenían se quitaron 6 años del año 2 al año 7 porque sus escurrimientos estaban aproximadamente 40% abajo del escurrimiento medio anual de ese período que es de 143.89 Mm^3 y que constituía un época de sequía. Así, se simuló el sistema para 24 años. Dando como resultado una política de operación conjunta como la que se muestra en la figura 8; en la cuál se tienen transferencias anuales constantes de 271 Mm^3 y de 134 Mm^3 a las zonas de Culiacán y Mocorito, respectivamente. Y teniéndose déficits en la zona de riego de Humaya a lo más del 4.5% de su demanda anual.

5.4.3.1.- Resultados

En la tabla 3, se presentan los déficits del sistema para cada mes en todos los años de la simulación, de donde se nota que de los acuíferos en promedio se usa el 90% de la recarga anual. Los derrames se muestran en la tabla 4, y se observa que prácticamente el sistema no derrama. Los gastos máximos mensuales de cada año de simulación para cada canal no rebasan las capacidades máximas de estos.

SISTEMA CULIACAN-HUMAYA-MOCORITO

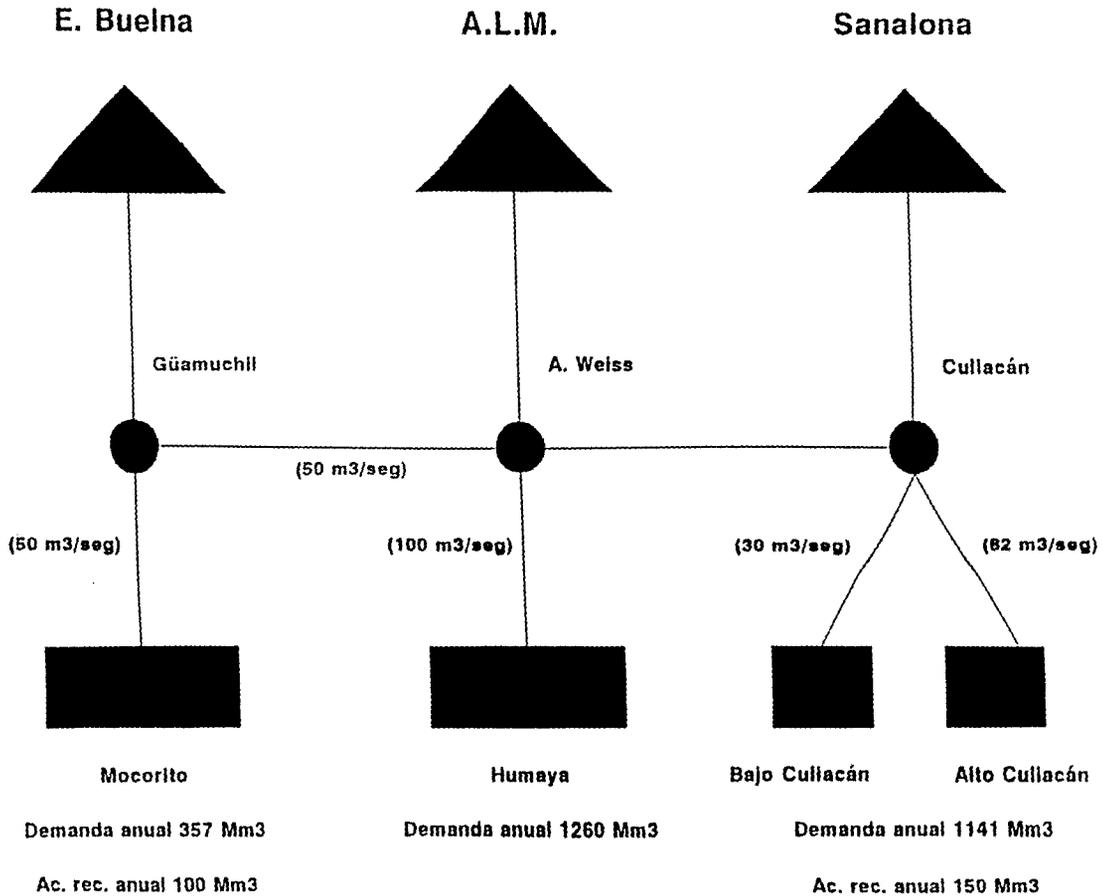


Figura 7

PRESA ADOLFO LOPEZ MATEOS

Política de operación

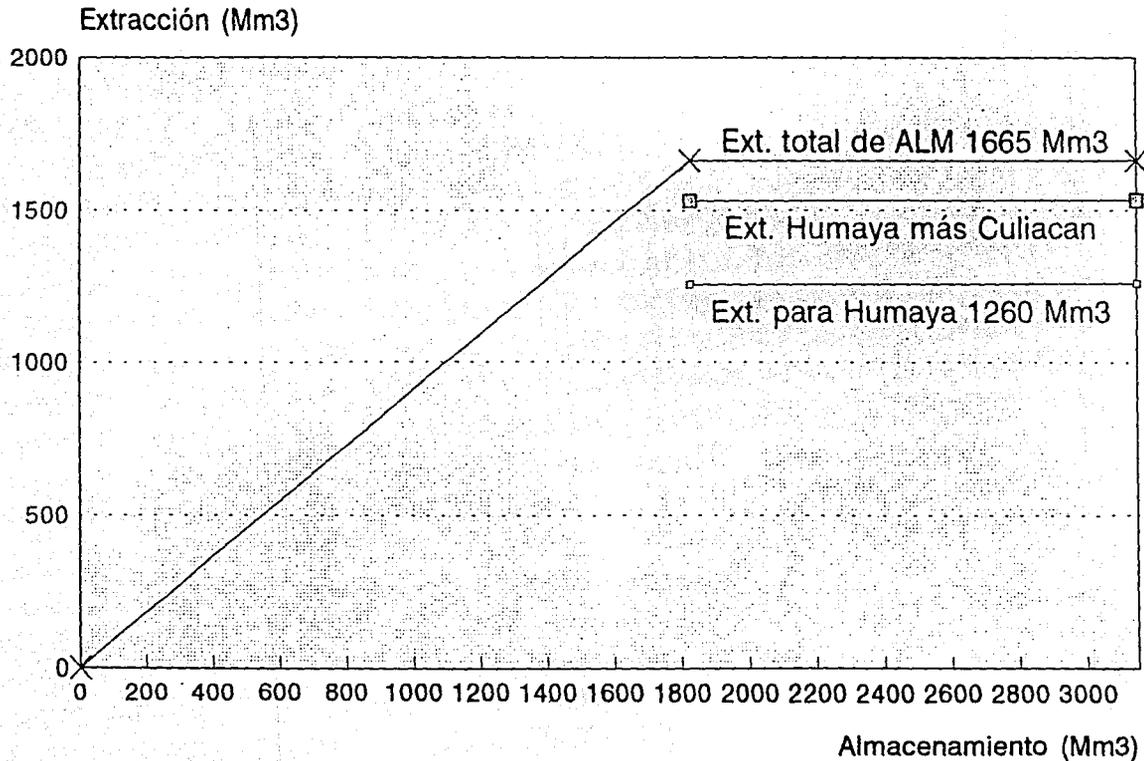


Figura 8

Tabla 3.- Déficit en zonas del sistema Culiacán-Humaya-Mocorito

año	zona	% medio anual	año	zona	% medio anual	año	zona	% medio anual
1	7	26	10	10	1	18	8	1
1	8	5	11	7	37	18	10	1
2	7	24	11	8	17	19	7	21
2	8	1	11	10	15	19	8	1
3	7	9	12	7	10	19	10	22
4	7	1	12	8	1	20	7	34
5	7	18	12	10	15	20	8	23
5	8	1	13	7	13	20	10	15
6	7	30	13	8	1	21	7	34
6	8	26	13	10	2	21	8	23
6	10	1	14	10	10	21	10	42
7	7	1	15	7	37	22	7	54
7	10	9	15	8	17	22	8	42
8	7	17	15	10	29	22	10	12
8	8	1	16	7	12	23	7	39

8	10	3	16	8	1	23	8	23
9	7	5	16	10	36	23	10	11
9	10	8	17	7	11	24	7	14
10	7	15	17	10	10	24	8	1
10	8	1	18	7	18	24	10	28

NUMEROS ASOCIADOS A LOS VASOS

- 1 SANALONA
- 2 ADOLFO L M
- 3 E. BUELNA

NUMEROS ASOCIADOS A LAS DERIVADORAS

- 4 CULIACAN
- 5 A. WEISS
- 6 GUAMUCHIL

NUMEROS ASOCIADOS A LAS ZONAS DE RIEGO

- 7 ZR ALTO CULIACAN
- 8 ZR BAJO CULIACAN
- 9 ZR HUMAYA
- 10 ZR MOCORITO

NEMEROS ASOCIADOS A LOS RIOS O CANALES

- 1 R. PSA-DCU
- 2 C. DCU-ACU
- 3 C. DCU-BCU
- 4 R. ALM-WES
- 5 R. WES-DCU
- 6 C. WES-HUM
- 7 C. HUM-GUA
- 8 R. BUE-GUA
- 9 C. GUA-MOC

año	vaso	oct.	nov.	feb.	abr.	jul.	ago.	sep.
1	2	0	0	0	32	0	1111	0
1	3	7	0	0	0	0	0	0
1	6	0	0	0	0	0	86	0
2	2	175	0	0	0	0	0	0
6	3	10	0	0	0	0	0	0
7	2	0	0	0	0	0	13	0
8	2	122	40	0	0	0	0	0
8	4	0	6	0	0	0	0	0
12	2	0	0	0	0	0	511	0
13	2	14	0	0	0	0	0	0
14	2	0	0	300	111	42	1734	0
14	4	0	0	0	0	0	76	162
15	2	78	76	0	0	0	0	0
19	2	0	0	102	0	0	521	0
21	2	40	258	0	0	0	0	0
21	4	0	6	0	0	0	0	0

Tabla 4.- Derrames (Mm³) en el subsistema Culiacán-Humaya-Mocorito

6.- CONCLUSIONES.

Para la aplicación del modelo de asignación en el SHINO es conveniente considerar en otras corridas del programa, la incorporación de los acuíferos de la región, así como las dimensiones de proyecto de los canales que se pretenden construir para abatir los déficits que se presentan y tener una política de operación-distribución más real. También, se deben considerar costos por almacenamiento de agua en los vasos para disminuir los derrames del sistema; y los beneficios por satisfacer las demandas en cada distrito de riego, con esto tendríamos las preferencias reales que existan por satisfacer demandas locales y transferir el sobrante.

En relación con el modelo este puede mejorarse si en la función objetivo quitamos la linealidad y se considera una función más acorde con el comportamiento de los costos involucrados en la realidad, que puede ser convexo.

BIBLIOGRAFÍA.

- 1.- Aristidis P. Georganakakos y David H. Marks, "A new method for the real-time operation of reservoir systems", *Water Resources Research*, Vol. 23, núm. 7, pp 1376-1390, julio 1987.
- 2.- Baazara, M.S. y Jarvis, J.J., "Linear programming and network flows", John Wiley and Sons., E.U.A., 1977.
- 3.- Bryan Coulbek y Chun-Hou Orr, "Computer control of water systems: practical considerations", *Computer Decision Support Systems for Water Managers*, American Society of Civil Engineers, pp 12-25, junio 1988.
- 4.- Burton M. Courtney y Arland W. Whitlock, "Computer support TV's reservoir system operations: hardware", *Computer Decision Support Systems for Water Managers*, American Society of Civil Engineers, pp 51-56, junio 1988.
- 5.- Charles M Stover, "Development of the hydro optimization management system al Alabama Power Company", *Computer Decision Support Systems for Water Managers*, American Society of Civil Engineers, pp 57-65, junio 1988.
- 6.- Collado Moctezuma, Jaime, "Políticas de operación: Sistema Hidráulico Integrado del Noroeste", IMTA, 1992.

- 7.- Coulbeck, B. y C. H. Orr, "A network analysis and simulation program for water distributions systems", *Civil Engineering Systems*, Vol. 1, núm. 3, pp 139-144, 1984.
- 8.- Coulbeck, B. y C. H. Orr, "A computer program for energy and cost management of water supply", *Journal of Microcomputer Applications*, Academic Press, Vol. 9, pp 289-278, 1986.
- 9.- Cohen, G., "Optimization and control of dynamic research models, optimal control of water supply network", en *Tzasestas*, pp 251-276, S. G., (edit.), North Holland, 1982.
- 10.- C. H. Orr y B. Coulbeck, "A systems approach to extended GINAS applications", *Computer Applications in Water Supply: Vol. 1. Systems Analysis and Simulation*; Research studies Press, junio 1988.
- 11.- Donald W. Farley, Maurice Sydor y Gerald E. Brown, "Heuristic and network flow algorithms for multireservoir system regulation", *Computer Decision Support Systems for Water Managers*, American Society of Civil Engineers, pp 607-620, junio 1988.
- 12.- Dragan A. Savic y Slobodan P. Simonovic, "A pilot intelligent decision-support system for reservoir optimization", *Computer Decision Support Systems for Water Managers*, American Society of Civil Engineers, pp 478-489, junio 1988.
- 13.- Eduardo A. Holzapfel y Miguel A. Mariño, "Surface-irrigation nonlinear optimization models", *ASCE*, pp 379-391, 1987.

- 14.- Ford, L. R. y Fulkerson, D. R., "Flows in networks", Princeton University Press, E.U.A., 1962.
- 15.- I. Corbu, G. A. Nix y J. C. Rassam, "Utilization of the Ottawa river regulation modeling system, MORRO", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 450-462, junio 1988.
- 16.- I. Corbu, "Optimal operation of complex multiplereservoir systems", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 282-387, junio 1988.
- 17.- James Q. Coe y Arthur W. Rankin, "California's adaptable model for operatios planning for the state water project", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 119-130, junio 1988.
- 18.- Jensen, Paul A. y Wesley Barnes J., "Network flow programming", John Wiley & Sons, E.U.A., 1980.
- 19.- Jensen, P. A., y G. Bhaumik, " A flow augmentation approach to the network with gains minimun cost flow problem", Management Science, 23, 631-643 (1977).
- 20.- John E. Law y Micheal L. Brown, "Development of Large network model to evaluate the yield of a proposed reservoir", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 621-631, junio 1988.

- 21.- Kim L. Hiew, John W. Labadie y John F. Scott, "Optimal operational analysis of the Colorado-big Thompson project", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 632-647, junio 1988.
- 22.- Karen Crowter, Edward Diamond, Jean Ford y Robin Hanley, "Computerized resource planning for the Central Valley Project, California", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 97-105, junio 1988.
- 23.- Labadie, J. W., D. Bode y A. Pineda, "Network model for decision support in municipal raw water supply", Water Resources Bulletin, Vol. 22, núm. 6, pp 927-940, diciembre 1986.
- 24.- Labadie, J. W. y K. L. Hiew, "Water and power operation models for the Colorado-Big Thompson project", Report to Northern Colorado Water Conservation District, Loveland, Colorado, julio 1987.
- 25.- Labadie, J. W. y K. L. Hiew, "Optimal operation strategies for water supply and energy production: Colorado-Big Thompson project", Report to Northern Colorado Water Conservation District, Loveland, Colorado, noviembre 1987.
- 26.- Larry Cawfield y Richard Brustkern, "Optimal allocation of water for irrigation and hydropower", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 875-887, junio 1988.

- 27.- Pierre Alla y Pierre-Antoine Jarrige, "Optimal control of the west parisian area water supply network", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 813-821, 1988.
- 28.- Ramaiah Divi y Dan Ruiu, "Optimal management of multi.purpose reservoirs in hydro-thermal power system", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 413-425, junio 1988.
- 29.- R. J. Laburn, "Distribution and transportation of water: the present state of the art and a look into the future", Pergamon Journals Limited IWSA, Agua núm. 5, pp 268-272, 1986.
- 30.- Remo Loaiza G. y Arturo Jiménez Ramón, "Aplicación del modelo de asignación de agua", Ingeniería Hidráulica en México, Vol. II, núm. 3, II época, pp 38-52, septiembre/diciembre 1987.
- 31.- S.A.R.H., Comisión del Plan Nacional Hidráulico. "Metodología para el analisis de sistemas hidraulicos complejos", diciembre 1981.
- 32.- S.A.R.H., Subsecretaría de Infraestructura Hidráulica, Dirección General de Seguimiento y Control de Obras, Coordinación Regional de Infraestructura Hidráulica del Noroeste. "Resumen de los análisis hidrológicos del proyecto Sinaloa Fuerte-Mayo 1a etapa, Sin. y Son". 1988.

- 33.- S.A.R.H., Subsecretaría de Infraestructura Hidráulica, Dirección General de Seguimiento y Control de Obras, Coordinación Regional de Infraestructura Hidráulica del Noroeste. "Sistema Hidráulico Interconectado del Noroeste". 1987.
- 34.- S.A.R.H., Comisión del Plan Nacional Hidráulico. "Implantación de programas de análisis de aprovechamientos hidráulicos y aplicaciones al PLHINO". 1982.
- 35.- S.A.R.H., Comisión del Plan Nacional Hidráulico. " Programa de desarrollo del sector agua del estado de Sinaloa". 1983.
- 36.- S.A.R.H., Subsecretaría de Infraestructura Hidráulica, Dirección General de Grande Irrigación. "Proyecto Fuerte-Mayo análisis hidrológico del sistema Bacurato-Miguel Hidalgo-Josefa Ortiz de Domínguez". 1983.
- 37.- S.A.R.H., Comisión del Plan Nacional Hidráulico. "Metodología para el análisis de sistemas hidráulicos complejos". diciembre 1981.
- 38.- S.A.R.H., Comisión del Plan Nacional Hidráulico, "Políticas de operación para el manejo del agua superficial y subterránea en la cuenca del río Bravo", diciembre 1984.
- 39.- S.A.R.H., Subsecretaría de Infraestructura Hidráulica. "Sistema hidráulico interconectado del noroeste". 1982.

- 40.- Sheung K. Kim y William W-G, Yeh, "A heuristic solution procedures for expansion sequencing problems", Water Resources Research, Vol. 22, núm. 8, pp 1197-1206, agosto 1986.
- 41.- Texas Water Development Board, "Water supply allocation model", Texas, E.U.A., 1975.
- 42.- Texas Water Development Board. "Economic optimization and simulation techniques for management of regional water resource systems", Report 179, Austin, Texas. Febrero 1974
- 43.- Texas Department of Water Resources. "Multireservoir simulation and optimization model SIM-V, program documentation and user manual", Austin, Texas. Diciembre 1970.
- 44.- Texas Department of Water Resources, "AL-V: surface water resources allocation model", Report. UM-35, Texas, E.U.A. octubre 1981.
- 45.- Texas Water Development Board. "Optimal capacity expansion model for surface water resources systems", junio 1975.
- 46.- T. R. Franks, "Water management on the Rice cannal system, Pakistan", Irrigation and Drainage Systems, (edit.) Martinus Publishers, Dordrecht, pp 5-18, 1986.
- 47.- Thanos Trezos y William W-G, Yeh, "Use of stochastic dynamic programming reservoir management", Water Resources Research, Vol. 23, núm. 6, pp 983-996, junio 1987.

- 48.- Thanos Trezos y William W-G. Yeh, "Stochastic dynamic programming applied to multireservoir systems", Computer Decision Support Systems for Water Managers, American Society of Civil Engineers, pp 559-571, junio 1988.
- 49.- Warren E. Walker y Neinaard A. Veen, "Screening tactics in a water management policy analysis for the Netherlands", Water Resources Research", Vol. 23, núm. 7, pp 1145-1151, julio 1987.
- 50.- William N. Hosley, "The application of artificial intelligence software to project management", Project Management Journal, Vol. XVIII, núm. 3, pp 73-75, agosto 1987.

Paginación Variada

ANEXO A

Conceptos generales de redes

1. Conceptos básicos.

Una red puede definirse como una gráfica dirigida, denotada por $G = (N, A)$ compuesta por dos tipos de entidades: un conjunto finito $N = \{i_1, \dots, i_n\}$ cuyos elementos se denominan nodos y un conjunto $A = \{(i, j) : i, j \in N\}$ formado por pares ordenados de nodos, denominados arcos. La forma de dibujar una gráfica dirigida, es dibujar círculos pequeños que no se intersecten, para caracterizar cada nodo $i, j \in N$, y dibujar para cada arco $(i, j) \in A$, una línea o flecha dirigida del nodo i al nodo j . Note que en una gráfica dirigida podemos tener arcos (i, i) , y que el arco (i, j) , es diferente al (j, i) . En la gráfica dirigida de la figura 1 se observa que consiste de tres nodos y cinco arcos, esto es, $G = (N, A)$ donde $N = \{1, 2, 3\}$ y $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\}$

Una forma alternativa de representación de la estructura de una red se tiene mediante la matriz de incidencias nodos-arcos se define como:

$$k_{ij} \in A \quad \text{si} \quad k_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si el arco } j \text{ sale del nodo } i \\ -a_k & \text{si el arco } j \text{ llega al nodo } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde A es la matriz de incidencias nodos-arcos y a_k es la ganancia asociada al k -ésimo arco.

La matriz A tiene la característica de que en cada una de sus columnas sólo existen dos elementos diferentes de cero, es decir las columnas de A están dadas por $a_j = e_i - a_k e_j$, donde e_i, e_j son vectores unitarios en R^n , n es el número de nodos que componen la red.

En una gráfica dirigida $G = (N, A)$ se define una cadena del nodo i al nodo j como la sucesión de nodos distintos de N , denotados por $i = i_1, i_2, \dots, i_r = j$, y arcos de A , denotados por a_1, a_2, \dots, a_{r-1} tales que $a_t = (i_t, i_{t+1})$, donde $t = 1, \dots, r-1$. Si no existe ambigüedad, sólo se especifican los nodos que forma la cadena. Si en la definición de cadena se permite que cada arco sea de la forma $a_t = (i_t, i_{t+1})$ o bien $a_t = (i_{t+1}, i_t)$ donde $t = 1, \dots, r-1$ entonces la sucesión resultante se denomina trayectoria del nodo i al j .

En una gráfica dirigida $G = (N, A)$ se define un circuito como una cadena en que el nodo inicial es igual al nodo final. Asimismo, un ciclo en una trayectoria con el mismo nodo inicial y final. Una cadena aumentada, es una cadena o un circuito o la unión de ambos mediante un arco. Observe que cadenas y circuitos necesitan que todos los arcos tengan un mismo sentido. También observe que toda cadena es una trayectoria y que todo circuito es ciclo.

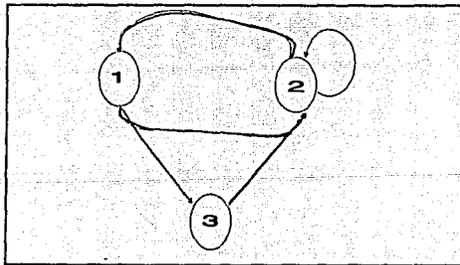


Fig. 1 Gráfica Dirigida

Ejemplo 1. En la gráfica dirigida de la fig. 1, se tiene

- a. Cadena del nodo 2 al 3; nodos 2,1,3; arcos (2,1) y (1,3)
- b. Trayectoria de 3 al 1; nodos 3,1; arco (1,3)
- c. Circuito de la 1 a 1; nodos 1,3,2,1; arcos (1,3), (3,2) y (2,1)
- d. Ciclo de 1 al: nodos 1,2,3,1; arcos (1,2), (3,2) y (1,3)

Es frecuente que al representar alguna situación real mediante un modelo de redes de flujo, se tengan que especificar restricciones sobre la capacidad del flujo para cada arco, así como el costo en que se incurre al circular flujo por un arco dado, por lo que, para cada arco en la red, se especifican la capacidad máxima y mínima así como el costo unitario para el flujo; además, se asocia a cada arco un parámetro, denominado ganancia, mediante el cual se designa el incremento o decremento lineal del flujo que circula por el arco: Sea el arco $k(i,j)$

$$(c_k, h_k, a_k)$$

i ----- j

donde la capacidad máxima c_k , el costo unitario h_k y la ganancia están definidos. Sea f_k el flujo que sale del nodo i , la cantidad de flujo que llega al nodo j mediante el arco k se da por

$$f'_k = a_k f_k$$

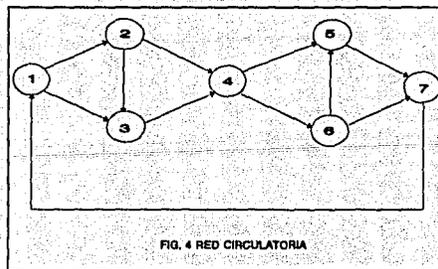
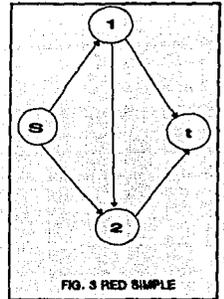
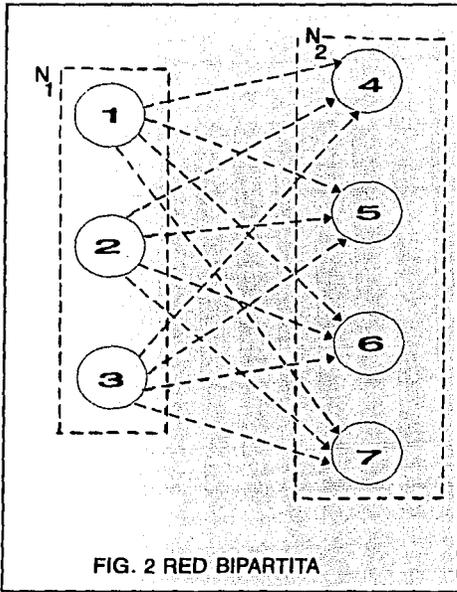
Las ganancias a_k asociadas a cada arco deben ser números positivos y no se permiten ganancias iguales a cero.

En estos modelo los flujos no necesariamente son números enteros y el flujo que entra a la red no es necesariamente igual al flujo que sale.

Se denomina flujo factible en la red al patrón de flujo que cumple con las restricciones de capacidad en cada arco y con la restricción de conservación de flujo en los nodos, esto es, el flujo que entra al nodo es igual al flujo que sale se él.

La gráfica dirigida más importante es la red. Una red es una gráfica $G=(N,A)$ en donde no existen arcos de la forma $(i,i)\in A$. Es común asociar a los elementos de una red ciertos parámetros. Específicamente, dado el nodo $i\in N$, se denota por d_i la disponibilidad en este nodo y se dice que el nodo es fuente, sumidero o traspaso, si la disponibilidad es positiva, negativa o cero, respectivamente.

Existen diferentes tipos de redes. Sólo mencionaremos las más comunes. Una red, $G=(N,A)$, es bipartita si el conjunto de nodos N puede dividirse en dos subconjuntos N_1, N_2 , tales que el si $(i,j)\in A$ entonces, $i\in N_1$ y $j\in N_2$. Una red, $G=(N,A)$, es simple si tiene un sólo nodo fuente s y un sólo nodo sumidero t , y no existen arcos de la forma (i,s) o (t,j) donde $i,j\in N$. Una red circulatoria si todos sus nodos son de traspaso.



En una red es común asociar a cada arco los parámetros correspondientes al flujo mínimo y máximo permitido, así como el costo unitario por unidad de flujo que pasa

en ese arco. Dichos parámetros para cada arco, digamos $k(i,j)$, se denotan por c_k , h_k y a_k , respectivamente. Conviene establecer que es sencillo convertir una red que tiene uno o más nodos fuente y uno o más nodos sumideros en una red circulatoria. Para ello se añade a la red original un nodo inicial s que se conecta a cada uno de los nodos fuentes. Asimismo, se conectan los diferentes nodos sumidero a un nodo final t . Finalmente, se conectan los nuevos nodos t y s , por medio de un arco para obtener la red en forma circulatoria.

La red marginal

En una red asociada con la red original $G = [N, A]$ cuyo propósito es reflejar los costos que se tienen al aumentar flujo en la red original. Sea $F = \{f_k\}$ el flujo factible actual. Entonces la red marginal, denotada $G^* = [N^*, A^*]$, es tal que $N^* = N$ y A^* es la unión de los conjuntos A^*_1 y A^*_2 definidos como:

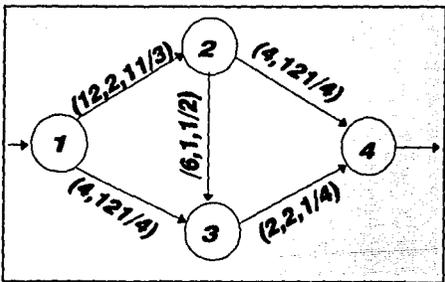
a. (Arcos hacia adelante). El conjunto A^*_1 consiste de todos los arcos de la red original, esto es, $(i,j) \in A^*_1$ si $(i,j) \in A$. Los parámetros asociados a estos arcos $c^*_{.k} = c_k - f_k$, $h^*_{.k} = h_k$ y $a^*_{.k} = a_k$.

b. (Arcos reflejados). El conjunto A^*_2 consiste de los arcos reflejados de la red original, esto es, $(j,i) \in A^*_2$ si $(i,j) \in A$. Los parámetros asociados a estos arcos son $c^*_{.k} = f_k a_k$, $h^*_{.k} = -h_k/a_k$ y $a^*_{.k} = 1/a_k$.

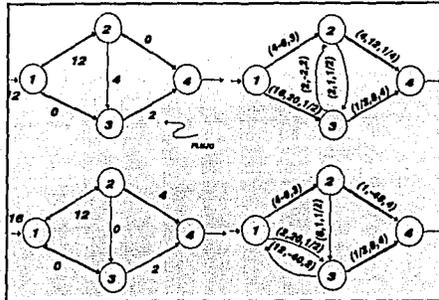
Observe que los arcos hacia adelante son los mismos que en la red marginal y que únicamente las capacidades han sido modificadas. En particular, los arcos que están saturados en la red original, esto es, están en su capacidad máxima no deben ser considerados en la red marginal pues su capacidad máxima y mínima es cero. Por razones análogas, los únicos arcos reflejados que son considerados son aquellos que corresponden a arcos originales en donde pasa un flujo positivo; pues si el flujo es cero, el arco reflejado tiene capacidad máxima y mínima cero. Los parámetros de estos arcos son sencillos de explicar.

Ejemplo. Considere la red

(c_k, h_k, a_k)



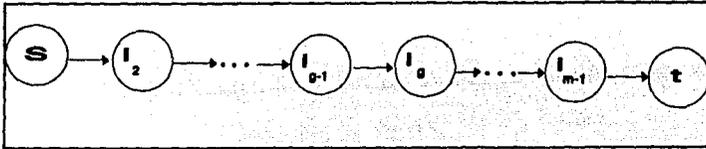
Para cada uno de los flujos factibles indicados en la red original (ver figura siguiente) se muestra la correspondientes red marginal.



Notese que el incrementar el flujo en un arco reflejado es equivalente a decrementar el flujo en el arco correspondiente de la red original. El criterio para determinar donde incrementar o decrementar el flujo puede cambiar entre las diferentes aplicaciones.

Circuitos generadores y red aumentada

El propósito de la red marginal es reflejar los costos asociados con el incremento o decremento de flujo en la red original, pues se desea determinar una "trayectoria" a costo mínimo que permita aumentar el flujo que llega al nodo sumidero. La trayectoria en la red original corresponde a una cadena aumentada en la red marginal. Equivalente, el flujo que se pretende aumentar en el nodo sumidero es proporcionado de dos maneras distintas: a) una cadena que parte del nodo fuente, donde una cantidad ilimitada de flujo es disponible y b) una cadena que parte de un circuito generador.



Cadena aumentada que parte del nodo fuente.

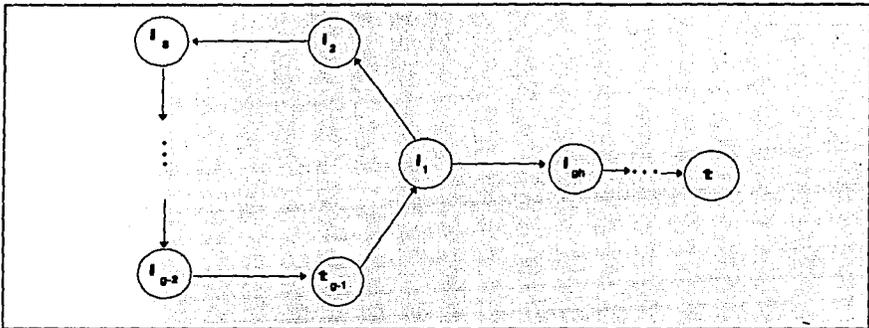


Figura 5.- Cadena aumentada que parte de un circuito generador.

Un circuito generador es un conjunto de arcos que forman un circuito y tales que el producto de las ganancias de todos los arcos (i.e., la ganancia del circuito) es mayor que uno. Específicamente, si

$$C = \{(i_1, (i_1, 1_2)), \dots, (i_{q-1}, i_1)\}$$

denota un circuito y a_1, a_2, \dots, a_{q-1} las ganancias en cada arco se cumple que $\beta > 1$ donde

$$\beta = \prod_{i=1}^{g-1} a_i$$

Conviene señalar que el flujo puede ser generado en cualquier nodo. Suponga que el flujo desea ser extraído del nodo i_1 . Si denotamos por f_k el flujo en el arco (i_k, i_{k+1}) se observa de un balance de masa en el nodo i_1 (ver figura 6) que

$$f_1 + f_g = f_{g-1} a_{g-1}$$

Sin embargo,

$$f_{g-1} = f_1 \prod_{i=1}^{g-1} a_i$$

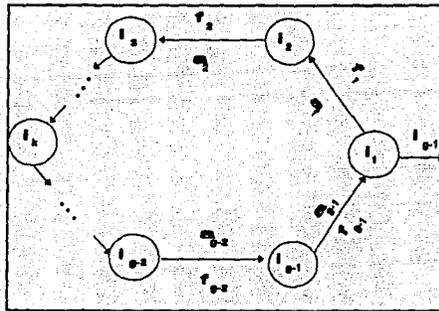


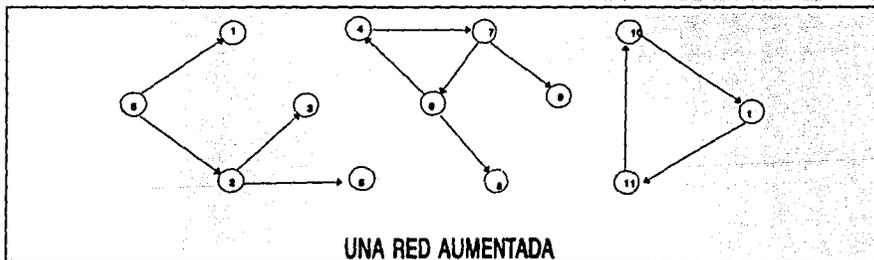
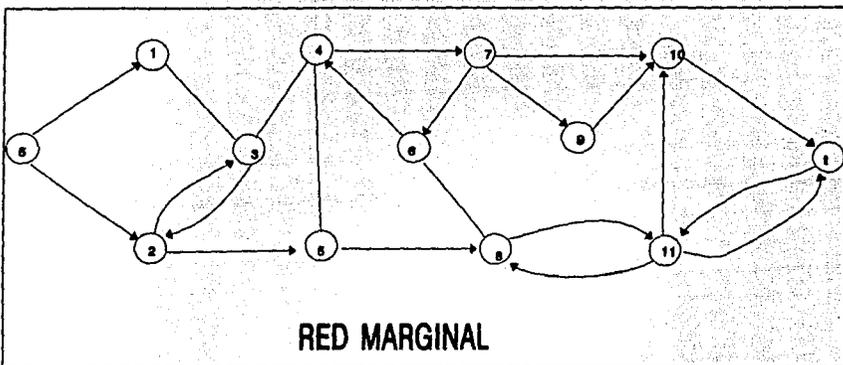
Figura 6

De donde, usando la definición de β , se implica que

$$f_1 + f_g = f_1 \beta$$

o bien, $f_g = f_1(\beta-1)$. De aquí se observa que si deseamos generar un flujo f_g en el nodo 1, lo que se debe hacer es circular un flujo $f_1 = f_g/(\beta-1)$ en el arco (i_1, i_2) .

Dada una red marginal $G^* = [N^*, A^*]$ se dice que $G^*_A = [N^*, \Gamma]$ es una red aumentada si $\Gamma \subset A^*$ y cada nodo es parte de cadena aumentada que le proporciona flujo. Equivalentemente, la sub-red G^*_A es tal que proporciona flujo a cada nodo de la red original por medio de una cadena aumentada, esto es, una cadena que parte del nodo fuente o bien una cadena que parte de un ciclo generador.



ANEXO B

Modelo de asignación de recursos

1. El modelo de asignación

Una clase importante de modelos para el análisis de sistemas de distribución de agua, planeación financiera así como generación y distribución de energía eléctrica la constituyen los modelos de redes. Un aspecto más común de tales modelos es la manipulación determinación de los "flujos" (p.ej. agua, energía o dinero) en una red de distribución de manera de minimizar costos. Equivalentemente, conocidas las demandas de flujo en uno o varios puntos de la red, se desea asignar flujos en la red de distribución que proporcionen costos mínimos. Dicha asignación deberá tomar en cuenta las respectivas disponibilidades de flujo.

El modelo de asignación que se considera está estructurado sobre un red que consiste de m nodos, denotados, $1, 2, \dots, m$, y n arcos dirigidos $1, 2, \dots, n$. En algunas ocasiones es necesario identificar el arco dirigido k con su nodo inicial i y su nodo final j y denotarlo $k = k(i, j)$ o simplemente (i, j) . Asociado a cada arco k se tiene un flujo f_k , una capacidad máxima c_k , un costo por unidad de flujo h_k y una ganancia positiva a_k . Los flujos en los arcos son las variables de decisión, mientras que los costos, capacidades y ganancias son parámetros. Por simplicidad se considera un sólo nodo fuente y un único nodo sumidero.

El problema a resolver es encontrar una asignación de flujos a los arcos tal que una cantidad dada de flujo se obtenga en el nodo sumidero a un costo total mínimo. En

suma, el flujo no deberá exceder la capacidad de los arcos y deberá conservarse en cada nodo excepto en el fuente y sumidero. El flujo en el arco k se verá afectado por el factor de ganancia a_k , esto es, si un flujos f_k parte del nodo i donde $k = k(i, j)$, entonces $f_k a_k$ es el flujo que llega al nodo j . El modelo de redes se dice con ganancia si $a_k \neq 1$ para uno o varios arcos.

El modelo de asignación queda expresado, en términos de programación lineal, como sigue:

$$\min \sum_{k=1}^n h_k f_k \quad (5)$$

sujeto a

$$\sum_{k \in B_i} a_k f_k - \sum_{k \in A_j} f_k = 0 \quad i=1, \dots, m; \quad i \neq s, t \quad (6)$$

$$\sum_{k \in B_s} a_k f_k = F_{s,t} \quad (7)$$

donde $F_{s,t}$ es una cantidad dada de flujo requerida en el nodo sumidero t ; B_i es el conjunto de los arcos cuyo nodo inicial es i . La omisión de la restricción de conservación de flujo en s implica que se dispone de una cantidad ilimitada de flujo en el nodo fuente.

Un asignación de flujo a los arcos que satisfaga (2) será llamada $F = \{f_k\}$. Una F que satisfaga (1) para algún valor de flujo obtenido en el sumidero menor que $F_{s,t}$ lo llamaremos óptimo intermedio. El flujo F que satisface (1), (2) y (3) es llamado el óptimo.

ANEXO C

Algoritmo de incremento de flujo

B. Método de solución

El propósito de la sección es describir y justificar un método de solución del problema de redes de flujo con ganancia. Específicamente se considera una red (simple) que tiene un sólo nodo fuente y un sólo nodo sumidero. Asimismo, asociado a cada arco de la red se tienen los parámetros: capacidades mínimas y máximas, costos unitarios de transporte y factor de escala. Si el arco k tiene como nodo inicial i y como nodo final j , (i.e., $k \cong (i,j)$), el factor de escala a_k es la cantidad de flujo que llega al nodo j dado que parte una unidad de flujo de nodo i y se usa el arco k . Lo que se pretende en este problema es determinar la distribución de flujos en la red que proporcione una cantidad preestablecida de flujo en el nodo sumidero, a costo mínimo.

Conviene señalar que una gran variedad de problemas reales en recursos hidráulicos, generación y distribución de energía, planeación financiera y otros pueden ser modelados como redes de flujo con ganancia. De hecho, el factor de escala permite una gran versatilidad en la modelación de "flujos" (i.e., agua, energía o dinero) que aumentan o disminuyen al pasar por un arco. El modelo de redes de flujo con ganancia es un modelo de programación lineal pero métodos más intuitivos y eficientes de solución que la programación lineal existen. Uno de ellos es el método que se describe en la siguiente hoja, que resulta de combinar y generalizar los métodos de ruta más corta y flujo máximo en redes con ganancia.

Descripción de método combinado

0. Suponga que se dispone de un flujo factible y óptimo que proporciona una cantidad conocida de flujo en el nodo sumidero. Un flujo factible y óptimo es el flujo cero en todos los arcos, si se demanda un flujo cero en el nodo sumidero.
1. (Ruta más corta) Defina la red marginal asociada al flujo factible (óptimo). Determine la red aumentada (óptima) que proporciona un incremento de flujo en el nodo sumidero e ir al paso 2; si no existe tal red, el algoritmo termina. El flujo máximo con costo mínimo ha sido determinado
- 2.- (Flujo máximo). Use la cadena aumentada que conecta al nodo sumidero para enviar la máxima cantidad de flujo.
3. (Actualizar flujo) incremente el flujo en la red original usando el flujo óptimo encontrado en la red marginal. Si el flujo demandado en el nodo sumidero ha sido satisfecho, termine: El flujo requerido a costo mínimo ha sido determinado. De otra manera, regrese al paso 1.

Cadena más corta en la red marginal

Sea $G = [N, A]$ una red de flujo con ganancia y suponga que $F = \{f_k\}$ es un flujo factible. Sea $G' = [N', A']$ la correspondiente red marginal. Se desea determinar la cadena en la red marginal que proporcione una unidad de flujo en el nodo sumidero a costo mínimo. Conviene señalar que en el caso de redes de flujo sin ganancia la cadena a costo mínimo coincide con el concepto de cadena más corta y es expresada por una colección de nodos y arcos (con la misma dirección), en donde el nodo inicial es el fuente y el nodo final es el sumidero.

En el caso de redes con ganancia, la determinación de la cadena más corta que proporciona una unidad de flujo en el nodo sumidero requiere de la generalización del concepto de cadena, pues hemos de hacer llegar flujo al nodo sumidero o a cualquier otro nodo de dos maneras:

- a. Una cadena que parte del nodo fuente.
- b. Una cadena que parte de un circuito generador.

De esta manera el problema de determinación de la ruta más corta al nodo sumidero queda expresado como la determinación de la cadena aumentada que proporciona una unidad de flujo a costo mínimo.

Algoritmo para determinar la red aumentada óptima en la red marginal.

0. Sea $\pi_s = 0$ donde s es el nodo fuente y $\pi_i = M$ (M escalar grande) para todo nodo $i \neq s$. Hacer cero todos los apuntadores hacia atrás ($P_B(i) = 0$).

1. (Cambio de potenciales) Para cada arco q de la red marginal verifique si

$$\pi_i \leq (\pi_j + h^*_q)/a^*_q \in A^*$$

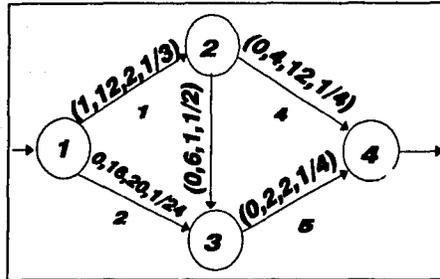
Si no se cumple hacer $\pi_i = (\pi_j + h^*_q)/a^*_q$ y modificar el apuntador hacia atrás: $P_B(i) = q$.

2. (Circuitos generadores) La red aumentada óptima se obtiene, si no hay cambio en los apuntadores hacia atrás. De otra manera, use los apuntadores hacia atrás para detectar circuitos generadores y calcular los correspondientes potenciales. Regrese al paso 2.

A continuación se verá un ejemplo de aplicación de este algoritmo.

Ejemplo. Considere la red

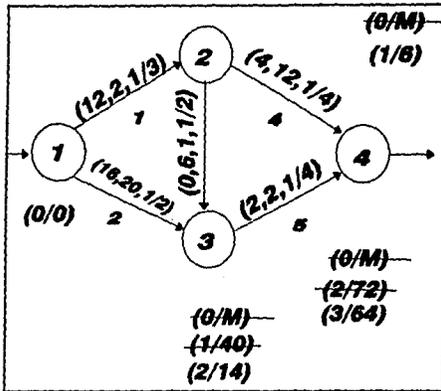
(f_k, c_k, h_k, a_k)



En la que se muestran los flujos, capacidades máximas, costo unitario y factor de escala para cada arco. Se desea determinar la cadena aumentada que proporcione una unidad de flujo en el nodo sumidero a costo mínimo.

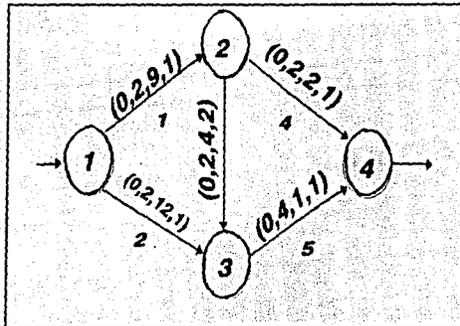
Empezaremos por señalar que los flujos en la red original son ceros, por lo que la red marginal es idéntica a la original.

La aplicación del algoritmo para determinar la cadena aumentada a costo mínimo se muestra en la figura de abajo y se observa que dicha cadena es: $C = \{1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4\}$.



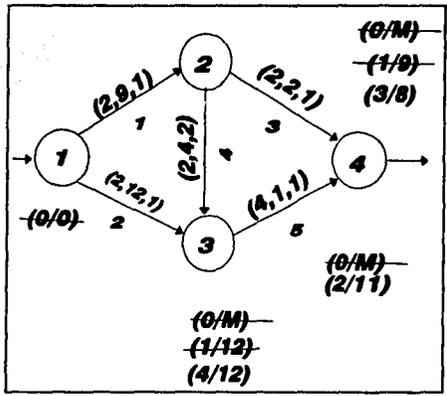
Ejemplo. Considere la red

(f_k, c_k, h_k, a_k)



en la que se muestran los flujos, capacidades máximas, costo unitario y factor de escala para cada arco. Se desea determinar la cadena aumentada que proporcione una unidad de flujo en el nodo sumidero a costo mínimo.

Empezaremos por señalar que los flujos en la red original son ceros, por lo que la red marginal es igual a la original. La aplicación del algoritmo de determinación de la cadena aumentada se muestra en la siguiente red en donde los números $(P_B(i)/\pi_i)$ denotan el apuntador hacia atrás y el valor del potencial en cada nodo, respectivamente. Observe que en la aplicación de este método se detecta un circuito formado por los nodos 2, 3 y 4. Dicho circuito es detectado e identificado por medio del apuntador hacia atrás.



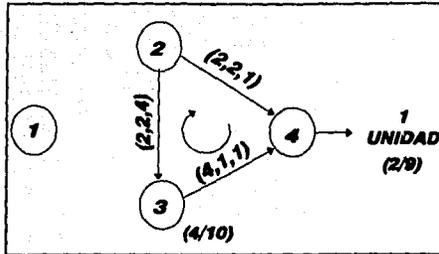
El cálculo de los potenciales en el circuito es hecho por medio de las fórmulas:

$$\pi_4 = (\beta - 1)^{-1} (h_5^* + h_4^* a_5^* + h_3^* a_5^* a_4^*)$$

$$\pi_3 = (\pi_4 + h_5^*) / a_5^*$$

$$\pi_2 = (\pi_3 + h_4^*) / a_4^*$$

de donde $\pi_4 = 9$; $\pi_3 = 10$ y $\pi_2 = 7$.



Cálculo de potenciales en la red aumentada.

Sea $G^* = [N^*, A^*]$ red marginal y suponga que $G_A = [N^*, \Gamma]$ es una red aumentada. Se desea determinar el costo de obtener una unidad de flujo en cada nodo de la red marginal usando la red aumentada. El costo de obtener una unidad de flujo en el nodo i se denomina potencial del nodo i y se denota como π_i . Observe que la red aumentada es la unión de cadenas aumentadas que cubren todos los nodos de la red marginal. Es por ello que el cálculo de los potenciales se reduce al cálculo de potenciales en cada cadena aumentada.

Existen dos casos:

- a. La cadena aumentada parte del nodo fuente
- b. La cadena aumentada parte de un circuito generador.

Si la cadena aumentada parte del nodo fuente sabemos que en dicho nodo el potencial es cero, esto es $\pi_s = 0$, pues se supone que allí existe una cantidad ilimitada de flujo. Conocido el potencial en un nodo i podemos calcular el potencial del nodo j , que está unido a i por medio del arco k en Γ , usando la relación

$$\pi_j = (\pi_i + h_k)/a_k$$

que se interpreta como sigue: $\pi_i + h_k$ es el costo de llevar una unidad de flujo que se tiene en el nodo i hasta el nodo j . Sin embargo, de la unidad de flujo que sale del nodo i solo llega a_k de flujo que sale del nodo i solo llega a_k unidades al nodo j . Es por ello que el costo de obtener una unidad de flujo en j es $(\pi_i + h_k)/a_k$.

El argumento anterior permite determinar los potenciales de todos los nodos que forman la cadena aumentada cuando ésta parte del nodo fuente, pues ahí el potencial es cero. Si la cadena aumentada parte de un circuito generador lo que se necesita es determinar el potencial en alguno de los nodos que forman el circuito pues el resto es sencillo de determinar.

Proposición 1. Considere el circuito generador.

$$C = \{(i_1, i_1, i_2), (i_2, \dots, i_{g-1}, i_g), i_g\}$$

donde $i_g = i_1$. Entonces, el potencial en el nodo i_1 es

$$\pi_{i_1} = (\beta - 1)^{-1} (h_1 + a_1 h_2 + a_1 a_2 h_3 + \dots + a_1 a_2 \dots a_{g-1} h_g)$$

donde h_k y a_k representan el costo unitario y factor de escala asociados con el arco (i_k, i_{k+1}) , $k = 1, \dots, g-1$.

Prueba. El costo de tener una unidad de flujo en el nodo i_1 y circular hasta llegar al mismo nodo es:

$$\pi_{i_1} + h_1 + a_1 h_2 + a_1 a_2 h_3 + \dots + a_1 a_2 \dots a_{p-1} h_p$$

Sin embargo, si una unidad de flujo se circulara, la cantidad de flujo que se obtiene en el nodo i_1 es β y el valor de ese flujo es $\beta \pi_{i_1}$. Igualando estas expresiones se obtiene el valor de π_{i_1} .

Una red aumentada G^*_A es óptima y tiene asociados los potenciales $\{\pi^*_i\}$ si para cualquier otra red aumentada G_A con potenciales $\{\pi_i\}$ se tiene que $\pi^*_i \leq \pi_i$ para todo nodo i de la red original.

Teorema 1. Considera la red marginal $G^* [N^*, A^*]$. La red aumentada $G^*_A = [N^*, \Gamma]$ es óptimo si y sólo si

$$\pi^*_j \leq (\pi^*_i + h_k)/a_k$$

Para todos los arcos $k(i,j)$ en A^* .

Prueba. Suponga que G^*_A es óptima y que existe un arco $k(i,j)$ en A^* tal que $\pi^*_j > (\pi^*_i + h_k)/a_k$. En este caso, podemos obtener una unidad de flujo en el nodo j usando el flujo que llega al nodo i y, al arco $k(i,j)$, a un costo $(\pi^*_i + h_k)/a_k$ menor que π^*_j . Esto implica que G^*_A no es óptima, lo que es una contradicción.

Suponga la red aumentada G_A no es óptima, y que $\pi_i \leq (\pi_i + h_k)/a_k$ para toda $k(i,j)$ en A^* . Puesto que G_A no es óptima, existe un nodo r tal que $\pi_r > \pi^*_r$. Asimismo

existe una cadena aumentada en G_A^* que llega a r que difiere de la correspondiente en G_A . Suponga que la cadena en G_A^* es $(i_1, (i_1, i_2), i_2, \dots, i_r)$ y sea i_s el primer nodo (en el orden que aparece en la cadena) tal que $\pi^*_{i_s} > \pi^*_{i_{s-1}}$. Note que $\pi^*_{i_{s-1}} = \pi^*_{i_{s-1}}$. Sin embargo, debido a las reglas de cálculo de potenciales

$$\pi^*_{i_s} = (\pi^*_{i_{s-1}} + h_q) = (\pi^*_{i_{s-1}} + h_q)/a_q < \pi^*_{i_s}$$

donde $q(i_{s-1}, i_s)$. Esta contradicción demuestra que G_A es óptima.

Un procedimiento de cálculo que permite determinar la red aumentada en una red marginal se proporciona a continuación.

Flujo máximo en la cadena aumentada

Una vez que la cadena aumentada a costo mínimo, en la red marginal, ha sido encontrada, es necesario incrementar el flujo sobre cada uno de los arcos con el propósito de aumentar el flujo que llega al nodo sumidero, tanto como sea posible. El máximo incremento de flujo que llega al nodo sumidero depende de las capacidades máximas de los arcos en la cadena aumentada. Suponga que la cadena aumentada C es dada por

$$C = \{i_1, (i_1, i_2), i_2, \dots, i_{p-1}, (i_{p-1}, i_p), i_p, \dots, i_m\}$$

Existen dos casos importantes que analizar respecto a la estructura de la cadena para determinar el incremento de flujo en el nodo sumidero.

Considere primero, el caso en el cual la cadena aumentada a costo mínimo es una cadena del nodo fuente ($i_1 = s$), al nodo sumidero ($i_m = t$) (ver figura 2). Denote por ΔF_t el incremento de flujo en el nodo sumidero y observe que para cualquier arco $k(i_k, i_{k+1})$ en la cadena, el flujo que pasa es:

$$f_k^* \prod_{i=k}^{m-1} a_i^* = \Delta F_t$$

o equivalentemente

$$f_k^* = \Delta F_t / \prod_{i=k}^{m-1} a_i^*$$

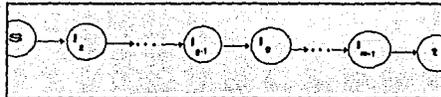


Figura 8. La cadena aumentada es una cadena

Sin embargo, dado que $f_k^* \leq c_k^*$ para todo arco en la cadena se implica que el máximo valor de ΔF_t es:

$$\Delta F_t = \min \left\{ c_k^* \prod_{i=k}^{m-1} a_i^* \mid 1 \leq k \leq m-1 \right\}$$

El segundo caso que es necesario analizar se presenta cuando la cadena aumentada está formada por un circuito y una cadena unidas por medio de un arco (figura 3),

Observe que $(\beta-1)$ es el flujo neto generado por unidad de flujo que pasamos en el arco 1. De aquí se tiene que $f_k^* = f_1^*/(\beta-1)$ y el flujo en cada arco k ($2 \leq k \leq g-1$) que forma el circuito es

$$f_k = f_1^* \prod_{j=1}^{k-1} a_j^* = (\beta-1)^{-1} f_g^* \prod_{j=1}^{k-1} a_j^*$$

o equivalentemente

$$f_k = \frac{(\beta/(\beta-1)) \Delta F_t}{\prod_{i=k}^{m-1} a_i^*}$$

Combinando esta expresión con la relativa a los arcos que están en la cadena ($g \leq k \leq m-1$) se implica que el máximo incremento de flujo en el nodo sumidero es $\Delta F_1 = \min \{ \Delta F_1, \Delta F_2 \}$ donde

$$\Delta F_1 = \min \{ (\beta-1) / \beta C_k^* \prod_{i=k}^{m-1} a_i^* \mid 1 \leq k \leq g-1 \}$$

$$\Delta F_2 = \min \{ C_k^* \prod_{i=k}^{m-1} a_i^* \mid g \leq k \leq m-1 \}$$

esto es, los incrementos máximos por circuito y cadena, respectivamente.

Existen puntos importantes a considerar en relación al algoritmo anterior. Sea $G = [N, A]$ una red de flujo con ganancias y suponga que $F = \{f_k\}$ es un flujo factible. Sea $G^* = [N^*, A^*]$ la correspondiente red marginal y suponga que $F^* = \{f_k^*, f_{\cdot k}^*\}$ es un flujo factible en esta red. Por conveniencia, los flujos en esta última red se denotan por el par ordenado $(f_k^*, f_{\cdot k}^*)$ pues son los flujos asociados con cada arco original y su correspondiente arco reflejado; el cual es un simple artificio para considerar diversas operaciones sobre el arco original. El primer aspecto importante que conviene mencionar es que el flujo factible F en la red original más el correspondiente flujo F^* en la red marginal, proporcionan un flujo factible F' en la red original. Específicamente, en la red original, defina el flujo $F' = \{f'_k\}$ donde el flujo f'_k es dado por

$$f'_k = f_k + f_k^* - f_{\cdot k}^*/a_k$$

que puede interpretarse diciendo que f'_k es la suma del flujo factible original f_k más la suma de los flujos en la red marginal, pues f_k^* es el flujo en el arco k de la red marginal y $f_{\cdot k}^*/a_k$ es el flujo en el correspondiente arco reflejado. Note que el factor de escala a_k asociado al arco k es necesario para contabilizar el flujo neto en la red marginal.

Con el propósito de establecer que $F' = \{f'_k\}$ es factible, note que

$$f'_k = f_k + f_k^* - f_{\cdot k}^*/a_k$$

implica $f'_k \leq f_k + f_k^*$ pues $f_{\cdot k}^*/a_k \geq 0$. Asimismo, usando el hecho que $f_k^* \leq c_k - f_k$ se tiene que $f'_k \leq c_k$. De manera semejante observe que $f'_k \geq f_k - f_{\cdot k}^*/a_k$ pues

$f_k^* \geq 0$. Sin embargo $f_k^* \leq f_k a_k$ que implica $f_k^* \geq 0$ y se concluye que F^* es un flujo factible en la red original.

Conviene señalar que si $K(F)$ es el costo en la red $G = [N, A]$ asociado con el flujo factible F , esto es,

$$K(F) = \sum_{k=1}^n h_k f_k$$

(suponiendo que A tiene n arcos) y si $K^*(F^*)$ es el costo asociado con el flujo factible $F^* = \{(f_k^*, f_{-k}^*)\}$ en la red marginal, esto es:

$$K^*(F^*) = \sum_{k=1}^n h_k^+ f_k^* + \sum_{k=1}^n h_k^- f_{-k}^*$$

donde $h_k^+ = h_k$ y $h_k^- = -h_k/a_k$, entonces el costo en la red original asociado con el flujo F^* , denotado $K(F^*)$ es igual a $K(F) + K^*(F^*)$. Una prueba de esta aseveración es como sigue:

$$\begin{aligned} K(F^*) &= \sum_{k=1}^n h_k \left(f_k + f_{-k}^* - \frac{f_{-k}^*}{a_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n h_k f_k + \sum_{k=1}^n h_k f_{-k}^* + \sum_{k=1}^n \frac{-h_k}{a_k} f_{-k}^* \\ &= K(F) + K^*(F^*) \end{aligned}$$

En otras palabras, dado un flujo factible en la red con ganancias $G = [N, A]$ y un

flujo factible en la correspondiente red marginal, la suma de estos flujos es un flujo factible en la red original cuyo costo es la suma de los costos de esos flujos en sus respectivas redes.

El siguiente resultado demuestra que si F y F^* son óptimos, lo mismo es cierto del flujo suma F' .

Teorema 1. Sea $F = \{f_k\}$ el flujo a costo mínimo en la red $G = [N, A]$ que proporciona una cantidad X de flujo en el nodo sumidero. Sea $G^* = [N^*, A^*]$ la red marginal definida para este flujo y $f^* = \{f^*_k\}$ el flujo a costo mínimo determinado en esta red que proporciona Y unidades de flujo en el nodo sumidero. Entonces el flujo $F' = \{f'_k\}$ definido por

$$f'_k = f_k + f^*_k - f^*_k/a_k$$

para todo arco k en la red original, es el flujo a costo mínimo que proporciona una cantidad de flujo $X + Y$ en el nodo sumidero.

Prueba. Sean $K(F)$ y $K^*(F^*)$ los costos de los flujos F y F^* en la red original y marginal, respectivamente. El costo del flujo F' en la red original es $K(F') = K(F) + K^*(F^*)$. Suponga F' es un flujo (arbitrario) en la red original que proporciona $X + Y$ unidades de flujo en el nodo sumidero. Defina el flujo $F^{**} = \{f^{**}_k, f^{**}_k\}$ como sigue:

- i. Si $f'_k > f_k$ entonces $f''_k = f'_k - f_k$ y $f''_{-k} = 0$
- ii. Si $f'_k < f_k$ entonces $f''_k = 0$ y $f''_{-k} = (f_k - f'_k) a_k$
- iii. Si $f'_k = f_k$ entonces $f''_k = f''_{-k} = 0$

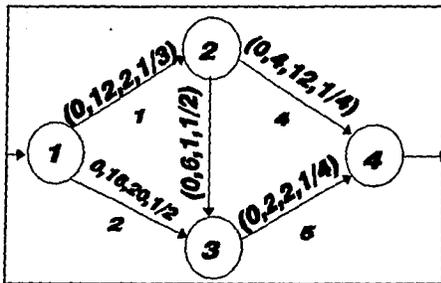
Es sencillo verificar que F'' es factible en la red marginal. Asimismo se tiene que F' es la suma del flujo F' en la red original más el flujo F'' en la red marginal. Por lo tanto $K(F') = K(F) + K(F'')$. Sin embargo $K'(F') \leq K'(F'')$ debido a la optimalidad de F' en la red marginal. Sumando $K(F)$ a ambos miembros se tiene que F' es óptimo.

El algoritmo de incremento de flujo para obtener una cantidad dada de flujo en el nodo sumidero en redes con ganancia se muestra en el siguiente ejemplo:

C. Ejemplo numérico

1. Considere la red

(f_k, c_k, h_k, a_k)

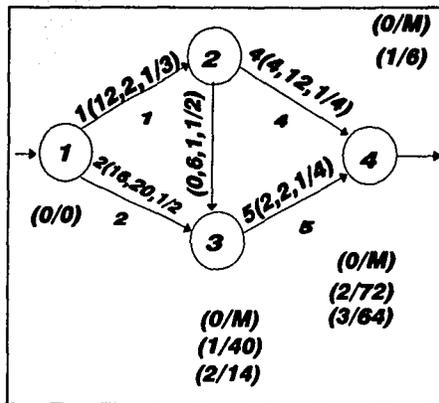


Con parámetros asociados a los arcos como se muestra. Determine la distribución de flujo a costo mínimo para obtener 3/2 unidades de flujo en el nodo 4, usando el algoritmo combinado de trayectoria más corta y flujo máximo.

Empezaremos por observar que si el flujo demandado en el nodo 4 es cero, entonces el flujo cero en cada arco es óptimo. Usando este flujo óptimo como solución de partida podemos aplicar a continuación el algoritmo combinado.

Iteración 1. Si los flujos iniciales son cero, entonces la red marginal coincide con la red original y la aplicación del método de trayectoria más corta es

$$k(c_k^*, h_k^*, a_k^*) \quad (P_B(i), \pi_i)$$



la cadena aumentada a costo mínimo del nodo 1 a 4 es

$$C = \{1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4\}$$

El costo unitario mínimo del flujo en el nodo sumidero es 64. El máximo flujo posible obtenido en el nodo sumidero es determinado por

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= \min \{c_1^* a_1^* a_3^* a_5^*, c_3^* a_3^* a_5^*, c_5^* a_5^*\} \\ &= \min \{1/2, 3/4, 1/2\} = 1/2 \end{aligned}$$

Con este flujo se calcula el flujo sobre cada uno de los arcos de C como sigue:

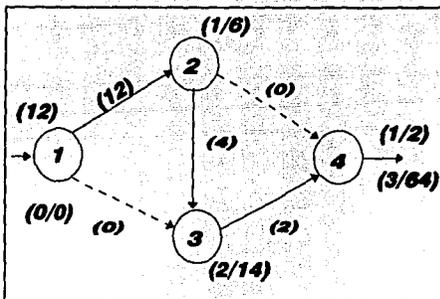
$$f_1^* = \Delta F_i / a_{13} a_{35}^* = 12 = c_1^*$$

$$f_3^* = \Delta F_i / a_{35}^* = 4$$

$$f_5^* = \Delta F_i / a_5^* = 2 = c_5^*$$

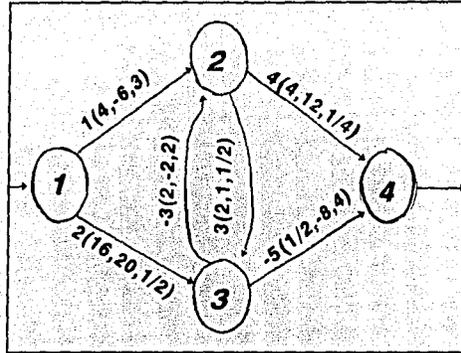
En consecuencia los arcos 1(1,2) y 5(3,4) son arcos saturados y los flujos en la red original son:

(F_k)



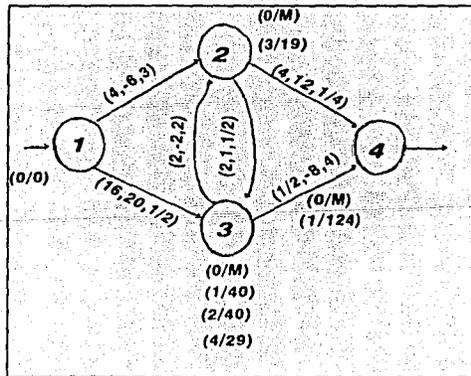
Iteración 2. Conocidos los flujos actuales en la red original se tiene que los parámetros asociados a los arcos en la red marginal están dados por

$p(c_p, h_p, a_p), p \in \{K, -K\}$



La cadena aumentada a costo mínimo es como sigue:

$(c_p, h_p, a_p) p \in \{K, -K\}$



Mediante el apuntador hacia atrás se detecta un ciclo que contiene el nodo sumidero después de que el nodo 3 ha sido etiquetado con (4/29) usando el arco -

5(4,3). El ciclo corresponde a la secuencia

$$C = \{4, (4,3), 3, (3,2), 2, (2,4), 4\}$$

Note que el factor de escala del circuito es $\beta = 2$ y que

$$\pi_4 = (\beta - 1)^{-1} (c_{.5}^{\cdot} a_{.3}^{\cdot} a_{.5}^{\cdot} + c_{.3}^{\cdot} a_{.5}^{\cdot} a_{.3}^{\cdot} + c_{.4}^{\cdot} a_{.5}^{\cdot} a_{.3}^{\cdot}) = 80$$

El costo unitario mínimo del flujo en el nodo sumidero es 80. El máximo flujo en el nodo sumidero es

$$\Delta F_1 = (\beta - 1) / \min \{c_{.5}^{\cdot} a_{.5}^{\cdot} a_{.3}^{\cdot} a_{.4}^{\cdot}, c_{.3}^{\cdot} a_{.3}^{\cdot} a_{.4}^{\cdot}, c_{.4}^{\cdot} a_{.4}^{\cdot}\} = \frac{1}{2}$$

El flujo sobre cada uno de los arcos es calculado por las fórmulas

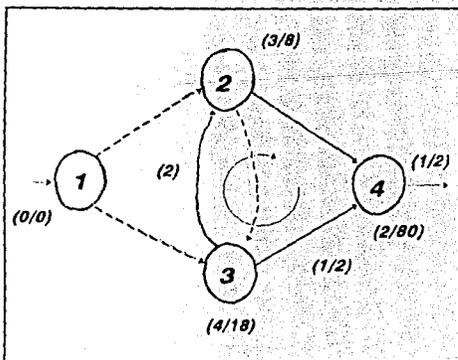
$$f_{.5}^{\cdot} = \beta \Delta F_1 / [a_{.5}^{\cdot} a_{.3}^{\cdot} a_{.4}^{\cdot} (\beta - 1)] = \frac{1}{2}$$

$$f_{.3}^{\cdot} = \beta \Delta F_1 / [a_{.3}^{\cdot} a_{.4}^{\cdot} (\beta - 1)] = 2$$

$$f_{.4}^{\cdot} = \beta \Delta F_1 / [a_{.4}^{\cdot} (\beta - 1)] = 4$$

y la red que muestra los flujos en los arcos es

(f_k^*)



Note que los arcos $-5(4,3)$, $-3(3,2)$ y $4(2,4)$ son arcos saturados en la red marginal.

Los cambios de flujo en la red marginal son calculados mediante las ecuaciones.

$$\Delta f_5 = f'_5 - f^*_5/a^*_5 = -2$$

$$\Delta f_3 = f'_3 - f^*_3/a^*_3 = -4$$

$$\Delta f_4 = f'_4 - f^*_4/a^*_4 = 4$$

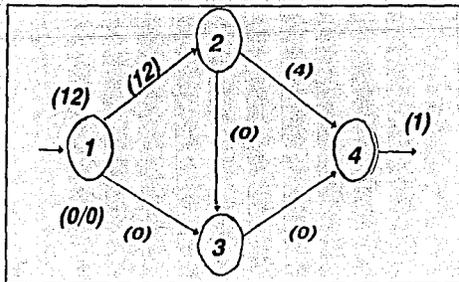
Asimismo, el flujo aumentado $\{f'_k\}$ sobre la red original es ajustado a través de las ecuaciones

$$f_5 = f_5 + \Delta f_5 = 2 - 2 = 0$$

$$f_3 = f_3 + \Delta f_3 = 4 - 4 = 0$$

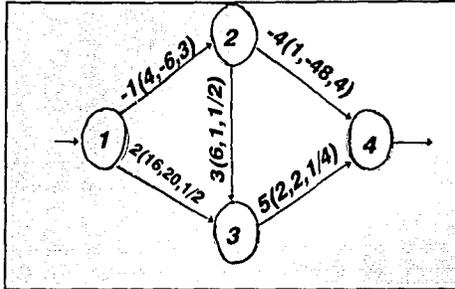
$$f_4 = f_4 + \Delta f_4 = 0 + 4 = 4$$

y los flujos sobre la red original son:



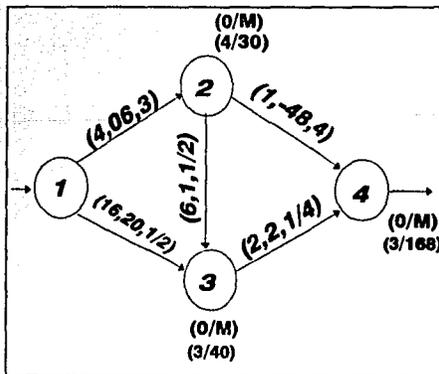
Iteración 3. La nueva red marginal es ahora dada por

$$p(c_p^*, h_p^*, a_p^*), p \in \{k, -k\}$$



La determinación de la trayectoria más corta es:

$$p(c_p^*, h_p^*, a_p^*), p \in \{k, -k\}$$



La cadena aumentada a costo mínimo sobre la red original es:

$$C = \{1, (1,3), 3, (3,4), 4\}$$

El costo unitario mínimo del flujo en el nodo sumidero es 168. El máximo flujo posible en el nodo sumidero se determina por:

$$\Delta F_t = \min \{ c'_2 a'_2 a'_5, c'_5 a'_5 \}$$

a partir del flujo ΔF_t se calcula el flujo sobre cada uno de los arcos en c mediante

$$\Delta f_2 = \Delta F_t / a'_2 a'_5 = 4$$

$$\Delta f_5 = \Delta F_t / a'_5 = 2 = c'_5$$

en consecuencia el arco $5(3,4)$ es un arco saturado en la red marginal.

Los cambios de flujo en la red marginal son calculados a través de las ecuaciones

$$\Delta f_2 = f'_2 - f''_2 / a'_2 = 4$$

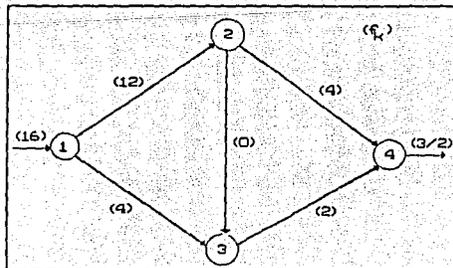
$$\Delta f_5 = f'_5 - f''_5 / a'_5 = 2$$

luego el flujo aumentado $\{f'_k\}$ sobre la red original es ajustado con

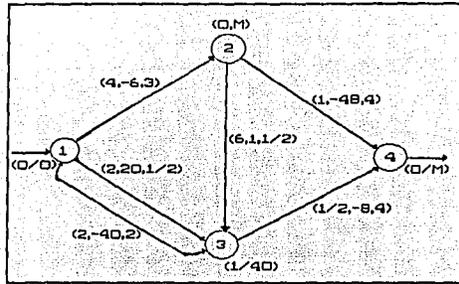
$$f'_2 = f_2 + \Delta f_2 = 4$$

$$f'_5 = f_5 + \Delta f_5 = 2$$

y los flujos sobre la red original son:



Iteración 4.- La red marginal definida por los flujos actuales de la red original es



Notese que ninguna cadena aumentada a costo mínimo del nodo fuente al nodo sumidero puede ser encontrada. Esto se debe a que los arcos $4(2,4)$ y $5(3,4)$ en la red original son arcos saturados y el flujo máximo en el nodo sumidero en la red original es $3/2$ con costo mínimo.